UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

IMPLEMENTACIÓN DE LA ESTIMACIÓN DEL VALOR EN RIESGO (VAR) DE LAS CARTERAS DE INVERSIÓN DE LA RESERVA INTERNACIONAL DEL BANCO DE MÉXICO EN EL SISTEMA DE REGISTRO DE OPERACIONES

REPORTE DE TRABAJO PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

ACTUARIA

P R E S E N T A

KARINA PEDRAZA ALBINO

TUTOR:

DR. GABRIEL CASILLAS OLVERA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

MÉXICO, D.F. 2007

FACULTAD DE CIENCIAS

Universidad Nacional Autónoma de México

División de Estudios Profesionales

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e .

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

"Implementación de la estimación del valor en riesgo (VaR) de las carteras de Inversión de la Reserva Internacional del Banco de México en el sistema de registro de operaciones "

realizado por **Pedraza Albino Karina,** con número de cuenta **09439297-3,** quien opta por titularse en la opción de **Trabajo Profesional** de la Licenciatura en **Actuaría**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Tutor(a) Propietario	Dr.	Gabriel Casillas Olvera
Propietario	M. en A.E.	Eduardo Campos Garza
Propietario	Act.	Gloria Roa Bejar
Suplente	M. en C.	María Antonieta Campa Rojas
Suplente	M. en F.	María Fernanda Medina Candelas

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D.F., a 12 de febrero del 2007.
EL COORDINADOR DEL COMITÉ DE TITULACIÓN DE LA LICENCIATURA EN ACTUARÍA

ACT. ROBERTO CÁNOVAS THERIOT

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

IMPLEMENTACIÓN DE LA ESTIMACIÓN DEL VALOR EN RIESGO (VAR) DE LAS CARTERAS DE INVERSIÓN DE LA RESERVA INTERNACIONAL DEL BANCO DE MÉXICO EN EL SISTEMA DE REGISTRO DE OPERACIONES

1. Datos del Alumno

Pedraza
Albino
Karina
51203486
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
094392973

2. Datos del tutor

Dr
Casillas
Olvera
Gabriel

3. Datos del sinodal 1

M. en A.E.
Eduardo
Campos
Garza

4. Datos del sinodal 2

Act.
Gloria
Roa
Bejar

5. Datos del sinodal 3

M. en C.
María Antonieta
Campa
Rojas

6. Datos del sinodal 4

M. en F.
María Fernanda
Medina
Candelas

7. Datos del trabajo escrito

Implementación de la estimación del valor en riesgo (VaR) de las carteras de Inversión de la Reserva Internacional del Banco de México en el sistema de registro de operaciones
88 p. 2007.

Dedicatoria
A Dios, por haberme permitido concluir esta meta.
A mis padres y hermano por su apoyo y amor incondicional
A mi abue, por toda su paciencia y amor.
Con mucho cariño a mis sobrinos Alvaro y Gustavo.

Agradecimientos

Este trabajo lo logré terminar con el apoyo de grandes personas, a quienes deseo expresar mi más sincero agradecimiento:

A mis padres, por todas sus enseñanzas, que guían mi transitar en esta vida.

A mi director de tesis, Gabriel Casillas por su invaluable ayuda en la realización de este trabajo, por todos sus consejos y apoyo en mi desarrollo profesional y por ser el mejor líder que he tenido.

A Antonieta Campa, por todo su valioso tiempo que dedicó para el perfeccionamiento de este trabajo.

A Fernanda Medina, por todas sus recomendaciones y conocimientos compartidos.

A Gloria Roa, por aceptar participar en este proyecto.

A mi sinodal y jefe, Eduardo Campos por su todos sus comentarios y por ser un guía en mi crecimiento profesional.

A José Ramón Rodríguez, por su gran interés y ayuda para mejorar este trabajo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por la formación académica que me otorgó.

Al Banco de México, por ser el pilar en mi desarrollo profesional.

A Chipy, por compartir esta aventura y hacerla tan amena, y por todo lo que me has enseñado.

A Ludy y Ulises, mis mejores amigos, por que siempre están cuando los he necesitado.

A Nen, por tu apoyo incondicional.

A todos mis amigos, parte importante de mi vida.

A mi familia entera por todo lo que me han dado.

Y a todos los que contribuyeron de alguna forma en la culminación de este proyecto.

¡Mil gracias!

ÍNDICE

ÍNDICE DE CUADROS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE GRÁFICAS

Prólogo

A lo largo de la historia, el pensamiento matemático ha estado siempre presente en la vida del ser humano. Éste se ha hecho patente en un sinnúmero de aplicaciones que han propiciado la solución a problemas de diversa índole, provocando la evolución filosófica, material y económica de la raza humana.

Éstas son las razones por las cuáles nació mi interés por el estudio de las Matemáticas. De hecho, recuerdo mis clases de Geometría Analítica en la Preparatoria, en donde el grado de abstracción de las ecuaciones se podía ver plasmado en una figura geométrica tangible. Asimismo, me dio la oportunidad de ver la manera en que una circunferencia –de cierta manera concreta- se puede visualizar como un conjunto de interrelaciones de conceptos abstractos, que conjuntan las actividades diarias del ser humano, con su capacidad de imaginación y creatividad. Pero lo que fue definitivo, fue la oportunidad de conjugar las diferentes herramientas matemáticas con los conceptos físicos, para dar solución a problemas de equilibrio en mis clases de Física.

La carrera de Actuaría me abrió el abanico de oportunidades para poder utilizar las herramientas matemáticas en distintas áreas de aplicación, como la estadística, los seguros, las finanzas, la economía y las ciencias computacionales, entre muchas otras.

La versatilidad de la carrera de Actuaría me permitió ingresar al área de administración de riesgos de las operaciones financieras del Banco de México, en particular, de la inversión de la Reserva Internacional.

La relevancia de la Reserva Internacional de los bancos centrales de cada país, puede propiciar -entre otras cosas-, la estabilidad económica de una nación. Lo anterior, depende directamente de la magnitud, así como de las políticas de administración de dicha reserva.

Para lograr una buena administración, es necesario contar con sistemas que permitan un buen control y monitoreo de los resultados financieros.

Actualmente se desarrollan cada vez más modelos matemáticos que son utilizados como herramientas para medir y controlar riesgos. En particular, el riesgo en que incurre una cartera de inversión al enfrentar movimientos adversos en los mercados financieros, y que podrían provocar pérdidas, que pueden ser estimadas con anticipación, mediante un modelo que se conoce como "Valor en Riesgo" (o VaR, del Inglés *Value-at-Risk)*.

En este caso, el objetivo general del presente trabajo, es explicar de manera clara y concisa la teoría matemática utilizada para obtener dichas estimaciones, así como el proceso de implementación del modelo en el sistema en donde se registran las operaciones de la Reserva Internacional del Banco de México.

El objetivo particular es presentar las premisas que provocaron la creación del VaR, mediante el conocimiento de sus fundamentos matemáticos, así como la exposición de una aplicación importante del modelo, esperando sea de utilidad en posteriores trabajos relacionados con el tema.

Introducción

La incertidumbre sobre los movimientos que se observan en los mercados financieros internacionales ha sido una de las principales preocupaciones de los administradores de activos financieros. La "Teoría de Mercados Eficientes" de Fama (1965) establece que en un mercado financiero en donde existe la misma cantidad, calidad y oportunidad de información para todos los participantes, el rendimiento de dichos activos sobre el rendimiento de una cartera diversificada, debería de ser cercana a cero, entonces, cuál es la razón por la que se debe "administrar el riesgo" de dichas inversiones. Para ofrecer una respuesta, por un lado, las nuevas teorías sobre el comportamiento de las entidades financieras (*Behavioral Finance*), iniciadas por Von-Neumann y Morgenstern (1944) y, recientemente por Kahneman (1979), enfatizan en la asimetría que se observa entre las preferencias de los individuos y de las instituciones, cuando los activos generan ganancias, respecto de cuando éstos provocan pérdidas, sobre todo, cuando dichas pérdidas son cuantiosas. Por otro lado, las quiebras de instituciones financieras importantes a nivel mundial que tuvieron lugar a finales del siglo XX –a las cuales se les hace mención a lo largo del presente trabajo-, han detonado una plétora de investigación sobre las diferentes formas de llevar a cabo una administración de riesgos responsable.

La necesidad de administrar los riesgos y de tomar decisiones en momentos en los cuales los movimientos (no necesariamente atípicos) de los mercados financieros comienzan a ocasionar cambios adversos en las carteras o bien, la simple implementación de estrategias de inversión relativo a una cartera parámetro, hacen de gran utilidad tener una herramienta que proporcione el valor de la máxima pérdida esperada de la cartera, bajo condiciones normales de mercado, en un periodo de tiempo y con un nivel de confianza estadística dados, es decir, el valor de dichas decisiones de inversión que se encuentra en riesgo.

Actualmente una gran cantidad de administradores de inversiones utilizan el Valor en Riesgo (o VaR, del Inglés *Value at Risk*) para cuantificar el riesgo de mercado. El VaR es una medida estadística que provee información sobre la pérdida en potencia en la que una cartera de inversiones puede incurrir, ante un movimiento adverso en los mercados financieros. Cabe señalar que el VaR no solo se utiliza para cuantificar el riesgo de mercado, hoy en día el VaR también es utilizado para estimar otro tipo de riesgos como el de crédito y el operativo.

Debido a los beneficios que podría representar disponer de estimaciones del VaR en cualquier momento, como por ejemplo en la toma de decisiones del área responsable de la administración de la Reserva Internacional del Banco de México, se hace necesario ofrecer una herramienta oportuna y fácil de usar para su estimación.

Actualmente, el Banco de México utiliza el sistema *RiskMetrics* para estimar el VaR. Cabe señalar que el proceso previo a la estimación del VaR en ocasiones provoca retrasos, debido a que es necesario construir archivos en formatos especiales que posteriormente tienen que ser exportados al servidor de *RiskMetrics*. Lo anterior llega a provocar demoras en la obtención de dicho resultado, lo que podría resultar perjudicial en momentos en los cuales se está tratando de llevar a cabo alguna estrategia en el mercado.

Por otra parte, el Sistema de Registro de Operaciones que utilizan los administradores de la Reserva Internacional del Banco de México, ya contiene el conjunto de divisas e instrumentos que componen las carteras, para las cuales se desea estimar el VaR, de aquí que resulta sumamente útil implementar esta estimación en dicho sistema. Adicionalmente, se puede minimizar el riesgo operativo de "traspasar" las operaciones que forman parte de las carteras de inversión de un sistema a otro. Finalmente, el costo del uso del sistema *RiskMetrics* es elevado, por lo que, adicionalmente, la substitución de esta herramienta constituye un ahorro significativo dentro del presupuesto de la dependencia en el control de los riesgos.

Debido a las razones recientemente descritas, el presente trabajo describe la implementación de la estimación del VaR de las carteras de diversificación de divisas y de instrumentos de deuda, en donde se invierte la Reserva Internacional, dentro del Sistema de Registro de Operaciones (SRO). Al respecto, cabe señalar que, en marzo de 2007, el valor de la Reserva Internacional ascendía aproximadamente a 70 mil millones de dólares.

El presente trabajo profesional se divide en dos secciones. La primera sección describe el marco teórico que fundamenta el concepto, así como la estimación del VaR. Por su parte, la sección II. lleva a cabo una exposición sobre la forma en que implementó la metodología de estimación del VaR en el SRO. Por último, se presentan las conclusiones.

I. Marco Teórico

De acuerdo a Bernstein (1998), la palabra "riesgo" proviene del latín *riscare*, que significa atreverse; en este sentido, el riesgo es más una elección que destino. El riesgo es parte inevitable de los procesos de toma de decisiones en general, así como de los procesos de inversión en particular. El beneficio que se pueda obtener por cualquier decisión o acción que se adopte debe asociarse, necesariamente, con el riesgo inherente a dicha decisión o acción. Ahora bien, en términos financieros, para de Lara Haro (2003), el concepto de riesgo se relaciona con las pérdidas potenciales que se pueden sufrir en una inversión.

"Riesgo de mercado" se define como la pérdida que puede sufrir un inversionista debido a movimientos adversos en los precios de mercado de los instrumentos donde se tienen posiciones, o bien debido a variaciones de los llamados factores de riesgo, tales como las tasas de interés, los tipos de cambio, etc. (de Lara Haro, 2003). Una definición más formal de riesgo de mercado es la posibilidad de que el valor presente neto de una cartera sufra una disminución ante cambios en las variables macroeconómicas que determinan el precio de los instrumentos que componen dicha cartera (de Lara Haro, 2003).

De acuerdo con de Lara Haro (2003), la medición efectiva y cuantitativa del riesgo se asocia con la probabilidad de una pérdida en el futuro. La esencia de la administración de riesgos, consiste en medir esa probabilidad en contextos de incertidumbre. Esta sección tiene como objetivo presentar de manera clara y concisa los requerimientos necesarios para la generación del VaR, así como las distintas metodologías que existen para su estimación.

I.1 Fundamentos de Administración de Riesgos

La "Teoría de Mercados Eficientes" (Fama, 1965), afirma que toda la información disponible concerniente al precio futuro de un activo se encuentra contenida en su precio actual.

Una implicación de esta teoría es que la variabilidad en los precios de un activo sigue el comportamiento de una "caminata aleatoria"; esto debido a que el movimiento de los precios de los activos se divide en dos partes: una tasa determinada (*drift rate*), en la cual se espera que cambie el precio del activo a lo largo de un tiempo y una tasa variable, que es un cambio aleatorio en el precio del activo, también proporcional al tiempo transcurrido. La tasa variable tiene media cero y varianza igual al parámetro σ, conocido como volatilidad. Este supuesto implica que los cambios porcentuales en los precios de los activos están distribuidos normalmente, con media igual a la *drift rate* y varianza igual a σ^2.

La hipótesis de la caminata aleatoria es ampliamente utilizada en modelos financieros y tiene varias implicaciones. Por un lado, el cambio porcentual en el precio de los activos sobre el siguiente intervalo de tiempo es independiente del cambio porcentual sobre el último intervalo y del nivel del precio del activo, razón por la cual la caminata aleatoria es algunas veces llamada serie "sin memoria". Asimismo, debido a esta "carencia de memoria" los precios de los activos tienden fluctuar cada vez mas en el tiempo, a partir de un determinado punto de partida; cabe aclara que los pasos de la caminata aleatoria no son mayores, sino que las fluctuaciones acumuladas en el tiempo crecen cada vez más. Además, los precios de los activos son continuos: se mueven en pequeños pasos, pero no en saltos. Sobre un intervalo de tiempo dado, los precios pueden fluctuar a partir de un punto de inicio, pero lo hacen moviéndose poco a poco cada día. Por último también implica que los retornos de los activos se distribuyen normalmente con una media igual a la *drift rate* y una desviación estándar igual a la volatilidad y que la distribución de los retornos es la misma en cada periodo.

Cabe señalar que el modelo Black-Scholes (1973), asume que la volatilidad de los precios puede ser diferente para cada activo, pero es constante para un activo particular. Lo anterior implica que los precios de los activos son homoscedásticos (de varianza constante). El precio de un activo sigue un movimiento Browniano que puede ser pensado como si se tuvieran oscilaciones a partir de algún punto, pero sin ninguna dirección en particular (o justo como una caminata aleatoria en donde se comprime el tiempo). El parámetro de volatilidad puede verse como un factor de escalamiento que impulsa a los precios a oscilar.

De acuerdo a la teoría de Fama (1965), la hipótesis de que la media de los retornos de los precios es cero (es decir, que en un determinado momento las pérdidas son iguales a las ganancias), implica que es inútil desarrollar una teoría sobre administración de riesgos que tenga como objetivo estimar y limitar las pérdidas.

Esta situación es fácil de entender cuando se toman en cuenta las preferencias del tenedor de los instrumentos financieros respecto a su grado de aversión a riesgo. Si el efecto de ganar o perder fuera simétrico, entonces no existiría mayor problema. Pero si pensamos en una institución, el ganar, por ejemplo, 500 millones de dólares al año sería excelente para sus estados financieros; en cambio, si la misma cantidad se perdiera, los estragos financieros serían enormes: el riesgo de incumplir con sus obligaciones aumentaría, lo cual resultaría poco atractivo para los clientes o inversionistas; más aún, si esta institución tuviera acciones cotizando en la Bolsa, con toda seguridad los precios de éstas se desplomarían en cuestión de días, mientras que las ganancias sólo provocarían aumentos graduales en los precios. Lo que sucede aquí es que el efecto que puede tener una ganancia significativa en la percepción del inversionista suele no ser el mismo cuando se registran pérdidas cuantiosas, en otras palabras, el efecto que causan las ganancias significativas no es simétrico con respecto al ocasionado por el mismo tamaño de pérdidas. De aquí la gran importancia de contar con una buena administración de riesgos que se apoye en herramientas que faciliten su control y monitoreo. En la siguiente subsección se presentan algunos casos históricos recientes que derivaron en abundantes estudios sobre la administración de riesgos.

