UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULATAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLAN

LA GEOMETRÍA DINÁMICA UNA OPCIÓN A LA FORMULACIÓN DE CONJETURAS Y SU PRUEBA: UN ESTUDIO CON ALUMNOS DE BACHILLERATO

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA: **MARCOS ANTONIO ROJAS RIVAS**

ASESOR: **DR. MIGUEL MERCADO MARTÍNEZ**

NAUCALPAN, EDO. DE MÉXICO MARZO DE 2007

Contenido

Agradecimientos:

Al Doctor en Ciencias
Miguel Mercado Martínez
Por su apoyo y por la dirección académica
para la realización de esta tesis
….
Gracias

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA DE ESTUDIO

Introducción

Las matemáticas han ocupado a lo largo de la historia un lugar muy importante en nuestra cultura, entre otras razones porque generan un modelo de pensamiento, porque fomentan la capacidad de abstracción de los individuos, son un instrumento de modelización de la realidad, constituyen el lenguaje básico de la ciencia y la tecnología, tienen una componente lúdica muy vinculada a los juegos tradicionales y porque su puesta en práctica conlleva una actividad creadora de belleza [Guzmán, 1997]. Todos estos argumentos convierten a las matemáticas en una disciplina básica en el currículo de todo individuo cuya importancia ha sido fruto de una larga evolución histórica.

La importancia de las matemáticas en nuestra cultura ensalza de forma evidente la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, repleta de dificultades tanto en su propia estructura conceptual como en diferentes aspectos externos a la misma, entre los que podemos destacar la actitud del individuo frente al que hacer matemático, el lenguaje propio de las Matemáticas y la necesidad de una estructura conceptual adecuada para enfrentarse a los contenidos de la misma [Guzmán, 1991]

Si a la relevancia de esta disciplina añadimos las dificultades que entraña su enseñanza y aprendizaje, podemos afirmar que cualquier estudio relacionado con la educación matemática se convierte en un proceso sumamente complicado tal y como podemos observar en la evolución que ha tenido la enseñanza de esta disciplina a lo largo de la historia, que ha ido modificando desde sus propios contenidos hasta las metodologías pasando por los recursos didácticos empleados [Boyer, 1968], [Debasse-Mialaret, 1973].

Los objetivos tradicionales de la enseñanza de la geometría, en esencia, son dos: uno es, conocer y analizar las características y propiedades de los objetos geométricos; el otro es, introducir en el desarrollo del razonamiento deductivo al alumno [NCTM, 2000; Hansen, 1998].

Sin embargo, con relación al segundo objetivo señalado en el párrafo anterior, se ha observado, desde hace años, que la enseñanza de la geometría como un sistema deductivo, deja poco en el alumno [Balacheff, 1987; Chazan, 1993; Gras & Giorgiutti, 1996]; son varios los argumentos señalados, en las investigaciones, en el sentido de que a los estudiantes les resulta difícil la prueba debido parcialmente a su significado ambiguo, que la prueba requiere de la coordinación de un rango de competencias [Hoyles, 1997], o que "… los alumnos… no… reconocen la necesidad de una demostración lógica de los problemas geométricos, en especial cuando estas demostraciones son visualmente obvias o pueden efectuarse empíricamente" [Ganobolin, 1954, citado en de Villiers, 1993, p. 16].

Si se toma como punto de partida que los objetivos de la enseñanza de la geometría son vigentes, además de la disponibilidad de tecnología manifiesta en forma de calculadoras o computadoras con software educativo en las escuelas, entonces se plantea la necesidad de buscar alternativas para la enseñanza de la geometría, en particular, y de las matemáticas, en general, tomando en cuenta los medios computacionales.

Un tipo de paquetes computacionales que ha venido a revolucionar la enseñanza de la geometría por su gran capacidad de crear ambientes de exploración para los usuarios, son los llamados softwares de Geometría Dinámica; entre ellos, se encuentran Cabri-Géomètre, Geometric Supposer y Sketchpad.

Las exploraciones y actividades que se pueden realizar con un software de Geometría Dinámica como Cabri-Géomètre, permiten manipular objetos geométricos y visualizar en una pantalla resultados no triviales. Las características de estos paquetes dinámicos han ampliado enormemente las posibilidades de aprendizaje de la geometría [Goldenberg & Cuoco, 1998; Hölzl, 1996; Laborde, 1998].

Algo muy importante, potencialmente presente en los ambientes de geometría dinámica, es que estos permiten el descubrimiento por medio de la exploración. En la geometría del lápiz y papel es muy difícil que el estudiante llegue por sí mismo a descubrir una propiedad geométrica interesante. Tradicionalmente, en los cursos de geometría, se le dan al estudiante las proposiciones ya formuladas; él tiene entonces que verificarla o aplicarla. En consecuencia, el estudiante puede hacerse la imagen de una geometría que consiste en una serie de teoremas encontrados y probados, y en donde no hay nada qué descubrir. Con la geometría dinámica los sujetos tienen la posibilidad de encontrar sus propios resultados.

La posibilidad de definir objetos geométricos a partir de un cierto número de elementos independientes (punto, segmento, recta, etc., ver capítulo II), medir algunas de sus magnitudes (longitudes, áreas, ángulos), luego “arrastrar” (ver capítulo II) los elementos independientes y observar los invariantes, promete ser un recurso enorme para favorecer el cumplimiento de uno de los objetivos del aprendizaje de la geometría: el conocimiento y análisis de las características y propiedades de los objetos geométricos.

Es el “arrastre” lo que da a la Geometría Dinámica su poder matemático y estético; a la vez, realza la complejidad de una situación específica de aprendizaje. Básicamente está diseñado para superar la inercia del medio tradicional papel-lápiz, regla-compás [Hölzl, 1996]. A primera vista el arrastre no es una herramienta de construcción; más bien, parece una herramienta de exploración de las diferentes relaciones invariantes inherentes a una construcción geométrica. Sin embargo, al implementarlo sobre el comportamiento de los objetos, algunas características pueden no quedar en el dominio de la geometría euclidiana clásica. Al momento surgen algunas preguntas: ¿Qué tipo de geometría se desarrolla? ¿Es una geometría diferente? ¿Sólo el cuerpo establecido de axiomas permitirá operaciones y pruebas de teoremas? ¿Deberán ser tomadas en cuenta las herramientas disponibles junto con las acciones de quienes las usan? [Hölzl, 1996].

Varias geometrías tratan con mucho los mismos objetos pero inician con diferentes suposiciones sobre ellos y sobre las transformaciones que de ellos será considerado; la geometría dinámica no debería ser tratada como meramente una nueva interfase para la construcción Euclidiana. Segmentos que se estiran y puntos que se mueven relativamente unos a otros, trivialmente no son los mismos objetos que uno trata en la geometría sintética familiar; esto sugiere nuevos estilos de razonamiento [Goldenberg, 1995]. En una construcción, se pueden cambiar varios parámetros a la vez y observar lo que sucede, sin embargo, se puede no tener la suficiente sofisticación matemática para observar algunas características que es importante ver.

Se ha observado que los alumnos que trabajan en ambientes computacionales desarrollan lenguajes matemáticos que reflejan la naturaleza de la interacción con el ambiente. El lenguaje de los alumnos con experiencias geométricas con Cabri-Géomètre refleja la dinámica del arrastre [Laborde, 1995; Hölzl, 1996; Schumann, 1996; Arzarello, et. al, 1999].

Preguntas del Estudio

Una conjetura que se plantea en el trabajo, es que de alguna manera la potencialidad del software de la geometría dinámica favorece el aprendizaje de la geometría en el alumno; no obstante, no se trata de una geometría del tipo de la geometría tradicional, de una geometría Euclidiana, donde la prueba es el eje central, sino una geometría de tipo experimental donde la exploración conduce al planteamiento de conjeturas, las cuales pueden ser verificadas o refutadas por medios experimentales con las herramientas del Cabri-Géomètre. El estudiante puede ver una conjetura, pero puede no formularla en un lenguaje apropiado.

Un aspecto que todavía no está claro y que se ha abordado poco en los estudios sobre el tema es, ¿qué papel juegan o pueden jugar las actividades con la geometría dinámica en el fortalecimiento del razonamiento deductivo? (Uno de los cinco estándares de proceso de *Principles and Standards for School Mathematics* [NCTM, 2000]). La pregunta es pertinente si se sostiene aún el segundo objetivo de la enseñanza de la geometría, el de introducir y fortalecer el razonamiento deductivo. ¿Hay maneras en las que el desarrollo de actividades con geometría dinámica proporcione una vía de acceso a la demostración? o ¿Es necesario un aprendizaje específico e independiente en lo que respecta al razonamiento deductivo?

Al analizar la naturaleza de las actividades con geometría dinámica y la naturaleza de las acciones que implica el diseño de una prueba deductiva, se puede encontrar una actividad que sirve de puente entre ellas: la formulación escrita de las conjeturas. Se ha mencionado que uno de los usos más claros de la geometría dinámica es el de la exploración, el de permitir que el estudiante llegue por sí mismo a un resultado. Una vez que se ha descubierto un resultado, para que éste pueda convertirse en un conocimiento geométrico propiamente dicho, debe convertirse en una proposición y ser demostrada. El resultado al que llega el estudiante con la exploración dinámica está estructurado de acuerdo a leyes de organización visual, pero falta convertirlo en un enunciado organizado de acuerdo a las leyes del discurso [Duval, 1999ª]. Esta conversión es necesaria para pasar a la fase de la prueba pues las leyes del razonamiento operan sobre proposiciones expresadas en el discurso de la lengua y no sobre imágenes.

¿Es posible desarrollar un conocimiento geométrico amplio, sin desarrollar un lenguaje escrito? Se ha sugerido que el trabajo en ambientes de geometría dinámica permiten dejar a los estudiantes la tarea de formulación por escrito de las conjeturas que descubran en sus actividades [Sánchez & Mercado, 2002].

Las anteriores consideraciones conducen a cuestionamientos más específicos que se formulan como preguntas de investigación:

- **¿Cómo es el tránsito de la adquisición de resultados geométricos mediante exploraciones con Cabri-Géomètre a la enunciación correcta de las conjeturas geométricas correspondientes?**

Hipótesis: Este tránsito, como hemos visto en un estudio realizado como parte de este trabajo (ver capitulo III), no es espontáneo. No es suficiente que los estudiantes sepan de qué están hablando y que identifiquen relaciones geométricas correctas con la ayuda del software para que puedan formular la conjetura en una forma matemáticamente precisa. Es necesario que pongan en acción otras competencias: las competencias del paso de la expresión oral a la expresión escrita, así como las acciones mismas que los estudiantes llevan a cabo al interactuar con el software.

Este paso a la formulación puede hacerse posible en la medida en que el estudiante haya avanzado en dos aspectos:

1) En la apropiación de un léxico geométrico, es decir, que utilice palabras propias de la geometría en su acepción técnica, incluyendo la utilización de símbolos para referirse a objetos geométricos; en otras palabras, que haya producido o adoptado un lenguaje funcional y operativo [Balacheff, 1999; Duval, 1999ª].

2) Que conozca y distinga la estructura de una proposición condicional y los cuantificadores, o sea, que pueda distinguir entre proposiciones universales y existenciales, además de distinguir el antecedente y el consecuente de una proposición.

Con relación al primer aspecto, las actividades con Cabri ayudan sólo parcialmente. En particular, las actividades con Cabri parecieran favorables para comprender las palabras que incluye el menú: perpendicular, bisectriz, mediatriz, etc. por la vía de hacer corresponder objetos precisos a esas palabras, además de que se ponen de manifiesto los objetos geométricos más elementales de los que dependen. Sin embargo, en el estudio se observó que los estudiantes, al referirse a estos objetos, lo hacen de manera ambigua; por ejemplo, en la expresión "la perpendicular a la recta *l*" no se menciona en qué punto; en "el simétrico de P", no se menciona respecto a qué objeto, etc.

Con relación al segundo aspecto, suena plausible pensar que la estructura de las actividades que se llevan a cabo con Cabri para hacer una construcción y determinar un invariante son favorables para que el estudiante distinga claramente entre antecedente y consecuente. El antecedente lo constituyen las propiedades que impuso el estudiante sobre la construcción: eligió un triángulo, dos lados perpendiculares, un punto a determinada distancia, etc. Es decir, la construcción geométrica tiene una serie de constreñimientos puestos deliberadamente por el estudiante; este conjunto de propiedades son los candidatos para formar el antecedente. Los invariantes, lo que el estudiante descubre como una propiedad que surgió sin que lo pretendiera, es el candidato al consecuente.

Uno de los problemas que se observó en el Estudio es que el estudiante formula sus acciones relacionadas con el contexto dinámico en el que las produjo: utiliza términos como "al trazar…", "al mover…", etc.

- ¿El alumno es capaz de encontrar argumentos que justifiquen las conjeturas formuladas como resultado de las exploraciones o únicamente se queda con los resultados de las exploraciones con el software?

Hipótesis: El estudiante puede encontrar explicaciones válidas para justificar algunos resultados y expresarlos en forma oral; sin embargo, en esta manera de expresarlo, a veces es difícil distinguir el valor epistémico que el estudiante le da a sus propias afirmaciones: ¿explica, argumenta o demuestra? La expresión oral es inestable, en el curso de la explicación el estudiante puede ir transformando su punto de vista sobre la situación, y lo que comienza siendo un tipo de afirmación puede terminar siendo algo diferente.

Es casi seguro que la expresión oral juega una función heurística que puede permitir encontrar los hitos principales de una argumentación o de una demostración, pero ésta sólo puede ser claramente distinguible, como tal, en su expresión escrita.

Pensamos que las actividades con Cabri no son suficientes para encontrar argumentos que justifiquen una conjetura si sólo se concentran en realizar acciones dentro del software sin reforzarlas con otras actividades que atiendan aspectos relacionados con el paso de la expresión oral a la expresión escrita. Sin embargo, es posible que estas actividades adicionales hagan las tareas más pesadas y menos divertidas para los estudiantes.

En el proceso de enseñanza que llevamos a cabo, se incluyeron actividades especiales con la intención de abrir la posibilidad para que los estudiantes desarrollen habilidades para expresar sus conjeturas y razonamientos por escrito. Así, la pregunta del encabezado de este apartado tiene más sentido si se tiene en cuenta que habrá instrucción en los aspectos que señalamos anteriormente y cuyo objetivo es posibilitar el paso a la escritura.

- ¿El alumno es capaz de construir un sistema coherente de proposiciones sobre relaciones geométricas usando los resultados de una prueba en otras situaciones donde sea aplicable dicho resultado?

Hipótesis: La mecánica del razonamiento descansa, en gran parte, en la conciencia de que una vez que se ha establecido la verdad de una proposición en un dominio determinado, el individuo sea capaz de utilizar tal proposición, junto con otras proposiciones verdaderas, para establecer la verdad de nuevas proposiciones. En el estudio se pudo observar que los estudiantes tienen dificultad para utilizar las proposiciones demostradas para probar las siguientes.

Es muy probable que la dificultad está en realizar las transformaciones necesarias en la proposición que se quiere probar (o en la probada) para adaptarla a las condiciones de la proposición probada (o la que se quiere probar), de manera que se haga evidente el carácter de argumento de las proposiciones disponibles.

Sin embargo, la dificultad también puede provenir de una incomprensión de la mecánica aludida arriba, es decir, del hecho que una proposición que se prueba pueda resultar útil para probar otras. En nuestro diseño de instrucción se trato de proponer tareas y discusiones que aborden este problema. Observaremos las dificultades que se presenten en este aspecto.

Las preguntas de investigación se pueden reformular de la siguiente forma:

¿Cómo es posible hacer que los alumnos encuentren argumentos que justifiquen sus conjeturas?

¿Cómo se puede propiciar que los alumnos perciban y, en cierto sentido, construyan un sistema de proposiciones relacionadas lógicamente entre ellas?

El objetivo de este trabajo es documentar, mediante un estudio con alumnos de bachillerato, las observaciones y hallazgos que de dicho estudio se obtengan y que permitan avanzar en dar respuesta a las preguntas anteriormente planteadas.

Organización del trabajo

El trabajo de esta investigación se encuentra estructurado en cuatro capítulos, referencias bibliográficas y dos apéndices.

En el primer capítulo se plantean las preguntas de la investigación, tomando como antecedentes los objetivos de la enseñanza de la geometría y la disponibilidad de la tecnología computacional en el aula; se destaca el papel del software de geometría dinámica como herramienta de exploración que provoca en el alumno capacidad de descubrimiento.

En el segundo capítulo se hace referencia a los antecedentes previos a este trabajo. Estos antecedentes son los que vienen a dar justificación al Estudio de esta investigación. Se inicia con algunos señalamientos sobre: la enseñanza de la geometría; el uso de la tecnología computacional en el salón de clase en la enseñanza de la matemática; el software de geometría dinámica; la prueba; la argumentación y las funciones discursivas de una lengua.

El capítulo tercero describe un estudio que se llevó a cabo con alumnos de bachillerato de segundo semestre. En el capítulo se describen los conjuntos de actividades que se implementaron con los alumnos con la finalidad de instruirlos en el manejo del software Cabri-Géomètre y la aplicación de los instrumentos de observación; también se describen los criterios de diseño de los instrumentos de observación, las categorías de análisis de la producción de los alumnos.

El capítulo cuarto presenta las observaciones, el análisis del estudio, algunas reflexiones de la importancia de usar Cabri-Géomètre, un resumen de las actividades y observaciones y finalmente se presentan las conclusiones generales.

Después del cuarto capítulo se presentan las referencias bibliográficas y finalmente dos apéndices: el apéndice A contiene las actividades de adiestramiento para los alumnos con el software Cabri-Géomètre y el apéndice B contiene las actividades que constituyen los instrumentos de observación.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

La enseñanza de la geometría

Las matemáticas y la geometría han ocupado desde siempre un lugar muy importante en nuestra cultura, y en especial en algunas épocas históricas. Así por ejemplo, en la antigua Grecia el pensamiento matemático estaba muy vinculado con los planteamientos filosóficos de grandes pensadores: Pitágoras, Tales de Mileto, Arquímedes, Platón, Aristóteles,…; algunos pensadores del imperio romano tenían como fuente de sabiduría las matemáticas; a mediados del siglo XVII el matemático Descartes iniciador y precursor del racionalismo y el idealismo moderno se convierte en el padre del método científico y tecnológico, configurándose como una de las disciplinas fundamentales para física, la química, la biología, la economía… Por todo esto se puede decir que las Matemáticas han sido y son uno de los pilares indiscutibles de nuestra cultura, configurando en gran medida el desarrollo científico y cultural de toda la humanidad. Pero hoy en día existen ramas de la geometría que hace 75 años aún no se consideraban. Este crecimiento, junto con las nuevas tecnologías computacionales que han permitido alcanzar grados de visualización antes no imaginados, viene a reforzar el interés por la enseñanza de la geometría.

Muchos son los argumentos esgrimidos a favor de la enseñanza de la geometría en los distintos niveles educativos, aunque giran en torno de dos ejes fundamentales: su gran valor *práctico* como instrumento matemático para describir las figuras geométricas en el plano y en el espacio y su importancia *teórica* como primer acercamiento al razonamiento deductivo. La geometría es la disciplina matemática en la que con mayor claridad se perciben las complejas relaciones entre el pensamiento teórico y la realidad empírica. Por ello, la investigación sobre su enseñanza ofrece un interés que abarca no sólo las necesidades del mejoramiento de su enseñanza, sino también la posibilidad de analizar y conocer mejor las actividades cognitivas fundamentales [Duval, 1999ª].

Por ejemplo, Hansen [Hansen, 1998] señala que las figuras geométricas son una parte integral de la vida diaria; que la geometría fructíferamente puede ser introducida desde el primer grado, y aún en pre-escolar, debiéndose esforzar, entre otras cosas por:

- Establecer conocimiento del plano y del espacio;
- Preparar a los alumnos para aplicaciones de geometría;
- Presentar hitos en el desarrollo de la geometría;
- Desarrollar habilidades y destrezas en los alumnos; habilidades para formular conjeturas razonables acerca de soluciones geométricas, para 'interpretar' nuevas configuraciones, para estimar resultados numéricos, etc.
- Fortalecer el pensamiento lógico y el razonamiento deductivo.

Aquí se pueden observar los dos ejes fundamentales de la enseñanza de la geometría en los diferentes niveles educativos.

En este trabajo se asume que en el bachillerato debe dársele importancia a la enseñanza de la geometría y que en este nivel cobra mayor relevancia el objetivo de que los estudiantes realicen actividades y resuelvan problemas que impliquen llevar a cabo razonamientos deductivos y pruebas matemáticas, en particular, geométricas.

Respecto a la pertinencia del aprendizaje del pensamiento deductivo a través de la geometría, las opiniones de los diferentes autores pueden estar matizadas por intereses específicos. Hay quienes abogan por la importancia de la enseñanza de la demostración a partir de la construcción de evidencias plausibles a través del uso de los argumentos geométricos como Hanna (1991), Hoyles & Jones (1998) y Hershkowitz (1998) entre otros. Goldenberg, Cuoco & Mark enfatizan el papel de la prueba en geometría como un buen medio para desarrollar hábitos de pensamiento (Goldenberg, Cuoco & Mark, 1998), mientras que Chazan y Yerushalmy destacan que la prueba en geometría además de ser un recurso para la justificación, cumple o puede cumplir una función de comunicación [Chazan & Yerushalmy, 1998].

En este trabajo, entre las observaciones que se recogen de esos autores, se destacan tres procesos importantes relacionados con el aprendizaje de la prueba:

- La construcción de evidencias plausibles mediante argumentos geométricos (el conocimiento de los objetos, la posibilidad de experimentar con ellos, etc.).
- La argumentación y el pensamiento deductivo como nuevas formas de pensamiento matemático (la proposición condicional, los cuantificadores y las formas de asignar un valor de verdad a la condicional).
- La comunicación de las ideas matemáticas (el lenguaje: oral, escrito)

La presencia de calculadoras, computadoras y software educativo en las escuelas modifica el entorno de la acción docente y establece nuevas condiciones para el aprendizaje de la geometría. Sin embargo, todavía no se conocen del todo las características esenciales de esas nuevas condiciones y, menos aún, sus alcances y consecuencias.

Lo que es de destacarse es que esta tecnología está transformando a la geometría en tanto que objeto de enseñanza; la geometría que puede aprender un estudiante a lápiz y papel difiere de la que puede aprender a través de actividades específicas con algún tipo de software. Por ejemplo, cuando se dibuja un triángulo con lápiz y papel, la figura permanece estática como un triángulo rectángulo, isósceles, o de otra clase; mientras que la misma figura, al ser construida con las herramientas de la Geometría Dinámica, puede pasar por toda una gama de triángulos, dependiendo de las restricciones de la construcción, al ser arrastrados sus elementos independientes. Así, los aspectos que habían sido importantes en la geometría a lápiz y papel, pueden dejar de serlo o desaparecer con el uso de la Geometría Dinámica.

El tema del trabajo de investigación se refiere a la construcción de conjeturas y la organización de pruebas geométricas. Aunque parece que las nuevas tecnologías pueden tener un impacto importante en los procesos de descubrimiento y formulación de conjeturas, es un poco más difícil ver de qué manera pueden ayudar al fortalecimiento en el aprendizaje de la prueba geométrica. Más adelante se retoma este punto y se defenderá que también para el aprendizaje de la prueba, por parte de los estudiantes, las nuevas tecnologías podrán jugar un papel importante y como resultado del trabajo se espera tener evidencias que nos permitan ser más claros y concretos en este punto.

Uso de nuevas tecnologías en la enseñanza

Los ambientes de aprendizaje basados en tecnología computacional han tenido impacto en los diferentes dominios matemáticos, entre ellos, la aritmética, el álgebra, la geometría, la estadística, el cálculo, etc. [Balacheff & Kaput, 1996]. Sin embargo, se reconoce que el acceso a estos dispositivos electrónicos no garantiza que todos los estudiantes vayan a adquirir una cultura matemática; son herramientas que pueden simplificar la tarea que tienen en sus manos, pero no la resuelven (NCTM, 1989). No obstante, se considera que los estudiantes de todos los niveles educativos deberían tener acceso a las computadoras para ser usadas cuando resuelvan problemas matemáticos (NCTM, 2000). En el bachillerato de la UNAM se reconoce que el conocimiento matemático está influido por los avances tecnológicos, entre otros; y que las nuevas tecnologías contribuyen a investigar, conjeturar y verificar modelos matemáticos en el alumno (CAB-UNAM, 2001).

