

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA  
INSTITUTO DE GEOFÍSICA

**“ANÁLISIS DE PELIGRO PARA LOS  
VOLCANES COLIMA, CITLALTÉPETL Y  
POPOCATÉPETL”**

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
M A E S T R A E N C I E N C I A S

P R E S E N T A :  
ACT. ANA TERESA MENDOZA ROSAS  
DIRECTOR DE TESIS: DR. SERVANDO DE LA CRUZ REYNA  
M É X I C O D . F . 2 0 0 7



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CONTENIDO

	Pág.
<b>AGRADECIMIENTOS</b>	
<b>RESUMEN</b>	<b>4</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>5</b>
<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>6</b>
1.1. Generalidades	6
1.2. Antecedentes	14
1.3. Objetivos	17
1.4. Características de Algunos Volcanes Activos Poligenéticos de México.	19
1.4.1. Volcán de Colima	21
1.4.2. Volcán Citlaltépetl o Pico de Orizaba	24
1.4.3. Volcán Popocatépetl	27
<b>CAPÍTULO 2. METODOLOGÍA</b>	<b>31</b>
2.1. Distribución de Weibull	31
2.2. Procesos Puntuales de Poisson	35
2.2.1 Proceso de Poisson Homogéneo	37
2.2.2 Proceso de Poisson No-Homogéneo	38
2.3. Teoría de Valores Extremos	39
2.3.1 Distribución Generalizada de Pareto	41
2.3.2 Caracterización de Valores Extremos Utilizando Procesos Puntuales	44
<b>CAPÍTULO 3. DESARROLLO Y RESULTADOS</b>	<b>46</b>
3.1 Análisis Exploratorio de Datos	46
3.1.1 Volcán de Colima	46
3.1.2 Volcán Citlaltépetl	62
3.1.3 Volcán Popocatépetl	71
3.2 Análisis de Tiempos de Espera entre Erupciones con la Función de Probabilidad	

de Weibull.	84
3.2.1 Volcán de Colima	84
3.2.2 Volcán Citlaltépetl	94
3.2.3 Volcán Popocatépetl	100
3.3 Probabilidades de Ocurrencia de Erupción Calculadas a Partir de un Proceso de Poisson No-Homogéneo de Pareto.	108
3.3.1 Volcán de Colima	108
3.3.2 Volcán Citlaltépetl	121
3.3.3 Volcán Popocatépetl	131
<b>CAPÍTULO 4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES</b>	<b>145</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>152</b>
<b>APÉNDICE</b>	<b>161</b>

## RESUMEN

Las secuencias de erupciones volcánicas son procesos de gran complejidad que requieren ser cuidadosamente analizadas para una mejor evaluación del peligro volcánico. El análisis de las secuencias de erupciones de magnitudes relativamente bajas, que se presentan con mayor frecuencia y de las que existen suficientes datos, generalmente se lleva a cabo utilizando métodos estadísticos convencionales, con distribuciones estadísticas de uso común, como son por ejemplo la distribución Binomial o la de Poisson simple. Sin embargo, para los casos en que la secuencia eruptiva no es estacionaria, o cuando se trata del análisis de eventos eruptivos de mediana y gran magnitud, que pueden ser considerados como eventos raros o extremos y de los cuales, por su naturaleza, se tienen muy pocos datos, es necesario desarrollar y aplicar metodologías específicas, como el análisis de procesos de Poisson no-homogéneos y la teoría de los valores extremos.

En el presente estudio se propone una metodología para estimar el peligro volcánico consistente de cuatro etapas. Primero se realiza un análisis exploratorio de las series eruptivas haciendo uso de datos geológicos para complementar las series históricas y reducir el problema de la escasez de datos eruptivos de magnitudes altas. Posteriormente se utiliza la distribución de Weibull para analizar y ajustar los tiempos de espera entre erupciones. Como tercera etapa se aplica un proceso de Poisson no-homogéneo con distribución generalizada Pareto como función de intensidad. Por último los resultados son comparados con ajustes obtenidos con las distribuciones de Poisson simple y Binomial.

Este método se aplica a tres volcanes activos poligenéticos: el volcán de Colima, el Popocatepetl y el Citlaltépetl. Se analizan y se comparan las estimaciones del peligro obtenidas con las diferentes metodologías y se establecen los lineamientos para que esta metodología pueda ser aplicada a otros volcanes.

## ABSTRACT

The volcanic-eruption time series are sequences describing processes of great complexity, and they represent the main tool for the assessment of the volcanic hazard. The analysis of such series is thus a critical step in the precise assessment of the volcanic risk. The study of low-magnitude eruption sequences, containing larger data populations can usually be done using conventional methods and statistics, namely the Binomial or Poisson distributions. However, time-dependent processes, or sequences including rare or extreme events, involving very few data, require special and specific methods of analysis such as the non-homogeneous Poisson process analysis or the extreme-value theory. A general methodology for analyzing these types of processes is proposed in this work with the purpose of calculating more precise values of the volcanic eruption hazard. This is done in four steps: First, an exploratory analysis of the repose-periods and eruptive magnitudes series is done complementing the historical eruptive time series with geological eruption data and thus expanding the data population. Secondly, a Weibull analysis is performed on the repose-time between successive eruptions distribution. Thirdly, the eruption occurrence data are analyzed using a non-homogeneous Poisson process with a generalized Pareto distribution as is intensity function. Finally, these results are compared with fittings obtained from conventional Poisson and Binomial distributions. The hazard or eruption probabilities of three active polygenetic Mexican volcanoes: Colima, Popocatépetl and Citlaltépetl are then calculated with this method, and compared with the results obtained with other methods.

## CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta un panorama general del presente trabajo, en el cual se expone la naturaleza del problema: el análisis de los patrones de ocurrencia de las erupciones volcánicas explosivas, y los objetivos y medios para alcanzarlos - como la metodología y características generales de los volcanes objetos de este estudio – incluyendo la información de trabajos previos.

### 1.1. GENERALIDADES

El volcanismo ha sido un factor muy importante en nuestro planeta. En la escala geológica del tiempo, la actividad volcánica ha beneficiado a la humanidad creando la atmósfera actual desde las etapas iniciales de la formación de la Tierra, y más adelante generando terrenos fértiles, estimulando y proporcionando sustento, permitiendo así el desarrollo de civilizaciones. Sin embargo, en la escala humana del tiempo, las erupciones volcánicas afectan de una manera negativa a la sociedad si éstas ocurren en regiones pobladas y/o cultivadas. Se sabe que más de 1,300 volcanes han entrado en erupción durante los últimos 10,000 años; aproximadamente la mitad de éstos han registrado erupciones en tiempos históricos. Dos tercios de los volcanes activos se ubican en o cerca de los límites de las placas tectónicas. Típicamente unos 50 volcanes entran anualmente en erupción, y este promedio no ha variado apreciablemente en tiempos históricos. Se ha estimado que unos 360 millones de personas - aproximadamente el 10% de la población del planeta - viven sobre o cerca de volcanes potencialmente peligrosos (Simkin et al. 1981). Con la rápida expansión de la población humana y si se mantiene la frecuencia eruptiva actual, muchos millones de personas más estarán bajo la amenaza de alguna actividad volcánica futura (Tilling, R. y Punongbayan, R., 1993).

Las erupciones volcánicas resultan del ascenso del magma que se encuentra en la parte interna de un volcán activo. Cuando el magma se acerca o alcanza la superficie, pierde todos o parte de los gases que lleva en solución, formando gran cantidad de burbujas en su interior. Las *erupciones* son entonces emisiones de mezclas de magma (roca fundida rica en materiales volátiles), gases volcánicos que se separan de este (vapor de agua, bióxido de carbono, bióxido de azufre y otros) y fragmentos de rocas de la corteza arrastrados por los anteriores. Estos materiales pueden ser arrojados con distintos grados de violencia, dependiendo de la presión de los gases provenientes del magma o de agua subterránea sobrecalentada por el mismo. Cuando la presión dentro del magma se libera a una tasa similar a la que se acumula, esto es, cuando el magma puede liberar los gases en solución en forma equilibrada, el magma puede salir a la superficie sin explotar. En este caso se tiene una *erupción efusiva*. La roca fundida emitida por un volcán en estas condiciones sale a la superficie con un contenido menor de gases y se llama *lava*. Comúnmente, las lavas recién emitidas se encuentran en el rango de temperaturas entre 700 y 1200 °C, dependiendo de su composición química. Si el magma acumula más presión de la que puede liberar, las burbujas en su interior crecen hasta tocarse y el magma se fragmenta violentamente, produciendo una *erupción explosiva*. Una emisión de material rocoso y gases a alta temperatura, esto es, una erupción volcánica, puede desarrollarse de diversas formas. Cuando la erupción resulta de la acción directa del magma o de gases magmáticos, se tiene una *erupción magmática*. Las erupciones pueden resultar también del calentamiento de cuerpos de agua por la cercanía de magma o por interacción con gases magmáticos. Cuando un cuerpo de agua subterráneo o acuífero es sobrecalentado por efectos magmáticos, la erupción generada por la expansión del vapor de agua se denomina *erupción freática*. En algunos casos, este tipo de erupciones puede emitir también productos magmáticos mezclados con los de la erupción de vapor. Si este es el caso, la erupción se denomina *freatomagmática*. Cuando una erupción efusiva se desarrolla lentamente y la lava emitida es muy viscosa, se puede formar una estructura en forma de cúpula a la que se llama *domo*, que puede crecer hasta cubrir por completo el cráter.

Los materiales rocosos fragmentados emitidos por una erupción, lanzados en forma sólida o líquida, se denominan *piroclastos*. Qué tan fina sea la fragmentación de los piroclastos depende de la intensidad de la erupción explosiva. Estos, al depositarse en el suelo, pueden cementarse por varios procesos, tales como solidificación por enfriamiento si venían fundidos, o por efecto del agua, etc. Los piroclastos cementados forman las *rocas piroclásticas*. El magma, antes de emerger en una erupción, se

acumula bajo el volcán a profundidades de unos cuantos kilómetros en una *cámara magmática*. Las erupciones explosivas pueden producir densas columnas de productos piroclásticos que ocasionalmente penetran la estratosfera y alcanzan alturas superiores a los 20 km; estas son las *columnas eruptivas*. Durante una erupción explosiva, el magma, al alcanzar la superficie, produce grandes cantidades del gas que traía en solución, y libera enormes cantidades de energía por diversos procesos.

Los materiales emitidos durante una erupción de cualquier tipo pueden causar diferentes efectos sobre el entorno, dependiendo de la forma como se manifiestan. Las principales manifestaciones volcánicas son:

*Flujos de lava*: La roca fundida emitida por una erupción efusiva desde un cráter superior, algún cráter secundario o desde una fisura en el suelo, puede avanzar como coladas de lava con velocidades que dependen de la topografía del terreno, y de su composición y temperatura, pero que por lo general son bajas. El efecto destructivo proviene principalmente del peso de la lava que, con una densidad típica en el rango de 2.7 a 2.9 g/cm<sup>3</sup> y la velocidad de avance es por lo general tan baja. El alcance de los flujos de lava depende críticamente de su viscosidad (es decir su resistencia a deformarse rápidamente).

*Flujos Piroclásticos*: Durante las erupciones explosivas, pueden generarse avalanchas formadas por mezclas de fragmentos de lava, ceniza volcánica y gases muy calientes, que se deslizan cuesta abajo por los flancos del volcán a grandes velocidades y pueden llegar a ser muy destructivas y peligrosas. Estas avalanchas de material magmático, gases calientes y fragmentos de roca reciben varios nombres: flujos piroclásticos, nubes ardientes o flujos de ceniza caliente. El poder destructivo de los flujos piroclásticos depende esencialmente de sus volúmenes y de sus alcances. Estos factores están controlados por el tipo de erupción que los produce, por la topografía del terreno (esto es, por las pendientes y barrancas del volcán), por las características de los materiales arrojados durante la erupción (composición y contenido de volátiles), y por la altura a la que se originan.

Los *Flujos de lodo (o lahares)*: La mezcla de bloques, ceniza y cualquier otro escombros volcánicos con agua puede producir unas avenidas muy potentes de lodo y rocas, que tienen un poder destructivo similar o incluso mayor a los flujos piroclásticos, y por lo general mayor alcance, pues pueden recorrer decenas de kilómetros. El agua que forma la mezcla puede tener varios orígenes, tales como lluvia torrencial sobre

depósitos volcánicos, drenaje abrupto de lagunas, o por la entrada de flujos piroclásticos en ríos o en zonas de nieve o glaciares provocando su fusión súbita. Los lahares pueden desarrollarse durante o después de las erupciones, por ejemplo en la estación lluviosa que sigue a una erupción. Las velocidades de estos flujos están determinadas por las pendientes, por la forma de los cauces, por la proporción de sólidos/agua y en cierta forma por su volumen y pueden variar desde pocas decenas a más de 100 kilómetros por hora.

*Derrumbes:* Los edificios volcánicos están formados por los depósitos de materiales emitidos en erupciones pasadas, y por lo general no son estructuras muy firmes. Una erupción o un terremoto pueden provocar la fractura y el derrumbamiento del material acumulado en las partes altas del volcán y producir una gran *avalancha de escombros*. Este tipo de avalancha por lo general llega a ser muy destructiva, dependiendo de la cantidad de material involucrado, de la altura a la que se origina y de la topografía del terreno.