I.2 Desastres Financieros en Ausencia de la Administración de Riesgos

La necesidad de la administración de riesgos quedó patente a raíz de varios y notorios desastres financieros acontecidos a inicios de los noventa. En cada uno de estos casos, un solo individuo o compañía subsidiaria construyó posiciones considerables, sin el conocimiento del administrador principal de la compañía.
Las compañías involucradas sufrieron pérdidas enormes cuando las condiciones de mercado cambiaron en su contra. A continuación se llevan a cabo breves descripciones de algunos casos notables en los que ocurrieron problemas financieros considerables[1].

Metallgesellschaft (MG).

Una subsidiaria americana de MG tomó posiciones muy grandes en futuros de petróleo con el objetivo de cubrirse del riesgo de aumento en el precio del energético, mediante algunos contratos adelantados a largo plazo que había vendido. La caída de los precios del petróleo en 1993 ocasionó pérdidas muy grandes, por lo que la compañía alemana dueña de esta subsidiaria intervino para liquidar las posiciones de entrega en los plazos restantes. La última pérdida fue de $1300 millones de dólares.

---

[1] Véase Jorion (2000) y Down (1998)

Orange County

Bob Citron, el Tesorero del Condado de *Orange* en California, Estados Unidos, adquirió posiciones altamente riesgosas que se tradujeron en pérdidas de mas de $1,700 millones de dólares debido al alza de la tasas de interés registrada en 1994, lo cual ocasionó la quiebra del Condado.

Barings Bank.

Nick Leeson, un inversionista del banco *Barings*, y que además trabajaba de forma independiente, tomó una serie de posiciones grandes en futuros y opciones sin autorización, ni control alguno que las monitoreara. Las cantidades involucradas excedían inmensamente el capital del banco y los movimientos adversos en estos mercados llevaron al banco a la quiebra en febrero de 1995. La última pérdida para el banco alcanzó los $1,300 millones de dólares.

Daiwa Bank.

Un único inversionista, Toshihide Iguchi ocasionó y ocultó pérdidas resultado de transacciones con bonos del tesoro por más de $1,100 millones de dólares sobre un periodo de 11 años. Las pérdidas "salieron a la luz" sólo cuando Iguchi confesó a los administradores de riesgo en julio de 1995.

Sumitomo Corporation.

En junio de 1996, *Sumitomo* anunció una pérdida de $1,800 millones de dólares. Estas pérdidas se habían acumulado durante un periodo de más de 10 años, debido a las transacciones no autorizadas de Yasuo Hamanaka, operador de contratos de cobre.

Devaluación del peso en México

En diciembre de 1994, la devaluación del peso mexicano dejó al descubierto la debilidad del sistema financiero mexicano, ya que en todas las instituciones financieras se presentaron fuertes pérdidas por riesgos de mercado y de crédito.

Enron

En 2003, esta empresa energética ocultó severas pérdidas en la información de sus estados financieros. Cuando la situación fue descubierta, ocasionó que el valor de sus acciones se desplomara en tan sólo algunos días.

En cada uno de los casos mencionados, las pérdidas fueron por más de mil millones de dólares. En algunos otros casos incluso ocasionaron la quiebra de la compañía. Existen muchos otros casos de pérdidas más pequeñas pero con causas similares. Un ejemplo de este tipo es la pérdida de 450 millones de libras esterlinas anunciada por *Deutsche Morgan Grenfell* en septiembre de 1996 que también se atribuyó a las actividades no autorizadas de un solo individuo. Se puede especular sobre muchas otras pérdidas que han ocurrido, pero que los administradores avergonzados mantienen ocultas con el fin de protegerse o prevenir escándalos públicos. Algo que resulta interesante es el tratar de saber qué tan a menudo las instituciones han estado cerca de tener pérdidas que las podrían llevar fácilmente a la quiebra y también sobre los desastres que fueron anticipados por pura suerte.

Estos desastres tenían algunas características comunes: los individuos que ocasionaron las pérdidas tenían el poder de para tomar decisiones que expusieron a las instituciones a importantes pérdidas; y sus superiores no estaban enterados de lo que sucedía. A su vez, las personas de control de riesgos estaban concientes de las debilidades en sus sistemas de administración de riesgos, pero no actuaron de forma preventiva. Estas instituciones pasaron por alto la necesidad de contar con sistemas para supervisar los límites de riesgo de las posiciones tomadas y algunos otros sistemas de control; si los hubieran tenido, estos sistemas habrían mostrado que las cifras reportadas no coincidían lo esperado, lo cual los habría hecho suponer que algo estaba mal. Estos desastres ocurrieron no sólo por las actividades de ciertas personas, sino también porque las instituciones involucradas tenían sistemas de administración de riesgos y sistemas de control interno deficientes que permitían que los individuos se involucraran con actividades que llevaron a exponer a las compañías a tales pérdidas.

I.3 Herramientas para la Estimación del VaR

Para de Lara Haro (2003), la medición efectiva y cuantitativa del riesgo se asocia con la probabilidad de una pérdida en el futuro. De ahí que la esencia de la administración de riesgos consista en medir esas probabilidades bajo diferentes contextos de incertidumbre. En la administración de riesgos y en particular para el riesgo de mercado, es fundamental conocer la forma de estimar valores de variables, tales como el rendimiento de un activo financiero, el de una cartera de inversión, la varianza de sus rendimientos (la cual se conoce como la volatilidad o riesgo del activo o de la cartera), la covarianza, etc. A continuación de presenta una revisión de los procedimientos que permiten estimar dichas variables.

I.3.1 Rendimiento

El retorno de una cartera es el promedio ponderado de los rendimientos de los activos que la constituyen, por lo que resulta útil analizar la forma en la que el VaR se relaciona con la volatilidad y las correlaciones de los rendimientos.

Los rendimientos pueden ser expresados de forma aritmética o bien, en forma geométrica. Sin embargo, de acuerdo a Down (1998), es más común utilizar lo rendimientos aritméticos (R_t^A):

$$R_t^A = \frac{(P_t + D_t - P_{t-1})}{P_{t-1}} \tag{1}$$

donde P_t es el precio del activo al final del tiempo *t*, P_{t-1} es el precio del activo al término del periodo anterior y D_t es cualquier pago intermedio, por ejemplo, el pago de un cupón o de un dividendo hecho en el periodo de tenencia *t* del instrumento. Por simplicidad se puede hacer el supuesto que $D_t = 0$, en particular cuando se desea obtener el rendimiento de activos que no pagan dividendos, como es el caso de los activos que componen la Reserva Internacional de Banco de México. Es importante señalar que al calcular los retornos mediante la ecuación (1), es posible obtener retornos menores que cero, lo cual podría hacer parecer como si los precios de los activos fueran negativos. Esta situación genera problemas cuando se modelan retornos utilizando funciones de densidad de probabilidad.

Una alternativa para solventar dicho problema es utilizar la media geométrica (R_t^G) ya que tiene dos ventajas sobre la media aritmética. Por un lado, los rendimientos pueden ajustarse a cualquier función de densidad de probabilidad, ya que los rendimientos nunca son menores que cero. Por otro lado, la media geométrica hace más fáciles los cálculos, por ejemplo la media geométrica de *n*-meses es simplemente la suma de las medias geométricas de dichos n meses.

$$R_t^G = \ln\left[\frac{P_t}{P_{t-1}}\right] \tag{2}$$

No obstante lo anterior, la diferencia entre las dos medidas de los retornos es muy pequeña siempre que los retornos sean suficientemente pequeños. Esto se debe a lo siguiente:

$$R_t^G = \ln\left[\frac{P_t}{P_{t-1}}\right] = \ln(1 + R_t^A)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1\right)$$

De cálculo diferencial, sabemos que $x \underset{six \to 0}{\approx} \ln(1+x)$

Si R_t^G es muy pequeña, se puede utilizar una aproximación con la serie de Taylor de R_t^G :

$$R_t^G = R_t^A - \frac{\left(R_t^A\right)^2}{2} + \frac{\left(R_t^A\right)^3}{3} + \ldots$$

La cual es aproximadamente R_t^A si los últimos términos son suficientemente pequeños, como es el caso cuando se utilizan periodos de tiempo pequeños, por ejemplo de un día y en situaciones normales de mercado.

Como se puede apreciar, ambos retornos son muy parecidos no obstante, como ya mencionamos antes, en la práctica es más común utilizar la media geométrica.

El rendimiento de una cartera se define como la suma de los rendimientos individuales (R_i) de los activos que la componen, ponderando con el peso que tienen dichos instrumentos dentro de ella (ω_i).

$$R_C = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i \tag{3}$$

en donde $\omega_i \in [0,1]$ y $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$

El rendimiento promedio se puede calcular como la suma de los rendimientos individuales de cada uno de los n instrumentos de la cartera, entre el número total de ellos.

$$R_{Cprom} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{n}$$

Por su parte el rendimiento anualizado se define como:

$$R_{anual} = (1+R_d)^d - 1$$

donde d es igual al número de días hábiles a considerar en un año y R_d es el rendimiento diario.

I.3.2 Varianza

La varianza (y por lo tanto la desviación estándar que es la raíz cuadrada con signo positivo de la varianza), es la medida más utilizada entre los índices absolutos de variabilidad.

Para medir la concentración de los datos que pueden ser denotados mediante x_i alrededor de la media aritmética, podría parecer suficiente determinar las desviaciones de la media aritmética, y calcular la media de estas desviaciones, sin embrago esta media sería siempre nula pues las desviaciones negativas anulan a las positivas. Para tener un índice de variabilidad se calculan entonces la media de los cuadrados de las desviaciones, la cual se define como la varianza y se denotada por σ^2[2].

[2] Si se refiere a la varianza de una población se utiliza σ, mientras que s es utilizada para denotar la varianza de una muestra.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

donde $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Para que la varianza sea comparable con la media aritmética, en cuanto a unidades de medida de los datos, es decir que para que ambas medidas tengan la misma dimensión, conviene utilizar la raíz cuadrada (con signo positivo) de la varianza, la cual se conoce como desviación estándar y se indica como σ.

I.3.3 Covarianza y correlación

La covarianza es una medida de relación lineal entre dos variables aleatorias y nos indica si existe algún tipo de relación entre ambas. Consideremos por ejemplo como variables a los rendimientos del activo i y j, los cuales suponemos, forman parte de una cartera.

La covarianza entre los rendimientos de los activos i y j se calcula de la siguiente manera:

$$Cov(R_i, R_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [R_i - \mu_i][R_j - \mu_j]$$

En donde μ_i y μ_j representan la media de los retornos de los activos i y j respectivamente.

Correlación

Debido a la dificultad para interpretar la magnitud de la varianza, en la práctica es más común utilizar la correlación para medir el movimiento conjunto entre dos variables, ya que no sólo indica si existe alguna relación entre las variables si no que, explica el tipo de relación existente entre ambas. Cabe mencionar que los valores de la correlación se encuentran dentro del intervalo [-1,1]. El signo indica la dirección en la que se mueven las variables –si es positivo, indica que las dos variables se mueven en la misma dirección; por el contrario, si es negativo indica que las variables se mueven en sentidos opuestos. Por otra parte, mientras más cercano sea su valor a 1 indicará una mayor dependencia mutua entre ellas. La covarianza se puede estimar mediante la siguiente expresión.

$$Corr(R_i, R_j) = \rho_{ij} = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j} \tag{4}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)^2 \sum_{i=1}^{n} (y_j - \mu_y)^2}}$$

donde:

ρ_{ij} es la correlación entre los activos i y j.

σ_i la desviación estándar del activo i.

σ_j la desviación estándar del activo j.

I.3.4 Volatilidad

La volatilidad se define como la desviación estándar de los rendimientos de un activo o de una cartera. Es uno de los indicadores de riesgo más significativos, de ahí que existe un gran acervo académico y práctico sobre este tema así como diferentes modelos para su pronóstico, además de ser una de las ramas de las finanzas más exploradas en los últimos años.

En el riesgo de mercado, es fundamental su estimación ya que representa la medida de dispersión de los rendimientos con respecto al promedio de los mismos en un periodo de tiempo determinado. Esto puede pensarse como que los rendimientos se sitúan alrededor de un punto y poco a poco se van dispersando hacia las colas de una distribución normal.

De ahí que la volatilidad es una variable de suma importancia en el cálculo del VaR de una cartera de activos.

Por lo general, la media y la desviación estándar, se expresan en términos anuales aún cuando el periodo analizado es diferente. La siguiente ecuación muestra la forma de anualizar la volatilidad cuando contamos con volatilidades diarias.

$$Volatilidad = \sigma_{diaria} x \sqrt{\frac{1}{n}}$$

Donde n es el número de años que contiene cada variación de precios, por ejemplo, si la variación de precios es diaria, n será 1/252, por lo que la volatilidad se expresa como sigue:

$$Volatilidad = \sigma_{diaria} x \sqrt{252}$$

Es importante notar que la volatilidad de rendimientos de precios es diferente de la volatilidad de las tasas de interés. La siguiente ecuación es útil para transformar la volatilidad de las tasas de interés (σ_r) a la volatilidad de precios (σ_p):

$$\sigma_p = \frac{\Delta P}{\Delta r} \text{ x } r \text{ x } \sigma_r$$

donde $\frac{\Delta P}{\Delta r}$ es la variación en el precio de un bono cuando cambian las tasas de interés

r es la tasa de interés

σ_r es la volatilidad o desviación estándar de las tasas de interés

σ_p es la volatilidad o desviación estándar de las tasas de los precios

A continuación se explican los modelos que comúnmente se utilizan para estimar la volatilidad.

a) Volatilidad histórica

b) Volatilidad dinámica o con suavizamiento exponencial

c) Volatilidad implícita

d) Los modelos ARCH y GARCH

A continuación se describen cada uno de estos.

I.3.4.1 Volatilidad Histórica

En este método se basa en las observaciones históricas, es decir, hace énfasis en el pasado, donde todas las observaciones tienen el mismo peso específico con respecto al valor total de la cartera de la cual se desearía estimar su volatilidad, esta metodología.

Para el cálculo de la volatilidad histórica se hace uso de la desviación estándar muestral:

$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n-1}}$ donde s representa la desviación estándar, $\overline{X}$ la media de la muestra y x_i el retorno en el periodo i.

Debido a la teoría de mercados eficientes (Fama, 1965), se asume que $\overline{X} = 0$, por lo que se considera únicamente el cuadrado de los rendimientos, por lo que el cálculo de la volatilidad histórica es la siguiente:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i)^2}{n}}$$

Con este método, las covarianzas se estiman como sigue:

$$\sigma_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_{1,i} r_{2,i}}{n}$$

Para la estimación tanto de la volatilidad como de las correlaciones, el Banco Internacional de Pagos (*Bank for International Settlements*, BIS) recomienda utilizar un horizonte de 250 días hábiles de operación, equivalentes a un año calendario.

El hecho de que este método asigne las misma ponderación a todas las observaciones en la serie de tiempo, ha motivado a los analistas a aplicar otros métodos, como el suavizamiento exponencial o el GARCH, en los cuales a las observaciones más recientes se les asigna una mayor ponderación que a las observaciones más lejanas ya que no sólo toma en cuenta la información histórica si no que incorpora la nueva información, hecho que permite anticipar con mayor rapidez un cambio drástico en el comportamiento de los retornos, por lo cual podemos decir que tiene un mejor "poder de predicción". Este tipo de métodos se explican a detalle en la siguiente sección.

I.3.4.2 Volatilidad Dinámica o con Suavizamiento Exponencial

Una de las principales aportaciones de la metodología clásica presentada en *RiskMetrics Classic*, es un modelo que actualiza la volatilidad estimada de los retornos con base en las nuevas observaciones. La metodología se conoce también como Promedio Móvil Ponderado Exponencialmente (*Exponentially Weighted Moving Average,* EWMA).

El modelo EWMA asigna a las observaciones más recientes un peso mayor que a las más alejadas en el tiempo. Debido a que se asigna una mayor ponderación a las observaciones más recientes, este método captura el dinamismo de la volatilidad en los mercados mediante el uso del suavizamiento exponencial de las observaciones históricas, particularidad que incorpora inmediatamente el efecto de variaciones importantes en los precios del mercado, por los cual es posible generar mejores pronósticos en épocas de alta volatilidad.

Partiendo del supuesto de que la media de los rendimientos es igual a cero, (este supuesto se explica en el tema de Caminata Aleatoria Geométrica de esta sección) y tal como se señaló antes, la volatilidad histórica es:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} r_{t-i}^2$$

Asignamos al cuadrado de los rendimientos una ponderación ω_i dentro de la cartera de la que se supone pertenecen cada uno de los rendimientos r_i

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^{T} \omega_i r_{t-i}^2$$

donde $\omega_i = \lambda^{i-1}(1-\lambda)$, con 0< λ <1, entonces tendremos la siguiente expresión:

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{T} \lambda^{i-1} r_{t-i}^2$$

donde λ se define como factor de decaimiento (*decay factor*) o factor de ponderación. En la práctica λ es una constante que determina el grado de "suavidad" de la serie.

Este modelo puede ser escrito con recursividad (volatilidad recursiva) de la siguiente manera:

$$\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)r_t^2$$

Es fácil ver que mientras más pequeño es el valor de λ, menor es la ponderación a los valores mas recientes. Cuando el valor de λ es cero, el modelo se reduce a la volatilidad histórica, con la misma ponderación para todas las observaciones.

