



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"Impacto Simétrico de un Anillo de Vorticidad
con una Pared"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

P R E S E N T A :

ALVARO FRANCISCO VÁZQUEZ DE GYVES



TUTOR: DR. GERARDO RUIZ CHAVARRÍA

2007



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

FACULTAD DE CIENCIAS



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

División de Estudios Profesionales

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

"Impacto Simétrico de un Anillo de Vorticidad con una Pared"

realizado por Vázquez de Gyves Alvaro Francisco

con número de cuenta 09335826-2, quien cubrió los créditos de la licenciatura en Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Tutor (a)
Propietario Dr. Gerardo Ruiz Chavarría

Propietario Dr. Julio Javier Martinell Benito

Propietario Dr. Luis Antonio Dávalos Orozco

Suplente Dra. Lucia Medina Gómez

Suplente Dra. María Adela Monreal Gómez

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D.F., a 30 de agosto del 2006.
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE FÍSICA

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

M. en C. Alicia Zarzosa Pérez

*A mis padres Álvaro y Enedina,
a mi hermano Jorge Antonio,
a mi novia Carla Angélica.*

*A mi abuelo Francisco de Gyvès Reyna
mi papá grande, mi amigo, mi cómplice.*

*A mis abuelas
Eva Zárate y Natividad Velásquez,*

A mi tío Francisco de Gyvès Zárate,

A la familia Guerra de Gyvès,

A la familia Palomec Zárate

Agradezco:

Al Dr. Gerardo Ruiz Chavarría por la confianza tan grande que ha tenido en mí. De quien he aprendido a meter las manos, y a disfrutar de diseñar, construir, llevar a cabo experimentos y analizar datos. Quien me ha mostrado que la física da satisfacciones, pero que se requiere mucho esfuerzo.

A los doctores, Luis Antonio Dávalos, Julio Martinell, Lucía Medina y Adela Monreal, por su valiosísima ayuda para el mejoramiento y la corrección de este trabajo.

Al Dr. José Ismael Espinosa Espinosa, por brindarme su confianza y un espacio en el departamento de física.

Al M. en C. Jordi Iñaki Austrich Senosiaín, por permitirme continuar en el cubículo después de la jubilación del Dr. Espinosa.

A mis amigos Carlos Alvarez, José Manuel Guadarrama, Andrés Díaz y Paola Ramos con quienes gocé y sufrí estudiando física.

A la UNAM, mi casa, por darme alegrías y tristezas, por darme lecciones tanto académicas como humanas, por darme amigos y darme el orgullo de ser universitario.

“¿Qué bien tangible saldrá de esto? Pero deben saber que en un arte tan grande y tan variado como este de los Experimentos, hay muchos grados de utilidad: algunos pueden dejar un beneficio verdadero y llano, sin gran deleite; algunos para enseñar sin aparente provecho; algunos para iluminarnos hoy, y utilizarlos después; algunos tan sólo para ornamento y curiosidad.”

P.B. Medawar.

Contenido

Resumen

Capitulo 1: Dinámica de Fluidos	1
1.1 Hipótesis del Continuo	1
1.2 Descripciones Euleriana y Lagrangiana	2
1.3 El Teorema de Transporte de Reynolds	3
1.4 Conservación de la Masa	8
1.5 Conservación del Momentum	10
1.6 Ecuaciones Constitutivas y Coeficientes de Viscosidad	16
1.7 Ecuaciones de Navier-Stokes	18
1.8 Circulación y Vorticidad	19
Capitulo 2: Vorticidad	21
2.1 El Vector Vorticidad	22
2.2 Línea de Vorticidad, Tubo de Vorticidad, Vórtice Filamentario	22
2.3 Las Leyes de Helmholtz	24
2.4 La Ley de Biot-Savart	24
2.5 El Teorema de Kelvin	26
2.6 El Movimiento de los Vórtices	28
2.7 Impulso	28
2.8 El Campo de Velocidades	29
Capitulo 3: Vórtices anulares	31
3.1 Formulación de los Vórtices Anulares	31
3.2 Vórtices Anulares	37
3.3 Energía e Impulso para un Sistema de Vórtices	38
3.4 Vórtice Anular Aislado	40
3.5 Influencia de la Viscosidad	43
3.6 Impacto con una Pared	44
Capitulo 4: Desarrollo Experimental	46
4.1 La Generación de los Anillos	48
4.2 La Sonda del Anemómetro de Hilo Caliente	49
4.3 La Calibración	51
4.4 La Captura de Datos	53

Capitulo 5: Resultados y Discusión	59
Capitulo 6: Conclusiones y Trabajo a Futuro	84
Bibliografía	87

Resumen

La vorticidad es una cantidad que aparece con frecuencia en la dinámica de fluidos. Su generación o destrucción se debe a factores como la existencia de fuerzas no conservativas o la presencia de objetos sólidos en la vecindad del flujo. Puede ser apreciada a escalas diferentes: los remolinos del lavabo, los torbellinos, los huracanes; la calle de vórtices de von Kármán que puede ser vista dentro de un túnel de viento en un laboratorio o puede ser tan grande como las dos Baja Californias juntas y ser observada por medio de imágenes satelitales.

En este trabajo se presenta un experimento sobre la conservación de la simetría de vórtices anulares en aire al impactar con una pared en posición ortogonal a la dirección de su desplazamiento. Para ello se utiliza una caja de acrílico, dentro de la cuál se colocan los dispositivos para la producción de los vórtices y la medición de su campo de velocidades. De este modo se puede aislar la masa de aire del sistema del resto del laboratorio. Los anillos son generados por medio de la eyección de aire, a través de un orificio circular de 0.015 m de diámetro, desde una cavidad cilíndrica donde la membrana de una bocina está haciendo el papel de pistón. El movimiento de la membrana es producido por un pulso eléctrico que se asemeja a un pulso cuadrado. La velocidad de los vórtices libres, aquellos que no tienen obstáculos en su trayectoria, al ser eyectados desde la cavidad cilíndrica es de 0.9 m/s. Se coloca una pared perpendicular al vector velocidad de desplazamiento de los anillos a una distancia, de la bocina generadora, en la que ésta puede considerarse constante. Con esto se asegura que las características de los anillos no se modifiquen sino hasta estar cercanos a la pared. Es hasta entonces que los anillos frenan, crecen en diámetro y terminan por destruirse.

El método de medición es la anemometría de hilo caliente. El proceso para medir con este método es el siguiente:

Se calienta el alambre de una sonda, de tungsteno chapado en platino, entre 200°C y 300°C por medio de una corriente eléctrica. Al estar la sonda dentro de un flujo se enfría. Para mantener una temperatura constante es necesario agregar una corriente suplementaria. Las fluctuaciones en el paso de corriente por la sonda se traducen en diferencias de potencial en el anemómetro. Estas diferencias de potencial pueden ser traducidas a su vez en velocidades.

La tesis comienza por dar una visión general de la mecánica de fluidos, seguida de una visión general de lo que es la vorticidad para después dedicarse a lo que son los vórtices anulares en particular. Una vez que se ha visto la teoría, se presenta el desarrollo experimental donde se describe la manera de aislar la masa de aire en la que fueron producidos los anillos, la manera de producirlos y el método de medición. Se presentan, entonces, los resultados por medio de gráficas y se dan las conclusiones junto con el trabajo a futuro.

Los tres primeros capítulos fueron hechos para dar un repaso teórico a la mecánica de fluidos y comenzar a aprender el tema de la vorticidad que es una materia bastante

complicada. Para esclarecer puntos que no quedaron lo suficientemente explicados se pueden consultar los libros citados en la bibliografía; en la tesis no se llega a ninguna relación matemática nueva. El trabajo de tesis propiamente dicho comienza en el capítulo 4 con el desarrollo experimental y la descripción de los dispositivos utilizados.

Capítulo 1

Dinámica de Fluidos

La propiedad fundamental de un fluido es que no puede permanecer en equilibrio en un estado de esfuerzos en el que la acción mutua entre dos partes adyacentes es oblicua a la cara común [1]. Cualquier esfuerzo cortante aplicado a un fluido, no importa cuán pequeño sea, provocará el movimiento de éste, el cuál se mueve y se deforma continuamente mientras se siga aplicando el esfuerzo cortante [2]. En la figura 1 se observa un fluido, inicialmente en reposo, entre dos placas paralelas. Al desplazarse la placa superior ejerce sobre el fluido un esfuerzo cortante que produce movimiento en éste. La deformación ocurre porque el desplazamiento del fluido que se encuentra cerca de la placa inferior es menor que el del fluido que se encuentra cerca de la placa superior.

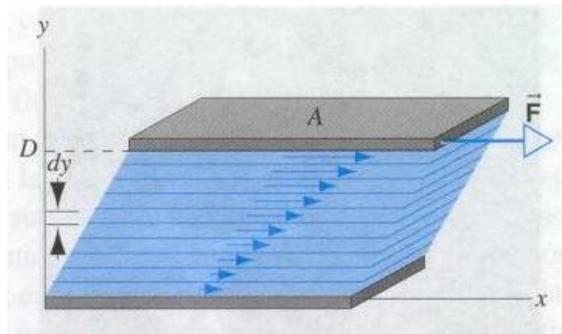


Figura 1. Un fluido entre dos placas. Al desplazarse la placa de arriba A, el fluido se deforma debido al esfuerzo cortante, que no es más que una fuerza aplicada en dirección paralela a la cara de la placa. [23]

1.1 Hipótesis del Continuo

Para cualquier tipo de cuerpo, en particular para los fluidos, la mayor parte de la masa se encuentra en los núcleos de los átomos que componen sus moléculas y dista mucho de estar distribuida uniformemente en el volumen ocupado por él. Otras propiedades del fluido, como la composición o la velocidad, tienen una distribución marcadamente no uniforme cuando el fluido es visto a una escala lo suficientemente pequeña como para observar las moléculas individuales. [4]

Una de las hipótesis básicas de la mecánica de fluidos es la suposición de que la materia contenida en cierta región del espacio llena totalmente el volumen donde está confinada; es decir, no existen huecos. La estructura molecular de la materia es ignorada y se le sustituye por un continuo. De acuerdo con esta concepción, se considera que la cantidad de partículas dentro de un volumen arbitrario es infinita. [28].

La hipótesis del continuo conduce a predicciones cuantitativas que concuerdan con las observaciones experimentales cuando las distancias características de los fenómenos estudiados son mucho mayores que el camino libre medio de una molécula. Existe un parámetro adimensional K , conocido como *Número de Knudsen*, que se define así: $K = \frac{l}{L}$, siendo l el camino libre medio y L una longitud representativa del flujo. Cuando $K \ll 1$, el fluido puede ser estudiado como un continuo. [3]

La hipótesis del continuo implica que es posible asociar un significado claro a la noción de valor 'en un punto' de varias de las propiedades de un fluido tales como la densidad, la velocidad y la temperatura, y que en general, los valores de estas propiedades son funciones continuas tanto de la posición, en el fluido, como del tiempo. La hipótesis ofrece el concepto simple de velocidad local de un fluido, por lo que es necesario considerar cómo todo el campo de flujo puede ser especificado como el conjunto de dichas velocidades locales. [4]

1.2 Descripciones euleriana y lagrangiana

La *descripción euleriana* es como la descripción de un campo electromagnético en el que las variables de flujo están definidas como funciones de la posición en el espacio (\vec{x}) y del tiempo (t). La variable principal del flujo es el vector velocidad del fluido, que se escribe: $\vec{u} = (\vec{x}, t)$. Esta descripción puede ser interpretada como tomar una imagen de una distribución espacial de la velocidad del fluido (o cualquier otra variable tal como la densidad o la presión) en cada instante durante el movimiento. De esta descripción se obtiene información del fluido en términos de lo que ocurre en puntos fijos en el espacio, en realidad elementos de volumen, cuando el fluido se desplaza pasando por esos elementos de volumen [6]. Nótese que no se toman elementos de masa. Las propiedades del fluido a estudiar adquieren el carácter de campos; las coordenadas espaciales y el tiempo son puestos al mismo nivel: son las variables independientes. Ésta es la descripción preferida para el estudio de la mecánica de fluidos. En la figura 1.2.1 a) un ejemplo que no es de la dinámica de fluidos, a saber, una carrera de automóviles en la que un observador fijo ve pasar los autos en una zona o en un punto en la pista de carreras. Este observador puede dar una descripción euleriana del flujo de automóviles.

La *descripción lagrangiana* hace uso del hecho que, como en mecánica de partículas, algunas de las variables dinámicas o físicas se refieren no solo a ciertas posiciones en el espacio sino también, y fundamentalmente, a porciones identificables de materia. Para obtener valores de las variables, en esta descripción, se siguen elementos de masa* individuales del fluido conforme se mueven y se determina cómo cambian las propiedades del fluido asociadas a estos elementos de masa como una función del tiempo. Las variables de flujo son definidas como funciones del tiempo y de la elección de un elemento de masa del fluido, y describen la historia de la dinámica del elemento de fluido elegido [6]. En la figura 1.2.1 b) la descripción lagrangiana sería hecha por un observador

* Elementos de masa desde el punto de vista macroscópico, pero con un número de moléculas tan grande que pueda ser ignorado el carácter discreto de la materia.

dentro de un automóvil que se desplaza en un flujo de autos y describe las “propiedades” de dicho flujo desde su localización en él.

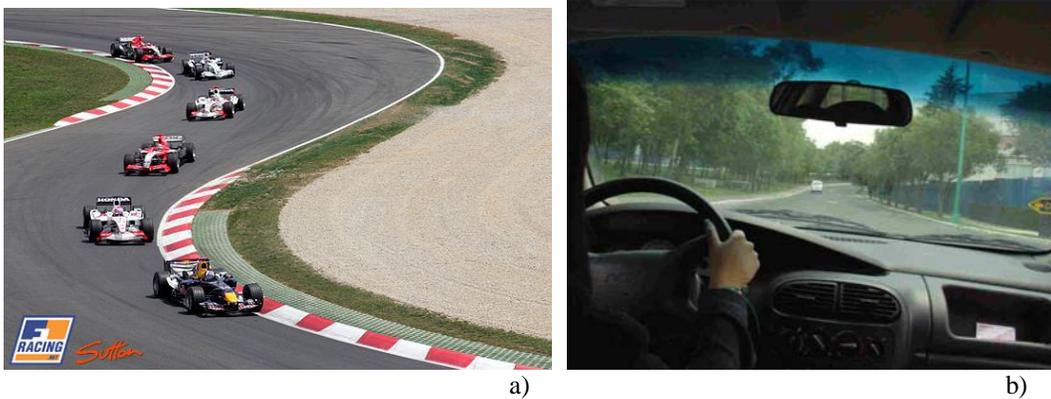


Figura 1.2.1. a) Una fotografía de un espectador fijo, desde su asiento ve pasar un “flujo” automóviles. Esto corresponde a la descripción euleriana. b) Dentro del automóvil, el conductor puede dar una descripción lagrangiana, es decir, sigue al objeto mientras se desplaza.

1.3 El teorema de Transporte de Reynolds

Antes mencionar el teorema de Transporte de Reynolds, se hablará de la herramienta que se utiliza en él. Ya se observó que hay dos maneras de describir el comportamiento de un flujo, la descripción euleriana en la que al poner la atención en puntos fijos del espacio se pierde la posibilidad de seguir elementos de masa y medir el cambio de sus propiedades, y la descripción lagrangiana en la que es posible hacer esto último. Cuando se necesita saber la razón de cambio temporal de una propiedad cualquiera, escalar o vectorial, de un elemento de masa en la descripción euleriana se utiliza la derivada material o de Lagrange[†].

Sea Λ una variable extensiva cualquiera, en la descripción lagrangiana y sea $\Lambda(t) = \int_{V(t)} \alpha dV$ la relación que hay entre dicha variable extensiva y la variable intensiva α en la descripción euleriana. Interesa conocer la rapidez de cambio en el tiempo de Λ

[†] La derivada material $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)$ permite estudiar el cambio temporal de una propiedad descrita en el sistema lagrangiano, del lado izquierdo de la igualdad, y el cambio temporal de la misma propiedad descrita en el sistema euleriano, del lado derecho de la igualdad. El primer término del lado derecho de la igualdad representa *la razón de cambio local*, de la propiedad estudiada, debida a variaciones temporales en una posición fija. El segundo término del lado derecho de la igualdad representa *el cambio por convección* de la propiedad estudiada, se hace cero a menos que haya gradientes en la propiedad; es decir, que la propiedad tenga un valor diferente en la vecindad del elemento de masa que se está estudiando. Ese valor diferente es arrastrado hacia el elemento de masa por la velocidad del flujo \vec{u} .

mientras se sigue el sistema, esto es, $\frac{D}{Dt} \Lambda(t)$, y se desea expresar esto en términos que atañen a un volumen de control.

Las leyes de la mecánica y de la termodinámica están referidas usualmente a un elemento de masa. Sin embargo, la descripción euleriana requiere de la aplicación de estas leyes a un elemento de volumen. El paso de una a otra se hace por medio de un resultado conocido como el *Teorema de Transporte de Reynolds*.

Si se fija la atención en una *masa de fluido* en movimiento que desde ahora será llamada *sistema*, tanto el volumen que ocupa como su frontera sufrirán modificaciones en el transcurso del tiempo. Luego la integral de la propiedad intensiva α se hará sobre una región de integración que es función del tiempo. La figura 1.3.1 a) muestra *un volumen de control*, delimitado por líneas punteadas, que encierra un sistema, las flechas indican la dirección del flujo. La superficie que encierra dicho volumen recibe el nombre de *superficie de control*. En las figuras 1.3.1 b) y 1.3.1 c) se observa cómo sale el sistema del volumen de control, el flujo continúa en la misma dirección, pero se omitió dibujarlo para no cargar la figura.

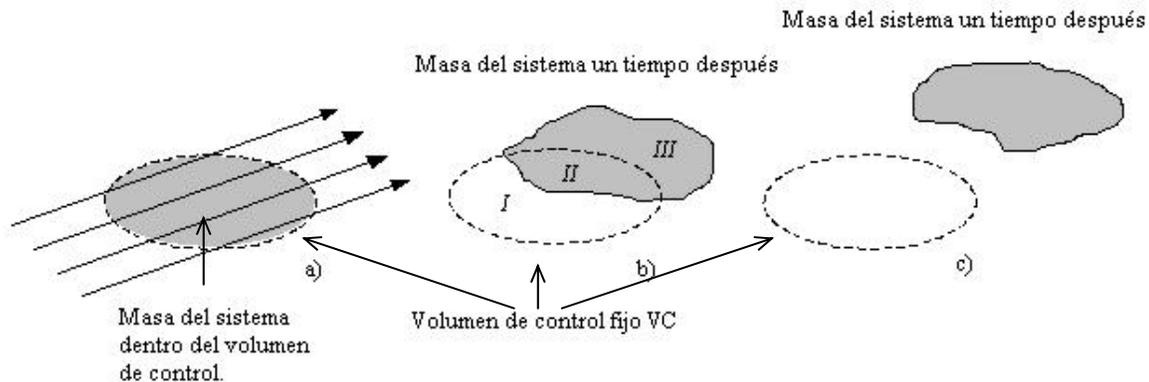


Figura 1.3.1. Sistema que fluye a través de un volumen de control.

La figura 1.3.1 a) ocurre al instante t en el que el sistema llena completamente el volumen de control. La figura 1.3.1 b) ocurre en el instante $t + \Delta t$. Aquí hay otra región, la región I, dentro del volumen de control que ocupa otro sistema de masa; una región que es común al sistema y al volumen de control, la región II; y una región del sistema que ya salió del volumen de control, la región III.

La tasa de cambio con respecto al tiempo de la propiedad Λ del sistema se calcula a continuación

$$\frac{D\Lambda}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Lambda|_{t+\Delta t} - \Lambda|_t}{\Delta t} \quad \dots 1.3.1)$$

usando que $\Lambda(t) = \int_{V_{sis}} \alpha dV$, con V_{sis} el volumen del sistema, la relación anterior queda como sigue

$$\frac{D\Lambda}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_{sis}} \alpha dV|_{t+\Delta t} - \int_{V_{sis}} \alpha dV|_t}{\Delta t} \quad \dots 1.3.2)$$

Es pertinente dar los nombres de lo que se utilizará a continuación, ya se vio que V_{sis} es el volumen del sistema. VC es el volumen de control, V_I , V_{II} y V_{III} son los volúmenes de las regiones *I*, *II* y *III* respectivamente. Entonces las relaciones entre los volúmenes a diferentes tiempos están dadas por lo siguiente

$$V_{sis}|_t = VC \quad \text{por lo que} \quad \int_{V_{sis}} \alpha dV|_t = \int_{VC} \alpha dV|_t \quad \text{y}$$

$$V_{sis}|_{t+\Delta t} = V_{II} + V_{III} = (VC - V_I) + V_{III} \quad \text{entonces}$$

$$\int_{V_{sis}} \alpha dV|_{t+\Delta t} = \left(\int_{VC} \alpha dV|_{t+\Delta t} - \int_{V_I} \alpha dV|_{t+\Delta t} \right) + \int_{V_{III}} \alpha dV|_{t+\Delta t}$$

Por lo que la relación 1.3.2 toma la siguiente forma

$$\frac{D\Lambda}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left(\int_{VC} \alpha dV|_{t+\Delta t} - \int_{V_I} \alpha dV|_{t+\Delta t} + \int_{V_{III}} \alpha dV|_{t+\Delta t} \right) - \int_{VC} \alpha dV|_t}{\Delta t} \quad \dots 1.3.3)$$

reordenando términos

$$\frac{D\Lambda}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{VC} \alpha dV|_{t+\Delta t} - \int_{VC} \alpha dV|_t}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_I} \alpha dV|_{t+\Delta t}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_{III}} \alpha dV|_{t+\Delta t}}{\Delta t} \quad \dots 1.3.4)$$

α no depende únicamente del tiempo, por lo que el primer límite del lado derecho de la igualdad es la derivada parcial con respecto al tiempo, a este término se le suele llamar velocidad de acumulación. El segundo término representa la cantidad de Λ que entra al volumen de control entre los tiempos t y $t+\Delta t$, en el límite se trata de la velocidad instantánea del flujo de entrada $\dot{\Lambda}_{ent}$, el tercer término representa la cantidad de Λ que sale del volumen de control entre los mismos instantes, en el límite representa la velocidad instantánea del flujo de salida $\dot{\Lambda}_{sal}$ la relación 1.3.4 se escribe, entonces de la manera siguiente

$$\frac{D\Lambda}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \alpha dV - \dot{\Lambda}_{ent} + \dot{\Lambda}_{sal} \quad \dots 1.3.5)$$

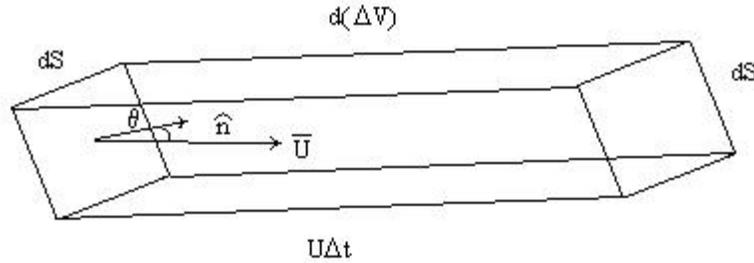


Figura 1.3.2 Las partículas salientes del volumen de control que se encontraban en el elemento de área dS al tiempo t , se encuentran en el elemento de área dS' al tiempo $t + \Delta t$ y han recorrido una distancia $u\Delta t$. El fluido en el volumen $d(\Delta V)$ salió del volumen de control a través del elemento de área dS .

Considérese un elemento de masa que sale del volumen de control entre los tiempos t y $t + \Delta t$ ese elemento de masa ocupa un elemento de volumen $d(\Delta V)$, véase fig. 1.3.2. La masa fluye hacia el elemento volumen a través de un área dS a un tiempo t , sale de éste a través de un área dS' un tiempo Δt después y recorre una distancia $U\Delta t$ con \bar{u} la velocidad del flujo, en general el vector unitario normal al área dS y la velocidad \bar{u} no son paralelos y forman un ángulo menor a 90° . El elemento de volumen $d(\Delta V)$ queda como sigue

$$d(\Delta V) = u\Delta t \cos \theta dS \quad \dots 1.3.6)$$

usando notación vectorial queda

$$d(\Delta V) = \Delta t \bar{u} \cdot \hat{n} dS \quad \dots 1.3.7)$$

Para el flujo que entra al volumen de control el razonamiento es parecido, la diferencia es que el ángulo entre \bar{u} y \hat{n} es mayor que 90° por lo tanto, usando el ángulo complementario

$$d(\Delta V) = -u\Delta t \cos \theta dS \quad \dots 1.3.8)$$

usando la notación vectorial

$$d(\Delta V) = \Delta t \bar{u} \cdot \hat{n} dS \quad \dots 1.3.9)$$

sustituyendo en $\dot{\Lambda}_{ent}$ y en $\dot{\Lambda}_{sal}$

$$\dot{\Lambda}_{ent} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{A_{ent}} \alpha d(\Delta V)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{- \int_{A_{ent}} \alpha u \Delta t \cos \theta dS}{\Delta t} = - \int_{A_{ent}} \alpha u \cos \theta dS \quad \dots 1.3.10)$$

$$\dot{\Lambda}_{ent} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int \alpha d(\Delta V)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{A_{sal}} \alpha u \Delta t \cos \theta dS}{\Delta t} = \int_{A_{sal}} \alpha u \cos \theta dS$$

Tomando en cuenta que por los costados del elemento de volumen de la figura 1.3.2 no hay salida de materia, la suma de lo anterior puede ser vista como una integral de superficie sobre un área cerrada. Como se tenía en la relación 1.3.5 $-\dot{\Lambda}_{ent} + \dot{\Lambda}_{sal}$ con esta suma se opera como sigue

$$-\dot{\Lambda}_{ent} + \dot{\Lambda}_{sal} = \int_{A_{ent}} \alpha u \cos \theta dS + \int_{A_{sal}} \alpha u \cos \theta dS = \oint_{A_{VC}} \alpha \bar{u} \cdot \bar{n} dS \quad \dots 1.3.11)$$

usando el teorema de Gauss

$$\oint_{A_{VC}} \alpha \bar{u} \cdot \bar{n} dS = \int_{VC} \nabla \cdot (\alpha \bar{u}) dV \quad \dots 1.3.12)$$

de esta manera la relación 1.3.5 queda

$$\frac{D\Lambda}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \alpha dV + \int_{VC} \nabla \cdot (\alpha \bar{u}) dV \quad \dots 1.3.13)$$

es posible juntar las integrales [20]

$$\frac{D\Lambda}{Dt} = \int_{VC} \left[\frac{\partial}{\partial t} \alpha + \nabla \cdot (\alpha \bar{u}) \right] dV \quad \dots 1.3.14)$$

El fluido que se desplaza hacia adentro y hacia afuera del volumen de control V transporta no solo masa, sino también otras propiedades asociadas con el fluido como el momentum o la energía. [31]

Esta integral se expresa en función de las variables independientes en un sistema de Euler, la posición \bar{x} y el tiempo t . La integral de la derecha se hace sobre un volumen fijo en el espacio; por lo tanto se llega a una expresión aplicable directamente en la descripción euleriana.† La razón de cambio de $\Lambda(t)$ tiene dos contribuciones : a) la variación de α dentro del volumen inicial V y b) el flujo neto de α a través de la superficie S [29]. Cabe señalar que α puede ser un escalar o las componentes de un vector o un tensor [3].

El Teorema de Transporte de Reynolds proporciona una relación entre las descripciones lagrangiana y euleriana, de la rapidez de cambio de una cantidad extensiva

† Ducho de otra manera, en el Teorema de transporte de Reynolds se relaciona la derivada lagrangiana de la integral de volumen de una masa dada con una integral de volumen cuyo integrando sólo tiene derivadas eulerianas.

[5] y proporciona una manera de identificar un sistema finito y evaluar la velocidad de cambio de cualquier propiedad de dicho sistema, examinando el flujo a través de un volumen de control [30]. Con éste se pueden expresar las leyes básicas en términos de un volumen fijo en el espacio.

1.4 Conservación de la masa

En la mecánica Newtoniana, la masa de un cuerpo es una cantidad constante que no cambia con el movimiento. Este es un principio de la física clásica, pero, el hecho de que la cantidad de materia no cambie, no implica que no haya creación ni aniquilación de materia en algún lugar en el universo. La variación de masa en un volumen fijo se debe al flujo a través de la superficie que lo delimita, además, en ausencia de fuentes de fluido dentro del volumen de prueba, la masa del fluido se conserva. El que la masa M se conserve se escribe así:

$$\frac{D}{Dt}M = 0 \quad \dots 1.4.1)$$

Ahora bien, la relación entre la masa, M y la densidad es:

$$M = \int_{VC} \rho dV$$

Si se utiliza el teorema de transporte de Reynolds, es posible conocer la razón de cambio con respecto al tiempo de esta propiedad en la descripción euleriana. Se procede de la siguiente manera: sean $\Lambda(t) = M(t)$ y $\alpha = \rho$, si se sustituyen estos valores en la ecuación 1.3.14, la relación queda:

$$\frac{D}{Dt}M(t) = \int_{VC} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u}) \right] dV = 0 \quad \dots 1.4.2)$$

Esto es, la derivada material de una masa arbitraria M , que es la derivada material de la integral de volumen de la densidad, es cero por el principio de conservación de la masa. Como se está considerando un volumen arbitrario, lo anterior implica que el integrando es igual a cero.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u}) = 0 \quad \dots 1.4.3)$$

ésta es conocida como la *ecuación de continuidad* porque “no sólo expresa en forma diferencial la conservación de la masa sino que dice que la velocidad y la densidad son continuas”[35], por tratarse de una ecuación en derivadas parciales. Si se desarrolla el segundo término de la izquierda y se divide entre la densidad, se obtendrá la derivada material de esta última y la divergencia de la velocidad; se permite así dejar uno de los

sumandos dependiente, únicamente, de la densidad y el otro sumando dependiente, únicamente, de la velocidad del fluido.

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot (\vec{u}) = 0 \quad \text{...1.4.4}$$

La ecuación 1.4.4 sigue manteniéndose como una ecuación en derivadas parciales (característica de la ecuación de continuidad).

Cuando la velocidad del flujo es pequeña en comparación con la velocidad del sonido en el fluido, se puede considerar que la densidad de éste permanece constante [3], por lo que se dice que el fluido se comporta como un fluido incompresible. Se llama incompresible a un fluido cuando la densidad de un elemento de éste no se ve afectada por cambios en la presión; [4] una forma más intuitiva de ver un fluido incompresible es decir que su volumen no cambia. Esto es, ocurren dos cosas, primero: la razón de cambio de ρ es cero:

$$\frac{D}{Dt} \rho = 0 \quad \text{...1.4.5}$$

que no significa que la densidad no varíe ni en el tiempo ni en el espacio, se trata de una derivada material, esto es muy importante en fluidos estratificados. Pero la igualdad también se cumple cuando la densidad es constante tanto en el tiempo como en el espacio. De esta manera el primer sumando de la ecuación 1.4.4 es cero. Y segundo: la ecuación de continuidad para un fluido incompresible queda simplemente:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{...1.4.6}$$

Que un flujo sea incompresible no quiere decir que la densidad es la misma para todo elemento de masa. El flujo en el océano es incompresible pero la densidad de los elementos de volumen varía por diferencias en la concentración de sal en ellos [32].

Se dice que un vector \vec{A} es *solenoidal* si su divergencia es cero $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. En particular, para un fluido incompresible la velocidad es solenoidal.

En la figura 1.4.1 se muestra una tubería cuya una sección transversal es más grande del lado derecho que del izquierdo. Por la tubería se desplaza un fluido incompresible, la masa que para por el elemento de volumen sombreado del lado izquierdo de la figura 1.4.1.a es la misma que pasa por el elemento de volumen sombreado a la derecha de la figura 1.4.1.b.