*Columnas Eruptivas y llovias de ceniza:* Las erupciones explosivas lanzan grandes cantidades de gases calientes y fragmentos de magma (mezclas de cristales y fragmentos de vidrio) de todos tamaños al aire. Los gases calientes pueden arrastrar las partículas hasta grandes alturas. Cuando la columna eruptiva de una erupción penetra en la estratosfera, es decir, alcanza alturas mayores a unos 11 a 13 km, se dice que la erupción es *Pliniana*. Durante una erupción, los fragmentos más grandes caen cerca del volcán y los fragmentos más finos pueden ser arrastrados por el viento sobre distancias de cientos y hasta miles de kilómetros, especialmente a elevadas altitudes, produciendo llovias de ceniza sobre grandes extensiones. La ceniza más fina puede permanecer en el aire por varios días y hasta por algunas semanas, dependiendo de sus características, de su altitud y de los vientos dominantes. Los aerosoles formados por la condensación de varios de los gases volcánicos y sus interacciones con el agua, pueden permanecer suspendidos por tiempos mayores. En algunos casos, por suerte poco frecuentes, la ceniza puede acarrear depósitos de flúor a niveles tóxicos. La densidad de la ceniza no compactada es comparable a la del agua o granizo (cerca de  $1000 \text{ kg/m}^3$ ). La ceniza húmeda y compactada puede alcanzar densidades cercanas a  $3000 \text{ kg/m}^3$ . La ceniza húmeda puede tener ciertas propiedades de cohesión y cementarse. La lluvia abundante sobre depósitos de ceniza puede generar peligrosos flujos de lodo. Los fragmentos mayores, especialmente aquellos formados por las rocas densas de las estructuras más viejas del volcán, como son los domos que tapan los cráteres, son lanzados por las explosiones como

proyectiles balísticos. Las velocidades y los alcances dependen de muy diversos factores, como altura del volcán, intensidad de la erupción, topografía del terreno, vientos dominantes, etc (Araña y Ortiz, 1984; Cas y Wright, 1993; De la Cruz – Reyna S., 2004).

La diversidad de mecanismos presentes en la erupción hace de la vulcanología actualmente una ciencia multidisciplinaria, con una obvia asociación al estudio de los desastres y los peligros volcánicos. Así, tanto la comunidad científica como las autoridades civiles encaran el problema progresivo y crónico que significa el tener que enfrentar los peligros potenciales de erupciones futuras. En un sentido más preciso, el peligro volcánico, es definido como una probabilidad, lo cual conduce a considerar el estudio estadístico de los datos eruptivos para minimizar el peligro y por lo tanto el riesgo.

El planteamiento del problema empieza con la definición de riesgo. Varias definiciones han sido usadas en la literatura de peligro volcánico.

La definición propuesta por Fournier d'Albe (1979) dice que el *riesgo* puede ser expresado como una combinación de tres componentes:

1. El *peligro*, la probabilidad de que algún área en particular sea afectada por una manifestación volcánica en un intervalo de tiempo.
2. La *vulnerabilidad*, una medida de la proporción del valor probable de pérdida como un resultado de alguna de las manifestaciones volcánicas.
3. El *valor* del área amenazada, es decir, el número de vidas humanas en juego o su valor capital y capacidad productiva.

La siguiente definición ha sido adaptada de Fournier d' Albe (1979), por Tilling y Punongbayan (1993):

*Riesgo* es la posibilidad de pérdida de vidas humanas, propiedades, capacidad productiva, etc. dentro de un área determinada sujeta a (los) peligro(s).

*Peligro* es la probabilidad de que un área determinada sea afectada por procesos o productos volcánicos potencialmente destructivos en un intervalo dado de tiempo.

Una evaluación del riesgo involucra considerar la siguiente relación: *Riesgo* = (*costo*) x (*vulnerabilidad*) x (*peligro*); donde el *costo* puede incluir el número de vidas humanas, las propiedades, las obras de infraestructura y la capacidad productiva amenazada; y *vulnerabilidad* es una medida de la proporción del costo susceptible a ser perdido en un evento peligroso dado.

El riesgo puede ser reducido a través de la responsabilidad social o su preparación llevando a cabo medidas preventivas y/o reactivas. Dado que la preparación envuelve una reducción de la vulnerabilidad y del valor vulnerable a través de diferentes medidas, entre las cuales la más importante es la evaluación del peligro (De la Cruz-Reyna, 1996; De la Cruz - Reyna y Tilling, 2006). La relación original de Fournier d'Albe (1979), puede ser modificada como:

$$\text{Riesgo} = \frac{\text{Peligro} \times \text{Vulnerabilidad} \times \text{Costo}}{\text{Preparación}}$$

Actualmente, se ha tratado de usar una forma práctica de las fórmulas de riesgo original. La fórmula propuesta por De la Cruz - Reyna y Tilling (2006) es:

$$R=H*(V-P)$$

Donde *H*, el peligro es la probabilidad que una manifestación o fenómeno volcánico específico ocurra en un área dada en un intervalo de tiempo; *V*, la vulnerabilidad, es el porcentaje de la pérdida esperada del valor expuesto si ocurre dicha manifestación peligrosa (es decir, probabilidad de la pérdida). El símbolo \* es el producto de cada par de una posible manifestación de peligro conocida y el componente de vulnerabilidad puede ser considerado realista. *P* se puede definir como la "preparación," aquí refiriéndose a la serie de medidas para reducir la vulnerabilidad. *El riesgo es, por lo tanto, la probabilidad de perder un cierto porcentaje del valor de una región dada sobre un intervalo de tiempo causado por la posible ocurrencia de una manifestación volcánica particular.*

La necesidad de criterios para evaluar el peligro, y la complejidad del fenómeno volcánico son motivos para recurrir a los métodos estadísticos, con la finalidad de estimar la distribución temporal y espacial de los peligros volcánicos y contar con factores objetivos para la definición de uso del suelo. El conocimiento de la frecuencia y magnitud de erupciones para un volcán dado constituye un componente esencial en el cálculo del peligro potencial y las probabilidades de recurrencia en un intervalo de tiempo dado. En este trabajo serie o secuencia eruptiva se define como un conjunto o sucesión de valores que indican la dimensión de las erupciones distribuidas en el tiempo. Esta sucesión describe a las erupciones como eventos cuyas magnitudes se caracterizan por sus índices de explosividad volcánica. Esta definición permite analizar a las secuencias eruptivas como procesos aleatorios y a los valores de las magnitudes VEI de las erupciones como variables aleatorias, susceptibles de ser analizadas por métodos estadísticos.

El análisis de los patrones de ocurrencia de las erupciones volcánicas explosivas puede mejorar nuestra comprensión de los procesos físicos que gobiernan a los fenómenos eruptivos. Desafortunadamente, los intentos reportados en la literatura especializada, de encontrar una distribución estadística de las erupciones, no han coincidido en un resultado único. Sin embargo, cuando se clasifican las erupciones por su magnitud, se encuentra que en muchos casos los patrones de ocurrencia de erupciones para los valores intermedios y altos de magnitud de un volcán pueden ser descritos por distribuciones estacionarias y no-estacionarias de Poisson (De la Cruz-Reyna, 1993). Pero no todos los casos son fáciles de describir por distribuciones de Poisson, pues el comportamiento de una serie eruptiva puede divergir considerablemente de este tipo de distribución, o contar con series de erupciones de gran duración que sería poco justificado tomar como un proceso puntual. Para esto, existen otras opciones (ver sección, 1.2) que incluye la búsqueda de distribuciones con mayor generalidad: como un proceso de renovación, un proceso de Weibull o distribuciones compuestas.

Como en prácticamente todos los fenómenos naturales, las erupciones volcánicas se presentan con frecuencias de ocurrencia relacionadas inversamente con sus magnitudes. En muchos casos esa relación inversa es lineal entre el logaritmo de las tasas de ocurrencia y la magnitud basada en la energía utilizada (De la Cruz-Reyna, 1991, 1996, 1996a). Esto hace que necesariamente las erupciones mayores ocurran a tasas bajas. Por ello, uno de los problemas de evaluación del peligro es la escasez de datos de erupciones mayores y la imprecisión en sus fechas y magnitudes.

La vulcanología no cuenta con un criterio unificado para asignar magnitudes a las erupciones. Esto se debe principalmente a que los volcanes liberan energía a través de varios mecanismos de muy distinta naturaleza, y la forma y proporción en que intervienen no necesariamente se reproduce. Aunque la componente térmica es, por mucho, la más importante, otros mecanismos determinan el tipo de erupción. Surge entonces el problema de encontrar una forma adecuada para medir el tamaño de las erupciones (De la Cruz – Reyna, 1991). Se han elaborado varias propuestas para cuantificar la dimensión de las erupciones. Tsuya (1955) definió una escala que mide los volúmenes de diferentes tipos de productos volcánicos. Walker (1980) sugirió que se necesitan cinco parámetros para caracterizar adecuadamente la naturaleza y tamaño de una erupción explosiva: *Magnitud de masa* es la masa total del material emitido; *Intensidad* es la razón a la que el magma es expulsado (masa/tiempo); *Poder dispersivo* es el área sobre la cual se distribuyen los productos volcánicos y está relacionada con altura de la columna eruptiva; *Violencia* es una medida de la energía cinética liberada durante las explosiones, relacionada con el alcance de los fragmentos lanzados; y *Potencial destructivo* es una medida de la extensión de la destrucción de edificaciones, tierras cultivables y vegetación, producida por una erupción.

Otros autores han propuesto a la energía liberada durante las erupciones como una medida de su tamaño. Yokoyama (1957) sugirió extender la clasificación de Tsuya para comprender energía además de volumen, tomando en cuenta la relación directa que existe entre la masa total y la energía liberada en las erupciones volcánicas. Hédervári (1963) definió una escala de magnitudes de energía tomando en cuenta las diferentes formas de liberación durante las erupciones y aplicó la misma relación utilizada en sismología para expresar la magnitud como una función del logaritmo de la energía liberada (en ergs).

Actualmente el VEI (Índice de Explosividad Volcánica) es una de las formas más aceptadas para cuantificar las erupciones explosivas. Esta escala fue definida por Newhall y Self en 1982, y es una escala compuesta en la que se toman en cuenta diversas características de una erupción como son: el volumen de magma emitido, la energía térmica liberada, el alcance de los productos fragmentados, el grado de destrucción causada, la altura de la columna eruptiva, la duración de la erupción, etc. La tabla 1.1 muestra la escala VEI en términos de algunos de los parámetros eruptivos relevantes.

VEI	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Descripción	No explosiva	Pequeña	Moderada	Moderada a grande	Grande	Muy Grande	--	--	--
Volumen emitido (m <sup>3</sup> )	< 10,000	10,000-1,000,000	Uno a diez millones	Diez a cien millones	Cien a mil millones	Uno a diez km <sup>3</sup>	Diez a cien km <sup>3</sup>	Cien a mil km <sup>3</sup>	Más de 1000 km <sup>3</sup>
Altura de la columna (km)	0,1	0,1 - 1	1 - 5.	3 - 15.	10 - 25	Más de 25	--	--	--
Duración en horas	<1	<1	1 - 6.	1 - 6.	1 - 12.	6 - 12.	Más de 12	--	--
Inyección a la troposfera	mínima	leve	moderada	sustancial	Grande	--	--	--	--
Inyección a la estratosfera	nula	nula	nula	posible	definida	significativa	grande	--	--

Tabla 1.1. Clasificación del Índice de Explosividad Volcánica, adaptada de Newhall y Self (1982).

Además de la escasez de datos eruptivos de los volcanes en estudio, hay que considerar la poca confiabilidad de la asignación VEI en particular a las erupciones de magnitudes pequeñas, pues es una escala poco específica y con criterios traslapados de asignación de magnitud.

Actualmente existen datos de VEI de numerosas erupciones de volcanes de todo el mundo y la recopilación de información existente sobre erupciones pasadas ha permitido corregir y aumentar las listas de algunos de ellos.

## 1.2. ANTECEDENTES

La complejidad del fenómeno volcánico, los datos poco confiables y el escaso conocimiento de la estructura interna de volcanes, ha provocado que varios autores que han estudiado la actividad volcánica utilicen métodos estadísticos. La aplicación a secuencias de erupciones volcánicas la introdujo Wickman (1965a, 1965b, 1976), en una serie de artículos, en los que discutió la aplicación de métodos estadísticos, tratando las erupciones como eventos aleatorios y la actividad volcánica como un proceso estocástico. Wickman (1965b) advierte la poca confiabilidad de los datos registrados. Si bien esos estudios plantean métodos novedosos en vulcanología, los resultados obtenidos no se han utilizado mucho, pues son incompletos, mezclan erupciones de tipos y magnitudes diferentes y con frecuencia presenta problemas al

diferenciar eventos, esto es, si se trata de una sola erupción en un lapso largo de tiempo, o son varias erupciones cortas.

Wickman (1965a), analizó varios volcanes de distintas partes del mundo expresando la historia eruptiva (como la distribución de períodos de reposo), por medio de dos parámetros equivalentes de la teoría de renovación: la función de supervivencia y la razón de erupción de edad específica. Sin embargo, como el mismo (Wickman, 1976) indica tales modelos no fueron comparados contra datos u observaciones precisas. De hecho, cuando se han utilizado datos de erupciones, no se ha encontrado una función única de supervivencia que se pueda ajustar a volcanes del mismo tipo.

Wickman (1976), concluyó que la actividad de muchos volcanes puede ser descrita por un proceso de Poisson, y en casos más complejos de comportamiento presentar una actividad descrita por un proceso simple de Markov.

Reyment (1969), encontró que mientras el comportamiento de algunos volcanes se aproximaba a un patrón Poissoniano de actividad, otros divergían considerablemente de ese tipo de distribución. Por lo tanto, si un proceso de Poisson no se ajusta correctamente a los datos de actividad eruptiva, se puede considerar algún otro tipo de proceso de renovación, como un semiproceso de Markov o superposiciones de procesos puntuales.