Así, la constante creación y renovación de los recursos tecnológicos para la enseñanza, particularmente la enseñanza de las matemáticas, han influido en gran medida en la investigación. Si bien es cierto que los paquetes de cómputo se realizan con cierta intencionalidad, el desarrollo de su potencial educativo depende de su funcionamiento informático y de la creatividad y destreza de los usuarios, investigadores y profesores, principalmente en lo que se refiere al diseño de actividades de aprendizaje para los estudiantes.

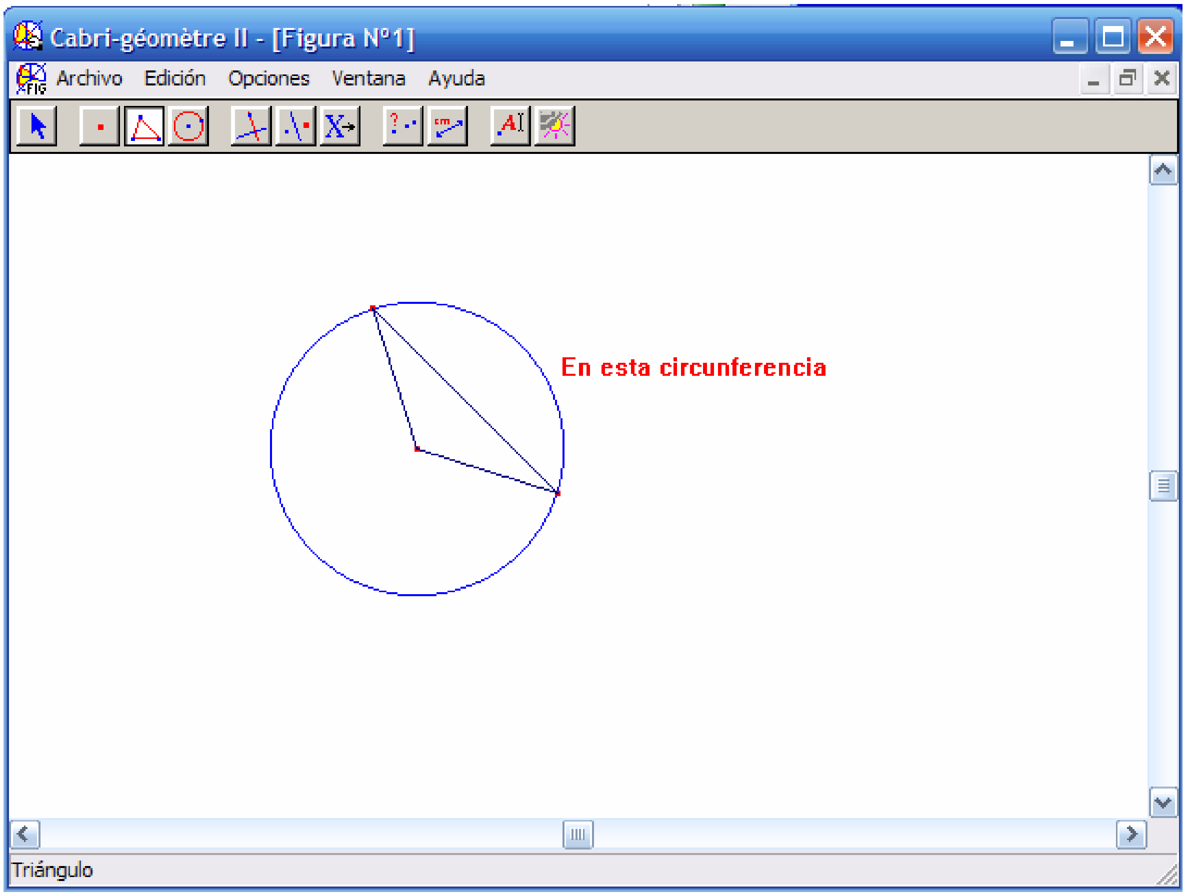
Es nuestra opinión que toda investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de cualquier tema de matemáticas se puede replantear a la luz de la nueva tecnología, utilizando ésta como un elemento para crear situaciones en las cuales pueden ser más evidentes o producirse con mayor facilidad los procesos cognitivos desarrollados por los estudiantes frente a actividades y tareas matemáticas. [Noss & Hoyles, 1996] ven en la computadora una ventana para mirar la manera en que los estudiantes producen significados matemáticos. En este sentido es que nosotros creemos que se deben buscar y construir actividades a desarrollar con la computadora, actividades que permitan observar características importantes de los procesos que los estudiantes llevan a cabo para darle significado a los procesos de prueba en geometría.

En resumen, de la enseñanza de la geometría lo que interesa para este trabajo de investigación es observar los procesos de producción de conjeturas y pruebas pero a la luz del uso de nuevas tecnologías. El propósito es descubrir el hito mediante el cual se puedan relacionar la enseñanza de la geometría, en particular, su aspecto de prueba, con las nuevas tecnologías. Es claro que esto conduce a dirigir la mirada al software hecho específicamente para la enseñanza de la geometría, es decir, a la llamada geometría dinámica.

Geometría dinámica

En el caso de la enseñanza de la geometría, se han desarrollado softwares de Geometría Dinámica, entre ellos se encuentran Cabri-Géomètre, Geometric Supposer, Sketchpad, etc. Estos programas computacionales tienen herramientas que permiten la construcción de figuras geométricas muy diversas, desde representaciones simples como puntos y líneas, figuras más complicadas como triángulos, círculos y polígonos, hasta construcciones más elaboradas donde se pueden necesitar rectas paralelas, perpendiculares, simetrías, etc. Una vez realizada una construcción, el software tiene la facilidad de mover puntos, segmentos, o figuras geométricas (triángulos, círculos,…); también se pueden generar lugares geométricos y se tiene la posibilidad de cuantificar diversas relaciones como longitudes, ángulos y áreas, permitiendo que el software se convierta en una herramienta poderosa en el estudio de la geometría.

La propiedad más espectacular de las geometrías dinámicas es la función de “arrastre”, ya que mediante esta función es posible manipular objetos geométricos como puntos, rectas, triángulos, etc. Por medio del arrastre es posible sujetar uno o varios elementos de una construcción y desplazarlos sobre la pantalla con el ratón de la computadora. Sin embargo, lo anterior hace indispensable la distinción entre dos tipos de elementos en una construcción, los elementos independientes y los dependientes. Los elementos independientes se pueden arrastrar libremente sobre la pantalla, no tienen restricción de movimiento, mientras que los elementos dependientes tienen restricción de movimiento; por ejemplo, si se construye un triángulo, con la herramienta de construcción de triángulos del software, el triángulo puede ser arrastrado sobre la pantalla sin cambiar su forma y tamaño o se puede arrastrar cualquiera de sus vértices, cambiando la forma del triángulo: el triángulo y sus vértices son elementos independientes. En contraste, si se construye un triángulo de tal forma que sus vértices estén sobre una circunferencia, el triángulo no se puede arrastrar sobre la pantalla; pero si la circunferencia es arrastrada, el triángulo se desplaza con ésta y los vértices sólo se pueden desplazar sobre la circunferencia: el triángulo y los vértices son elementos dependientes. Además, si el radio de la circunferencia cambia, también cambia el tamaño del triángulo pero no su forma, conservando la relación entre las áreas de ambas figuras. A continuación se muestra una figura del entorno de trabajo de Cabri-Géomètre



En general, al "arrastrar" los objetos a lo largo de la pantalla, ciertas propiedades de la figura, con las que está ligado el objeto en cuestión, se mantienen invariantes mientras se mueven los otros elementos de la construcción; automáticamente se ajustan preservando todas las relaciones dependientes y sus restricciones; o sea, se transforman de acuerdo a ciertas *leyes dinámicas* que, aunque pueden llegar a ser naturales para el usuario, no le son explícitas. Lo esencial es que estas leyes son consistentes con la geometría Euclidiana [Goldenberg & Cuoco, 1998]. En este trabajo se hace referencia a propiedades invariantes. Ejemplos de invariantes pueden citarse, entre otros: cuando se construye un triángulo, al arrastrar un vértice y con excepción del caso en que los vértices estén alineados, la figura sigue siendo un triángulo, es una propiedad invariante; o al medir los ángulos interiores del triángulo, la suma resulta una constante, es una propiedad invariante; o si se construyen las mediatrices a los lados del triángulo y se arrastran sus vértices, las mediatrices siempre concurren en un punto, es una propiedad invariante; etc.

El software suministra un “constructor” preciso para una gran variedad de construcciones, cualquier transformación que pueda surgir aplicando transformaciones afines (isometrías y dilataciones) a una construcción Euclidiana, o cualquier lugar de un objeto (o conjunto de objetos) que surjan cuando parte de una construcción es movida en alguna trayectoria en la pantalla. La precisión está limitada a la tolerancia de los cálculos internos, visualización en la pantalla, visualización numérica permitida y fidelidad de la impresora.

La Geometría Dinámica tiene medios de construcción de configuraciones geométricas y de repetición de una construcción; o sea, tiene la capacidad de “registrar” la secuencia de pasos que condujo a una configuración particular y se puede recuperar para usar esa construcción como una herramienta –llamada “macro”- en la producción de nuevas configuraciones. Por ejemplo, se puede realizar una construcción auxiliar o “macro” que permita la construcción de un cuadrado para ser usado en proyectos de construcción más complicados.

El software puede ser usado para construir, revisar, y continuamente variar bosquejos geométricos. Mientras que la visualización en sí misma es una poderosa herramienta en la solución de problemas, la capacidad de los estudiantes para hacer variaciones instantáneas y precisas a sus propias representaciones añade una nueva dimensión dinámica cuyas implicaciones están apenas comenzando a ser entendidas.

Es virtualmente imposible para la mayoría de la gente imaginar un punto moviéndose en una configuración (en la cual algunas otras partes puedan estarse moviendo) y ser hábil para describir el lugar de la trayectoria de los puntos cuando ellos se mueven. La Geometría Dinámica permite trazar el lugar que describe cualquier objeto específico (puntos, líneas,…) e indica cómo es generado el lugar geométrico.

Las características especiales del software de “arrastre”, animación (de puntos sobre un segmento o sobre un círculo) y trazo de lugares geométricos, dan muchas oportunidades para simular una sorprendente variedad de situaciones.

Las acciones posibles y los retornos correspondientes, a las construcciones, se amplían y resultan de naturaleza diferente, están basados en conocimientos geométricos, Integran conocimientos geométricos, se amplía el campo de experimentación posible, se pueden esperar nuevas posibilidades de organización de las situaciones de aprendizaje así como cambios en las conductas de los estudiantes.

Los estudiantes pueden realizar variaciones precisas e instantáneas de sus propias representaciones visuales que se producen con el uso de este tipo de software [Balacheff & Kaput, 1996], lo que les permite, en principio, realizar muchas exploraciones, probar ideas geométricas y conjeturar en una forma visual, eficiente y dinámica. Una actividad importante en el estudio de las matemáticas es que el sujeto desarrolle estrategias que les permitan formular conjeturas.

Las conjeturas pueden emerger a partir de una construcción propia del estudiante o a través del estudio o análisis de las condiciones que se dan en un problema propuesto. Con el Cabri-Géomètre, por ejemplo, se puede explorar el comportamiento de varios casos de manera instantánea y precisa, lo que produce información acerca del comportamiento de los parámetros importantes de la construcción geométrica.

Los ambientes de la geometría dinámica proporcionan una herramienta ideal para lograr uno de los dos propósitos clásicos de la enseñanza de la geometría, refrendados en los Estándares Curriculares de la NCTM: la familiarización con los objetos de la geometría y su manipulación, pero queda la duda sobre su función para desarrollar el segundo objetivo: introducción al razonamiento matemático y a la prueba deductiva. Sin embargo, como una herramienta de demostración, el software de la Geometría Dinámica podría auxiliar al individuo para “ver” lo que un hecho general quiere decir.

La prueba en matemáticas

Dentro de la comunidad matemática la demostración o prueba matemática tiene un papel distintivo, la demostración está en el corazón de la matemática. Tradicionalmente la prueba ha separado a las matemáticas de las ciencias empíricas como un método indiscutible de probar conocimiento, con o sin significado, el cual contrasta con la inducción desde la búsqueda empírica.

Sin embargo, la prueba ha sido objeto de interés para los educadores desde hace mucho tiempo; por ejemplo, Harold P. Fawcett en *The Nature of Proof* [Fawcett, 1938, p. 1] comenta que "probablemente nunca ha habido en la historia de la educación Americana ocasión en la que el desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo no haya sido reconocido como un resultado deseable de la escuela secundaria" y considera que la prueba geométrica se puede usar como medio para cultivar el pensamiento crítico. Sin embargo, documenta en su estudio que no había mucha evidencia que indicara que los alumnos que habían estudiado geometría demostrativa fueran menos ingenuos, más lógicos y más críticos que los alumnos que no siguieron dichos cursos. Que la práctica común en el salón de clase era la de enfatizar sobre un cuerpo de teoremas para ser aprendidos, más que sobre el método y la metodología por los cuales los teoremas son establecidos, y que en un esfuerzo por aprender, los alumnos recurrían a la memorización.

La enseñanza de las matemáticas ha pasado por grandes movimientos de reforma, de los que se destacan la Reforma de las Matemáticas Modernas y un movimiento de reacción que en Norteamérica se llamó Regreso a lo Específico (Back to Basic). En ellos la enseñanza de la prueba ha tenido diversos enfoques.

Recientemente, algunos matemáticos han reevaluado el papel de la prueba y hay una tendencia en reconocer métodos alternativos para determinar la validez de proposiciones matemáticas que incluye la necesidad de un acuerdo social y negociación [Hanna, 1995]. La reevaluación ha estado influida por desarrollos en tecnología computacional y el incremento del número de pruebas en computadora

[Horgan, 1993], junto con el creciente énfasis sobre el rol, probando, comunicando e iluminando ideas matemáticas así como verificándolas [Hersh 1993, Thurston, 1995],

Actualmente no se sabe hasta qué punto la prueba deductiva en geometría sea una entidad en extinción, sustituida cada vez más por las pruebas en computadora. Pero mientras la demostración y el razonamiento deductivo sigan siendo propósitos de la enseñanza de la geometría (y de la educación matemática en general), será pertinente plantearse el problema de vincular el aprendizaje de la demostración con los nuevos recursos tecnológicos.

Las preguntas formuladas por Hoyles & Jones (1998), son una muestra de esta preocupación: "¿La introducción de sistemas de geometría dinámica mejorará la situación (de la dificultad de la prueba), o hará la transición de la prueba informal a la prueba formal aún más difícil? ¿Qué tanto los innovadores acercamientos a la enseñanza con computadoras ayudan a los alumnos en el desarrollo de un marco conceptual para la prueba y en la apropiación de la prueba como un medio para iluminar ideas geométricas? o ¿El uso de la computadora sustituirá cualquier necesidad de la prueba?"

La investigación en Educación Matemática sugiere que la prueba es difícil para muchos estudiantes. Esto pudiera ser debido parcialmente a su significado ambiguo, pero también debido a que la prueba requiere la coordinación de un rango de competencias (identificación de suposiciones, organización lógica de argumentos,…) cada una de las cuales no es trivial [Healy & Hoyles, 1999b; Martínez-Recio, 2001; Chazan, 1993].

Entre los resultados que se han reportado en recientes estudios se tiene que: los estudiantes muestran preferencias por argumentos empíricos sobre cualquier clase de razonamiento deductivo y parecen fallar en apreciar la distinción crucial entre ellos; por ejemplo, muchos estudiantes juzgan que después de algunos ejemplos que verifican una conjetura, esto basta para probarla; los estudiantes tienden a suponer que la prueba deductiva no suministra más evidencia, con la certeza de que los elementos de la validez de la prueba son meramente los diagramas o ejemplos del texto; “los estudiantes tienen muchas dificultades en identificar las premisas de una prueba y seguir a través de un argumento lógico de estas premisas para una conclusión” [Hoyles,1997, p. 7].

La prueba tiene una multiplicidad de significados de acuerdo a la problemática de análisis de su funcionamiento. La problemática epistemológica se dedica a analizar el funcionamiento de la demostración en las prácticas de los matemáticos utilizando sus conclusiones para elaborar recomendaciones sobre el funcionamiento de la demostración en el salón de clase. La problemática didáctica plantea el problema de conocer cuáles son las condiciones de posibilidad para que el aprendizaje de la demostración en la escuela se acompañe de la construcción de la prueba como significado de la demostración.

Dentro del primer caso, de Villiers (1993) destaca que “la función tradicional de la demostración, se ha tratado casi exclusivamente en términos de verificación de enunciados matemáticos”, e indica que la verificación es sólo una de al menos cinco funciones igualmente importantes:

- Verificación: concerniente a la verdad de una afirmación.
- Explicación: profundizando en por qué es verdad.
- Sistematización: la organización de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas.
- Descubrimiento: el descubrimiento o invención de nuevos resultados.
- Comunicación: la transmisión del conocimiento matemático.

Por su parte, Balacheff (1999), a la luz del aprendizaje, distingue la diferencia entre Explicación, Prueba y Demostración. Señala que la prueba, en matemáticas, encuentra la forma acabada en la demostración.

Asimismo indica que la fuente del conocimiento está en la acción y la forma más elemental de la expresión de una prueba es la ostentación, las operaciones y los conceptos que ésta entraña son ejecutados: no son diferenciados ni articulados y sólo se prestan para ser observados. No hay ausencia de lenguaje, pero no es una herramienta fundamental de transmisión de conocimientos. Con frecuencia los teoremas en acto “consisten en determinadas propiedades que el individuo utiliza en la solución de problemas sin que, por lo tanto, pueda enunciarlos” [Balacheff, 2000, p. 22] y juegan un papel medular en este tipo de prueba.

Balacheff enmarca a las pruebas como:

- *Pruebas pragmáticas*: las que recurren a la acción o a la ostentación y
- *Pruebas intelectuales*: las pruebas que, separándose de la acción, se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones.

Las *pruebas pragmáticas*, se consideran menos válidas, aunque esto no implica que contengan menos conocimiento ni menos generalidad que las pruebas intelectuales. Más bien, están en cuestión la naturaleza de los conocimientos que intervienen y el género de la relación que permiten con los objetos matemáticos.

Las acciones sobre las representaciones de un objeto pueden ser sustituidas por la referencia a esta representación y una acción interiorizada que invita a una experiencia mental. Las *experiencias mentales* son una etapa del movimiento que conduce a las *pruebas intelectuales*, desapegadas de la acción e inscritas en las conductas del lenguaje que expresan los objetos y sus propiedades y que calculan sus relaciones.

El paso de las pruebas pragmáticas a las pruebas intelectuales no es inmediato. La acción a la que renunciamos puede ser evocada y el discurso permanecer muy cerca de lo que el emisor ha vivido. En este caso el emisor se expresará con un lenguaje familiar (Bourdieu, 1980; citado en Balacheff, 1999) que lleva la marca del tiempo y de la duración. Sin embargo, exige un paso de lado para que la acción pueda ser descrita y explicada. La validez de las pruebas pragmáticas descansa en el reconocimiento del carácter genérico de los objetos y las acciones que evocan.

El desarrollo de las pruebas intelectuales exige un cambio de posición. El emisor debe distanciarse de la acción y del proceso efectivo de resolución del problema. El conocimiento, hasta aquí aplicado, se vuelve objeto de reflexiones y de discursos, incluso de debates.

El lenguaje familiar, cuyo fundamento esencial es la lengua natural, permite una evolución en esta dirección. Sin embargo, se necesita más que esto para elaborar pruebas "formales". El lenguaje debe volverse una herramienta para el cálculo y no únicamente un medio de comunicación. La elaboración de un lenguaje tal requiere en particular:

- Una *descontextualización:* abandono del objeto actual, lugar efectivo de la realización de las acciones, para acceder a la clase de objetos independientemente de las circunstancias de su aparición;
- Una *despersonalización:* que desvincula la acción de quien la ejecutó;
- Una *destemporalización:* que libera las operaciones de su fecha y duración anecdótica.

El paso de pruebas pragmáticas a pruebas intelectuales, especialmente la demostración, se apoya en tres polos que interactúan fuertemente:

- El polo de los niveles de acción,
- El polo del lenguaje o de la formulación, y
- El polo de la validación.

Entre las pruebas pragmáticas y las pruebas intelectuales, Balacheff distingue cuatro tipos principales de prueba que ocupan un lugar privilegiado en la génesis cognitiva de la demostración:

- *Empirismo ingenuo*, consiste en garantizar la validez de un enunciado después de verificarlo para algunos casos. Esta modalidad de validación, insuficiente, es una de las primeras formas de los procesos de generalización [Piaget, 1987; citado en Balacheff, 2000].

- *Experiencia crucial*, la expresión “experiencia crucial”, retomada de Francis Bacon, señala una experimentación cuyo resultado permite elegir entre dos hipótesis, siendo verdadera sólo una de ellas. Debe tomarse en cuenta que si se rechaza una hipótesis, no es posible afirmar la verdad de la otra. Se distingue este tipo de validación de la anterior, en que el individuo plantea explícitamente el problema de la generalización y lo resuelve, aventurándose a la ejecución de un caso que reconoce tan poco particular como le es posible.
- *Ejemplo genérico,* consiste en explicar las razones de la validez de una aserción para la validación de operaciones o transformaciones de un objeto en calidad de representante característico de una clase. La formulación libera las propiedades, las características y las estructuras de una clase, estando siempre ligadas a su categoría y a la exhibición de uno de sus representantes.
- *Experiencia mental,* se centra en la acción, interiorizándola y separándola de su ejecución sobre un representante en particular. Se desarrolla en una temporalidad anecdótica, pero las operaciones y las relaciones que inician la prueba nunca están designadas por su puesta en práctica. Las operaciones y relaciones que sirven de preludio a la prueba nunca son escogidas por el resultado de su puesta en práctica; este es el caso genérico.

El recurso a la experiencia mental marca realmente el paso de las pruebas pragmáticas a las pruebas intelectuales en la medida que ya no son acciones efectivas que se aplican, son acciones interiorizadas. Estas últimas se encuentran en la génesis de las estructuras cognitivas que serán necesarias para la elaboración de pruebas de nivel más elevado.

Las pruebas que se basan en un ejemplo genérico constituyen una etapa intermedia; podemos considerarlas del lado de las pruebas pragmáticas, o del lado de las pruebas intelectuales. Sin embargo, una decisión de esta índole sólo puede tomarse si se conoce el proceso de producción de la prueba y de este modo, el estatus operatorio del ejemplo utilizado.

La argumentación

Consideramos que hay dos tipos de razonamiento: la argumentación y la demostración. “Para que un razonamiento pueda ser considerado una demostración se necesita que sea un razonamiento válido. La argumentación, por el contrario, es un razonamiento que no obedece a vínculos de validez, obedece a vínculos de pertinencia” [Duval, 1999c, p. 14].

Desde hace una década se ha aumentado la atención a la argumentación como medio para convencer, sea a uno mismo o a otros. La convicción es una condición necesaria para que una prueba funcione como tal. Algunas razones del interés sobre la argumentación pueden ser, la necesidad de poner el acento sobre el trabajo de investigación para el cual la demostración aparece como su resultado, y el carácter incomprensible de las exigencias y ventajas de la demostración para un gran número de alumnos.

El interés por la argumentación ha aparecido como interés por las formas de razonamiento que escapan a las normas y los esquemas lógicos y que surgen espontáneamente tan pronto como hay un debate con alguien. Esta emergencia se puede ver tanto fuera de las matemáticas como en la enseñanza de las matemáticas.

El trabajo de Nicolas Balacheff, (1982); [citado en Duval, 1999b] sobre la prueba y la demostración en el ciclo básico de la escuela secundaria fue el primero en proponer una aproximación a la iniciación a la prueba, partiendo de las actividades de investigación de un problema. Es dentro de esta nueva perspectiva que se comenzó a desarrollar un interés en las formas de argumentación que aparecen en el marco de una resolución de problemas, lo que condujo a la pregunta: ¿no serán las formas de argumentación el camino para descubrir la demostración? [Duval, 1999b].