La ecuación anterior puede escribirse de forma matricial como sigue:

$$\sigma = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^{T+1}}\sum_{i=0}^{m} \lambda^i r_{t-i}^2 = R^{'}R$$

Donde $R = \sqrt{\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{T+1}}} \begin{pmatrix} r_t \\ \sqrt{\lambda} r_{t-1} \\ . \\ . \\ \sqrt{\lambda^T} r_{t-T} \end{pmatrix}$

Es importante mencionar que el número de observaciones que se necesitan, dependen del valor que se asigne a λ. Esto es, el valor obtenido de la relación $\log(0.001)/\log(\lambda)$ nos proporciona el número de observaciones necesarias, por ejemplo si $\lambda = .94$, necesitaremos tener una serie de 112 datos históricos u observaciones.

En una investigación sobre este tema realizada por *RiskMetrics Classic* se concluye que en promedio, $\lambda = 0.94$ produce una buena predicción para la volatilidad de un día, mientras que $\lambda = 0.97$ resulta una buena estimación para un mes de volatilidad.

I.3.4.2.1 Modelo EWMA Multivariado

Supongamos ahora que tenemos *n* factores de riesgo. La generación de los retornos para cada factor de riesgo puede escribirse como sigue:

$$\frac{dP_t^{(i)}}{P_t^{(i)}} = \mu_i dt + \sigma_i dW_t^i \quad \text{para} \quad i = 1,\ldots,n$$

donde la $Var(dW^{(i)}) = dt$, $Cov\left[dW^{(i)}, dW^{(j)}\right] = \rho_{i,j} dt$ y $\rho_{i,j}$ es la correlación entre los retornos de los activos i y j, con $i \neq j$.

Para cada activo, los retornos a partir del tiempo *t* hasta el tiempo *t*+*T*, pueden estimarse como sigue:

$$r_{t,T}^{(i)} = (\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2)(T-t) + \sigma_i \varepsilon_i \sqrt{T-t}$$

o bien $r_{t,T}^{(i)} = \sigma_i \varepsilon_i \sqrt{T-t}$

donde $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ y $Cov\left[\varepsilon_i, \varepsilon_j\right] = \rho_{i,j}$

Vemos que la única variable que necesitamos estimar es σ_i, en el modelo multivariado esta variable se representa mediante la matriz de covarianzas de Txn denotada por Σ, en donde cada entrada representa la covarianza entre cada par de activos y es igual al producto de sus respectivas volatilidades por sus correlaciones.

La covarianza entre el activo i y el activo j puede escribirse de la siguiente forma:

$$\sum_{i,j} = \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^{T+1}} \sum_{k=0}^{T} \lambda^k r_{t-k}^i r_{t-k}^j$$

De forma análoga que para un solo activo, la matriz Σ también puede escribirse como sigue:

$$\sum = R^{'} R$$

donde ahora R es una matriz de tamaño Txn, la cual contiene en cada vector a los retornos ponderados de cada factor de riesgo:

$$R = \sqrt{\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{T+1}}} \begin{pmatrix} r_t^{(1)} & r_t^{(2)} & \dots & r_t^{(n)} \\ \sqrt{\lambda} r_{t-1}^{(1)} & \sqrt{\lambda} r_{t-1}^{(2)} & \dots & \sqrt{\lambda} r_{t-1}^{(n)} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \sqrt{\lambda^T} r_{t-T}^{(1)} & \sqrt{\lambda^T} r_{t-T}^{(2)} & \dots & \sqrt{\lambda^T} r_{t-T}^{(n)} \end{pmatrix}$$

I.3.4.3 Volatilidad Implícita

La volatilidad implícita trata de estimar la volatilidad del mercado de opciones, en este modelo las observaciones históricas no son utilizadas. La manera de estimarla es tomando el precio de la prima de las opciones en el mercado y sustituyendo este valor en la ecuación de Black-Scholes (1973) o de algún otro modelo de valuación de opciones por ejemplo, el de árboles binomiales. La volatilidad en cada modelo se estima mediante métodos numéricos. Es importante destacar que la volatilidad implícita no es única ya que depende del precio que el *mark-to-market* pone a las opciones, del precio de ejercicio y del tipo de opción (*put* o *call*). Adicionalmente, uno de los principales problemas que se pueden presentar con este tipo de volatilidades es que el mercado de opciones del subyacente no tenga suficiente liquidez (de hecho no todos los subyacentes tiene contratos de opciones) y, por lo tanto son muy pocos los casos en donde se puede calcular la volatilidad implícita.

I.3.4.4 Series de Tiempo para Modelar Volatilidad

En el estudio de las series de tiempo es fundamental identificar tendencias -entendidas como cambios en la media en periodos largos-, efectos estacionales o periodicidades, fluctuaciones irregulares (que se miden como los cambios en la varianza), fluctuaciones puramente aleatorias y efectos cíclicos, que son los cambios fácilmente predecibles.

Una serie de tiempo puede ser desagregada en sus componentes principales por ejemplo con la descomposición aditiva (Lore and Borodovsky, 2000):

$$x_t = T_t + S_t + I_t$$

donde las partes de la serie son respectivamente una tendencia T, un comportamiento periódico S y una parte irregular I. Por ejemplo, podemos tener una serie de tiempo con tres elementos, cada uno con su ecuación:

$T_t = 1 + 0.1t$ tendencia

$S_t = 1.6sen\left(\frac{t\pi}{2}\right)$ componente periódico o cíclico

$I_t = 0.7I_{t-1} + \varepsilon_t$ componente irregular donde ε_t es una variable aleatoria

Para modelar series de tiempo econométricas (con un comportamiento estocástico) es necesario que éstas tengan un comportamiento estacionario, es decir, que la media no dependa del tiempo, que sea constante. Esto implica que, aunque durante un periodo de tiempo el proceso se aleje de la media, éste siempre regresará a la vecindad de la misma; de aquí que sea necesario remover o quitar los efectos de tendencias, periodicidades y ciclos, para trabajar con una serie estocástica y estacionaria.

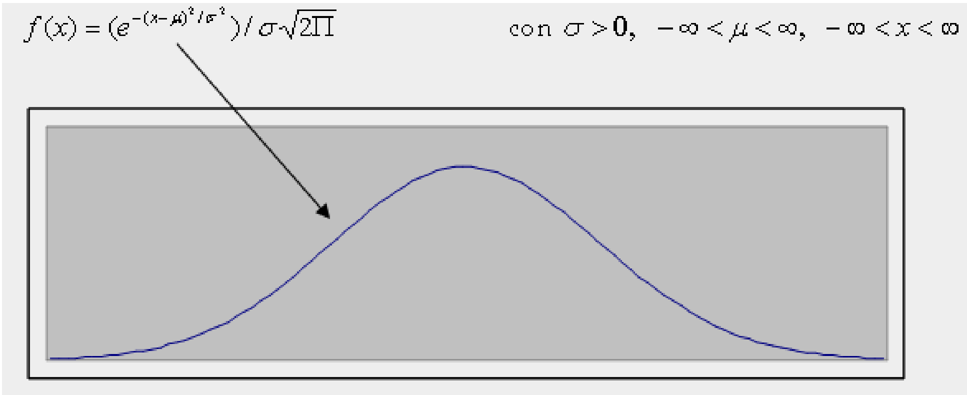
Por otra parte, al estudiar series de tiempo a menudo se encuentra el problema de heteroscedasticidad, es decir que la varianza de la serie no es constante en el tiempo. Por ejemplo, en variables financieras y/o económicas es frecuente observar periodos de volatilidad estable y periodos de alta volatilidad. En estos casos es difícil filtrar los datos para lograr convertir la serie original en una serie homoscedástica (varianza constante). Una alternativa en esta situación es aplicar un modelo ARCH, el cual fue propuesto por Engle (1982)[3] o el modelo GARCH, propuesto por Bollerslev (1986). Para entender este modelo es útil remontarnos a los modelos autorregresivos (AR), a los de promedios móviles (MA) y a los llamados ARMA que son una combinación de los dos anteriores.

---

[3] Para consultar este modelo con mayor detalle, ver el artículo de Bera y Higgins (1993).

I.4 Distribución Normal

La distribución normal juega un papel importante en el campo de la estadística y en la medición de riesgos en finanzas. Los parámetros más importantes son la media μ y la desviación estándar σ.La distribución de probabilidad normal para una variable aleatoria continua se puede representar como un histograma de frecuencias basado en un número grande de observaciones. A continuación se muestra la ecuación de la distribución normal.

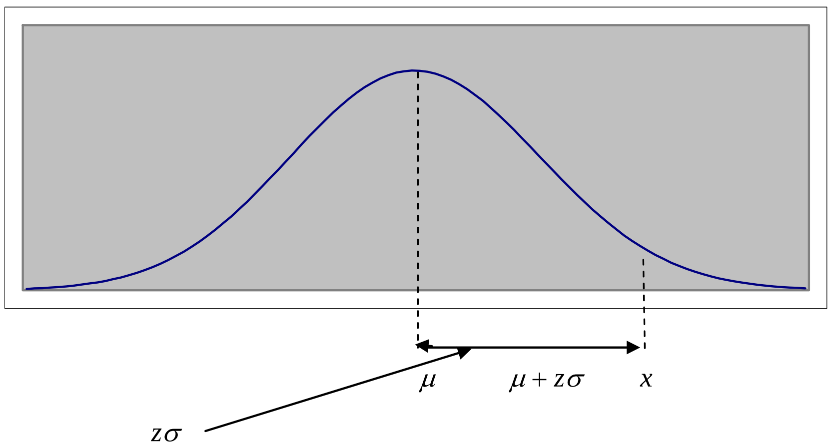


La curva de distribución normal está centrada alrededor de la media y la variación o dispersión se expresa en unidades de la desviación estándar por ejemplo $\mu + 2\sigma$.

En una cartera, la media de los rendimientos es simplemente el rendimiento promedio, y a la desviación estándar se le define como la volatilidad.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \mu)}{(n-1)}}$$

Sabemos también que la función de densidad normal es simétrica con respecto a la media. Es por esto que sólo se necesita tabular los valores del área de un lado de la media para obtener todas las probabilidades asociadas a una distribución normal. Las áreas tabuladas son áreas a la derecha o a la izquierda de valores de z, en donde z es la distancia de un valor x respecto a la media, expresada en unidades de desviación estándar



Se puede expresar a x como sigue:

$x = \mu + z\sigma$

despejando, se tiene que $$z = \frac{(x - \mu)}{\sigma}$$

Si tenemos algún factor de riesgo expresado como x, por ejemplo, tasas de interés, tipos de cambio, precios de acciones, etc. y suponemos que se distribuyen de forma normal, entonces siempre se puede transformar dicha variable en otra variable aleatoria z con distribución normal estandarizada como acabamos de mostrar.

Debido a que cada z localiza a un punto, medido a partir de la media de una variable aleatoria normal, con la distancia expresada en unidades de la desviación estándar de la variable aleatoria original, el valor medio de Z tiene que ser 0 y la varianza 1. A Z se le conoce como la variable aleatoria normal estándar y tiene una distribución normal estándar N(0,1).

Otras características importantes de la curva normal son también el sesgo y la kurtosis. La primera mide la simetría de la curva con respecto a la media: si el sesgo es diferente de cero la curva estará sesgada hacia la izquierda o hacia la derecha, según el signo del sesgo. La segunda mide la altura de la curva respecto a su punto más elevado. En una curva normal la kurtosis tirar un valor igual a 3. A continuación se muestran las ecuaciones para calcular estos valores:

$$Sesgo = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^3}{(n-1)\sigma^3} \qquad Kurtosis = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^4}{(n-1)\sigma^4}$$

Existen varias pruebas para saber si una distribución de frecuencias se comporta de acuerdo a una distribución normal. La más sencilla es la de Jaque-Bera (1980 y 1987), que consiste en calcular el estadístico de prueba LM siguiente:

$$LM = N\left[\frac{Sesgo^2}{6} + \frac{(Kurtosis - 3)^2}{24}\right]$$

Para una variable aleatoria normal, LM se distribuye de acuerdo con una curva ji-cuadrada con dos grados de libertad, por lo que es necesario realizar una prueba de hipótesis. En donde la hipótesis nula (hipótesis de interés) afirma que la curva es normal con un nivel de confianza α y la hipótesis alternativa es que dicha curva no es normal, la prueba indica si se acepta o rechaza la hipótesis nula con un nivel de confianza de α.

Por otro lado vale la pena recordar que la media y la desviación estándar o volatilidad de un periodo, pueden ser transformadas a otro periodo. Por ejemplo, si tenemos la media y la volatilidad diaria, es posible determinar los parámetros anuales mediante las siguientes expresiones:

$\mu_{anual} = (\mu_{diaria})(t)$, $\sigma_{anual} = (\sigma_{diaria})(\sqrt{t})$ donde t representa el número de días en un año.

Como se observa, los ajustes en la volatilidad a diferentes horizontes de tiempo deben realizarse con la raíz cuadrada del período y por tanto, la volatilidad es una función no lineal del tiempo.

I.5 Valor-en-Riesgo VaR (por sus siglas en inglés Value-at-Risk)

A finales de los 1970´s y principios de los 1980´s, varias instituciones financieras especializadas empezaron a trabajar en modelos para medir riesgos de forma agregada para una institución en conjunto. Incursionaron en el diseño de modelos no sólo para mejorar su propia administración de riesgos interna, sino también para apoyar sus negocios de consultoría de administración y finalmente, para venderlos a sus clientes -otras instituciones financieras– quienes buscaban usar modelos de este tipo pero no estaban en condiciones para desarrollarlos por ellos mismos.

El sistema de administración de riesgos más conocido es el sistema de *RiskMetrics*[4] desarrollado por *JP Morgan*. Se dice que este sistema se originó cuando el presidente de JP Morgan, Dennis Weatherstone, le pidió a su personal entregar a diario un informe de una página que indicara el riesgo y las pérdidas potenciales durante las próximas 24 horas para la cartera comercial completa del banco. Este informe, el famoso "4.15 report", era entregado todos los días a las 4:15, después del cierre de operaciones. Para obtener este reporte, el personal de *JP Morgan* tenía que desarrollar un sistema para medir los riesgos de las diferentes posiciones, para la institución entera, para después agregar estos riesgos en una sola medida de riesgo. La medida usada era el valor en el riesgo. Esta medida se derivó de un sistema basado en la teoría de portafolios estándar, usando estimaciones de las desviaciones normales así como varias correlaciones entre los ingresos de los diferentes instrumentos negociados. Aunque la teoría era bastante clara, poco a poco se construía un sistema

---

[4] El documento técnico de *RiskMetrics* puede ser consultado gratuitamente en la siguiente página de Internet www.riskmetrics.com

operacional que iba involucrando una enorme cantidad de trabajo, se construyeron bases de datos y se adoptaron diferentes suposiciones estadísticas, paralelamente se desarrollaban sistemas computacionales que llevaran a cabo las estimaciones.

Otras instituciones financieras estaban trabajando paralelamente en sus propios modelos internos y generando una competencia considerable para establecer un sistema que presuntamente se convirtiera en una norma para la industria. Por otro lado, algunas compañías especializadas también desarrollaron programas para estimar el VaR. Estas se concentraron en los problemas del *software*, pero no estaban en condiciones para proporcionar los datos.

Finalmente, los sistemas resultantes difirieron bastante unos de otros; incluso cuando estaban basados en ideas teóricas ampliamente similares, había todavía diferencias considerables por lo que se refiere a los acuerdos sobre las suposiciones estadísticas para estimar las volatilidades, correlaciones, y muchos otros detalles. Aún más, no todos los sistemas de VaR estaban basados en la teoría de portafolios. También se construyeron sistemas de VaR usando un método de simulación histórica, que estimaba el VaR a partir de un histograma de los datos de ganancias y pérdidas del pasado. Estos sistemas de simulación histórica eran considerablemente más fáciles de desarrollar y usar, no obstante tenían sus propias limitaciones. Los sistemas más sofisticados se desarrollaron usando el método de Monte Carlo (presentado en capítulos posteriores), y otras técnicas de simulación. Estos sistemas eran sumamente poderosos y lograron en teoría dar mejores resultados que los sistemas basados en teoría de portafolios o simulación histórica; pero también eran más costosos de desarrollar y más difíciles operar.

JP Morgan tuvo éxito sobre sus rivales en octubre de 1994 al poner al alcance del público su sistema de *RiskMetrics*, colocando los datos necesarios en Internet para la estimación del VaR. Esta situación animó a muchos de los proveedores del software más pequeño a adoptar el *RiskMetrics*, y a hacer sus propios sistemas compatibles con él.

El debate público resultante sobre los méritos de *RiskMetrics*, también fue útil para aumentar el crecimiento sobre el uso del VaR y desde luego, también llevó a mejorar los propios métodos de *RiskMetrics*.

La adopción del sistema de VaR fue muy rápida, no sólo entre las emisoras de instrumentos y en los bancos de inversión, sino también en los bancos comerciales, los fondos de pensiones y otras instituciones financieras y también en corporaciones no financieras.