Diversos métodos estadísticos relevantes han sido aplicados para varios volcanes por ejemplo; Carta (1981), describe la actividad eruptiva del volcán Vesubio por cadenas de Markov. Para ello, divide los periodos en una serie de ciclos eruptivos, modelando la duración de 4 estados: Reposo, actividad persistente, erupción intermedia y erupción final.

El volcán Etna ha sido estudiado por distintos autores como Casetti (1981), quien considera la distribución estadística de los eventos eruptivos para identificar periodos con altas concentraciones de erupciones, concluyendo que la actividad eruptiva es influenciada por fluctuaciones estacionales concentrándose las erupciones en la época de lluvia.

Mulargia (1985), estudió de manera extensa la actividad eruptiva del volcán Etna, siendo uno de los volcanes con mayor monitoreo de la región Mediterránea, con erupciones predominantemente efusivas. Sin embargo, su prolongada y continua

actividad hace difícil hacer un análisis estadístico considerando las erupciones como procesos puntuales. Este autor identificó las erupciones en términos de su duración y el volumen de magma expulsado, considerando que la magnitud de una erupción es proporcional a su duración, también mostró que la teoría de los valores extremos puede ser útil en la estimación del riesgo volcánico, usándola para estimar la probabilidad de una erupción mayor. Mulargia (1987), identificó diferentes regimenes en la historia eruptiva del volcán Etna, utilizando series de tasas media (volumen emitido/duración de la erupción) aplicada a las erupciones laterales del volcán, y a las erupciones realizadas en la cima y en los flancos. En los puntos de cambio de régimen en las series, Mulargia notó que los tiempos entre erupciones y el volumen total no coincide, implicando que las erupciones son gobernadas por otros factores además del volumen de las intrusiones de magma. Al mismo tiempo, el análisis de la actividad sísmica, no sugiere el campo de esfuerzos como el factor más importante para la detonación de una erupción. Por lo tanto, concluyó que la actividad eruptiva del Volcán Etna, tiene un comportamiento no estacionario y parece estar controlada por varios factores.

También, se han caracterizado los patrones de precursores de erupciones laterales para el volcán Etna, usando métodos estadísticos y computacionales (Mulargia et al, 1991), y se han realizado análisis estadísticos de sismicidad y actividad eruptiva, utilizando un proceso generalizado de Poisson (Gasperini et al., 1990).

Ho (1990 y 1991b), examinó la aplicación de un modelo simple de Poisson para modelar eventos volcánicos, concluyendo que este modelo no es apropiado en todas las situaciones, por lo que un modelo generalizado es preferible. Ho (1991a), utilizó un proceso no-homogéneo de Poisson, donde la función de intensidad se aproximó a una distribución de Weibull, estimando la tasa de recurrencia de actividad volcánica, para estimar el peligro asociado a una zona volcánica cercana a un depósito nuclear en la región de la montaña Yucca al sur-centro de Nevada, E.U. Esta zona volcánica no tiene actividad histórica conocida, por lo que sólo se utilizaron datos geológicos. Ho (1991a, 1991b, 1995) propone la distribución de Weibull, como un modelo general para los tiempos de reposo entre erupciones, y a la distribución exponencial es un caso particular. Como otra alternativa para estimar la probabilidad de futuras erupciones Ho (1992), aplicó la distribución Binomial Negativa, resultado de una distribución de Poisson compuesta donde la función de intensidad es una función de densidad gamma.

Por otro lado, Bebbington y Lai (1996), utilizaron datos de ocurrencia de volcanes de Nueva Zelanda, sugiriendo un proceso estocástico alternativo al de Ho, (1991b), por medio de un modelo de renovación de Weibull.

Los análisis estadísticos aplicados a los volcanes Mexicanos, como el Popocatépetl, el volcán de Colima y el volcán Citlaltépetl, han sido desarrollados por De la Cruz - Reyna, (1993,1996, 1996a, 2002), y por De la Cruz – Reyna y Tilling (2006), utilizando una metodología para identificar los patrones estadísticos de comportamiento de series temporales de ocurrencias de erupciones volcánicas por medio de su clasificación por magnitudes. El análisis de esos datos a nivel global y para el volcán de Colima, indica que para erupciones por encima de cierto VEI, los patrones de ocurrencia tienden a ser Poissonianos (De la Cruz-Reyna, 1991, 1993). Aunque por la definición del VEI (Índice de Explosividad Volcánica, Newhall y Self, 1982), la estimación de este índice no intenta medir la energía liberada por las erupciones, De la Cruz-Reyna (1991) ha reportado una buena correlación entre la tasa media de ocurrencia y la energía liberada por las erupciones, definiendo una escala de magnitudes basada en la relación entre el tamaño de las erupciones y su razón global de ocurrencia.

Para el volcán Citlaltépetl De la Cruz-Reyna y Carrasco-Núñez (2002), estimaron una distribución temporal y espacial para el peligro volcánico utilizando datos históricos y geológicos, calculando las probabilidades de ocurrencia de erupciones. De la Cruz – Reyna y Tilling (2006), asumen un proceso de Bernoulli (Feller,1973) para describir la secuencia de erupciones del volcán Popocatépetl, dividida en clases VEI, obteniendo una estimación aproximada de la probabilidad de ocurrencia de futuras erupciones utilizando la relación logarítmica entre las tasas de ocurrencia y las magnitudes VEI (De la Cruz-Reyna 1991), a datos históricos y prehistóricos del volcán Popocatépetl.

### 1.3. OBJETIVOS

El objetivo del presente trabajo es proponer una metodología estadística para cuantificar el peligro volcánico utilizando en forma conjunta datos eruptivos geológicos e históricos. Se enfrenta así el problema de homologar datos de distinta naturaleza y escala en el tiempo, y el problema de ajustar una distribución de probabilidad que

describa el proceso eruptivo en el tiempo, considerando la probable no-homogeneidad (i.e, no-estacionaridad) de la serie eruptiva y la escasez de los datos de la serie.

Se siguen dos etapas para abordar el problema de la estimación del peligro de una forma general que incluya las erupciones de magnitudes bajas a intermedias que ocurren con mayor frecuencia y que por lo general son más fáciles de fechar y medir en la escala de tiempo histórica, y las erupciones mayores que son escasas e imprecisas en fecha y tamaño. Primero se propone un ajuste de los tiempos de espera entre erupciones por medio de la distribución de Weibull (Canavos, 1996; Bebbington y Lai 1996; Gray y Odell, 1970; etc). Posteriormente, se cuantifica el peligro volcánico con la metodología propuesta en este trabajo, utilizando datos de distinta naturaleza (geológicos e históricos) y con escalas de tiempo distintas, los datos históricos precisos y datos geológicos con mayor incertidumbre en el tiempo de ocurrencia y en las magnitudes de las erupciones.

El peligro volcánico se cuantifica mediante ajuste de distribuciones probabilísticas, adaptando un proceso no-homogéneo o no-estacionario (es decir, cuando la tasa de ocurrencia es una función en el tiempo) de Poisson a series temporales de ocurrencias de erupciones volcánicas clasificadas por magnitudes, este método general tiene como caso particular al proceso homogéneo de Poisson. Para resolver la no-estacionaridad o no-homogeneidad del proceso, se recurre a la teoría de los valores extremos utilizando el método que aplica el criterio de erupciones que sobrepasan una magnitud umbral, obteniendo la función de intensidad del proceso como la función de distribución generalizada de Pareto (Davison y Smith, 1990; Lang et al., 1999; Jagger y Elsner, 2005; etc.). La teoría de los valores extremos permite enfocarse en los datos que se concentran en la cola de la distribución de las series eruptivas, es decir las erupciones de mayor magnitud, estas erupciones son de gran interés para la población por el riesgo que estas implican siendo posible analizarlas gracias a los datos geológicos que casi siempre corresponden a erupciones grandes ya que depósitos de pequeñas erupciones generalmente no se preservan.

Para el presente trabajo, se utilizan series eruptivas de 3 volcanes activos poligenéticos mexicanos: el volcán de Colima, el volcán Popocatepetl y el volcán Citlaltépetl.

El volcán de Colima es el volcán con mayor registro eruptivo histórico en México y al igual que el volcán Popocatepetl, actualmente tienen importantes manifestaciones de

actividad eruptiva. Por otro lado, el volcán Citlaltépetl, a pesar de ser un volcán activo, ha presentado en tiempos recientes sólo manifestaciones menores. Sin embargo es considerado un volcán de alto riesgo debido a la extensa población que habita sus alrededores y a las erupciones mayores que ha producido en la escala de tiempo geológica.

Es importante incorporar los datos geológicos en los estudios estadísticos, ya que los registros históricos de erupciones volcánicas consisten generalmente de pocos datos. Para el volcán de Colima se toman los datos históricos eruptivos registrados desde 1560 (De la Cruz-Reyna; 1993) y se incorporan los datos geológicos correspondientes a depósitos de avalanchas en el Holoceno tomados de Cortés et al. (2005). Para el volcán Popocatépetl se toman los datos históricos desde 1512 (De la Cruz – Reyna y Tilling; 2006), los datos geológicos tomados de Siebe y Macías (2004) e información geológica del mapa de peligros del volcán Popocatépetl de Macías et al. (1995, 1995a), y para el volcán Citlaltépetl se toma la serie eruptiva histórica desde 1530 y los datos geológicos por los últimos 13,000 años (De la Cruz – Reyna y Carrasco-Núñez, 2002).

#### 1.4. CARACTERÍSTICAS DE ALGUNOS VOLCÁNES ACTIVOS POLIGENÉTICOS DE MÉXICO

En esta sección se describen algunas características generales del vulcanismo en México, y de manera específica de tres de los principales volcanes poligenéticos activos mexicanos: Popocatépetl, Citlaltépetl y Colima.

México es un país rico en volcanes. La mayor parte del vulcanismo se manifiesta principalmente en la Faja Volcánica Mexicana (FVM) una provincia Mioceno-Cuaternario (Ferrari et al., 1999), y está relacionado con las interacciones entre las placas tectónicas de Rivera y Cocos y la Placa de Norteamérica. Esta Faja es una región volcánica elevada, con orientación aproximada Este-Oeste, que se extiende más de 1,200 km con un ancho variable entre 20 y 150 km. Sin embargo la FVM no es la única región volcánica, la cual también ha ocurrido en el Noroeste (Baja California y Sonora), en las islas del Pacífico (principalmente las Revillagigedo), y en el Sureste (principalmente en Chiapas) (De la Cruz – Reyna, 2004).

Existen varios miles de edificios volcánicos en México, de los cuales alrededor de una docena se consideran activos. Se dice que un volcán es activo, cuando existe magma fundido en su interior, o cuando puede recibir nuevas aportaciones de magma y por tanto mantiene el potencial de producir erupciones. En muchos casos es difícil decir si un volcán es activo o no. Por lo general se dice entonces que un volcán es activo si ha mostrado alguna actividad eruptiva en los últimos 10,000 años, periodo al que se denomina "Holoceno". Este número es convencional, pues no necesariamente un volcán con más de 10,000 años de inactividad, ya no volverá a tener erupción y viceversa.

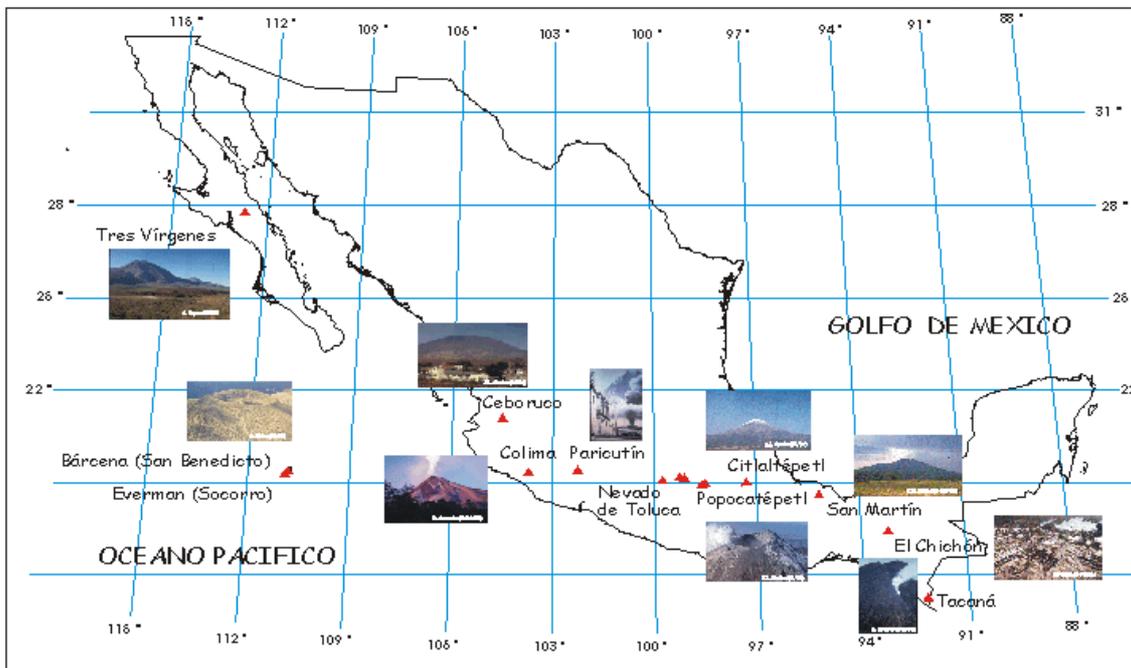


Fig. 1.1. Algunos de los volcanes activos en México.  
 Fuente: <http://www.geofisica.unam.mx/vulcanologia/index.html>

Los estratovolcanes mexicanos Colima, Popocatepetl y Citlaltépetl están ubicados en la Faja Volcánica Mexicana (FVM). Estos volcanes se encuentran construidos en los interiores de antiguos cráteres, originados por el colapso de edificios ancestrales, y representan los miembros activos de las cadenas volcánicas Cántaro-Nevado de Colima-Colima, Tláloc-Telapón-Iztaccíhuatl-Popocatepetl y Cofre de Perote-Las Cumbres-Citlaltépetl respectivamente, todas orientadas aproximadamente N-S.