§ De la ecuación 1.4.3 se llega a la 1.4.5 de la siguiente manera , al utilizar $\nabla \cdot (f\vec{v}) = \nabla f \cdot \vec{v} + f\nabla \cdot \vec{v}$ [17]

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$, el segundo sumando del lado izquierdo de la primera igualdad es desarrollado, del lado derecho de ésta se descompone en dos términos. Los dos primeros términos del lado derecho de la primera igualdad son la derivada material de la densidad, esto se escribió como el primer sumando del lado derecho de la segunda igualdad.

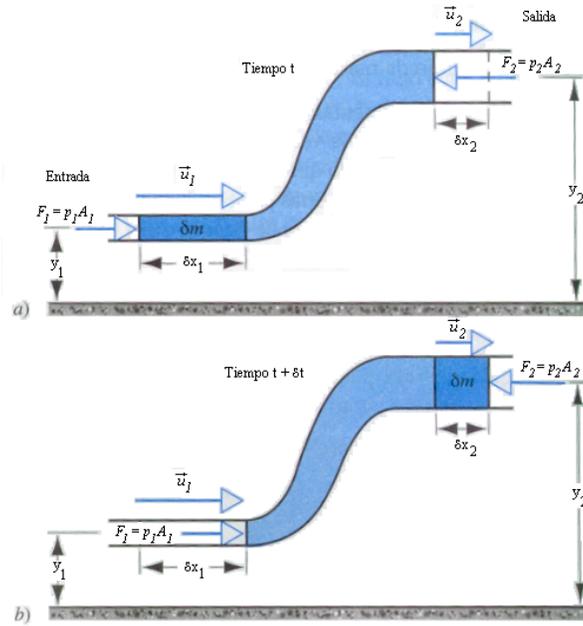


Figura 1.4.1. Conservación de la masa en una tubería de sección transversal variable. Durante el intervalo de a) a b), el efecto neto del flujo consiste en transferir el Elemento del fluido, indicado por el sombreado oscuro, del extremo de entrada del tubo al extremo de salida. [23]

1.5. Conservación del Momentum

En mecánica de fluidos la segunda ley de Newton se denomina ley de conservación de la cantidad de movimiento (momentum). El momentum se define de la manera siguiente en la dinámica de fluidos:

$$P_i = \int_{VC} \rho u_i dV \quad \dots 1.5.1)$$

Si se aplica la segunda ley de Newton a un elemento de fluido y se utiliza teorema de transporte de Reynolds la ecuación de balance de momento toma la siguiente forma:

$$\frac{D}{Dt} P_i = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k) \right] dV = F_i \quad \dots 1.5.2)$$

Donde $\Lambda = P_i$, $\alpha = \rho u_i$ y F_i incluye todas las fuerzas que actúan sobre el fluido [8].

Es posible agrupar las fuerzas en dos categorías:

- a) Las que actúan sobre todos los elementos de volumen de un cuerpo, llamadas *fuerzas de cuerpo*, la fuerza gravitatoria, la electromagnética y las llamadas fuerzas ficticias, como la fuerza centrífuga, son ejemplos de este tipo de fuerzas. Están

representadas por $\bar{q} = \lim_{\Delta M \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{K}}{\Delta M}$ (fuerza por unidad de masa) o por $\bar{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{K}}{\Delta V}$ (fuerza por unidad de volumen) [32], donde $\Delta \bar{K}$ es la suma de las fuerzas de cuerpo que actúan sobre el elemento de fluido a analizar. La relación que hay entre éstas es la siguiente $\bar{f} = \rho \bar{q}$. [8]

- b) Las que actúan sobre la superficie de un elemento de fluido se encuentre éste dentro o en la periferia del material, son las *fuerzas de superficie* y dependen, exclusivamente, del área y de la orientación de ésta. Son fuerzas de contacto. Están representadas por \bar{b} que son fuerzas por unidad de área. La fuerza promedio por unidad de área en un elemento Δs está dada por $\frac{\Delta \bar{b}}{\Delta s}$. En el límite cuando Δs tiende a cero, el vector resultante $\bar{t} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{b}}{\Delta s}$ es llamado *vector de esfuerzos*. Para una superficie orientada de manera arbitraria el vector de esfuerzos se denota $\bar{t}^{(\hat{n})}$, donde \hat{n} representa el vector unitario normal a la superficie. En general aunque $\bar{t}^{(\hat{n})}$ es el vector de esfuerzos en esa superficie, no es paralelo a \hat{n} . La notación sirve para resaltar la importancia de la superficie Δs elegida. [8]

Siendo \bar{f} la fuerza de cuerpo por unidad de volumen y \bar{t} la resultante de las fuerzas superficiales por unidad de área, la fuerza \bar{F} puede ser escrita como la suma de una integral de volumen y una integral de superficie:

$$\bar{F} = \int_V \bar{f} dV + \int_S \bar{t} ds \quad \text{o} \quad \bar{F} = \int_V \rho \bar{q} dV + \int_S \bar{t} ds \quad \dots 1.5.3)$$

Ejemplos de las fuerzas superficiales son la presión y los esfuerzos viscosos.

En cada punto arbitrario \mathcal{P} en un continuo, se asocia un vector de esfuerzo $t_i^{(\hat{n})}$ con cada vector unitario normal n_i del espacio coordenado. Que representa la orientación infinitesimal de una superficie que tiene a \mathcal{P} como un punto interior. Todos los pares posibles de $t_i^{(\hat{n})}$ y n_i en \mathcal{P} definen el estado de esfuerzos en él. Para describir el estado de esfuerzos, se da el vector de esfuerzos en cada uno de los planos mutuamente perpendiculares en \mathcal{P} . Por conveniencia se usa la figura 1.5.1.a. para representar esquemáticamente los vectores de esfuerzos, en la figura \mathcal{P} es un punto en el interior del cubo.

Cada uno de los vectores de esfuerzo se pueden escribir en términos de sus componentes cartesianas.

$$\bar{t}^{(e_1)} = t_1^{(e_1)} \hat{e}_1 + t_2^{(e_1)} \hat{e}_2 + t_3^{(e_1)} \hat{e}_3 = t_i^{(e_1)} \hat{e}_i$$

$$\vec{t}^{(e_2)} = t_1^{(e_2)} \hat{e}_1 + t_2^{(e_2)} \hat{e}_2 + t_3^{(e_2)} \hat{e}_3 = t_i^{(e_2)} \hat{e}_i$$

$$\vec{t}^{(e_3)} = t_1^{(e_3)} \hat{e}_1 + t_2^{(e_3)} \hat{e}_2 + t_3^{(e_3)} \hat{e}_3 = t_i^{(e_3)} \hat{e}_i$$

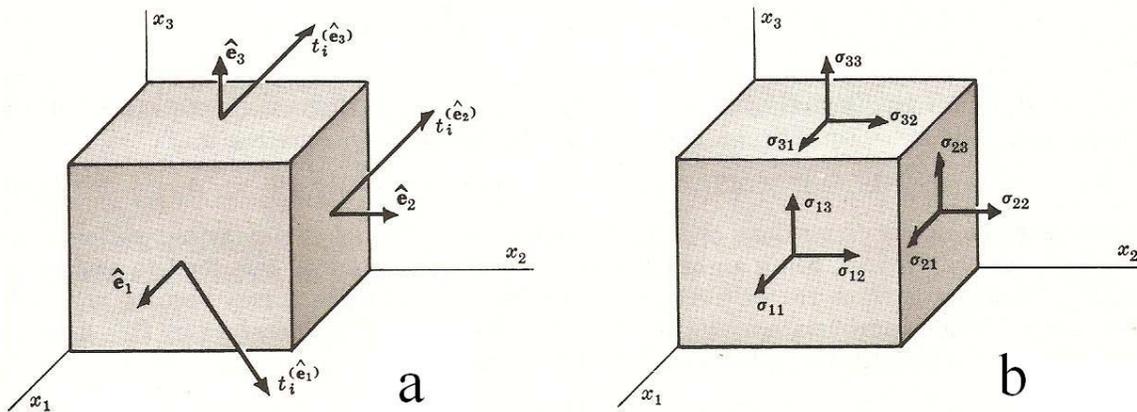
Las nueve componentes del vector de esfuerzo son

$$t_i^{(e_j)} \equiv \sigma_{ji}$$

con

$$[\sigma_{ji}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \dots 1.5.7)$$

Estas, son las componentes de un tensor cartesiano de segundo orden conocido como el *tensor de esfuerzos*. Las componentes perpendiculares a los planos ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$) se llaman *esfuerzos normales*. Las que actúan tangentes a los planos ($\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$) se llaman *esfuerzos de corte*. Un esfuerzo es positivo cuando actúa en la dirección positiva de un eje coordenado y sobre un plano cuya normal exterior apunta en una de las direcciones coordenadas positivas. La componente σ_{ji} actúa en la dirección del i-ésimo eje coordenado y sobre el plano cuya normal exterior es paralela al j-ésimo eje coordenado [8]. La figura 1.5.1.b. muestra esquemáticamente la dirección en la que actúa cada esfuerzo, y junto con la figura 1.5.1.a. se puede comparar la relación que hay entre las componentes del tensor y del vector de esfuerzos.



Figuras 1.5.1.a y 1.5.1.b. Esquemas de los vectores de esfuerzos y de los tensores de esfuerzo [8].

La relación entre el tensor de esfuerzos σ_{ji} en punto \mathcal{P} y el vector de esfuerzos $t_i^{(n)}$ sobre un plano de orientación arbitraria en \mathcal{P} , puede ser establecida por medio del equilibrio de fuerzas en un tetraedro en el fluido; es decir, hay que imaginar un tetraedro

con su vértice en \mathcal{P} , con una cara APC paralela al plano XZ, con una cara BCP paralela al plano YZ y con una cara ABP paralela al plano XZ y con una cara ABC inclinada que cierra la figura como se ve en la figura 1.5.2. Supóngase que la cara ABC tiene un área ds y que tiene un vector normal \hat{n} con componentes n_i . Supóngase también que la cara APC tiene un área de ds_1 , la cara BCP un área ds_2 y la cara ABP un área ds_3 . Entonces las áreas de las caras laterales del tetraedro en términos del área ds son $ds_1 = n_1 ds$, $ds_2 = n_2 ds$, $ds_3 = n_3 ds$, respectivamente. De esta manera es posible describir todo como sigue: $ds_i = ds(\hat{n} \cdot \hat{e}_i) = ds \cos(\hat{n}, \hat{e}_i) = ds n_i$.

Para cada cara el vector de esfuerzo que sale de ella es de la misma magnitud pero de signo opuesta a la proyección del vector de esfuerzos en la cara inclinada ABC, por lo tanto el balance de fuerzas en el elemento de masa delimitado por el tetraedro habiendo fuerzas de cuerpo es el siguiente:

$$t_i^{(\hat{n})} ds - t_i^{(\hat{e}_1)} ds_1 - t_i^{(\hat{e}_2)} ds_2 - t_i^{(\hat{e}_3)} ds_3 + \rho q_i dV = 0 \quad \dots 1.5.4)$$

si se divide entre el cuadrado de una longitud característica del tetraedro, en el proceso del límite cuando esa longitud tiende a cero, la aportación de las fuerzas de cuerpo por depender del volumen tiende a cero más rápido que la aportación de las fuerzas de superficie, lo que permite no tomarlas en cuenta. De la relación anterior se tiene

$$t_i^{(\hat{n})} ds = t_i^{(\hat{e}_1)} ds_1 + t_i^{(\hat{e}_2)} ds_2 + t_i^{(\hat{e}_3)} ds_3$$

o

$$t_i^{(\hat{n})} ds = t_i^{(\hat{e}_1)} n_1 ds + t_i^{(\hat{e}_2)} n_2 ds + t_i^{(\hat{e}_3)} n_3 ds = t_i^{(\hat{e}_j)} n_j ds \quad \dots 1.5.5)$$

se puede renombrar $t_i^{(\hat{e}_j)}$ como sigue

$$t_i^{(\hat{e}_j)} = \sigma_{ji} \quad \dots 1.5.6)$$

donde \hat{e}_j representa un vector unitario paralelo al j-ésimo eje coordenado y normal a la superficie del elemento de masa. Entonces

$$t_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ji} n_j \quad \text{o}$$

El vector de esfuerzos en términos del tensor de esfuerzos queda

$$\begin{bmatrix} t_1^{(\hat{n})} \\ t_2^{(\hat{n})} \\ t_3^{(\hat{n})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \dots 1.5.8)$$

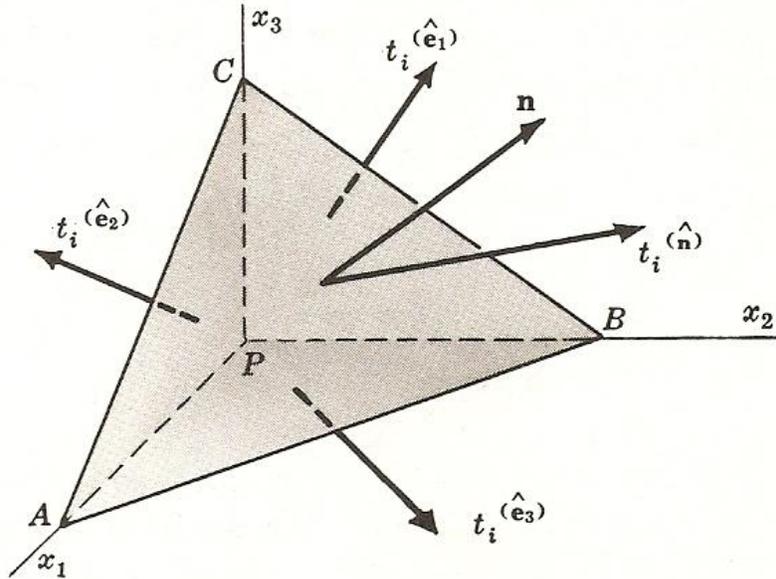


Figura 1.5.2. Esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre un elemento de volumen, en coordenadas cartesianas.

Como en la superficie del elemento de fluido analizado debe haber una fuerza en cada punto y esta fuerza fue representada por \vec{t} , y el vector de fuerza de superficie \vec{t} está relacionado con el tensor de esfuerzos σ_{ji} mediante $t_i = \sigma_{ji}n_j$. La ecuación 1.5.3 que expresa la conservación de momentum se escribe como sigue:

$$F_i = \int_V \rho q_i dV + \int_S \sigma_{ji} n_j ds \quad \dots 1.5.9)$$

Usando el teorema de Gauss la segunda integral de la relación anterior se transforma en una integral de volumen, igualando con la relación 1.5.2, la conservación de momentum queda:

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k) \right] dV = \int_V \rho q_i dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV \quad \dots 1.5.10)$$

Todo está en términos de integrales de volumen, por lo que es posible juntar todos los sumandos dentro de una sola integral de volumen e igualar a cero $\int_V \xi dV = 0$ donde

ξ representa todos los sumandos a ser integrados. Siendo la integral cero y el elemento de volumen arbitrario, el integrando ξ es cero. Se obtiene entonces una ecuación diferencial con la forma siguiente

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_i u_k) = \rho q_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad ** \quad \dots 1.5.11)$$

Desarrollando el lado izquierdo de la ecuación se tiene:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(u_i) + u_i \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + u_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k) + \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k}(u_i) = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho q_i \quad \dots 1.5.12)$$

Obsérvese que por la ecuación de continuidad los términos segundo y tercero del lado izquierdo de la igualdad suman cero, por lo que la ecuación de conservación de momentum queda como sigue:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(u_i) + \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k}(u_i) = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho q_i \quad \dots 1.5.13)$$

El lado izquierdo de esta ecuación representa la razón de cambio de momentum de una unidad de volumen de fluido (o la fuerza de inercia por unidad de volumen). El primer término es el término de aceleración temporal y el segundo en una aceleración de convección y cuenta para aceleraciones locales (alrededor de obstáculos por ejemplo) incluso cuando el flujo es estacionario. Del lado derecho están las fuerzas que causan las aceleraciones. El primero de éstos términos es debido al gradiente de esfuerzos cortantes y normales, viscosidad y presión; mientras el segundo se debe a fuerzas de cuerpo, que actúan en la masa del fluido [7]. En la figura 1.5.3. se pueden observar las fuerzas que actúan en un elemento de volumen infinitesimal del fluido, sólo se muestran las fuerzas que actúan sobre las caras positivas.

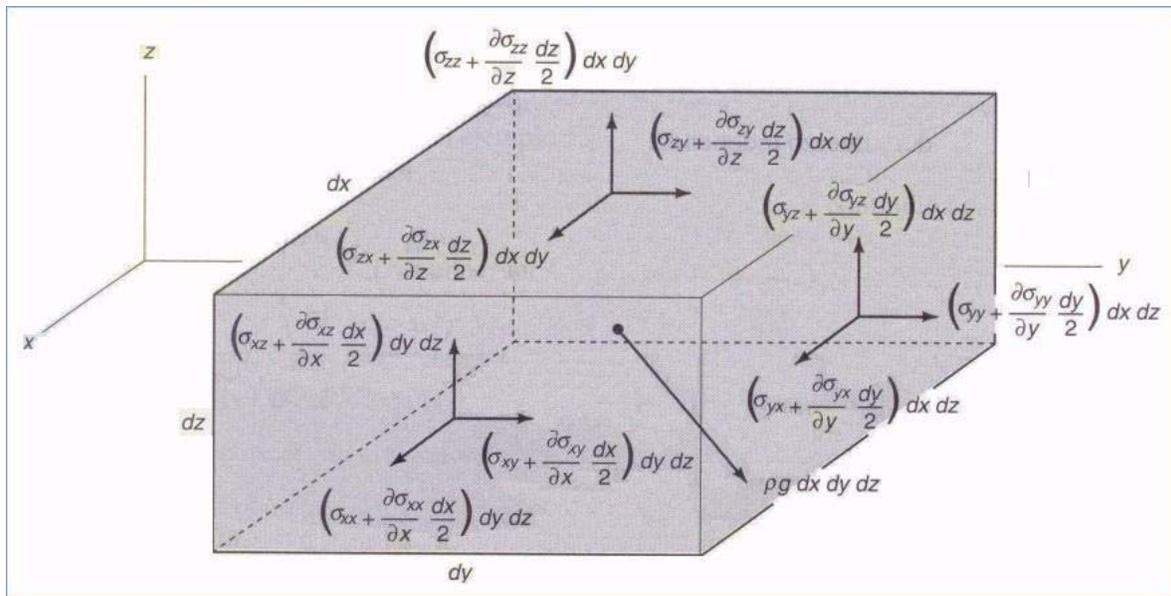


Figura 1.5.3. Fuerzas que actúan sobre un elemento infinitesimal de fluido [5].

** Esta relación también es conocida como la primera ley de movimiento de Cauchy [32]

1.6 Ecuaciones Constitutivas y Coeficientes de Viscosidad

Las ecuaciones constitutivas caracterizan las propiedades físicas particulares del fluido estudiado.

La función de las ecuaciones constitutivas es establecer una relación matemática entre las variables cinemáticas, estadísticas y térmicas, que describen el comportamiento del material al estar sujeto a la aplicación de fuerzas mecánicas o térmicas. Como los materiales reales responden de una manera muy complicada bajo diferentes cargas, las ecuaciones constitutivas no intentan describir todos los fenómenos observados relacionados a un material en particular, sino, más bien, definen ciertos materiales ideales tales como el sólido elástico y el fluido viscoso ideales. Tales idealizaciones—o modelos materiales—son muy útiles porque describen razonablemente bien, dentro de un rango definido de cargas y temperaturas, el comportamiento de sustancias reales. [8]

Los elementos del tensor de esfuerzos σ_{ji} serán relacionados con los del tensor de rapidez de deformación por un conjunto de parámetros. Todos éstos salvo dos serán evaluados analíticamente, los dos restantes, los coeficientes de viscosidad, deberán ser determinados empíricamente. Para llegar a esto, los postulados para un fluido newtoniano deben ser usados directamente sobre el tensor de esfuerzos:

- 1.- Cuando un fluido está en reposo, el esfuerzo es hidrostático y la presión ejercida por el fluido es la presión termodinámica.
- 2.- El tensor de esfuerzos σ_{ji} está relacionado linealmente con el tensor de rapidez de deformación d_{kl} y depende sólo de dicho tensor.
- 3.- Como no hay acción de cizallamiento en la rotación de un cuerpo rígido, los esfuerzos de cizallamiento no actúan durante ese movimiento.
- 4.- No hay direcciones privilegiadas en un fluido—propiedad de isotropía—por lo que las funciones de fluido son funciones de punto.

La condición 1 requiere que: $\sigma_{ji} = -p\delta_{ji} + \tau_{ji}$ donde τ_{ji} depende solamente del movimiento del fluido, es llamado tensor de esfuerzos de cizallamiento (o de esfuerzos cortantes); p es la presión termodinámica y δ_{ji} la delta de Kronecker, el signo es negativo por convención, cuando los esfuerzos normales son de tensión son positivos. El tensor τ_{ji} es desconocido.

La condición 2 es la característica principal de los fluidos newtonianos. Esta condición puede ser comprobada experimentalmente en los campos de flujo simples de los fluidos más comunes. Los resultados predichos para flujos más complicados concuerdan con las observaciones. Ésta es la única justificación para la condición 2 [7].

La condición dice que cada uno de los nueve elementos del tensor τ_{ji} será, en general, una combinación lineal de los nueve elementos de d_{kl} , por lo que ochenta y un

parámetros son necesarios para relacionar τ_{ji} con d_{kl} . Es decir; se necesita un tensor de rango cuatro

$$\tau_{ji} = \alpha_{jikl} d_{kl} = \alpha_{jikl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \quad \dots 1.6.1)$$

En donde d_{kl} es un tensor llamado *tensor de rapidez de deformación*. Este tensor, puede ser visto como la suma de una tensor simétrico $e_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$ que representa la rapidez de corte del elemento de fluido y uno antisimétrico $\Omega_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$ que representa la rapidez de rotación del elemento de fluido [7].

Según la condición 3, al rotar el fluido, no debe haber esfuerzos de corte. Pero para una rotación de cuerpo rígido la parte antisimétrica de d_{kl} , no es cero; por lo tanto para que la condición 3 sea satisfecha, los coeficientes α_{jikl} correspondientes a esta parte del tensor de deformación deben de ser cero; se llama β_{jikl} al tensor que cumple esto. Eso es, que la relación constitutiva para el esfuerzo debe tener la forma:

$$\tau_{ji} = \frac{1}{2} \beta_{jikl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad \dots 1.6.2)$$

los elementos del tensor β_{jikl} siguen siendo desconocidos, pero la condición 4 tiene que imponerse. [7]. La condición 4, la de isotropía, garantiza que los resultados obtenidos son independientes de la orientación de los ejes del sistema elegido. El más general de los tensores isotrópicos de rango 4 es:

$$\beta_{jikl} = \lambda \delta_{ji} \delta_{kl} + \mu (\delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{jl} \delta_{ik}) + \gamma (\delta_{jk} \delta_{il} - \delta_{jl} \delta_{ik}) \quad \dots 1.6.3)$$

λ , μ y γ son escalares. Por la condición 3, el tensor debe ser simétrico, entonces $\gamma = 0$. Por lo tanto:

$$\tau_{ji} = \frac{1}{2} \left[\lambda \delta_{ji} \delta_{kl} + \mu (\delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{jl} \delta_{ik}) \right] \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad \dots 1.6.4)$$

Usando las propiedades de las deltas de Kronecker, la expresión para el tensor de esfuerzo de corte queda como sigue:

$$\tau_{ji} = \lambda \delta_{ji} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad \dots 1.6.5$$

Entonces, las relaciones constitutivas para el esfuerzo en un fluido newtoniano son:

$$\sigma_{ji} = -p \delta_{ji} + \lambda \delta_{ji} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad \dots 1.6.6$$

que es un tensor simétrico de segundo orden [7].

Las componentes normales del esfuerzo están definidas por la presión termodinámica $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$. Las componentes del esfuerzo diferentes de cero son proporcionales al gradiente de velocidades con el parámetro μ como factor de proporcionalidad; por lo tanto, según la ley de viscosidad de Newton μ es la viscosidad dinámica (la viscosidad cinemática se define como $\nu = \frac{\mu}{\rho}$). λ es el segundo parámetro de viscosidad. Para conocer su importancia calculamos la presión promedio:

$$-\bar{p} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad \dots 1.6.7$$

ésta es una presión mecánica, hidrostática o hidrostática más un esfuerzo producido por el movimiento del fluido, es en general diferente de la presión termodinámica p :

$$-\bar{p} = -p + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad \dots 1.6.8$$

esto implica que:

$$p - \bar{p} = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad \dots 1.6.9$$

Si el fluido es incompresible, la ecuación de continuidad dice que $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$, por lo que

$$p = \bar{p}.$$

1.7 Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes son las condiciones principales que deben de ser satisfechas por los fluidos al moverse. Surgen de la combinación de las ecuaciones 1.5.13 conservación del momentum y (1.6.6) relaciones constitutivas para un fluido newtoniano.

Las ecuaciones de Navier-Stokes quedan como sigue, una vez utilizadas las propiedades de la delta de Kronecker, para la ecuación (1.6.6):

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(u_i) + \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k}(u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho q_i \quad \dots 1.7.1)$$

Con mucha frecuencia se supone que el fluido estudiado es incompresible y que su viscosidad dinámica es constante, bajo estas condiciones el segundo término del lado derecho de la ecuación es cero y el tercer término del lado derecho, el de corte viscoso, es proporcional al laplaciano de la velocidad. Así, las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible de densidad y viscosidad constantes son las siguientes.

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(u_i) + \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k}(u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho q_i \quad \dots 1.7.2)$$

Si no se toman en cuenta los efectos viscosos se tiene:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(u_i) + \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k}(u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho q_i \quad \dots 1.7.3)$$

que es conocida como la ecuación de Euler [7].

1.8 Circulación y Vorticidad

La circulación contenida dentro de un contorno cerrado en el cuerpo de un fluido, se define como la integral, alrededor del contorno, de la componente del vector velocidad localmente tangente al contorno. Eso es, la circulación es definida por:

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} \quad \dots 1.8.1)$$

donde $d\vec{l}$ representa un elemento del contorno. La integración se hace en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj.

La vorticidad de un elemento de fluido está definida como el rotacional de su vector velocidad. Es decir:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} \quad \dots 1.8.2)$$

que en notación tensorial se escribe como sigue:

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad \dots 1.8.3)$$

la figura 1.8.1 muestra el vector vorticidad, ortogonal a la zona en rotación, como el rotacional de la velocidad. La vorticidad es proporcional a la velocidad angular de un elemento de fluido alrededor de sus ejes principales, no a los del centro de gravedad del elemento alrededor de algún punto de referencia. Así una partícula que se desplaza en una línea de corriente circular no tiene vorticidad en caso de no girar alrededor de su propio centro de gravedad mientras se mueve.

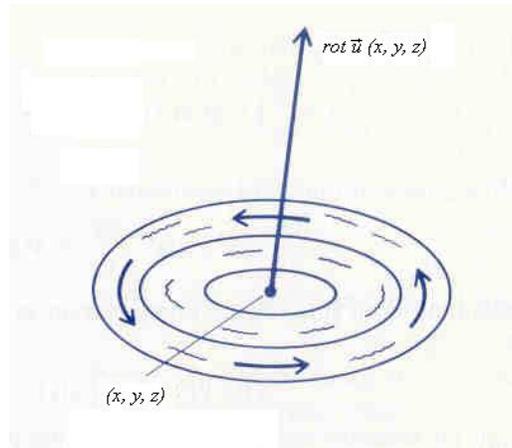


Figura 1.8.1. El rotacional de la velocidad: la vorticidad.

Aplicando el teorema de Stokes en la definición de circulación se observa que ésta y la vorticidad están relacionadas:

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{n} ds = \int_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} ds \quad \dots 1.8.4)$$

en donde S es el área definida por el contorno cerrado alrededor del cual la circulación es calculada y \vec{n} es el vector normal unitario a la superficie. Se observa que para contornos arbitrarios y áreas arbitrarias, si $\vec{\omega} = \vec{0}$ entonces $\Gamma = 0$ y viceversa. Flujos en los que $\vec{\omega} = \vec{0}$ se llaman irrotacionales, flujos para los que esto no es así se llaman rotacionales.

Capítulo 2

Vorticidad

En el capítulo anterior ya se definió el vector vorticidad, en éste, la definición volverá a ser vista y se explicará con más detalle su significado. No está de más recordar que, la propiedad fundamental de un fluido es: que no puede estar en equilibrio en un estado de esfuerzos en el que la acción mutua entre dos partes adyacentes es oblicua a la cara común [1]; es decir, cualquier esfuerzo (cortante) aplicado a un fluido, no importa cuán pequeño sea, provocará el movimiento del fluido, éste se mueve y se deforma continuamente mientras se siga aplicando el esfuerzo cortante.[2]

Es usual que cuando se hable de vórtices se piense en remolinos en el agua, en el aire o en una cavidad circular debida a la rotación de algún líquido. *Un vórtice es el patrón que se genera por el movimiento de rotación de muchas partículas alrededor de un punto en común* [18]. Tras esta idea, en la mecánica de fluidos por vórtice se entiende una región en el fluido limitada por las llamadas líneas de vorticidad, cuyas tangentes en todos los puntos son paralelas a las direcciones locales de la vorticidad, éstos son conceptos que en breve serán vistos.

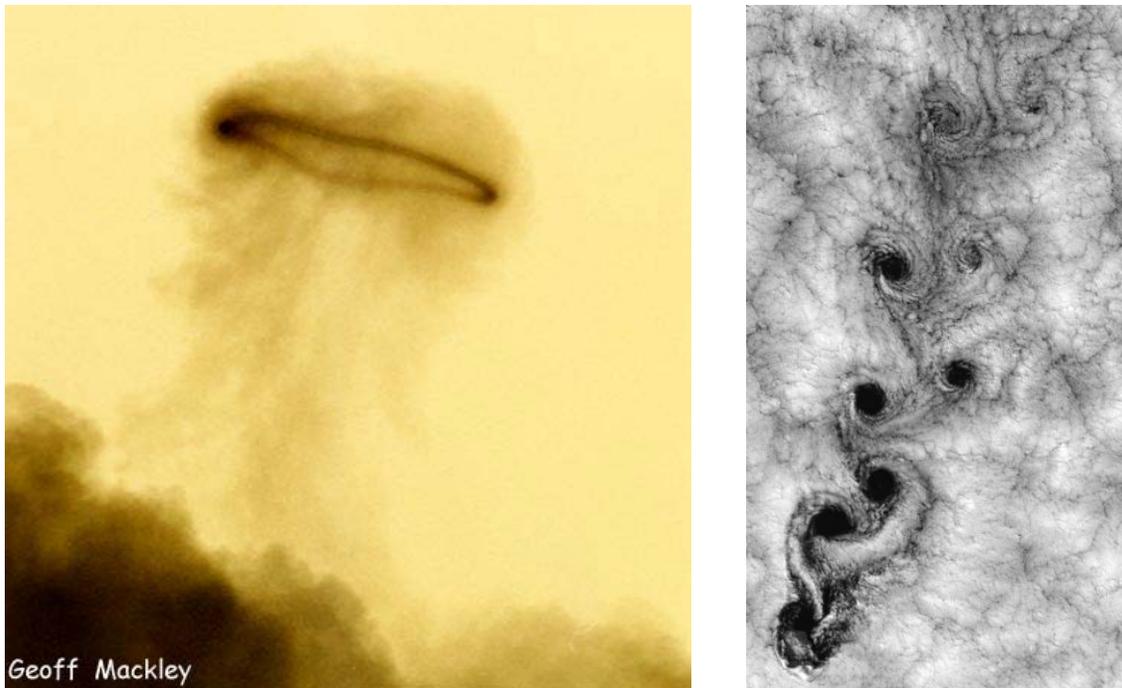


Figura 2 a). Del lado izquierdo un anillo de vorticidad producido en una exhalación del Monte Elba, **b)** del lado derecho una imagen de una calle de vórtices de von Kármán en Baja California Sur (internet)



Figura 2 c). Del lado izquierdo un tornado, **d)** del derecho un remolino. (Internet)

En la figura 2a se observa un vórtice anular producido por un volcán, éste es un vórtice que se cierra sobre sí mismo, la figura 2b muestra la calle vórtices de von Kármán, en la figura 2c se puede ver un tornado y en la figura 2d hay un remolino de agua. Estos son algunos vórtices que es posible encontrar en la naturaleza.