La problemática de la argumentación se sitúa en el punto de convergencia de un doble reconocimiento:

- El reconocimiento del importante papel de la comunicación y de las interacciones sociales en la adquisición de conocimientos; lo que conduce a reconocer la importancia de la lengua natural.
- El reconocimiento del vínculo estrecho entre la prueba y la convicción, lo que conduce igualmente a privilegiar la comunicación para favorecer la confrontación de puntos de vista.

Ha habido un redescubrimiento del carácter irreducible e irreemplazable de las lenguas naturales con relación a las lenguas formales, en lo que concierne a facilitar de manera económica la comunicación entre individuos. Esto comenzó con Wittgenstein quien, a partir de 1930, empezó a reaccionar contra toda la filosofía surgida de los *Principia Matematica* de Russel y Whitehead. Esto ha conducido a estudiar las formas de contradicción [Grize, 1983; citado en Duval, 1999ª] que se ponen en juego en los debates, y a subrayar el carácter dialogístico de los razonamientos que pretenden convencer.

Dos nociones para analizar procesos argumentativos son el argumento y la discursividad.

Se considera como *argumento* todo aquello que se ofrece, o todo lo que es utilizado, para justificar o para refutar una proposición. Un argumento puede ser el enunciado de un hecho, un resultado de la experiencia, un ejemplo, una definición, el recuerdo de una regla, una creencia comúnmente compartida, o incluso hacer explícita una contradicción. Todas ellas toman valor de justificación cuando alguien las utiliza para decir "por qué" él acepta o rechaza una proposición. Un argumento es la respuesta a la pregunta "¿por qué enuncia o cree tal cosa?"

La noción de argumento es puramente funcional, aquello que puede tomar valor y fuerza de argumento no depende solamente del dominio de conocimientos sino también depende del contexto particular que motiva el recurso a los argumentos. Por ejemplo, a propósito de la búsqueda de la solución de un problema, una simple pregunta puede tener valor o fuerza de argumento que impela a tomar distancia de una idea dada.

Hablar de argumento es referirse a la elección de un tema donde se busca obtener un fin determinado; es, además, referirse al contexto de producción del argumento. El contexto de producción de argumentos se determina en función de dos puntos.

- Aquello que motiva el recurso a los argumentos: evaluar el sentido de una decisión, resolver el conflicto de intereses, resolver un problema que presenta restricciones técnicas o lógicas.
- Lo que está en juego: convencer a otro, disminuir los riesgos de error o de incertidumbre en la elección de una dirección de trabajo.

La fuerza de un argumento es variable y se puede tener necesidad de recurrir a muchos argumentos para obtener la convicción. Duval (1999b,c) distingue dos tipos de argumentaciones:

- *Argumentación heurística*, se lleva a cabo en matemáticas, para progresar en un problema; en este caso, el contexto de producción es radicalmente diferente de otros contextos de la actividad social donde se producen argumentos. En matemáticas la fuerza de un argumento va a depender principalmente de su adaptación a una situación y no tanto a la resonancia en el universo del interlocutor: se trata de asegurar que la solución "funciona" o que puede "funcionar"
- *Argumentación retórica*, usada cuando se trata de convencer a alguien para que tome una decisión, para que se resuelva un conflicto de intereses, o para obtener consenso con relación a un asunto: se toman en cuenta principalmente las convicciones del interlocutor

La diferencia entre ambos tipos de argumentación está en "la existencia de una organización teórica del campo de conocimientos o de representaciones en las que se desarrolla la argumentación o, incluso, de la ausencia de una organización teórica" [Duval, 1999c, p. 29]. En la argumentación retórica no hay una organización teórica preliminar, al contrario de la argumentación heurística, que presupone una. En matemáticas, una buena argumentación se apoya en un cuerpo bien establecido de definiciones y teoremas; es una argumentación heurística.

Discursividad, una argumentación implica que uno pueda evaluar un argumento, oponerlo a otros argumentos. Los argumentos siempre ocupan un lugar en el discurso, en el sentido amplio del término; es decir, es una serie de operaciones sucesivas que ponen en funcionamiento un sistema semiótico. Las argumentaciones susceptibles de convencer de lo apropiado de una proposición no siempre dan cuenta de un razonamiento. Ellas pueden consistir de una explicación, como describir el funcionamiento de un sistema y mostrar “el lugar de aquello” que la proposición a justificar enuncia. De esta manera, la producción de argumentos en la argumentación heurística se hace principalmente al nivel de un trabajo sobre casos particulares o ejemplos.

La argumentación puede poner en funcionamiento múltiples formas de discurso, incluida la del razonamiento; implica siempre la puesta en funcionamiento de la lengua natural, aun cuando los argumentos utilizados dan cuenta de otros registros de representación (es un sistema semiótico que permite tres actividades: constituir una marca o conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa; transformar las representaciones de acuerdo a las reglas propias del sistema; convertir las representaciones producidas a otro sistema de representación).

Se pueden señalar algunos puntos de partida para subrayar la complejidad de los fenómenos relativos a una problemática de la argumentación en el marco de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Factores que determinan el contexto de la producción de un argumento [Duval, 1999b]:

- La posición del interlocutor con respecto a quien ofrece el argumento (cooperación, conflicto, …);

- El motivo de la argumentación (tomar una decisión, encontrar la solución a un problema, …); y
- El objetivo en mira (hacer que alguien cambie de punto de vista, disminuir los riesgos de error o de incertidumbres ante una elección,…).

En el caso de la argumentación en matemáticas, el contexto de producción está determinado por el problema a resolver.

Modos de expresión: lengua hablada y lengua escrita

En la siguiente exposición se tomarán las ideas de R. Duval (1999a, b, c).

Las capacidades de aprehensión y el nivel de comprensión accesibles con relación a una cuestión o un tópico, no son siempre los mismos en las posiciones alternativas de hablar-escuchar y las de redactar-releer. En los últimos años se ha prestado atención a esas diferencias al hablar de "lenguaje" o de "prácticas de lenguaje." El paso de un modo de expresión oral a un modo de expresión escrito es complejo y presenta serias dificultades. La argumentación retórica se desarrolla sobre todo dentro del modo de expresión oral. El problema que se plantea en este trabajo es de saber si la argumentación heurística está ligada de manera privilegiada a alguno de esos dos modos de expresión. Con frecuencia, por razones pedagógicas y didácticas, se privilegia a las situaciones de cooperación y de discusión entre estudiantes para el trabajo de resolución de problemas, lo que implica privilegiar el modo de expresión oral. ¿Cuáles pueden ser entonces las funciones y el aporte de un paso al modo de expresión escrito? ¿Satisfacer una función de comunicación y de institucionalización; o sea, una especie de prolongación del modo de expresión oral? ¿O también funciones de tratamiento y de control; lo que, concerniente a los textos de prueba, implicaría una ruptura con el modo oral de expresión? Detrás de esta cuestión está todo el problema de las interferencias entre el contexto de una argumentación retórica y el de una argumentación heurística.

Operaciones discursivas puestas en funcionamiento

La discursividad implica la puesta en funcionamiento de un “lenguaje” sea natural o formal, las operaciones discursivas que se pueden hacer con una lengua, pueden ser reagrupadas alrededor de cuatro grandes funciones discursivas:

- Función referencial.
- Función apofántica.
- Función de expansión discursiva
- Función reflexiva.

Es de destacarse la tendencia, cuando se habla de lenguaje en matemáticas, a considerar sólo algunas de las operaciones discursivas.

Desde el punto de vista estrictamente matemático, se podría postular la homogeneidad de los procesos a través del desarrollo completo de una actividad matemática. Lo que implicaría una continuidad cognitiva entre argumentar, explicar y demostrar. Pero desde un punto de vista cognitivo la consideración es muy diferente. Este punto de vista no puede despreciarse cuando se hace referencia al aprendizaje de las matemáticas por alumnos, para quienes los diferentes tipos de representación de la práctica de las matemáticas puestas en juego son pocos o nada coordinados.

Lo anterior conduce a los siguientes cuestionamientos:

- Para los alumnos, ¿son los argumentos que conducen a derivar y a sostener una conjetura igualmente útiles para encontrar la manera de probar dicha conjetura?
- Con referencia a las capacidades que un alumno puede tener disponibles para controlar la pertinencia de los argumentos producidos cuando busca demostrar una conjetura que ha sido formulada y retenida como plausible: ¿están considerablemente desarrolladas cuando ha comprendido las

diferencias de funcionamiento discursivo entre las "pruebas discursivas" y las argumentaciones retóricas, más familiares o más espontáneas?

Entonces es notoria la complejidad de los problemas ligados al estudio de la argumentación.

Al hablar del problema de las interferencias entre los contextos de una argumentación retórica y de una argumentación heurística, como una de las grandes dificultades en el aprendizaje de la prueba matemática, Duval comenta: “puede ser que este sea uno de los aportes de un ambiente informático: permitir la disociación completa de esos dos tipos de contextos”, [Duval, 1999b, p. 7].

Para Duval, la argumentación heurística mantiene una distancia con la demostración a pesar de que es un tipo de argumentación que ayuda a progresar en el conocimiento matemático. No niega la importancia de la argumentación heurística, incluso debe haber estrategias para su enseñanza; sin embargo, a partir de su análisis concluye que “el desarrollo de la argumentación, incluso en sus formas más elaboradas no abre una vía de acceso a la demostración” [Duval, 1999c, p. 45].

Al respecto, Douek (1998) sostiene que a pesar de la innegable distancia epistemológica y cognitiva entre la argumentación y la prueba matemática formal, la argumentación y la prueba matemática ordinaria tienen muchos aspectos en común, como procesos y también como productos.

Douek refina aún más el andamiaje conceptual que se ha creado alrededor de la argumentación y la prueba. Señala la diferencia entre la prueba como producto y la prueba como proceso. Establece también la diferencia entre pruebas formales y las pruebas que practican los matemáticos, y opina que estas últimas tienen varias características de la argumentación.

Es necesario crear instrumentos de observación o experimentación que nos permitan recoger datos para sostener algunas de la hipótesis formuladas por Duval y otros. Un elemento que está permitiendo crear dichos instrumentos es el uso de los recursos informáticos, de los cuales los más importantes en geometría, son los softwares de geometría dinámica.

En resumen, el problema de la posibilidad del acceso a la prueba matemática a partir de la argumentación es un problema abierto. La geometría dinámica produce elementos nuevos que pueden ser vistos desde dos ángulos. Por un lado, se pueden estar modificando las condiciones del aula de tal manera que con ellas sea posible lo que antes se vislumbraba imposible: el paso de la argumentación a la prueba. Por otra parte, los escenarios de la geometría dinámica pueden proporcionar un contexto de observación apropiado para dilucidar más claramente las relaciones entre argumentación y prueba.

Duval ha reflexionado sobre el papel de la escritura en el razonamiento matemático; parte de una pregunta de interés: "¿La escritura de una demostración constituye una actividad esencial en el descubrimiento, por parte de los alumnos, de lo que es demostrar?" [Duval, 2000, p. 139].

Se ha planteado el problema del paso del descubrimiento de proposiciones en un ambiente de Cabri–Géomètre a su transcripción [Sánchez y Mercado 2001 y 2002]. En ese trabajo se hace un análisis de las formulaciones escritas que producen los estudiantes sobre resultados que tuvieron la oportunidad de descubrir en actividades con el software. Diseñamos, en el contexto de las actividades con geometría dinámica, una técnica simple para analizar el tránsito a la escritura: se trata de que el estudiante formule las conjeturas que más tarde tendrá que probar.

Duval analiza las funciones que pueden movilizarse con la escritura y concluye que ésta debe considerarse del lado de las expresiones (entendida en el sentido de Merleau-Ponty, 1960; citado en Duval, 2000), y no sólo de la comunicación, para potenciar su importancia en el desarrollo de las actividades de demostración. Agrega una observación muy importante: "Paralelamente hemos insistido sobre el hecho de que las tentativas y procesos de razonamiento válido reposan sobre las unidades específicas del discurso matemático que son las proposiciones" [Duval, 2000, p. 165]

Funciones discursivas de una lengua

El marco de referencia de este trabajo está basado en la teoría de Raymond Duval sobre los aprendizajes intelectuales [Duval, 1999ª]; en particular, es importante su teoría acerca de las *funciones discursivas de una lengua*. A continuación se esbozan brevemente las líneas generales de su trabajo.

El problema que da origen al análisis de las funciones discursivas es el de "dilucidar el papel del lenguaje en el funcionamiento del pensamiento y resolver los problemas de lenguaje encontrados en la enseñanza" [Duval, 1999a, p. 82]. Debemos mencionar que Duval llevó a cabo sus reflexiones teóricas en el contexto de un proyecto que une la preocupación anterior con problemas sobre la enseñanza de la matemática y la enseñanza del idioma (el francés).

El problema inicial que plantea Duval emerge de preguntarse acerca de las funciones que debe cumplir el empleo de una lengua para que sea posible la variedad de discursos que caracteriza nuestro entorno cultural. En una primera clasificación se pueden determinar tres tipos de discursos: conversacional, especializado y literario. En el segundo tipo, se incluyen los discursos matemáticos.

Duval (1999a) distingue dos planos diferentes entre las funciones que se movilizan en el empleo de una lengua, uno es el plano *meta–discursivo* y otro el plano *discursivo*. El primero abarca las funciones que son comunes a todos los sistemas de representación; el segundo incluye las funciones específicas al empleo de una lengua. Esta distinción constituye una base para el análisis de una variedad de los discursos posibles y un análisis del funcionamiento de cada uno.

Las funciones meta–discursivas

Hay tres funciones meta–discursivas: la comunicación, el tratamiento y la objetivación.

La *comunicación* es el proceso que permite el paso de la información de un sistema a otro, ya sea bajo la forma de transmisión, difusión o intercambio. Por ejemplo, las señales de tránsito, el código Morse, el dibujo publicitario, los sistemas de signos matemáticos, son sistemas que sirven para *comunicar* algo. Naturalmente, cualquier lengua natural constituye el mejor sistema semiótico para cumplir la función de comunicación.

El *tratamiento* es la transformación que puede realizarse sobre la información para obtener otras informaciones. El discurso no sólo permite la comunicación de información sino también permite transformarla. El razonamiento es el tratamiento más potente que se realiza en el registro de la lengua (natural o formal).

La *objetivación* es la posibilidad para el sujeto de tomar conciencia de lo que hasta el momento de exteriorizarlo y/o registrarlo no era consciente o no tenía contornos muy precisos.

Estas tres grandes funciones meta–discursivas nos proporcionan un primer instrumento, muy general por lo pronto, que puede influir en el diseño de las actividades y ayudar en el análisis de las producciones que en esas actividades realicen los estudiantes. Las características de una tarea pueden demandar del estudiante expresiones que requieran ubicarse más en un plano que en otro. Podrían los estudiantes moverse más fácilmente en un plano, pero torpemente en otro, etc. En las actividades, los estudiantes tienen que utilizar distintos sistemas de representación, algunos favorecen más unas funciones meta–discursivas; por ejemplo, el software de geometría dinámica, visto como un sistema de representación, puede favorecer el tratamiento de figuras geométricas, pero difícilmente colabora en la función de comunicación oral o escrita de resultados.

Las funciones discursivas

Hay cuatro funciones discursivas; es decir, funciones que son necesarias para que un sistema semiótico haga posible un discurso. Por discurso se entiende, de acuerdo a Benveniste [1966; citado en Duval, 1999ª], una expresión que haga referencia al mundo y que permita ser compartida entre los que quieran comunicarse entre sí. Estas cuatro funciones son:

La función referencial.

La función apofántica.

La función de expansión discursiva.

La función de reflexividad.

La función referencial. La primera es la función referencial de designación de objetos, esta función permite llevar a cabo el proceso mediante el cual se nombran los objetos de un sistema. Su ejercicio moviliza un complejo juego de operaciones discursivas. La operación de *designación* pura, de *categorización simple*, de *determinación* y de *descripción*.

En el análisis de la función referencial deben tenerse en cuenta tres aspectos importantes:

a) Las relaciones de las operaciones discursivas referenciales y la organización de un léxico (un conjunto de signos, símbolos, palabras, etc. que permiten marcar el cumplimiento de operaciones referenciales).

b) Las formas asociadas a la función referencial. Para cada sistema se pueden designar objetos respetando ciertas formas o modos de construcción; estas formas difieren si se realizan en lengua natural o si se realizan en otros sistemas.

c) El empleo común y el empleo especializado de la lengua natural.

Estas operaciones intervienen en la elaboración de discursos en geometría; en particular, con relación a las actividades que el estudiante tiene que realizar en un ambiente de interacción intelectual en el aula y los discursos que deriven de ellas; puede ser relevante observar y analizar las operaciones discursivas que son capaces de movilizar. Los éxitos y fracasos que resulten se pueden analizar en términos de tales despliegues y entonces dilucidar sobre la influencia de las habilidades discursivas en el pensamiento geométrico.

Las habilidades y desempeño de los estudiantes dependerá en gran medida de factores relacionados con los tres aspectos señalados: el léxico que tengan a su disposición o que sean capaces de adquirir con la instrucción, los niveles de comprensión de las formas de producir nuevas asignaciones con ayuda del léxico y la conciencia de que el empleo de la lengua natural en el estudio de objetos geométricos es especializado y, por tanto, tiene constreñimientos que no los tiene el empleo común del lenguaje al que están acostumbrados.

La función apofántica. La segunda función discursiva es la función *apofántica* de expresión de enunciados completos. Esta función permite decir cosas acerca de los objetos designados. La diferencia entre algunos enunciados que cumplen sólo la función referencial y algunos que cumplen la función apofántica, puede ser muy sutil y difícil de distinguir. La idea es que una expresión con función apofántica tiene asignado un valor definido en el universo cognitivo, representacional o relacional de los interlocutores. Puede ser un valor lógico de verdad o falsedad, un valor epistémico de certeza, necesidad, verosimilitud, de posibilidad o absurdidad; un valor social de deseo o promesa. Cuando se pasa de un nivel referencial a un enunciado con unidad apofántica, se cambia de nivel y de criterio en la constitución del *sentido* de la expresión. El sentido de estos últimos está especificado en el valor o valores que toma y no sólo en el carácter completo o suficiente de las informaciones que proporciona sobre un objeto o sobre una situación.

Hay dos operaciones que permiten cumplir la función apofántica: una operación es la *predicación* y la otra es la *ilocución*. La primera consiste en vincular la expresión de una propiedad, de una relación o de una acción con una expresión que designe los objetos. La segunda, de acuerdo con Austin (citado en

Duval, 1999a, p. 100), es el acto que, a través de la producción de un enunciado, le confiere un valor social de acto que compromete al locutor o destinatario. El acto ilocutorio da a una expresión, que proviene de una operación de predicación, su valor de aserción, de declaración, de pregunta, de orden, etc.

La forma de expresión asociada a la función apofántica en geometría es la *proposición*. Una proposición tiene una estructura que consta de un *antecedente* y un *consecuente.* Ya sea que una proposición sea producida o ya sea que sea leída e interpretada por el estudiante, éste debe ser capaz de percibir dicha estructura. No es claro hasta qué punto esta habilidad puede ser desarrollada espontáneamente en el contexto de actividades geométricas o hasta qué punto requiere una instrucción específica. Sin embargo, tal identificación es un paso crucial en el aprendizaje de esta materia: poder delimitar las condiciones del antecedente o el consecuente para formular proposiciones “cercanas” es parte del análisis que un matemático realiza con las proposiciones.

Mientras un estudiante no sea capaz de percibir, interpretar y en ocasiones construir la estructura de una proposición tendrá muy pocas probabilidades de producir argumentos matemáticos. En el contexto de la geometría dinámica es posible que los estudiantes puedan comprender y sustentar resultados geométricos con argumentos con elementos ostensivos, es decir, mostrando objetos en la pantalla y ejerciendo sobre ellos determinadas acciones que resalten un resultado, pero es muy probable que tales resultados no sean del todo productivos si no devienen en enunciados independientes del contexto computacional y se transforman en proposiciones.

La función de expansión discursiva. Las expresiones y proposiciones revelan toda su potencia cuando se vinculan entre ellas para formar un discurso semánticamente no tautológico y con una unidad temática, por ejemplo, un relato, una explicación, una argumentación, una deducción o un cálculo. La expansión discursiva es la función que permite elaborar un discurso.

Dos operaciones están asociadas a esta función, a saber, la inferencia y la acumulación. La primera operación es de tipo lógico, asociada a los discursos matemáticos y científicos; mientras que la segunda es de tipo natural, asociada al uso ordinario de la lengua.

La expansión discursiva por inferencia funciona mediante la sustitución, como un cálculo y las transformaciones responden más a un estatuto formal de las proposiciones que a su contenido.

Este punto plantea un problema que estará subyacente en nuestra investigación y que requiere una reflexión detenida, se trata del momento en que una proposición debe ser tomada más en su aspecto formal que en su contenido. Evidentemente, el significado de las proposiciones matemáticas debe comandar las asociaciones y acciones, pero la forma de las proposiciones y las leyes de la inferencia pueden liberar al pensamiento de consideraciones de contenido ya hechas en un momento pasado de la trayectoria personal de una investigación, ¿este tránsito es necesario para la elaboración de una prueba? ¿Puede constituir un obstáculo no hacerlo?

La función de reflexividad. Esta función es la que permite ubicar un enunciado en relación con otros enunciados, según el empeño que el locutor ponga en lo que enuncia o incluso en la relación que quiera establecer con el interlocutor. Así, la misma lengua permite hacer explícita en el enunciado la manera en que el locutor está empleando un enunciado. Por ejemplo, las expresiones modulares como *creo que, ten por seguro que, prometo* seguidas de una proposición modifican el contenido de dicha proposición y precisan un objetivo que no está contenido en la proposición misma.

En el discurso matemático muchas palabras le proporcionan un fin más preciso a las proposiciones; por ejemplo, *por definición, suponiendo que, considerando,* etc. seguidas de una proposición que permiten realizar la función de reflexividad.

Resumen

El movimiento de las pruebas pragmáticas a las pruebas intelectuales requiere del aprendizaje de la prueba y apela a la relación de dos mundos mediante el ambiente informático: el mundo de la exactitud empírica y el del rigor lógico. Para la geometría, el primero de estos mundos encuentra una realización informática en un software de geometría dinámica como Cabri-Géomètre; el segundo requiere un ambiente capaz de tratar las expresiones del lenguaje y de analizar su organización desde el punto de vista de la lógica.

El obstáculo más resistente para una evolución de los puntos de vista sobre el aprendizaje de la demostración, era la incapacidad de considerar una génesis que arraigara la prueba matemática en las prácticas empíricas y argumentativas. Este obstáculo está en vías de ser recortado [Balacheff, 1999].

Dar sentido a la prueba, reencontrar su dimensión discursiva al interrogar sus relaciones con la argumentación en una problemática de aprendizaje, sugiere una inteligencia al debate crítico. La idea de la demostración reducida a un cálculo lógico ocultaba esta dimensión y, por lo tanto, la necesidad de agentes artificiales para debatir y negociar. El agente apodíctico debe ceder el lugar a un agente semiempírico, cuyos conocimientos podrán evolucionar en el caso de la interacción y de la negociación sobre la validez de las pruebas que serán sometidas por el alumno.

CAPÍTULO III

EL ESTUDIO

Introducción

Con este estudio se busco avanzar en dar respuestas a algunos aspectos de las preguntas que se formulan en este Estudio. En particular, se pudo hacer un acercamiento a las dificultades que tienen los estudiantes para escribir las conjeturas, a las que llegan después de las actividades que les fueron sugeridas. También se pudo observar, en los escritos de los estudiantes, que algunos no pueden realizar siquiera la función discursiva referencial; también se observó que la mayoría de ellos tiene dificultades para llevar a cabo el nivel apofántico, es decir, el de producir enunciados completos.

Por otro lado, cabe mencionar que este estudio se realizó paralelamente al proceso de búsqueda bibliográfica y de precisión de las preguntas de investigación, así como de construcción del marco teórico, de manera que su relación con la formulación que finalmente se hace de esos puntos en el segundo capítulo puede no tener la coherencia que se hubiera deseado. Por ejemplo, en el capítulo anterior destacamos a la argumentación como un aspecto importante de este proyecto, sin embargo, en este estudio no se pudo captar de una manera apropiada los procesos de argumentación realizados por los estudiantes durante sus actividades.