Actualmente los sistemas de VaR están mejorando y su cobertura está extendiéndose a más instrumentos; quienes los desarrollan y los usan se están volviendo más experimentados. El desarrollo del software significa que los sistemas también se están haciendo más poderosos y mucho más rápidos y capaces de realizar tareas que anteriormente no eran factibles; asimismo la propia metodología de VaR está extendiéndose para tratar con otros riesgos además de los riesgos de mercado para los cuales originalmente se desarrolló el sistema de VaR. Estos otros riesgos incluyen los riesgos del crédito y los riegos de liquidez (los flujos de efectivo, lo cual ocasiona gran preocupación a las compañías no financieras). De hecho, así como los sistemas de VaR continúan creciendo y mejorando, el énfasis ya está cambiando fuera de los sistemas de VaR para tratar los nuevos desafíos planteados por el riesgo de crédito, el de liquidez y otros riesgos y más aún el difícil problema de administrar estos riesgos de una manera eficaz e integra. La meta para muchas empresas no es mantenerse a la vanguardia con el sistema del VaR, sino mantenerse a la vanguardia con el sistema de administración de riesgos que proporcione un análisis integro del riesgo de mercado, riesgo de crédito, riesgo de liquidez y otros más.

La herramienta de VaR opera tanto como instrumento de medición como de control y auditoria. Su contribución es tan significativa que, actualmente, es utilizada por distintos bancos centrales, fondos de inversión y por personas físicas.

El VaR es una medida estadística que nos proporciona información sobre la máxima cantidad que esperamos perder en los próximos N días con un X por ciento de certidumbre, con base en el valor actual de la cartera.

Jorion (2000) define el Valor en Riesgo o, por sus siglas en inglés, VaR (*Value-at-Risk*) como la máxima pérdida esperada **bajo condiciones normales de mercado**, en un periodo de tiempo y con un nivel de confianza estadística dados. El VaR se ha convertido en la medida estándar de los administradores de riesgo de los principales grupos financieros del mundo (Jorion, 2000; Hull, 2006; de Lara Haro, 2003).

I.5.1 Métodos de estimación del VaR

A continuación se presentan los tres principales métodos que existen para la estimación del VaR.

Matemáticamente, la ecuación que expresa el VaR en una distribución de pérdidas es la siguiente:

$$VaR = \inf\{x \in \Re \mid P(\overline{-x} \leq x) \geq \alpha\}$$

O bien, desde el punto de vista de un agente regulador tenemos:

$$VaR = \inf\{x \in \Re \mid P(\overline{-x} + x < 0) \leq 1 - \alpha\}$$

En general, la ecuación utilizada para estimar el VaR es la siguiente:

$$VaR = W_0 \alpha \sigma \sqrt{t}$$

donde

W_0 = valor actual de la cartera

α = percentil elegido en el histograma de la distribución de probabilidad

σ = varianza de los rendimientos de la cartera

Los tres métodos para estimar el VaR son los que a continuación de presentan:

a) VaR método de varianza-covarianza $VaR = W_0 \alpha \sigma_{estimada} \sqrt{t}$

$$= M_0 \alpha \left[w \sigma C \sigma w^T \right]^{1/2} \sqrt{\Delta t}$$

Se conoce también como VaR paramétrico, pues estima la varianza de la cartera con base en la matriz de correlación, el método utiliza el supuesto de que la función de distribución de los retornos logarítmicos es normal.

b) VaR Monte Carlo $VaR = \alpha_{percentil}$

Se simulan valores de los rendimientos de la cartera con el supuesto de que la distribución de estos es normal, se obtienen valores de la cartera con base en estas simulaciones, se genera una serie de valores de pérdidas y ganancias a partir del valor mas reciente de la cartera y finalmente se elige el percentil deseado del histograma generado con estos valores.

c) VaR no paramétrico o de simulación histórica $VaR = \alpha_{percentil}$

Con base en un histórico de los factores de riesgo, se generan retornos logarítmicos, y a partir de estos, se obtienen valores hipotéticos de la cartera, se genera una serie de valores de pérdidas y ganancias a partir del valor mas reciente de la cartera y finalmente se elige el percentil deseado del histograma generado con estos valores.

Como se describió en las metodologías anteriores, es necesario el uso de una matriz de varianzas-covarianzas, sin embargo es importante señalar que el tamaño de esta matriz puede crecer demasiado, pues depende del número de instrumentos dentro de la cartera, además de que es difícil contar con volatilidades y correlaciones para cada instrumento, y aún contando con ellos, los cálculos de riesgos pueden volverse extremadamente complejos. Por lo anterior, es necesario buscar algún método para reducir el tamaño de la matriz, lo cual se logra al realizar previamente un mapeo de los instrumentos que componen la cartera.

La idea del mapeo es que si se tienen k instrumentos en ella, el análisis pueda facilitarse al representar esos k instrumentos en l instrumentos mas elementales (con $k > l$), y así tener una matriz de varianza-covarianza con el menor número de renglones y columnas.

De acuerdo con la metodología de *RiskMetrics*, el mapeo de instrumentos es el siguiente:

Mapeo de Posiciones

La metodología del "mapeo de posiciones" se aplica a cualquier instrumento y se basa en la separación de cada flujo de efectivo de un instrumento en dos flujos, correspondientes a los vértices adyacentes de la curva de rendimientos de de los instrumentos financieros a diferentes plazos (*yield curve*).

En este método se debe cumplir lo siguiente:

a) El valor de mercado de dos flujos debe ser igual al valor del mercado del flujo del efectivo original.
b) El riesgo de mercado de la cartera compuesta por los dos flujos debe ser igual al riesgo de mercado del flujo original.

c) El signo de los dos flujos de efectivo debe ser igual al signo del flujo de efectivo original.

Bajo este mapeo, el flujo de efectivo que vence en P años, se expresa como una combinación lineal de los vértices adyacentes A y B como sigue:

$$I_P^{mapeo} = \alpha I_A + (1-\alpha) I_B$$

Donde la incógnita de esta ecuación es el valor de α .

La varianza del flujo original en términos de los vértices adyacentes A y B se expresa como sigue:

$$\sigma_P^2 = \alpha^2 \sigma_A^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_B^2 + 2\rho_{AB} \alpha (1-\alpha) \sigma_A \sigma_B$$

La ecuación anterior es una ecuación cuadrática que puede ser expresada como sigue: $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

La solución de la ecuación anterior está dada por:

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{AB} \sigma_A \sigma_B$$

$$b = 2\rho_{AB} \sigma_A \sigma_B - 2\sigma_B^2$$

$$c = \sigma_B^2 - \sigma_p^2$$

Para determinar el último sumando de c se realiza una interpolación lineal de la siguiente forma:

$$\frac{x}{\sigma_B - \sigma_A} = \frac{p - A}{B - A}$$

De donde $\sigma_p = \sigma_A + x$

Es conveniente mencionar que los vértices de las curvas definidas en el SRO coinciden con los que *RiskMetrics* utiliza y son las siguientes: 1, 3, 6 y 12 meses, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 15, 20 y 30 años.

Mapeo de Divisas

En el caso de las divisas, no es necesario realizar ningún mapeo de flujos, ya que las divisas son factores de riesgo por si mismas.

I.5.1.1 VaR para Distribuciones Generales

Para estimar el valor en riesgo de una cartera, definamos a Wo como el valor inicial de la cartera y a R como su rendimiento. El valor de la cartera, después de un cierto horizonte de tiempo, lo podemos obtener como sigue:

$$W = Wo(1 + R)$$

El rendimiento esperado de la cartera y su volatilidad son μ y σ respectivamente.

Definimos el mínimo valor de la cartera, al nivel de confianza *c* como sigue:

$$W^* = Wo(1 + R^*)$$

El VaR se define como la pérdida en dólares relativa a la media de la siguiente forma:

$$VaR(relativo) = E(W) - W^* = -Wo(R^* - \mu)$$

En algunas otras ocasiones el VaR puede ser calculado sin hacer referencia a la media, siendo entonces, la pérdida absoluta en dólares. La ecuación que expresa dicha situación es la siguiente:

$$VaR\ (absoluto\ ) = Wo - W^* = -WoR^*$$

En ambos casos, las ecuaciones pueden ser obtenidas al encontrar el valor mínimo para W^* o bien, el rendimiento crítico R^*.

De forma general, el VaR puede obtenerse de la distribución del valor futuro de la cartera $f(W)$, con un nivel de confianza c.

El objetivo es encontrar el mínimo valor de W^* tal que la probabilidad de exceder dicho valor sea c, es decir:

$$c = \int_{W^*}^{\infty} f(w)dw$$

O bien, deseamos que la probabilidad de encontrar un valor menor a W^* tal que sea igual a $1-c$.

$P(w \leq W^*) = 1-c$ que se puede expresar como:

$$1-c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w)dw$$

El objetivo principal, es que el área bajo la curva de $-\infty$ a W^* debe sumar $1-c$. El valor de W^* es denominado el cuantil $1-c$ de la distribución muestral.

I.5.1.2 VaR para Distribuciones Paramétricas

En la ecuación anterior, el punto importante es la elección de $f(w)$. En la práctica es común suponer que $f(w)$ representa una función de distribución normal con media μ y desviación estándar σ. Esta suposición tiene cierta, aunque limitada credibilidad: La variable aleatoria no tiene límite inferior; sin embargo, en el caso del precio de una acción, no puede caer más allá de cero debido a que los activos no pueden tener precios negativos, (una caída en rendimiento de más de 100% equivaldría a tener precios negativos), por lo que en la practica no se utiliza la distribución normal para modelar los precios de los activos. No obstante que la distribución normal se utiliza para modelar rendimientos, hay que considerar algunos problemas de este modelo:

Los rendimientos suelen tener colas pesadas, pero la distribución normal subestima la probabilidad de grandes pérdidas.

Los rendimientos suelen estar sesgados, mientras que la distribución normal es simétrica.

No obstante lo anterior, la distribución normal $N(0,1)$ aporta una gran ventaja, al hacer las estimaciones de VaR mucho más sencillas.

Si suponemos que W se distribuye de forma normal, el VaR puede derivarse directamente de la desviación estándar de la cartera utilizando un factor multiplicativo que depende del nivel de confianza. Este método adopta el nombre de paramétrico, ya que requiere de la estimación de un parámetro, la desviación estándar, en lugar del cuantíl de la distribución empírica.

Primero, necesitamos transformar la función de distribución general $f(w)$ en una distribución normal estándar $f(z)$, donde Z tiene como media cero y desviación estándar 1.

Recordemos que $W^* = Wo(1 + R^*)$. Generalmente, R^* es negativo y puede escribirse como $-|R^*|$.

Si asociamos a R^* con una desviación normal estándar, $\sigma > 0$ tal que:

$$-\alpha = \frac{-|R^*| - \mu}{\sigma}$$

Que es equivalente a establecer:

$$1 - c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w)dw = \int_{-\infty}^{-|R^*|} f(r)dr = \int_{-\infty}^{-\alpha} f(z)dz$$

El problema de encontrar el valor en riesgo es equivalente a encontrar el número de desviaciones estándar a partir de la media para llegar al valor Z tal que el área bajo la curva sea igual a 1-c. Podemos resolverlo utilizando las tablas de la función de distribución acumulativa normal estándar, la cual nos muestra el área a la izquierda del valor z para una variable normal estándar.

$$N(z) = \int_{-\infty}^{z} f(z)dz$$

Así podemos escribir el nivel de confianza en términos de un solo parámetro, el cual nos dice qué tan lejos se está de R^*, en términos de μ y unidades de desviación estándar σ.

Por ejemplo, para $c = 0.05$, que representa la probabilidad de los eventos que se encuentran en la cola izquierda.

$$c = \int_{-\infty}^{R^*} f(R)dR = \Pr ob[R < R^*] = \Pr ob[Z < (R^* - \mu)/\sigma]$$

Tomando los valores de la tabla de valores de la distribución normal, tenemos $-1.65 = (R^* - \mu)/\sigma$ (-1.65 para un nivel de confianza de 95%) por lo que $R^* = \mu - 1.65\sigma$, de forma general $R^* = \mu - \alpha\sigma$

Para una mayor generalidad, si suponemos que μ y σ están expresados en una base anual, y el intervalo de tiempo considerado es Δt, en años, para el VaR relativo tenemos lo siguiente:

$$VaR(relativo) = -Wo(R^* - \mu)$$

$$= Wo\alpha\sigma\sqrt{\Delta t} \tag{1}$$

Es decir, el VaR es un múltiplo de la desviación estándar de la distribución, multiplicado por un factor de ajuste directamente relacionado con el nivel de confianza y un horizonte de tiempo.

Si deseamos utilizar el VaR como una pérdida absoluta en dólares, tenemos lo siguiente:

$$VaR\ (absoluto\ ) = -WoR\ ^*$$

$$= Wo(\alpha\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu\Delta t) \tag{2}$$

Este método se puede utilizar para otras funciones de probabilidad acumulativa, así como la normal, siempre y cuando, el riesgo esté contenido en σ. No obstante lo anterior, el valor de α que tendrían otras funciones, podría ser muy difícil de obtener de ahí que sea la ventaja de la función de distribución normal sobre el resto de las distribuciones empíricas.

En la práctica es mucho más frecuente utilizar el VaR relativo, por lo que de aquí en adelante, siempre que se hable de VaR se hará referencia siempre la ecuación 1.

Un ejemplo práctico resulta útil para ofrecer una mayor claridad en el significado del VaR.

Supongamos que un inversionista compra 50,000 acciones a un precio 15 USD cada una, cuya volatilidad es de 10% anual.

Se desea obtener el VaR diario de esta inversión, con un factor de confianza de 95%.

$$VaR = Wo\alpha\sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$= (50{,}000 * 15) * 1.65 * .10 * \sqrt{\frac{1}{252}}$$

$$= 7{,}748.27\text{USD}$$

Esto significa que, el inversionista tendrá una pérdida de al menos 7,748 USD en promedio, un día de cada mes (o lo que es igual, 5días/100 días, o bien, 1/20 días).

I.5.1.2.1 Estimación del VaR mediante el Método Varianza-Covarianza o Delta – Normal

En este método mostraremos cómo se obtiene el VaR de una cartera compuesta por dos instrumentos y a partir de esa idea intuitiva, generaremos el VaR para una cartera compuesta por n instrumentos.

Como acabamos de ver en la sección anterior, el VaR paramétrico puede definirse como

$$VaR = Wo\alpha\sigma\sqrt{\Delta t}$$

Para este caso, la idea es estimar el valor de σ cuando tenemos dos instrumentos. De acuerdo a la teoría de Markowitz, la varianza del portafolio se obtiene como sigue:

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$

Donde:

w_i = ponderación del instrumento i en la cartera

$\sigma_i =$ desviación estándar de los rendimientos del instrumento i

$\rho_{12} = \dfrac{Cov(r_1, r_2)}{\sigma_1\sigma_2} =$ el coeficiente de correlación entre los rendimientos de los dos instrumentos.

Sustituyendo, la desviación estándar tenemos

$$VaR = Wo\alpha\sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$= W_0\alpha\left[w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2\right]^{1/2}\sqrt{\Delta t}$$

$$= \left[VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2\rho_{12}VaR_1VaR_2\right]^{1/2}$$

Resulta interesante ver que siempre que $\rho_{12} < 1$ el VaR de una cartera con dos activos, es menor que la suma del VaR de cada instrumento.

Para el caso en el que la cartera se constituye por n instrumentos, vemos que simplemente necesitamos estimar la desviación estándar de los rendimientos de dichos instrumentos, es decir.

$$VaR_p = M_0\alpha\sigma_p\sqrt{\Delta t}$$

$$= M_0\alpha\left[w\sigma C\sigma w^T\right]^{1/2}\sqrt{\Delta t}$$

$$= \left[VaRCVaR^T\right]^{1/2}$$

En la ecuación anterior, el VaR es un vector de dimensión $1xn$ donde cada elemento de este vector, es el VaR de cada instrumento de la cartera, C es la matriz de correlaciones de dimensión nxn y VaR^T es un vector transpuesto de VaR individuales de dimensión $nx1$.

La matriz de correlaciones C tiene la siguiente forma:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13}\cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23}\cdots & \rho_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \rho_{n3}\cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, se construye una matriz cuadrada que estará compuesta por las volatilidades o desviaciones estándar de cada instrumento de la cartera en la diagonal y por ceros fuera de la diagonal.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0\ldots & 0 \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ 0 & 0 & 0\ldots & \sigma_n \end{bmatrix}$$

La matriz de varianza-covarianza, denotada por Σ se obtiene mediante la siguiente ecuación

$$\sum \ = \sigma C \sigma$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3\cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{21}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3\cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \rho_{31}\sigma_3\sigma_1 & \rho_{32}\sigma_3\sigma_2 & \sigma_3^2\cdots & \rho_{3n}\sigma_3\sigma_n \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \rho_{n1}\sigma_n\sigma_1 & \rho_{n2}\sigma_n\sigma_2 & \rho_{n3}\sigma_n\sigma_3 & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, sustituimos la varianza de la cartera en la ecuación de VaR para obtener lo siguiente:

$$VaR = M_0 \alpha \sigma_p \sqrt{\Delta t}$$

$$= M_0 \alpha \left[w\sigma.C\sigma.w^T \right]^{1/2} \sqrt{\Delta t}$$

$$= M_0 \alpha \left[w \sum w^T \right]^{1/2} \sqrt{\Delta t}$$

I.5.1.2.2 Estimación del VaR mediante el Método de Simulación Monte Carlo

El objetivo de esta metodología es la generación de números aleatorios con los cuales se crean escenarios que simulan el precio de los instrumentos. Este método es útil en los casos en que se tienen instrumentos derivados en la cartera, como futuros *swaps* y *forwards* ya que la dificultad de obtener datos históricos de sus precios, complica la estimación de volatilidades y correlaciones de los retornos. Adicionalmente, este método permite obtener precios para instrumentos que dependen de más de una variable estocástica, como por en el caso de las opciones asiáticas.