2.1 El vector vorticidad

“La vorticidad es un tensor antisimétrico que traduce la rapidez angular de rotación local sin deformación del elemento del fluido, o, la rotación en bloque de los elementos de fluido” [11]

El vector vorticidad está definido por el rotacional de la velocidad $\vec{\omega}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{u}(\vec{x}, t)$. En un fluido incompresible—como se supone el aire en este trabajo por desplazarse a velocidades menores que 0.3 Mach 1—la relación entre velocidad y vorticidad es similar a la que hay entre flujo magnético y densidad de corriente eléctrica, en electromagnetismo. —También se supone la densidad del aire constante por la razón citada arriba—. *La vorticidad puede ser interpretada físicamente como una densidad de momento angular.* Cuando se habla de movimiento de vórtice se hace referencia a flujos en los que la vorticidad está confinada en regiones finitas, llamadas vórtices, dentro de los cuales se dice que el movimiento es rotacional [10].

2.2 Línea de vorticidad, tubo de vorticidad y vórtice filamentario

A la línea dibujada punto a punto tal que su dirección coincide con la del eje instantáneo de rotación (dx, dy, dz) de un fluido se llama línea de vorticidad. Las ecuaciones diferenciales que la definen son:

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} \quad \dots 2.2.1)$$

en donde ω_i son las componentes cartesianas de la vorticidad, este concepto es semejante al de línea de corriente, sólo que en lugar de la dirección de flujo, se usa el eje instantáneo de rotación y en lugar de la velocidad, se usa la vorticidad. La obtención de la relación anterior se hace por medio del producto vectorial, entre la vorticidad y la diferencial de longitud sobre el eje instantáneo de rotación[1].*

Si a través de todo punto de una curva pequeña, cerrada, se dibuja la línea de vorticidad correspondiente, se tiene un tubo, que se llama tubo de vorticidad. El fluido dentro de tal tubo constituye un vórtice filamental, se usa la idea de filamento para indicar que el radio del tubo es pequeño. Uno de estos vórtices se muestra en la figura 2.2.1.

Las leyes de Helmholtz del movimiento de vórtices para fluidos de viscosidad despreciable, establecen que, un filamento está siempre compuesto de las mismas partículas de fluido y su intensidad es constante, esto tomando el flujo de vorticidad a través de una sección transversal. Una forma alternativa de las leyes de Helmholtz es que $\omega \propto \Delta l$, donde Δl es el elemento de línea material de una línea de vórtice. Esta relación puede ser generalizada a $\omega/\rho \propto \Delta l$ para fluidos barotrópicos (en los que la densidad es función de la presión $\rho = \rho(P)$). El límite de un vórtice filamental de intensidad finita y sección transversal cero se llama línea de vórtice. Helmholtz demostró que estas líneas que son los ejes de rotación, deben ser o curvas cerradas o, comenzar y terminar en las fronteras del fluido. Las líneas de vórtice rectilíneas son muy estudiadas en flujos bidimensionales en donde la ausencia de estiramiento hace de la vorticidad una cantidad que se conserva. Las leyes de Helmholtz implican que una línea de vorticidad se mueve con el fluido a menos que actúen, sobre su núcleo, fuerzas externas. Se dice que un vórtice se encuentra confinado si las fuerzas externas lo mantienen en reposo.

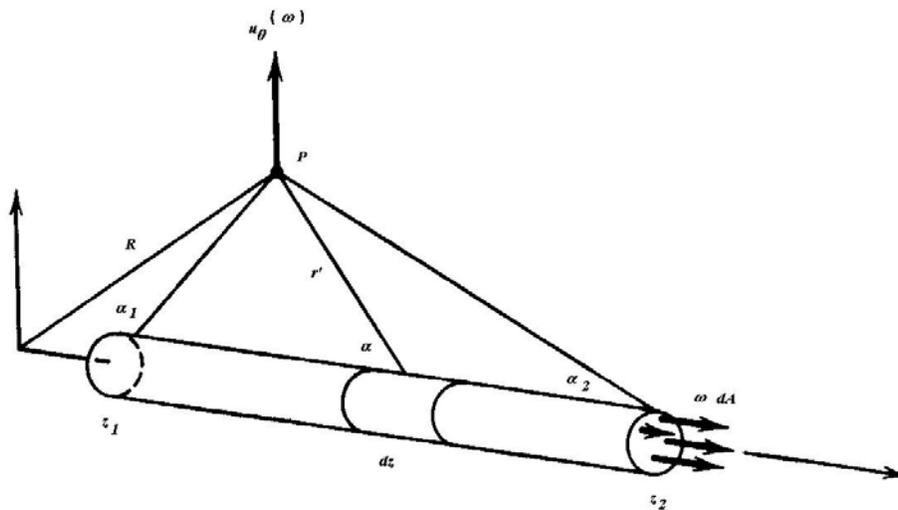


Figura 2.2.1. Un vórtice filamental formado por líneas de vorticidad, en el interior de la figura, induce una velocidad a su alrededor. [12]

* Otra manera de obtener la relación 2.2.1. es partir de que el eje instantáneo de rotación y la vorticidad son directamente proporcionales por ser paralelos $d\vec{r} \propto \vec{\omega}$ y que k es la constante de proporcionalidad. De esa manera $dx_i = k\omega_i$ al despejar la k para cada i se llega a la relación 2.2.1.

2.3 Las leyes de Helmholtz

Ya fueron mencionadas varias veces las leyes o teoremas de Helmholtz, es momento de enunciarlas. La primera es esencialmente cinemática. En conjunto, estas leyes, expresan que en un fluido no viscoso, barotrópico, sobre el que actúan solamente fuerzas conservativas, los vórtices no pueden ser generados o bien si ya existen no pueden ser destruidos.

Helmholtz estableció el siguiente teorema al inicio de su artículo de movimientos de vórtice (1858):

El movimiento más general de un elemento, suficientemente pequeño, de un cuerpo deformable, no rígido, puede ser representado por la suma de una traslación, una rotación, una extensión o una contracción y un movimiento de corte puro. En otras palabras el elemento puede desplazarse con una velocidad $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$, además, rotar con velocidad angular $\vec{\Omega}(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ [19]—la velocidad angular es, por construcción un medio de la vorticidad, $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega}$ — y deformarse de acuerdo a una función $\vec{B}(x, y, z)$. Este resultado también lo obtuvo Cauchy por lo que se llama la ley o teorema Cauchy-Helmholtz. [13]

Para los vórtices dio los siguientes teoremas: Sea un flujo potencial, i.e. sin vorticidad, si el potencial de velocidad es una función monovaluada de las coordenadas (x, y) , entonces $\Gamma = 0$ sobre cualquier curva, dentro del flujo:

1. Un filamento de vórtice, o un tubo de vórtice, no puede terminar en el fluido, debe extenderse hasta el infinito, terminar en una pared sólida, o formar una curva que se cierre sobre sí misma [36].
2. El momento angular del vórtice es constante a la largo de toda su longitud, es decir, $\Omega S = cte$, en cualquier lugar (donde Ω es la velocidad angular y S es el área transversal del vórtice).
3. El momento angular de un filamento de vórtice es constante en el tiempo.
4. Toda línea de vórtice consiste de las mismas partículas de fluido.
5. Las partículas que no rotan en un instante dado, nunca han rotado y nunca rotarán, mientras se mantengan en las condiciones citadas. [13][†]

Los vórtices que satisfacen las leyes de Helmholtz son conocidos como vórtices libres o no confinados.

2.4 La ley de Biot y Savart

El valor y la importancia de la vorticidad para la descripción y el entendimiento del flujo de un fluido deriva del hecho de que puede ser invertido para dar el campo de velocidades como una integral sobre el campo de vorticidad.

[†] Los últimos tres teoremas pueden juntarse en uno llamado Teorema de Kelvin.

Para un flujo incompresible, $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, existe un vector potencial, \vec{B} , tal que $\vec{u} = \nabla \times \vec{B}$ en donde por elección $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ — se aprovecha que la divergencia del rotacional de una función vectorial es cero. Este vector potencial, \vec{B} , satisface la siguiente ecuación de Poisson

$$\vec{\omega}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{u} = \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B} \quad \dots 2.4.1)$$

cuya solución es

$$\vec{B}(\vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\omega}(\vec{x})}{\|\vec{x}' - \vec{x}\|} dV_{\vec{x}} \quad \dots 2.4.2)$$

\vec{x}' es la distancia entre el origen y el punto en el que se quiere medir el potencial \vec{B} , \vec{x} es la distancia entre el origen y el punto en que se encuentra evaluada la vorticidad; entonces, de la ley de Biot- Savart se obtiene la expresión de la velocidad en función de la vorticidad

$$\vec{u}(\vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \nabla_{\vec{x}'} \times \int_V \frac{\vec{\omega}(\vec{x})}{\|\vec{x}' - \vec{x}\|} dV_{\vec{x}} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\omega}(\vec{x}) \times (\vec{x}' - \vec{x})}{\|\vec{x}' - \vec{x}\|^3} dV_{\vec{x}} \quad \dots 2.4.3)$$

haciendo notar que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{r^2} \frac{r_i}{r} \quad \text{con} \quad \vec{r} = \vec{x}' - \vec{x} \quad \dots 2.4.4)$$

Se tiene, por un lado, que el campo de vorticidades permite determinar el campo de velocidades y por otro, que esta relación no es local, es decir, que todos los puntos \vec{x} del volumen V contribuyen a la determinación del campo de velocidades en un punto \vec{x}' que no necesariamente está en V , como se muestra en la figura 2.4.1.[14]

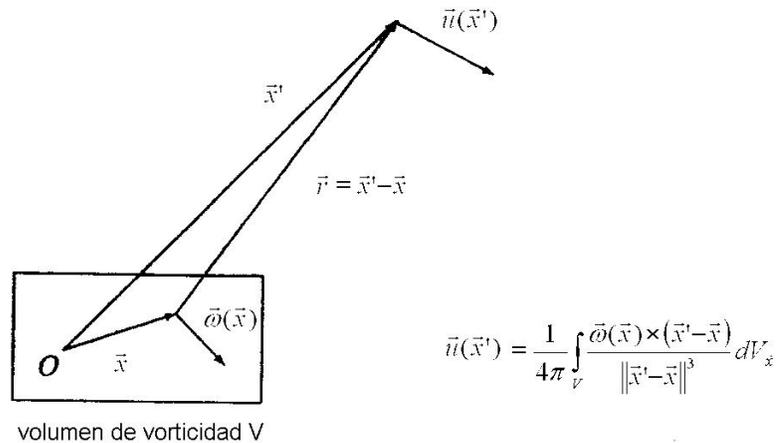


Figura 2.4.1 . La ley de Biot-Savart.

2.5 El Teorema de Kelvin

El teorema de Kelvin establece que para un fluido no viscoso e incompresible, o en el cual la presión depende sólo de la densidad, y sobre el cual cualquier fuerza de cuerpo que actúe es conservativa, la vorticidad de cada partícula del fluido se preserva [7]. Dicho de otro modo, la circulación Γ de la velocidad \vec{u} a lo largo de una curva cerrada C se conserva a lo largo del tiempo.

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left[\oint_C u_j dx_j \right] = 0 \quad \dots 2.5.1)$$

Esto se puede ver de la manera siguiente

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma}{Dt} &= \oint_C \frac{Du_j}{Dt} dx_j + \oint_C u_j \frac{D}{Dt} (dx_j)^\ddagger \\ &= \oint_C \frac{Du_j}{Dt} dx_j + \oint_C u_j du_j \end{aligned}$$

Se utiliza la ecuación 1.7.2. para expresar de otra manera la derivada material de la velocidad, así

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{Du_j}{Dt} dx_j + \oint_C u_j du_j &= \oint_C \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx_j + v \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} dx_j \right] + \oint_C u_j du_j \quad \S \\ &= \oint_C \left[-\frac{dp}{\rho} + d\phi + v \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} dx_j + \frac{1}{2} d(u_j u_j) \right] = \oint_C v \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} dx_j \end{aligned}$$

dp y $d\phi$ son las variaciones espaciales totales de p y de ϕ respectivamente. La integración se hizo sobre una trayectoria cerrada por lo que la integral de dp , si ρ es constante, la de $d\phi$ y la de $du_j u_j$ son cero, por ser funciones monovaluadas. Como la condición es que el fluido no sea viscoso la última igualdad es cero, por lo que se dice que la circulación alrededor de un circuito material, en un fluido ideal, es una constante de movimiento.

La figura 2.5.2, muestra de manera esquemática el teorema de Kelvin.

$\ddagger \frac{D}{Dt} (dx_j) = d \left(\frac{Dx_j}{Dt} \right) = d \left(\frac{\partial x_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \right) = du_j$ el tiempo y las coordenadas espaciales son independientes

entre sí, por lo que $\frac{\partial x_j}{\partial t} = 0$, además $\frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{jk}$.

\S Se hace la suposición de que cualquier fuerza de cuerpo por unidad de masa q_i que actúa sobre el fluido es conservativa. Por lo que q_i , de la ecuación 1.7.2., puede ser escrita como el gradiente de una función escalar ϕ .

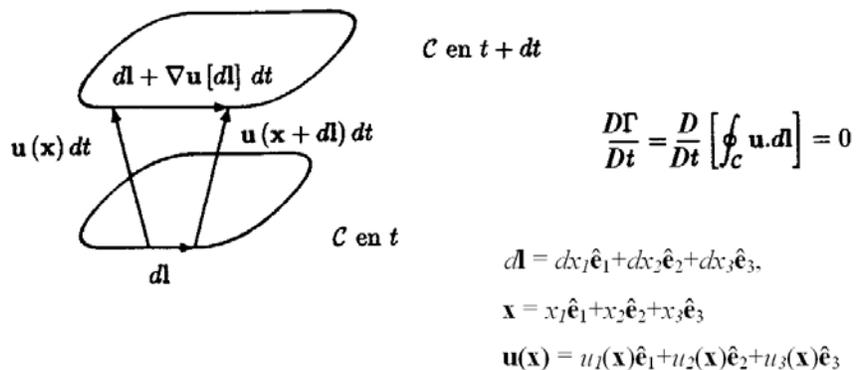


Figura 2.5.2. El Teorema de Kelvin.

Lo anterior puede ser reescrito en términos de la vorticidad, pues en el capítulo 1 se vio que la vorticidad y la circulación están relacionadas por lo que se usará ésta última para determinar la razón de cambio de la vorticidad—que debe ser cero—calculando su derivada material, es decir:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_S \bar{\omega} \cdot \bar{n} dS = 0 \quad \dots 2.5.2)$$

Esto quiere decir que si se sigue un contorno dado mientras fluye, la vorticidad dentro de ese contorno no cambiará; es decir, el flujo de vorticidad a través de una superficie material que se desplaza con el fluido permanece constante a lo largo del movimiento. Este resultado quiere decir que hay conservación de momento cinético, la versión cinemática del momentum angular, pues si se considera un elemento de vórtice de longitud L , radio R y vorticidad media ω :

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int_S \bar{\omega} \cdot \bar{n} dS = \pi R^2 \omega \quad \dots 2.5.3)$$

La conservación de la circulación se traduce a $R^2 \omega = Cte$

La ecuación $\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$ aplica sólo a regiones simple-conexas, es decir, regiones en las que cualquier curva cerrada puede ser contraída continuamente hasta hacerla un punto. Y se traduce en que para cualquier contorno cerrado en el sistema que contenga sólo fluido, habrá un valor definido de la circulación Γ . El valor de Γ no cambiará alrededor de ese contorno aunque éste sea deformado por el flujo. Un contorno cerrado que originalmente no contenía cuerpo alguno, no podrá, en ningún tiempo subsecuente, tener contenido cuerpo alguno (la región dejaría de ser simple conexa). La vorticidad total de un vórtice filamental se mantiene fija y no cambia mientras éste fluye o se distorsiona. [7]

2.6 El movimiento de los vórtices

La cinemática y la dinámica del movimiento de vórtices en un desplazamiento uniforme de fluido están dadas por :

$$\vec{\omega}(\vec{x},t) = \nabla \times \vec{u}(\vec{x},t) \quad \dots 2.6.1)$$

(hay que recordar que la vorticidad es solenoidal por construcción, es decir, $\nabla \cdot \vec{\omega} = 0$) y

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} - \vec{\omega}(\nabla \cdot \vec{u}) + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{\omega} + \nabla \times \vec{F} \quad \dots 2.6.2)$$

Ésta última ecuación se obtiene al aplicar el rotacional a la forma vectorial de la ecuación de conservación de momentum para un fluido viscoso. Se desea que se cumpla el teorema de Kelvin, por lo que es necesario suponer que el fluido no es viscoso, es decir, el término de difusión viscosa, $\nu \nabla^2 \vec{u}$, es cero, por ser ν nula; se puede suponer también que el flujo es barotrópico, es decir, los planos de presiones constantes y los planos de densidades constantes son paralelos, dicho de otra manera: $\nabla \rho \times \nabla P = \vec{0}$. Que el fluido es incompresible y μ es constante, entonces, $\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{\omega}$ toma la forma, $\nu \nabla^2 \vec{\omega}$, que es más usual en los textos; si el fluido es incompresible la relación $\nabla \rho \times \nabla P$ es cero pues $\nabla \rho = 0$, esto también es cierto para la atmósfera terrestre si los fenómenos estudiados se toman en intervalos alturas pequeñas; además $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, por lo que

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} + \nabla \times \vec{F} \quad \dots 2.6.3)$$

\vec{F} es la densidad de fuerza de cuerpo externa y $\nabla \times \vec{F}$ es diferente de cero en caso de tratarse de una fuerza no conservativa y $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}$ es el término responsable del estiramiento, que existe sólo para flujos tridimensionales, para un flujo bidimensional $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} \equiv 0$ y no es posible describir el alargamiento de vórtices. Lo interesante de estas ecuaciones (en realidad se trata de un conjunto de tres ecuaciones escalares) es que no tienen los términos de presión o de gravedad (fuerza conservativa) que se encuentran en las ecuaciones de Navier-Stokes, sólo contienen términos en los que interviene la velocidad.[5]

2.7 Impulso

Lo siguiente es válido para un sistema de vórtices de dimensiones finitas en un fluido incompresible que llena un espacio infinito y se encuentra en reposo en el infinito. Asociado a los vórtices está su impulso \vec{I} definido como:

$$\vec{I} = \frac{1}{2} \rho \int_V \vec{r} \times \vec{\omega} dV \quad \dots 2.7.1)$$

Esto puede ser interpretado físicamente como el impulso de las fuerzas de cuerpo que deben ser aplicadas para generar los vórtices en el fluido inicialmente en reposo. El volumen de integración en la ecuación 2.7.1 se extiende sobre todo el espacio ocupado por los vórtices.[9] [10] [22].

2.8 El campo de velocidades

El campo de velocidades producido por un vórtice viene de la integración de la ecuación 2.4.3 y es:

$$\vec{u}(\vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\omega}(\vec{x}) \times \vec{r}}{r^3} dV_x \quad \dots 2.8.1$$

($\vec{r} = \vec{x}' - \vec{x}$). La contribución de una línea de vórtice de intensidad Γ está dada por la ley de Biot-Savart:

$$\vec{u}(\vec{x}') = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_V \frac{d\vec{s}_x \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \nabla \Theta \quad \dots 2.8.2$$

donde Θ es el ángulo sólido subtendido en \vec{x}' por la línea de vórtice. Esta integral es divergente cuando \vec{x}' yace en el vórtice de línea, a menos que el radio de curvatura R en el punto sea infinito. Cuando $\vec{x}' \rightarrow \vec{x}$

$$u(\vec{x}') \approx \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\vec{t} \times \vec{r}}{r^2} + \frac{\Gamma \vec{b}}{4\pi R} \log \frac{R}{r} \quad \dots 2.8.3$$

donde \vec{t} y \vec{b} son la tangente y la binormal a la línea en \vec{x} . El primer término describe el movimiento circulatorio alrededor del vórtice. La singularidad en el segundo término puede ser removida al darle al vórtice una sección transversal finita y causa una traslación autoinducida de un filamento curvo en dirección de su binormal a una razón que depende logáritmicamente del radio del núcleo [10].

Un filamento de vórtice rectilíneo, con simetría axial, estacionario, de intensidad Γ en un fluido no confinado tiene el campo de velocidades:

$$u_r = 0 \quad u_\theta = V(r) \quad u_z = W(r) \quad \dots 2.8.4$$

donde V y W son funciones arbitrarias que satisfacen $rV \rightarrow \frac{\Gamma}{2\pi}$ y $W \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$ la circulación alrededor del vórtice es $\lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r V = \Gamma$. Las líneas de flujo son hélices alrededor del núcleo, círculos cuando $W = 0$. Los casos comúnmente considerados son núcleo uniforme de radio a , con vorticidad y velocidad axial uniformes,

$$V = \frac{\Gamma r}{2\pi a^2} \quad W = W_0 \quad r < a, \quad \dots 2.8.5)$$
$$V = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad W = 0 \quad r > a;$$

Haciendo $a=0$ se obtiene una línea de vórtice recta [10].

Capítulo 3

Vórtices anulares

En 1858, William Barton Rogers (un científico estadounidense casualmente fundador del M.I.T.) escribió: “desde hace tiempo ha sido un hecho familiar que...las explosiones dan lugar...a un anillo...el cual...exhibe una rotación en cada elemento vertical alrededor del eje curvo de la figura”. Describió sus experimentos de anillos “rotantes” en agua y en aire en el que observó la mayor parte de las características: la generación de un anillo por el impulso aplicado a través de un orificio, el enrollamiento de las placas espirales, la formación de un anillo que se traslada y la destrucción de anillos formados por gotas de un fluido más pesado.

Mucho del trabajo teórico inicial en vórtices anulares fue iniciado por William Thomson (Lord Kelvin) después de la publicación del artículo fundamental de Helmholtz (1858). Observando experimentos de Tait [21] sobre la formación de vórtices anulares en aire, Thomson (1867) sugirió que el vórtice anular en un fluido ideal, siendo indestructible, era el constituyente básico de la materia, el átomo. Para explicar el contenido de frecuencias de las líneas espectrales obtenidas de varias sustancias, mucho de este trabajo inicial fue dirigido hacia el cálculo de posibles modos de oscilación (y frecuencias correspondientes) de filamentos de vórtice. En 1880 Thomson presentó la solución para un tubo de vorticidad recto. Describió también cualitativamente, la solución para los modos de oscilación del vórtice anular requerida para completar la teoría del átomo-vórtice (Thomson 1867). Aunque no terminó este análisis, él tenía confianza en que “el fenómeno conocido de...vórtices anulares...nos...convence...que la configuración estacionaria...es estable”. [21]

3.1 Formulación de los vórtices anulares

Si se toma un globo ordinario, de los que se usan en las fiestas, se llena de aire y se le arroja a una velocidad de entre de 5 m/s y 10 m/s, recorre una distancia de unos 1.5 m a 2 m. Por otro lado se sabe desde hace tiempo que si se proyecta con la misma velocidad la misma masa de aire (lanzándolo desde un tubo por un pistón, por ejemplo) ésta recorre una distancia de 10 a 15 veces más grande.

El experimento muestra que el movimiento se desarrolla conforme a lo descrito en la figura 3.1.1., donde las líneas de corriente para un flujo son visualizadas con respecto a un sistema coordenado que se desplaza con la masa de aire lanzada. El flujo tiene simetría axial; tiene vorticidad en el interior de un dominio convexo generado por la revolución del pedazo ABC de la línea de corriente, y es prácticamente potencial en el exterior. Sobre ABC las velocidades de flujo externo e interno coinciden de manera que el campo de velocidades es continuo. Lo que explica el efecto por el que se comenzó: dada la continuidad del campo de velocidades, la fricción sobre la frontera de la masa de aire sin cubierta, es más pequeña que para la masa de aire contenida en el globo, por lo tanto la resistencia es más pequeña y la distancia recorrida es más grande [15].

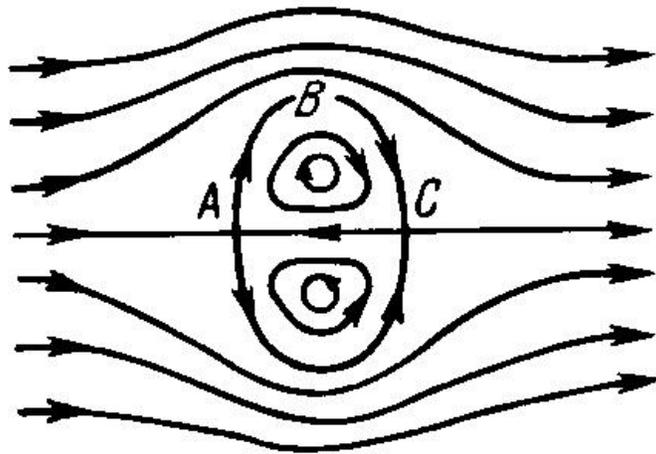


Figura 3.1.1. Líneas de corriente para un vórtice anular con respecto a un eje coordenado que se desplaza con éste. [15]

La explosión de una bomba se caracteriza por la formación de un hongo cuya estructura es análoga a la del vórtice anular ilustrada en la fotografía de la figura 3.1.2, esta figura muestra un vórtice anular todavía en formación desplazándose en agua, este hongo se eleva a una gran velocidad a una altura de varios metros o kilómetros. Un efecto análogo acompaña la explosión de grandes cargas de explosivos ordinarios [15].

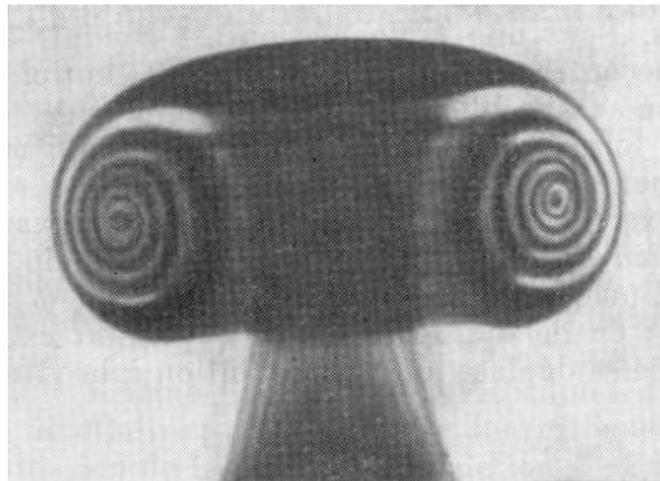


Figura 3.1.2. Visualización de una sección transversal de un vórtice anular [15]

A finales de los 70's principio de los 80's se trataba de utilizar los vórtices anulares para la evacuación de humo, de gases nocivos, etc., lanzados a la atmósfera por las industrias.

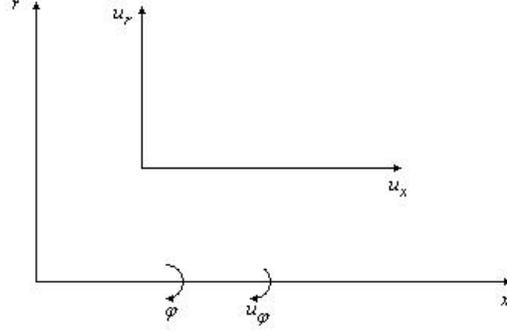


Figura 3.1.3. Ejes coordenados en coordenadas cilíndricas polares de posición y velocidad, para un flujo con simetría axial.

Hay otra manera de investigar el fenómeno, que es buscar la solución de anillos de núcleos delgados. Para ello se usan coordenadas polares cilíndricas* (r, φ, x) , con r radial, x axial y φ azimutal, las componentes correspondientes de la velocidad \vec{u} son (u_r, u_φ, u_x) , ver figura 3.1.3. La simetría axial requiere que $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$. Se hace la suposición de que el fluido es incompresible y que existe una función de corriente $\psi(x, r, t)$ tal que:

$$u_x = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \dots 3.1.1)$$

Si no se imponen restricciones a la velocidad de giro u_φ se obtienen, explícitamente, las componentes del vector vorticidad [9]. Las componentes de la vorticidad $\vec{\omega}$ son

$$\left(-\frac{\partial u_\varphi}{\partial x}, \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\varphi r)}{\partial r} \right) = (\omega_r, \omega_\varphi, \omega_x) \quad \dots 3.1.2)$$

* Las derivadas en coordenadas cilíndricas: Sean $f = f(\rho, \varphi, z)$ y $\vec{B} = (B_\rho, B_\varphi, B_z)$ una función escalar y una vectorial respectivamente, entonces se tienen las siguientes relaciones [16]:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad ; \quad \nabla f = \hat{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \hat{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right) + \hat{\varphi} \left(\frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \right) + \hat{z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\rho}{\partial \varphi} \right) ;$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Se desea estudiar vórtices anulares que no tienen velocidad de giro a lo largo de su núcleo, o velocidad paralela a la circunferencia que forma el centro del núcleo.

Las ecuaciones que acoplan la función de corriente ψ y la rotación $\omega = \omega_\phi$ se escriben

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\omega}{r} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega}{r} \right) = 0, \quad \dots 3.1.3)$$

$$\omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \quad \dots 3.1.4)$$

la segunda es la vorticidad azimutal en términos de la función de corriente, que escrita de una forma un poco diferente se ve como:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r\omega \quad \dots 3.1.5)$$

Se desprende de la ecuación 3.1.3 que el cociente ω/r , es constante a lo largo de una línea de corriente, es decir

$$\omega = rF(\psi) \quad \dots 3.1.6)$$

con F arbitraria. De esto se hablará más adelante [9].

Nótese que si $u_\phi = 0$ (i.e. no hay giro), entonces, el vector potencial \bar{B} está relacionado con la función de corriente por

$$\bar{B} = \frac{\psi}{r} \hat{\phi} \quad \dots 3.1.7)$$

Donde $\hat{\phi}$ es un vector unitario en la dirección azimutal.