Lo importante del estudio es que permitió poner en práctica procedimientos propios para un proceso de Enseñanza-Aprendizaje como los siguientes:

a) Instruir a los estudiantes en el uso de Cabri-Géomètre.

b) Repasar varios conceptos básicos de la geometría euclidiana en el contexto de la geometría dinámica.

c) Análisis y aplicación del sistema de actividades que utilizaremos como “dispositivo de experimentación”.

d) Creación de categorías para el análisis de las respuestas de los estudiantes.

e) Análisis de las respuestas de los estudiantes.

Categorías de análisis y relación con la fundamentación teórica.

Se pueden anticipar dos aspectos principales en los que el estudio que se realizó se relaciona con elementos de la fundamentación teórica.

a) El modo de expresión: hablado–escrito.

En el estudio se revela esta oposición. No se logró montar un dispositivo apropiado, en esta experimentación, que permitiera tener datos que dieran cuenta de la manera en que los estudiantes expresan oralmente su comprensión de los problemas. En cambio, las fichas de trabajo captaron las expresiones de sus respuestas escritas.

Respecto a la expresión oral se observo que las manifestaciones de comprensión oral daban la apariencia de que los estudiantes entendían el sentido de las proposiciones que descubrieron e incluso en algunos casos se expresaron bosquejos de la prueba de alguna proposición.

Respecto a la expresión escrita, los niveles de comprensión que pueden ser captados a través de las expresiones escritas son muy inferiores a los que aparentan los niveles orales (esto lleva a preguntarse sobre las propiedades de los niveles de comprensión; incluso lleva a darle mucho sentido al problema del lenguaje que se utiliza para expresar las ideas matemáticas).

b) La manifestación de funciones discursivas en las expresiones escritas de los estudiantes.

El análisis de las expresiones escritas de los estudiantes permite detectar el nivel en el que han cubierto etapas de las cuatro funciones discursivas, con relación a la producción de un lenguaje geométrico. Por ejemplo, se puede observar que con relación a este lenguaje, algunos estudiantes no habían alcanzado a rebasar ni siquiera el nivel de la función referencial. Se pudo notar que se refieren a algunos objetos geométricos (que identifican perfectamente en el software) con términos que no les corresponden. Así por ejemplo, utilizan “mediatriz” o “altura” para referirse a una mediana, etc.

En el nivel de la función apofántica, es decir, en el de la construcción de frases completas, y en el modo escrito de expresión, se encuentran grandes dificultades en la construcción del lenguaje geométrico de los estudiantes. En este trabajo se consideraron dos niveles diferentes en la construcción de frases de los estudiantes: el nivel del lenguaje natural, en el que llevar a cabo la función apofántica consiste solamente en la producción de oraciones con sentido en el idioma español; y el nivel del lenguaje de la geometría, en el que llevar a cabo esta función consiste en la formulación de proposiciones (simples y compuestas) y la formulación de descripciones de construcciones.

Sujetos del estudio

Para implementar el estudio, se organizó un taller de geometría dinámica con apoyo del software Cabri-Géomètre, en la sala de cómputo del edificio SILADIN del CCH Naucalpan, invitándose a alumnos de segundo semestre de la materia de matemáticas II. respondiendo a la convocatoria de forma voluntaria, ocho estudiantes del grupo 206 del ciclo 2005-2 de dicho sistema educativo.

Características de los sujetos. Al momento de la investigación, los estudiantes tenían edades entre 15 y 16 años, cursaban Matemáticas II y tenían el requisito de haber estado inscritos en el curso de Matemáticas I. En el sistema escolar del Colegio de Ciencias y Humanidades las asignaturas no están seriadas. En general, ninguna materia tiene requisitos previos. En consecuencia, un estudiante que no acreditó Matemáticas I puede cursar Matemáticas II, y sin haber aprobado Matemáticas I y II puede cursar Matemáticas III, y así sucesivamente. Lo mismo ocurre con todas las asignaturas de este plan de estudios.

Los antecedentes curriculares de los alumnos en temas de geometría son las unidades 2, 3 y 4 del contenido temático de Matemáticas II (DGCCH, 2001). Se detalla el contenido temático de la unidad 2 por estar relacionado con las actividades que realizarán los alumnos durante el proceso de la investigación.

Unidad 2: Construcción y elementos geométricos básicos.

2.1 Conceptos básicos de geometría.

2.2 Relaciones entre puntos, rectas y planos.

2.3 Construcción de segmentos congruentes.

2.4 Bisectriz de un ángulo dado.

2.5 Relaciones entre ángulos.

2.6 Clasificación de triángulos.

2.7 Rectas y puntos notables en el triangulo.

2.8 Desigualdad del triangulo.

Unidad 3: Congruencia y Semejanza.

Unidad 4: Perímetros, Áreas y Volúmenes

Una característica, de destacarse, del grupo seleccionado para invitar a los alumnos que participaron en la investigación, es que el profesor de los cursos de Matemáticas I y Matemáticas II, además de ser la misma persona, es un profesor que comúnmente cubre cuando menos un 90 % del contenido temático de las asignaturas, por lo que se espera que estos alumnos cuenten con algunos antecedentes geométricos y tengan nociones acerca de lo que es la prueba matemática, aun cuando se parte del hecho que pueden estar carentes de esa formación académica.

El lugar donde se realizarán las actividades derivadas de este proyecto fueron las instalaciones del Plantel Naucalpan del Colegio de Ciencias Humanidades.

Los alumnos que participaron en el estudio habían cursado con anterioridad, el primer semestre, en el cual analizaron, temas de aritmética, ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones cuadráticas. Los estudiantes mostraron una gran disponibilidad para participar en un evento académico que sólo les aportaba conocimientos, ya que el taller fue independiente de sus cursos curriculares e independientes de los profesores de esos cursos. El taller se verificó durante un período íntersemestral y los alumnos contaban con buenos antecedentes académicos (entre matemáticas I y matemáticas II). Lo anterior condujo a que los estudiantes fueran considerados alumnos de alto rendimiento escolar.

Los estudiantes particularmente no contaban con antecedentes sobre el uso de software de geometría dinámica, por lo que fue necesario introducirlos en el uso y manejo de las herramientas del paquete Cabri-Géomètre.

Lugar y duración del estudio

El taller se llevó a cabo en ocho sesiones de cuatro horas cada una, un total de 32 horas, en el laboratorio de cómputo del Sistema de laboratorios de innovación (SILADIN) del Colegio de Ciencias y Humanidades perteneciente a la Universidad Nacional Autónoma de México. Cada alumno trabajó en forma individual, con una computadora a su disposición, en las diferentes tareas derivadas del taller; no obstante, se permitió cierto intercambio de opiniones entre ellos, sin llegar a ser un trabajo en equipos. El laboratorio está dotado con 15 computadoras Pentium III, con Windows XP como sistema operativo, conectadas en red y a Internet, cada computadora cuenta con el software Cabri Géomètre II versión 1.0 en español, además se cuenta con un cañón para proyecciones conectado a una computadora para el auxilio del instructor en la presentación del software, el manejo de las diferentes herramientas con que cuenta el Cabri-Géomètre, la solución de dudas, la discusión de resultados y observaciones, etc.

Se contó con el apoyo de cuatro observadores que estuvieron asignados a dos estudiantes cada uno de ellos. Los observadores tenían la consigna de intervenir para auxiliar al alumno en los problemas relacionados con el uso del software, pero debían de abstenerse de intervenir en torno del contenido de las actividades a no ser sólo para escuchar las conclusiones a las que llegaba el estudiante. Además, cada instructor tomaba nota de los hechos más relevantes que observaba en las actividades de los alumnos. De estas notas se consideraron las observaciones de los instructores que dan cuenta si el estudiante llegó a las conclusiones correctas en cada actividad.

Fotografía 1 Edificio SILADIN (Sistema de laboratorios de innovación) del CCH- Naucalpan UNAM

Fotografía 2 Laboratorio de computo I planta baja

Fases del Estudio.

Durante el proceso del trabajo de Estudio se contemplaron tres fases principales:

- Fase de diseño.
- Fase de captura de la información.
- Fase de análisis de la información**.**

Las tres fases del estudio se encuentran íntimamente relacionadas y en algunos momentos una fase llega a ser dependiente de las otras fases del Estudio. Tomando como base la recolección de información, durante el desarrollo del Estudio, se considero un curso-taller de geometría para la recolección de datos:

Implementación de un taller de geometría con el uso del Cabri-Géomètre.

La implementación del taller de geometría con Cabri-Géomètre, se encuentra dividido en dos etapas:

Etapa de adiestramiento en el uso del software y manejo de archivos.
Actividades de discusión y escritura que tengan por objeto ayudar al estudiante en la adquisición de un lenguaje funcional; y en tomar conciencia de la estructura de las proposiciones condicionales. Finalmente, a que sea consciente de algunas operaciones de derivación elementales.
Implementación de las actividades con los instrumentos de observación.
Los objetivos del taller son los de capacitación de los estudiantes en el uso de las herramientas del software, como el manejo de los diferentes menús del Cabri-Géomètre, diferenciación entre elementos dependientes e independientes, "arrastre" de los elementos de una construcción, etc. Los instrumentos de observación tienen como propósito recabar información tanto de la producción oral como la producción escrita de los estudiantes.

Desarrollo del curso-taller

La captura de la información se realizó con la implementación de un curso-taller de geometría con el uso del *software* de Cabri–Géomètre a un grupo de ocho alumnos, como se señaló con anterioridad. El Curso-taller se desarrolló en dos partes, en la primera parte se les dio a los alumnos un entrenamiento en el uso de Cabri-Géomètre por medio de actividades que fueron adaptadas de un manual de exploraciones geométricas en Cabri-Géomètre [Keyton, 1996]. La finalidad perseguida con la implementación de las actividades fue la de propiciar que los estudiantes recordaran hechos básicos de la geometría, además de:

- Familiarizar a los alumnos participantes en el curso-taller con el uso de las diferentes herramientas del Cabri-Géomètre, navegando por los distintos submenús que el *software* tiene.

- Destacar a los alumnos la diferencia que se establece entre un dibujo con papel y lápiz y la construcción de la misma situación con las herramientas del *software*: Señalando que la figura en un dibujo es estática, mientras que la misma figura en una construcción mediante Cabri-Géomètre, es dinámica.

- Familiarizar a los alumnos con el concepto de “arrastre”, una de las características principales del *software* de la geometría dinámica, y sus consecuencias inmediatas, que se manifiestan en la observación e identificación de propiedades invariantes en una construcción.
- Que los alumnos estableciesen la diferencia entre elementos dependientes y elementos independientes en una construcción. Esto permite comprender por qué dos o más construcciones aparentemente iguales en forma se pueden comportar en forma distinta, debido a la manera como fueron construidas.
- Introducir a los alumnos a la creación y uso de “macros”. Mediante las macros se “instruye” a la computadora en la construcción de figuras, que pueden ser usadas con posterioridad en proyectos más completos. Por ejemplo, una macro puede ser la construcción de un cuadrado a partir de la longitud de su lado, útil posteriormente para ejemplificar el Teorema de Pitágoras.
- Instruir a los alumnos para generar lugares geométricos cuando se desplaza un elemento en una construcción en una trayectoria definida y se observa la trayectoria de otro de los elementos de la construcción. Por ejemplo, se puede descubrir el lugar geométrico que genera el punto medio de una cuerda de un círculo cuando un extremo de la cuerda se desplaza sobre el círculo.

En resumen, mediante dichas actividades se esperaba que los estudiantes aprendieran a construir en la pantalla del monitor, puntos, segmentos, líneas rectas y curvas, rectas perpendiculares y paralelas, triángulos, polígonos, etc.; midieran longitudes, áreas, ángulos; exploraran sus figuras mediante el “arrastre” de elementos independientes observando propiedades invariantes en la construcción; verificaran propiedades como paralelismo, perpendicularidad, etc.; colocaran etiquetas y comentarios; realizaran cálculos; crearan tablas de datos; construyeran macros; y mediante las herramientas de animación y traza crearan lugares geométricos.

El curso-taller se llevó a cabo en uno de los laboratorios de cómputo del SILADIN ubicado dentro del Plantel Naucalpan del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM. El laboratorio contó con los elementos indispensables para la realización de la experiencia, de acuerdo a los lineamientos previstos en la investigación: número de equipos de cómputo suficiente, uno para cada participante; un lugar adecuado para presentación del *software* y el desarrollo de las actividades por parte de los alumnos que participaron en el proceso, así como las discusiones que se generaron durante el curso-taller.

En esta parte del Estudio lo que se esperaba de los estudiantes es que aprendieran a utilizar el *software* para que las tareas que se les asignaron fueran realizadas con la mínima dificultad. Superado este aspecto, el interés se centró tanto en la producción oral como en la producción escrita de los sujetos, por lo que el registro de dichas producciones fue muy importante para los propósitos de la investigación.

La etapa de adiestramiento cuenta doce actividades para ser realizadas por los alumnos. En cada una de las actividades se pretende que el sujeto se familiarice con las características del software, aprenda a usar las diferentes herramientas que tiene al alcance para realizar exploraciones geométricas en la computadora. Con las actividades también se repasan algunos conceptos de geometría; se pide a los estudiantes que formulen las conjeturas respectivas de lo que observen; que busquen argumentos de validación de las conjeturas y en forma grupal se generaron discusiones sobre las observaciones. En esta parte de la investigación se busco aproximar al sujeto al concepto de prueba en matemáticas por medio de las actividades a realizar y de discusiones grupales.

En resumen, en la etapa de adiestramiento sobre el uso de las herramientas con Cabri, también se generaron discusiones grupales con relación a la formulación de conjeturas y la búsqueda de argumentos que las justifiquen.

Instrumentos de observación

En la segunda parte del taller, los alumnos desarrollaron una serie de actividades diseñadas con el propósito de que descubrieran hechos geométricos importantes referentes al triángulo y las medianas. En esta fase se les pedía que formularan por escrito las conjeturas que descubrieran al seguir cada una de las actividades propuestas. Para este fin se diseñó una serie de seis actividades, en las cuales se les pedía medir ciertas magnitudes, variar objetos y observar los invariantes. Esto los debería llevar a observar un resultado, el cual se les pedía que expresaran por escrito. Por último, se les pedía que construyeran una prueba del resultado obtenido.

Las actividades fueron adaptadas de un documento de un equipo de trabajo de Cabri-Géomètre [Équipe EIAH, Grenoble, 1996]. Para el diseño de dichas actividades de esta segunda fase del taller, se tomaron en cuenta las siguientes consideraciones:

- Se eligió un sistema de proposiciones (o teoremas).
- Las proposiciones se refieren a triángulos; en particular, algunas relaciones entre medianas y áreas de los triángulos.
- El conjunto de proposiciones es tal que se puede organizar localmente en cadenas deductivas, o sea, están organizadas de manera que en la prueba de cada teorema se pueden utilizar uno o varios teoremas que le anteceden.

Aplicación de los instrumentos de observación

Hemos llamado "instrumentos de observación" a una serie de seis actividades en las cuales, a excepción de la última actividad, se conduce al estudiante a la formulación escrita de una proposición. Una característica de las proposiciones que emergen de dichas actividades es que, salvo en la primer actividad, para la prueba de la proposición en turno se puede utilizar una o más de las proposiciones anteriores, por ello las consideramos un mini–sistema.

Supusimos que con la consigna de que escribieran las proposiciones después de la actividad de exploración con el apoyo de Cabri, sin utilizar las expresiones propias del lenguaje del *software* (“arrastrar el punto…”, “trazar la mediana que va de…”, etc.) y con la estrecha relación entre las proposiciones, los estudiantes podrían encontrar y expresar argumentos geométricos en la argumentación de sus proposiciones, veamos que ocurrió. A continuación describiremos en qué consistió esta etapa de la investigación.

Vimos que los estudiantes con los que hemos trabajado han transitado hacia un mayor conocimiento de los objetos geométricos debido a las actividades que desarrollaron con Cabri-Géomètre. No obstante, después de que estos alumnos realizaron algunas actividades con Cabri-Géomètre, desarrollaron un método que les permitió estar convencidos de algunos resultados; resultados que, gracias a la técnica del arrastre del *software*, tienen una fuerte probabilidad de ser verdaderos.

Sin embargo, la manera en que los estudiantes comprenden los resultados está fuertemente influenciada por el contexto del *software*; utilizan frecuentemente expresiones del tipo: “cuando muevo con el *Mouse*”, “si arrastro”, etc., que así nos lo indican, de tal manera que la validación de sus resultados descansa en las acciones que realizan y en su percepción visual de la pantalla. Una de nuestras preguntas de investigación dice: ¿Cómo es posible que los estudiantes encuentren argumentos que justifiquen sus conjeturas? Después de realizar las actividades, encontramos que los estudiantes ofrecen “argumentos” basados en la acción y los resultados observados en la pantalla, muchas veces sin dar argumentaciones geométricas. Por lo tanto, aún no se había hallado la manera de que justificasen sus conjeturas con argumentos geométricos independientes del *software*.

Descripción general de la aplicación de los instrumentos de observación

En las últimas dos sesiones del curso-taller se aplicaron los instrumentos de observación. Dichos instrumentos consisten de un conjunto de seis actividades que involucran propiedades de los triángulos (la lista de las actividades se encuentra en el apéndice “B”). El propósito de cada actividad fue que el estudiante, por medio de experimentación en construcciones geométricas realizadas por él mismo, con apoyo de Cabri-Géomètre:

1) descubriera ciertas propiedades invariantes de los triángulos;
2) escribiera una proposición a partir de sus observaciones; y
3) construyera y escribiera una prueba que justificara el resultado conjeturado.

Cada una de las actividades (todas relacionadas con medianas y áreas de triángulos) conducía a una proposición específica. Estas proposiciones constituyen un sistema en el sentido que cada proposición puede ser deducida de una proposición anterior del mismo sistema. Los antecedentes necesarios para construir las pruebas son simplemente la fórmula de área del triángulo [$(base)(altura)/2$], las proposiciones del mismo sistema y dos proposiciones más que era necesario formular y probar. Nuestras observaciones las organizaremos nuevamente con relación a las componentes de nuestro marco teórico: Conocimiento, Lenguaje, Validación; sin embargo, las características de los resultados nos llevaron a centrarnos más en la componente del lenguaje.

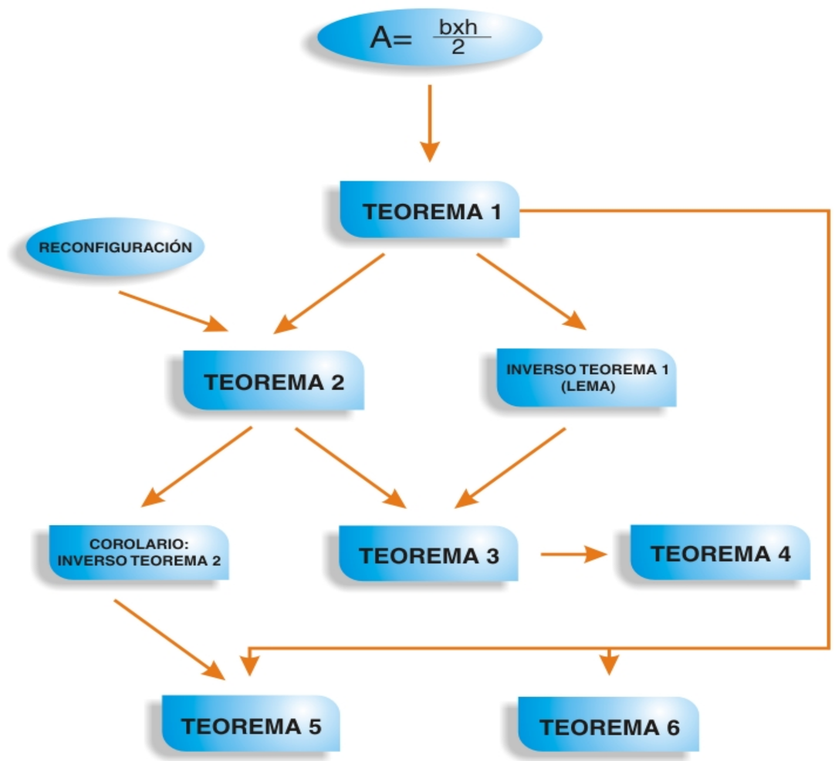
Sistema de proposiciones

El conjunto de proposiciones es el siguiente:

- Teorema 1. Una mediana de un triángulo divide a éste en dos triángulos de áreas iguales.
- Teorema 2: Considere el triángulo ΔABC y la mediana AM, donde M es el punto medio de BC. La altura del triángulo ΔABM que pasa por B es congruente con la altura del triángulo ΔAMC que pasa por C.
- Corolario. Sea un triángulo ΔABC y AM una de sus medianas. Sea X cualquier punto en la mediana. Entonces: Área(ΔABX) = Área(ΔAXC)

- Teorema 3. Considere un triángulo ΔABC. Sea M un punto interior al triángulo tal que Área(ΔAMB)=Área(ΔAMC). Entonces el rayo AM interseca al segmento BC en su punto medio.
- Lema. Si en un triángulo ΔABC un segmento que parte de un vértice al lado opuesto divide al triángulo en dos triángulos con áreas iguales, entonces dicho segmento es una mediana.
- Teorema 4. Sea un trapecio ABCD, con AB || DC. Sea S el punto de intersección de las prolongaciones de los lados no paralelos del trapecio y sea I el punto medio de AB. Entonces el segmento SI es mediana del ΔABS. Sea X el punto de intersección del rayo SI con el segmento DC. Entonces el segmento SX es mediana de ΔDSC.
- Teorema 5. Considere un triángulo ΔABC y sea A' el simétrico de A respecto a C; B' el simétrico de B respecto a A y C' el simétrico de C respecto a B; entonces: área ($\Delta A'B'C'$)=7×área (ΔABC).
- Teorema 6. Las medianas de un triángulo lo dividen en seis triángulos con la misma área.

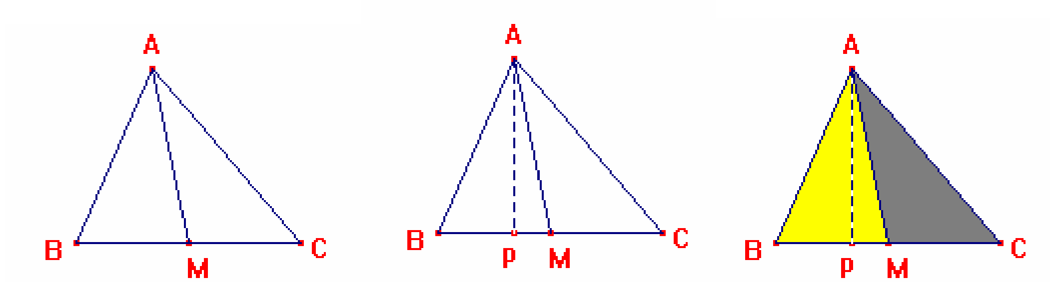
Como se mencionó con anterioridad, los teoremas se pueden organizar en una cadena deductiva como se muestra en el siguiente diagrama.



Análisis del sistema de proposiciones

Las proposiciones fueron analizadas previamente, lo que sigue es un análisis detallado de las demostraciones de las proposiciones del sistema.

Teorema 1. Una mediana de un triángulo divide a éste en dos triángulos de Áreas iguales.



Demostración:

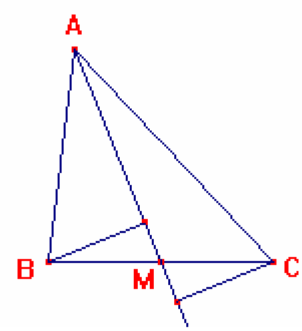
Sea el triángulo ∆ABC y M el punto medio del segmento BC. La mediana AM forma los triángulos ∆ABM y ∆AMC.

Se debe probar que los triángulos ∆ABM y ∆AMC tienen la misma Área.