Actualmente, los volcanes Colima y Popocatepetl cuentan con redes de monitoreo más completas, mientras que en el Pico de Orizaba una red de estaciones sísmicas y

geodésicas se encuentra en proceso de instalación. Los volcanes Popocatepetl, Colima y Pico de Orizaba cuentan con mapas de peligros, los cuales, representan una de las herramientas fundamentales para que las autoridades de Protección Civil puedan elaborar programas de preparación y de emergencia en caso de una potencial erupción futura (Macías, 2005).

#### 1.4.1. VOLCÁN DE COLIMA

El Volcán de Colima tiene una historia eruptiva muy intensa, considerándose el volcán mas activo de México. Este estratovolcán, forma parte, junto con el Nevado de Colima y el Volcán el Cántaro, de un complejo volcánico situado en una extensión al sur de la parte occidental de la FVM. Está ubicado en la parte central del graben de Colima. Es la manifestación mas joven de un complejo Volcánico alineado de N a S, con una altitud de 3,850 m.s.n.m. Sus coordenadas geográficas son 19°30'45"N y 103°37'55"W las cuales lo sitúan en los límites de los Estados de Colima y Jalisco.

El Volcán de Colima tiene forma cónica truncada en la cima y flancos escalonados. Hacia el NE tiene un cráter secundario formado en 1869 conocido como El Volcancito. En el frente meridional se encuentran dos domos andesíticos adventicios llamado Los Hijos del Volcán (Rodríguez-Elizarraraz, S. 1995).

Se han realizado algunos trabajos para obtener el volumen de los flujos piroclásticos producidos por el volcán de Colima en tiempos históricos (Saucedo et. al 2002, Saucedo et al. 2005). Se asume que la tasa eruptiva para los flujos piroclásticos es igual al material de piroclastos de caída,  $0.3\text{km}^3/1,000$  años. Esta es una estimación poco sustentada de la tasa eruptiva del volcán de Colima y los trabajos futuros deberían buscar fechar y estimar el volumen de los depósitos de los flujos piroclásticos en forma directa. Con base a varias estimaciones se asume que la producción de magma total durante los ciclos de las erupciones 1818 y 1913 es de unos  $60 \times 10^6 \text{ m}^3$  (Luhr y Carmichael, 1990).

Durante el pleistoceno tardío, el volcán de Colima ancestral comenzó a formarse en el flanco meridional del Nevado. Probablemente hace 7,040 años (Cortés et al. 2005) este estratovolcán andesítico alcanzó una altura estimada de 4,100 m. Entonces ocurrió una erupción mayor que causó un colapso masivo hacia el sur, que produjo

una caldera en forma de herradura de 5 km. de diámetro y una avalancha de escombros volcánicos que cubrió una superficie mayor que 1,500 km<sup>2</sup> y llegó a una distancia hasta de 70 km de la antigua cima del volcán. Este depósito tiene un volumen estimado de 10 km<sup>3</sup> y esta caracterizado por una topografía abrupta (montículos) con sucesiones de altos y depresiones cerradas y cantos rodados abundantes cubriendo la superficie. El actual volcán de Colima comenzó a crecer adentro de la caldera poco después de esta avalancha.

Los datos eruptivos históricos con magnitud (Tabla 1.1)  $VEI \geq 1$  del volcán de Colima se tomaron de De la Cruz-Reyna (1993) y se actualizaron con datos registrados en Global Volcanism Program (<http://www.volcano.si.edu>), y en el observatorio del volcán de Colima (<http://www.ucol.mx>). Los datos históricos obtenidos se complementan con los datos geológicos de depósitos de avalancha durante el Holoceno registrados en Cortés et al. (2005), por lo que podemos inferir que estos depósitos de avalancha corresponden a erupciones con magnitud mayor a VEI 4. De estos datos se infiere que el volcán de Colima tiene periodos muy grandes de espera entre erupciones mayores a VEI 4.

Año AP	VEI
2,300	>4
3,600	>4
7,040	>4

Tabla 1.2. Datos Geológicos del volcán de Colima de depósitos de avalancha durante el Holoceno, tomados de Cortés et al. (2005).

Año	VEI	Año	VEI
1560	2	1881	2
1576	3	1885	1
1585	4	1886	3
1590	3	1889	3
1606	4	1890	4
1611	3	1893	2
1612	2	1895	1
1622	4	1903	3
1690	3	1904	1
1749	2	1908	3
1770	3	1909	2
1795	2	1913	4
1804	2	1960	1
1818	4	1975	1
1869	3	1987	1
1872	3	1991	1
1873	1	1994	2
1874	1	1999	2
1877	1	2003	2
1879	1	2005	3
1880	1		

Tabla 1.3. Datos Históricos del volcán de Colima tomados de De la Cruz-Reyna (1993), de Global Volcanism Program (<http://www.volcano.si.edu>), y del Observatorio del volcán de Colima (<http://www.ucol.mx>).

El Volcán de Colima, por tener la más alta tasa de erupción de México y encontrarse en un área en la que existe un registro histórico desde el siglo XVI, ha permitido elaborar una cronología detallada de su actividad reciente y una evaluación del tamaño de sus erupciones (De la Cruz-Reyna, 1993, Bretón et al., 2002). En este volcán han ocurrido prácticamente todo tipo de erupciones volcánicas, desde explosiones freáticas localizadas en la zona del cráter, hasta erupciones plinianas, cuyos productos fueron esparcidos por el viento a varios cientos de kilómetros de la fuente de origen (Saucedo, 1997).

#### 1.4.2. VOLCÁN CITLALTÉPETL O PICO DE ORIZABA

El Citlaltépetl o Pico de Orizaba es un estratovolcán, andesítico, Cuaternario activo con coordenadas geográficas 19.03° N y 92.27° W. El Citlaltépetl con una elevación de 5,675 m.s.n.m, es el volcán activo más alto de Norteamérica, y uno de los estratovolcanes más grandes del mundo, se levanta sobre una base asimétrica con un relieve cerca de 2,900 m.s.n.m al oeste y 4,300 m.s.n.m al este (De la Cruz-Reyna y Carrasco-Núñez, 2002). Está situado en el extremo este de la Faja Volcánica Mexicana. La cima del Pico de Orizaba o Citlaltépetl que significa “Montaña de la Estrella” en lengua náhuatl, sirve como punto limítrofe entre los estados de Veracruz y Puebla.

La historia eruptiva del Citlaltépetl ha sido muy compleja, dado que incluye fases repetitivas con la construcción y destrucción del edificio volcánico. (Robin y Cantagrel, 1982; Höskuldsson, 1992; Carrasco-Núñez, 1993, 2000; Carrasco-Núñez y Ban, 1994). La evolución del Citlaltépetl se puede dividir en tres etapas de construcción distintas. (1) Crecimiento de un estratovolcán grande ancestral (cono de Torrecillas), resultando de una fase predominantemente efusiva; (2) Construcción de un cono sobrepuesto (Espolón de Oro), y extrusión de varios domos; (3) Construcción del actual cono (Citlaltépetl) y emplazamiento de varios domos dacíticos traslapados (De la Cruz-Reyna y Carrasco-Núñez, 2002).

La actividad histórica registrada del Citlaltépetl, su alto relieve y la distribución extensa de sus productos; son indicaciones de que es un volcán con un potencial de riesgo elevado. La actividad histórica, se caracteriza por una tasa eruptiva y magnitudes relativamente bajas (De la Cruz-Reyna y Carrasco-Núñez, 2002).

La formación actual del Cono Citlaltépetl no está únicamente ligada a la ocurrencia de erupciones efusivas, sino también a las ocurrencias de erupciones explosivas.

Actividad eruptiva histórica y geológica del Citlaltépetl:

Fecha	Descripción	Referencia
•1999	Sismos tectonovolcanicos de baja magnitud	CENAPRED monitoreo
•1974	Calentamiento del suelo alrededor del cráter	Crausaz (1994)
•1920-21	Flujos de escombros y fumarolas de vapor	“
•1867	Fumarolas y erupciones de ceniza*	“
•1864	Fumarolas, sismos y ruidos en el cráter	“
•1851	Actividad fumarólica	“
•1846	Erupción de ceniza*	“
•1830	Actividad fumarólica	“
•1687	Erupción de ceniza*	Mooser et al.(1958)
•1613	Actividad no confirmada (¿flujos de lava?)	Waitz (1910)
•1569-89	Erupciones de ceniza*	Crausaz (1994)
•1566	Flujos de lava desde el cráter	Waitz (1910), Mooser et al. (1958)
•1559	Actividad no confirmada	Crausaz (1994)
•1545	Flujos de lava y ceniza desde el cráter *	Waitz (1910), Mooser et al. (1958)
•1533-39	Erupciones de ceniza*	Crausaz (1994)
•1351	Actividad no confirmada	“
•1264-65	Actividad no confirmada	“
•1187	Actividad no confirmada	“
•1157	Actividad no confirmada	“

Tabla 1.4. Actividad Histórica del volcán Citlaltépetl tomada de De la Cruz-Reyna y Carrasco-Núñez (2002).

Muestra	C14 Edades	VEI (Núm. de erupción)	Depósito	Localización	Muestra	C14 Edades	VEI (Núm. de erupción)	Depósito	Localización
A83.1	690+/-50	3(12)	Caída	El Jacal	PA72.2	8170+/-70	3(1)	Flujos Piroclásticos	Loma Grande
HV14365	1730+/-85	3(11)	Flujos Piroclásticos	Zoapan	A74	8300+/-70	4(2)	Flujos Piroclásticos	B. Carnero
A75.2	1810+/-50	3(10)	Caída	San Jose	HV14320	8455+/-90	4(2)	Flujos Piroclásticos	Tliapa
A78.2	1860+/-40	3(9)	Flujos Piroclásticos	Texmalaqui II	9006	8470+/-160	4(2)	Flujos Piroclásticos	B. Escoba
A78.3	1910+/-40	3(8)	Flujos Piroclásticos	Texmalaqui II	PO-27	8580+/-80	4(2)	Flujos Piroclásticos	Tliapa
PIF-4d	2730+/-60	3(7)	Flujos Piroclásticos	San Miguel	HV14367	8595+/-85	4(2)	Flujos Piroclásticos	Teteltzingo
PU-132	3400+/-110	1(1)	Lava	Orizaba	PA-46	8620+/-140	4(2)	Flujos Piroclásticos	Tlacouatl
A84-1	3450+/-70	3(6)	Caída	El Jacal	PO-133	8630+/-90	4(2)	Flujos Piroclásticos	Teteltzingo
9015	4040+/-80	4(3)	Flujos Piroclásticos	Avalos	PO-101C	8660+/-80	4(2)	Caída	Loma Grande
PU-139	4060+/-120	3(5)	Caída	Summit	PO-133´	8690+/-50	4(2)	Flujos Piroclásticos	Teteltzingo
9017	4090+/-90	4(3)	Flujos Piroclásticos	B. Carnero	A74.2	8710+/-70	4(2)	Flujos Piroclásticos	B. Tecajete
PO-20	4130+/-70	4(3)	Flujos Piroclásticos	La Perla	PO-101b´	8760+/-70	4(2)	Flujos Piroclásticos	Loma Grande
PO-47´	4200+/-80	4(3)	Flujos Piroclásticos	Avalos	PO-93	8770+/-90	4(2)	Flujos Piroclásticos	Xometla
PO-fl	4380+/-60	4(3)	Lahar	Orizaba	PO-145	8860+/-60	4(2)	Flujos Piroclásticos	Excola
HV14321	4450+/-70	3(4)	Flujos Piroclásticos	Zoapan	PO-78	8980+/-80	4(2)	Flujos Piroclásticos	Maltrata
9004	4660+/-100	4(3)	Flujos Piroclásticos	Avalos	PU-146	9400+/-170	4(2)	Flujos Piroclásticos	Teteltzingo
PO-21	4730+/-70	3(3)	Flujos Piroclásticos	Orizaba river	PU-141	10600+/-190	4(2)	Caída	Summit
PU-127	6200+/-120	4(2)	Flujos Piroclásticos	Loma Grande	PU-111	12900+/-150	4(1)	Flujos Piroclásticos	Chocaman
A80.1	6640+/-290	3(2)	Flujos Piroclásticos	Metlac	PO-89	13270+/-90	4(1)	Flujos Piroclásticos	Chocaman
PU110b	7020+/-120	4(2)	Flujos Piroclásticos	Tliapa					

Tabla 1.5. Actividad Geológica del volcán Citlaltépetl tomada de De la Cruz-Reyna y Carrasco-Núñez (2002).

En la tabla 1.5 se consideran 12 erupciones con VEI 3 durante 8,170 años y 3 erupciones corresponden a un periodo de 13,000 años A.P., con fechas aproximadas igual a 4,100, 8,500-9,000 y 13,000 años A.P. con un  $VEI \geq 4$  (De la Cruz – Reyna y Carrasco-Núñez, 2002).

Por otro lado, la información contenida en el mapa de peligros del volcán Citlaltépetl (Sheridan et al. 2001) permite inferir las tasas de ocurrencia listadas en la tabla 1.6 para las erupciones con magnitudes VEI 4 y 5.

VEI	Tasa de Ocurrencia (erupciones/año)
4	1/4,000
5	1/9,000

Tabla 1.6. . Actividad geológica del volcán Citlaltépetl, tomada de Sheridan et al (2001).