Partiendo del vector potencial como solución de la ecuación de Poisson, tomando en cuenta la ecuación 2.4.1)

$$\bar{B} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\bar{\omega}'}{\|\bar{s}\|} dV_{\bar{x}'} \quad \dots 3.1.8)$$

utilizando la ecuación 3.1.7 y usando las siguientes sustituciones

$$\|\bar{s}\| = \left[r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\phi - \phi') + (x - x')^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \dots 3.1.9)$$

$$dV_{\vec{x}'} = r' dx' dr' d\varphi' \quad \dots 3.1.10)$$

$$\vec{\omega}' = \omega' \cos(\varphi - \varphi') \hat{\phi}' + \omega' \text{sen}(\varphi - \varphi') \hat{\rho}' \quad \dots 3.1.11)$$

que son: $\|\vec{s}\|$ el tamaño del vector posición \vec{s} , $dV_{\vec{x}'}$ la diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas y el vector ω' vorticidad en el anillo. Sustituyendo $\theta = \varphi - \varphi'$ se obtiene lo siguiente para la función de corriente en el punto (x, r) del campo

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \iint rr' \omega(x', r') dx' dr' \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{[r'^2 + r^2 + (x' - x)^2 - 2rr' \cos \theta]^{1/2}} \quad \dots 3.1.12)$$

Se introduce la siguiente función como ayuda para encontrar otra manera de escribir la función potencial

$$\psi = \frac{\kappa rr'}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{[r'^2 + r^2 + (x^2 - x'^2) - 2rr' \cos \theta]^{1/2}} \quad \dots 3.1.13)$$

donde $\kappa = \iint \omega(r', x') dx' dr'$. Esta integral puede ser expresada en términos de las integrales elípticas completas del primer y segundo tipo de módulo k definido por

$$K(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - k^2 \text{sen}^2 y)^{-\frac{1}{2}} dy \quad E(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - k^2 \text{sen}^2 y)^{\frac{1}{2}} dy \quad \dots 3.1.14)$$

donde

$$k^2 = \frac{4rr'}{[(x - x')^2 + (r + r')^2]} = 1 - \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad \dots 3.1.15)$$

Aquí, s_1 y s_2 son las distancias mínima y máxima desde el punto de campo hasta el círculo (vórtice, en este caso)[†]. Por transformaciones estándares

$$\psi = \frac{\kappa (rr')^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right] \quad \dots 3.1.16)$$

La transformación de Landen, según Lamb, da una forma alternativa

$$\psi = \frac{\kappa}{2\pi} (s_1 + s_2) [K(\lambda) - E(\lambda)], \quad \text{con } \lambda = \frac{s_2 - s_1}{s_2 + s_1} \quad \dots 3.1.17)$$

[†] Las distancias s_1 y s_2 son explícitamente: $s_1^2 = (r - r')^2 + (x - x')^2$ y $s_2^2 = (r + r')^2 + (x - x')^2$

como un filamento circular de circulación κ es equivalente a la distribución de superficie de dipolos de intensidad uniforme κ llenando el círculo, puede ser usada la separación de variables para obtener el potencial de velocidad y por lo tanto la función de corriente como integrales de las funciones de Bessel. Lo que da

$$\psi = \frac{1}{2} \kappa r a \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} J_1(\lambda r) J_1(\lambda a) d\lambda \quad \dots 3.1.18)$$

para $x > 0$. [9].

Un tema de interés es la existencia de vórtices anulares estacionarios en fluidos inviscidos. En la ausencia de giro el problema puede ser expresado como sigue:

¿Existirá una región A , con frontera ∂A , con $\omega_\phi = 0$ fuera de A , una velocidad U y distribución de vorticidad $\omega_\phi = rF(\Psi)$ dentro de A , tal que la solución Ψ de la ecuación integral

$$\Psi(x, r) = -\frac{1}{2} U r^2 + \iint_A r' F(\Psi(x', r')) G(x - x', r, r') dx' dr' \quad \dots 3.1.19)$$

sea constante en ∂A ? En general en ∂A hay un salto en la vorticidad y la continuidad de la velocidad implica la continuidad de la presión. De aquí se observa que la ecuación 3.1.13 puede ser interpretada como una función de corriente en (x, r) asociada a un filamento de vórtice circular infinitesimal de radio a e intensidad $dx dr$ en el plano $x=0$. La función F es arbitraria y hay dos casos límite de interés. El caso en que $F \equiv \text{constante}$ es llamado el vórtice anular uniforme, es un caso de enlace entre un flujo de vórtice dentro de A y potencial fuera. Si $F = 0$ dentro de A , el anillo está vacío; en este caso la frontera será una hoja de vórtices y F será una función delta. [9]

El desplazamiento en el infinito, debiendo ser F potencial, tiene que anularse fuera de un cierto dominio interior a una línea de corriente cerrada sobre la cual las componentes de la velocidad deben ser nulas. Bajo esta forma el problema no ha sido estudiado ni siquiera para las formas elementales de F y no se conocen más que ejemplos aislados de soluciones exactas y aproximadas. Una solución exacta es el “vórtice esférico de Hill”. En éste, la rotación se distribuye en el interior de una bola de radio R según la ley $\omega = b^2 r$, siendo b constante; fuera de la bola la corriente es potencial, dentro, el fluido se desplaza con el vórtice a una rapidez

$$U = \frac{2}{15} b^2 R \quad \dots 3.1.20)$$

con respecto a un sistema de coordenadas inmóvil [15].

Los vórtices de este tipo no se observan en los experimentos. Un mejor parecido con las observaciones es presentado por la solución aproximada obtenida por Maxwell en el caso en el que el dominio de la vorticidad es un toroide donde el radio a de la sección transversal es mucho más pequeño que el radio R del toro. El vórtice toroidal de Maxwell se desplaza con la rapidez

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left(\log \frac{8R}{a} - \frac{1}{4} \right) \quad \dots 3.1.21)$$

y el aspecto de las líneas de corriente depende del cociente R/a [15].

La figura 3.1.4. muestra las líneas de corriente para diferentes R/a ; el dominio que se desplaza con el vórtice está achurado. Para $R/a > 86$, este dominio, tanto como el de rotación, es toroidal. [15].

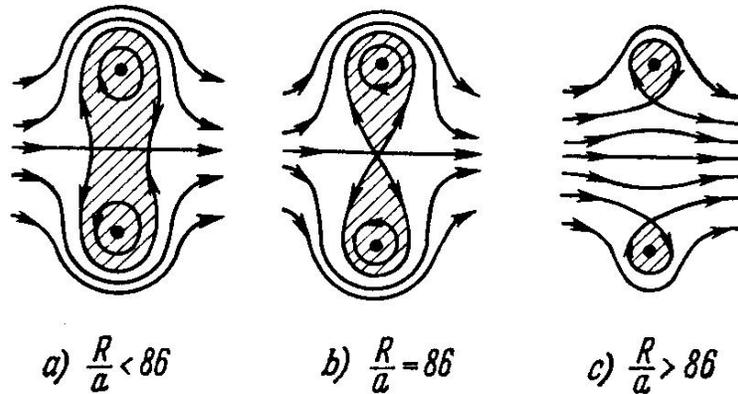


Figura 3.1.4. Líneas de corriente y fluido que se desplaza con el vórtice según la razón R/a [15]

En la variante plana del problema del vórtice anular, la rotación debe ser constante sobre las líneas de corriente, sea $\omega = F(\Psi)$. Cuando F es constante, este problema coincide con aquel de enlace de flujos potencial y de vórtice. La solución exacta existe para el caso en el que $F(\Psi) = b^2 \Psi$, donde b es una constante. Pero ésta se aparta mucho de la realidad.

El esquema del fluido perfecto admite diversos modelos de vórtices anulares, este esquema no provee ninguna condición para la determinación de la forma de la función F y del dominio donde la rotación es no nula. Por lo tanto, las soluciones obtenidas en el caso de un fluido no viscoso incompresible no permiten determinar la variación de rapidez y de dimensiones de los vórtices observados en los experimentos.

3.2 Vórtices anulares.

Estos vórtices anulares están formados por un tubo de vórtice de diámetro pequeño, cerrado sobre sí mismo, y semejante a una línea que constituye el núcleo del vórtice, ver la figura 3.2.1. La circulación Γ es constante a lo largo de todo el contorno que rodea una vez esta línea. El vórtice anular es una estructura de vorticidad muy estable, asociada usualmente a obstáculos u orificios, con o sin simetría circular en hidrodinámica [11].

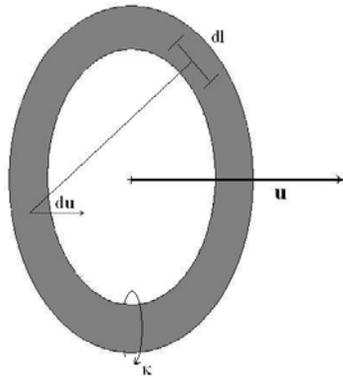


Figura 3.2.1. Vórtice anular.

Un vórtice anular, posee una energía cinética y una cantidad de movimiento que representan la energía cinética y el impulso del fluido puesto en movimiento en esa estructura: es por ello que se puede detectar un efecto de choque cuando impacta un vórtice anular con una pared sólida o apagar la llama de una vela al pasar por ella [11].

3.3 Energía e Impulso para un sistema de vórtices.

Si se considera un sistema de vórtices de dimensiones finitas, en un fluido incompresible que llena un espacio infinito y que se encuentra en reposo en el infinito, la energía cinética del sistema es:

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho \|\bar{u}\|^2 dV \quad \dots 3.3.1)$$

o involucrando la vorticidad

$$T = \rho \iiint \bar{u} \cdot (\bar{l} \times \bar{\omega}) dV \quad \dots 3.3.2)$$

ρ es la densidad del fluido \bar{u} la velocidad de desplazamiento de los vórtices, \bar{l} el vector posición $\bar{\omega}$ la vorticidad y dV el elemento de volumen.

Si los vórtices son circulares y su eje de simetría es el eje Ox, entonces, en coordenadas cilíndricas se tiene lo siguiente

$$\bar{l} = r\hat{r} + x\hat{x} \quad \text{o} \quad \bar{l} = (r, 0, x)$$

$$\bar{u} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + \frac{dx}{dt} \hat{x} = u_r \hat{r} + u_x \hat{x} \quad \text{o} \quad \bar{u} = (u_r, 0, u_x)$$

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \hat{\phi} \quad \text{o} \quad \vec{\omega} = \left(0, \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r}, 0 \right) = (0, \omega_\phi, 0)$$

$$dV = r dr d\phi dx$$

Al sustituir en la energía cinética para la expresión 3.3.1:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \iiint \|(u_r, 0, u_x)\|^2 r dr d\phi dx = \rho \pi \iint \left(u_r \frac{\partial \psi}{\partial x} - u_x \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r dr dx = \rho \pi \iint \psi \omega r dr dx \\ &= \rho \pi \Sigma \kappa \psi \quad \dots 3.3.3) \end{aligned}$$

Al sustituir en la energía cinética para la expresión 3.3.2:

$$T = \rho \iiint (u_r, 0, u_x) \cdot \left((r, 0, x) \times \left(0, \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r}, 0 \right) \right) r dr d\phi dx$$

después de integrar de 0 a 2π con respecto a ϕ la energía cinética queda

$$T = 2\pi \rho \iint (ru_x - xu_r) \omega r dr dx = 2\pi \rho \Sigma \kappa (ru_x - xu_r) \quad \dots 3.3.4)$$

Lo que indica que calcular las integrales es lo mismo que sumar sobre todos los vórtices que formen parte del sistema. κ representa la intensidad $\omega \delta x \delta r$ de un elemento de filamento de vórtice.

El impulso está definido por 2.7.1. [9] [10] [22]

$$\vec{I} = \frac{1}{2} \rho \int_V \vec{r} \times \vec{\omega} dV \quad \dots 3.3.5)$$

En el caso de vórtices circulares, el impulso se reduce a la componente a lo largo del eje Ox.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \rho \int_V (\vec{r} \times \vec{\omega}) \cdot \hat{x} dV = \frac{1}{2} \rho \iiint (-x\omega_\phi, 0, r\omega_\phi) \cdot (0, 0, 1) r dr d\phi dx \\ &= \frac{1}{2} \rho \iiint r \omega r dr d\phi dx \end{aligned}$$

Al integrar ésta última de 0 a 2π con respecto a ϕ , se tiene para el impulso lo que sigue

$$I = \pi \rho \iint r^2 \omega r dr dx = \pi \rho \Sigma \kappa r^2 \quad \dots 3.3.6)$$

como en el caso de la energía cinética, integrar es equivalente a sumar sobre todos los vórtices que forman parte del sistema y κ representa la intensidad $\omega \delta x \delta r$ de un elemento de filamento de vórtice.

Si se usan las siguientes ecuaciones:

$$x_0 = \frac{\sum \kappa r^2 x}{\sum \kappa r^2}, \quad R = \frac{\sum \kappa r^2}{\sum \kappa} \quad \dots 3.3.7)$$

se determina un círculo cuya posición depende de las intensidades y configuraciones de los vórtices y no de la posición del origen en el eje de simetría, puede ser llamado el eje circular de todo el sistema de vórtices anulares [1].

La κ es constante para cada vórtice, si el impulso es constante, el eje circular debe ser de radio constante. Para encontrar su movimiento paralelo al eje de Ox, sobre el que se aplicó el impulso se tiene de 3.3.7:

$$\sum \kappa R^2 \frac{dx_0}{dt} = \sum \kappa r^2 \frac{dx}{dt} + 2 \sum \kappa r x \frac{dr}{dt} = \sum \kappa r (r u_x + 2 x u_r) \quad \dots 3.3.8)$$

Con ayuda de la energía cinética, ec.3.3.4, se tiene

$$\sum \kappa R^2 \frac{dx_0}{dt} = \frac{T}{2\pi\rho} + 3 \sum \kappa r (x - x_0) u_r \quad \dots 3.3.9)$$

donde los términos sumados se desvanecen por ser $\sum \kappa r u_r = 0$ debido a que el radio medio R es constante.

3.4 Vórtice anular aislado

Considérese el caso de un vórtice anular cuyas dimensiones de la sección transversal, son pequeñas comparadas con el radio (R). Se ha mostrado que

$$\psi = \frac{1}{\pi} \iint \left\{ K \left(\frac{s_2 - s_1}{s_2 + s_1} \right) - E \left(\frac{s_2 - s_1}{s_2 + s_1} \right) \right\} (s_1 + s_2) \omega' dx' dr' \quad \dots 3.4.1)$$

donde s_1 y s_2 están definidos como en la nota al pie de página seguida de la ecuación 3.1.15. Para puntos (x, r) dentro o cerca del vórtice, la razón s_1 y s_2 es pequeña, y el módulo (λ) de las integrales elípticas es muy cercano a la unidad. Se tiene entonces

$$K(\lambda) = \frac{1}{2} \log \frac{16}{\lambda'^2}, \quad E(\lambda) = 1 \quad \dots 3.4.2)$$

aproximadamente, donde λ' denota el módulo complementario, viz.

$$\lambda'^2 = 1 - \lambda^2 = \frac{4s_1s_2}{(s_1 + s_2)^2} \quad \dots 3.4.3)$$

o, $\lambda'^2 = 5s_1/s_2$ aproximadamente.

Por lo tanto en puntos dentro del vórtice el valor de ψ es del orden de $\kappa R \log(R/\varepsilon)$, donde ε es una magnitud lineal pequeña comparable con las dimensiones de la sección y R es el radio medio del anillo. Las velocidades en tales puntos, que dependen de los coeficientes diferenciales de ψ , serán del orden de κ/ε [1].

Ahora se puede estimar la magnitud de la velocidad dx_0/dt de traslación del vórtice anular. Por la ecuación 3.3.3, T es del orden $\rho\kappa_2 R \log(R/\varepsilon)$, y u_r es, como ya se vio, del orden de κ/ε ; mientras $x-x_0$ es del orden de ε . El segundo término del lado derecho de la ec. 3.3.9 es, en este caso, pequeño comparado con el primero, y la velocidad de traslación del anillo es del orden de $(\kappa/R) \log(R/\varepsilon)$, y aproximadamente constante.

Entonces un vórtice anular aislado se mueve sin un cambio sensible de tamaño, paralelo a su eje rectilíneo, con velocidad casi constante. Esta velocidad es pequeña comparada con la del fluido en una vecindad inmediata del eje circular, pero puede ser mayor o menor que $1/2 \kappa R$, la velocidad del fluido en el centro del anillo, con la que coincide en dirección.

Para el caso de una sección circular se pueden obtener resultados más claros de la manera siguiente. Si se desprecia la variación de r y ω sobre la sección, las fórmulas 3.4.1 y 3.4.2 dan

$$\psi = \frac{\omega}{2\pi} R \iint \left(\log \frac{8R}{s_1} - 2 \right) dx' dr' \quad \dots 3.4.4)$$

o, si se introducen coordenadas polares (σ, φ) en el plano de la sección,

$$\psi = \frac{\omega}{2\pi} R \int_0^a \int_0^{2\pi} \left(\log \frac{8R}{r_1} - 2 \right) \sigma' d\sigma' d\varphi' \quad \dots 3.4.5)$$

donde a es el radio de la sección. Ahora

$$\int_0^{2\pi} \log r_1 d\varphi' = \int_0^{2\pi} \log \left\{ \sigma^2 + \sigma'^2 - 2\sigma\sigma' \cos(\varphi - \varphi') \right\}^{\frac{1}{2}} d\varphi' \quad \dots 3.4.6)$$

y se sabe que esta integral definida es igual a $2\pi \log \sigma'$, o $2\pi \log \sigma$, de acuerdo a si $\sigma' > \sigma$. Por lo que, para puntos dentro de la sección,

$$\begin{aligned} \psi &= \omega R \int_0^\sigma \left(\log \frac{8R}{\sigma} - 2 \right) \sigma' d\sigma' + \omega R \int_\sigma^a \left(\log \frac{8R}{\sigma'} - 2 \right) \sigma' d\sigma' = \\ &= \frac{1}{2} \omega R a^2 \left(\log \frac{8R}{a} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{a^2} \right) \end{aligned} \quad \dots 3.4.7)$$

La única parte variable de esto es el término $\frac{1}{4} \omega R \sigma^2$; esto muestra que a ese orden de aproximación las líneas de corriente dentro de la sección son círculos concéntricos, siendo la velocidad $\frac{1}{2} \omega \sigma$ a una distancia σ del centro. En la figura 3.4.1. b) se observan las líneas de corriente alrededor del núcleo del anillo, además de las líneas de vórtice y la dirección de desplazamiento del vórtice, en ambos incisos de la figura.

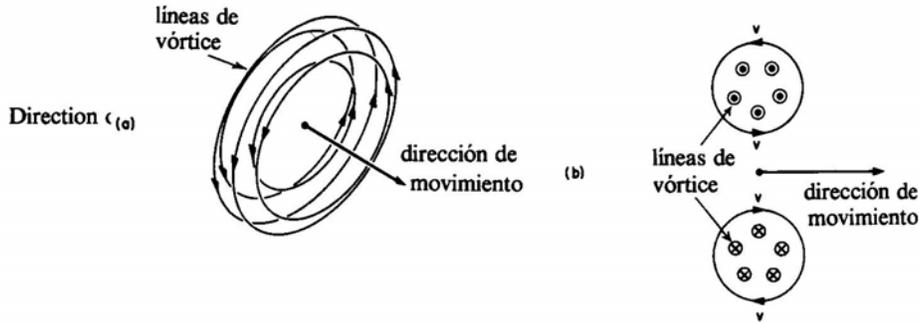


Figura 3.4.1. Vórtice anular en movimiento, (a) las líneas de vorticidad, (b) Una sección transversal del anillo. [27]

Sustituyendo en 3.3.3 se encuentra

$$\frac{T}{2\pi\rho} = \frac{1}{2} \omega \int_0^a \int_0^{2\pi} \psi \sigma d\sigma d\varphi = \frac{\kappa^2 R}{4\pi} \left\{ \log \frac{8R}{a} - \frac{7}{4} \right\} \quad \dots 3.4.8)$$

El último término en 3.3.9 es equivalente a

$$\frac{3}{2} R \omega \Sigma \kappa (x - x_0)^2 \quad \dots 3.4.9)$$

En la notación actual, donde la κ denota la intensidad de todo el vórtice, eso es igual a $\frac{3}{8} \kappa^2 R / \pi$. Por lo tanto, la fórmula para la velocidad de traslación del vórtice anular se transforma en

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{\kappa}{4\pi R} \left\{ \log \frac{8R}{a} - \frac{1}{4} \right\} \quad \dots 3.4.10)$$

El vórtice anular lleva consigo, una cierta cantidad de fluido que se desplaza sin rotación, en su camino. De acuerdo con la fórmula 3.4.10, la velocidad de traslación del vórtice

anular será igual a la velocidad del fluido en el centro de éste, cuando se llegue a un valor crítico $R/a = 86$, aproximadamente. La masa acompañante puede tener o no forma de anillo, dependiendo de si R/a excede o queda por debajo del valor crítico [1].

3.5 La influencia de la viscosidad.

La viscosidad de un fluido conduce a la disipación de la energía lo que hace que el movimiento del vórtice sea no estacionario en la ausencia de fuerzas externas. Podría esperarse que la ley de movimiento y que la distribución de la rotación en el vórtice anular, fueran definidas por las condiciones iniciales y las condiciones a la frontera, y por lo tanto dependiera esencialmente del modo de formación del vórtice. Ahora bien, la experiencia muestra que no es así [15].

El método clásico de formación de un vórtice consiste en lo siguiente: en la cubierta frontal de una caja cuyo fondo es elástico, se hace una apertura de un diámetro sensiblemente inferior a las dimensiones de la caja. Se llena la caja de humo y se golpea el fondo, esto es precisamente lo que se muestra en la figura 3.5.1. [15].

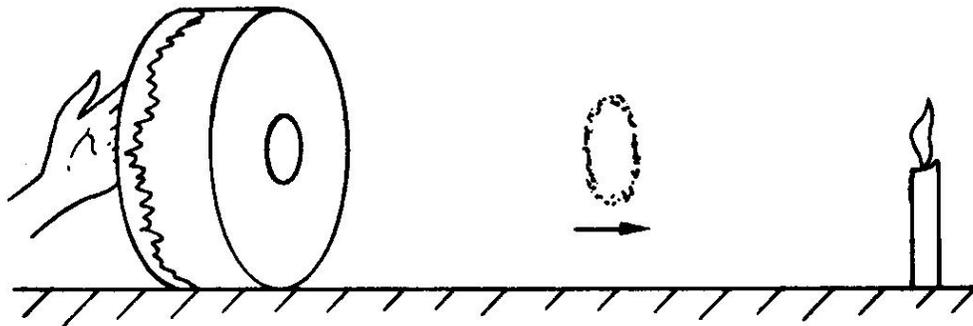


Figura 3.5.1. Formación de un vórtice anular. [27]

Para números de Reynolds pequeños, definidos por el radio y la rapidez de desplazamiento del vórtice, se forma un vórtice laminar en espiral, netamente visible en las fotografías de la figura 3.5.2. En este caso la distribución de rotación se define efectivamente por el campo de velocidades inicial, la forma de la salida, depende de la potencia del golpe, etc [15].

Por otro lado, a partir de $Re \sim 10^3$ el carácter del movimiento cambia bruscamente y se vuelve turbulento. La estructura del vórtice anular no depende (o al menos muy poco) de los detalles de las condiciones iniciales y las condiciones a la frontera. Cuando el vórtice recorre una distancia del orden de varios radios de apertura se establece una cierta distribución de la rotación que ya no depende del modo de producción del vórtice. En un vórtice turbulento el flujo medio no se define más que por el tamaño y la velocidad éste. El experimento muestra que el tamaño del vórtice aumenta linealmente con la distancia recorrida, la forma del anillo cambia de manera notable [15].

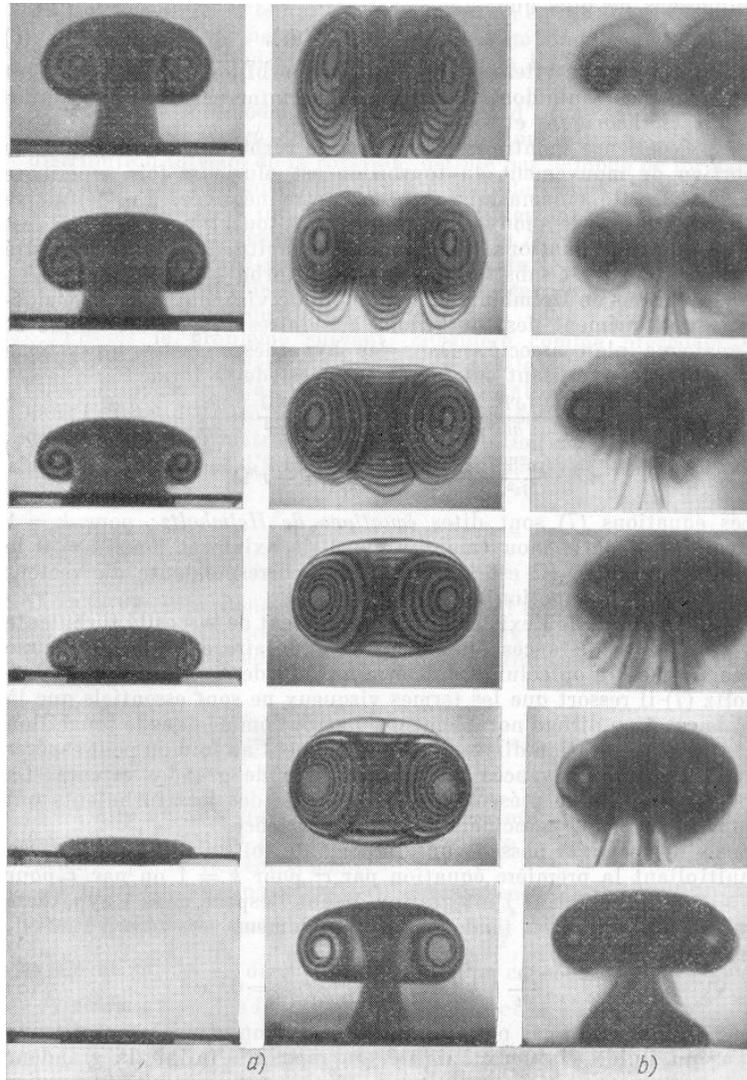


Figura 3.5.2. Vórtices anulares a) laminar, b) turbulento. [15]

3.6 Impacto con una pared

La figura 3.6.1.a indica esquemáticamente la formación de un vórtice conforme el aire fluye a través de una apertura., la figura 3.6.1.b ilustra las condiciones que prevalecen cuando un vórtice anular se encuentra con una pared paralela a su propio plano. En la pared, la condición de frontera es que la componente de la velocidad ortogonal a ella sea cero, $u_n = 0$. La condición puede ser satisfecha usando el método de imágenes, un procedimiento de utilidad general en problemas de este género. Al vórtice físicamente real en el lado izquierdo de la pared, uno suma un vórtice virtual en el lado derecho, extendiendo de esta manera a infinito el campo hidrodinámico que, físicamente, está limitado por la pared. Una partícula de aire W adyacente a la pared recibe una contribución de velocidad \mathbf{u}_1' del vórtice real μ_1 y \mathbf{u}_2' del vórtice virtual μ_2 ; de acuerdo a la ecuación ley de Biot-Savart ec. 2.4.3, \mathbf{u}_1' es perpendicular al plano subtendido por el vector \mathbf{r}_1 y el eje del elemento de vórtice μ_1 . \mathbf{u}_1' y \mathbf{u}_2' se suman a un movimiento paralelo al de la pared

satisfaciendo así la condición $u_n = 0$. Esto es cierto no sólo para los pares de elementos de vórtices en el plano del diagrama, sino para cualquier par de elementos en posición de imagen [19].

Ahora, se desea averiguar la influencia ejercida por el vórtice imagen sobre el vórtice real, † e.g. sobre el elemento superior de μ_1 , en la figura 3.7.1.b. Se espera que la acción más fuerte provenga del vecino más cercano, eso es, del elemento superior de μ_2 . Nuevamente, de acuerdo con la ley de Biot-Savart ec. 2.4.3, esta acción consiste en una velocidad inducida dirigida verticalmente hacia arriba, indicado en el diagrama por una flecha vertical en la parte más alta del elemento de la izquierda. Todos los demás elementos μ_2 contribuirán parcialmente a esta acción o, en grado menor, actuarán en su contra (e.g. el elemento más bajo de μ_2). El mismo argumento aplicado a la parte inferior de μ_1 conduce a la flecha vertical hacia abajo en el lugar de ese elemento. En el diagrama la influencia del vórtice real sobre su imagen también está indicada [19].

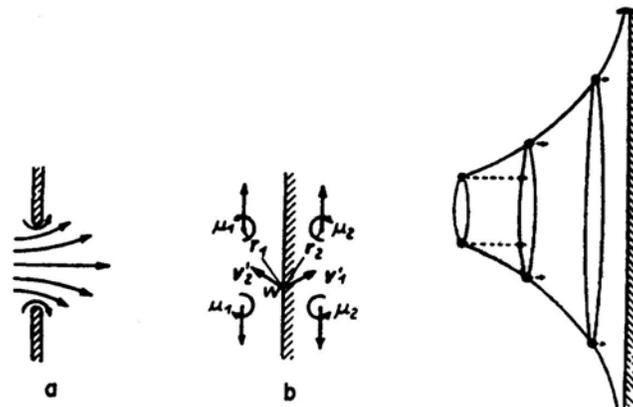


Figura 3.6.1. Vórtice anular cerca de una pared. [19]

Se observa, entonces, que el vórtice real se alarga cuando se acerca a la pared a causa de la acción hidrodinámica del vórtice imagen. Lo mismo es cierto para el vórtice imagen. Conforme el radio del anillo crece, el movimiento dirigido hacia la pared decrece, pues el movimiento de traslación del vórtice anular es inversamente proporcional al radio. Por lo que el vórtice que crece se debilita, desvaneciéndose en el infinito antes de tocar la pared. [19]

† Hablando físicamente, toda la influencia es debida a la pared, pero esta influencia es correctamente descrita con la suposición de un vórtice imagen virtual.

Capítulo 4

Desarrollo experimental

¡Que gana de ciertos autores de describir su propio trabajo y esfuerzo de manera tan impersonal!

Por medio de la anemometría* de hilo caliente, se quiere observar cómo se modifica el campo de velocidades de un vórtice anular al acercarse a una pared paralela al plano que contiene a su núcleo. Cuando el anillo está cerca de la pared, se deforma creciendo en radio y disminuye su velocidad de traslación. Con el anemómetro se consigue tener una descripción Euleriana del fenómeno, debido a que su sonda se mantiene fija durante la toma de datos. (Cap. 1).

Para hacer las mediciones fue necesario tener mucho cuidado, pues el desplazamiento de los vórtices anulares es muy sensible a las corrientes de aire y gradientes de temperatura. Esto último se hizo evidente al inicio del experimento. Antes de la toma de datos se hizo una visualización de anillos de humo, éstos se desplazaban en línea recta siempre que no se abrieran puertas, que no se moviera ningún objeto cercano a la zona de desplazamiento y que no se encendieran lámparas para fotografía cerca de esa zona; al tener una de estas lámparas encendidas un par de minutos cerca de la zona de desplazamiento, los anillos tendían a desviarse hacia arriba, por lo que fue necesario aislar la masa de aire, en la que se desplazarían los vórtices, con una cavidad rígida y evitar zonas en que la temperatura no fuera uniforme.

También es importante hacer notar que la toma de datos fue llevada a cabo únicamente con aire de manera que los vórtices no podían ser observados, pero sí detectados con la sonda del anemómetro. Hubieron dos razones para utilizar sólo aire: a) La sensibilidad y por ende la calibración de la sonda dependen de la limpieza de ésta; al utilizar humo la sonda se ensucia, haciéndose necesarias calibraciones frecuentes pero con una pérdida de sensibilidad pues la sonda tiene una capa de suciedad cubriéndola; b) Los vórtices anulares de humo no son totalmente simétricos al ser lanzados horizontalmente; por ser el humo más denso que el aire, la parte inferior del núcleo de un anillo de humo es más gruesa que la superior.

Fue utilizada una caja de acrílico transparente de 0.6 m de alto, 0.7 m de ancho y 1 m de fondo, para aislar la masa de aire en la zona de adquisición de datos de corrientes producidas en el laboratorio y, de esa manera, tener mediciones de velocidad de los vórtices anulares desplazándose en aire en reposo. Al observar el “tiempo de vida” o distancia que recorre un vórtice anular antes de desaparecer se llegó a la conclusión de que la longitud de la caja debía ser de 1 m para estudiarlo y colocar el generador de los vórtices dentro de ésta. La altura y el ancho de la caja tienen las dimensiones citadas para poder meter el sistema de desplazamiento de la sonda y darle libertad de movimiento. La ventaja de tener un material

* Anemometría, del griego Ανεμοζ , viento y -μετρια , medida. Disciplina que se encarga de la medición de la velocidad o la fuerza del viento

transparente es que deja ver el dispositivo desde fuera, lo que permite interrumpir el experimento, de ser necesario, al notar que ha habido un error en la posición o desplazamiento de los dispositivos y permite observar el comportamiento de los vórtices cuando están formados de humo, en la etapa de la preparación del experimento, antes de la toma de datos y así dejar alineado de acuerdo a la observación el dispositivo experimental.