Considérese la altura PA, donde P es el pie de la perpendicular al segmento BC. PA también es altura de los triángulos ∆ABM y ∆AMC. La base del primero respecto a esa altura es BM y la base del segundo respecto a la misma altura es MC. Pero como BM=MC, se deduce de BM×AP=MC×AP que:

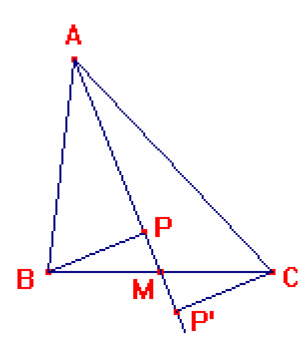
Área(∆ABM) = Área(∆AMC). LQQD. ■

Teorema 2. Considere el triángulo ∆ABC y la mediana AM, donde M es el punto medio de BC. La altura del triángulo ∆ABM que pasa por B es congruente con la altura del triángulo ∆AMC que pasa por C.

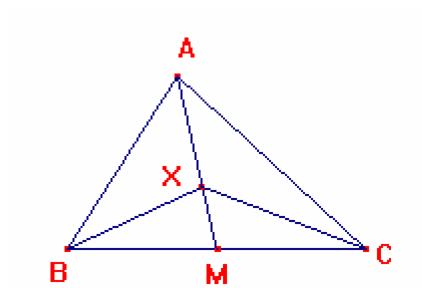


Demostración:

Dado que la base opuesta al vértice B del triángulo ∆ABM es común con la base opuesta al vértice C del triángulo ∆AMC, y dado que el Área de ambos triángulos es la misma por el Teorema 1, se deduce que BP = CP' donde P es el pie de la perpendicular a AM que pasa por B y P' es el pie de la perpendicular a AM que pasa por C. L.Q.Q.D■



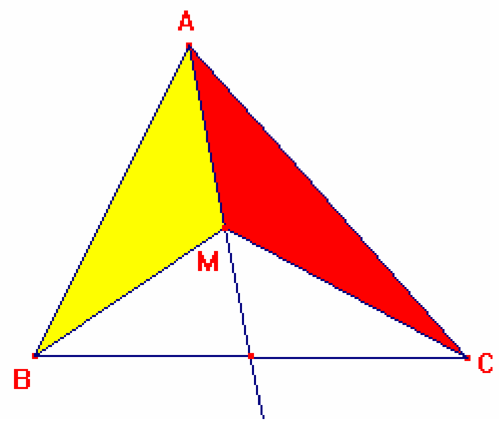
Corolario. Sea un triángulo ∆ABC y AM una de sus medianas. Sea X cualquier punto en la mediana. Entonces: Área(∆ABX) = Área(∆AXC)



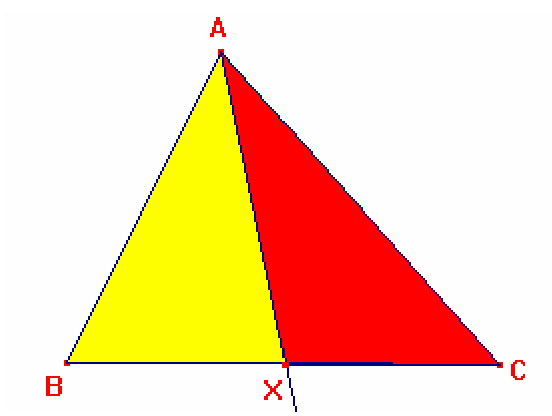
Demostración: La altura del triangulo ∆ABM que pasa por el vértice B coincide con la altura del triángulo ∆ABX que pasa por el mismo vértice; análogamente la altura del triángulo ∆AMC que pasa por el vértice C, coincide con la altura del triángulo ∆AXC que pasa por el mismo vértice. Se sabe, por el teorema 2, que la altura del triángulo ∆ABM que pasa por el vértice B, es igual a la altura del triángulo ∆AMC que pasa por C, y además el triángulo ∆ABX tiene en común la base AX con el triángulo ∆AXC, de donde se deduce que:

Área(∆ABX) = Área(∆AXC). L.Q.Q.D.■

Teorema 3. Considere un triángulo ΔABC. Sea M un punto interior al triángulo tal que Área(ΔAMB)=Área(ΔAMC). Entonces el rayo AM interseca al segmento BC en su punto medio.



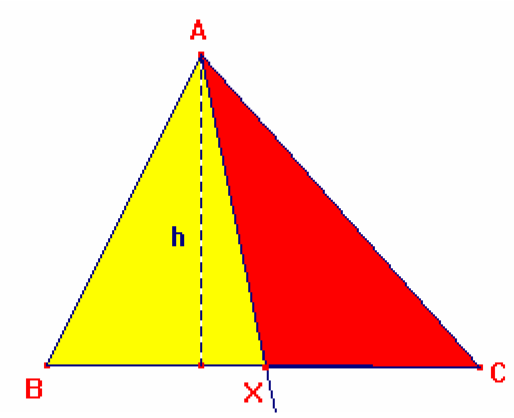
Lema. Si en un triángulo ΔABC un segmento que parte de un vértice al lado opuesto divide al triángulo en dos triángulos con Áreas iguales, entonces dicho segmento es una mediana.



Demostración del Lema.

Sea AX el segmento que divide al triángulo ΔABC en dos triángulos con la misma Área (el argumento es el mismo para cualquiera de los otros dos vértices); donde

X es un punto en el segmento BC. Es decir, por hipótesis se tiene lo siguiente: Área(ΔABX)= Área(ΔAXC)

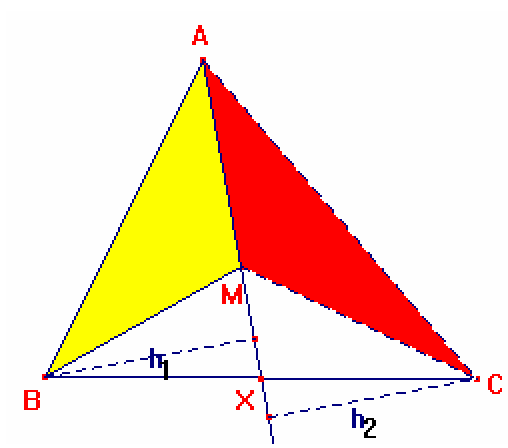


Considérese la altura h de ΔABC. Obsérvese que h es altura de ΔABX cuya base correspondiente es el segmento BX; h también es altura de ΔAXC, cuya base correspondiente es XC. Entonces:

$$h\times BX = \text{Área}(\Delta BAX) = \text{Área}(\Delta XAC) = h\times XC$$

de donde BX=XC y X es punto medio de BC, y por tanto, AX es una mediana. L.Q.Q.D.■

Demostración del Teorema 3.



Como Área (ΔABM) = Área (ΔAMC) y ambos triángulos tienen en común el segmento AM, h_1 es igual a h_2 , donde h_1 es la altura del ΔABM que pasa por B y

h_2 es la altura del $\triangle$AMC que pasa por C. Pero h_1 también es la altura del $\triangle$ABX que pasa por B, y h_2 es la altura del $\triangle$AXC que pasa por C. Entonces Área ($\triangle$ABX) = Área ($\triangle$AXC) y por el lema, X es punto medio de BC y AX mediana del $\triangle$ABC.L.Q.Q.D■

Teorema 4. Sea un trapecio ABCD, con AB || DC. Sea S el punto de intersección de las prolongaciones de los lados no paralelos del trapecio y sea I el punto medio de AB. Entonces el segmento SI es mediana de $\triangle$ABS. Sea X el punto de intersección del rayo SI con el segmento DC. Entonces el segmento SX es mediana de $\triangle$DSC.

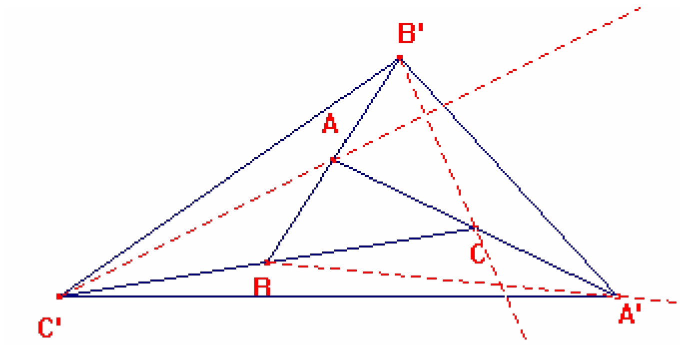
Demostración:

Supongamos que el segmento AB es más pequeño que el segmento DC, de manera que S está en el semiplano definido por AB que no contiene los puntos D y C. Por el teorema 1, se tiene que Área($\triangle$ASI)=Área($\triangle$ISB). Consideremos los triángulos: $\triangle$DAI y $\triangle$CIB; la altura del $\triangle$DAI que pasa por D es congruente con la altura del $\triangle$CIB que pasa por C. Como las bases AI e IB son congruentes entonces Área($\triangle$DAI)=Área ($\triangle$CIB). Entonces se tiene que Área($\triangle$DSI)=Área($\triangle$CSI); con ello se cumplen las hipótesis del Teorema 3. Por lo tanto X es punto medio y, en consecuencia, Área($\triangle$DSX)=Área($\triangle$SXC)

Si AB es mayor que CD, se tiene que SI es mediana de $\triangle$BSA y X es un punto sobre la mediana. Es fácil mostrar que Área($\triangle$BSX)=Área$\triangle$(ASX) ya que la altura del $\triangle$BIS que pasa por B coincide con la altura del $\triangle$BSX por dicho vértice y, análogamente, la altura del $\triangle$AIS que pasa por A coincide con la altura del $\triangle$AXS. L.Q.Q.D.■

Teorema 5. Considere un triángulo $\triangle$ABC y sea A' el simétrico de A respecto a C; B' el simétrico de B respecto a A y C' el simétrico de C respecto a B; entonces

$$\text{Área } (\triangle A'B'C') = 7 \times \text{Área } (\triangle ABC).$$



Demostración.

Se traza la recta auxiliar BA' para formar ΔBA'B'. En este triángulo el segmento AA' es una mediana, pues A es punto medio del segmento BB', de donde Área(ΔABA')=Área(ΔA'B'A). Ahora observemos el ΔABA'; el segmento BC' es mediana de dicho triángulo ya que C es punto medio de AA', de donde

$$\text{Área}(\Delta ABC)=\text{Área}(\Delta CBA') \text{ y por tanto Área}(\Delta ABC)= \frac{1}{2}(\Delta ABA')$$

y entonces:

$$\text{Área}(\Delta A'B'A)= 2\times\text{Área}(\Delta ABC).$$

De forma análoga se encuentran las siguientes igualdades:

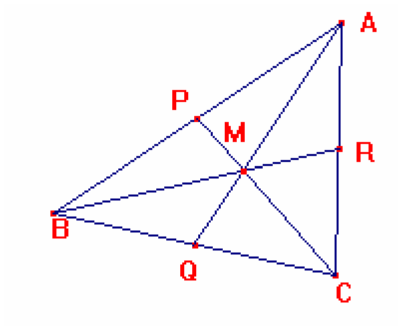
$$\text{Área}(\Delta B'C'B)=2\times\text{Área}(\Delta ABC)$$

$$\text{Área}(\Delta C'A'C)=2\times\text{Área}(\Delta ABC)$$

Entonces:

$$\text{Área}(\Delta A'B'C')= \text{Área}(\Delta A'B'A) + \text{Área}(\Delta B'C'B) + \text{Área}(\Delta C'A'C) + \text{Área}(\Delta ABC)= 7\times\text{Área}(\Delta ABC)$$

Teorema 6. Las medianas de un triángulo lo dividen en seis triángulos con la misma Área.



Demostración:

Sea el triángulo ∆ABC, sean P, Q, R los puntos medios de los lados AB, BC, CA y sea M la intersección de las medianas.

Considere los triángulos ∆ABM, ∆MBC y ∆CAM y sus medianas respectivas MP, MQ, MR. Del Teorema 1 se deducen las siguientes igualdades:

Área(∆APM)=Área(∆MPB)

Área(∆MBQ)=Área(∆QCM)

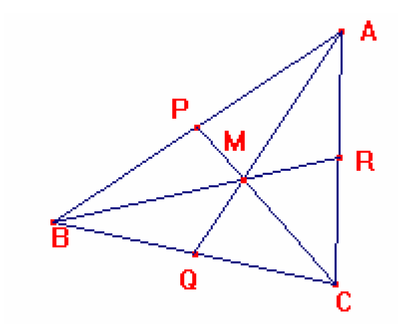
Área(∆MCR)=Área(∆RAM)

Falta probar las siguientes tres igualdades para completar la prueba:

Área(∆MPB) = Área(∆MBQ);

Área(∆QCM) = Área(∆MCR) y

Área(∆RAM) =Área(∆APM)



Probaremos primero que Área(∆MPB) = Área(∆MBQ)

Del corolario al teorema 2 se deduce que Área(ΔABM)=Área(ΔMBC); Sabemos que Área(ΔABM)=2$\times$Área(ΔMPB) y Área(ΔMBC)=2$\times$Área(ΔMBQ), de donde: 2$\times$Área(ΔMPB) = 2$\times$Área(ΔMBQ) y entonces: Área(ΔMPB) = Área(ΔMBQ).

De manera análoga se tiene que:

Área(ΔQCM)= Área(ΔMCR) y Área(ΔRAM)=Área(ΔAPM)

Combinando los dos resultados, entonces se tiene que:

Área(ΔAPM)=Área(ΔMPB)=Área(ΔMBQ)=Área(ΔQCM)=Área(ΔMCR)=Área(ΔRAM)

L.Q.Q.D. ■

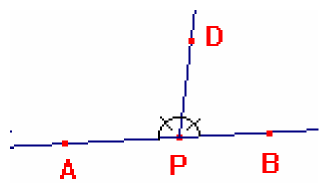
Ejemplo de las actividades de adiestramiento

Se presenta la actividad No. 2 como un ejemplo de las actividades de adiestramiento que les fueron asignadas a los alumnos, estas actividades fueron adaptadas del documento *Explorations: 92 Geometric Explorations on the TI-92* (Keyton, 1996). La lista completa de actividades realizadas durante el curso-taller se encuentra en el apéndice “A”.

Actividad No 2. Ángulos Suplementarios y Complementarios

1. Crear el punto P (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto**).
2. Crear una línea recta que pase por el punto P (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Recta**).
3. Crear los puntos A y B sobre la línea recta de manera que estén a uno y otro lado de P (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**).
4. Crear una semirrecta que inicie en el punto P, que no coincida con la recta original (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Semirrecta**).
5. Crear el punto D sobre la semirrecta (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**).
6. Marcar los ángulos $\angle$APD y $\angle$BPD (Barra de herramientas décimo botón, **Ver;** herramienta, **Marca de ángulo**).
7. Medir los ángulos $\angle$APD y $\angle$BPD (Barra de herramientas noveno botón, **Medir;** herramienta, **Ángulo**).

8. Sujeta la semirrecta PD o la recta AP con el **Ratón** (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**), arrástrala sobre la pantalla del monitor. Observa detenidamente lo que ocurre a la construcción y anótalo en OBSERVACIONES.
9. ¿Qué puedes concluir de tus observaciones?, anótalo.



OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

Algunas dificultades de los alumnos en las actividades de adiestramiento

- No usar los elementos de la construcción en forma adecuada (perder de vista los elementos dependientes y los elementos independientes).
- No señalar con el ratón el punto de interés, tomando en su lugar un punto muy próximo; en consecuencia, obtener una construcción no adecuada.
- No usar las herramientas adecuadas en una construcción; por ejemplo, al construir un triángulo, no emplear la herramienta *triángulo*; frecuentemente se usó la herramienta *segmento*.
- No usar las propiedades del objeto geométrico en su construcción, más bien construirlo "a ojo". Por ejemplo, en el caso de un paralelogramo, para su construcción no se partía del paralelismo de los lados opuestos; muchas veces se construyó "a ojo", desapareciendo la figura al primer intento de arrastre de algún vértice.

Comentarios a las actividades de adiestramiento

- En general, los alumnos tenían poca experiencia en el uso de la computadora, por lo que fue necesario instruirles en el funcionamiento del equipo, forma de entrar y salir del *software*, creación y manejo de archivos, salida del equipo, etc.
- Fue necesario el auxilio a los alumnos, en forma individual, durante la realización de las actividades, para la construcción de objetos geométricos. Se conocían las propiedades de los objetos; sin embargo, no se sabía cómo emplearlas para su construcción.
- Por otra parte, se manifestó en los alumnos una pronta adaptación a Cabri-Géomètre Durante el desarrollo de las actividades planteadas, aprendieron a construir y explorar figuras geométricas; identificaron en la construcción a los elementos dependientes e independientes; y, en general, los estudiantes encontraron las relaciones invariantes que las actividades inducían.

Actividades con el sistema de proposiciones

Las proposiciones fueron presentadas a los estudiantes mediante actividades que llevaron a cabo, en Cabri-Géomètre, siguiendo un conjunto de instrucciones que los condujo a diferentes construcciones y a la experimentación sobre éstas. Los objetivos de cada actividad son:

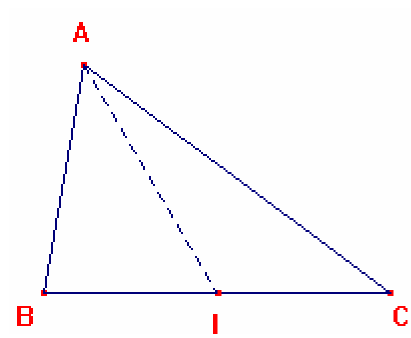
- Que el alumno reconozca las relaciones y hechos geométricos mediante el software.
- Observar si ese reconocimiento le permite al alumno formular las conjeturas correspondientes, pasando del lenguaje oral al lenguaje escrito.
- Organizar los hechos geométricos en forma deductiva bosquejando una prueba escrita.

La experiencia fue organizada para observar si los estudiantes podían percibir las relaciones entre las proposiciones y con base en ellas proponer pruebas simples haciendo intervenir el mínimo de proposiciones fuera del propio sistema. De hecho, aparte de algunas nociones comunes, el único conocimiento necesario fuera de las mismas proposiciones, es la definición de área de un triángulo. Sin embargo, en esta primer aproximación no se considera el aspecto relacionado con la prueba; únicamente se restringe al análisis de los enunciados de las proposiciones que los estudiantes hicieron.

En lo siguiente, se presentan versiones de las actividades uno y tres que se les propusieron a los alumnos en la segunda fase del taller, la lista de las seis actividades como fueron entregadas a los alumnos se encuentra en el apéndice B.

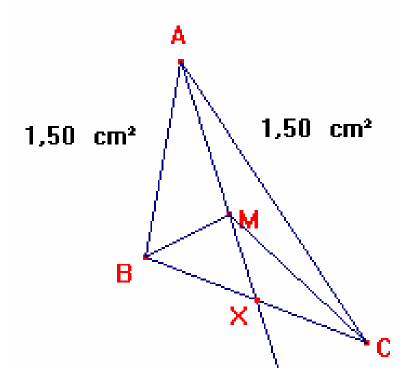
ACTIVIDAD No 1

- Trazar un triángulo, etiquetar los vértices con A, B, C.
- Marcar el punto medio del segmento BC, llamarle I
- Definir los triángulos ΔAIB y ΔACI
- Obtener las áreas de los triángulos ΔAIB y ΔACI
- Mover los vértices A, B, y C y observar lo que ocurre con las áreas obtenidas.
- Formula una conjetura sobre tu observación y escribe la prueba correspondiente.



ACTIVIDAD No. 3

- Trazar un triángulo, etiquetar los vértices con A, B, C y elegir un punto M al interior del triángulo; crear los triángulos ΔABM y ΔACM y adjuntar sus áreas; construir la semirrecta AM, nombrar con X a la intersección de AM con BC. Adjuntar las medidas de los segmentos BX y XC.
- Mover el punto M hasta lograr que las áreas de los triángulos ΔABM y ΔACM sean iguales o casi iguales. ¿Qué se puede decir de la posición de X?
- ¿Se pueden encontrar otras posiciones de M para las cuales las áreas son iguales? ¿Qué conjetura puedes formular para la posición de X?
- Dibujar la altura de ΔABM desde B y la altura del ΔAMC desde C. Establecer que estas alturas son iguales.
- Demostrar que X es el punto medio de BC.



Categorías del análisis

Ante la pregunta **¿Cómo es el tránsito de la adquisición de resultados geométricos mediante exploraciones con geometría dinámica a la enunciación correcta de las conjeturas geométricas correspondientes?** Se hace necesario tener algunos criterios con los cuales analizar las acciones de los estudiantes tanto en el terreno de la exploración dinámica como en el de la enunciación de las conjeturas.

Respecto al análisis de las acciones de los estudiantes en la exploración dinámica, sólo se consideró como dato relevante si el estudiante pudo o no seguir las instrucciones de las actividades obteniendo la construcción pedida. Se pasó por alto en esta etapa la consideración de obstáculos o titubeos de los alumnos, el tipo de dudas que se les presentaron y la manera en que se resolvieron. Se consideró solamente si el estudiante llegaba a construir la figura que se le pedía y si llegaba a ver en la pantalla lo que se quería que viera mediante el arrastre de elementos independientes de la figura. Una vez que el estudiante terminaba la actividad el instructor le preguntaba qué era lo que él veía, de inmediato constataba y anotaba si el estudiante tenía claro el resultado correspondiente. En caso contrario, el instructor no hacía juicio alguno, sólo tomaba nota.

Para analizar las producciones escritas de los alumnos, se consideró en primer lugar la corrección sintáctica de sus enunciados, es decir, se observó si las oraciones respetan las reglas elementales del español y si las expresiones en lengua natural se coordinan adecuadamente con los símbolos geométricos y con la figura.

Esta categoría de análisis está vinculada con la función referencial, descrita en el Capítulo II de este trabajo, en esta función Duval (1999a) distingue las siguientes operaciones: operación de designación pura, que consiste en identificar un objeto con un gesto, una marca particular o una combinación particular de signos; operación de categorización simple, consiste en identificar un objeto con base en sus cualidades; operación de determinación, consiste en precisar el campo de aplicación de la operación de categorización; y la operación de descripción que consiste en identificar un objeto cruzando los resultados de varias operaciones de categorización. Para cumplir una de las cuatro operaciones de la función referencial es necesario un léxico, que es un conjunto de elementos (signos, símbolos o palabras).

En el caso de la geometría euclidiana, para el cumplimiento de la función referencial debe contar con un léxico, éste cuenta con términos permanentes como mediana, mediatriz, vértice, etc. y términos provisionales o locales como ΔABC (triángulo ABC), sea AD (segmento AD) una mediana, sea D el punto PM (punto medio) de CB, etc.

Sin embargo, la posibilidad de designar objetos no es suficiente para permitir una actividad discursiva. Una lengua debe permitir la función apofántica de un enunciado completo; decir alguna cosa sobre los objetos que se designa, bajo la forma de una proposición enunciada.

Por lo anterior, otro criterio más específico consiste en la comparación de los enunciados con la estructura condicional $(P \Rightarrow Q)$ de las proposiciones correspondientes. En particular, se observó si en el enunciado que escribe el estudiante hay una descripción completa del antecedente. Esta característica indicará si concibe a la conjetura como una proposición completa, en la que la formulación del antecedente es fundamental.

Se observó de manera puntual si el estudiante formula la proposición sin hacer referencia a la figura o si la utiliza para facilitar su expresión. El uso de la notación simbólica ligada a una figura aligera considerablemente la dificultad de expresión de las ideas geométricas.

En resumen, los siguientes tres aspectos ayudan a un acercamiento a los textos producidos por los estudiantes:

A) La corrección sintáctica

B) La descripción completa del antecedente

C) El apoyo del texto en la figura y la utilización de simbología (“A”, “P”, etc. para punto; “AB”, “PX”, etc., para segmentos, ...)

Estos aspectos se encuentran vinculados a la función referencial y apofántica; no obstante, en estas categorías de análisis quedan al margen las funciones de expansión discursiva y la función reflexiva.

Mediante la función de expansión discursiva se vincula la proposición enunciada con otras, en un todo coherente (descripción, inferencia,…). En nuestro estudio ésta función se puede ligar al hecho de que los alumnos encuentren alguna justificación a sus conjeturas y las encadenen como un sistema coherente de proposiciones. Sin embargo, en el estudio dichas funciones no se pusieron de manifiesto en los alumnos.