En la actualidad existen algunas señales de actividad como exhalaciones débiles de SO<sub>2</sub> y depósitos de azufre en las paredes del cráter, por lo que se considera como un volcán activo en estado de quietud (Macías, 2005).

### 1.4.3. VOLCÁN POPOCATÉPETL

El Popocatépetl con 5,452 metros de altura, es un volcán activo con coordenadas 19.02° N y 98.62° W, localizado a 71 Km al sureste del centro de la Ciudad de México y a 40 Km al oeste de la Ciudad de Puebla, en la parte central de la FVM. Se estima que en un radio de 40 km alrededor del volcán habitan cerca de 1 millón de personas, y cerca de 23 millones en un radio de 100 km. Es un estratovolcán formado por capas de flujos de lava y depósitos piroclásticos, andesítico – dacítico (Robin, 1984). El volcán forma el extremo sur de la Sierra Nevada compuesta por los volcanes Tláloc, Telapón, Teyotl, Iztaccíhuatl y Popocatépetl.

La morfología elíptica de su cráter este – oeste (820 – 650 m), tiene su punto mas bajo a una altitud de 5,180 m.s.n.m. en su parte oriental. Su cumbre está situada en el borde occidental. Este cráter del Popocatepétl ha sido el foco de la actividad pliniana e interpliniana (Siebe et al, 1996), esta última dominada por erupciones de baja magnitud, según lo divulgado en documentos pre-Hispánicos y coloniales (De la Cruz-Reyna et al., 1995). “Popocatépetl” significa en lengua náhuatl “la Montaña que humea”; esto alude al hecho de que durante la época prehispánica, los aztecas lo observaron en diversas ocasiones en actividad como en 1363, 1509, 1512, y 1519-1528; esta última ocurrió durante y después de la conquista, por lo que incluye descripciones de Bernal Díaz y Gomarra (De la Cruz-Reyna et al., 1995).

A lo largo de su historia, el Popocatépetl ha mostrado un amplio espectro de formas de actividad eruptiva. En términos generales puede decirse que en el pasado, ha

producido numerosas erupciones de carácter menor, algunas mayores y un número pequeño de grandes eventos paroxismales. De las categorías mayores persisten evidencias geológicas en forma de depósitos volcánicos, que permiten inferir mucho de los aspectos de la naturaleza del Popocatepetl y de sus erupciones (Macias et. al. 1995, Siebe et. al. 1995). Sin embargo la actividad menor rara vez deja depósitos persistentes, que puedan ser analizados años o siglos después.

El cono moderno del Popocatepetl consiste de capas andesíticas a dacíticas de flujos de lava y depósitos piroclásticos. Hace 23,000 años a.c. ocurrió una erupción cataclísmica con el colapso del edificio y la formación de una avalancha de escombros (Macías y Siebe, 2005). Desde hace 23,000 años, el Popocatepetl ha tenido por lo menos 7 erupciones plinianas que produjeron extensos depósitos de ceniza y pómez. Las últimas 3 erupciones plinianas ocurrieron hace 5,000, 2,100 y 1,100 años (Siebe et al., 1996).

Actividad eruptiva histórica y geológica del Popocatepetl clasificada por su magnitud VEI:

Año	VEI
1512	2
1519	3
1539-1540	2
1548	2
1571	2
1592	2
1642	2
1663	2
1664	3
1665	2
1697	2
1720	1
1804	1
1919-1920	2
1921	2
1925-1927	2
1994-1997	2
2000	3
2001-presente	1-2.

Tabla 1.7. Actividad histórica del volcán Popocatepetl, tomada de De la Cruz-Reyna y Tilling (2006).

Año aproximado A.P.	Erupción
1,200	Pliniana
1,700	Pliniana
2,150	Pliniana
5,000	Pliniana
7,100	Pliniana
9,100	Pliniana
10,700	Pliniana
14,000	Pliniana
23,000	Pliniana (Erupción tipo Sta. Elena)

Tabla 1.8. Actividad geológica del volcán Popocatepetl, tomada de Siebe y Macías (2004).

Por otro lado en Macías et al (1995, 1995a) se publicó la ocurrencia de erupciones para el volcán Popocatepetl que posteriormente en De la Cruz – Reyna y Tilling (2006) se clasifican en magnitud VEI como se muestra en la tabla 1.9.

VEI	Tasa de Ocurrencia (erupciones/año)
4	2/1000
5	10/15000
6	10/40000

Tabla 1.9. Actividad geológica del volcán Popocatepetl, tomada de Macías et al (1995a).

Las ocurrencia de las erupciones de 1994-presente del volcán Popocatepetl, han permitido reunir información geológica (historia eruptiva, registro histórico, mapa de peligros, química de los productos juveniles) información geofísica (sismología, gravimetría, magnetometría, etc.) y geoquímica, una base muy importante para comprender el comportamiento de los volcanes activos. También establecer una red de monitoreo y el desarrollo de métodos para pronosticar sus eventos eruptivos. Sin embargo, hasta esta fecha no se ha logrado establecer un modelo conceptual del funcionamiento del volcán, en donde aparezca con mayor certeza la profundidad de la cámara magmática, los tiempos de ascenso del magma a la superficie y su relación con la desgasificación observada en superficie (Macías, 2005).

A continuación se describe la estructura del presente trabajo dividido en 4 capítulos:

En el capítulo 2 se presenta la metodología estadística, que será aplicada a los volcanes objeto de este estudio. Para ello se expone la teoría de los Valores Extremos, la distribución de Weibull y los procesos puntuales de Poisson.

En el capítulo 3 se estima el peligro volcánico iniciando con un análisis exploratorio de las series eruptivas correspondientes a los volcanes Popocatépetl, Citlaltépetl y Colima. Se efectúa y se analiza el ajuste de los tiempos de espera entre erupciones utilizando la distribución de Weibull, y la ocurrencia de las erupciones volcánicas por medio de un modelo de Poisson no-homogéneo, donde la medida de intensidad es obtenida mediante la distribución generalizada de Pareto, distribución que describe la probabilidad de ocurrencia de una magnitud que exceda un umbral fijo y que ocurre raramente.

En el capítulo 4 se discuten los resultados obtenidos, la metodología propuesta y las conclusiones sobre el peligro volcánico asociado a los volcanes objetos de éste estudio.

## CAPÍTULO 2. METODOLOGÍA

En este capítulo se discuten las características, definiciones y resultados de los métodos y distribuciones estadísticas frecuentemente utilizadas para describir y modelar procesos de confiabilidad, tiempos de falla, o tiempos de vida, como la distribución de Weibull, la distribución generalizada de Pareto, y otras herramientas que se utilizarán en capítulos posteriores para el análisis de series eruptivas de los volcanes poligenéticos: Popocatepetl, Citlaltépetl y Colima.

### 2.1. DISTRIBUCIÓN DE WEIBULL

La distribución de Weibull fue establecida por el físico Waloddi Weibull (1887-1979), quien demostró, con base en una evidencia empírica, que las fallas o ruptura ante esfuerzos al que se someten diversos materiales pueden modelarse de manera adecuada mediante el empleo de esta distribución. Esta distribución se ha empleado como modelo para describir situaciones del tipo tiempo-falla de componentes mecánicos y eléctricos. (Gray y Odell, 1970; Canavos, 1996; Ferráes, 2003)

*Definición.* Se dice que una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución de Weibull si su

$$f(x; k, \alpha) = \frac{kx^{k-1}}{\alpha^k} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^k} \quad (2.1)$$

con  $x > 0$ ;  $\alpha, k > 0$

También se define la probabilidad de que no se exceda un valor dado (esto es para que ocurra un valor menor o igual a un número dado ( $x$ )) como la función de

$$F(x; \alpha, k) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^k} \quad (2.2)$$

Si  $k = 1$ , la ecuación (2.2) se convierte en una distribución exponencial negativa.

Se define la función de Supervivencia como:  $S(x) = 1 - F(x)$  (2.3)

Donde  $F(x)$  es la función de distribución acumulativa de los tiempos de espera entre erupciones.  $S(x)$  es la probabilidad de que el periodo de reposo sea mayor a un determinado número  $x$ .

La media y la varianza de la distribución de Weibull son respectivamente:

$$\alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

y

$$\alpha^2 \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right]$$

Donde  $\Gamma(.)$  es la función gamma definida como:  $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} u^{n-1} \exp(-u) du, n > 0$

(Canavos, 1996).

En general, la mayoría de distribuciones usadas en análisis de confiabilidad tienen, a lo sumo, tres parámetros:

- Parámetro de escala  $\alpha$ :

Este es el parámetro que caracteriza a las distribuciones uniparamétricas. El parámetro de escala define la dispersión de la distribución.

- Parámetro de forma  $k$ :

Este parámetro define la forma de la distribución. Algunas distribuciones (como la exponencial o la normal) carecen de este parámetro pues tienen una forma predeterminada que nunca varía.

- Parámetro de localización  $\mu$ :

Se usa para desplazar una distribución hacia un lado u otro. Esto significa que, dada una distribución cuyo dominio habitual sea  $[0, +\infty)$ , la inclusión de un parámetro  $\mu$  de localización cambiará el dominio a  $[\mu, +\infty)$ .

Para incluir este parámetro hay que reemplazar  $x$  por  $x - \mu$ . Donde  $\mu$  es el parámetro de localización.

Para obtener los parámetros de la distribución de Weibull existen distintos métodos, por ejemplo, usando los estimadores de máxima verosimilitud (Ho, Chih- Hsiang; 1991, 1995, 1996). También hay una técnica gráfica que proporciona los parámetros y verifica el modelo de Weibull. Esta técnica consiste en que la función  $1/(1-F(x))$  de la distribución de Weibull, puede transformarse en una función lineal de  $\ln(x)$  por medio

$$\begin{aligned}
 F(x) &= 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^k} \\
 1 - F(x) &= e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^k} \\
 \ln(1 - F(x)) &= -\left(\frac{x}{\alpha}\right)^k \tag{2.4} \\
 \ln(-\ln(1 - F(x))) &= k \ln x - k \ln(\alpha) \\
 \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1 - F(x)}\right)\right] &= k \ln x + k \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)
 \end{aligned}$$

El procedimiento experimental más común consiste en observar los tiempos de falla o ruptura de un componente o material. Si la unidad  $i$ -ésima falla en el tiempo  $t_i$ , estimamos  $F(t_i)$  como:

$$F(t_i) = \sum_{i=1}^N \frac{n_i}{N} \tag{2.5}$$

Donde  $n_i$  es la frecuencia del periodo de tiempo de espera  $t_i$  y  $N$  es el total de periodos de tiempo entre fallas en la serie.

Para construir una gráfica de Weibull, graficamos el doble logaritmo de  $1/(1-F(t_i))$  contra  $\ln(t_i)$ . Si los puntos se aproximan razonablemente a una línea recta, puede suponerse que la distribución subyacente de tiempos de falla es del tipo de Weibull, con pendiente  $k$  e intercepción  $k \ln(1/\alpha)$ . De esta forma se obtienen los parámetros de forma y escala, para la distribución de Weibull (Bebbington y Laid; 1996).

La distribución de Weibull es versátil, puesto que exhibe varios perfiles que dependen del valor del parámetro  $k$  por ejemplo para  $k < 1$  tiene forma decreciente y si  $k > 1$ , la función de densidad de Weibull presenta un pico único (observar Fig. 2.1. izquierda). Si  $k = 3.6$  la distribución es asimétrica, si es menor que 3.6 tiene un sesgo positivo y si es mayor a 3.6 tiene un sesgo negativo.

El comportamiento gráfico de la distribución de Weibull se puede ejemplificar

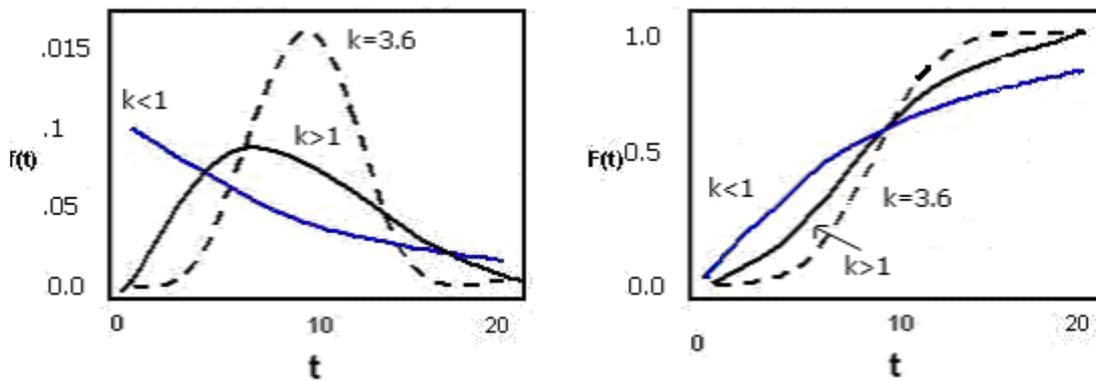


Fig. 2.1. Se ejemplifican las distintas formas que puede tomar la función de densidad de Weibull (a la derecha) y la función de distribución acumulativa de Weibull (a la izquierda) con parámetro de escala fijo ( $\alpha=10$ ) y con el parámetro de forma  $k$  variable.

## 2.2. PROCESOS PUNTUALES DE POISSON

Los Procesos Puntuales de Poisson, son un caso particular de procesos estocásticos, por esta razón esta sección se inicia con la definición de Proceso Estocástico. Posteriormente se tratan los Procesos Puntuales Poisson Homogéneo y No-Homogéneo (Cox e Isham, 1966).