I.5.1.2.2.1 Método de Simulación Monte Carlo para un Instrumento

Para este método, en primer lugar necesitamos definir el comportamiento del precio de un activo a lo largo del tiempo. Supongamos que el precio se describe mediante el comportamiento de una caminata aleatoria geométrica. Antes de describir este método, es útil revisar la teoría relacionada con dicho comportamiento:

1. Proceso de *Wiener*

Una variable z sigue un proceso de *Wiener* si:

$dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ donde ε ~N(0,1)

Lo cual significa que un cambio en la variable z (dz), es proporcional a la raíz cuadrada de un cambio en el tiempo (dt), multiplicado por un error aleatorio ε.

De lo anterior, es fácil ver que el valor esperado y la varianza de dz son respectivamente

$E(dz) = 0$ y $Var(dz) = 1$

Intuitivamente vemos que las ecuaciones anteriores nos dicen que el cambio en la variable z no sigue ninguna tendencia determinada, y que el valor esperado en el futuro es igual a su valor actual. Por otro lado, la varianza nos dice que la incertidumbre en el cambio de la variable depende del intervalo de tiempo t, es decir, entre mayor sea el intervalo de tiempo, mayor será la incertidumbre del cambio en z.

2. Proceso de *Wiener* generalizado

Una variable x seguirá un proceso de *Wiener* generalizado cuando cumpla las siguientes características:

$dx = adt + bdz$

Donde dz es un proceso de *Wiener* sencillo. El valor esperado y la varianza de esta la ecuación son las siguientes:

$$E(dx) = adt$$
$$Var(dx) = b^2 dt$$

A diferencia del proceso sencillo de *Wiener*, la forma generalizada impone una tendencia al valor esperado y a la varianza.

3. Proceso de *Ito*

A continuación, describiremos otro proceso estocástico llamado proceso de *Ito*. Este proceso es sencillamente un proceso de *Wiener* generalizado donde los parámetros a y b son funciones de la variable x y del tiempo t.

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

Por ejemplo, el precio spot P de un activo puede ser representado por el proceso de Ito, donde P tiene una tasa de cambio μP y una varianza $\sigma^2 P^2$, podemos escribir esto de la siguiente forma:

$$dP = \mu P dt + \sigma P dz$$

$$\frac{dP}{P} = \mu dt + \sigma dz \tag{1}$$

4. Lema de *Ito*

Dado que P es una variable que sigue un proceso de *Ito*, el lema de *Ito* establece que cualquier función G que dependa de P y de t sigue el siguiente proceso:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial P} \mu P + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial P^2} \sigma^2 P^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial P} \sigma P dz$$

Nótese que tanto G como P tienen la misma fuente de incertidumbre dz, por lo tanto $G(P,t)$, también sigue un proceso de *Wiener* generalizado con:

tasa de cambio= $\left(\frac{\partial G}{\partial P}\mu P + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial P^2}\sigma^2 P^2\right)$ y

tasa de varianza= $\left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)^2 \sigma^2 P^2$

Ahora bien, nos interesa ver el si comportamiento de $\ln(P)$ sigue un proceso de *Wiener* generalizado, es decir queremos ver si ocurre que:

$G(P,t) = \ln(P)$

Entonces

$$dG = \left(\frac{1}{2}\mu P + 0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{P^2}\right)\sigma^2 P^2\right)dt + \frac{1}{P}\sigma P dz$$

$$= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$$

De esta manera $G = \ln(P)$ sigue un proceso de *Wiener* generalizado con

Tasa de cambio= $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ y

Tasa de varianza = σ^2

Como ya habíamos visto, $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$, donde ε ~N(0,1). Este proceso implica que la tasa de cambio (retorno), entre el tiempo t y un tiempo futuro T , se distribuya como una normal con media $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$ y con una varianza $\sigma^2(T-t)$

Ahora bien, si el valor del $\ln P$ en el tiempo t es $\ln P_t$ y en e tiempo T es $\ln P_T$, entonces tenemos

$$\ln P_T - \ln P_t \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right]$$

Lo cual significa que los retornos a partir del tiempo t al tiempo T pueden escribirse como sigue:

$$r_{t,T} = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\varepsilon\sqrt{T-t} \tag{2}$$

donde ε ~N(0,1)

Una vez que hemos visto que los retornos se distribuyen de forma normal, necesitamos estimar dos parámetros: la media μ y la volatilidad σ , antes de calcular dichos valores, en importante señalar que en un artículo escrito por Kim, Malz y Mina (1999), se muestra que la predicción para horizontes menores a tres meses no producen buenas estimaciones de retornos futuros. Además, la volatilidad es mucho más alta que los retornos esperados en periodos cortos de tiempo. Debido a esto, la distribución de los retornos está dominada por la volatilidad estimada σ . Es decir, cuando se utilizan periodos pequeños de tiempo, la suposición de que la media de los retornos es cero, es tan buena como cualquier media estimada que se pudiese obtener, con la gran ventaja de no tener que preocuparse por la estimación de este valor. Con base en lo anterior, *RiskMetrics* supone que $\mu = \frac{1}{2}\sigma^2$.

Por lo que la ecuación II se reduce a lo siguiente:

$r_{t,T} = \sigma\varepsilon\sqrt{T-t}$ si $dz = \varepsilon\sqrt{T-t}$,

Entonces, la ecuación I puede escribirse como sigue:

$dP_t = \sigma dZ_t$

Esta ecuación, permite estimar el cambio con respecto al precio actual en términos de la desviación estándar σ (que se espera sea conocida o al menos estimada), y una variable normal estandarizada Z_t. La ecuación puede expresarse también en términos de aproximaciones discretas sobre un periodo pequeño de tiempo:

$P_t = P_{t-1} + \sigma dZ_t$

En esta ecuación el precio actual es expresado en términos del precio del periodo anterior, σ y Z_t.

Ahora, si deseamos simular el precio sobre un periodo de tiempo, digamos de t a T por ejemplo un día, tenemos lo siguiente:

$$p_{t+1} = p_t + \sigma Z_{t+1}$$
$$= p_{t-1} + \sigma\left[Z_t + Z_{t+1}\right]$$

Si el periodo de tiempo es de dos días, la ecuación se modifica como sigue:

$$p_{t+2} = p_{t+1} + \sigma Z_{t+2}$$

$$= p_t + \sigma Z_{r+1} + \sigma Z_{t+2}$$

$$= p_{t-1} + \sigma Z_t + \sigma Z_{t+1} + \sigma Z_{t+2}$$

$$= p_{t-1} + \sigma\left[Z_t + Z_{t+1} + Z_{t+2}\right]$$

Y así sucesivamente para tres días, cuatro, …de forma general para T días tenemos entonces la siguiente expresión.

$$p_T = p_{t-1} + \sigma \sum_{i=0}^{T} Z_{t+i}$$

Finalmente, necesitamos generar los números aleatorios para obtener una serie de valores para cada Z_{t+i}, sustituimos estos valores en la ecuación anterior y obtenemos así el precio simulado de nuestro instrumento. El precio simulado, al ser multiplicado por el numero de acciones, obtendremos el valor simulado de nuestra cartera, (puesto que en este caso suponemos se compone por un solo instrumento).

Si el mismo proceso se repite muchas veces, podremos construir una distribución de valores simulados de nuestra cartera. Como ya hemos visto, construimos entonces nuestro histograma y en el solo es necesario obtener el valor del percentil X para obtener el VaR con un nivel de confianza $1-X$ por ciento.

I.5.1.2.2.2 Método de Simulación Monte Carlo para una Cartera que contiene Múltiples Instrumentos

Podemos escribir la ecuación $\frac{dP_t^{(i)}}{P_t^{(i)}} = \mu_i dt + \sigma_i dW_t^i$ en términos de movimientos brownianos independientes $\tilde{W}_t^{(i)}$

$$\frac{dP_t^{(i)}}{P_t^{(i)}} = \mu_i dt + \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} d\tilde{W}_t^{(i)} \quad i = 1,\ldots,n$$

Mediante el análisis de componentes principales, podemos escribir un conjunto de variables correlacionadas como una combinación lineal de variables independientes. Los coeficientes de la combinación lineal no son únicos, pero satisfacen ciertos requisitos.

Si escribimos los coeficientes $c_{i,j}$ mediante un vector, entonces la ecuación anterior puede expresarse como sigue:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu dt + C^T d\tilde{W}_t$$

Donde $\left\{\frac{dP_t}{P_t}\right\}_i = \frac{dP_t^{(i)}}{P_t^{(i)}}$ para $i = 1,2,\ldots,n$ es un vector de nx1 y $d\tilde{W}$ es un vector de n movimientos brownianos independientes y $C = \lfloor c_{i,j} \rfloor$ es cualquier matriz de nxn tal que la matriz de covarianzas de los retornos Σ puede escribirse como $\sum = C^T C$.

Esto significa que el vector de retornos para cada factor de riesgo del tiempo t al tiempo T, puede ser escrito como

$r_{t,T} = C^T z \sqrt{T-t}$

Donde $r_{t,T}$ es un vector de retornos del tiempo t al tiempo T , y $z \sim NMV(0, I)$

Para generar escenarios de retornos conjuntos, para múltiples factores de riesgos necesitamos seguir los siguientes pasos:

1.-Encontrar la matriz C tal que $\sum = C^T C$

2.-Generar *n* variables independientes con una distribución normal estandarizada y almacenarlos en el vector z

3.-Multiplicar la matriz de volatilidad escalada $\sqrt{tC^T}$ por el vector z para obtener un vector r de tamaño *nx1* de retornos conjuntos de *t* días.

Una vez que hemos obtenido los escenarios de retornos para los factores de riesgo, necesitamos convertir esos retornos en escenarios de pérdidas y ganancias para los instrumentos que tenemos.

Si recordamos la siguiente relación

$r = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$, entonces $e^r = \frac{P_t}{P_{t-1}}$ o bien $P_t = P_{t+1} e^r$

Podemos entonces expresar fácilmente las pérdidas y ganancias para un factor de riesgo como la diferencia entre el precio del día *t* y *t-1* $\left(P_t - P_{t-1}\right)$.

Para obtener el valor presente de una cartera que contiene *m* instrumentos donde el valor presente de cada uno es función de *n* factores de riesgo $V_j(P)$ con $j = 1,...m$ y $P = (P^{(1)}, P^{(2)},..., P^{(n)})$, podemos escribir el escenario de pérdidas y ganancias de portafolio **para un día** llevando a cabo el siguiente algoritmo:

1. Generar un conjunto z de *n* variables independientes normales estandarizadas.
2. Transformar las variables anteriores en un conjunto de retornos $r = r^{(1)}, r^{(2)},..., r^{(n)}$ para cada factor de riesgo, mediante la matriz C, es decir $r = C^T z$ (el vector de rendimientos simulados).
3. Obtener el precio simulado para el periodo 1 de cada factor de riesgo utilizando la ecuación $P_1 = P_0 e^r$
4. Establecer el precio de cada instrumento utilizando el precio actual P_0 y el precio simulado de un día P_1
5. Obtener las pérdidas y ganancias de la cartera mediante $\sum_j (V_j(P_1) - V_j(P_0))$

Si deseáramos generar escenarios de pérdidas y ganancias para *T* días, es suficiente con utilizar la ecuación $P_T = P_0 e^{r \cdot \sqrt{T}}$.

Por último, se grafica el histograma de frecuencias, y el VaR se obtiene simplemente calculando el percentil X del histograma, considerando un nivel de confianza de $1 - X$ por ciento.

I.5.1.3 Estimación del VaR mediante el Método No-Paramétrico o de Simulación histórica

Este método consiste en estimar el VaR de la cartera mediante los retornos logarítmicos de los datos históricos de los factores de riesgo, bajo dos supuestos:

-suponer que en el futuro los rendimientos serán los mismos

-suponer que dicha cartera es estática a lo largo del periodo de tiempo cubierto por los datos históricos

Como primer paso, debemos obtener una muestra de retornos de los instrumentos sobre un periodo de tiempo, enseguida utilizamos las ponderaciones de los instrumentos de la cartera actual y simulamos retornos hipotéticos que se hubieran obtenido de haber mantenido la cartera actual, a lo largo del periodo de tiempo observado.

Por ejemplo, si se tienen t observaciones dentro del periodo de tiempo $[0,T]$, $R_{i,t}$ es el retorno del instrumento i en el periodo t y w_i es el peso del instrumento i en la cartera que contiene n instrumentos, entonces el retorno estimado de la cartera en el periodo t se puede escribir como sigue:

$$R_t^c = \sum_{i=1}^{n} w_i R_{i,t} \quad \text{con } t = 0,\ldots T$$

Para cada instante t obtenemos un valor distinto de retornos hipotéticos de la cartera R_t^c.

La muestra de observaciones históricas nos proporciona una distribución de retornos hipotéticos de la cartera, estos retornos se ordenan de menor a mayor y se construye el histograma de frecuencias. Finalmente, se elige el percentil X que representa el VaR, o bien el máximo valor que se espera se pierda en la cartera, en un X por ciento de los N días considerados de datos históricos.

I.5.2.4 Debilidades y peligros del VaR

A pesar de las precisiones matemáticas y la simplicidad en las técnicas del VaR, se requiere que este sea utilizado con cuidado. La predicción de la posible pérdida futura se basa en el pasado, por lo que los administradores de activos tienen que tener en mente que el desempeño en el pasado, no es una guía para el desempeño futuro. Las medidas de volatilidad y correlaciones son el corazón de todos los cálculos del VaR, sin embargo dependen de la manera en que la volatilidad histórica sea utilizada, en particular el factor de decaimiento que se toma, asigna un mayor o menor peso a los datos más antiguos. Sin duda el concepto del valor en riesgo ofrece ventajas significativas, dado que la información esta contenida en una sola cifra; sin embargo conocer el proceso estadístico que lo estima es sin duda fundamental y mas aún los supuestos en los que se basa el método, por ejemplo los números generados en el proceso (números que simulan rendimientos), dependen por completo del supuesto de que se distribuyen normal, además del nivel de confianza elegido en el proceso por ejemplo 95% que equivale a casi dos desviaciones estándar o bien "uno día de cada 20 días hábiles se podría perder al menos cierta cantidad", de esta forma la percepción del riesgo cambia. Una cartera riesgosa, no se convierte en una cartera segura con solo utilizar tres o cuatro desviaciones estándar en la estimación del VaR, más aún, esto podría ocasionar una reacción y decidir reducir posiciones futuras.

Otro punto que surge en que en un banco central, no todas las pérdidas, tienen las mismas consecuencias. Los métodos de VaR, miden todas las pérdidas en términos monetarios, sin embargo, el riesgo de crédito en un banco central se percibe con mayor sensibilidad que el riesgo de mercado. Si suponemos un a pérdida de $x millones debido a un incumplimiento de alguna contraparte del banco central, podría ocasionar un daño grave en la reputación del banco central, en comparación con la misma pérdida ocasionada por el riesgo de mercado, por movimientos en las curvas de tasas de interés, o en el caso del riesgo derivado de los movimientos en las divisas, los cuales son mejor aceptados en la administración de las reservas.

Recordemos también que el VaR funciona solo en condiciones normales de mercado, es decir que en momentos en donde haya movimientos drásticos en los mercados, el VaR puede sobrepasarse fácilmente sin poder predecirlo con cierta anticipación.

La excesiva confianza en el VaR no es recomendable, por el contrario es mejor apoyarse con algunas otras herramientas como la pruebas se stress que sirven para estimar las posibles pérdidas si se presentaran escenarios tales como la crisis asiática de 1997, o el lunes negro de 1987, o la devaluación rusa en 1998, inclusive, la devaluación del peso mexicano en 1995.

II Implementación

En esta sección se describirá a grandes rasgos los procesos que se llevaron a cabo para poder implementar la estimación del VaR en el SRO.

II.1 Visita al Área de *Middle Office* del Personal que creó el *SRO*

Banco de México deseaba explotar la funcionalidad del SRO, el cual, entre muchas otras herramientas, tenía la opción de crear un modulo para estimar el VaR de la cartera administrada. Sin embargo, este modulo no se encontraba implementado por completo.

Al haberse tomado la decisión de implementar el cálculo del VaR en el SRO se hizo necesaria una visita del personal que creó dicho sistema, con el objetivo de establecer acuerdos sobre los resultados de las estimaciones finales de VaR, -las cuales debían ser lo más cercano posibles a los resultado de *RiskMetrics*-, además de proporcionarnos un conjunto de herramientas utilizadas para nuestro fin, por ejemplo configuraciones que permitieron la exportación de series históricas de los factores de riesgo utilizados para el cálculo de los valores.