CAPÍTULO IV

OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

Observaciones y análisis

Para hacer referencia a los estudiantes fueron numerados del uno al ocho. De acuerdo al reporte de los observadores, la actividad tres fue una de las más problemáticas. Aunque todos los estudiantes hicieron la construcción como se pedía y relacionaban los aspectos pertinentes, es decir, las áreas iguales con la posición del punto interior sobre la mediana, no lograban distinguir exactamente qué se les pedía. Sin embargo, no fueron conscientes de su confusión. Sólo el observador percibió que estaban confundidos.

En todas las demás actividades, excepto en otros dos casos, todos los estudiantes hicieron las construcciones adecuadamente y “vieron” lo que se quería con las actividades. El estudiante cuatro no pudo organizar bien la actividad cuatro y el estudiante ocho se confundió con la actividad cinco. Entonces, en términos generales, se puede afirmar que los estudiantes se percataron de los resultados a los que conducían las actividades.

En relación con los enunciados producidos, se encontró un cuadro más complejo. Por ejemplo, en varios casos es difícil juzgar como correcta o no la formulación de algunas proposiciones, porque ocurre que en el enunciado están los elementos para decir que es correcto, pero el estudiante agrega frases incorrectas o vagas que lo debilitan, algunos casos son los siguientes:

Actividad 1 **Estudiante 7**
Tienen la misma área porque al sacar el punto medio es la mediana y por lo tanto tienen la misma área.

Actividad 2 **Estudiante 1**
En cualquier triángulo la relación que existe entre las áreas de los triángulos rectángulos que surgen al trazar o unir el punto medio con el vértice opuesto y al trazar perpendiculares a los puntos o vértices del lado en que se trazó el punto medio. Quedan 2 triángulos rectángulos en los cuales el área es la misma o tienen la misma área.
Son iguales porque están formados por 2 perpendiculares que son perpendiculares al punto medio o la mediana del segmento elegido y pasan por las puntas o vértices de tal segmento del triángulo y al mismo tiempo las perpendiculares que se forman son paralelas entre sí y el punto medio sigue siendo punto medio para las perpendiculares.

Los triángulos son iguales porque son o tienen un ángulo recto o de 90º y el ángulo opuesto por el vértice son iguales y por lo tanto el tercer ángulo tiende a verse igual o sea iguales.

Actividad 2 **Estudiante 7**
Si la altura es la misma y la base es la misma por eso los dos triángulos son iguales y por eso al sacar las perpendiculares son iguales y al moverlos siempre tienen el mismo tamaño.

Actividad 2 **Estudiante 8**
Cuando una mediana corta un lado del triángulo o más bien un vector y a dicha mediana se le colocan perpendiculares que pasen por cada vector faltante, una perpendicular a la mediana y se forman unas rectas paralelas por las perpendiculares.

Actividad 3 **Estudiante 2**
Los triángulos determinados por las alturas y la base del triángulo inicial son iguales porque comparten lados iguales y el ángulo comprendido entre ellos igual,

En otros casos, se utilizan palabras inadecuadas para referirse a objetos que sí se tienen en cuenta por los estudiantes, por ejemplo, alguno utiliza mediatriz en lugar de mediana, otro utiliza vector queriendo decir vértice, otro escribe "las alturas de un triángulo" pero no queda claro si para designar a los lados del triángulo diferentes de la (una) base o para indicar medianas. Finalmente, la mayoría de los enunciados no tienen todos los elementos que deberían contener si se juzgan con cierto rigor matemático.

Los siguientes enunciados ilustran algunos de los puntos señalados:

Actividad 1 **Estudiante 1**

Al trazar el punto medio en cualquier lado de un triángulo cualquiera, y al unirlo con el vértice opuesto a ese lado, los dos triángulos que se forman siempre van a tener la misma área porque la altura es la misma para los dos. Y van a estar compensados uno al otro.

Actividad 1 **Estudiante 5**
El área de dos triángulos que se encuentran dentro de otro, cuyo lado es la mediatriz de un lado del primer triángulo, es igual para ambos.

Por lo tanto los lados correspondientes son iguales y X es punto medio. Al tener las áreas de ambos triángulos ABM y ACM, X se encuentra en el punto medio del lado opuesto del vértice.

Actividad 3 **Estudiante 1**
Mi conjetura es que cualquier punto que se encuentre sobre la mediatriz o la semirrecta AX, que X es el punto medio de BC es el vértice de los ángulos, los cuales son iguales en el aspecto del área y para eso existe una infinidad de puntos y sobre esa recta, los cuales son los únicos que pueden lograr que las áreas de los triángulos sean iguales.

Actividad 5 **Estudiante 2**
El triángulo formado por los simétricos de los vértices de otro triángulo contiene 7 veces al triángulo original.

Debido a lo anterior, fue necesario decidir cuáles proposiciones debían ser consideradas como proposiciones correctas, en el sentido de expresar la idea que fue solicitada. La siguiente tabla indica con el símbolo √ las proposiciones evaluadas como correctas, con el número 0 las que fueron consideradas como incorrectas y con ½ donde se consideró un punto intermedio.

Estudiante	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Actividad 1	√	√	√	√	½	½	0	√
Actividad 2	0	√	√	0	√	½	0	0
Actividad 3	0	0	0	0	0	0	0	0
Actividad 4	0	0	0	0	√	½	0	0
Actividad 5	0	½	0	0	0	0	0	0
Actividad 6	0	0	0	0	0	0	0	0

Al margen de juzgar si los enunciados son del todo correctos, se pueden resaltar los rasgos que se han previsto en las categorías de análisis. Para evaluar la corrección sintáctica (A), se calificaron con cero, los enunciados que claramente rompen con alguna regla sintáctica del español de tal forma que hacen muy confuso el enunciado. Se asignó la calificación ½ a los enunciados que, aunque tenían defectos, trasmitían el significado del enunciado. La calificación de uno fue asignada a los enunciados que se juzgaron como correctos. Naturalmente, estas evaluaciones y las siguientes reflejan nuestro particular punto de vista, así que la asignación del puntaje tiene algo de subjetividad.

Se calificó la descripción completa del antecedente (B) con 1 si en el enunciado está presente el antecedente y con 0 cuando está ausente; se calificó con ½ cuando resulta difícil decidir entre ambos extremos. Finalmente, la categoría apoyo en la figura (C) se calificó con 0 si el enunciado no se apoya en la figura ni utiliza notación simbólica, con 1 cuando se expresan elementos de la figura mediante símbolos como P, QP, AB, etc.; ocasionalmente también se utilizó ½ en el mismo sentido que el caso anterior. A continuación, se muestra la tabla que recoge las evaluaciones:

Estudiante	**1**			**2**			**3**			**4**			**5**			**6**			**7**			**8**		
Actividad	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	½	½	0	½	1	0	0	0	0	1	1	0
2	0	1	0	1	1	½	½	1	1	0	0	1	0	1	1	½	1	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	1	½	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	½	0	1
4	0	1	0	0	0	1	0	0	1	½	0	0	½	0	0	1	0	0	0	0	1	0	½	1
5	1	0	0	1	½	0	1	½	0	½	0	1	½	0	0	1	0	1	1	0	1	0	½	0
6	1	-	1	0	-	0	½	-	1	1	-	0	0	-	½	½	-	0	0	-	0	½	-	0

A: Corrección sintáctica.	B: Descripción completa del antecedente	C: Relación con gráfica
0 Rompe claramente sintaxis	0 No	0 No hay referencia a la figura
½ Aceptable con defectos	½ Entre ambas	½ Entre ambas
1 Correcta	1 Sí	1 Sí hay referencia

En las dos primeras actividades casi todos los estudiantes describieron el antecedente en sus enunciados (siete estudiantes y seis estudiantes respectivamente), pero en las actividades 3, 4 y 5 sólo en tres ocasiones hubo una descripción completa del antecedente; la actividad 6 no requería la formulación de conjetura.

Se observó que los enunciados correspondientes a las actividades 2, 3, y 4 presentan mayores problemas de sintaxis. Esta dificultad puede provenir de que estos enunciados tienen mayor complejidad y exigen frases especializadas que se vuelven complicadas si no se utiliza la figura y notación simbólica; por ejemplo: “la perpendicular a la recta… que pase por el punto…”, “las áreas de los triángulos formados por el punto interior al triángulo, el vértice superior y cada vértice del segmento base son iguales…”, “el triángulo que se forma al prolongar los dados no paralelos del trapecio...”

La falta de vocabulario y de control en la formulación de frases apropiadas para describir los objetos geométricos, y la aversión de los estudiantes a usar símbolos, les complicó más la realización de la tarea. De hecho, solamente en unas cuantas ocasiones los alumnos necesitaron usar la notación simbólica.

A título de ejemplo se presentan algunas observaciones con relación a la producción de los estudiantes como respuestas a la Actividad 1. Es notorio que hubo dos formas en las cuales fue entendida la pregunta. Cuatro estudiantes propiamente entendieron que se les pedía que escribieran el enunciado de la proposición sobre las áreas de los triángulos que son formados cuando se traza una mediana en un triángulo. Las respuestas de los otros cuatro fueron más extensas, tratando de producir una prueba.

Del primer grupo, únicamente dos alumnos produjeron enunciados que, aunque no suficientemente precisos, fueron sintáctica y matemáticamente correctos:

Estudiante 2: Los triángulos formados al trazar una mediana de un triángulo tienen sus áreas iguales.

Estudiante 3: Al dividir un cateto a la mitad y unir este punto con el vértice opuesto, el área de los dos triángulos formados siempre son iguales.

Los otros dos estudiantes establecieron enunciados sintácticamente incorrectos, aunque se determinó que estaban pensando en términos de la idea correcta.

Estudiante 5: El área de dos triángulos que se encuentran dentro de otro, cuyo lado es la mediatriz de un lado del primer triángulo, es igual para ambos.

Estudiante 6: Si en un triángulo cualquiera se le saca el punto medio de un segmento y al ser unido con el vértice opuesto, el área de dichos triángulos que se forman es igual. Si se saca el punto medio del segmento base y éste al ser unido con el tercer vértice, el área de los dos triángulos es igual.

De aquellos que ofrecieron un argumento, solamente uno llevó a cabo una formulación adecuada, y el otro casi lo logró:

Estudiante 1: Al trazar el punto medio en cualquier lado de un triángulo cualquiera, y al unirlo con el vértice opuesto a ese lado, los dos triángulos que se forman siempre van a tener la misma área porque la altura es la misma para los dos. Y van a estar compensados uno al otro.

Estudiante 4: Una mediana divide al área del triángulo en dos áreas iguales. Ya que al tener la misma base en común de la misma dimensión, en estos dos triángulos, su altura será la misma.

Los otros dos estudiantes únicamente formularon enunciados redundantes, sin éxito para formular un argumento.

Estudiante 7: Tienen la misma área porque al sacar el punto medio es la mediana y por lo tanto tienen la misma área.

Estudiante 8: Cuando a un triángulo se le divide un lado con una mediana se forman dos triángulos con el área igual porque dicha mediana los divide en dos exactamente.

Los anteriores resultados nos muestran que los estudiantes estuvieron lejos de tener un desempeño en la escritura de las proposiciones acorde con el probable conocimiento que tenían de ellas. Los estudiantes entienden a un cierto nivel las proposiciones en juego, pero la complejidad de tales proposiciones está en gran parte soportada por el software. Al momento en que el estudiante tiene que trasladar esta complejidad al registro de la lengua se manifiestan limitaciones respecto al conocimiento de las reglas de formación del discurso especializado de la geometría: formación de proposiciones (antecedente y consecuente bien diferenciados) y coordinación con la figura para descargar el peso de la sintaxis de las oraciones con ayuda de la simbología.

Algunas reflexiones

El solo hecho de haber podido llevar a cabo la experiencia aquí descrita en tan poco tiempo muestra una de las riquezas de Cabri–Géomètre. En efecto, sin la ayuda de las actividades con el software habría sido imposible plantear a los estudiantes el problema de enunciar una proposición que ellos nunca habían visto formulada pero, además, asegurando que el estudiante tuviera un referente preciso de dicha proposición. Dentro de las riquezas que aporta el software está la exploración, mediante el arrastre de los elementos ndependientes en las construcciones, lo que posibilita al alumno, para encontrar propiedades invariantes y de éstas formular conjeturas.

Se considera que en geometría, y en matemáticas en general, enunciar correctamente las proposiciones es parte fundamental de su aprendizaje y realizar esta actividad representa un verdadero problema para el estudiante, como se ha podido constatar de los resultados expuestos.

Uno de los estándares de proceso que el NCTM (NCTM, 2000) propone para la evaluación de la calidad de la curricula es el de *comunicación.* Y si bien es cierto que hay otros medios de comunicación como el visual–gráfico y, ahora, los generados por los medios informáticos, todos en última instancia tienen un soporte de la palabra oral y escrita. Entonces la enseñanza de las matemáticas debería dirigir esfuerzos para lograr en los estudiantes un dominio de la lengua oral y escrita, en particular, en su forma especializada como discurso matemático.

Por otra parte, de la observación y análisis de las tareas realizadas por los alumnos, se sigue que:

- La adaptación de los alumnos al software es rápida, no se encuentran grandes problemas en la construcción de las figuras geométricas.
- Con soltura aprenden a explorar figuras geométricas, identifican los elementos independientes y los elementos dependientes en la construcción.
- En general, los alumnos encuentran las relaciones invariantes en las actividades de exploración planteadas; sin embargo, es de destacarse que

el problema principal radica en la escritura de las conjeturas correspondientes con relación a los resultados obtenidos.

- Cuando la actividad de construcción es simple, generalmente se llega a una formulación adecuada de la conjetura; no obstante, si la tarea es más compleja (se involucran más elementos), la formulación de la conjetura se complica.

Resumen

Balacheff sugiere que, a fin de acceder a lo que se llama prueba matemática, es necesario que el estudiante acceda a un lenguaje funcional que no sea únicamente una forma de describir las acciones. Tal lenguaje está caracterizado por la introducción de cierta cantidad de simbolismo [Balacheff, 1987, pp. 58-59]. Las observaciones en este estudio indican las dificultades de los estudiantes para acceder a ese lenguaje funcional. Además, se puede decir que es necesario que los estudiantes aprendan cómo usar los símbolos. También es importante para ellos adquirir el vocabulario de la geometría y aprender la sintaxis de las frases que describe objetos geométricos.

El marco que el estudiante requiere para organizar la información con el propósito de llevar a cabo una demostración deductiva geométrica, es diferente del que se requiere para tener cierto control de los objetos geométricos en la pantalla y observar el comportamiento. Sin embargo, en la actividad escrita se revela una complejidad que el software produce y esconde al mismo tiempo. Pero, más allá de toda duda, a diferencia del pasado, las actividades con geometría dinámica pueden permitir las exploraciones de las propiedades de los objetos.

Considero también que hubo un avance importante en la componente de “acción–conocimiento” puesto que los estudiantes, con ayuda de las actividades y de lo que ven en la pantalla como resultado del uso del *software*, descubren lo que deben decir las proposiciones, convirtiéndose la pantalla en un instrumento de evaluación; esto contrasta en gran medida con lo que sucede en un curso tradicional de geometría, donde el estudiante prácticamente no dice nada cuando se le presenta un problema. En las actividades de adiestramiento, se puede decir que no hubo problemas pues siempre se tuvo una respuesta.

En la componente del lenguaje escrito se manifiestan muchas de sus carencias; en general, una de ellas fue una pobre ortografía; también se mostró dificultad en la redacción de las proposiciones pues, además de mostrar en forma general una fuerte dependencia del lenguaje del *software* (173 textos de 200 así lo manifiestan), hubo serios problemas en el paso del lenguaje oral al lenguaje escrito ya que por lo general los estudiantes explicaban en forma oral al observador un resultado acorde con la actividad, no así en la escritura del mismo. Otra cuestión de interés asociado con el lenguaje, la constituye el uso de simbología; se puso de manifiesto cierto uso de él, sin embargo, en la mayoría de los casos no fue más allá de la identificación de puntos y/o segmentos; por ejemplo, no hubo ningún caso que usara el signo de igualdad para expresar la igualdad de dos segmentos.

Finalmente, en la componente de la validación vemos que algunos avanzan en darse cuenta de que las proposiciones son universales y tratan de buscar una explicación. El grupo de estudiantes fue heterogéneo, lo cual se puso de manifiesto al evaluar los textos que produjeron.

Las limitaciones en la componente del lenguaje nos hicieron ver lo importante que es proponer actividades para su desarrollo. De hecho, para evaluar con mayor precisión la componente de la validación, se requiere que el estudiante sea capaz de expresar mejor sus ideas.

Conclusiones Generales.

Las conclusiones de este trabajo de investigación es considerar que el propósito de explorar las relaciones entre las ideas que resultan de las actividades realizadas por estudiantes de bachillerato (15-17 años) en un ambiente de geometría dinámica, la escritura de sus conjeturas y la búsqueda de argumentos adecuados para validarlas; sin embargo, hemos encontrado que el uso de software de geometría dinámica, auxilio a los estudiantes haciendo progreso en el nivel del componente de conocimiento. Los estudiantes parecen agarrar el significado de algunos de los teoremas gracias a la aproximación fenomenológica que el uso de Cabri hace posible. Hay una diferencia fundamental en la construcción de figuras geométricas entre hacerlos con lápiz y papel y hacerla en un ambiente de geometría dinámica: mientras en la primera es la construcción de un caso particular, en la última es generalmente la construcción de un caso “general”. La construcción en Cabri también requiere la definición de elementos estructurales (por ejemplo el punto medio esta definido intrínsicamente como el punto medio); fallar hacerlo así resulta en la figura “separándose a través del arrastre. En la primera actividad por ejemplo, arrastrando y experimentando ellos pueden observar sobre la pantalla que las áreas de los dos triángulos que se formaron cuando dividieron un triángulo con una mediana, son siempre iguales: esto da a los estudiantes una clara referencia de lo que es la proposición. Cuando a ellos se les pide una prueba, ellos miran por una explicación y son capaces generalmente para observar los elementos necesarios para la prueba, sugiriendo una idea fundamental de la prueba.

Por otra parte en este estudio nos concentramos en describir sólo la primera relación, es decir, el paso de las ideas producidas a su formulación escrita. Para tal fin se diseñó un taller de geometría con apoyo de Cabri-Géomètre con 8 estudiantes de bachillerato. El taller se desarrolló en dos etapas: en la primera se introdujo a los alumnos participantes en el uso de las herramientas de Cabri- Géomètre; en la segunda etapa, realizaron actividades de construcción y exploración de figuras geométricas, y se les pidió que formularan conjeturas sobre los resultados observados.

El solo hecho de haber podido llevar a cabo la experiencia que se describe en este estudio en el tiempo estimado muestra una de las riquezas de Cabri–Géomètre. En efecto, sin la ayuda de las actividades con el software hubiera sido imposible plantear a los estudiantes el *problema* de enunciar una proposición que ellos nunca habían visto formulada pero, además, asegurando que el estudiante tuviera un referente preciso de dicha proposición.

Hemos subrayado en el párrafo anterior la palabra *problema* porque consideramos que en geometría, y en matemáticas en general, enunciar correctamente las proposiciones es parte fundamental de su aprendizaje y realizar esta actividad representa un verdadero problema para el estudiante, como se ha podido constatar en los resultados expuestos.

Uno de los estándares de proceso que el NCTM (NCTM, 2000) propone para la evaluación de la calidad de los curricula es el de *comunicación.* Y si bien es cierto que hay otros medios de comunicación como el visual–gráfico y, ahora, los generados por los medios informáticos, todos en última instancia tienen un soporte de la palabra oral y escrita. Entonces no se debieran escatimar en la enseñanza esfuerzos para lograr en los estudiantes un dominio de la lengua oral y escrita, en particular, en su forma especializada como discurso matemático.

Si se conservan los dos objetivos principales de la geometría: la exploración de objetos geométricos y el fortalecimiento del razonamiento deductivo; más aún, si consideramos que un verdadero aprendizaje de la geometría no puede prescindir del razonamiento deductivo, se debe poner mayor atención a la elaboración de actividades que, con el uso de los ambientes de geometría dinámica, fomente las actividades de escritura. Se corre el peligro de que el entusiasmo en el software propicie el abandono de este aspecto que es fundamental para acceder a la prueba matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arzarello, F., Micheletti, Ch., Olivero, F. & Robutti, O. (1999). A Model for Analysing the Transition to Proofs in Geometry. In, O. Zaslavsky (Ed.) *Proceedings of the 23th PME*. Haifa, Israel. 2: 24-31.

Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics. In A. J. Bishop et al. (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education*. K.A.P., Netherlands.

Balacheff, N. (1987). Processus de Preuve et Situations de Validation. *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 18:147-176.

Balacheff, N. (1999). Apprendre la Preuve, Lectures Given at the *Winter School in the Epistemology of Mathematics for Didactics*, Levico Terme (Trento).

Balacheff, N. (2000). *Procesos de Prueba en los Alumnos de Matemáticas.* Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

Boyer, 1968 C. B. Boyer, *"A history of Mathematics",* John Wiley, 1968, NY.

Chazan, D. & Yerushalmy, M. (1998). Charting a course for secondary geometry. In R. Lehrer and D. Chazan, (Eds.) *Designing Learning environments for Developing Understanding of Geometry and Space*, LEA, NJ. pp. 67-90

Chazan, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 24(4): 359-387.

Consejo Académico del Bachillerato, UNAM (2001) *Núcleo de Conocimientos y Formación Básicos que debe proporcionar el Bachillerato de la UNAM*; Primera Aproximación, UNAM, Méx.

De Villiers, M. (1993). El papel y la Función de la demostración en Matemáticas. Epsilon No 26 pags. 15-30

Debesee-Mialaret y otros, (1973)M. Debesse, G. Mialaret y J. Assa: *"Historia de la Pedagogía. Vol.1, Antigüedad, Edad Media, Renacimiento",* Oikus-Tau, Barcelona 1973.

DGCCH. (2001). *Fichero de Actividades Didácticas de Matemáticas I.* UNAM, Méx.

Douek, N. (1998). Some Remarks About Argumentation and Mathematical Proof and their Educational Implications. First CERME International Conference.

Duval, R. (1999a). *Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Univ. del Valle, Cali, Colombia.

Duval, R. (1999b). L'argumentation en Question. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.*

Duval, R. (1999c). *Argumentar, Demostrar, Explicar : ¿Continuidad o ruptura cognitiva ?* Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Duval, R. (2000). Écriture, Raisonnement et Décuberte de la Démostration en Mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques.* 20(2),135-170

Équipe EIAH (1996). *Compilation des documents relatifs à l'expérimentation des scenarios pour l'année,* 95–96; mimeo, Grenoble, France.

Fawcett, Harold. (1938). *The Nature of Proof*. New York. National Council of Teachers of Mathematics.

Goldenberg, E., Cuoco, A. & Mark, J. (1998). A role for Geometry in General Education. In R. Lehrer and D. Chazan, (Eds.) *Designing Learning environments for Developing Understanding of Geometry and Space*, LEA, Mahwah, NJ. pp. 3-44

Goldenberg, P. & Cuoco, Al. (1998). What is Dynamic Geometry? In: Lehrer, R.; Chazan, D. (Eds.) *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*. LEA, NJ, USA. 351-367

Goldenberg, P. (1995). Ruminations about Dynamic Imagery (and Strong Plea for Research). In R. Sutherland and J. Mason (Eds.), *Exploring Mental Imagery With Computers in Mathematics Education*. Berlin: Springer. Pg. 202-224.

Gras, R. & Giorgiutti, I. (1996). Computer Aided Proof Geometry. In J-M. Laborde (Ed.) *Intelligent Learning Environments: The Case of Geometry.* Springer, Berlin. Pg. 63-81

Guzmán, (1991) M. de Guzmán, *“Para pensar mejor”,* Labor, Barcelona, 1991. La última edición: “Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos”, Pirámide, Madrid, 1997.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.) *The Nature of Advanced Mathematical Thinking, Advanced Mathematical Thinking*. KAP, Pag. 54-61

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. *For the Learning of Mathematics.* 15(3) 42-49

Hansen, V. L. (1998). General Considerations on Curricula Designs in Geometry. In Mammana, C. & Villani, V. (Eds), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Stud,* pp. 235-242. KAP, Netherlands

Healy, L. & Hoyles, C. (1999a). *Justifying and proving in school mathematics Technical Report on the Nationwide Survey.* Mathematical Sciences, Institute of Education, University of London

Healy, L. & Hoyles, C. (1999b). Linking Informal Argumentation with Formal Proof through Computer-Integrated Teaching Experiments. In, O. Zaslavsky (Ed.). *Proceedings of the 23th PME*. Haifa, Israel. Vol. 3: 105-112.