Definición: Un proceso estocástico  $X = \{X(t): t \in T\}$  es una colección de variables aleatorias. Es decir, para cada  $t$  en el conjunto indexado  $T$ ,  $X(t)$  es una variable aleatoria. Si el conjunto  $T$  es un conjunto numerable,  $X$  es llamado un proceso discreto, y si  $T$  es un conjunto continuo,  $X$  es llamado un proceso continuo.

Definición: Un proceso estocástico  $\{N(t), t \geq 0\}$  se dice que es un proceso de conteo si  $N(t)$  representa el número total de eventos que han ocurrido al tiempo  $t$ . Un proceso de conteo  $N(t)$  debe satisfacer:

- 1)  $N(t) \geq 0$
- 2)  $N(t)$  es de valor entero
- 3) Si  $s < t$ , entonces  $N(s) \leq N(t)$
- 4) Para  $s < t$ ,  $N(t) - N(s)$  es el número de eventos que han ocurrido en el intervalo  $(s, t]$ .

Se dice que un proceso de conteo posee incrementos independientes si el número de eventos que ocurren en intervalos de tiempo disjuntos (es decir, que no se tenga algún elemento en común entre los intervalos) no tiene efecto sobre la probabilidad de ocurrencia de cualquier otro evento. Por ejemplo, esto significa que el número de eventos que han ocurrido al tiempo  $t$ , es decir,  $N(t)$ , debe ser independiente del número de eventos que ocurran entre los tiempos  $t$  y  $t+s$ , es decir,  $N(t+s) - N(s)$ .

Se dice que un proceso de conteo posee incrementos estacionarios si la distribución del número de eventos que ocurren en cualquier intervalo de tiempo depende solamente del tamaño del intervalo de tiempo. Es decir, el proceso tiene incrementos

estacionarios si el número de eventos en el intervalo  $(t_1+s, t_2+s]$  (es decir,  $N(t_2+s) - N(t_1+s)$ ) tienen la misma distribución que el número de eventos en el intervalo  $(t_1, t_2]$  (es decir,  $N(t_2) - N(t_1)$ ) para todo  $t_1 < t_2$ , y  $s > 0$  (Ross, 1983).

El proceso de Poisson  $\{N(t) : t \geq 0\}$  es un tipo de proceso estocástico de conteo que se utiliza para modelar situaciones de conteo de ocurrencias de un tipo de evento particular en un intervalo de tiempo dado. Un proceso de Poisson tiene el conjunto discreto  $\{0, 1, \dots\}$ , como espacio de estados. Por lo tanto, las ocurrencias de los eventos están definidas en el conjunto de los números naturales. Este proceso adquiere su nombre a partir del siguiente resultado:

Para cualquier  $t \geq 0$  y  $n = 0, 1, \dots$

$$P(N(t) = n) = e^{-\theta t} \frac{(\theta t)^n}{n!} \tag{2.6}$$

Es decir, la variable  $N(t)$  tiene una distribución de Poisson( $\theta t$ ).

Una posible trayectoria o realización de un proceso de Poisson se muestra en la figura 2.2.

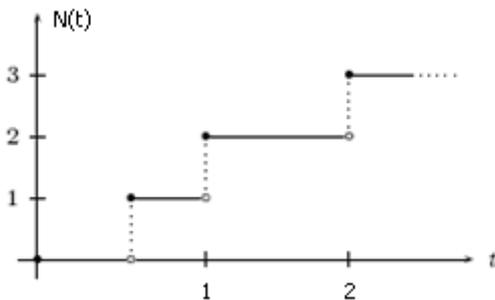


Fig. 2.2. Realización de un proceso de Poisson, donde la abscisa representa la variable  $t$ , por ejemplo el tiempo y la ordenada es  $N(t)$  que representa el número de ocurrencias de un evento en  $t$ .

$N(t)$  está definido en un intervalo discreto y  $t$  generalmente es el tiempo definido en un intervalo continuo. Por ejemplo,  $N(t)$  puede representar el número de llamadas telefónicas recibidas en un conmutador, el número de accidentes ocurridos en un cierto lugar, nacimientos de una especie, ocurrencia de fuego, terremotos, erupciones volcánicas, etc.

### 2.2.1. PROCESO DE POISSON HOMOGÉNEO

Definición: Se dice que el proceso de conteo  $\{N(t): t \geq 0\}$  es un Proceso de Poisson con tasa  $\theta [\theta > 0]$ , si:

- 1)  $N(0) = 0$ .
- 2) El proceso tiene incrementos independientes.
- 3) El número de eventos en algún intervalo de longitud  $t$  sigue una distribución de Poisson con media  $\theta t$ .

Es decir,  $\forall s, t \geq 0$ ,  $P(N(t+s) - N(s) = n) = e^{-\theta t} \frac{(\theta t)^n}{n!}$   $n \in \mathbb{N}$

La condición 3 de la definición de proceso de Poisson, implica que tienen incrementos estacionarios y que:

$$E[N(t)] = \theta t,$$

Y

$$\text{Var}[N(t)] = \theta t.$$

En promedio se registran  $\theta t$  ocurrencias del evento en  $[0, t]$

Sea  $\{X_n, n \geq 1\}$  la secuencia de tiempos entre eventos de un proceso de Poisson (es decir, tiempo entre la  $(n+1)$ -ésimo y  $n$ -ésimo evento), entonces  $\{X_n, n \geq 1\}$  son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas exponencialmente con media  $1/\theta$ .

Proposición: Propiedad de Renovación del Proceso Poisson.

Sea  $\{N(t): t \geq 0\}$  un proceso Poisson de intensidad  $\theta > 0$ ,  $t_0$  fijo y  $Y(t) = N(t) - N(t_0)$  para  $t \geq t_0$ . Entonces  $\{Y(t) : t \geq 0\}$  es un proceso Poisson de intensidad  $\theta > 0$ .

Observación: La proposición anterior es consecuencia del hecho de que la distribución exponencial es una distribución continua con pérdida de memoria; es decir, si  $T \sim \text{exponencial}(\theta)$ ,  $\theta \geq 0$ , entonces  $P(T > t+s | T > s) = P(T > t)$ . (Ross, 1983)

## 2.2.2. PROCESO DE POISSON NO - HOMOGÉNEO

En esta sección, la intensidad de Poisson  $\theta$  no es una constante, sino que es una función de  $t$ .

$$\theta(t) = \int_0^t \theta(s) ds \quad (2.7)$$

de esta forma se puede encontrar una representación homogénea equivalente a un proceso no-homogéneo

Definición: El proceso de Conteo  $\{N(t): t \geq 0\}$  se dice que es un Proceso de Poisson no-estacionario o no-homogéneo con función de intensidad  $\theta(s) > 0, s \geq 0$  si:

- 1)  $N(0) = 0$ .
- 2) El proceso tiene incrementos independientes.
- 3) El número de eventos en algún intervalo de longitud  $t$  es Poisson distribuido con media  $\theta(t)$ .

Es decir,

$$\forall s, t \geq 0, \quad P(N(t+s) - N(s) = n) = e^{-(\theta(t+s) - \theta(s))} \frac{(\theta(t+s) - \theta(s))^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.8)$$

Ross (1983)

### 2.3. TEORÍA DE VALORES EXTREMOS

La teoría de valores extremos es el área de la estadística dedicada a desarrollar modelos y técnicas para estimar el comportamiento de eventos inusuales o raros. Estos eventos raros son los que están alejados del grueso de la distribución (media, mediana) y pertenecen a la cola de la distribución. Sin embargo, no hay una definición formal de eventos extremos; en muchos casos, los eventos extremos se pueden definir como aquellos eventos que exceden en magnitud algún umbral, pero también se pueden definir como el máximo o mínimo de una variable sobre un cierto período.

Las bases de la teoría de extremos en el marco de muestras aleatorias fueron establecidas por Fisher y Tippett (1928), y unificadas y extendidas por Gnedenko (1943). La aplicación estadística de modelos probabilísticos fue estudiada y formalizada por Gumbel (1958). Pickands (1975) generalizó las leyes límite clásicas, lo que permitió la mejora de los procedimientos de modelación. A partir de los años 80, se ha analizado el comportamiento de valores extremos en procesos estocásticos con estructura más general.

Esta teoría se aplica desde hace varios años en hidrología y en el campo ambiental, por ejemplo en: niveles del mar, velocidades de viento, concentraciones de contaminantes, etc. (Smith, 1989, 2001; Anderson, et al. 1997; Lin X.G., 2003, Beguería, 2005; Jagger y Elsner, 2005; etc.). Recientemente, los modelos de valores extremos se han usado también en aplicaciones financieras, evaluación de daños y records deportivos (McNeil, A.J., 1999; Reiss R.D., 2001).

Desde un punto de vista estadístico, el problema de la teoría de valores extremos es un problema de extrapolación. La idea básica que conduce a tal extrapolación, es encontrar un buen modelo paramétrico para la cola de la distribución de los datos, que genere el proceso y que luego se pueda ajustar a las observaciones extremas. La extrapolación se obtiene entonces analizando el comportamiento del modelo mas allá del rango de los datos observados.

La dificultad fundamental cuando se estiman valores extremos, es la necesidad de hacer inferencias acerca de los niveles de un proceso para el cual hay muy pocos o ningún dato en ausencia de reglas físicas o empíricas para hacer tales cálculos.

En términos generales, hay dos aproximaciones al tema de la Teoría de los Valores Extremos (TVE): un grupo de modelos más viejos, conocidos como modelos de máximos de bloques, y un nuevo grupo de modelos conocidos como “picos sobre un umbral” (POT: “peaks-over threshold”). Este último grupo corresponde a modelos para datos con un alto umbral prefijado (Coles, S. 2001, Beguería, S., 2005. etc.).

Las distribuciones de valores extremos surgen formalmente como distribuciones límites para el máximo o el mínimo de una secuencia de variables aleatorias.

Supongamos que  $X_1, X_2, \dots$ , son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una función de distribución  $F$ , así

$$F(z) = P(X_j \leq z)$$

$$\forall j, z$$

Luego, para el máximo  $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots\}$  la función de distribución, en teoría, viene dada por:

$$P(M_n \leq z) = P(X_1, \dots, X_n \leq z) = P(X_1 \leq z) P(X_2 \leq z) \dots P(X_n \leq z) = (P(X_i \leq z))^n = F(z)^n$$

que corresponde al producto múltiple de las probabilidades independientes  $P(X_i \leq z)$ . Sin embargo, esto no es útil en la práctica porque la función de distribución  $F$ , por lo general, es desconocida (Smith, 1989, 2001; Hernández, 2005).

Un método alternativo es aceptar que  $F$  es desconocida y tratar de buscar la distribución aproximada que pueda tener  $F(z)^n$ , basándose solo en datos extremos para estimarla, esto es, se busca el comportamiento de  $F(z)^n$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

La distribución límite aproximada es la distribución Generalizada de Valores Extremos (Gumbel, 1958; Coles, 2001; Reiss, 2001; Díaz, 2003; Hernández, 2005) para mayor información ver Apéndice A1 del presente trabajo.

Sin embargo, esta es la manera clásica de la teoría de los Valores Extremos, es decir los modelos viejos de esta teoría -modelos de máximo por bloque-, pero esta teoría

evoluciono rápidamente en los noventas como los máximos por encima de un umbral, teoría expuesta en la siguiente sección.

### 2.3.1. DISTRIBUCIÓN GENERALIZADA DE PARETO

Esta sección expone la teoría moderna de los Valores Extremos, la cual es enfocada a los valores máximos por encima de un valor  $u$ , distribuidos como una distribución generalizada de Pareto.

El método que caracteriza a los excedentes por arriba de un umbral, se basa en la hipótesis de que la ocurrencia de excesos sobre un umbral estricto en una serie caracterizada por una variable aleatoria independiente idénticamente distribuida, presenta un comportamiento de Poisson; y que los excesos tienen una distribución exponencial o, más generalmente, de Pareto generalizada, (Davison y Smith 1990, Coles, S. 2001).

Los métodos de umbrales son más flexibles que los métodos basados en el máximo ocurrido en un periodo determinado, digamos anual, ya que al tomar todos los excedentes por arriba de un umbral, es posible usar mucho más datos.

Definición: La distribución de valores que exceden un umbral " $u$ " preestablecido se define como:

$$F_u(y) = P(X-u \leq y \mid X > u) = \frac{F(y+u)-F(u)}{1-F(u)}$$

$$0 \leq y \leq X_F - u$$

en donde  $X_F \leq \infty$  es el punto más a la derecha de  $F$ .

La distribución de excesos,  $F_u$ , representa la probabilidad de que se exceda el umbral " $u$ " a lo sumo en una cantidad " $y$ ", condicionado a la información de que ya se ha excedido el umbral. (Cebrián, A.C., 1999; Lang, et al. 1999; McNeil, A.J., 1999; etc)

Definición: La función de distribución  $G_{k,a}$  con dos parámetros se conoce como la Distribución Generalizada de Pareto (DGP).

$$G_{k,a}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{ky}{a}\right)^{1/k} & \text{con } k \neq 0 \\ 1 - e^{-y/a} & \text{con } k = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Donde  $a > 0$  y  $k$  es arbitrario; el rango de  $y$  es:  $0 < y < a/k$ , Si  $k \leq 0$ ;  $0 < y < \infty$ , Si  $k > 0$ .

El caso  $k < 0$  es solo una reparametrización de una o varias formas de la distribución de Pareto, pero la extensión  $k \geq 0$  fue propuesta por Pickands (1975).

El caso  $k=0$  es interpretado como el límite  $k \rightarrow 0$ , es decir la distribución exponencial (ver apéndice A2).

El teorema que permite caracterizar el modelo asintótico de los excedentes de un umbral dado, como la distribución generalizada Pareto se muestra en el apéndice A3.