II.2 Herramientas Necesarias para la Estimación del VaR y Establecimiento de las Características con las Cuales se Obtienen Dichas Estimaciones

En esta sección describiremos las configuraciones que fue necesario implementar en el SRO para la generación del VaR.

Curvas de riesgo

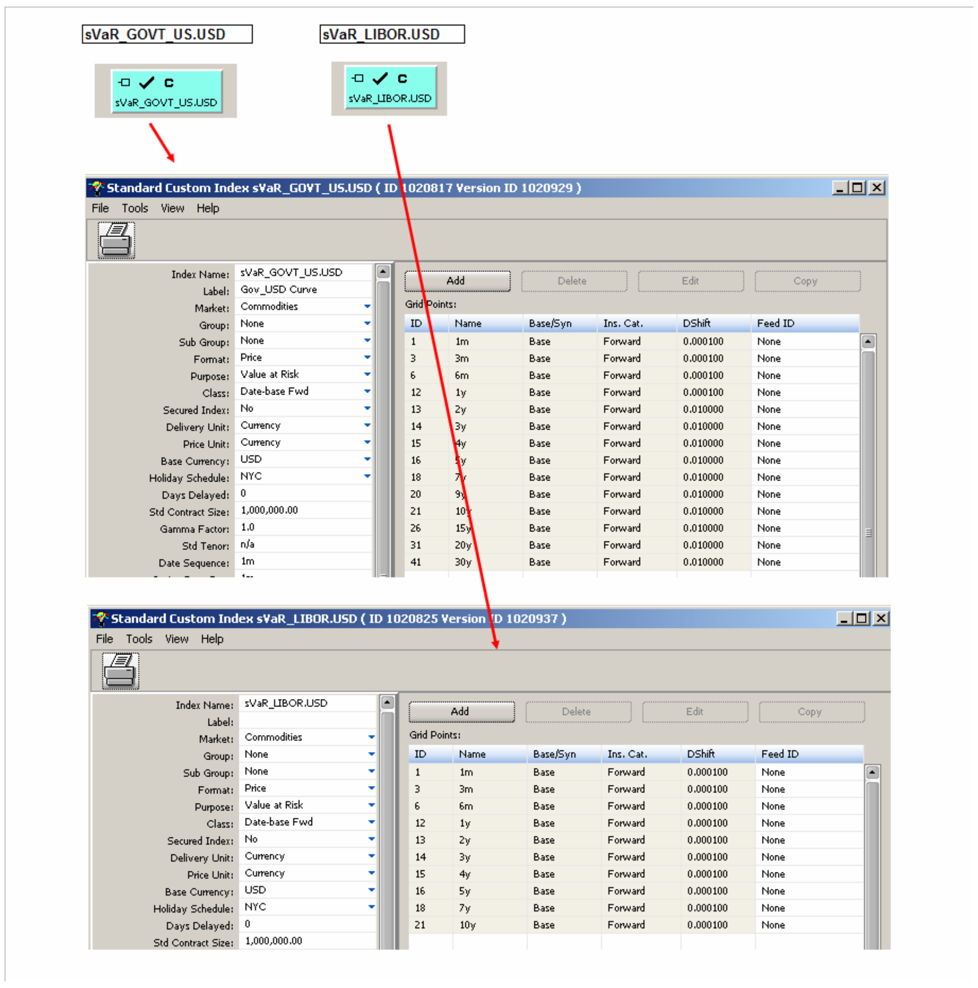
Cabe recordar que la metodología implementada en el SRO es en esencia la misma que *RiskMetrics* utiliza. Con el objetivo de tener claridad en el establecimiento de las configuraciones y procesos, nos enfocaremos en simplificar el caso de las curvas que *RiskMetrics* establece como SWAP y GOVT.

En el Cuadro 1 se muestran los sectores de vencimiento para las curvas mencionadas.

		VaR Risk Factor Sets	
	Category	Yield Curve	
	Market	Govt	Swap
	Currency	USD	USD
Maturity			
1m		USD.R030	USD.R030
3m		USD.R090	USD.R090
6m		USD.R180	USD.R180
12m		USD.R360	USD.R360
2y		USD.Z02	USD.S02
3y		USD.Z03	USD.S03
4y		USD.Z04	USD.S04
5y		USD.Z05	USD.S05
7y		USD.Z07	USD.S07
9y		USD.Z09	
10y		USD.Z10	USD.S10
15y		USD.Z15	
20y		USD.Z20	
30y		USD.Z30	

Cuadro 1- Sectores de vencimiento para las curvas SWAP y GOVT en RM

Como describimos anteriormente, en el SRO se definieron las mismas curvas con los mismos factores de vencimiento, tal como se muestra en el Cuadro 2:



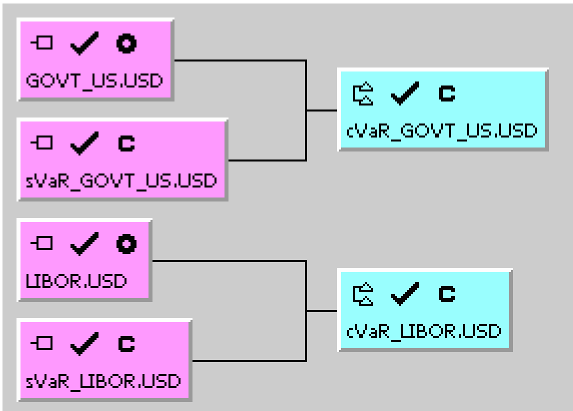
Cuadro 2- Sectores de vencimiento para las curvas SWAP y GOVT en el SRO

Factores de riesgo

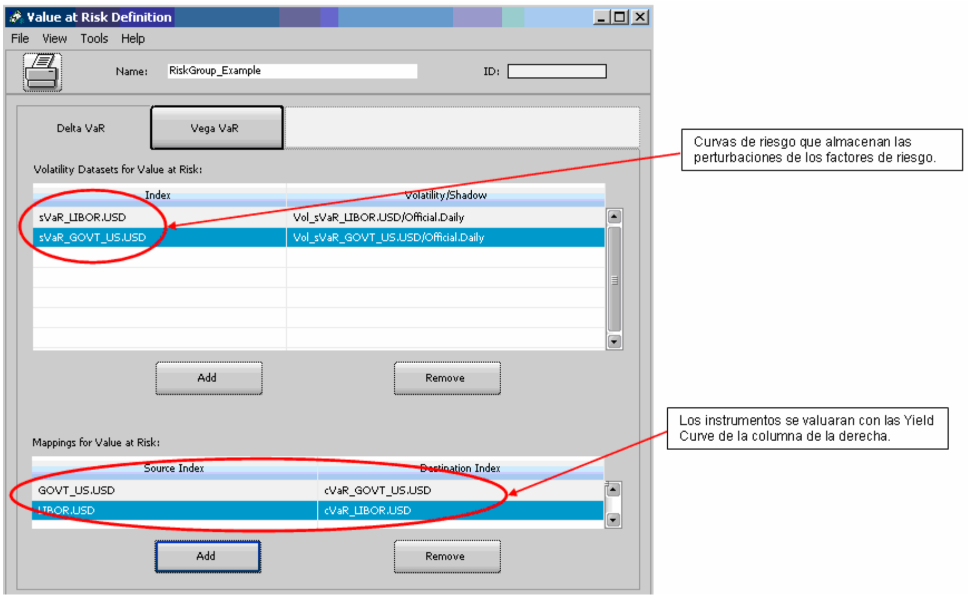
Los factores de riesgo que RM utiliza para obtener el VaR de las carteras de renta fija son las tasas de interés, y para la cartera de divisas son los tipos de cambio de las divisas.

RiskManager utiliza los factores de riesgo para realizar perturbaciones en las Yield Curves correspondientes. Por ejemplo, para este caso la curva sVaR_LIBOR.USD almacena las perturbaciones realizadas a la curva LIBOR.USD durante el cálculo del VaR.

En el SRO, la relación entre la Yield Curve LIBOR.USD y la curva de riesgo perturbada sVaR_LIBOR.USD queda contenida en una tercera curva llamada cVaR_LIBOR.USD. (Cuadro 3). En el proceso, los instrumentos que normalmente son valuados con la curva LIBOR.USD se valuarán entonces con la curva de riesgo (Cuadro 4).



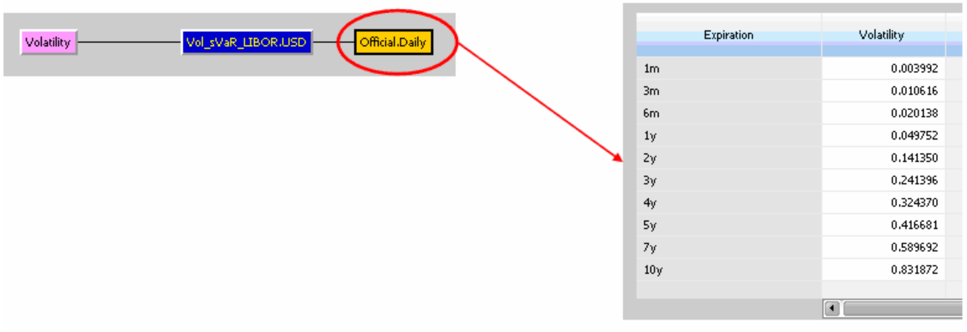
Cuadro 3- Curva LIBOR.USD



Cuadro 4- Valuación de los instrumentos con las curvas cVaR

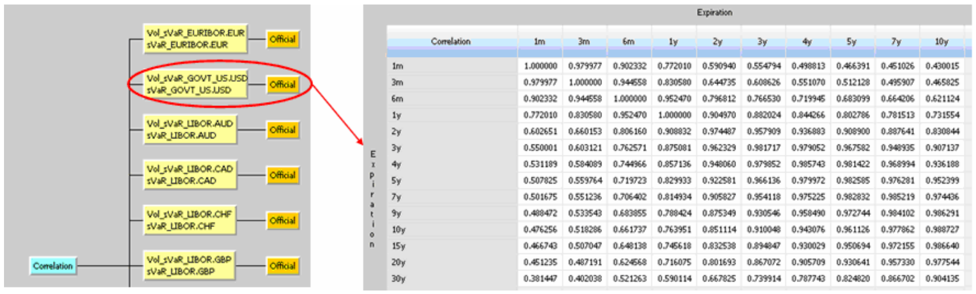
Estadísticas de los Factores de Riesgo

El siguiente paso a seguir para la estimación del VaR Monte Carlo, es configurar las correlaciones y las desviaciones estándar para cada factor de riesgo de la curva sVaR_LIBOR.USD (Cuadro 5 y 6).



Expiration	Volatility
1m	0.003992
3m	0.010616
6m	0.020138
1y	0.049752
2y	0.141350
3y	0.241396
4y	0.324370
5y	0.416681
7y	0.589692
10y	0.831872

Cuadro 5- Desviación estándar de factores de riesgo (retornos logarítmicos) para SVaR_LIBOR.USD



	Expiration									
Correlation	1m	3m	6m	1y	2y	3y	4y	5y	7y	10y
1m	1.000000	0.979977	0.902332	0.772010	0.590940	0.554794	0.498813	0.466391	0.451026	0.430015
3m	0.979977	1.000000	0.944558	0.830580	0.644735	0.608626	0.551070	0.512128	0.495907	0.465825
6m	0.902332	0.944558	1.000000	0.952470	0.796812	0.766530	0.719945	0.683099	0.664206	0.621124
1y	0.772010	0.830580	0.952470	1.000000	0.904970	0.882024	0.844266	0.802786	0.781513	0.731554
2y	0.602651	0.660153	0.806160	0.908832	0.974487	0.957909	0.936883	0.908900	0.887641	0.830844
3y	0.550001	0.603121	0.762571	0.875081	0.962329	0.981717	0.979052	0.967582	0.948935	0.907137
4y	0.531189	0.584089	0.744966	0.857136	0.948060	0.979852	0.985743	0.981422	0.968994	0.936188
5y	0.507825	0.559764	0.719723	0.829933	0.922581	0.966136	0.979972	0.982585	0.976281	0.952399
7y	0.501675	0.551236	0.706402	0.814934	0.905827	0.954118	0.975225	0.982832	0.985219	0.974436
9y	0.488472	0.533543	0.683855	0.788424	0.875349	0.930546	0.958490	0.972744	0.984102	0.986291
10y	0.476256	0.518286	0.661737	0.763951	0.851114	0.910048	0.943076	0.961126	0.977862	0.988727
15y	0.466743	0.507047	0.648138	0.745618	0.832538	0.894847	0.930029	0.950694	0.972155	0.986640
20y	0.451235	0.487191	0.624568	0.716075	0.801693	0.867072	0.905709	0.930641	0.957330	0.977544
30y	0.381447	0.402038	0.521263	0.590114	0.667825	0.739914	0.787743	0.824820	0.866702	0.904135

Cuadro 6- Correlaciones de factores de riesgo (retornos logarítmicos) para sVaR_LIBOR.USD vs factores de riesgo de otras curvas de riesgo

Definición de los parámetros para la estimación del VaR

Los parámetros establecidos en el SRO, son idénticos a los que RM tiene definidos (Cuadros 8 y 9), y son los siguientes:

-3000 simulaciones

-Un intervalo de confianza de 95%

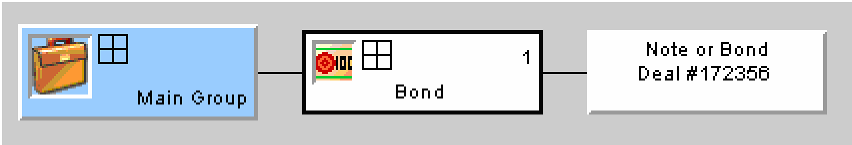
En el SRO, el VaR puede obtenerse de forma sencilla mediante el siguiente proceso:

1.-Selección del instrumento, grupo de instrumentos, o bien, la cartera que contiene todo el conjunto de instrumentos (Cuadro 7).

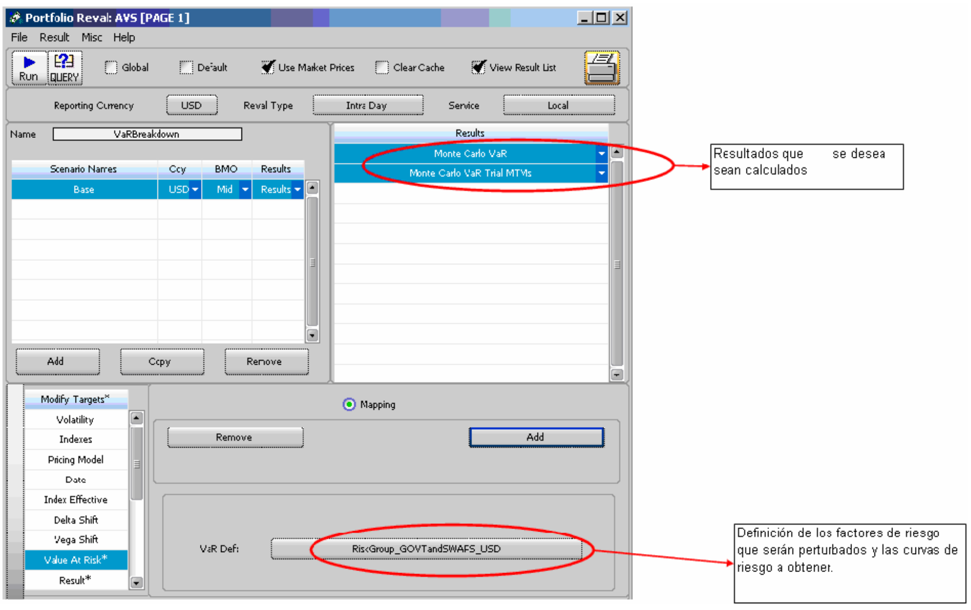
2.- Ejecución de la simulación de riesgo: cálculo del VaR (Cuadro 10).

3.-Análisis de los resultados.

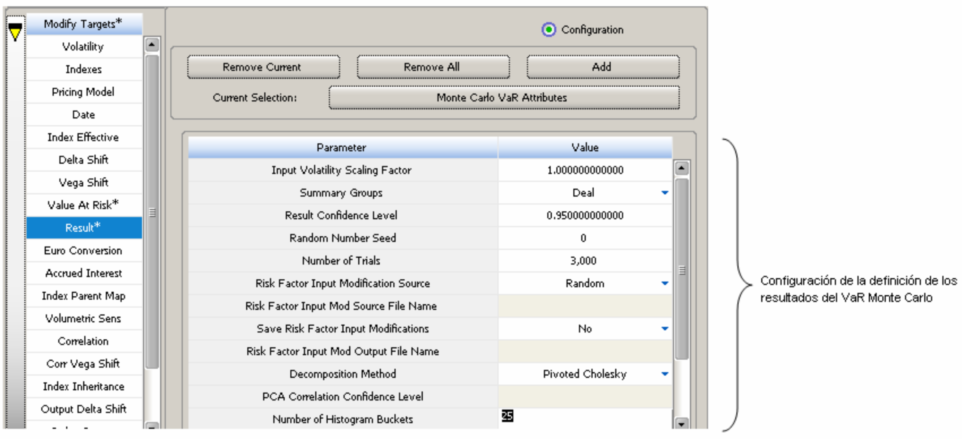
A continuación se presentan de forma gráfica los pasos necesarios para la generación del VaR de un instrumento de renta fija.