Hersh, R. (1993). Proving is Convincing and Explaining. *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 24: 389-399.

Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. In C. Mammana and V. Villani (Eds.) *Perspectives on the teaching for the 21st Century, an ICMI Study*, KAP, Netherlands, pp. 121-128.

Hölzl, R. (1996). How Does 'Dragging' Affect the Learning of Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning.* Vol.1: 169-187.

Horgan, J. (1993). The Death of Proof. Scientific American 269(4) 74-82.

Hoyles, C. & Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana & V. Villani, (Eds.), *Perspectives on the teaching geometry for the 21st Century*, *an ICMI Study*, KAP, Netherlands, pp. 121–128.

Hoyles, C. (1997). The curricular Shaping of Students' Approaches to Proof. *For the Learning of Mathematics.* Vol. 17(1): 7-16.

Keyton, M. (1996a). Student Activities. Texas Instruments (Ed). *92 Geometric Explorations on the TI-92.* Dallas, Tx.

Laborde, C & Laborde J-M. (1996). What About a Learning Environment Where Euclidean Concepts are Manipulated with a Mouse? In A. diSessa, C. Hoyles, R. Noss & L. Edwards (Eds.) *Computers and Exploratory Learning*. Springer, Berlin. Pg. 241-262.

Laborde, J-M. (1998). Visual Phenomena in the Teaching/Learning of Geometry in a Computer-Based Environment. In: Mammana, C. & Villani, V. (Eds), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study,* pp. 113-120. Kluwer Academic Publisher, Netherlands.

Martínez-Recio, A. (2001). La Demostración en Matemática. Una <aproximación Epistemológica y Didáctica. En Moreno, M., Gil, F., Socas, M. Y Godino, J. (Eds.) *Documento de Trabajo del V Simposio de la SIEM.* Armería, Esp.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for the School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* VA: NCTM

Noss, R. & Hoyles, R. (1996). *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers.* Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Sánchez, E. & Mercado, M. (2001). Formulación de conjeturas en actividades con Cabri–Géomètre, en C. Cortés, F. Hitt, A. Sepúlveda & L. Guerrero (Eds.) *Conferencia internacional sobre uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas,* Morelia, Michoacán, México.

Sánchez, E. & Mercado, M. (2002). Writing conjectures in geometrical activities with Cabri–Géomètre, Proceedings of the XXIV *Conference of North American Chapter of the International group for the Psychology of Mathematics Education.*

Schumann, H. (1996). The Influence of Interactive Tools in Geometry Learning. In J-M. Laborde (Ed.) *Intelligent Learning Environments: The Case of Geometry.* Springer, Berlin. Pg. 157-187.

Thurston, W. P. (1995). On Proof and Progress in Mathematics. *For the Learning of Mathematics.* Vol. 15(1): 29-37.

Apéndice A

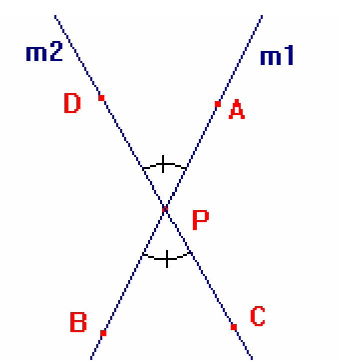
ACTIVIDADES DEL TALLER, ADIESTRAMIENTO

A C T I V I D A D 1

Nombre:_____________________________________ Fecha:__________
Escuela:______________________Edad___________ Semestre:_______

Ángulos opuestos por el vértice

1. Crear un punto, etiquetarlo con P (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto**).
2. Trazar dos líneas rectas m_1 m_2, que pasen por el punto P. (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Recta**).
3. Crear los puntos A y B sobre la recta m_1 de tal manera que el punto P se encuentre entre los puntos A y B (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**) y crear los puntos C y D sobre la recta m_2 de tal manera que el punto P se encuentre entre los puntos C y D (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**).
4. Marcar los ángulos $\angle APC$ y $\angle BPD$ (Barra de herramientas décimo botón, **Ver;** herramienta, **Marca de ángulo**).
5. Medir los ángulos $\angle APC$ y $\angle BPD$ (Barra de herramientas noveno botón, **Medir;** herramienta, **Ángulo**).
6. Sujeta una de las rectas con el **Ratón** (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**)**,** arrástrala sobre la pantalla del monitor. Observa detenidamente lo que ocurre a los ángulos y anótalo en OBSERVACIONES.
7. ¿Qué puedes concluir de tus observaciones?
8. Sin la ayuda del software, ¿Cómo se puede probar lo que observaste?



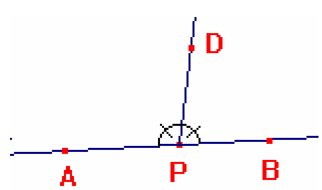
OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

A C T I V I D A D 2

Nombre:____ Fecha:____________
Escuela:___________________________Edad______________ Semestre:_________

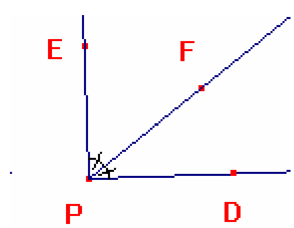
Ángulos Suplementarios y Complementarios

1. Crear el punto P (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto**).
2. Crear una línea recta que pase por el punto P (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Recta**).
3. Crear los puntos A y B sobre la línea recta de manera que estén a uno y otro lado de P (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**).
4. Crear una semirrecta que inicie en el punto P, que no coincida con la recta original (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Semirrecta**).
5. Crear el punto D sobre la semirrecta (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**).
6. Marcar los ángulos ∠APD y ∠BPD (Barra de herramientas décimo botón, **Ver;** herramienta, **Marca de ángulo**).
7. Medir los ángulos ∠APD y ∠BPD (Barra de herramientas noveno botón, **Medir;** herramienta, **Ángulo**).
8. Sujeta la semirrecta PD o la recta AP con el **Ratón** (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**), arrástrala sobre la pantalla del monitor. Observa detenidamente lo que ocurre a la construcción y anótalo en OBSERVACIONES.
9. ¿Qué puedes concluir de tus observaciones?, anótalo.



OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

1. Crear una semirrecta que inicie en el Punto P (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Semirrecta**).
2. Crear el punto D sobre la semirrecta (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**).
3. Construir una recta perpendicular a la semirrecta PD que pase por P (Barra de herramientas quinto botón, **Construir**; herramienta, **Recta perpendicular**).
4. Crear el punto E sobre la recta perpendicular (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**).
5. Oculta la recta PE (Barra de herramientas último botón, **Dibujo**; herramienta, **Ocultar/mostrar**).
6. Crear la semirrecta PE (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Semirrecta**).
7. Crear un punto F en el interior del ángulo ∠DPE (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto**).
8. Crear la semirrecta PF (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Semirrecta**).
9. Marcar los ángulos ∠DPF y ∠FPE (Barra de herramientas décimo botón, **Ver**; herramienta, **Marca de ángulo**).
10. Medir los ángulos ∠DPF y ∠FPE (Barra de herramientas noveno botón, **Medir**; herramienta, **Ángulo**).
11. Sujeta el punto F con el **Ratón** (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero),** arrástralo sobre la pantalla del monitor, de manera que F sea interior al ángulo ∠DPE. Observa detenidamente lo que ocurre a la construcción y anótalo en OBSERVACIONES.
12. ¿Qué puedes concluir de tus observaciones?



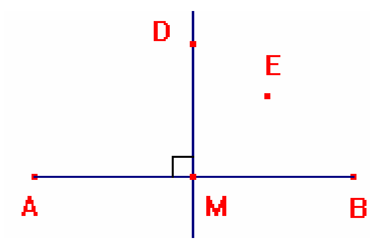
OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

A C T I V I D A D 3

Nombre:_______________________________________ Fecha:__________
Escuela:_______________________Edad____________ Semestre:_______

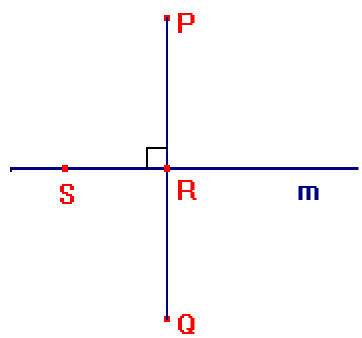
Rectas Perpendiculares y Mediatrices

1. Crear el segmento AB (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Segmento**).
2. Construir su mediatriz (Barra de herramientas quinto botón, **Construir**; herramienta, **Mediatriz**).
3. Crear el punto M, la intersección del segmento AB y la mediatriz (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto de intersección**).
4. Crear el punto D sobre la mediatriz (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**) y crear el punto E que no esté sobre el segmento AB ni sobre la mediatriz (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto**).
5. Medir las distancias AD, DB, AE y EB (Barra de herramientas noveno botón, **Medir**; herramienta, **Distancia y longitud**). Arrastrar los puntos D y E (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**). ¿Qué observas?
6. Marcar el ángulo ∠AMD (Barra de herramientas décimo botón, **Ver**; herramienta, **Marca de ángulo**).
7. Medir el ángulo ∠AMD (Barra de herramientas noveno botón, **Medir**; herramienta, **Ángulo**). ¿Qué Observas?, anótalo.



OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

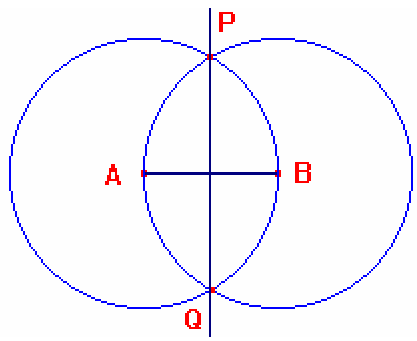
1. Crear la línea recta m (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Recta**).
2. Crear el punto P fuera de la recta (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto**).
3. Reflejar el punto P respecto la recta *m* (Barra de herramientas sexto botón, **Transformar**; herramienta, **Simetría Axial**). Etiquetar el punto como Q (Barra de herramientas décimo botón, **Ver**; herramienta, **Etiqueta**).
4. Crear el segmento PQ. (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Segmento**).
5. Marcar y medir cualquier ángulo de la construcción.
6. Al arrastrar los elementos de la construcción que sean arrastrables, (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**). ¿Qué observas?, anótalo.



OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

Crear el segmento AB (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Segmento**).

1. Construir un círculo con centro en el punto A y radio el segmento AB (Barra de herramientas cuarto botón, **Curvas**; herramienta, **Círculo**).
2. Construir un círculo con centro en el punto B y radio el segmento BA (Barra de herramientas cuarto botón, **Curvas**; herramienta, **Círculo**).
3. Crear los puntos de intersección de los dos círculos (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto de intersección**), etiquetar los puntos como P y Q (Barra de herramientas décimo botón, **Ver**; herramienta, **Etiqueta**).
4. Crear la recta PQ (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Recta**).
5. Al arrastrar los elementos de la construcción que sean arrastrables, (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**).¿Qué observas?, ¿Cómo serán los ángulos formados por el segmento y la recta?



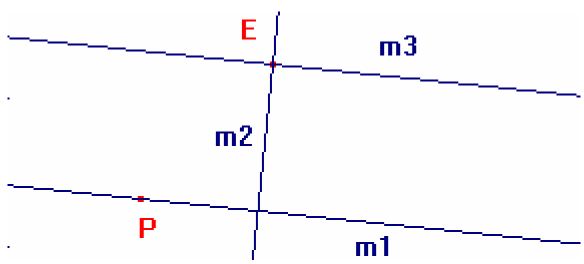
OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

A C T I V I D A D 4

Nombre:_______________________________________ Fecha:__________
Escuela:_______________________Edad____________ Semestre:_______

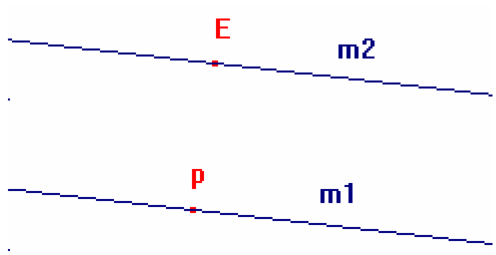
Rectas paralelas

1. Crear la recta m_1 que pase por el punto P (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Recta**).
2. Crear el punto E que no esté sobre la recta m_1 (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto**).
3. Construir una recta m_2 perpendicular a la recta m_1, que pase por el punto E (Barra de herramientas quinto botón, **Construir**; herramienta, **Recta perpendicular**).
4. Construir una recta m_3 perpendicular a la recta m_2, que pase por el punto E (Barra de herramientas quinto botón, **Construir**; herramienta, **Recta perpendicular**).
5. Al arrastrar los elementos de la construcción que sean arrastrables, (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**). ¿Qué observas?, ¿Qué relación guardan las rectas m_1 y m_3?



OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

6. Crear una recta m_1 que pase por el punto P (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Recta**).
7. Crear el punto E que no esté sobre la recta m_1 (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto**).
8. Construir una recta m_2 paralela a la recta m_1, que pase por el punto E (Barra de herramientas quinto botón, **Construir**; herramienta, **Recta paralela**).
9. Al arrastrar los elementos de la construcción que sean arrastrables, (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**). ¿Qué observas?, anótalo.



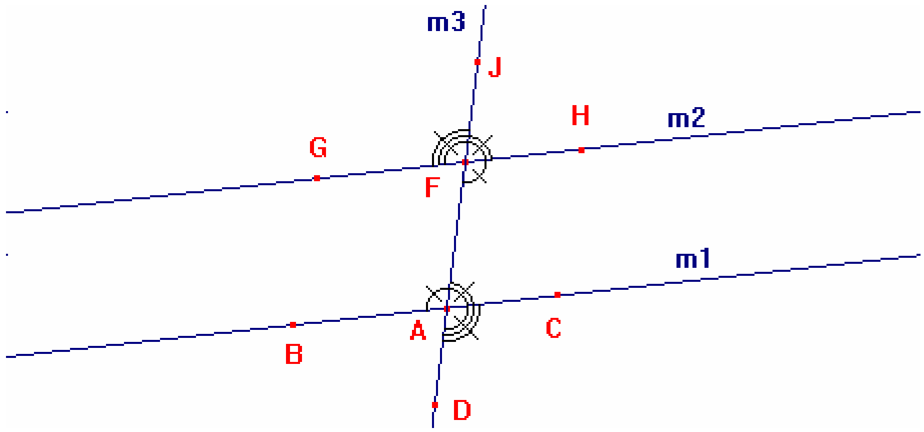
OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

A C T I V I D A D 5

Nombre:____ Fecha:___________
Escuela:________________________Edad____________ Semestre:________

Líneas paralelas cortadas por una transversal y ángulos formados

1. Crear una línea recta m_1 que pase por el punto P (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Recta**).
2. Crear el punto Q que no esté sobre la recta m_1 (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto**).
3. Construir la línea recta m_2 que pase por Q paralela a la recta m_1 (Barra de herramientas quinto botón, **Construir**; herramienta, **Recta paralela**).
4. Ocultar los puntos P y Q (Barra de herramientas último botón, **Dibujo**; herramienta, **Ocultar/mostrar**).
5. Crear los puntos A sobre la recta m_1 y F sobre la recta m_2 (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**).
6. Crear la línea m_3 que pase por los puntos A y F (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Recta**).
7. Sobre la recta m_1 crear el punto B a la izquierda de A y el punto C a la derecha de A (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**).
8. Sobre la recta m_2 crear el punto G a la izquierda de F y el punto H a la derecha de F (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**).
9. Crear el punto D sobre la recta m_3 en el lado opuesto del punto F y el punto J sobre m_3 al lado opuesto de A (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**).
10. Marcar los ángulos $\angle$HFA, $\angle$FAB, son ángulos alternos internos (Barra de herramientas décimo botón, **Ver**; herramienta, **Marca de ángulo**).
11. Medir los ángulos $\angle$HFA, $\angle$FAB (Barra de herramientas noveno botón, **Medir**; herramienta, **Ángulo**).
12. Al arrastrar los elementos de la construcción que sean arrastrables, (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**). ¿Qué observas?, anótalo.
13. Marcar los ángulos $\angle$JFH, $\angle$FAC, son ángulos correspondientes (Barra de herramientas décimo botón, **Ver**; herramienta, **Marca de ángulo**).
14. Medir los ángulos $\angle$JFH, $\angle$FAC (Barra de herramientas noveno botón, **Medir**; herramienta, **Ángulo**).
15. Al arrastrar los elementos de la construcción que son arrastrables, (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**). ¿Qué observas?, anótalo.
16. Marcar los ángulos $\angle$JFG, $\angle$DAC, son ángulos alternos externos (Barra de herramientas décimo botón, **Ver**; herramienta, **Marca de ángulo**).
17. Medir los ángulos $\angle$JFG, $\angle$DAC (Barra de herramientas noveno botón, **Medir**; herramienta, **Ángulo**).
18. Al arrastrar los elementos de la construcción que sean arrastrables, (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**). ¿Qué observas?, anótalo.



OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

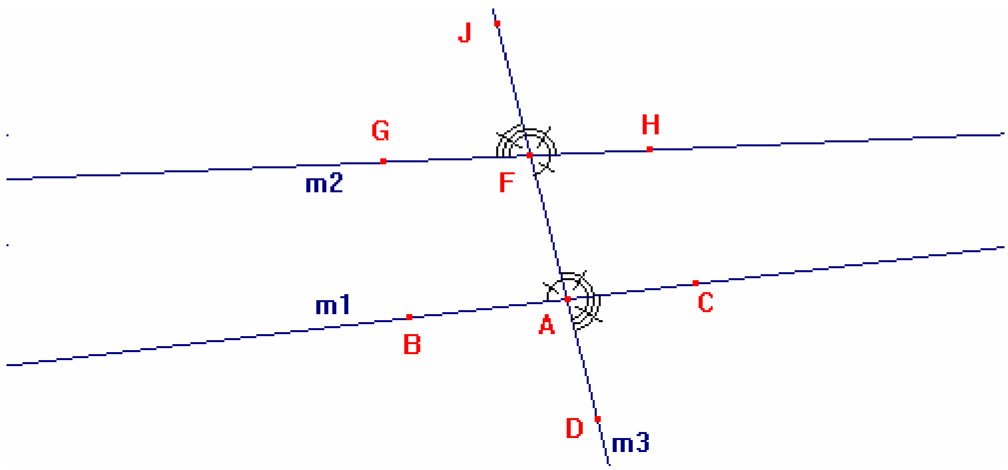
A C T I V I D A D 6

Nombre:____ Fecha:___________
Escuela:________________________Edad____________ Semestre:________

Líneas cortadas por una transversal y ángulos formados

1. Crear una línea recta m_1 que pase por el punto P (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Recta**).
2. Crear el punto Q que no esté sobre la recta m_1 (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto**).
3. Construir la línea recta m_2 que pase por Q (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto**).
4. Crear el punto R que no esté sobre la recta m_1, ni sobre la recta m_2 (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto**).
5. Construir la línea recta m_3 que pase por R y corte a las rectas m_1 y m_2 (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Recta**).
6. Ocultar los puntos P, Q y R (Barra de herramientas último botón, **Dibujo**; herramienta, **Ocultar/mostrar**).
7. Crear los puntos de intersección entre las rectas m_1 y m_3 llamarlo A, y entre las rectas m_2 y m_3 llamarlo F (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto de intersección**).
8. Sobre la recta m_1 crear el punto B a la izquierda de A y el punto C a la derecha de A (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**).
9. Sobre la recta m_2 crear el punto G a la izquierda de F y el punto H a la derecha de F (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**).
10. Crear el punto D sobre la recta m_3 en el lado opuesto del punto F y el punto J sobre m_3 al lado opuesto de A (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**).
11. Marcar los ángulos $\angle$HFA, $\angle$FAB, son ángulos alternos internos (Barra de herramientas décimo botón, **Ver**; herramienta, **Marca de ángulo**).
12. Medir los ángulos $\angle$HFA, $\angle$FAB (Barra de herramientas noveno botón, **Medir**; herramienta, **Ángulo**).
13. Al arrastrar los elementos de la construcción que sean arrastrables, (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**). ¿Qué observas?, anótalo.
14. Marcar los ángulos $\angle$JFH, $\angle$FAC, son ángulos correspondientes (Barra de herramientas décimo botón, **Ver**; herramienta, **Marca de ángulo**).
15. Medir los ángulos $\angle$JFH, $\angle$FAC (Barra de herramientas noveno botón, **Medir**; herramienta, **Ángulo**).
16. Al arrastrar los elementos de la construcción que sean arrastrables, (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**). ¿Qué observas?, anótalo.
17. Marcar los ángulos $\angle$JFG, $\angle$DAC, son ángulos alternos externos (Barra de herramientas décimo botón, **Ver**; herramienta, **Marca de ángulo**).
18. Medir los ángulos $\angle$JFG, $\angle$DAC (Barra de herramientas noveno botón, **Medir**; herramienta, **Ángulo**).

19. Al arrastrar los elementos de la construcción que son arrastrables, (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**). ¿Qué observas?, anótalo.



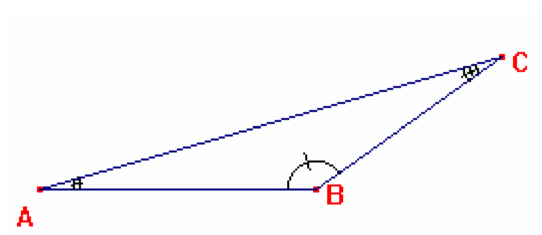
OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

A C T I V I D A D 7

Nombre:____ Fecha:___________
Escuela:________________________Edad____________ Semestre:________

Suma de ángulos interiores de un triángulo

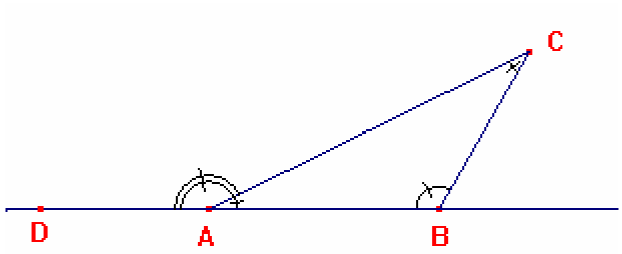
1. Construir el triángulo ∆ABC (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Triángulo**).
2. Marcar los ángulos ∠ABC, ∠BCA, y ∠CAB (Barra de herramientas décimo botón, **Ver**; herramienta, **Marca de ángulo**).
3. Medir los ángulos ∠ABC, ∠BCA, y ∠CAB (Barra de herramientas noveno botón, **Medir**; herramienta, **Ángulo**).
4. Calcular la suma de los ángulos ∠ABC + ∠BCA + ∠CAB (Barra de herramientas noveno botón, **Medir**; herramienta, **Calcular**).
5. Al arrastrar los elementos de la construcción que sean arrastrables, (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**). ¿Qué observas?, anótalo.



OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

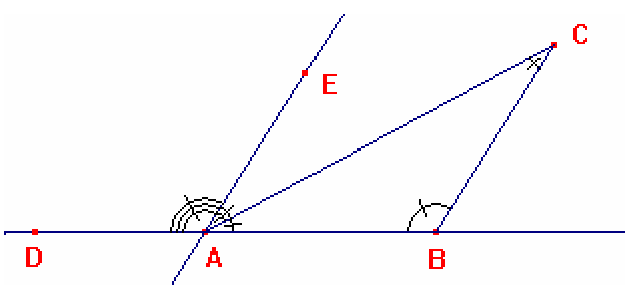
1. En el triángulo ∆ABC, crear la recta AB (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Recta**).
2. Crear el punto D sobre la recta AB, a un lado del punto A, al lado opuesto de B (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**).
3. Marcar el ángulo ∠DAC (Barra de herramientas décimo botón, **Ver**; herramienta, **Marca de ángulo**).
4. Medir el ángulo ∠DAC (Barra de herramientas noveno botón, **Medir**; herramienta, **Ángulo**).