El papel de esta distribución límite, en el contexto del estudio de los extremos, fue establecido por Pickands (1975), quien demostró que la convergencia a la distribución generalizada de extremos, en el caso de una muestra de máximos, es equivalente asintóticamente a una tasa Poisson de excedentes para umbrales grandes, siendo la Distribución Generalizada de Pareto, la distribución límite para estos excedentes.

#### PROPIEDADES PARA ESTABILIDAD DEL UMBRAL (Davison, 1990):

Propiedad 1. Si  $Y$  es una distribución generalizada de Pareto y  $u > 0$  un umbral, entonces la distribución condicional para excesos sobre un umbral, la distribución condicional de  $Y-u$  dado  $Y > u$  también se distribuye como una Distribución Generalizada de Pareto (DGP).

Propiedad 2. Si  $N$  tiene una distribución de Poisson y condicionado sobre  $N$ , donde  $N$  que es el número de excedentes de un umbral; y  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ , son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como Generalizada de Pareto, entonces el  $\max(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$  tiene la distribución Generalizada de Valor Extremo. Así, un

proceso Poisson del número de veces de excedencia, con exceso DGP, implica la distribución clásica de valores extremos.

Ambas propiedades caracterizan la DGP en el sentido que no hay otra familia que tenga estas propiedades.

La elección del umbral es básicamente un compromiso, entre elegir un valor lo suficientemente elevado como para poder aplicar los resultados de la teoría de extremos, y lo suficientemente bajo como para tener el material estadístico necesario para la estimación de los parámetros  $a$  y  $k$ , (Hosking, y Wallis, 1987; Davison y Smith, 1990, Lin X.G., 2003) ya que la variabilidad de las estimaciones sería menor cuanto mayor sea el tamaño de muestra.

Los excesos de una variable con DGP también tienen una DGP, por la propiedad 1, permitiendo localizar el valor de (los) umbral(es) a partir del cual se puede considerar los datos arriba de este (estos) umbral(es) como valores extremos, representando a su vez parámetros de la distribución cuyo valor sea constante.

Davison y Smith (1990) aplican esta idea al valor esperado del exceso sobre un umbral  $u$  que, en el caso de una DGP, es una función lineal del umbral.

$$\text{Si } k > -1, u > 0 \text{ y } a - uk > 0, \text{ entonces } E(x - u | x > u) = \frac{a - ku}{1 + k} \quad (2.10)$$

(Davison y Smith, 1990; Díaz, A. 2003; Beguería, S., 2005; Lin X.G., 2003)

La demostración de la linealidad de la ecuación 2.10 se muestra en el apéndice A4

En los valores superiores al umbral a partir del cual la DPG es adecuada, el exceso medio muestral,

$$\bar{x}_u = \frac{\sum_{i: x_i > u} (x_i - u)}{N_u} \quad (2.11)$$

debe ser aproximadamente una función lineal de  $u$ . Donde  $N_u$  es el número de excedentes por arriba de un umbral prefijado  $u$ . (McNeil, A.J. y Saladin, T., 1997; Martínez, P.A. 2003; Lin X.G., 2003)

Considérese la grafica de la media de los excesos contra el umbral  $u$ . Si la suposición de que se comporta como una distribución de Pareto Generalizada es correcta,

entonces la gráfica debe seguir una línea recta con intercepción  $a/(1+k)$  y pendiente  $-k/(1+k)$ . Por lo tanto es un método gráfico que estima la linealidad de la gráfica. Este es un método gráfico relativamente sencillo que permite corroborar la relación lineal entre la media de excesos y el umbral  $u$ . (Davison y Smith, 1990; Coles, S. 2001, Beguería S., 2005, Lin X.G., 2003, etc.)

### 2.3.2. CARACTERIZACIÓN DE VALORES EXTREMOS UTILIZANDO PROCESOS PUNTUALES

El procedimiento de excesos sobre un umbral se puede incluir dentro de una aproximación más general basada en resultados de procesos puntuales. (Cebrián, A.C, 1999; Coles, S. 2001).

Esta aproximación permite incorporar a la inferencia todas las observaciones extremas, definiendo como extremos los valores que exceden un umbral estricto. La aproximación puntual a este problema fue originalmente introducido por Pickands (1971).

La idea básica consiste en formar, a partir de una serie  $X_1, X_2 \dots X_n$  variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas; con distribución desconocida  $F$ , con constantes normalizadoras  $a_n$  y  $b_n$ ; y una serie de umbrales crecientes  $u_n$ .

Entonces se define un proceso puntual  $N_n$  bidimensional como:

$N_n = \{(i/(1+n), (X_i - b_n)/a_n) : i = 1, \dots, n\}$ , y se caracteriza el comportamiento de este proceso en regiones  $[t_1, t_2] \times (u, \infty)$ , donde en el intervalo  $[t_1, t_2]$  se representa el tiempo escalado en que ocurre un excedente y en el intervalo  $(u, \infty)$  se encuentran los valores de las observaciones excedentes; de esta forma, se obtiene una representación del comportamiento de  $X_i$  en las colas (Smith, 1989, 2001).

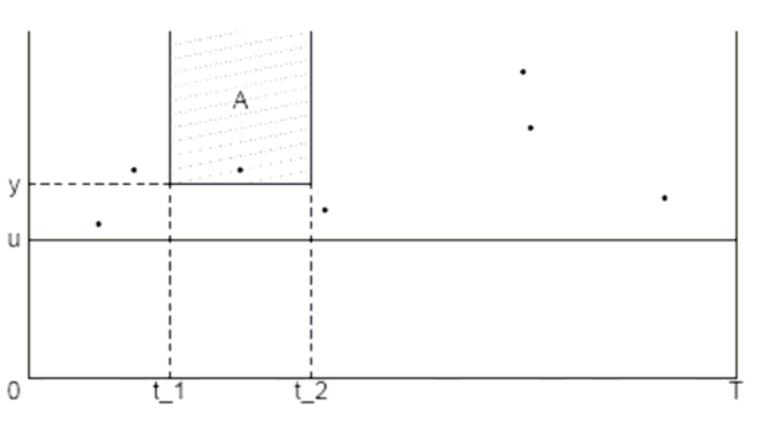


Fig. 2.3. Representación gráfica de un proceso puntual. Los puntos sobre la grafica representan el tiempo  $t$  y los valores de los excedentes sobre el umbral  $u$ . El conjunto  $A$  consiste de todos los puntos entre  $t_1 = t$  y  $t_2 = t + \Delta t$  y entre todos los valores entre  $(y, \infty)$ .

La tasa esperada de excedentes para el proceso de Poisson no-homogéneo de Pareto es:

$$\theta(A) = \theta \left[ 1 - G_{k,a}(x-u) \right] = \frac{N_u}{t} \left[ 1 - \frac{k(x-u)}{a} \right]^{1/k} \quad (2.12)$$

Donde  $N_u$  es el número de excesos mayores a un umbral “ $u$ ” predeterminado observados durante un periodo  $[0, t]$  (Brason y Palutikov, 2000; Lin, X.G., 2003).

La aplicación adecuada de las metodologías expuestas en este capítulo de manera individual son suficientes para obtener los objetivos numéricos del análisis de peligro de las series eruptivas de los volcanes Popocatépetl, Citlaltépetl y Colima, como se tratará en los capítulos siguientes.

## **CAPÍTULO 3. DESARROLLO Y RESULTADOS**

En este capítulo se estima el peligro volcánico asociado a los volcanes Popocatépetl, Ciltlaltépetl y Colima por medio de un procedimiento que puede separarse en cuatro etapas. Primero se hace un análisis exploratorio de las series eruptivas históricas y geológicas. Posteriormente se aplica la distribución de Weibull para ajustar los tiempos de espera entre ocurrencias eruptivas. Como tercera etapa se utiliza un proceso de Poisson no-homogéneo con distribución generalizada de Pareto como función de intensidad. Por último, los resultados son comparados con ajustes obtenidos con las distribuciones de Poisson y Binomial (Feller, 1973).

### **3.1 ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS**

La finalidad del análisis exploratorio de datos es examinar los datos antes de cualquier estimación estadística. De esta forma se consigue un entendimiento básico de los datos que permite detectar fallos en el diseño, identificar casos atípicos (es decir observaciones con características diferentes de las demás pudiendo distorsionar seriamente el comportamiento de los contrastes estadísticos) y un mejor conocimiento de su estructura, permitiendo así organizar y preparar los datos para su procesamiento.

#### **3.1.1 VOLCÁN DE COLIMA**

Es importante tener un panorama general del comportamiento de los datos; para esto se grafica la serie eruptiva en el tiempo con magnitudes mayores o iguales a VEI 2 pues los datos para magnitudes menores son escasos y poco confiables.

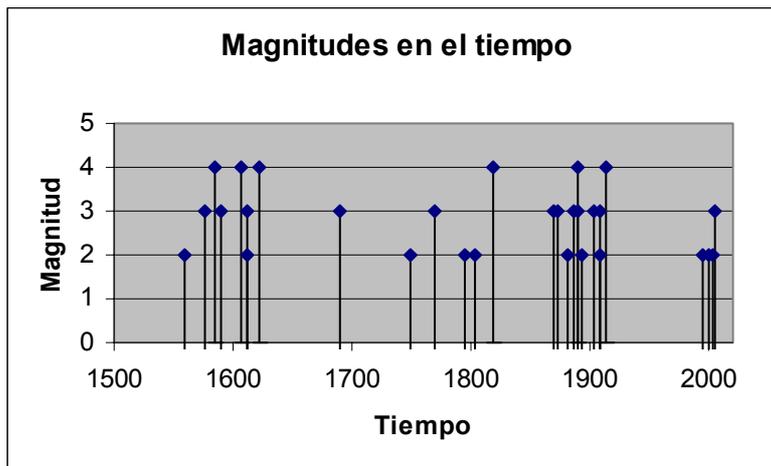


Fig. 3.1. Serie de datos eruptivos históricos del volcán de Colima (tabla 1.3) con magnitudes VEI mayores o iguales a 2.

En la serie de tiempo no se observa periodicidad, ni tendencia, y tampoco valores atípicos (es decir observaciones con características diferentes de las demás). Se nota mayor cantidad de erupciones con magnitud VEI 2 y 3.

Las frecuencias de ocurrencia para las magnitudes de eventos históricos y geológicos consisten en once erupciones de magnitud 2, doce erupciones de magnitud 3 y seis erupciones de magnitud 4 desde 1560 (De la Cruz-Reyna, 1993), y tres erupciones de magnitud mayor a VEI 4 en 7,040 años A.P. (Cortes, et al. 2005). Se nota que aunque los datos con VEI mayor a 4 son de distinta naturaleza y escala en el tiempo presentan consistencia ya que las erupciones de mayor magnitud muestran una tasa de ocurrencia menor que erupciones de magnitud menor, como se mencionó en el Capítulo 1 (ver Fig 3.2).

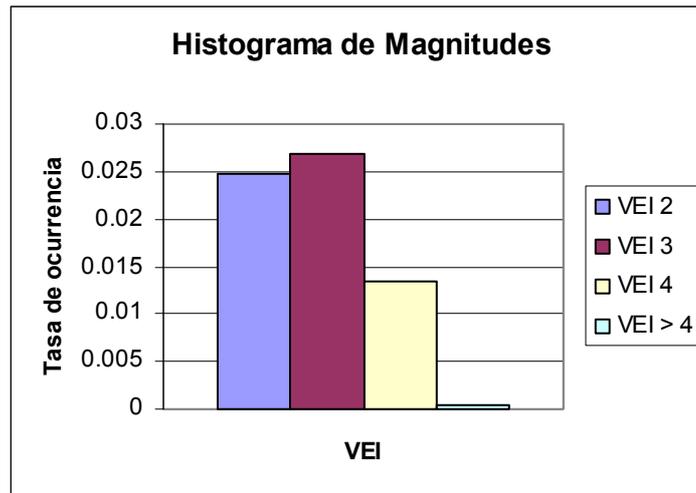


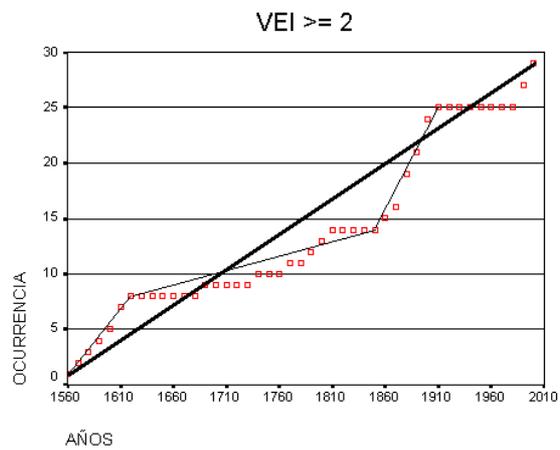
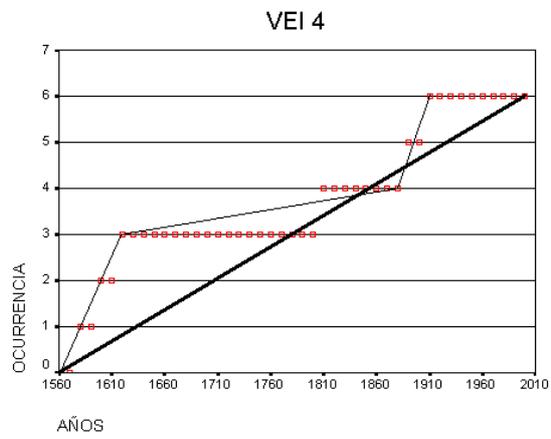
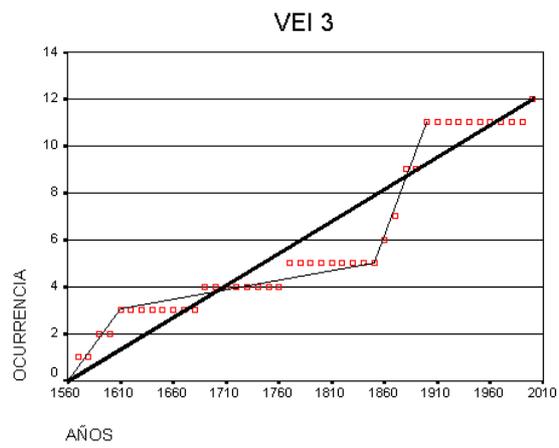
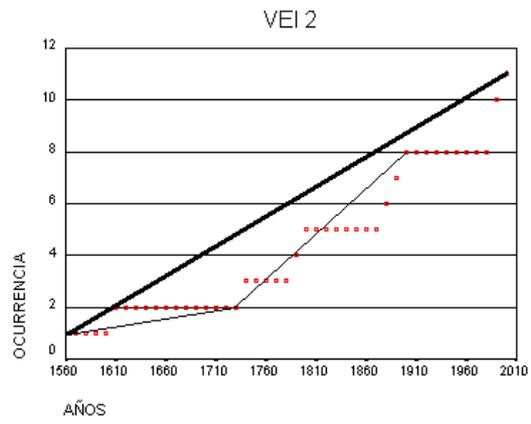
Fig. 3.2. El eje de la ordenada muestra las tasas de ocurrencia anuales por cada magnitud VEI registrada en los datos históricos desde 1560 y datos geológicos con magnitud VEI mayor a 4 en 7,040 años A.P. del volcán de Colima, el eje de la abscisa representa la magnitud.