Cuadro 7- Selección del instrumento que tiene asignado el registro 17235 1



Cuadro 8- Definición del método de estimación del VaR en el SRO (Monte Carlo)



Cuadro 9 Definición del número de simulaciones a realizar en el SRO

Monte Carlo VaR

Scenario ID	Scenario Name	ID	Label	MonteCarloVaR	SummaryGroup	BaseMTM
1	Base	0	Monte Carlo VaR	12,951.37	Overall	197,805,274.95
1	Base	1	172356	12,951.37	Deal	197,805,274.95

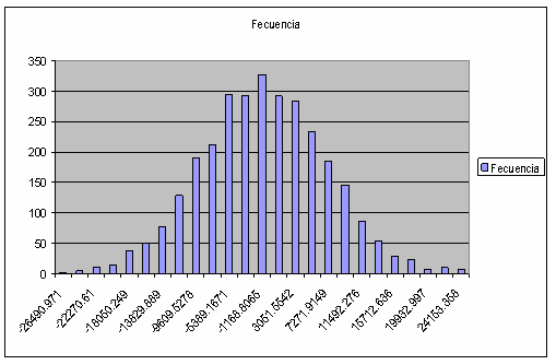
Monte Carlo VaR Statistics

Scenario ID	Scenario Name	Summary Item	Summary Group	Min MTM VaR (Loss)	Max MTM VaR (Profit)	Std Dev VaR
1	Base	Monte Carlo VaR	Overall	-26,490.97	26,263.54	7,974.72
1	Base	172356	Deal	-26,490.97	26,263.54	7,974.72

Mean VaR	Mode VaR	Median VaR	VaR Kurtosis	VaR Skew	VaR at 90% conf	VaR at 95% conf	at 98% conf	at 99% conf
95.66	-1,168.81	5.78	0.05	0.05	9,897.11	12,951.37	16,447.77	18,270.94
95.66	-1,168.81	5.78	0.05	0.05	9,897.11	12,951.37	16,447.77	18,270.94

Histograma del MTM

MTM VaR Bucket	Fecuencia
-26490.97058	2
-24380.79023	5
-22270.60989	11
-20160.42955	15
-18050.2492	37
-15940.06886	50
-13829.88852	77
-11719.70817	129
-9609.527827	190
-7499.347483	212
-5389.16714	294
-3278.986796	293
-1168.806452	327
941.373892	292
3051.554235	283
5161.734579	233
7271.914923	185
9382.095267	146
11492.27561	87
13602.45595	54
15712.6363	29
17822.81664	24
19932.99699	8
22043.17733	10
24153.35767	7



Cuadro 10 Resultados de la simulación y estimación del VaR con el método Monte Carlo en el SRO

En el Cuadro 11 se estima el VaR con el método Monte Carlo para una cartera que se compone por dos instrumentos: un *treasury* y una agencia a descuento.

Monte Carlo VaR

Scenario ID	Scenario Name	ID	Label	MonteCarloVaR	SummaryGroup	BaseMTM
1	Base	0	Monte Carlo VaR	13,956.19	Overall	217,808,588.43

Cuadro 11- Estimación del VaR para dos instrumentos: una nota y una agencia a descuento

Series de datos

Finalmente, fue necesaria la implementación de configuraciones en el SRO para capturar y analizar series de datos históricos de los factores de riesgo.

El proceso de implementación fue el siguiente:

Para los factores de riesgo utilizados en el SRO (Cuadro 17), fue necesario implementar las configuraciones que a continuación se describe:

1.-Se definieron las configuraciones de las series de datos en las curvas de riesgo semejantes a las utilizadas por *RiskMetrics* (Cuadro 12).

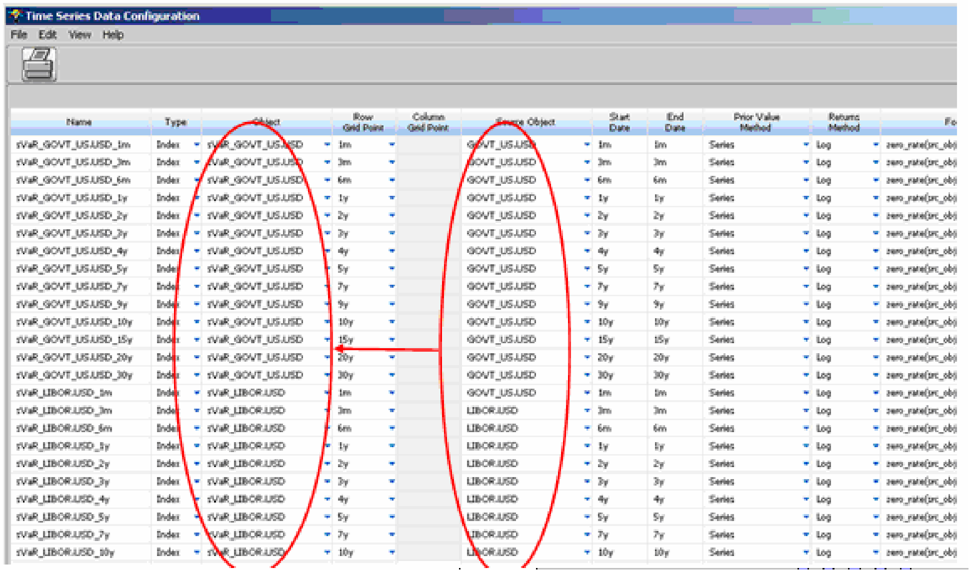
2.-Se definió al menos una configuración para el análisis de las series de datos (Cuadro 13), por medio de la cual se generan estadísticas para los factores de riesgo, sujetos a los siguientes requerimientos:

- Una serie histórica de 18 meses de datos.
- Un horizonte de tiempo para los intervalos de los retornos de 21 días hábiles (lo cual equivale a un mes calendario).
- Se utilizó el método EWMA para la estimación de volatilidades y correlaciones, con factor de decaimiento de $\lambda = .99$.

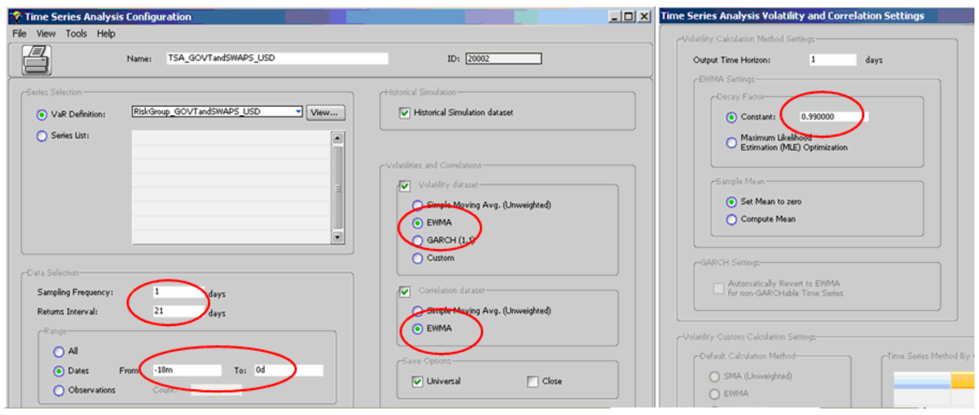
3.-Se capturaron los precios de cierre de las yield curve de 18 meses, en las series de datos del SRO (por ejemplo para LIBOR.USD y GOVT_USD.USD).

4.-Se obtuvieron las volatilidades y correlaciones y automáticamente se actualizaron los factores en las curvas de riesgos (Cuadro 14 y 15).

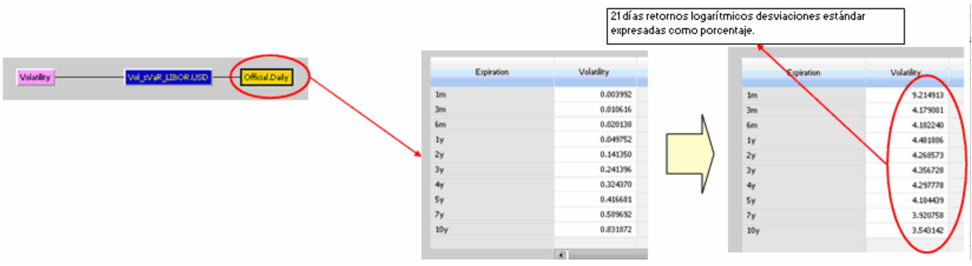
Los pasos 1-3 se realizaron sólo una vez, mientras que el paso 4 se realiza a diario de forma automática.



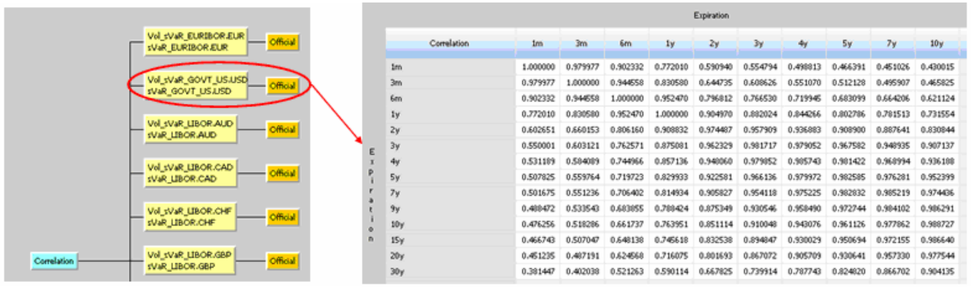
Cuadro 12- Configuración de la Serie de datos históricos en el SRO



Cuadro 13- Definición de la configuración de las series de datos históricos en el SRO

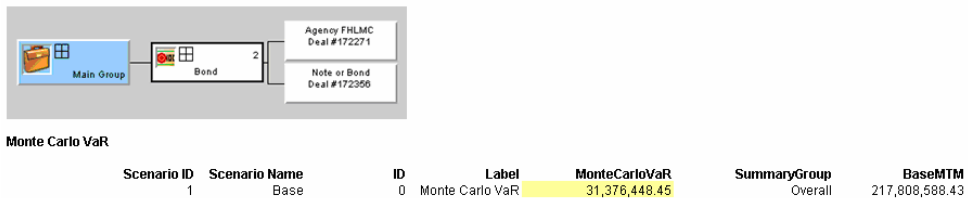


Cuadro 14- Volatilidades de los factores de riesgo (retornos logarítmicos) para la curva sVaR_LIBOR.USD



Cuadro 15- Correlaciones de los factores de riesgo para la curva sVaR_LIBOR.USD de acuerdo a su sector de vencimiento

En el cuadro 16, se genera el VaR para dos instrumentos de renta fija, con los parámetros definidos anteriormente.



Cuadro 16- Estimación del VaR con el método Monte Carlo utilizando las estadísticas de los factores de riesgo para periodos de 21 días.

	VaR Risk Factor Sets										
	sVaR_GOVT_US	sVaR_EURIBOR	sVaR_LIBOR.AU	sVaR_LIBOR.CA	sVaR_LIBOR.CH	sVaR_LIBOR.GB	sVaR_LIBOR.JP	sVaR_LIBOR.MX	sVaR_LIBOR.US	sVaR_SPOT.USD	sVaR_WTI_N
Category	Yield Curve									FX	Commodity
Market	Govt	Swap	Swap	Swap	Swap	Swap	Swap	Swap	Swap	Spot FX	OIL
Currency	USD	EUR	AUD	CAD	CHF	GBP	JPY	MXN	USD	USD	USD
Maturity											
1m	USD.R030	EUR.R030	AUD.R030	CAD.R030	CHF.R030	GBP.R030	JPY.R030	MXN.R030	USD.R030		WTI.C01
3m	USD.R090	EUR.R090	AUD.R090	CAD.R090	CHF.R090	GBP.R090	JPY.R090	MXN.R090	USD.R090		WTI.C03
6m	USD.R180	EUR.R180	AUD.R180	CAD.R180	CHF.R180	GBP.R180	JPY.R180	MXN.R180	USD.R180		WTI.C06
12m	USD.R360	EUR.R360	AUD.R360	CAD.R360	CHF.R360	GBP.R360	JPY.R360	MXN.R360	USD.R360		WTI.C12
2y	USD.Z02	EUR.S02	AUD.S02	CAD.S02	CHF.S02	GBP.S02	JPY.S02		USD.S02		
3y	USD.Z03	EUR.S03	AUD.S03	CAD.S03	CHF.S03	GBP.S03	JPY.S03		USD.S03		
4y	USD.Z04	EUR.S04	AUD.S04	CAD.S04	CHF.S04	GBP.S04	JPY.S04		USD.S04		
5y	USD.Z05	EUR.S05	AUD.S05	CAD.S05	CHF.S05	GBP.S05	JPY.S05		USD.S05		
7y	USD.Z07	EUR.S07	AUD.S07	CAD.S07	CHF.S07	GBP.S07	JPY.S07		USD.S07		
9y	USD.Z09										
10y	USD.Z10	EUR.S10	AUD.S10	CAD.S10	CHF.S10	GBP.S10	JPY.S10		USD.S10		
15y	USD.Z15										
20y	USD.Z20										
30y	USD.Z30										
AUD										AUD.XS	
CAD										CAD.XS	
CHF										CHF.XS	
DKK										DKK.XS	
EUR										EUR.XS	
GBP										GBP.XS	
HKD										HKD.XS	
JPY										JPY.XS	
MXN										MXN.XS	
NOK										NOK.XS	
NZD										NZD.XS	
SEK										SEK.XS	

Cuadro 17- Conjunto de factores de riesgo en el SRO para la estimación del VaR

II.3 Cartera Parámetro (*Benchmark*) en el Sistema de Registro de Operaciones

Los administradores de activos por lo general también están interesados en conocer el desempeño y riesgo en el que incurre su cartera respecto a una cartera parámetro (*benchmark*), por lo que contar sólo con el VaR de su cartera no es suficiente. Este análisis es útil cuando el inversionista está limitado a realizar operaciones con los instrumentos que componen su cartera de forma que pueden establecerse distintos lineamientos a seguir, por ejemplo que el VaR de su cartera no exceda en determinada cantidad el VaR de la cartera *benchmark*.

Adicionalmente, *RiskManager* posee un reporte que se conoce como "VaR Relativo" y que, en esencia, mide la pérdida que se podría generar por las diferencias entre una cartera de inversión y un *benchmark* predefinido. Este reporte se llama "VaR relativo" y para nuestros objetivos prácticos le llamaremos también VaR de la cartera diferencia.

Mediante el monitoreo de este reporte se puede determinar si la cartera está dentro de los limites de riesgo señalados por las políticas de riesgo de cada institución.

Para los objetivos de inversión del grupo de administradores de las reservas internacionales es de suma importancia tener disponible en cualquier momento. La información del VaR de la cartera diferencia entre su cartera (cartera oficial) y la cartera *benchmark*. Debido a esto, se hace necesaria también la implementación de una cartera *Benchmark* en el SRO y la estimación del VaR de la cartera diferencia.

La metodología que *RiskMetrics* utiliza para obtener dicho reporte es la siguiente:

1.-Sea

$A=\{p_i^A\}$ con $i=1,....,n$ el conjunto de todas las posiciones de la cartera oficial,

$B=\{p_j^B\}$ con $j=1,...m$ el conjunto de las posiciones de la cartera *Benchmark*,

$C=\{p_i^A-p_j^B\}$ la cartera diferencia que se compone por las posiciones originales de la cartera A menos las posiciones de la cartera B

2.-Obtener, mediante 3000 simulaciones Monte Carlo, los rendimientos para cada instrumento de la cartera C y, con base en ellos, generamos 3000 distintos valores de mercado hipotéticos para la cartera C (VM_i^C).

3.-Obtener el valor correspondiente del percentil α del conjunto de valores de mercado de la cartera C que generamos en el paso 2

4.-Obtener la diferencia entre el valor de mercado actual de la cartera C y el percentil que acabamos de obtener, este resultado será el valor que corresponderá al VaR de la cartera diferencia.

Es decir $VaR_{Diferencia} = VM_0^C - q(VM_i^C, \alpha)$

Finalmente, se desarrollaron las configuraciones necesarias para la importación al SRO de dos carteras *benchmark*: la primera, que se compone principalmente por instrumentos de renta fija (*Benchmark* de instrumentos); y la segunda, que se compone por un conjunto de distintas divisas (*Benchmark* de divisas).

II.4 Etapa de Pruebas en Ambos Sistemas

En este apartado se mostrarán las tablas 1, 2 y 3 que contienen los resultados obtenidos mediante el SRO y serán comparados con los que se obtienen de *RiskManager*,. Los valores presentes de las carteras y del VaR mostrados serán expresados en USD, a menos que se indique lo contrario.