Una placa de acrílico fue llevada al taller mecánico de la Facultad de Ciencias, para ser cortada y pegada de acuerdo a las medidas citadas. Tanto la cara anterior como la posterior de la caja fueron hechas de papel cascarrón y pegadas con Masking Tape al cuerpo de la caja, una de las caras a manera de puerta, para poder acomodar y alinear los dispositivos en el interior ésta. La figura 4.1.1 muestra el dispositivo experimental utilizado, a la izquierda se encuentra la caja de acrílico que aísla la masa de aire en la que se realiza el experimento. En la figura se observan también el anemómetro, una computadora, un generador de señales; y dentro de la caja, un sistema de desplazamiento en dos dimensiones y un motor utilizados para controlar el movimiento de la sonda del anemómetro, y la bocina que eyectó los vórtices.

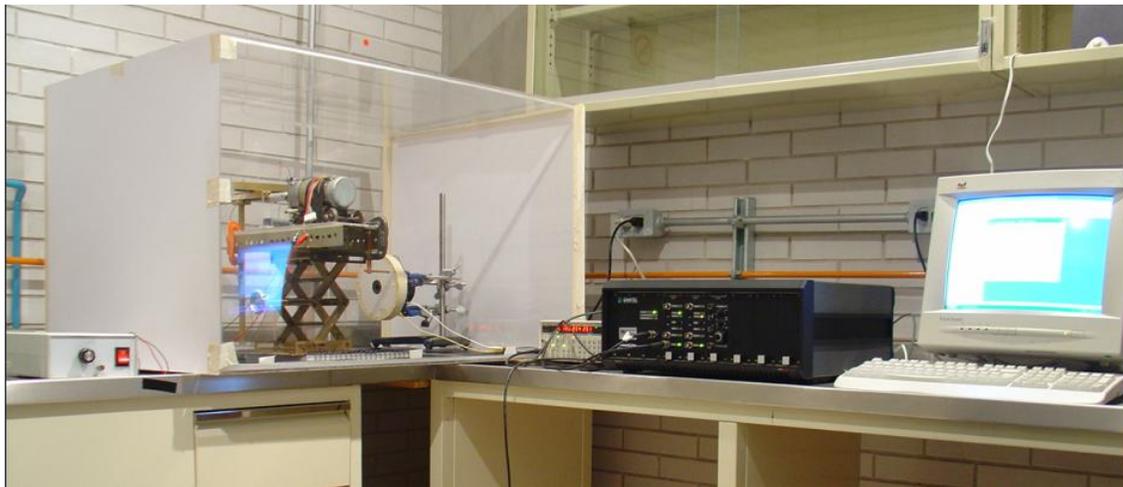


Figura 4.1.1. La caja de acrílico usada para aislar los vórtices anulares.

Fue puesta una pared plana de acrílico, a 0.17 m de distancia de la bocina generadora. Sobre esta pared impactaron los vórtices anulares y cerca de ella, a diferentes distancias, fueron tomados los datos de velocidad con respecto al tiempo de éstos. Se observó con los vórtices anulares de humo, que una pared de 0.15 m * 0.15 m bastaba para analizar la expansión de los anillos al impactar con ella. La distancia de 0.17 m fue utilizada porque al probar con anillos de humo se observó que a partir de los 0.12 m el vórtice ya había tomado la forma anular bien definida y porque se sabe que hay una región, cuando el anillo está recién formado, en la que la velocidad de desplazamiento es esencialmente constante; Después de recorrer esa región el vórtice crece en radio y disminuye sensiblemente su velocidad de desplazamiento para terminar por desvanecerse en el aire. Así se obtuvieron datos en una zona en la que la velocidad de los vórtices es constante.

4.1 La generación de los anillos

Una bocina de 70 W max, 8Ω , de 0.15 m de diámetro colocada dentro de la caja de acrílico, sirvió como pistón para la eyección y formación de los vórtices anulares. A ésta le fue anexado un cilindro de PVC de 0.15 m de diámetro y 0.03 m de altura; con cilindros de mayor longitud no se producían los anillos. Uno de los extremos del cilindro fue pegado a la bocina y el otro extremo fue tapado salvo por un orificio circular de 0.015 m de diámetro cuyo centro se encuentra sobre el eje del cilindro, (el orificio de un CD)[†]. Dentro de esta cavidad, bocina-cilindro-tapa, se encontraba el aire que sería eyectado hacia el interior de la caja de acrílico.

La bocina fue montada en un soporte universal de manera tal que el orificio de eyección fuera perpendicular al piso y así los anillos eyectados se desplazaran a lo largo de una línea horizontal. La bocina fue conectada a un generador de señales Stanford Research System modelo DS345 el cuál enviaba un pulso eléctrico de 5 V, con duración de 1 s, cada 8 s con una forma muy parecida a la rectangular, con una ligera pendiente de subida y bajada y con las esquinas redondeadas, este pulso eléctrico se transducía en un pulso mecánico que expulsaba aire del sistema bocina-cilindro hacia el interior de la caja de acrílico. Tres razones dieron pie a enviar un pulso cada 8s: al usar vórtices de humo se observó que al cabo de los 4 s posteriores al impacto ya no había rastro el paso de los anillos, al tomar datos con la sonda a los 4 s del impacto con la pared no había rastro alguno de campo de velocidades y se deseaba medir con la mayor frecuencia posible, sin embargo se dieron 4 s más de reposo al aire en la caja.

Enviar con el generador de señales una señal con forma rectangular a la bocina no funciona para los fines de este experimento pues produce dos vórtices, uno al desplazarse la membrana de la bocina hacia delante y uno al regresar, ésta, a su posición original, es decir se producen dos vórtices en un intervalo de 1s. El primero es el que se quiere medir, el segundo no da tiempo de reposo al aire en la zona de desplazamiento. Una señal de otra forma tampoco funciona. Las señales con forma de delta no logran eyectar un vórtice anular fuera de la bocina, tampoco una señal sinusoidal. La primera es demasiado breve y su efecto observado con humo es que lo acerca al orificio de salida del generador de anillos y “escurre” un poco de éste fuera de la bocina hacia el piso de la caja de acrílico. La segunda es demasiado suave y no tiene efecto alguno visible fuera del generador de vórtices.

El pulso eléctrico utilizado fue de 5V porque es el máximo que da el generador de señales. Todas las observaciones y consideraciones para los dispositivos hechos especialmente para la medición en este experimento, como la caja de acrílico, la distancia de la pared de impacto a la bocina de eyección, el sistema de desplazamiento del que se hablará posteriormente; se basaron en vórtices anulares de humo eyectados por la bocina al recibir, ésta, una señal de 5V con la forma citada anteriormente. Y se tomó ese voltaje por ser aquél con el que se conseguían los vórtices anulares más definidos y con mayor desplazamiento.

En la figura 4.1.2. se pueden ver los dispositivos utilizados para generar los anillos, el generador de señales a la izquierda y la bocina a la derecha. En este trabajo los vórtices

[†] Después de la toma de datos se hizo un generador de anillos con las mismas características salvo por que se prescindió del cilindro. Simplemente fue pegada una tapa plana con el orificio de un CD como orificio de eyección. Los anillos fueron producidos con el mismo éxito que con generador de vórtices anterior.

anulares fueron detectados y estudiados fuera de la bocina, dentro de la distancia en que se encuentran en el régimen laminar. La velocidad de desplazamiento para un anillo libre[‡] fue de 0.9 m/s.

La bocina generadora y la pared de impacto fueron alineadas de la siguiente manera: se trazó una línea en el piso de la caja de acrílico paralela a su lado corto (recordar que el piso tiene forma rectangular), a una distancia de la orilla de la caja que permitiera tener la bocina con el soporte universal dentro de ella. Con un par de escuadras, usando el ángulo de 90° de cada una, fue alineada la cara con el orificio de la bocina, con la línea dibujada en el piso, una escuadra a cada lado del orificio cerca de las orillas de la cara de la bocina. Se dibujó otra línea paralela a la anterior a una distancia de 0.17 m de ella, y sobre ésta fue colocada la cara de la pared contra la que chocarían los vórtices. La pared fue alineada con la línea de la misma manera que la bocina, asegurándose así que las caras de la bocina y la pared fueran paralelas entre ellas y perpendiculares con respecto al piso.



Figura 4.1.2. A la izquierda el generador de señales Stanford, a la derecha, la bocina generadora de vórtices anulares.

4.2 La Sonda del anemómetro de hilo caliente.

Los datos fueron tomados con una sonda Dantec 55P11 de anemómetro de hilo caliente Dantec StreamLine. Esta sonda es de las conocidas como de alambre miniatura, de tungsteno chapado con platino (Pt-plated tungsten), con un diámetro de 5 μm y una longitud de 1.25 mm. ver figura 4.2.1. Los alambres son utilizados como sensores en sondas, para hacer mediciones en aire y otros gases desde unos cuantos cm/s, hasta velocidades supersónicas. Estos sensores tienen una sensibilidad muy grande al flujo y la respuesta más alta de frecuencia y un tiempo de respuesta de 0.6 ms [33]. Los inconvenientes son que la tensión mecánica es limitada y son muy sensibles a la contaminación por partículas.

Los soportes del sensor, están hechos de acero inoxidable con puntas muy estrechas de alrededor de 0.1 mm de diámetro a las que el alambre es soldado. En las sondas miniatura los alambres enteros tienen la función de sensores. Como ventajas se encuentran,

[‡] Llamo anillo libre a aquél que, en su recorrido, no encuentra obstáculo alguno. En el caso de este experimento, no hubo pared para que éste interactuara.

que su construcción rígida los hace mejores para adquisiciones de datos a gran rapidez de flujo, sin el riesgo de oscilaciones en el sensor [26].

El principio de operación de las sondas consiste en el siguiente efecto: cuando pasa una corriente de aire alrededor de la sonda se produce un enfriamiento, pues ésta disipa el calor que se produce por efecto Joule. Este desbalance se compensa con una corriente suplementaria, de manera que la sonda siempre tenga una temperatura constante. Las fluctuaciones en el paso de la corriente por la sonda se traducen en diferencias de potencial dentro del anemómetro. La relación entre la velocidad u y el voltaje E a la salida del aparato es del tipo:

$$E^2 = A + Bu^{\frac{1}{2}} \quad \dots 4.2.1)$$

en donde A y B son constantes que se deben determinar experimentalmente. Se observa que la relación es una línea recta cuya ordenada al origen y pendiente son A y B respectivamente [25].

En este experimento se utilizó una sonda miniatura de soportes rectos y sensor perpendicular al eje de la sonda.

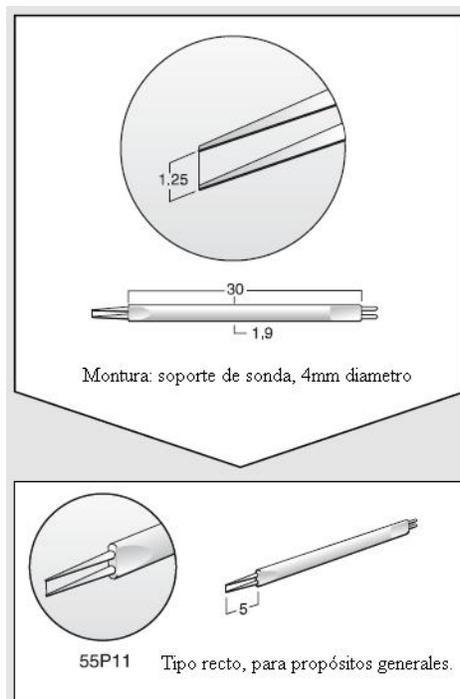


Figura 4.2.1. Sonda de Anemómetro Dantec. (Catálogo de sondas Dantec).

El funcionamiento de las sondas puede ser controlado desde el anemómetro, en éste caso particular fue utilizada una adquisición entre 0 V y 10 V. La tarjeta de adquisición de datos utilizada permite hacer adquisiciones entre 0 V y 5 V, y entre 0 V y 10 V, lo que hace es tomar el valor absoluto de la señal que recibe.

La sonda fue colocada en su porta-sondas y acomodada de manera vertical de arriba hacia abajo, en el sistema de desplazamiento, en un orificio hecho especialmente para ese

tipo de porta-sondas. La altura puede ser ajustada a todo largo del porta-sondas. De ese modo fue posible poner a la misma altura la sonda y el diámetro horizontal de los vórtices anulares.

4.3 La calibración

La calibración de la sonda fue realizada en un túnel de viento que se encuentra en el Laboratorio de Acústica del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias de la UNAM, figura 4.3.1 izquierda y figura 4.3.2. La sección transversal de dicho túnel es de 0.45 m * 0.45 m; la longitud de la sección de trabajo es de 2 m, esta sección está hecha de placas desmontables de acrílico transparente.

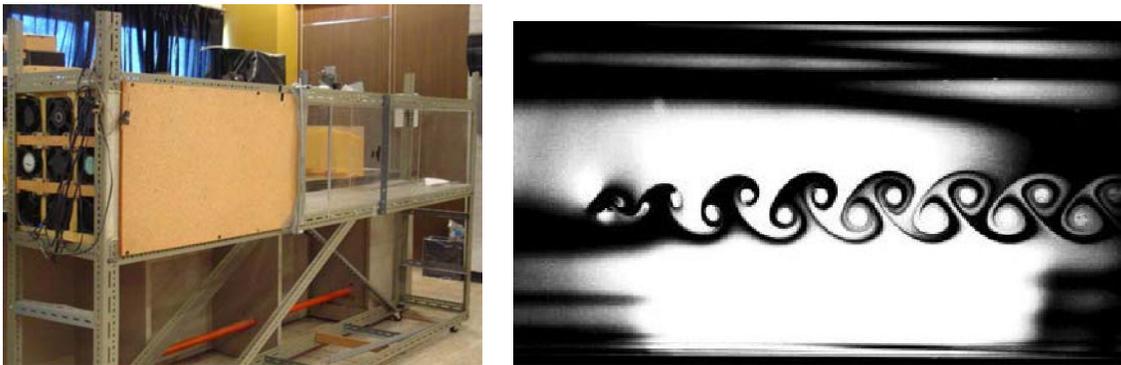


Figura 4.3.1. A la izquierda túnel de viento usado para la calibración; a la derecha la calle de vórtices de von Kármán.

Una de las placas tiene un orificio en su zona central por el cuál se introduce la sonda, de esa manera se asegura que la sonda medirá velocidades en una región en la que la influencia de las paredes será nula. El viento es impelido por 9 ventiladores de corriente alterna conectados a un variac.



Figura 4.3.2. Vista al interior del túnel de viento con sonda en la zona central de la calle de vórtices de von Kármán.

El experimento por medio del cual fueron obtenidos los datos para la calibración es el de la calle de vórtices de von Kármán, figura 4.3.1. derecha. La razón para basarse en este experimento fue que existe una relación entre la frecuencia con la que pasan los vórtices de uno de los lados de la calle con la velocidad del flujo lejos de ésta [24]

$$f = (0.212 \text{Re} - 4.5) \frac{\nu}{d^2} \quad \dots 4.3.1$$

donde f es la frecuencia con la que pasan los vórtices en uno de los lados de la calle de von Kármán, Re el número de Reynolds, ν la viscosidad cinemática y d el diámetro del obstáculo asociado a la producción de vórtices en la calle de von Kármán. Es útil recordar que el número de Reynolds tiene la forma $\text{Re} = U_0 d / \nu$ donde U_0 es la velocidad del flujo lejos y antes de llegar al obstáculo. Así la relación de la frecuencia con respecto de la velocidad lejos del obstáculo queda:

$$f = (0.212 \frac{U_0 d}{\nu} - 4.5) \frac{\nu}{d^2} \quad \dots 4.3.2$$

Basta con despejar U_0 , pues ésta es la variable que se desea conocer, siendo todos los demás parámetros f , ν , y d conocidos; o en el caso de f , por conocer de manera experimental.

Con la sonda se obtuvieron valores de potencial, de los cuales lo importante no era propiamente la magnitud, sino la frecuencia con la que aparecían como función del potencial. Al obtener la frecuencia por medio de la transformada rápida de Fourier fue posible obtener la velocidad por medio de la relación escrita arriba. La sonda del anemómetro debió ser colocada a un costado y dentro de la calle de von Kármán para medir la frecuencia con la que pasan los vórtices de ese lado de la calle. Fueron tomadas medidas para diferentes potenciales del variac y por lo tanto diferentes frecuencias de paso de vórtices, luego se colocó la sonda entre la calle de vórtices y una pared lateral del túnel de viento para medir la velocidad del flujo lejos de la calle de vórtices, pasando por los mismos potenciales del variac, y así obtener diferentes velocidades. También se midió el potencial en la sonda cuando no hubo flujo de aire. Los valores de potencial medidos por la sonda, al encontrarse ésta entre la calle de von Kármán y la pared del túnel de viento, están relacionados con la velocidad obtenida por medio de la frecuencia de paso de vórtices en uno de los lados de la calle, la relación no es lineal, pero se puede conseguir una relación lineal usando mínimos cuadrados.[§]

[§] Daré un ejemplo, para dejar más claro esto. Se pone el variac en el máximo valor que puede dar, y la sonda lejos de la calle de von Kármán, ésta mide un potencial constante E_l que debe ser registrado. Se desplaza la sonda hacia uno de los costados de la calle y se mide el potencial, éste varía con una frecuencia f , aquella con la que pasan los vórtices por la sonda. De éstos datos no interesa el potencial sino la frecuencia con la que varía, por lo que se saca la transformada rápida de Fourier a los datos y se obtiene la frecuencia. Ésta se usa en la ec. 4.3.2. de donde se despeja la velocidad U_0 , obteniéndose así la velocidad que hay lejos de la calle cuando dentro de ella pasan los vórtices con una frecuencia f_l y el variac está dando su máximo. El voltaje E_l corresponde a la velocidad calculada con 4.3.2. Esta operación fue repetida disminuyendo de 5 en 5 los valores de voltaje en el variac. Al obtener todos los potenciales lejos de la calle de vórtices y todas las

Una vez obtenidos los valores de potencial y , para las frecuencias de aparición de vórtices, los valores de velocidad de flujo fuera de la calle de von Kármán, fue hecho un ajuste de curvas por medio de mínimos cuadrados. Encontrándose una relación como la ecuación 4.2.1 con valores para $A = 1.7494 \text{ V}^2$ y $B = 0.7289 \text{ V}^2 /(\text{m/s})^{1/2}$, es decir:

$$E^2 = 1.7494 + 0.7289u^{\frac{1}{2}} \quad \dots 4.3.3)$$

Establecidos estos valores fue posible hacer la adquisición de datos del campo de velocidades de los vórtices anulares. A ese procedimiento se le llama calibración de la sonda y cada sonda, aunque sea del mismo tipo y número debe ser calibrada pues para cada una de ellas hay diferentes valores de A y B.

4.4 La captura de datos.

Cuando una señal tiene un valor promedio grande en comparación con la intensidad de las fluctuaciones y lo que interesa es investigar a las fluctuaciones, el procedimiento que se sigue es restar a la señal un valor constante (llamado offset) y registrar sólo las fluctuaciones. Fue necesario hacer esto en la toma de datos de este experimento. Fue tomado un offset de 1.39 V que es el valor de potencial eléctrico que proporcionó la sonda al encontrarse funcionando cuando no hubo corrientes de aire dentro del túnel de viento durante la calibración de la sonda. De esta manera el valor de voltaje de 1.39 V fue tomado como el cero de la señal de entrada del anemómetro, la figura 4.4.1. muestra el anemómetro utilizado para tomar los datos durante el experimento. Con el anemómetro solamente es posible obtener las magnitudes de las velocidades ya que los datos obtenidos no dicen nada acerca de la dirección, o signo, de éstas.



Figura 4.4.1. Anemómetro Dantec StreamLine.

Para tener datos que se ajusten mejor al intervalo de voltaje en el que opera el anemómetro, a la señal de entrada se le dio una ganancia de 16.

velocidades correspondientes variando hacia abajo los potenciales del variac, se observa que la relación entre los potenciales medidos por la sonda y las velocidades no es lineal, por lo que se usan los mínimos cuadrados para conseguir la relación lineal.

La frecuencia de adquisición de datos fue de 1000 Hz y fue utilizado un filtro pasabajos 300 Hz para evitar ruido de datos cuyas frecuencias sobrepasaran las de las estructuras de los vórtices. Es muy importante usar el filtro pasa bajos puesto que las intensidades de las componentes de frecuencias altas en una señal decrecen con el crecimiento de ésta, mientras que el ruido llega a ser el factor dominante, enmascarando completamente a la señal. La frecuencia de adquisición de 1000 Hz fue tomada porque es suficiente para tener una buena resolución o detalle, de la velocidad, al pasar los anillos por la zona donde se encuentra colocada la sonda a pesar de ser el desplazamiento de éstos muy rápido.

Fue utilizada una tarjeta de adquisición de datos de 12 bits que convierte señales analógicas del intervalo [0 V,10 V] a valores numéricos, dividiendo dicho segmento en $2^{12}=4096$ intervalos iguales. Adjudicándole a los voltajes valores de la siguiente manera:

$$V = \frac{10}{4096}n \quad \dots 4.4.1)$$

en donde n es el valor entero registrado por la tarjeta dentro del intervalo [0 V, 10 V], éste corresponde al voltaje V obtenido por el anemómetro. Los datos obtenidos fueron analizados en Scilab 3.0.

La eyección del anillo y la toma de datos fueron sincronizados de manera que al momento de eyectar, la bocina, un anillo, la adquisición se pusiera en marcha.

Los datos fueron tomados milímetro a milímetro sobre un intervalo un poco mayor al diámetro horizontal de los vórtices anulares y sobre éste, esto pudo ser hecho por haber simetría con respecto al eje de desplazamiento, Ox, de los vórtices anulares. Así, los datos pudieron haber sido tomados a lo largo de cualquier diámetro diferente del horizontal. La figura 4.4.2. muestra un esquema de la simetría con respecto al eje de desplazamiento, se muestran dos diámetros (líneas delgadas) cualesquiera que también pudieron haber sido considerados para la toma de datos. Además, estos datos, fueron tomados a diferentes distancias de la pared a saber, 0.002 m, 0.005 m, 0.010 m, 0.015 m, 0.020 m, 0.025 m y 0.028 m, para, de esta manera, observar el efecto de la pared en los anillos al acercarse éstos a ella. De manera más explícita, los datos fueron tomados de la siguiente forma: la sonda fue puesta inicialmente a la altura del diámetro del orificio de eyección, dicho diámetro coincide con el de los vórtices, y a una distancia mayor que el diámetro de los anillos tal que no se detectara campo de velocidades alguno diferente de cero. En esta posición se tomaron datos (velocidades en función del tiempo) de varios anillos y se promediaron, obteniendo así valores que corresponden al campo de velocidades de un “anillo promediado” pero en un punto alejado del anillo. La sonda fue desplazada un milímetro hacia el centro del anillo y la operación fue repetida obteniendo más valores. Esta operación fue repetida, a su vez, a lo largo de una distancia un poco mayor que el diámetro del anillo, hasta dejar de observar señales del campo de velocidades de los vórtices anulares. Es decir fueron obtenidos datos de secciones de los anillos. Al ir acercándose la sonda al centro de los anillos la señal de las velocidades iba creciendo, hasta hacerse constante en un intervalo y volver a descender. Así se hizo para la adquisición de datos a diferentes distancias de la pared y para el anillo libre. Terminado esto, el siguiente

paso fue tomar los datos de cada punto de adquisición del intervalo de medidas, a una distancia fija de la pared, y juntarlos para hacer la reconstrucción del campo de velocidades de un “vórtice anular promediado” completo. Así se hizo para cada distancia fija y para el anillo libre. Dicho de otro modo, lo que se hizo fue lo siguiente: para cada posición en la que fue colocada la sonda se tomaron los datos del campo de velocidades con respecto al tiempo, se promediaron y fue generado un archivo de datos en los que se tenía una curva promediada de velocidad como función del tiempo. Lo obtenido con este procedimiento se observa en las gráficas que se presentarán en el siguiente capítulo. Dichas gráficas fueron formadas al juntar las gráficas de cada archivo de curva promediada de velocidad con respecto al tiempo, cada una de éstas curvas representa una rebanada del campo de velocidades del anillo promediado en una posición diferente sobre el diámetro del anillo. Es decir al juntarlas se tiene una gráfica con respecto al tiempo y con respecto al espacio de la velocidad, esto es lo que se muestra en el siguiente capítulo.

En la figura 4.4.3. se observa el dispositivo en el interior de la caja de acrílico: la bocina generadora, la pared de impacto y el sistema de desplazamiento bidimensional sosteniendo la sonda del anemómetro. Todo dispuesto para la toma de datos.

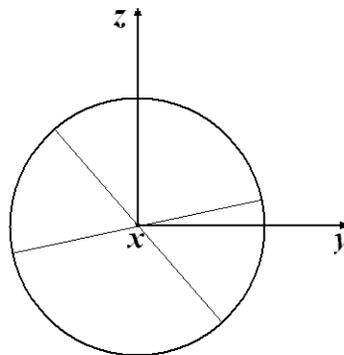


Figura 4.4.2. Simetría con respecto al eje x , en el esquema este eje sale, perpendicular a página, hacia arriba. La circunferencia es el núcleo del vórtice anular cuyo centro es el eje x . Tomar datos a lo largo de cualquier diámetro, como las líneas delgadas del esquema, proporciona los mismos resultados.

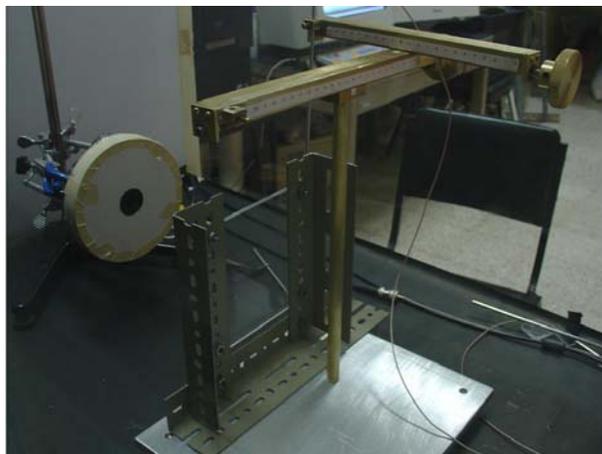


Figura 4.4.3. Dispositivo en el interior de la caja de acrílico.

Durante la toma de datos del experimento fue usado un sistema de desplazamiento bidimensional que permitió el movimiento de la sonda en dos dimensiones: de un lado a otro del anillo y hacia adelante y hacia atrás con respecto a la pared.

Se hizo evidente al querer medir al campo de velocidades por medio de la anemometría de hilo caliente que se necesitaba una herramienta que desplazara la sonda distancias fijas sin cambiar su altura. Lo primero que se hizo fue montar la sonda en una placa que se desplazaba por la acción de un tornillo micrométrico, el desplazamiento era en una sola dimensión y restringido a 0.05 m eso sugirió que se necesitaba un dispositivo parecido, más grande para poder cubrir bien la distancia que ocupan los vórtices al impactar con la pared y con movimiento en una dirección perpendicular para alejar o acercar, la sonda a la pared. El diseño del sistema de desplazamiento se basó en esas necesidades y la platina de desplazamiento mencionada. En lugar de placa o platina se usaron dos barras de latón perpendiculares entre sí una montada en la otra. Estas son desplazadas, por medio de la rotación de un tornillo sin fin, hacia los lados y hacia adelante y hacia atrás. La distancia que pueden desplazarse es de 0.3 m de lado a lado, cada barra, previendo que pudiera hacerse un experimento que necesitara mayor desplazamiento de la sonda, pero llevado a cabo dentro de la caja de acrílico. Las barras están montadas sobre otra barra o pilar de latón de 0.3 m de altura que está a su vez montada en una placa de aluminio, que sirve como base, de 0.3 m * 0.3 m, con patas que suben o bajan por medio de un tornillo para nivelar la base. Se le dieron esas dimensiones a la base para que tuviese el tamaño y el peso necesarios para no caerse al mover las barras del sistema de desplazamiento, que es en esencia una grúa. Las barras fueron graduadas con una tira de papel milimétrico cada una. Un alfiler para indicar la posición, con respecto al pilar, de la barra que está montada directamente sobre éste fue puesto en el pilar apuntando hacia la tira de papel milimétrico. Otro alfiler, para medir la distancia con respecto a la barra de abajo del desplazamiento de la barra de arriba, fue colocado en la barra de abajo apuntando hacia el papel milimétrico de la barra de arriba. Esta barra tiene un orificio por el cual se introduce el porta-sondas que es asegurado presionándolo con un tornillo. La altura de la sonda también puede ser ajustada al desplazar el porta-sondas en el orificio, por lo que el sistema de desplazamiento es en realidad de tres dimensiones. Una manera de controlar los desplazamientos en la dirección vertical, es graduar el porta-sondas en las unidades que convenga. Este dispositivo se muestra en la figura 4.4.4. y fue mandado a hacer al Taller Mecánico de la Facultad de Ciencias de la UNAM.



Figura 4.4.4. Sistema de desplazamiento en dos dimensiones.

Un esquema del dispositivo experimental utilizado se observa en la figura 4.4.5. La computadora controla el anemómetro y el generador de señales y así el inicio y el final de la captura de datos y la eyección de vórtices. La sonda recibe la orden del “cerebro” del anemómetro para medir voltajes y se los envía de vuelta para ser tratados. Ahí la señal recibe el offset, y la ganancia. La señal tratada pasa a la tarjeta de adquisición de datos y se le asignan valores según la relación 4.4.1, estos llegan a la computadora que los almacena en archivos de datos. En scilab se hizo un programa que promediara los datos para cada posición de la sonda y los promedios lo guardara en otros archivos de datos. La graficación fue hecha con un programa hecho en matlab, este toma los datos de los archivos de los promedios y los junta.

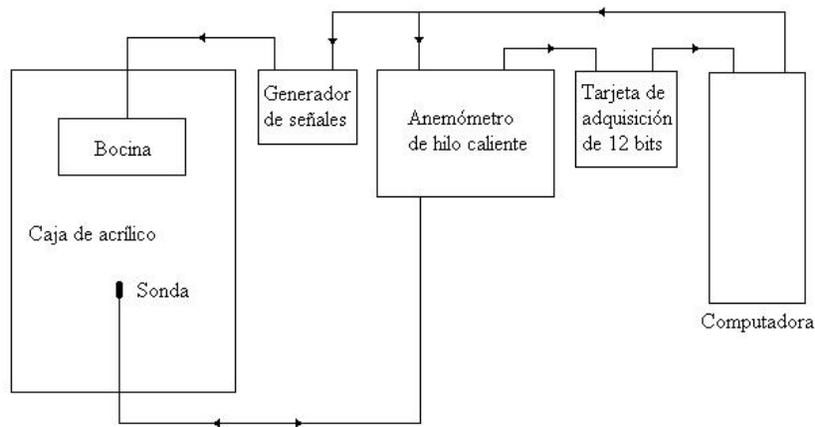


Figura 4.4.5. Esquema del dispositivo experimental utilizado.

A continuación, en las figuras 4.4.6. y 4.4.7. se muestran un par de imágenes una frontal y una lateral de los vórtices anulares de humo, estas imágenes son solamente para visualización y con los anillos presentados en ellas no se realizaron medidas; sin embargo, muestran cualitativamente el experimento.