5. Al arrastrar los elementos de la construcción que sean arrastrables, (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**). ¿Qué observas?, anótalo.



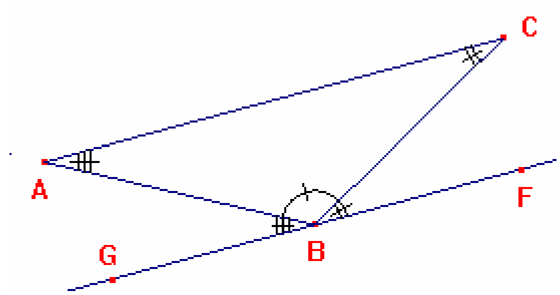
OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

1. En el triángulo ∆ABC, crear una recta paralela al segmento BC, que pase por el punto A (Barra de herramientas quinto botón, **Construir**; herramienta, **Recta paralela**).
2. Crear el punto E sobre la recta paralela en el interior del ángulo ∠DAC (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**).
3. Marcar los ángulos ∠EAD y ∠EAC (Barra de herramientas décimo botón, **Ver**; herramienta, **Marca de ángulo**).
4. Medir los ángulos ∠EAD y ∠EAC (Barra de herramientas noveno botón, **Medir**; herramienta, **Ángulo**).
5. Al arrastrar los elementos de la construcción que sean arrastrables, (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**). ¿Qué observas?, anótalo.



OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

1. En el triángulo ∆ABC, construir una recta paralela a AC que pase por B (Barra de herramientas quinto botón, **Construir**; herramienta, **Recta paralela**).
2. Crear el punto F sobre la paralela a la derecha de B y el punto G a la izquierda de B (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**).
3. Marcar los ángulos ∠GBA y ∠FBC (Barra de herramientas décimo botón, **Ver**; herramienta, **Marca de ángulo**).
4. Medir los ángulos ∠GBA y ∠FBC (Barra de herramientas noveno botón, **Medir**; herramienta, **Ángulo**).
5. Al arrastrar los elementos de la construcción que sean arrastrables, (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**). ¿Qué observas?, anótalo.



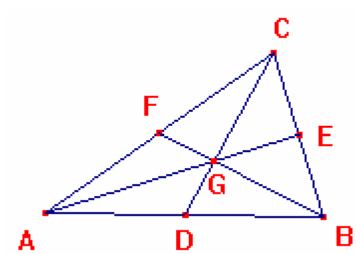
OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

A C T I V I D A D 8

Nombre:____ Fecha:__________
Escuela:________________________Edad____________ Semestre:________

Rectas notables en el triángulo. Medianas y centroide

1. Construir el triángulo ΔABC (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Triángulo**).
2. Definir los puntos medios de los lados del triángulo ΔABC, D punto medio del segmento AB, E punto medio del segmento BC , y F punto medio del segmento CA (Barra de herramientas quinto botón, **Construir**; herramienta, **Punto medio**).
3. Crear las medianas del triángulo, segmentos AE, BF, y CD (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Segmento**).
4. Crear el punto de intersección entre las medianas AE y BF, Punto G (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto de intersección**).
5. Al arrastrar los elementos de la construcción que sean arrastrables, (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**). ¿Qué observas?, anótalo.



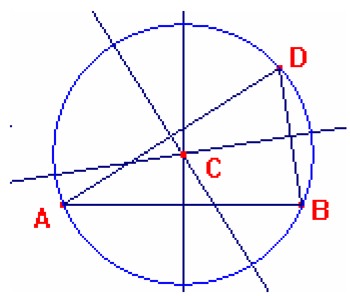
OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

6. Crear una macro que construya el centroide de un triángulo (Barra de herramientas séptimo botón, **Macro**; herramienta, **Objeto inicial, final y definir macro**).

Mediatrices de los lados del triángulo: Circuncentro

1. Construir el triángulo ΔABD (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Triángulo**).

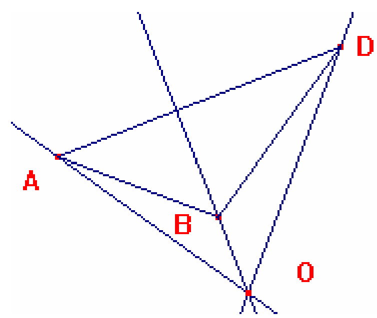
2. Construir las mediatrices de los lados del triángulo (Barra de herramientas quinto botón, **Construir**; herramienta, **Mediatriz**).
3. Encontrar el punto de intersección de las mediatrices de los lados AB y BD del triángulo ΔABD, desígnalo por C (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto de intersección**), es el llamado circuncentro.
4. Medir las distancias CA, CB, y CD. (Barra de herramientas noveno botón, **Medir**; herramienta, **Distancia y longitud**). ¿Qué observas?, anótalo.
5. Al arrastrar los elementos de la construcción que sean arrastrables, (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**). ¿Qué observas?, anótalo.
6. Construir un círculo con centro en C y radio el segmento CA (Barra de herramientas cuarto botón, **Curvas**; herramienta, **Círculo**).
7. Al arrastrar los elementos de la construcción que sean arrastrables, (Barra de herramientas primer botón, **Puntero**; herramienta, **Puntero**). ¿Qué observas?, anótalo.
8. Definir una macro que construya el circuncentro de un triángulo (Barra de herramientas séptimo botón, **Macro**; herramienta, **Objeto inicial, final y definir macro**).



OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

Alturas del triángulo y el ortocentro

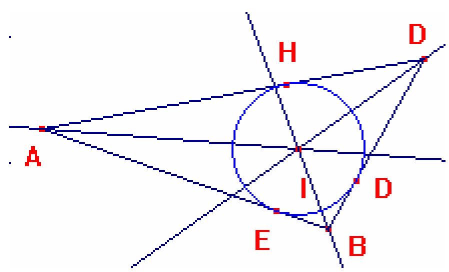
1. Construir el triángulo ∆ABD (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Triángulo**).
2. Construir, una recta perpendicular al lado AB que pase por el punto D, una perpendicular al lado BD que pase por A y una perpendicular a AD que pase por B (Barra de herramientas quinto botón, **Construir**; herramienta, **Recta perpendicular**).
3. Definir el punto de intersección de dos de las perpendiculares, punto O (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto de intersección**).
4. Arrastrar los vértices del triángulo ¿qué se observa?, anótalo.
5. La recta perpendicular al lado del triángulo que pasa por el vértice opuesto a ese lado, contiene la altura del triángulo. ¿Puedes identificar las tres alturas de un triángulo?
6. Definir una macro que construya el ortocentro del triángulo, punto de intersección de las rectas anteriores.



OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

Bisectrices del triángulo, incentro

1. Construir el triángulo ∆ABD (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Triángulo**).
2. Construir las bisectrices de los ángulos ∠DAB, ∠ABD, y ∠BDA (Barra de herramientas quinto botón, **Construir**; herramienta, **Bisectriz**).
3. Definir el punto de intersección entre dos de las bisectrices (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto de intersección**), desígnalo por I.
4. Construir las rectas perpendiculares de los lados del triángulo que pasan por I (Barra de herramientas quinto botón, **Construir**; herramienta, **Recta perpendicular**).
5. Definir las intersecciones de los lados del triángulo con sus perpendiculares, AB y su perpendicular E, BD y su perpendicular F, y DA y su perpendicular H.
6. Medir las distancias IE, IF, e IH (Barra de herramientas noveno botón, **Medir**; herramienta, **Distancia y longitud**).
7. Arrastrar los vértices del triángulo ¿qué se observa?, anótalo.
8. Construir un círculo con centro en el punto I y radio el segmento IE (Barra de herramientas cuarto botón, **Curvas**; herramienta, **Círculo**).
9. Arrastrar los vértices del triángulo ¿qué se observa?, anótalo.



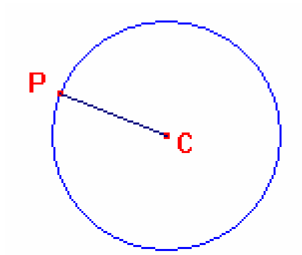
OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

A C T I V I D A D 9

Nombre:_______________________________________ Fecha:__________
Escuela:_______________________Edad____________ Semestre:_______

Círculo, radio, diámetro, cuerdas

1. Construir un círculo con centro en el punto C (Barra de herramientas cuarto botón, **Curvas**; herramienta, **Círculo**).
2. Crear el punto P sobre el círculo (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**).
3. Medir el segmento CP (Barra de herramientas noveno botón, **Medir**; herramienta, **Distancia y longitud**).
4. Arrastrar el punto P alrededor del círculo
5. ¿Qué observas?, anótalo.

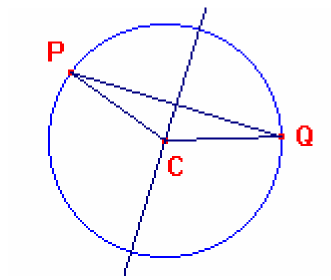


OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

6. Crear el punto Q sobre el círculo
7. Crear el segmento PQ (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Segmento**).
8. Medir la longitud del segmento PQ
9. Arrastrar el punto Q ó el punto P alrededor del círculo
10. ¿Qué observas?, anótalo.
11. Construir la mediatriz del segmento PQ (Barra de herramientas quinto botón, **Construir**; herramienta, **Mediatriz**).
12. Arrastrar el punto Q ó el punto P alrededor del círculo
13. ¿Qué observas?, anótalo.

OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

14. Construir el triángulo ∆CPQ (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Triángulo**).
15. Medir los lados del triángulo CP, PQ y QC
16. Arrastrar el punto Q ó el punto P alrededor del círculo
17. ¿Qué observas?, anótalo.



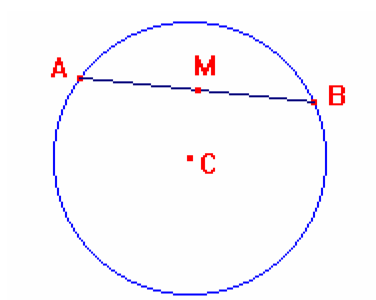
OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

A C T I V I D A D 10

Nombre:_____________________________________ Fecha:__________
Escuela:______________________Edad____________ Semestre:_______

Animación y traza de lugares geométricas

1. Construir un círculo con centro en C (Barra de herramientas cuarto botón, **Curvas**; herramienta, **Círculo**).
2. Crear los puntos A y B sobre el círculo (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto sobre objeto**).
3. Crear el segmento AB (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Semirrecta**).
4. Crear el punto medio del segmento AB, punto M (Barra de herramientas quinto botón, **Construir**; herramienta, **Punto medio**).
5. Dar animación al punto B (Barra de herramientas décimo botón, **Ver**; herramienta, **Animación**).
6. ¿Qué figura describirá M?
7. Activar Trace sobre el punto M (Barra de herramientas décimo botón, **Ver**; herramienta, **Traza activada/desactivada**).
8. Animar el punto B ¿Qué se observa?, anótalo.



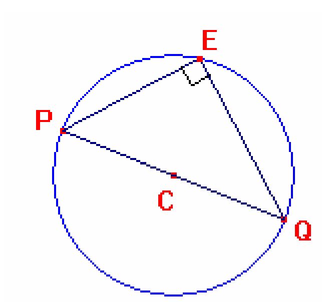
OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

A C T I V I D A D 11

Nombre:____________________________________ Fecha:_________
Escuela:_____________________Edad___________ Semestre:_______

Ángulo inscrito en un semicírculo

1. Construir un círculo con centro en el Punto C (Barra de herramientas cuarto botón, **Curvas**; herramienta, **Círculo**).
2. Crear el punto P sobre el círculo
3. Crear una semirrecta desde el punto P que pase por el punto C (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Semirrecta**).
4. Crear el punto de intersección de la semirrecta con el círculo, punto Q
5. Ocultar la semirrecta (Barra de herramientas último botón, **Dibujo**; herramienta, **Ocultar/mostrar**).
6. Crear el segmento PQ (Barra de herramientas tercer botón, **Rectas**; herramienta, **Segmento**). ¿Qué representa este segmento?, anótalo.
7. ¿Qué elementos de la construcción son arrastrables?, ¿Por qué?, anótalo.
8. Crear un punto distinto a los puntos P ó Q, sobre el círculo, punto E
9. Crear los segmentos PE y EQ
10. Arrastrar el punto E sobre el círculo, ¿qué observas?
11. Marcar el ángulo $\angle PEQ$ (Barra de herramientas décimo botón, **Ver**; herramienta, **Marca de ángulo**).
12. Medir el ángulo $\angle PEQ$ (Barra de herramientas noveno botón, **Medir**; herramienta, **Ángulo**).
13. Arrastrar el punto E sobre el círculo, ¿qué observas?, anótalo.



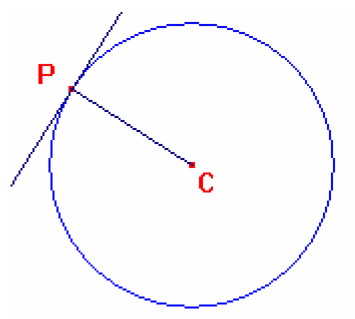
OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

A C T I V I D A D 12

Nombre:____ Fecha:__________
Escuela:________________________Edad____________ Semestre:_______

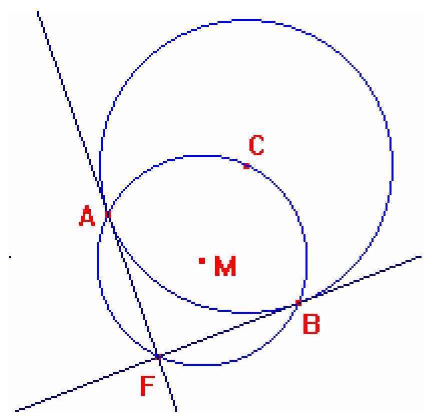
Tangentes a un círculo

1. Construir un círculo con centro en el punto C
2. Crear el punto P sobre el círculo
3. Crear el segmento CP
4. Crear la recta perpendicular al segmento CP, por el punto P (Barra de herramientas quinto botón, **Construir**; herramienta, **Recta perpendicular**), recta tangente al círculo en el punto P.
5. Arrastrar el punto P sobre el círculo. ¿Qué observas?, anótalo.



OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

1. Construir un círculo con centro en C
2. Crear un punto F fuera del círculo
3. Construir el punto medio entre los puntos C y F, punto M (Barra de herramientas quinto botón, **Construir**; herramienta, **Punto medio**).
4. Construir un círculo con centro en M y radio CM.
5. Crear las intersecciones de los dos círculos, puntos A y B (Barra de herramientas segundo botón, **Puntos**; herramienta, **Punto de intersección**).
6. Crear las rectas AF y BF
7. Al arrastrar los elementos que sean arrastrables en la construcción ¿qué se observa?, anótalo.



OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

Apéndice B

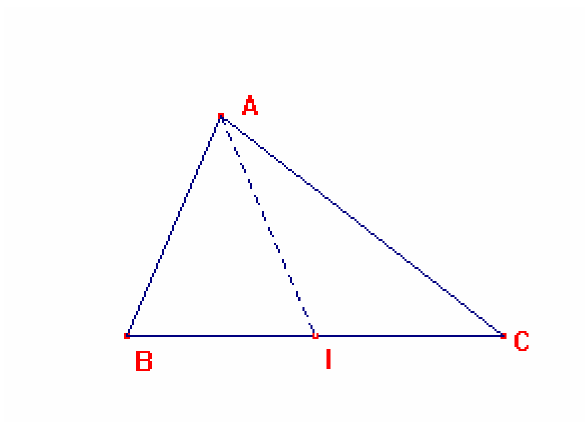
ACTIVIDADES DEL TALLER, INSTRUMENTOS DE OBSERVACIÓN

ACTIVIDAD 1

Taller de Geometría Dinámica con Cabri-Gèométre

Nombre:____ Fecha:___________
Escuela:________________________Edad____________ Semestre:________

- Trazar un triángulo, etiquetar los vértices con A, B, C.
- Marcar el punto medio del segmento BC, llamarle I
- Definir los triángulos ∆AIB y ∆ACI
- Obtener las áreas de los triángulos ∆AIB y ∆ACI
- Mover los vértices A, B, y C y observar lo que ocurre con las áreas obtenidas.



a) Formula una *conjetura*[1] sobre tu observación:
b) Prueba tu conjetura.

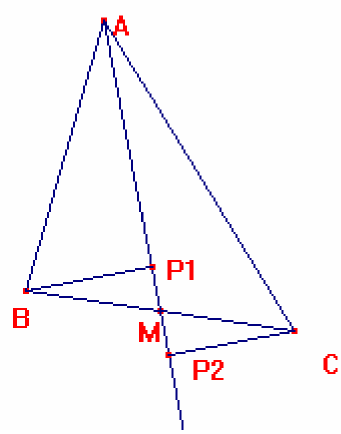
[1] Una *conjetura* es un juicio o una fuerte opinión sobre algo que se forma a partir de observaciones y experiencias. En el caso de matemáticas es una proposición que se espera que sea válida, pero que aún requiere demostración.

ACTIVIDAD 2

Taller de Geometría Dinámica con Cabri-Gèométre

Nombre:____ Fecha:___________
Escuela:_________________________Edad_____________ Semestre:________

- Traza un triángulo ∆ABC (etiqueta los vértices).
- Marca el punto medio del segmento BC (etiquétalo con M).
- Traza el rayo AM
- Traza la recta perpendicular a AM que pase por el vértice B
- Define la intersección de AM con la perpendicular anterior, etiquétala con P_1
- Traza la recta perpendicular a AM que pase por el vértice C
- Define la intersección de AM con la perpendicular anterior, etiquétala con P_2
- Oculta las rectas perpendiculares BP_1 y CP_2
- Traza los segmentos BP_1 y CP_2
- Señala las longitudes de los segmentos BP_1 y C P_2
- Arrastra los vértices A, B, C y observa lo que ocurre con las longitudes de estos segmentos.



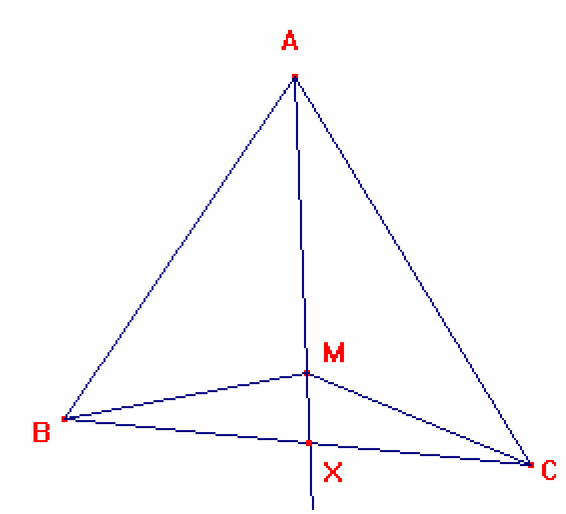
a) Formula la conjetura correspondiente a tus observaciones:
b) Prueba tu conjetura.

ACTIVIDAD 3

Taller de Geometría Dinámica con Cabri-Gèométre

Nombre:____ Fecha:___________
Escuela:_________________________Edad_____________ Semestre:________

- Trazar un triángulo, etiquetar los vértices con A, B, C y elegir un punto M al interior del triángulo; crear los triángulos ∆ABM y ∆ACM y adjuntar sus áreas; construir la semirrecta AM, nombrar con X a la intersección de AM con BC. Adjuntar las medidas de los segmentos BX y XC.
- Mover el punto M hasta lograr que las áreas de los triángulos ∆ABM y ∆ACM sean iguales o casi iguales. ¿Qué se puede decir de la posición de X?
- ¿Se pueden encontrar otras posiciones de M para las cuales las áreas son iguales? ¿Qué conjetura puedes formular para la posición de X?
- Dibujar la altura de ∆ABM desde B y la altura del ∆AMC desde C. Establecer que estas alturas son iguales.
- Demostrar que X es el punto medio de BC.



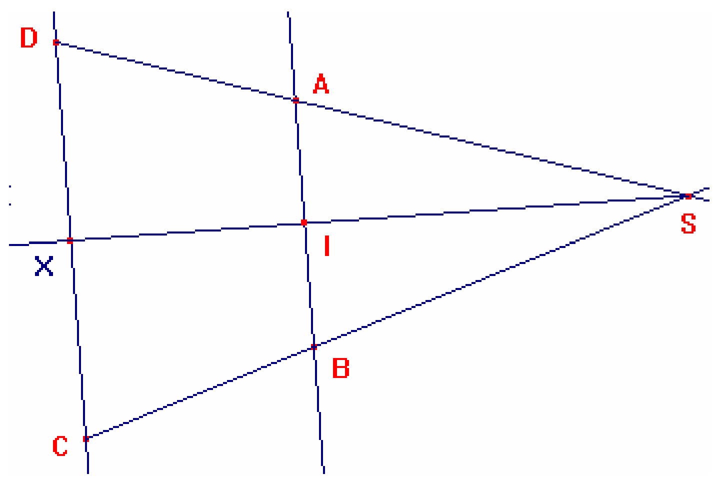
a) Formula la *conjetura* realizada en esta práctica:
b) Prueba tu conjetura.

ACTIVIDAD 4

Taller de Geometría Dinámica con Cabri-Gèométre

Nombre:_______________________________________ Fecha:__________
Escuela:_______________________Edad____________ Semestre:_______

- Construir un trapecio ABCD tal que AB || DC. Tener cuidado de que se puedan desplazar los vértices A, B, C, y D, y que el cuadrilátero ABCD siga siendo trapecio.
- Denotar con S el punto de intersección de los lados no paralelos del trapecio y con I el punto medio de AB. Llamar X a la intersección del rayo SI con el segmentos DC y medir DX y XC. Arrastrar los vértices A, B, C, y D. ¿Qué se puede conjeturar?
- Establecer, por una parte que los triángulos SIA y SIB tienen la misma área; por otra que los triángulos SXC y SXD tienen la misma área.



Formula la *conjetura* correspondiente:

A continuación redacta la prueba de dicha conjetura:

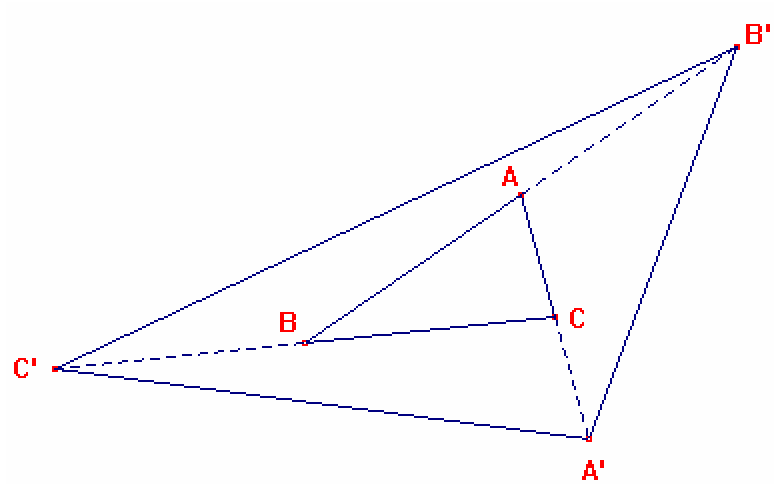
ACTIVIDAD 5

Taller de Geometría Dinámica con Cabri-Gèométre

Nombre:____ Fecha:____________
Escuela:___________________________Edad______________ Semestre:_________

Sea ΔABC un triángulo cualquiera y:
A' el simétrico de A respecto a C,
B' el simétrico de B respecto a A;
C' el simétrico de C respecto a B.

Comparar las áreas de los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$.



Formula la *conjetura* correspondiente:

A continuación redacta la prueba de dicha conjetura:

ACTIVIDAD 6

Taller de Geometría Dinámica con Cabri-Gèométre

Nombre:____ Fecha:___________
Escuela:_________________________Edad_____________ Semestre:________

Las tres medianas de un triángulo determinan un conjunto de triángulos con la misma área. Verificar este resultado en Cabri. Luego construir una prueba.