	Descripción del instrumento	
Instrumento	Treasury Bill	Treasury Note
Cusip	912795ZA2	912828BV1
Cupón	0	3.25
Vencimiento	05/04/2007	15/01/2009
Valor nominal	900,000,000	850,000,000

Tabla 1- Descripción de instrumentos utilizados en la estimación del VaR en el SRO y RM

	Monte Carlo VaR en USD		Valor Presente de la Cartera en USD	
Tipo de instrumento	SRO	RiskManager	SRO	RiskManager
Treasury Bill	370,860	316,704	890,093,096	890,202,391
Treasury Note	5,017,739	4,715,014	838,146,377	823,857,378
Treasury Bill y Treasury Note	5,107,926	4,821,740	1,728,239,473	1,714,059,767

Tabla 2- Estimación del VaR de dos instrumentos en el SRO y RM

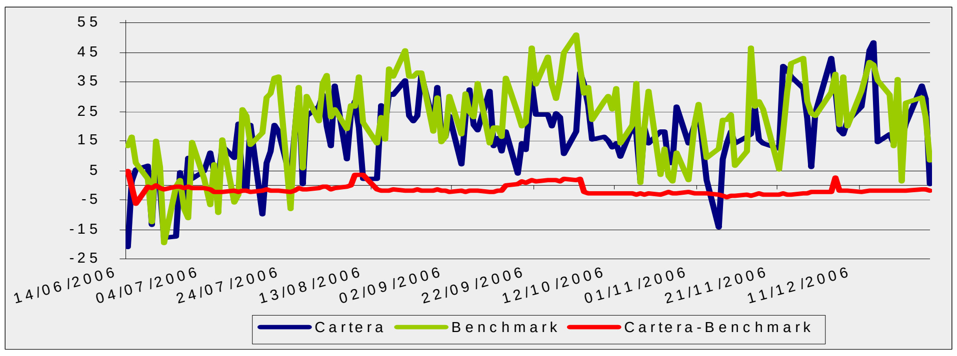
		Monte Carlo VaR	
Divisa	Monto	SRO	RiskManager
EUR	1,500,000,000	56,860,574	53,726,024
CAD	1,000,000,000	25,972,898	26,933,348
JPY	1,000,000,000	293,567	282,081
Cartera conformada con las posiciones anteriores		76,357,269	83,049,255

Tabla 3- Estimación del VaR para distintas divisas

II.5 Pruebas Finales de Estimación del VaR de Carteras Hipotéticas

En esta sección se realizaron estimaciones de VaR en forma paralela entre el SRO y RM, para carteras compuestas por instrumentos de renta fija, a saber, la Cartera, el *Benchmark* y la cartera "diferencia", durante un periodo de seis meses. Posteriormente se obtuvo la diferencia entre los valores obtenidos en cada sistema. Dichos resultados se muestran en la gráfica 1.

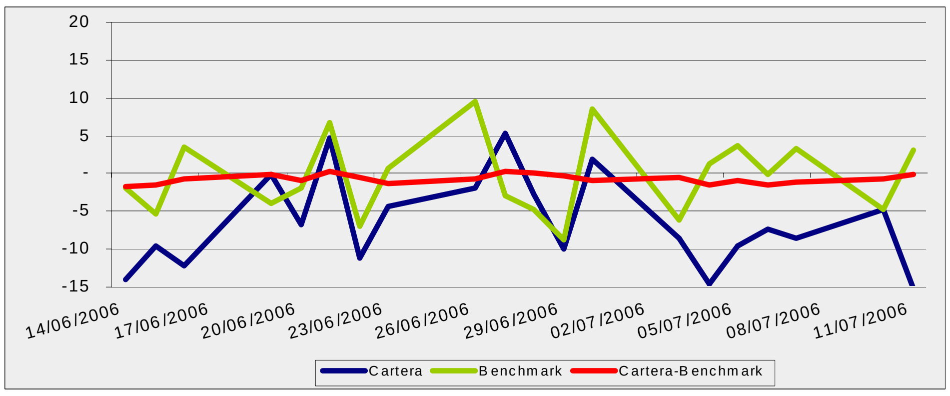
Diferencial de la estimación del VaR entre el SRO y RM para la cartera de instrumentos de renta fija
Unidades (Millones de dólares)



Gráfica 1- Diferencia entre el VaR en el SRO y el VaR en RM para carteras de instrumentos de renta fija

De forma semejante, para la cartera compuesta solamente por divisas, se estimó el VaR en ambos sistemas para el mes de Noviembre de 2006, la gráfica 2 muestra los resultados.

Diferencial de la estimación del VaR entre el SRO y RM para la cartera de divisas
Unidades (Millones de dólares)

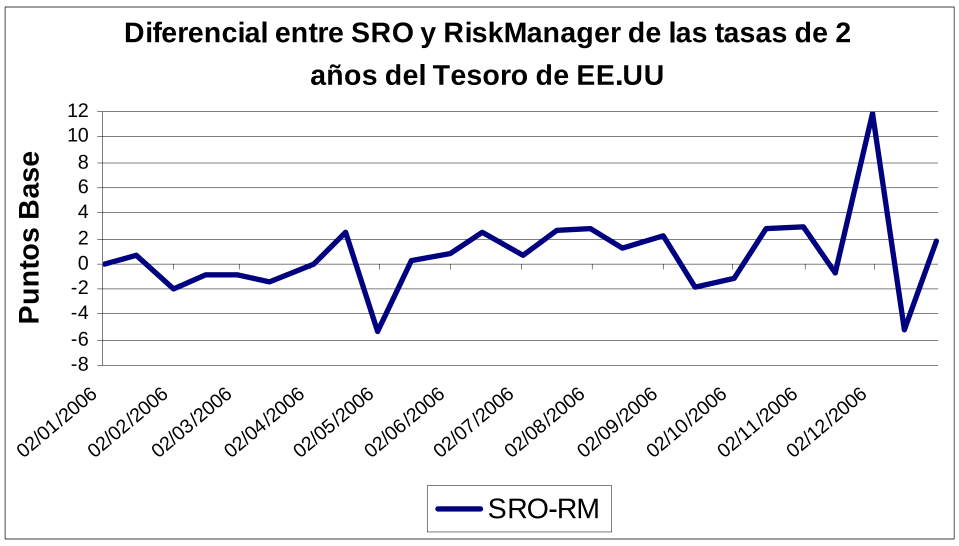


Gráfica 2- Diferencia entre el VaR en el SRO y el VaR en RM para carteras compuestas por divisas

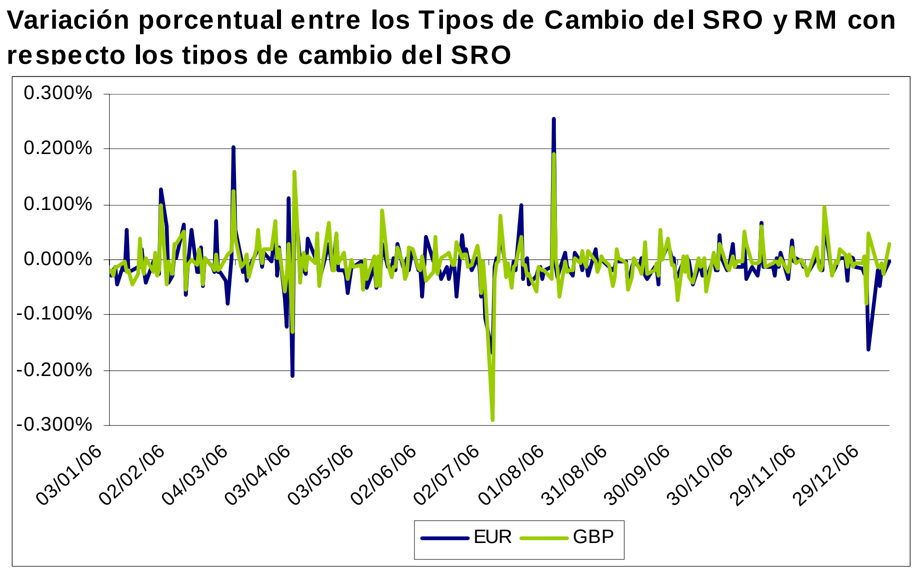
II.6 Comparación crítica de los resultados de la estimación del VaR en *Risk Manager* y los resultados provenientes del SRO.

Las diferencias encontradas en los resultados se derivan principalmente de los siguientes puntos:

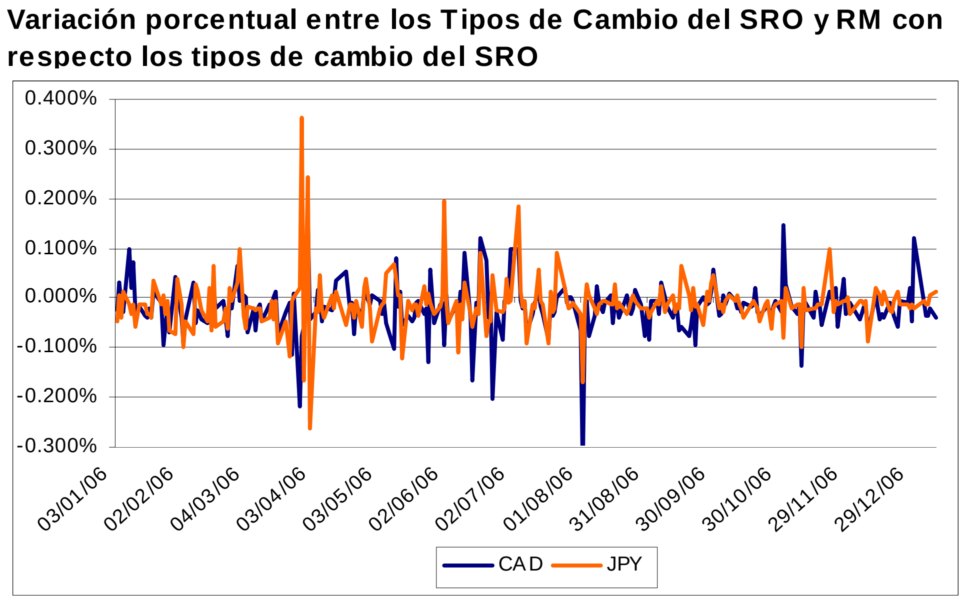
- La base de datos que *RiksManager* utiliza, contiene información sobre los factores de riesgo "al cierre", por ejemplo, las tasas del Tesoro de EE.UU. (USD GOVT), así como los tipos de cambio del conjunto de divisas que puede utilizar.
- Los precios utilizados en el SRO son obtenidos a horas específicas del día, los cuales no son necesariamente considerados como de "cierre". Las gráficas 3, 4 y 5 muestran las diferencias entre los valores de algunos de los factores de riegos de los sistemas SRO y RM.
- Lo anterior ocasiona que los conjuntos de datos históricos sean diferentes en ambos sistemas.
- Con base en el punto anterior, la matriz de covarianzas es distinta en cada sistema, a pesar que la metodología para su obtención es la misma.
- Las simulaciones son distintas en ambos sistemas, lo cual genera distintos valores de las carteras, así que al obtener la distribución de pérdidas y ganancias, el valor del percentil para cada distribución es distinta.



Gráfica 3- Diferencia de las Tasas de Interés entre el SRO y RM



Gráfica 4- Variación entre los factores de riesgo (tipos de cambio) del EUR y GBP en el SRO y RM



Gráfica 5- Variación entre los factores de riesgo (tipos de cambio) del CAD y JPY en el SRO y RM

Conclusiones

En la actualidad, una gran cantidad de administradores de inversiones utilizan el Valor en Riesgo (VaR) para cuantificar el riesgo de mercado. El VaR es una medida estadística que provee información sobre la pérdida potencial en la que una cartera de inversiones puede incurrir, ante un movimiento adverso en los mercados financieros.

El Banco de México no es la excepción. Los administradores de la Reserva Internacional cuantifican diariamente el riesgo de mercado en el que incurren por las inversiones que llevan a cabo, utilizando el VaR.

El presente trabajo profesional describió el marco teórico que fundamenta la utilización del VaR, además de llevar a cabo la exposición del proceso de implementación de la estimación del VaR en el Sistema de Registro de Operaciones (SRO).

Dicha implementación se realizó para substituir el sistema *RiskMetrics* (RM) *debido* a tres razones: *i.* La estimación del VaR en el SRO ofrece resultados más oportunos; *ii.* Se minimiza el riesgo operativo de "traspasar" las operaciones que forman parte de la carteras de inversión, debido a que ya están contenidas en el SRO; y *iii.* El Banco de México ya incurrió en el costo del SRO, por lo que la substitución de RM constituye un ahorro significativo dentro del presupuesto de la dependencia.

La implementación de la metodología de la estimación de VaR en el SRO, resultó un éxito. Como se pudo observar en la Gráfica 1, que muestra los diferenciales de las estimaciones de VaR en ambos sistemas, para una misma cartera, que se compone solamente de instrumentos de renta fija, en las estimaciones del VaR para la "cartera diferencia" el valor mínimo fue de -6.33 millones de dólares, mientras que el valor máximo fue de 4.62 millones de dólares. Por su parte, las estimaciones de VaR de la "cartera diferencia de diversificación de divisas", los valores máximo y mínimo del diferencial entre las estimaciones de ambos sistemas fue de 0.35 y -1.8 millones de dólares respectivamente, lo cual es poco significativo si tomamos en cuanta el valor total de las Reservas Internacionales.

Cabe señalar que la metodología de estimación del VaR es la misma para el SRO, y RM, por lo que las estimaciones de VaR son muy semejantes, como se muestra en las Gráficas 1 y 2. No obstante lo anterior, existen dos diferencias principales que provocan que las estimaciones sean distintas: *i*. El punto de partida; y *ii*. Los factores de riesgo.

Por un lado, el punto de partida de las simulaciones ("la semilla") es diferente. Sin embargo, las principales diferencias entre las estimaciones del SRO y de RM radican en que, a pesar de que ambos capturan los movimientos de los factores de riesgo en el mercado, éstos se alimentan a diferentes horas y a partir de diferentes fuentes, como se puede observar en las gráficas 3, 4 y 5.

Por último, cabe destacar que de todos los bancos centrales que utilizan el mismo SRO, solo tres bancos (incluyendo a México), han implementado en el SRO la estimación del VaR de sus carteras administradas. Asimismo, el Banco de México ha sido el único que ha logrado implementar el método Monte Carlo.

Referencias Bibliográficas

Bera, Higgins. "A survey of ARCH model: Properties, estimation and Testing." *Journal of Economic Surveys, 7,* 1993, pp. 305-66.

Bernandell, Carlos; Cardon, Pierre; Coche, Joachim; Diebold, Francis X., and Simone Manganelli. *Risk Management for Central Bank Foreign Reserves.* Frankfurt am Main, Germany: European Central Bank, 2004.

Bernstein, Peter L. *Against the Gods the Remarkable Story of Risk.* New York, NY: John Wiley & Sons, 1998.

Black, Fisher, and Myron Scholes. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." *Journal of Political Economy*, 81, 1973, pp. 637-54.

Bollerslev, Tim. "Generalized Autoregressive Conditional Heteresocedasticity." *Journal of Econometrics*, 31, 1986, pp. 307-27.

DeFusco, Richard; McLeavey, Dennis, Pinto, Jerald and David Runkle. *Quantitative Methods for Investments Analysis*. Baltimore, USA: AIMR, 2001.

De Lara Haro, Alfonso. *Medición y Control de Riesgos Financieros*. México, DF: Ed. Limusa, 2003.

Down , Kevin. *Beyond Value at Risk The New Science of Risk Management*. New York, USA: John Wiley & Sons, 1998.

Engle, Robert E. "Autoregressive Conditional Conditional Heteresocedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation." *Econometrica*, 50, July 1982, pp. 987-1007.

Fabozzi, Frank. *Fixed Income Analysis for the Chartered Financial Analyst Program*. Baltimore, MD: AIMR, 2000.

Fama, Eugene F. "The Behavior of Stock Market Prices." *Journal of Business,* 1965, 38(1), pp. 34-105.

Giardina, Basilio. *Manual de Estadística*. Barcelona, España: Ed. Continental, 1967.

Hull, John C. *Risk Management and Financial Institutions*. Upper-Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2006.

Kahneman, D. and Tversky, A. "Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk." *Econometrica*, XVLII, 1979, pp. 263–91.

Lore M., and L. Borodovsky. *The Professional's Handbook of Financial Risk Management*, UK: Butterworth-Heinemann, 2000.

Jarque, Carlos M. and Bera, Anil K. "Efficiency Tests for Normality, Heteroscedasticity, and Serial Independence of Regression Residuals." *Economics Letters*, 1980, 6, pp. 255-59.

______. "A Test for Normality of Observations and Regression Residuals." *International Statistics Review*, 1987, 55, pp. 163-72.

Johnson, Richard y Wichern Dean. *Applied Multivariate Statistical Analysis.* Upper-Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.

Jorion, Philippe. *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. 2nd. Ed., New York, NY: McGraw-Hill, 2000.

Mina, J. and Yi, J. "Return to RiskMetrics: The Evolution of a Standard". New York, NY: *Risk Metrics Group*, 2001[5].

Ruíz, Gumersindo; Jiménez, José y Juan Torres. *La Gestión del Riesgo Financiero*. Madrid, España: Pirámide 2000.

Venegas, Francisco. *Riesgos Financieros y Económicos. Productos Derivados y Decisiones Económicas Bajo Incertidumbre.* México, DF: Editorial Thompson, 2006.

von Neumann, John, and Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton NJ: Princeton University Press, 1944.

[5] Disponible en Internet en: http://www.riskmetrics.com/r2rovv.html