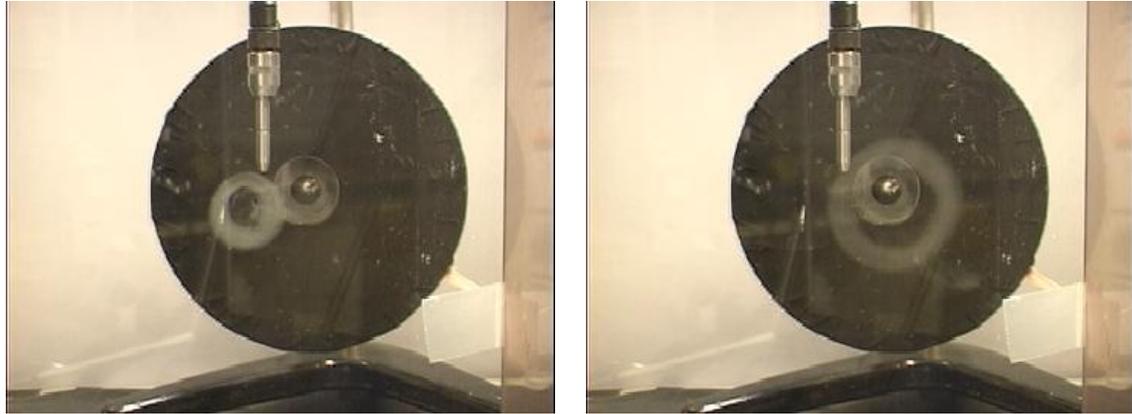


Figura 4.4.6. Vista frontal de un vórtice anular antes de interactuar con la pared, a la izquierda; después de interactuar con la pared, a la derecha.

Dentro de la figura 4.4.6. la fotografía de la izquierda el anillo se encuentra lejos de la pared. Se observa, en la fotografía de la derecha de la misma figura, el incremento en el diámetro del anillo al interactuar con la pared.



Figura 4.4.7. Vista lateral de vórtices anulares antes de interactuar con la pared.

En la figura 4.4.7. se tienen fotografías de perfil de los vórtices anulares desplazándose de la bocina hasta la pared. La sonda fue retirada para evitar ensuciarla con las partículas que lleva el humo, este humo en particular es producido con una pipa para fumar e inyectado a la bocina con un popote o pajilla de plástico, (ver esquina inferior derecha de la fotografía de la derecha).

Capítulo 5

Resultados y discusión

El análisis de los datos obtenidos durante el experimento fue hecho con Matlab y Scilab.

Al hablar de un vórtice anular, de ahora en adelante, se hará referencia en realidad a un promedio de ensamble de anillos o un promedio sobre las propiedades de los anillos que fueron medidos para cada distancia de la pared de impacto, la razón de esto fue que para cada anillo pudo haber ruido en la medición, una diferencia entre anillos que pudo ser suavizada con el promedio. Así en el primer caso, el anillo libre, lo que se tiene es un promedio del campo de velocidades de varios anillos y éste es tomado como, o llamado, el campo de velocidades de un anillo.

En la figura 5.1 se muestra la componente u_x del campo de velocidades sobre un diámetro del vórtice sin obstáculos en su camino; los colores azules indican velocidades bajas y los colores rojos indican velocidades altas en el anillo. La sonda fue desplazada a lo largo del eje marcado como “d”, la altura o eje “u” representa el valor de la velocidad y el eje “t” representa el tiempo transcurrido no desde el inicio de la toma de datos, sino desde un tiempo que permitiera resaltar el campo de velocidades al hacer las gráficas; esto para todas las figuras del capítulo presente. Ni en ésta ni en cualquier otra figura es posible ver la pared, en virtud de que el eje “t” indica el tiempo transcurrido, no la dirección de desplazamiento del anillo, y en el eje “d” se tiene el intervalo de medición paralelo a la pared y al plano que contiene al núcleo del vórtice.

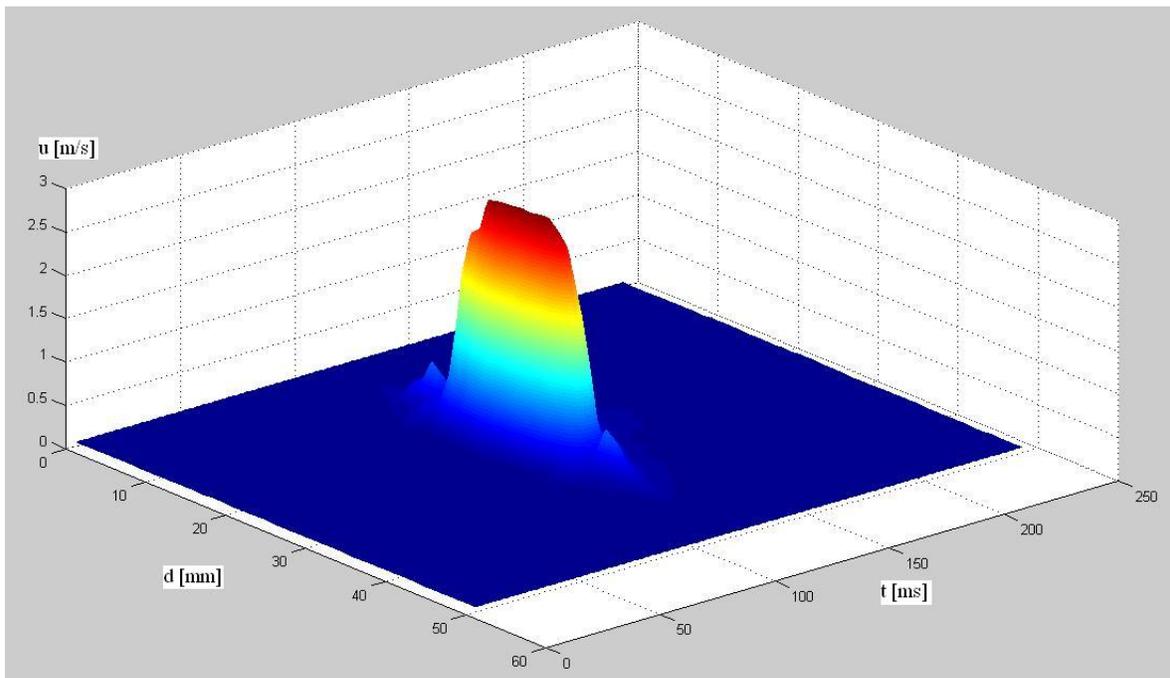


Figura 5.1. Vista de la reconstrucción del campo de velocidades con respecto al intervalo de desplazamiento de la sonda y el tiempo de medición.

Como se comentó en el capítulo anterior ésta figura se formó juntado datos promediados o curvas promediadas de velocidad contra tiempo, en la figura 5.1. se puede imaginar eso como las curvas en los planos, que cortan el espacio, paralelos al plano u t , Cincuenta planos acomodados con una separación de 0.001 m entre sí forman el eje d . Matlab se encarga de hacerlos parecer una sábana continua. Todas las figuras salvo la 5.6 son proyecciones sobre un plano de gráficas como la 5.1, ya sea sobre el plano d u como la 5.2 o sobre el plano d t como de la 5.7 a la 5.14.

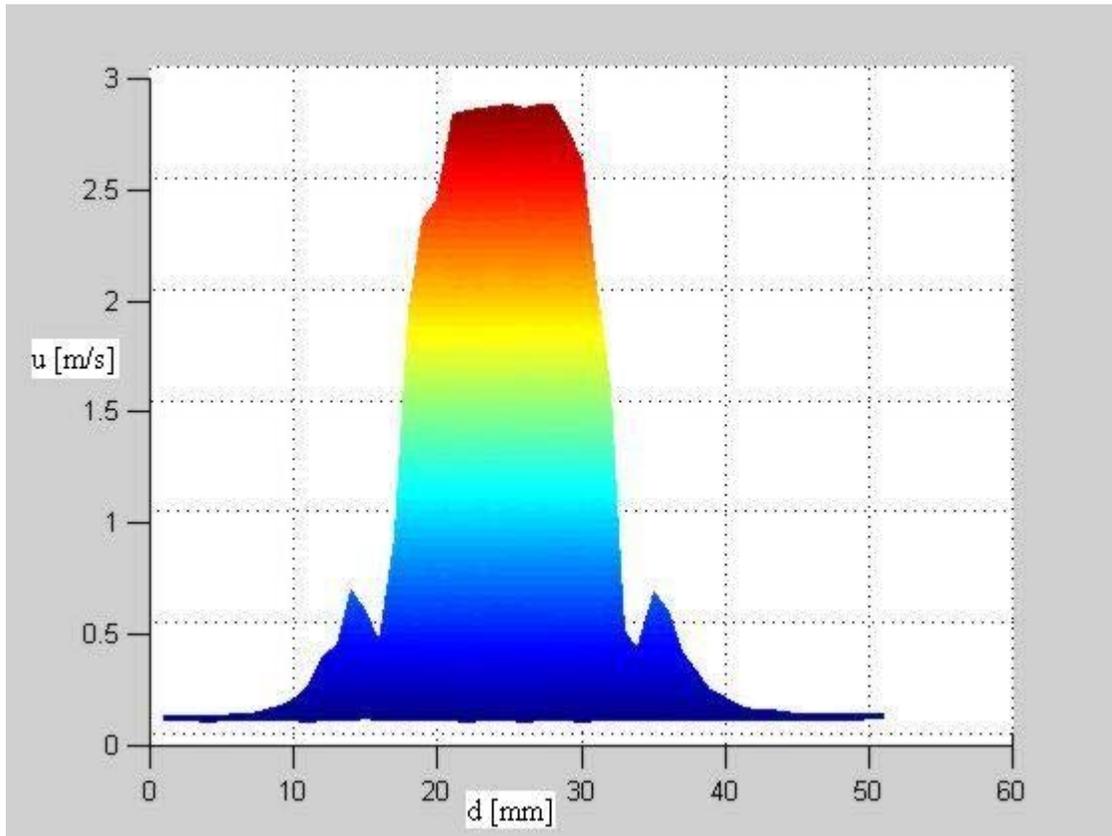


Figura 5.2. Vista frontal de la reconstrucción, a lo largo del intervalo de medición, del campo de velocidades del anillo libre.

La figura 5.2 es una vista frontal de la figura 5.1, se muestra cómo varía la velocidad u_x en función de la distancia recorrida en el intervalo de medición.

La velocidad u_x , para todas las figuras, se mide en un conjunto de puntos equidistantes separados entre sí 1 mm y a una distancia fija de la pared de impacto. El intervalo tiene una longitud un poco mayor al diámetro de los vórtices anulares libres. Las mediciones se repiten, a lo largo del diámetro, pero cambiando la distancia entre la sonda y la pared. Esto se verá más adelante.

No son necesarios tantos colores para obtener información de éste tipo de gráficas por lo que en adelante, de las vistas frontales, se verá sólo el contorno.

La figura 5.3. es la misma que la anterior, desprovista de los colores. Al tratar de reconstruir el campo de velocidades, con los datos tal como fueron adquiridos, con ayuda de la ecuación de continuidad no se obtiene la estructura de un vórtice anular. Esto se debe

a que con la sonda y la tarjeta de adquisición de datos se obtiene la magnitud de la velocidad, no su signo; es decir, su dirección (pues la sonda 55P11 toma datos en una dimensión y que el aire se desplace en una dirección o en la opuesta produce el mismo enfriamiento y por lo tanto que la sonda mida el mismo potencial). De ésta figura no se pueden obtener datos como la velocidad de desplazamiento del núcleo del vórtice, ni la vorticidad. Los valores que se obtuvieron con, y desde, la posición de la sonda, para el campo de velocidades, fueron mayores y menores que el valor de la velocidad de desplazamiento pues la velocidad de la parte interna del núcleo del vórtice anular es mayor que la velocidad del centro del núcleo (que es la de desplazamiento) que a su vez es mayor que la velocidad de la parte externa del núcleo. Esto se debe a que el campo de velocidades en la parte interior del núcleo del vórtice tiene la misma dirección que la velocidad de desplazamiento, mientras que en la parte exterior del núcleo, la dirección del campo de velocidades tiene dirección contraria a la de desplazamiento. En caso de tener un sistema de referencia desplazándose con el vórtice anular, la velocidad será tangente a la circunferencia observada al hacer un corte transversal del núcleo pero su norma será constante, además de tener una velocidad de desplazamiento igual a cero.

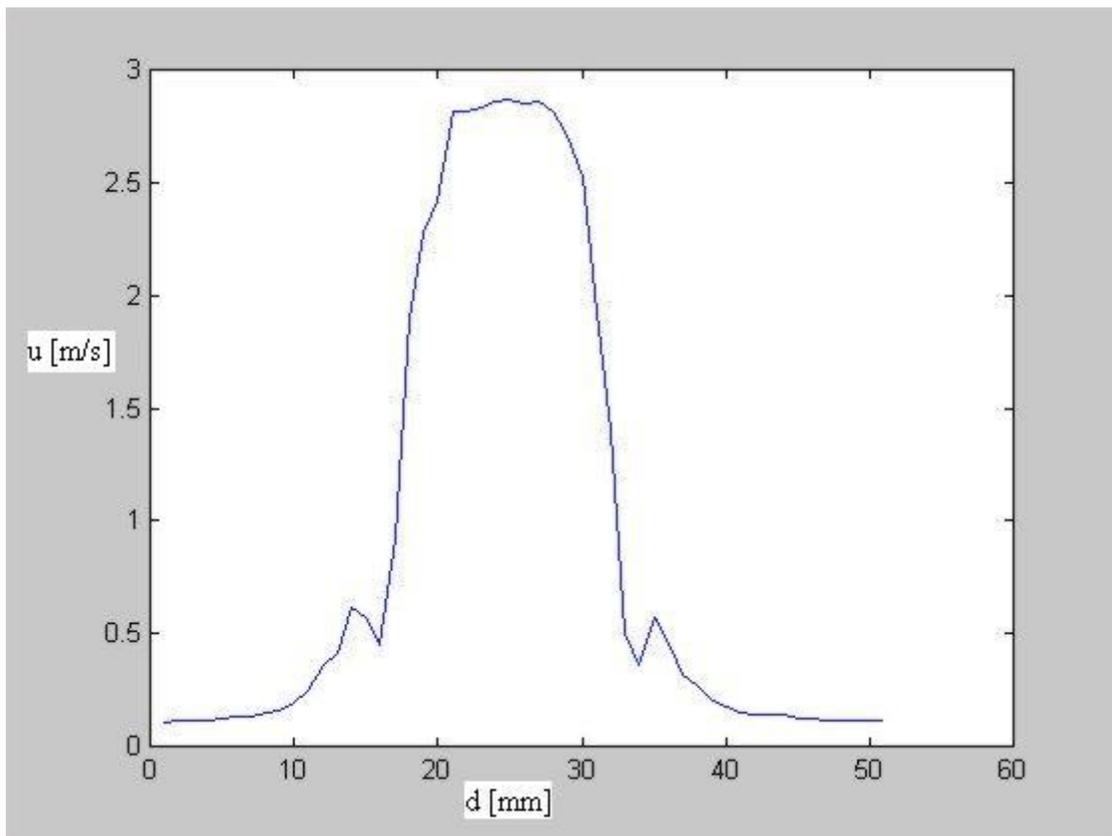


Figura 5.3. Contorno del campo de velocidades de la figura anterior (anillo libre).

Una imagen esquemática de lo que se debe obtener se muestra en la figura 5.4 en donde se puede observar que hay un par de zonas de velocidades negativas, un par de regiones en los que la velocidad incrementa mucho su valor hasta llegar a una zona de velocidad constante. En la figura se muestra también qué regiones del campo de velocidades corresponden al centro, al núcleo y a la parte exterior del vórtice. La región

exterior al núcleo del anillo es negativa pero creciente, en la región del núcleo la velocidad crece de manera lineal, esto se ve como dos zonas lineales, debido al corte que se hizo del anillo, y en la región central el campo de velocidades es constante. En la figura, los puntos en donde se intersectan las líneas punteadas que van del centro del núcleo a la gráfica del campo de velocidades y el campo de velocidades, indican el valor de la velocidad de desplazamiento del vórtice anular, tomando en cuenta que la única velocidad con la que se pueden mover las partículas en dichos puntos es la de desplazamiento. Se observa que por tratarse de líneas rectas los puntos se encuentran en el punto medio entre los extremos de ellas. En puntos distintos de éstos, la velocidad será la suma de una velocidad tangencial de partículas que se desplazan alrededor del centro del núcleo más la velocidad de desplazamiento del vórtice. De ésta manera las velocidad en la parte central del anillo, $0 \leq r \leq R$, se ve incrementada por tener los sumandos el mismo signo, y en la parte que corre del centro del núcleo hacia fuera del vórtice, $R < r \leq R+a$, la velocidad se ve disminuida hasta hacerse negativa, y ya fuera del vórtice, $R+a < r$, la velocidad vuelve a aumentar para acercarse a cero.

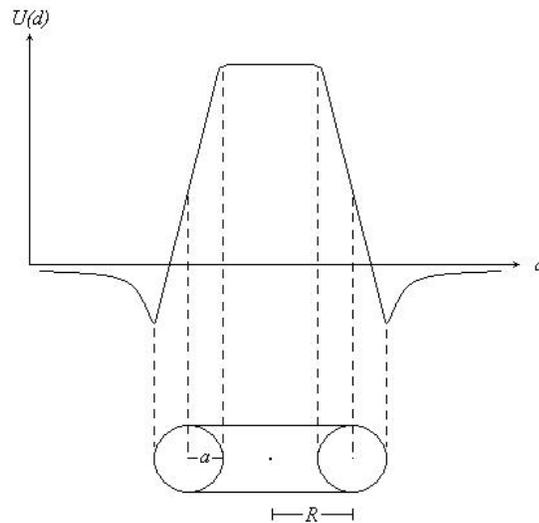


Figura 5.4. Esquema del perfil de velocidades que se desea obtener para los vórtices anulares.

Como las sondas detectan solamente la magnitud de la velocidad, fue necesario hacer un cambio de signo a una parte del campo de velocidades detectado, pues, al utilizar los datos adquiridos en la ecuación de continuidad no se obtuvieron estructuras razonables, o parecidas a los vórtices anulares. En la figura 5.5. se observa que, a diferencia de la figura 5.3, los dos picos externos están de cabeza, estos picos representan la velocidad de la parte externa del núcleo del vórtice.

De ésta figura que es la que presenta el campo de velocidades correcto, se puede obtener el valor de la velocidad de desplazamiento del núcleo del vórtice anular.

También se observa que en la parte central del anillo el flujo no es rotacional pues no hay cambios de velocidad, ésta se mantiene fija en 2.8 m/s, el campo es prácticamente constante.

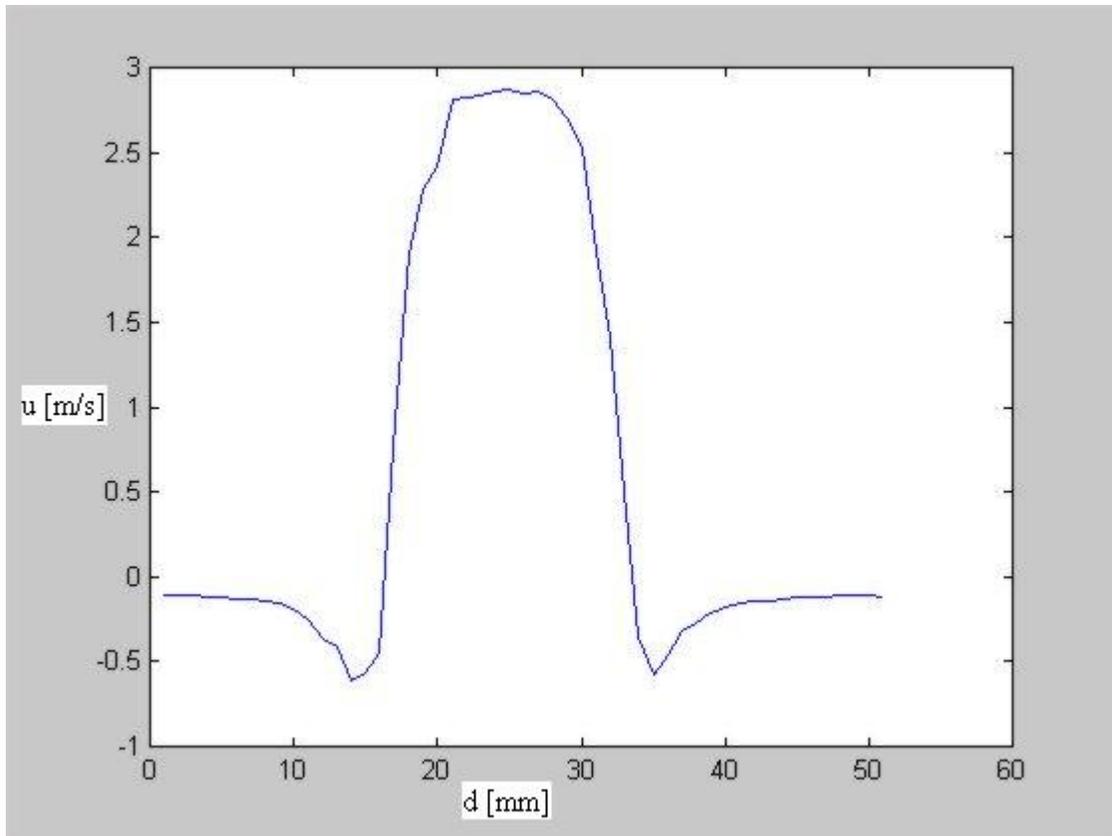


Figura 5.5. Vista frontal del campo de velocidades correcto del anillo libre.

El núcleo del anillo es una región en la que la velocidad varía de manera lineal por considerar que tiene vorticidad constante, por lo que se puede decir, de ésta gráfica, que el núcleo del anillo de vorticidad libre promedio tiene un diámetro $2a$ de 0.004 m y que el anillo tiene un diámetro $2R$ de 0.017 m. Una vez identificado el diámetro del núcleo del anillo es posible conocer la velocidad de desplazamiento del vórtice, pues es la velocidad detectada en la mitad del diámetro, es decir, 0.9 m/s; la velocidad de desplazamiento según la ecuación 3.4.10 es de 0.6 m/s. La velocidad medida es 1.5 veces mayor que la velocidad esperada teóricamente. Al utilizar cualquiera de las velocidades mencionadas, se tiene que el aire en los vórtices anulares analizados en este experimento debe ser incompresible ya que éstas son menores a 0.3Mach 1 esto se vio en el capítulo 2.

El tratamiento matemático para los vórtices anulares en el capítulo 3 fue hecho como si el aire del que están formados fuera un continuo, fue posible hacer esto pues el número de Knudsen es muy pequeño. En el Capítulo 1 se vio que $K = \frac{l}{L}$, donde l es el camino libre medio entre las moléculas de la atmósfera a nivel del mar cuyo valor es de $6.6332 \cdot 10^{-8}$ m (Geometric altitude) [34] y L una longitud representativa del flujo: a (el radio del núcleo del vórtice). Con esos datos $K = 1.66 \cdot 10^{-5}$ que es un número cinco ordenes de magnitud menor que 1. Por esa misma razón las medidas de velocidad fueron tomadas como si el fluido en el que se realizaron fuera un continuo.

En el capítulo 2 se vio que hay similitud entre las ecuaciones de la mecánica de fluidos y las de la electrodinámica. El campo de velocidades sobre el eje de simetría del anillo, está dirigido según el eje Ox y se expresa de la siguiente manera:

$$\bar{u}_x = \frac{\Gamma}{2R} \frac{R^3}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{e}_x \quad \dots 5.1)$$

Donde R es el radio del anillo. Al situarse en el centro del anillo $x = 0$ y el cociente entre los radios $\frac{R^3}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$ es igual a uno, por lo que tomando únicamente la magnitud se tiene que

$$u_{x=0} = \frac{\Gamma}{2R}$$

Al despejar Γ e introducir los valores obtenidos experimentalmente para la velocidad máxima en el centro del anillo y el radio, se tiene que $\Gamma = 0.05 \text{ m}^2/\text{s}$.

Lo que sigue es calcular la vorticidad a partir de éste valor de la circulación. De la misma manera que la corriente está relacionada con la densidad de corriente, la vorticidad y la circulación están relacionadas; esto es, por la ecuación 2.5.3

$$\Gamma = \oint \bar{u} \cdot d\vec{l} = \int \vec{\omega} \cdot \hat{n} ds = \omega \pi a^2$$

donde a es el radio del núcleo del anillo, de esta manera, se tiene una relación sencilla para obtener el valor de la vorticidad.

$$\omega = \frac{\Gamma}{\pi a^2}$$

de donde $\omega = 4000 \text{ 1/s}$.

Se han obtenido entonces los valores de radio del núcleo, radio del anillo, la velocidad máxima, la velocidad de desplazamiento, la circulación y la vorticidad del vórtice anular libre.

Además es posible hacer una reconstrucción del campo de velocidades del anillo utilizando la ecuación de continuidad (ec.1.4.3) y los datos adquiridos:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad \text{de donde} \quad -\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{u_y(y + \Delta y) - u_y(y)}{\Delta y} \quad \text{de donde}$$

$$u_y(y + \Delta y) = -\frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta y + u_y(y).$$

además

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{U} \frac{\partial u_x}{\partial t} \quad \text{donde } U \text{ es la velocidad de desplazamiento del vórtice.}$$

Graficando esto se obtiene la reconstrucción bidimensional del campo de velocidades del vórtice, dicha gráfica se observa en la figura 5.6. En ella se distingue una dirección oblicua del vórtice con respecto a las posiciones que toma la sonda al ser desplazada, no se puede asegurar que la dirección sea oblicua a la pared. Que la dirección de desplazamiento del anillo no sea exactamente perpendicular a la sonda no genera problema alguno; que esta dirección no sea exactamente perpendicular a la pared tampoco, pues se ha observado en experimentos posteriores que el anillo tiende a orientar el plano que contiene su núcleo con la pared de impacto. Se observa en la gráfica que la escala no inicia en ceros esto es porque se tomó únicamente la zona en espacio y el tiempo en la que se encuentra en anillo. En el espacio con respecto a la posición inicial del sistema de desplazamiento, no con respecto a la caja dentro de la cual se encuentran los dispositivos ni con respecto a la pared de impacto; en el tiempo con respecto a un intervalo que permitiera ver con claridad el fenómeno.

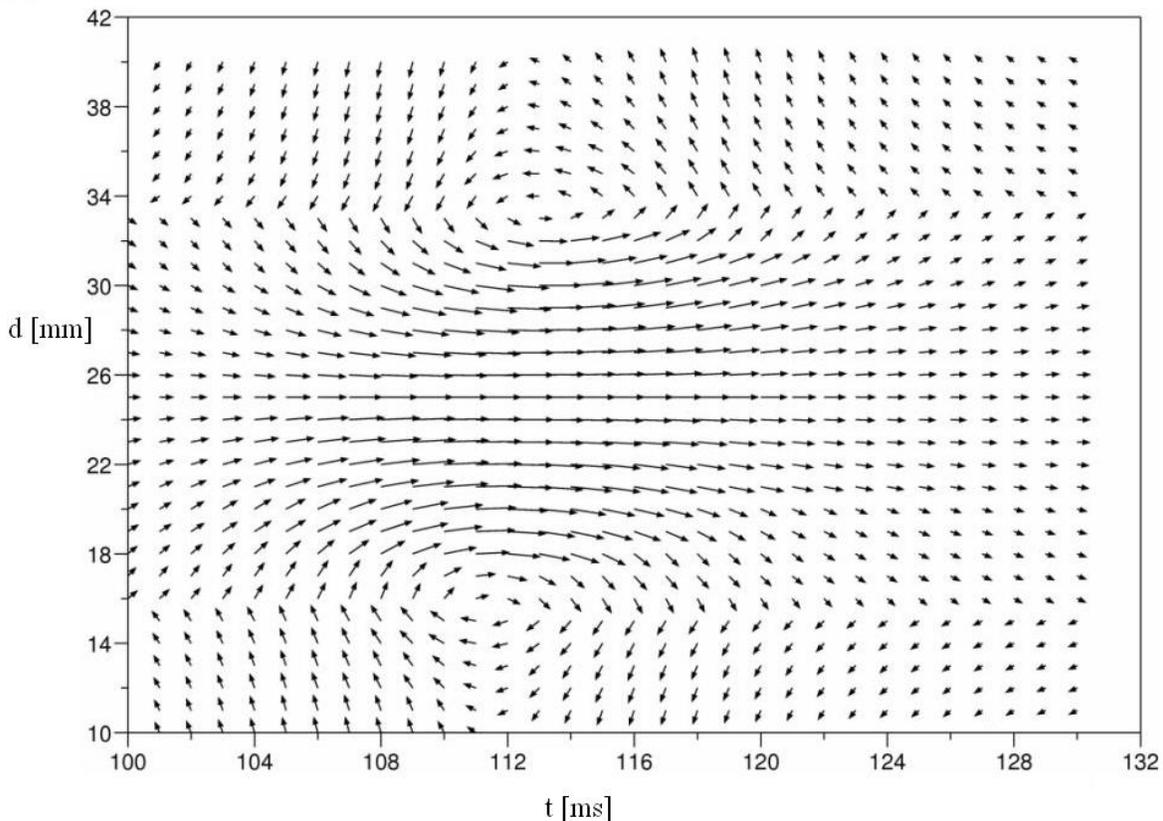


Figura 5.6. Reconstrucción bidimensional del campo de velocidades de un vórtice anular libre, a partir de los datos obtenidos con el anemómetro utilizando la ecuación de continuidad.

En las figuras 5.6. y 5.7 se observa la estructura de un vórtice anular sin obstáculos en su camino (anillo libre). En éste caso, por no haber fuerzas externas actuando sobre el vórtice, el eje temporal tiene una equivalencia con un eje espacial de acuerdo con la hipótesis de Taylor, ésta establece que las estructuras de flujo son transportadas por el flujo medio. Dicho de otra manera, una adquisición de datos en el tiempo equivale a una adquisición de datos en el espacio. La relación entre t y x está dada por la siguiente ecuación:

$$x = Ut \quad \dots 5.2)$$

donde U es la velocidad media. Es decir es posible observar la estructura espacial del anillo multiplicando el tiempo por la velocidad media, que es la velocidad de desplazamiento del núcleo. El valor es de 0.9 m/s por lo que la estructura espacial del anillo libre es en esencia la misma que se observa en las figuras 5.6 y 5.7.

Las figuras 5.6 y 5.7 fueron obtenidas a partir de los mismos datos, de hecho la 5.6 fue obtenida a partir de un subconjunto de los datos que forman la 5.7 pues se tomaron datos que van del 10 mm a 42 mm en el eje d , nótese que en la figura 5.7 los datos de distancia van de arriba a abajo mientras que en la 5.6 van de abajo a arriba, volteando los datos de manera que las escalas crezcan en la misma dirección se observa que los vórtices tienen la misma desviación, pues son el mismo. Además, el intervalo de tiempo utilizado en la figura 5.6 es muy inferior al usado en la figura 5.7, va de los 100 ms a los 132 ms.

En las figuras 5.7 a 5.14 los colores están normalizados a la velocidad máxima de cada vórtice anular, de manera que el rojo oscuro corresponde siempre a la velocidad máxima de vórtice, pero difiere su valor para cada distancia a la pared.

En la figura 5.8 no se observa diferencia con la figura 5.7, anillo libre. Lo que indica que a 0.028 m de distancia de la pared, el vórtice anular se comporta todavía como un anillo libre; es decir, la pared no ha influenciado aún el campo de velocidades del vórtice.

En la figura 5.9 se observa, un vórtice anular simétrico y con las mismas características de un anillo libre. Esto indica que al desplazarse el anillo a una distancia de 0.025 m de la pared y hacia ésta, la influencia de la pared es despreciable.

En la figura 5.10 se muestra un vórtice anular simétrico, casi sin perturbación alguna en su campo de velocidades, que es del tipo anillo libre. Entonces se puede decir que un vórtice anular que se desplaza en dirección de una colisión frontal con una pared, a 0.020 m de ésta, casi no percibe la influencia en su campo de velocidades, de la pared. La diferencia con el anillo libre es que para el anillo medido a 0.020 m de la pared, el campo de velocidades tarda unos milisegundos más en regresar a cero.

En la figura 5.11 se observa un cambio entre el campo de velocidades del anillo libre y el del anillo con obstáculo. En esta imagen se puede apreciar que el anillo tarda más tiempo en pasar completamente pues hay una región detrás de la zona central del anillo de baja velocidad. Obsérvese la zona azul en la parte derecha de la gráfica, aún cuando la porción de alta velocidad pasa casi sin alteración. En alguna región entre los 0.020 m y los

0.015 m la influencia de la pared se hace manifiesta. Además aparecen zonas milisegundos después del paso del anillo que muestran velocidades muy pequeñas.

En la figura 5.12 se observa que hay una alteración apreciable entre los campos de velocidades del anillo libre y el anillo frente a la pared. La región de alta velocidad, al centro del anillo, pasa en esencia inalterada pero se observa una estela o la aparición de vorticidad secundaria unos milisegundos después del paso del anillo que viene seguida de una región larga, a ambos lados del vórtice anular, dejando la región central casi libre de vórtices, o movimiento.

Se observa en la figura 5.13 que la influencia de la pared es muy importante. El anillo aumentó su diámetro, que sigue siendo simétrico y aparecieron un par de regiones de alta velocidad a ambos lados de la región central del anillo. Se puede ver que se detecta el campo de velocidades de la región externa del vórtice antes de su arribo, o la generación de vorticidad secundaria por el anillo al acercarse a la pared. Esa es la influencia del anillo en el aire cercano a la pared. Además el campo de velocidades, después de su paso, no se hace cero; esto es, hay vórtices secundarios esta vez en toda la región detrás del vórtice.

En la figura 5.14 se observa que el arco, que indica la aparición de un campo de velocidades antes del arribo del vórtice anular, es simétrico. Este arco es la influencia del aire arrastrado por el vórtice anular, sobre el aire que se encuentra en las cercanías de la pared, este arco muestra que aunque el campo de velocidades del aire cercano a la pared es muy tenue, no es cero. El vórtice anular conserva la simetría en su parte central. Es posible ver que la región central del anillo, con la velocidad más alta, es muy estrecha en el eje temporal pero su duración es la misma que en la imagen anterior. Esto es un efecto de la escala. También se puede apreciar que bajo la región central hay una pequeña zona de velocidad alta, pero que no es de la misma intensidad que muestra la zona de alta velocidad sobre la región central del vórtice. El color azul claro indica una velocidad menor. El tiempo durante el cual se observa vorticidad secundaria una vez pasado el vórtice anular es mayor que en las imágenes anteriores, pero esto sólo se refiere al tiempo, no a una región mayor en el espacio. Es por ello que se puede decir que la zona de vorticidad secundaria queda muy pegada a la pared y que mientras más cerca de ella se esté, el campo de velocidades puede ser detectado durante más tiempo.

En las últimas dos figuras se observa que el radio del anillo aumenta, independientemente de que se pueda medir o no este crecimiento, eso se discutirá en otras figuras, pues la zona de velocidad alta, la que se encuentra en el centro del anillo crece en el eje de las distancias. Son necesarias más mediciones a diferentes distancias de la pared, entre 0.01 m y 0.002 m, para caracterizar el crecimiento del radio con respecto a la distancia vórtice-pared.

Las figuras a, 5.15.a a 5.22.a, muestran lo que detectó la sonda al ser colocada, justamente, en el centro del vórtice. En ellas se observa una curva en el plano u t , medida en el centro del anillo.

En ausencia de fuerzas externas, por medio de la Hipótesis de Taylor, se puede tener la equivalencia de la variable t con la variable x (desplazamiento) ecuación 5.2. Así, es posible hacer un ajuste de gráficas comparando la experimental y la teórica, que viene de la

ecuación 5.1 con la forma general $u_x = u_{\max} \left(1 + (ct)^2\right)^{-3/2}$ con $c = U / R$, U la velocidad de desplazamiento (ec. 5.2), R el radio del vórtice anular. De esta ecuación se obtiene una figura simétrica, en ella la velocidad aumenta, del lado izquierdo, de la misma manera con la que disminuye, del lado derecho. Se tiene la velocidad máxima justo en el centro de la gráfica. Las curvas experimentales no son completamente simétricas tienen un achatamiento o pendiente más brusca del lado izquierdo, de ese lado se ve el arribo del anillo, y la pendiente es más suave del lado derecho, que equivale a ver la parte de atrás del anillo. La velocidad máxima no se encuentra en el centro de la curva, sino un poco a la izquierda.

En las figuras 5.15.b a 5.19.b se muestran las gráficas 5.15.a a 5.19.a en azul, con la escala de tiempo en segundos, en el eje de las abscisas, y además desplazado su máximo a cero, esto para hacer más fácil la comparación y graficación con las curvas teóricas en rojo. Nótese en todas estas gráficas que del lado izquierdo del máximo, para velocidades mayores a 0.1 m/s*, la curva medida va por debajo de la curva calculada, pues ésta muestra un aumento de velocidad más suave. Nótese también que del lado derecho del máximo la curva medida disminuye más suavemente que la calculada. La razón es que a diferencia de la curva calculada para un vórtice anular en un fluido sin viscosidad, el vórtice anular medido se desplaza en aire, éste ofrece una resistencia y deforma el campo de velocidades del vórtice achatándolo en el lado de enfrente produciendo un aumento de velocidad más abrupto, y alargando la parte de atrás produciendo una disminución del campo de velocidades más suave.

Se puede ver en estas gráficas que cuanto más cerca se encuentra el anillo de la pared, las curvas experimentales y las teóricas concuerdan menos, pues se hace palpable el efecto de la pared en el campo de velocidades del anillo medido, alejándolo del caso de vórtice anular libre que describe la curva teórica.

En las figuras 5.21.a a 5.22.a, no es posible utilizar la hipótesis de Taylor, pues para las distancias a las que fueron tomados los datos de velocidad, el vórtice siente la presencia de la pared; es decir, una fuerza externa. No es posible, por esa razón, ajustar con curvas teóricas, las curvas experimentales. Pero muestran que la forma de la curva es del mismo tipo que para un vórtice libre, de ellas se pueden obtener datos como la velocidad máxima y el tiempo que tarda el vórtice en atravesar la zona donde se encuentra puesta la sonda.

Las figuras 5.23 a 5.28 son curvas sobre planos u d (velocidad-distancia), muestran el comportamiento del campo de velocidades del vórtice anular al tomar medidas, equidistantes con una separación de un milímetro entre ellas, sobre una línea sobre el diámetro de éste que intersecta la circunferencia que forma el centro del núcleo. En ellas, los valles o picos negativos representan las velocidades mínimas justo en la parte exterior del núcleo del vórtice anular y la cresta representa la zona de alta velocidad, encerrada por la parte interna del núcleo del vórtice. Es de estas gráficas que se obtienen datos como el radio del vórtice anular, el radio del núcleo del vórtice, la velocidad de desplazamiento y la velocidad máxima. Se observa que el anillo no siempre presenta una zona de velocidad constante en la parte más alta de las curvas, como en las figuras 5.24 y 5.26 a 5.28, esto

* Este valor para la velocidad es importante, pues para velocidades menores o iguales a él, la medición no es confiable debido a la calibración de la sonda.

hace muy difícil decidir cuál es el diámetro del núcleo del anillo o en dónde se encuentra el centro de este núcleo.

Una mayor resolución de datos se puede obtener al desplazar la sonda distancias menores o al construir un generador de vórtices que los produzca más grandes o una combinación de ambos.

Mientras no haya fuerzas externas, o mientras éstas no sean muy intensas, como es el caso de la viscosidad para el anillo libre, o la influencia de la pared para el vórtice entre 0.028m y 0.015m, estas curvas serán muy simétricas y brindarán la información descrita en el párrafo anterior. Cuando el vórtice se encuentra más cerca de la pared, entre 0.015 m y 0.002 m, la interacción con la pared es importante, esto se observa en las figuras 5.11 a la 5.14 y en la 5.27 que corresponde a un corte de la 5.11. En todas las imágenes se observa que la estructura del vórtice sigue siendo anular, pero la interacción con el campo de velocidades inducido en la pared, sólo permite obtener, con el método de medición utilizado, la velocidad máxima del vórtice anular.

Las figuras 5.29 y 5.30 fueron hechas para constatar que efectivamente la velocidad, tanto la de desplazamiento como la máxima, disminuye al acercarse el vórtice a la pared. En ambos casos el número de datos es insuficiente para hacer un ajuste de curvas y dar una expresión matemática que muestre el cambio de la velocidad en función de la distancia a la pared. En la figura 5.29 se tomaron valores de velocidad de desplazamiento del vórtice que pudieron ser medidos debido a que la interacción con la pared no era notoria, pero eso dejó fuera velocidades de desplazamiento a distancias pequeñas con respecto a la pared. Por otro lado, la figura 5.30 muestra la velocidad máxima contra la distancia a la pared. La ventaja es que la velocidad máxima fue medida directamente con la sonda, no es necesario encontrarla al analizar la gráfica de un vórtice anular que cumpla con no ser afectado por fuerzas externas, como la velocidad media en las graficas 5.23. a 5.27.

Por último, un punto importante para la realización del experimento, fue la calibración de la sonda. La figura 5.31 muestra la relación que hay entre el potencial en la sonda y la velocidad de desplazamiento, una vez hecha la calibración. El punto que se aleja de la recta de la calibración es el que tiene por primera entrada $0 \text{ (m/s)}^{1/2}$. Los puntos entre este cero y la medición que le sigue no pudieron ser tomados en cuenta debido a que el túnel de viento no ofrece la confianza necesaria para considerar esos valores como correctos, pues los ventiladores que impelen el viento dentro de él, no trabajan de manera constante cuando se desean velocidades menores a 0.3 m/s. Es decir, a partir de un punto en $0 \text{ m/s} < v < 0.3 \text{ m/s}$ la velocidad medida por la sonda se aleja de la recta de calibración.

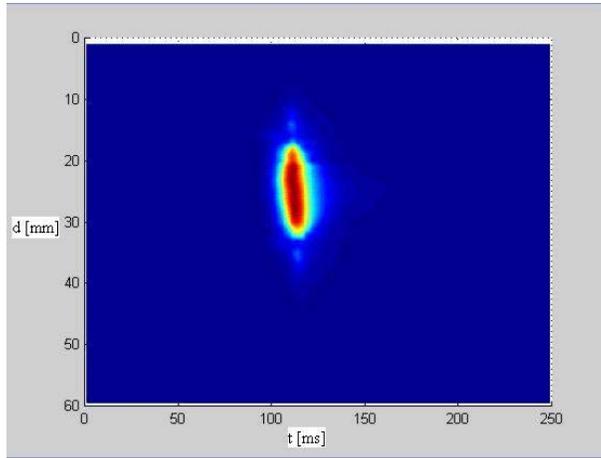


Figura 5.7. Anillo libre.

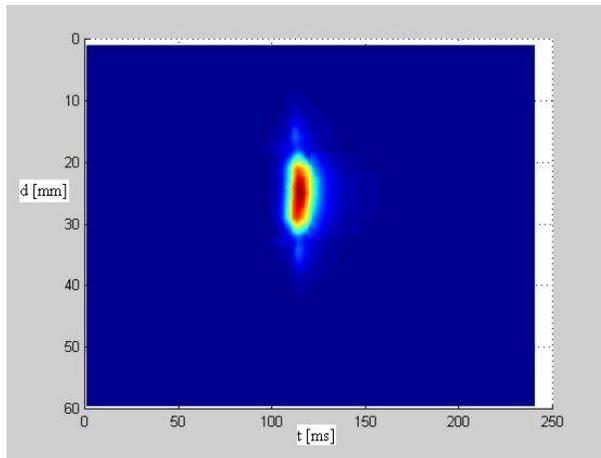


Figura 5.8. Anillo medido a 0.028m de la pared de impacto.

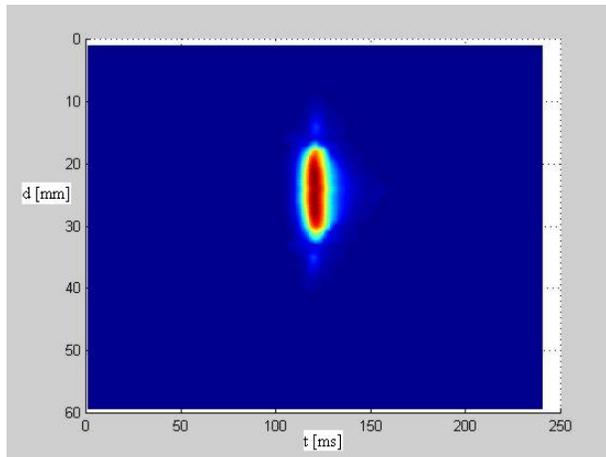


Figura 5.9. Anillo medido a 0.025m de distancia de la pared de impacto.

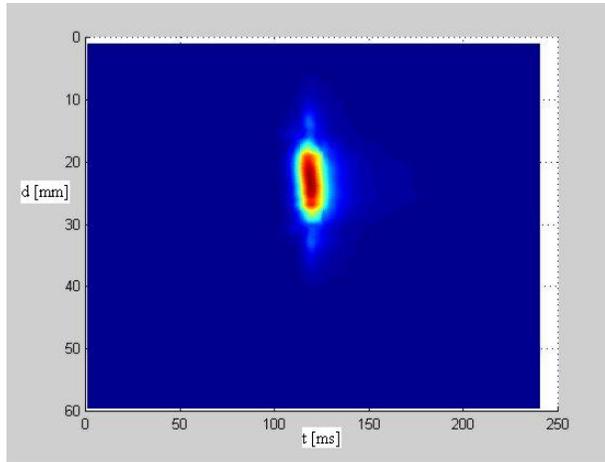


Figura 5.10. Anillo medido a una distancia de 0.020m de la pared de impacto.

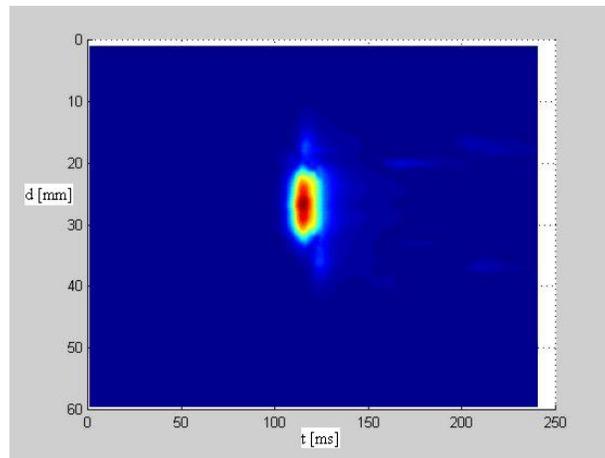


Figura 5.11. Anillo medido a una distancia de 0.015m de la pared de impacto.

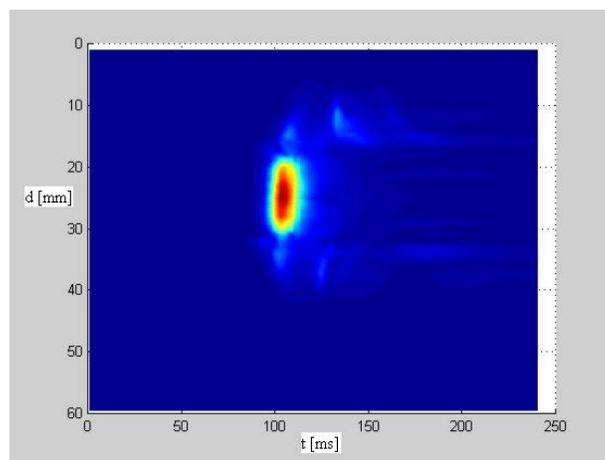


Figura 5.12. Anillo medido a una distancia de 0.010m de la pared de impacto.

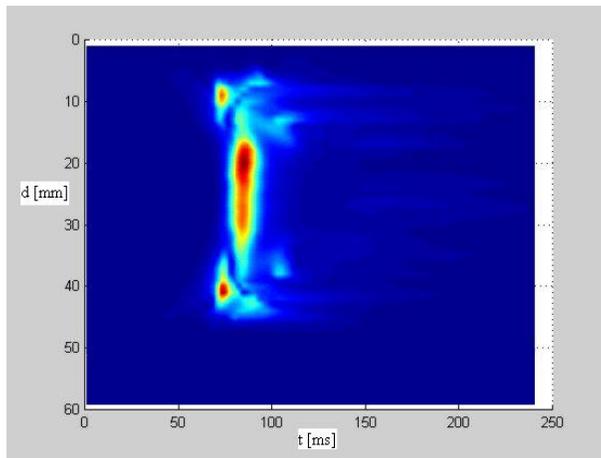


Figura 5.13. Anillo medido a un a distancia de 0.005m de la pared de impacto.

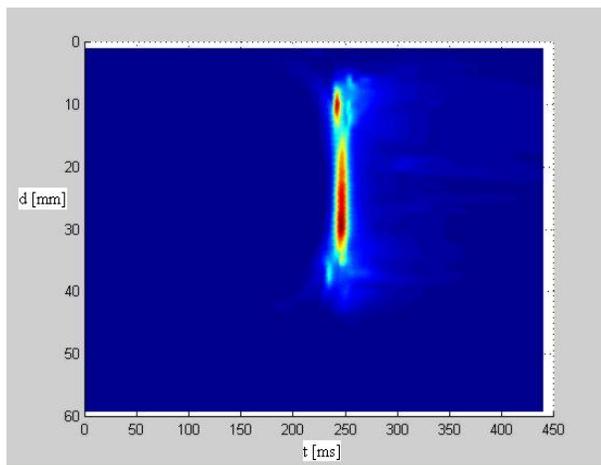
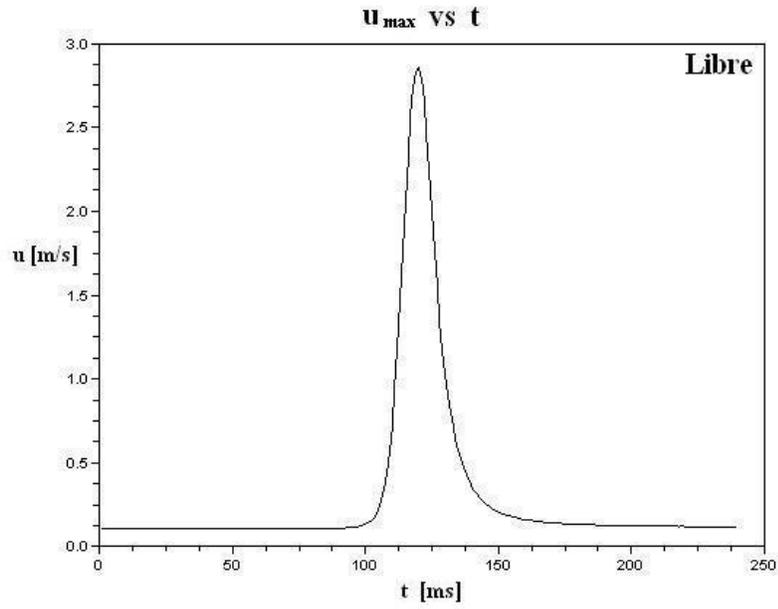


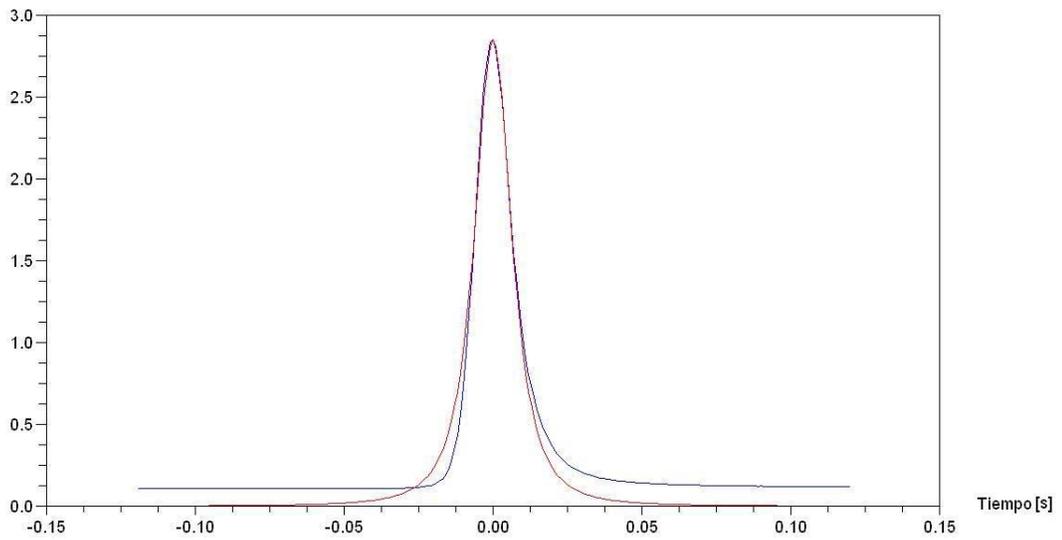
Figura 5.14. Anillo medido a una distancia de 0.002m de la pared de impacto.



a

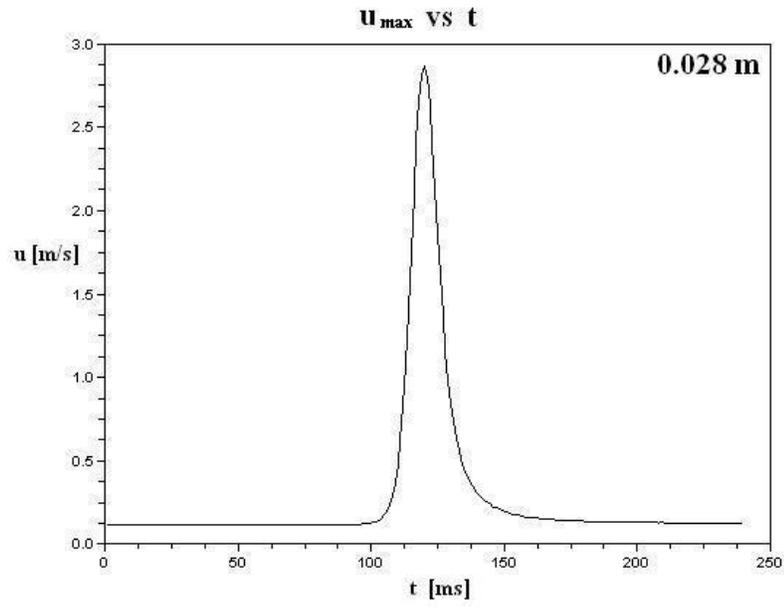
Velocidad en el centro del anillo [m/s]

Libre

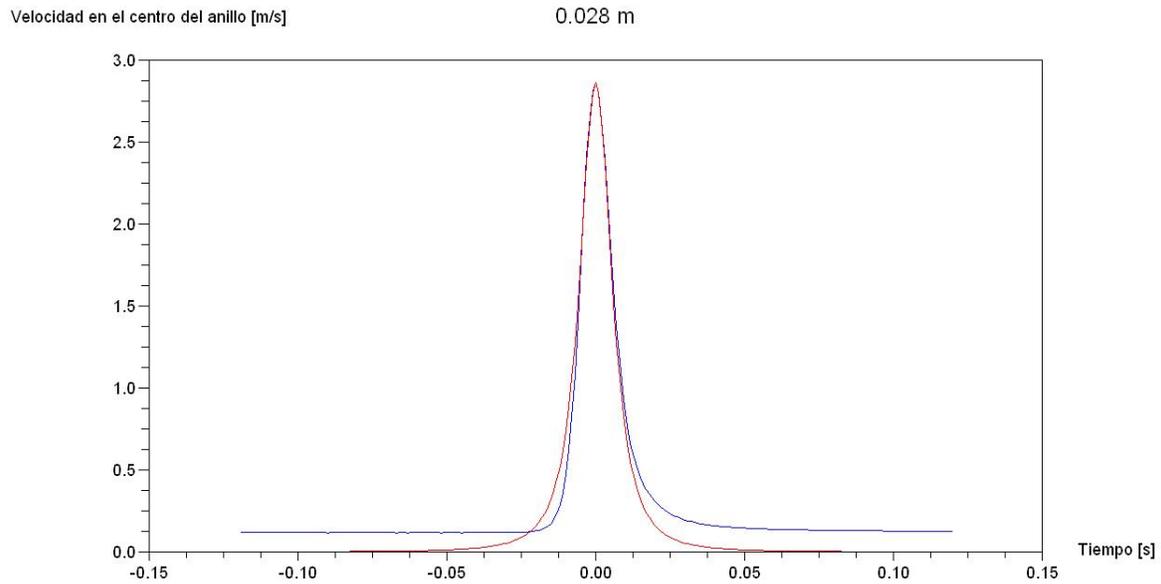


b

Figura 5.15. a) Velocidad medida por la sonda colocada en el centro del anillo. b) Comparación con la curva teórica calculada con una ecuación con la forma de la ecuación 5.1. Anillo Libre.

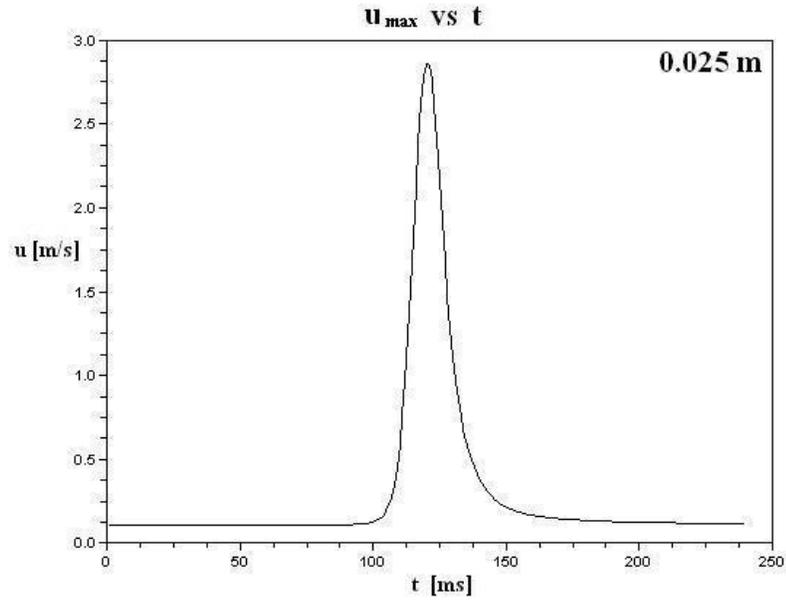


a



b

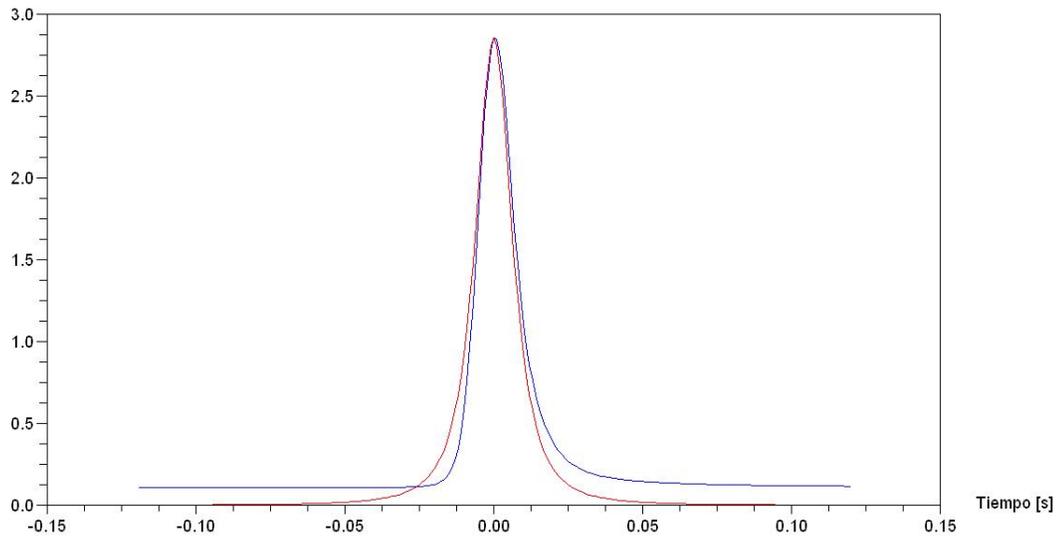
Figura 5.16. a) Velocidad medida por la sonda colocada en el centro del anillo. b) Comparación con la curva teórica calculada con una ecuación con la forma de la ecuación 5.1. Anillo a 0.028 m de la pared.



a

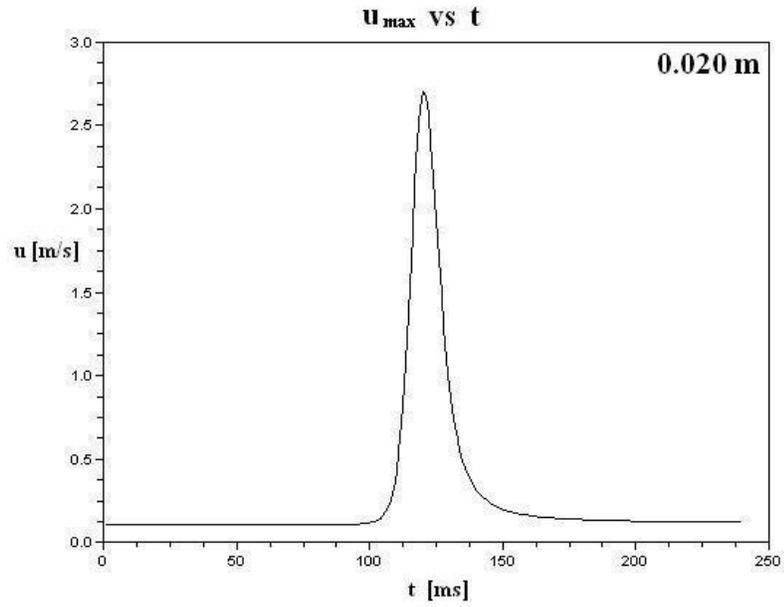
Velocidad en el centro del anillo [m/s]

0.025 m



b

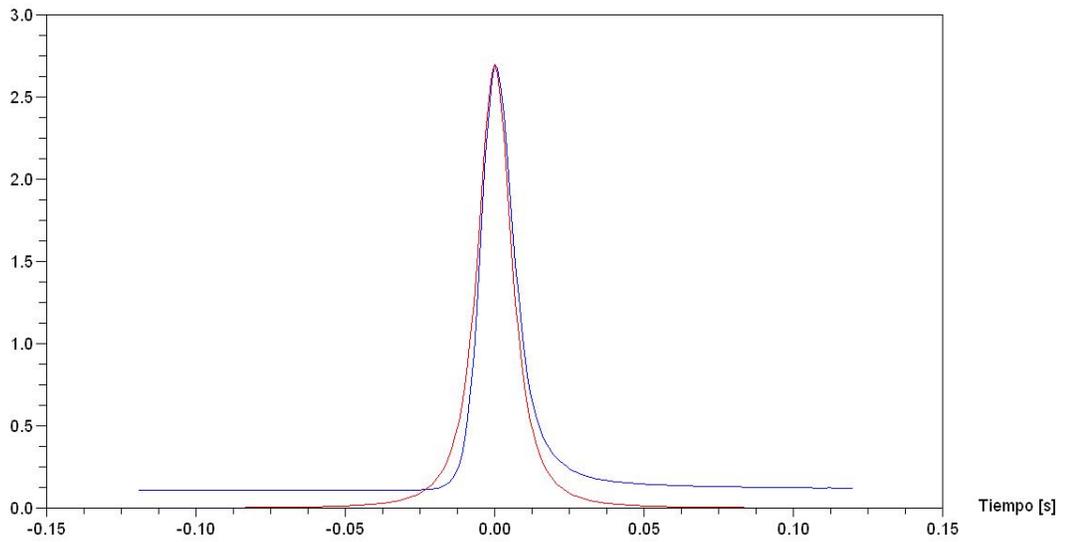
Figura 5.17. a) Velocidad medida por la sonda colocada en el centro del anillo. b) Comparación con la curva teórica calculada con una ecuación con la forma de la ecuación 5.1. Anillo a 0.025 m de la pared.



a

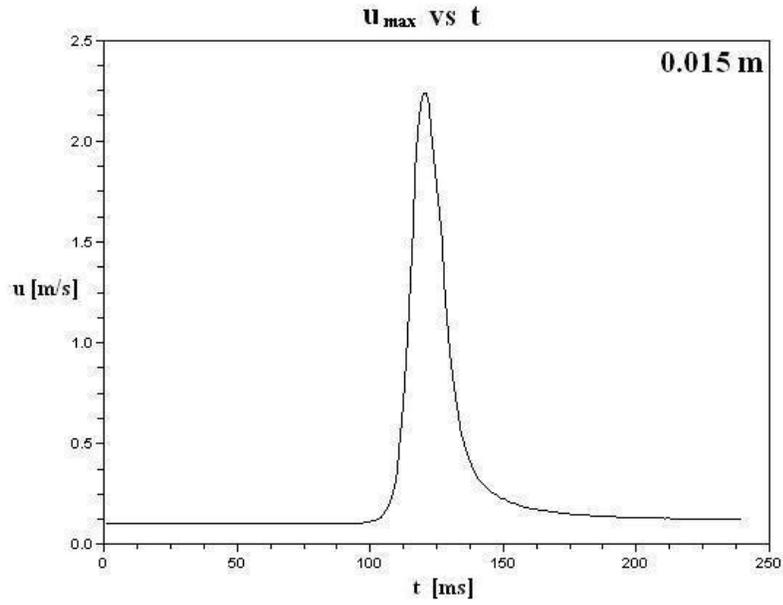
Velocidad en el centro del anillo [m/s]

0.020 m

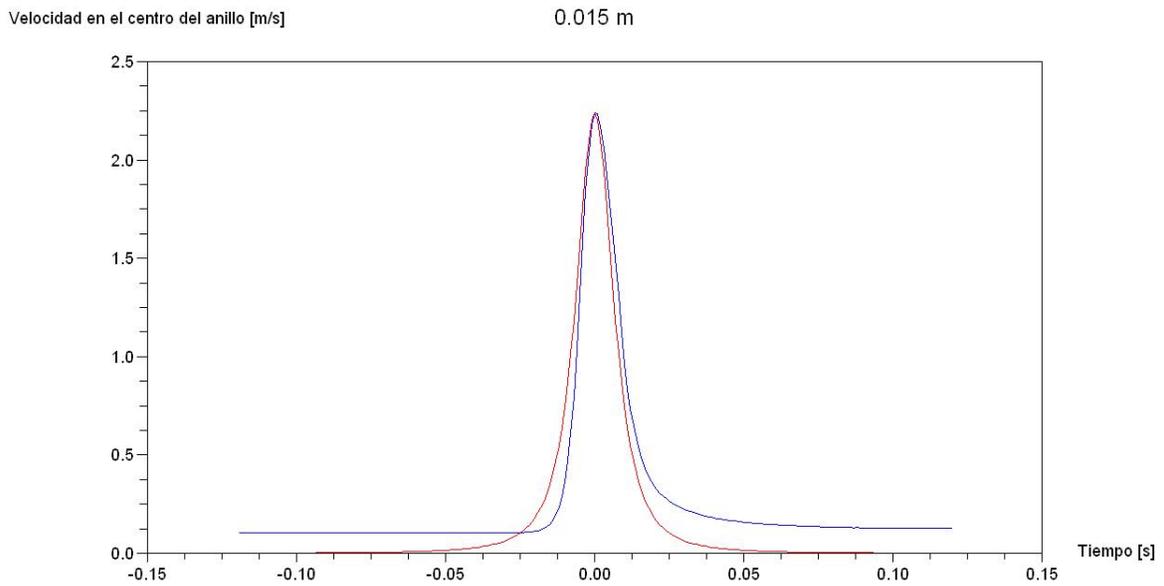


b

Figura 5.18. a) Velocidad medida por la sonda colocada en el centro del anillo. **b)** Comparación con la curva teórica calculada con una ecuación con la forma de la ecuación 5.1. Anillo a 0.020 m de la pared.



a



b

Figura 5.19. a) Velocidad medida por la sonda colocada en el centro del anillo. b) Comparación con la curva teórica calculada con una ecuación con la forma de la ecuación 5.1. Anillo a 0.015 m de la pared.

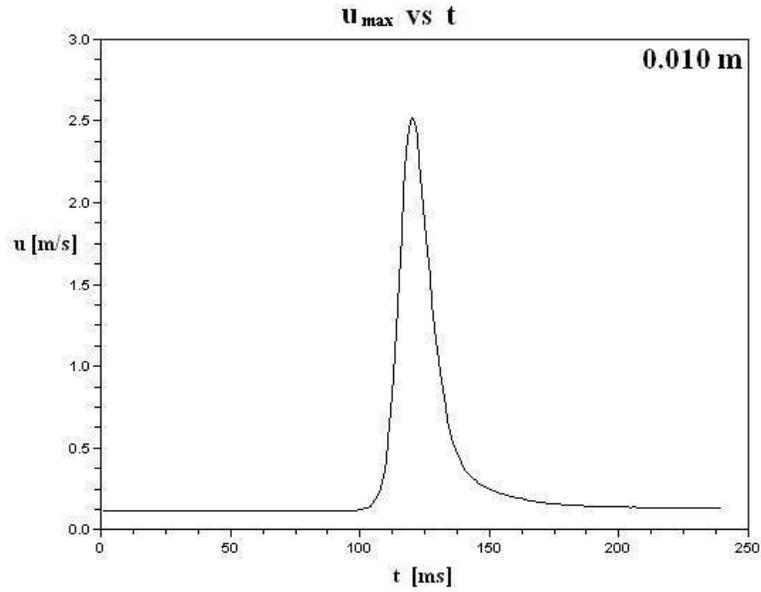


Figura 5.20. Velocidad medida por la sonda colocada en el centro del anillo. Anillo a 0.010 m de la pared.

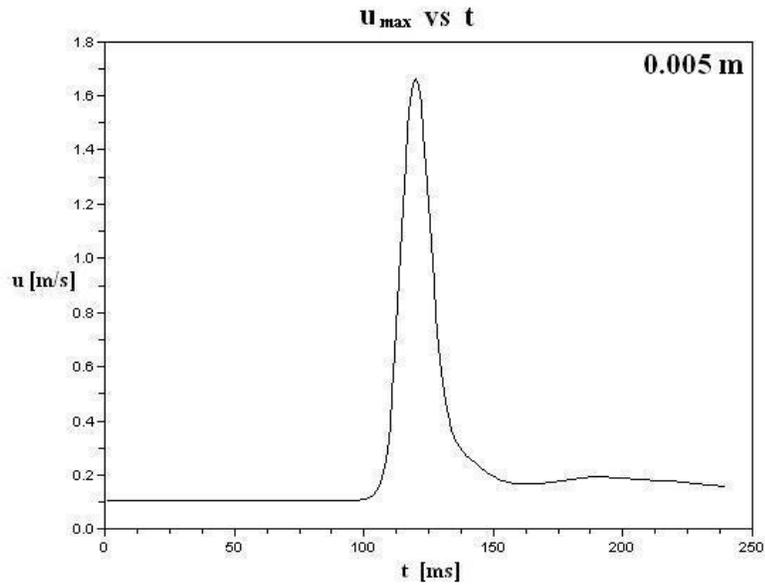


Figura 5.21. Velocidad medida por la sonda colocada en el centro del anillo. Anillo a 0.005 m de la pared.

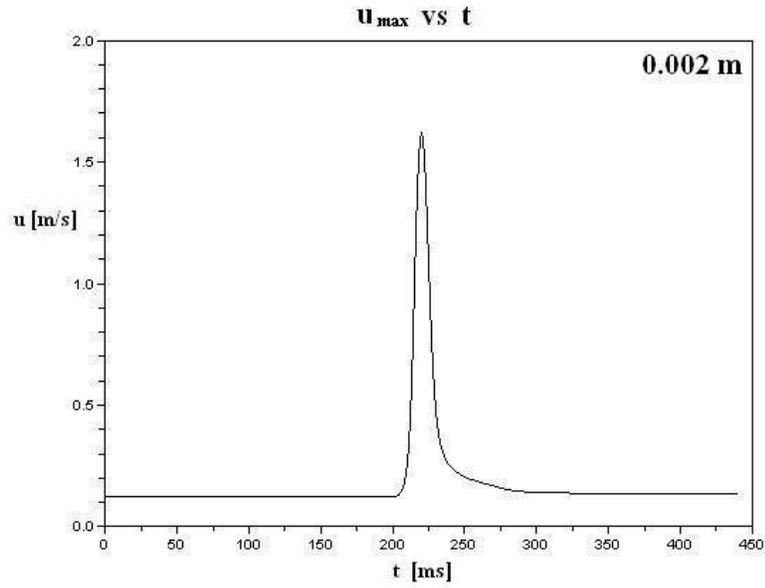


Figura 5.22. Velocidad medida por la sonda colocada en el centro del anillo. Anillo a 0.002 m de la pared.

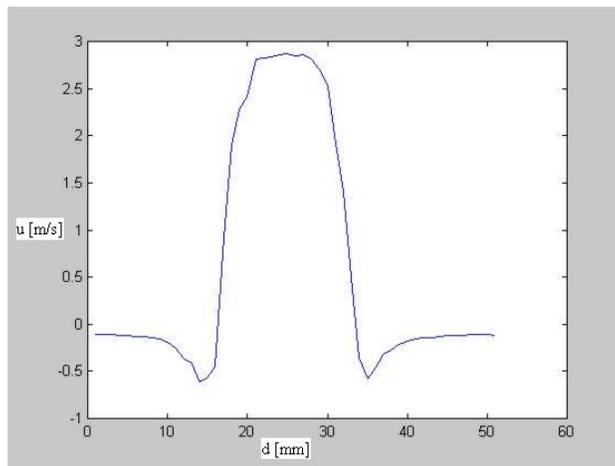


Figura 5.23. Reconstrucción del campo de velocidades del anillo libre, al desplazar la sonda a lo largo de una línea sobre el diámetro, contenida en un plano ud (velocidad-distancia), que a su vez contiene la circunferencia que forma el centro del núcleo.

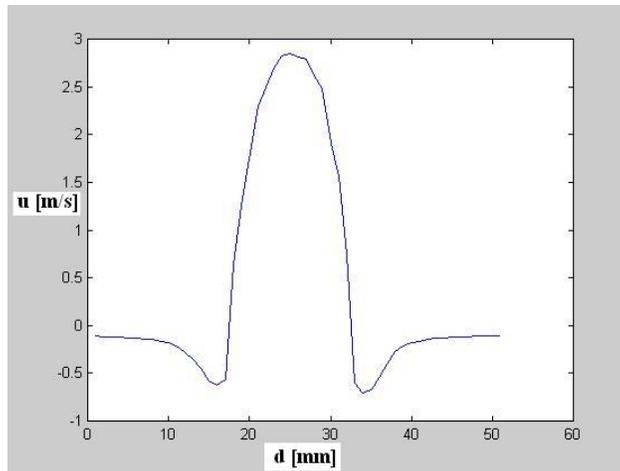


Figura 5.24. Reconstrucción del campo de velocidades del a 0.028 m de la pared, al desplazar la sonda a lo largo de una línea sobre el diámetro, contenida en un plano ud (velocidad-distancia), que a su vez contiene la circunferencia que forma el centro del núcleo.

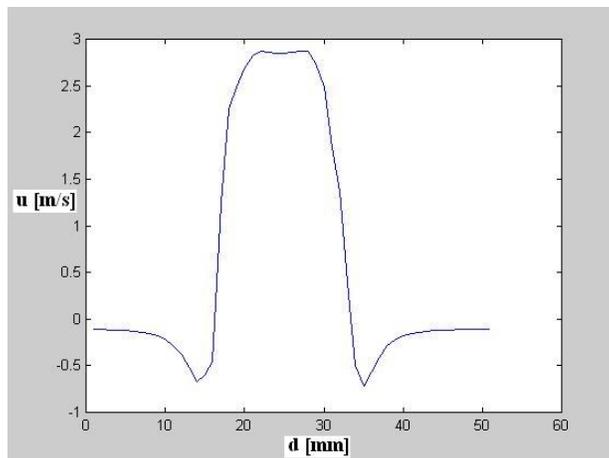


Figura 5.25. Reconstrucción del campo de velocidades del anillo a 0.025 m de la pared, al desplazar la sonda a lo largo de una línea sobre el diámetro, contenida en un plano ud (velocidad-distancia), que a su vez contiene la circunferencia que forma el centro del núcleo.

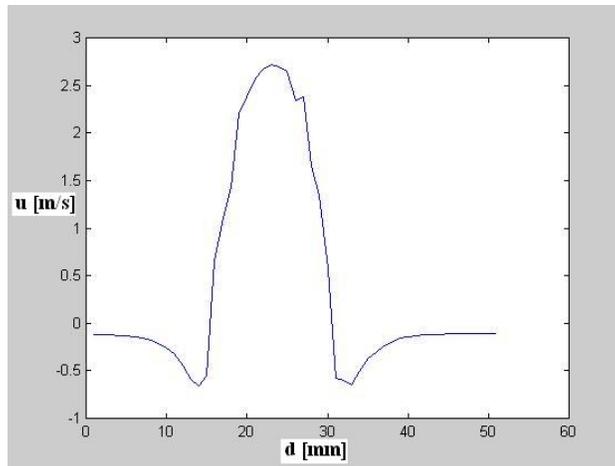


Figura 5.26. Reconstrucción del campo de velocidades del anillo a 0.020 m de la pared, al desplazar la sonda a lo largo de una línea sobre el diámetro, contenida en un plano ud (velocidad-distancia), que a su vez contiene la circunferencia que forma el centro del núcleo.

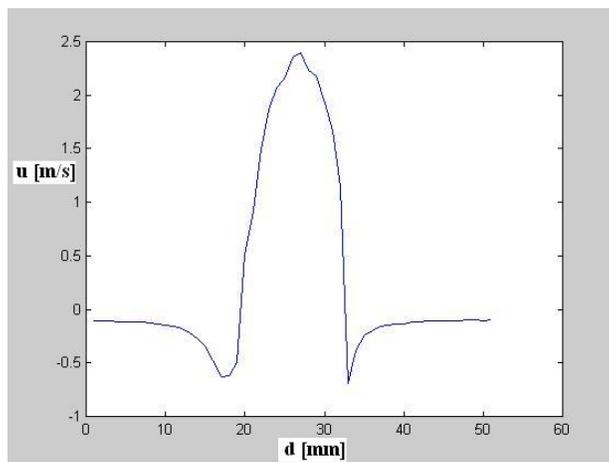


Figura 5.27. Reconstrucción del campo de velocidades del anillo a 0.015 m de la pared, al desplazar la sonda a lo largo de una línea sobre el diámetro, contenida en un plano ud (velocidad-distancia), que a su vez contiene la circunferencia que forma el centro del núcleo.

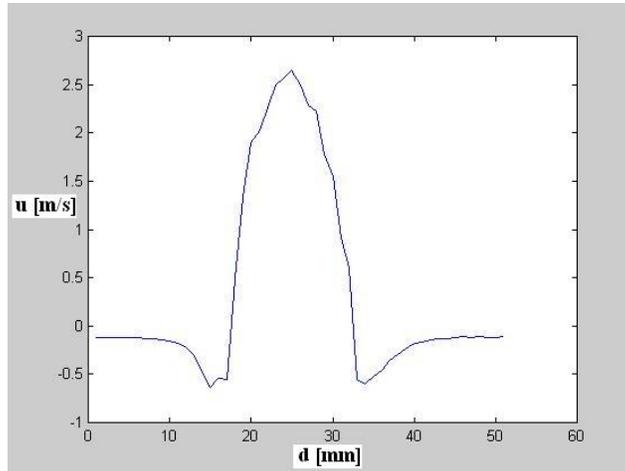


Figura 5.28. Reconstrucción del campo de velocidades del anillo a 0.010 m de la pared, al desplazar la sonda a lo largo de una línea sobre el diámetro, contenida en un plano ud (velocidad-distancia), que a su vez contiene la circunferencia que forma el centro del núcleo.

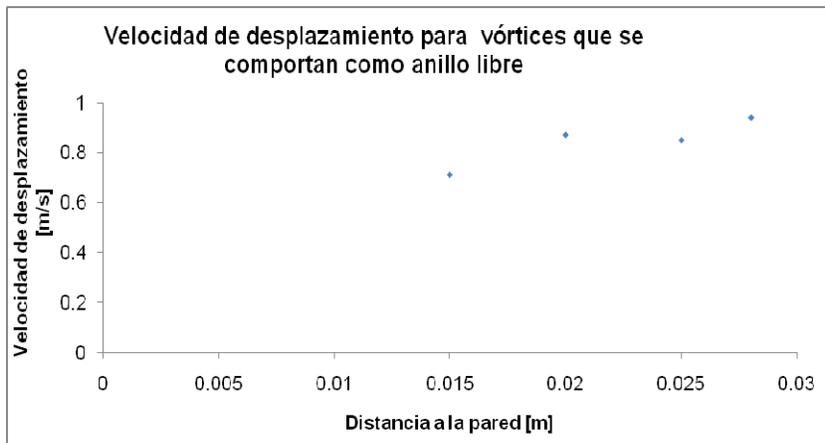


Figura 5.29. Gráfica de velocidad de desplazamiento de los vórtices anulares contra distancia a la pared de impacto.

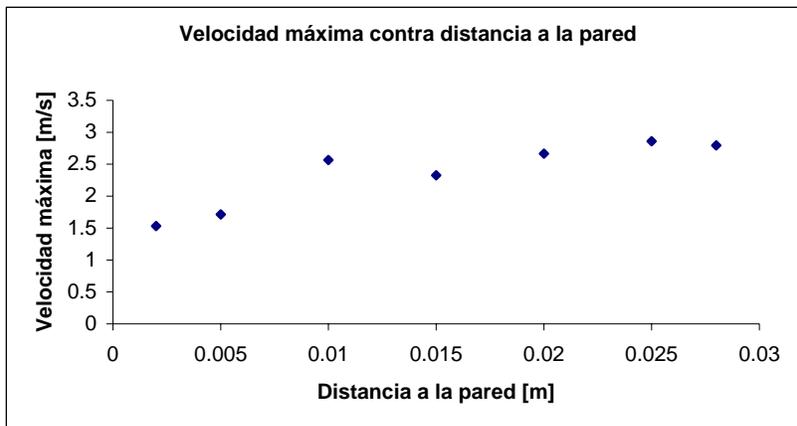


Figura 5.30. Gráfica de velocidad de velocidad máxima de los vórtices anulares contra distancia a la pared de impacto.

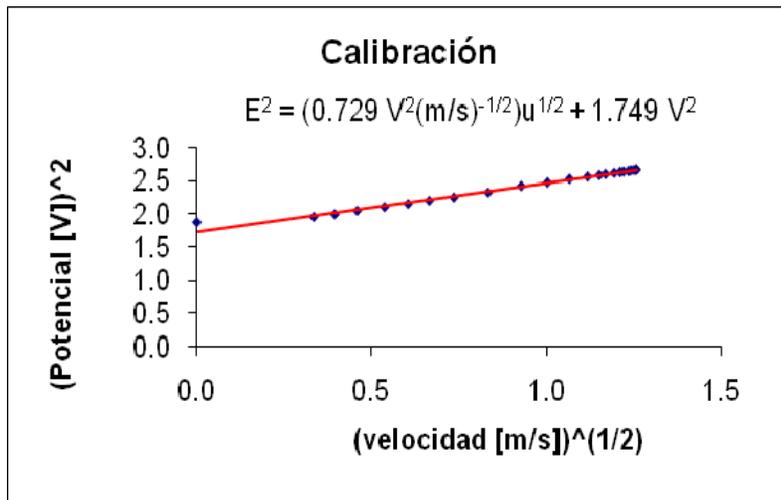


Figura 5.31. Gráfica de la calibración de la sonda.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo a futuro

Para el trabajo que se presenta, fueron diseñados y construidos dispositivos para la generación de vórtices anulares, para el aislamiento de éstos de corrientes de aire no deseadas y para el desplazamiento de la sonda del anemómetro con la cuál fueron adquiridos los datos. Estos dispositivos cumplieron su función, pues la masa de aire en el interior de la caja de acrílico, quedó aislada de corrientes de aire externas a ella, aunque por otro lado, fue necesario tener esa cavidad en una región de temperatura uniforme. Las tapas de papel cascarón funcionan correctamente como parte de la tapa. La bocina generadora de los vórtices, los produce con las mismas características (diámetro, velocidad máxima, velocidad de desplazamiento) en los intervalos de tiempo programados. El sistema de desplazamiento cumple con el propósito de mover la sonda con la fineza requerida 0.001 m a la vez. Basta con graduar la regla de desplazamiento con una fineza mayor para lograr movimientos más cortos y precisos. Dado su tamaño el sistema de desplazamiento puede ser usado para medir vórtices anulares de mayor tamaño. Estos mismos dispositivos podrán ser utilizados para realizar los experimentos planeados a futuro, de los que se habla adelante.

En este trabajo también fue estudiado el campo de velocidades de un vórtice anular al interaccionar con una pared vertical perpendicular al vector de desplazamiento de éste. En todas las figuras del capítulo 5, todos los campos de velocidades fueron tomados a una distancia fija de la pared, cuando la hubo. Así en cada una de las figuras 5.8 a 5.14 toda el área comprendida entre los ejes, representa el campo de velocidades de los vórtices a una distancia fija de la pared. En el eje de las abscisas se observa la dependencia del tiempo y no el desplazamiento de los vórtices anulares acercándose a la pared.

La distancia en la que se hace notoria la interacción del vórtice anular con la pared es entre los 0.02 m y los 0.015 m pues a distancias mayores el vórtice anular se comporta como un anillo libre. Se observa también que el radio del vórtice anular no crece a estas distancias.

La sonda mide la magnitud del campo de velocidades, pero no su dirección, por lo que hay que buscar un procedimiento para determinar el cambio de signo y por lo tanto determinar dónde, el campo, ha revertido su dirección. La sonda detecta aquellas velocidades que son perpendiculares con respecto al alambre que la compone. Al utilizar la ecuación de continuidad fue posible determinar otra componente de las velocidades, así, se logró reconstruir un campo de velocidades bidimensional sobre un plano horizontal. Al utilizar la ecuación de continuidad en las mediciones de la figura 5.5 el campo que se mostraba no correspondía al de un vórtice anular por carecer de vórtices, dando una idea de en qué regiones introducir un cambio de signo en los datos, para obtener las velocidades de la figura 5.6. Utilizando esta nueva serie de datos y la ecuación de continuidad se obtuvo un

campo de velocidades suave y con inversiones en su dirección; esto es, un campo en el que se observan vórtices. Esto fue hecho para el anillo libre.

En las figura 5.5 y 5.6 se observa que hay dos regiones en las que la velocidad cambia notablemente. El campo va de velocidades negativas a velocidades positivas. Dichas variaciones de velocidades tienen forma de líneas rectas, que son las zonas en las que la vorticidad se encuentra concentrada; es decir, en donde está el núcleo de vórtice anular.

Con la figura 5.5, el radio del núcleo del anillo libre pudo ser determinado encontrando el punto medio entre el mínimo y el máximo de una de las rectas, y midiendo la distancia entre éste y el mínimo o el máximo de la recta elegida. En la región comprendida entre los máximos de las rectas la velocidad es la máxima y, además, es prácticamente constante. Hay ocasiones, cuando el anillo tiene enfrente una pared, pero se comporta como anillo libre, que la velocidad en el centro no es constante ni las curvas que van de la velocidad mínima a la máxima son rectas. Hay que averiguar qué expresión matemática describe la curva de velocidades que une la velocidad mínima con la máxima. También hace falta observar para qué casos o bajo qué condiciones ocurre que el campo de velocidades al ser graficado como en las figuras 5.23 a 5.28 no presenta una velocidad máxima constante.

En los resultados se puede observar que hay simetría en el proceso; es decir, el anillo se deforma, pero lo hace aumentando su radio, no cambiando a una forma diferente de la anular, esto se ve de la siguiente manera: el radio del anillo cerca de la pared no se puede medir por medio de la anemometría de hilo caliente, pero la zona de velocidad en el centro del anillo, crece en el eje de las distancias medidas a lo largo del diámetro. También se observa que el campo de velocidades del anillo es diferente de cero por más tiempo cuando la sonda se encuentra muy cerca de la pared; es decir, cuando la masa de aire que forma el vórtice anular está interaccionando con la pared. Además aparece un campo de velocidades simétrico, cercano a la pared, alrededor del anillo antes de su arribo. Es un campo muy pequeño tanto en magnitud de velocidades como en sus dimensiones espaciales pues se detecta a partir de la figura 5.13, es decir entre los 0.01 m y los 0.005 m de distancia de la sonda a la pared comienza ser detectado. Este campo muestra que la influencia del campo de velocidades de los vórtices sobre el aire sobre la pared comienza a una distancia paralela al radio del vórtice de $D > R + a$, con R el radio del vórtice y a el radio del núcleo del vórtice.

De las figuras 5.15.a a 5.19.a de las 5.20 a 5.22 y de la 5.30 se observa que la velocidad máxima disminuye lentamente al estar alejado el vórtice de la pared pero más rápido a medida que se acorta la distancia entre el vórtice y ésta.

De la figuras 5.23 a 5.28 y 5.29 la velocidad de traslación sólo puede ser medida cuando la influencia de la pared no es intensa, es decir cuando el vórtice anular se comporta como un anillo libre.

Las graficas 5.15.b a 5.19.b muestran que comparar las mediciones hechas con curvas teóricas, se hace notoria la influencia de la viscosidad pues le resta simetría al fenómeno, pues las curvas experimentales y las teóricas concuerdan menos conforme la distancia a la pared disminuye, hay un corrimiento de estas últimas hacia la izquierda.

En lo referente al trabajo a futuro falta observar con detalle, el comportamiento del campo de velocidades de un vórtice anular al impactar sobre diferentes tipos de paredes. Por ejemplo, una pared en posición oblicua con respecto al plano del anillo, o bien, en la cara interior o exterior de una esquina formada por dos paredes. Lo mismo para una pared de forma cónica. Además es de interés la interacción de un anillo con una pared en movimiento paralelo y antiparalelo a su desplazamiento. Para tener mayor detalle del campo de velocidades de los vórtices anulares, hace falta o construir un generador de anillos que los produzca más grandes y utilizar los mismos desplazamientos de la sonda, o usar desplazamientos de ésta mas finos y el mismo tamaño de anillos utilizado, o una combinación de ambos.

Bibliografía

- [1] Lamb, Horace: Hydrodynamics, Sixth Edition, Dover Publications, New York, 1932.
- [2] White, Frank M.: Mecánica de Fluidos, Primera Edición en español, McGraw Hill, México, 1983,.
- [3] Ruiz, Gerardo: Estabilidad Hidrodinámica de una Capa de Fluido Descendiendo por un Plano Inclinado en Rotación, Tesis de Licenciatura, UNAM, 1988.
- [4] Batchelor, G.K.: An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, UK, 2000.
- [5] Potter, Merle C.; Wiggert, David C: Mecánica de Fluidos, Segunda Edición, Prentice Hall Iberoamericana, México, 1998.
- [6] Young, Donald D.; Munson, Bruce R.; Okiishi, Theodore H.: A Brief Introduction to Fluid Mechanics, Second Edition, John Wiley & Sons Inc., New York, 2001.
- [7] Currie, I. G.; Fundamental Mechanics of Fluids, McGraw-Hill, New York, 1993.
- [8] Mase, G.E.; Continuum Mechanics, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, USA, 1970.
- [9] Saffman, P.G.; Vortex Dynamics, First Edition, Cambridge University Press, USA, 1992.
- [10] Lerner, R., TriggG., Enciclopedia of Physics, Saffman, P.G.; Vortices. VHC Publishers, Segunda Edición, USA, 1991
- [11] Guyon, E., Hulin, J.P., Petit, L.; Hydrodynamique Physique, Savoirs Actuels, EDP Sciences, CNRS Éditions, Paris, 2001.
- [12] Panton R.L.; Incompressible Flow, John Wiley & Sons Inc., USA, 1984.
- [13] Tokaty, G.A.; A History and Philosophy of Fluid Mechanics, Dover Publications, New York, 1994.
- [14] Bailly, C., Compte-Bellot, G., Turbulence, CNRS Éditions, Paris, 2003.
- [15] Lavrentiev, M, Chabat, B.; Effets Hydrodynamiques et Modèles Mathématiques, Éditions Mir-Moscou, 1980.

- [16] Wangsness, R.K.; Electromagnetic Fields, Segunda edición, John Wiley & Sons Inc., USA, 1986.
- [17] Arfken, G.B., Weber, H.J., Mathematical Methods for Physicists, Quinta Edición, Harcourt Academic Press, USA, 2001.
- [18] Peralta y Fabi, R. Fluidos Apellido de Líquidos y Gases, La Ciencia desde México 115, FCE, México, 1993.
- [19] Sommerfeld, A.; Mechanics of deformable bodies, Segunda Edición, Academic Press, USA, 1950.
- [20] Fox, R.W., McDonald, A.T.; Introducción a la mecánica de fluidos, Cuarta Edición, McGraw-Hill, México, 1995.
- [21] Widnall, Sheila E., Sullivan J.P., On the stability of vortex rings, Proc. R. Soc. Lond. A.232, 332-353, 1972.
- [22] Saffman, P.G.;1970, The velocity of viscous vortex rings, Stud. Appl. Math. Vol.XLIX, No.4, 371-380.
- [23] Halliday, Resnick, Kane, Física Vol 1, Cuarta Edición (en español), CECSA, México, 2002.
- [24] Pinton J.F., Mesure de Vorticité par Diffusion Ultrasonore, Tesis Doctoral, Université Claude Bernard, Lyon 1, 1992
- [25] Ruiz, Gerardo: Intermitencia de Velocidad y Temperatura en Turbulencia Desarrollada, Tesis Doctoral, UNAM, 1995.
- [26] Dantec Dynamics, Probes for Hot-wire Anemometry, Publication 238-1, Denmark, 2005. www.dantecdynamics.com.
- [27] Feynman, R.P., Lectures on Physics Vol 2, Secon Printing, Addison-Wesley Publishing Company, California, USA, November 1964.
- [28] Landau, L.D, Lifschitz. Mecánica, Curso de Física Teórica Voll, Segunda Edición, Reverté, Barcelona 1978.
- [29] Malvern L.E. Introduction to Mechanics of a Continuous Medium, Prentice Hall, New Jersey, 1969.
- [30] Gerhart, P., Gross, R., Hochstein, J., Fundamentos de Mecánica de Fluidos, Segunda Edición, Addison-Wesley Iberoamericana S.A., EUA,1995.
- [31] Liepmann, H.W., Roshko, A., Elements of Gasdynamics, Dover, 2001.

- [32] Spurk, Joseph, H., Fluid Mechanics, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.
- [33] Bruun, H.H., Hot-Wire Anemometry, Principles and signal analysis, Oxford University Press, Reprinted 1996, Great Britain, 1996.
- [34] Handbook of chemistry and physics 63rdEd., CRC Press, 1982-1983.
- [35] Vázquez, Edgar: Convección Natural de un Fluido Viscoelástico con Superficie Deformable, Tesis de Licenciatura, UNAM, 1999.
- [36] Vanyo, J. Rotating Fluids in Engineering and Science, Butterworth-Heinemann, First Edition, USA, 1993.