Para los objetivos del presente trabajo, se clasifican las series eruptivas histórica y geológica del volcán de Colima en magnitudes VEI (actualizada de De la Cruz – Reyna, 1993).

	VEI				
	2	3	4	$\geq 2$	$\geq 3$
1560-1569	1	0	0	1	0
1570-1579	0	1	0	1	1
1580-1589	0	0	1	1	1
1590-1599	0	1	0	1	1
1600-1609	0	0	1	1	1
1610-1619	1	1	0	2	1
1620-1629	0	0	1	1	1
1630-1639	0	0	0	0	0
1640-1649	0	0	0	0	0
1650-1659	0	0	0	0	0
1660-1669	0	0	0	0	0
1670-1679	0	0	0	0	0
1680-1689	0	0	0	0	0
1690-1699	0	1	0	1	1
1700-1709	0	0	0	0	0
1710-1719	0	0	0	0	0
1720-1729	0	0	0	0	0
1730-1739	0	0	0	0	0
1740-1749	1	0	0	1	0
1750-1759	0	0	0	0	0
1760-1769	0	0	0	0	0
1770-1779	0	1	0	1	1
1780-1789	0	0	0	0	0
1790-1799	1	0	0	1	0
1800-1809	1	0	0	1	0
1810-1819	0	0	1	1	1
1820-1829	0	0	0	0	0
1830-1839	0	0	0	0	0
1840-1849	0	0	0	0	0
1850-1859	0	0	0	0	0
1860-1869	0	1	0	1	1
1870-1879	0	1	0	1	1
1880-1889	1	2	0	3	2
1890-1899	1	0	1	2	1
1900-1909	1	2	0	3	2
1910-1919	0	0	1	1	1
1920-1929	0	0	0	0	0
1930-1939	0	0	0	0	0
1940-1949	0	0	0	0	0
1950-1959	0	0	0	0	0
1960-1969	0	0	0	0	0
1970-1979	0	0	0	0	0
1980-1989	0	0	0	0	0
1990-1999	2	0	0	2	0
2000-2009	1	1	0	2	1
<b>Total</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>6</b>	<b>29</b>	<b>18</b>

Tabla 3.1. Clasificación de la ocurrencia eruptiva histórica (tabla 1.3) del volcán de Colima en magnitud VEI en periodos de 10 años.

Las gráficas de la figura 3.3 muestran las series acumulativas históricas a través del tiempo en las categorías VEI igual a 2, 3, 4,  $\geq 2$  y  $\geq 3$ .



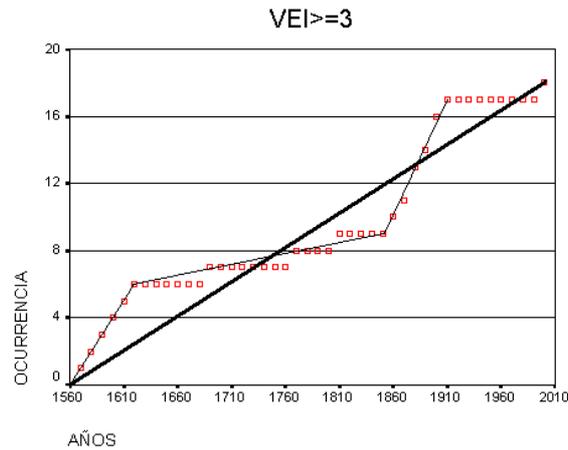


Fig. 3.3. Las Gráficas representan el número acumulado de las erupciones históricas del volcán de Colima durante 1560-2006 en las categorías de magnitud VEI igual a 2, 3, 4,  $\geq 2$  y  $\geq 3$ . La línea gruesa corresponde a la tasa media y las líneas delgadas corresponden a las tasas por régimen.

Se observa en la figura 3.3 en todas las categorías VEI que la ocurrencia de las erupciones no se da siempre a una tasa constante en el tiempo, es decir que pueden observarse dos o más tasas de ocurrencia distintas para cada categoría de magnitud, implicando una probable no-estacionaridad en la escala de tiempo “corta” (decenas de años) (De la Cruz – Reyna, 1993, 1996).

La independencia entre los periodos de reposo - tiempo entre ocurrencia de erupciones – se prueba con la gráfica de correlación serial, donde la duración de cada intervalo  $t_{i+1}$  entre las 2 erupciones sucesivas es graficada contra la duración del intervalo  $t_i$ , si el resultado tiene una gran dispersión y una alta concentración de puntos cerca de los ejes es considerado un proceso aleatorio (Cox y Lewis, 1966). En caso contrario se presume un proceso con algún tipo de memoria.

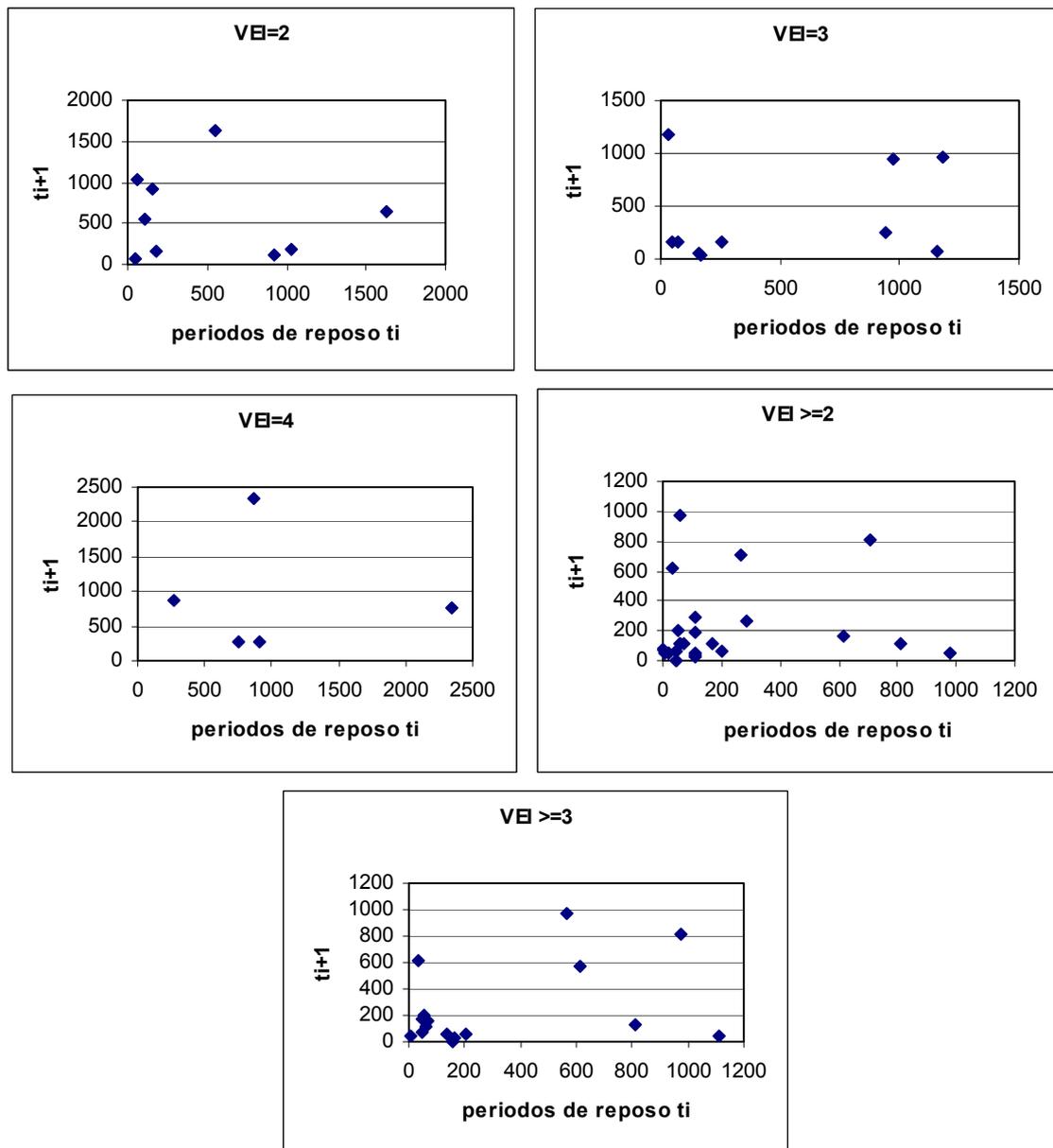


Fig. 3.4. Gráficas de correlación serial de  $t_i$  y  $t_{i+1}$  intervalos de reposo (medidos en meses desde la tabla 1.3) entre erupciones del volcán de Colima para las series clasificadas en VEI 2, 3, 4,  $\geq 2$ , y  $\geq 3$ .

El coeficiente de correlación entre  $t_i$  y  $t_{i+1}$  para la serie clasificada en VEI 2, 3, 4,  $\geq 2$ , y  $\geq 3$  es respectivamente: -0.096, 0.256, -.057, 0.152 y 0.384.

Gráficamente y considerando los bajos valores de los coeficientes de correlación, se concluye que los tiempos de espera entre erupciones para cada clase de magnitud de la serie son independientes, esto es que se trata de un proceso aleatorio, sin memoria.

Hasta el momento se ha observado la independencia de los periodos de reposo entre ellos sin importar el orden o tiempo de ocurrencia. Si todos los periodos pequeños de

reposo ocurren en secuencia o los periodos grandes son agrupados en el tiempo, la secuencia eruptiva del volcán sería no - estacionaria. Para verificar la dependencia en el tiempo o el agrupamiento de periodos de reposo se utilizan la media móvil para  $m$  periodos de reposo consecutivos. Klein (1982) mostró que si  $t$  es el total de  $m$  periodos de reposo consecutivos en una secuencia grande donde la media de los periodos de reposos es  $a$ , la variable  $\chi^2 = 2t/a$  es la chi-cuadrada con  $2m$  grados de libertad. La media móvil suaviza la secuencia temporal de eventos, de tal forma que solamente las variaciones sistemáticas en la tasa de ocurrencia se destacan en la gráfica.

En la figura 3.5 se muestra la gráfica de los promedios de  $m = 5$  periodos de reposos sucesivos para la serie eruptiva  $VEI \geq 3$  del volcán Colima. La fecha en el eje de la abscisa corresponde a la fecha del último periodo de reposo de cada secuencia. La media de los 17 periodos de reposo es de 25.24 años mostrada con la línea gruesa y existe solo un 5% de oportunidad de que alguno de los 3 puntos oscuros, correspondientes a los valores independientes de la media móvil caiga fuera de la línea punteada. En una primera prueba, se toma un límite de error de 5% (línea punteada), el cual se calcula a partir de la combinación de la chi-cuadrada y la distribución Binomial. Para determinar aproximadamente el límite superior de confianza se asume una media de periodo de reposo 25.24 años. Tomando los valores  $a=25.24$  años para la media,  $m=5$ , y  $v=2*m=10$  (número de grados de libertad) la secuencia de media móvil de 5 puntos representada en la figura 3.5 sigue una distribución chi-cuadrada con parámetros  $\chi^2 = 2t/a$  y  $v$ . Por medio de la búsqueda de convergencia entre los valores de las distribuciones chi-cuadrada y binomial por prueba y error, se obtiene 54.4 años como límite superior de confianza al 95%. Entonces del total de 5 periodos de reposos:  $t = 54.4*5=272$  y  $\chi^2 = 2*(272)/25.24=21.59$ . La probabilidad de caer en la cola derecha de este valor de  $\chi^2$  con 10 grados de libertad es  $p=0.0173$ , calculada de la evaluación numérica de la expresión integral de  $\chi^2$ ,

$$P(f, x) := \int_x^{500} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right) \cdot 2^{\frac{f}{2}}} \cdot x^{\frac{f-2}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx \quad (3.1)$$

y corresponde a la probabilidad de que solo un punto elegido como aleatorio caiga fuera de 54.4 años. La probabilidad que cualquiera de los 3 puntos oscuros

independientes graficados en la figura 3.5 excedan el límite específico de confianza está dada por la distribución binomial con  $x=1$ ,  $n=3$  y  $p=.0173$ . La probabilidad requerida es  $P=3*.0173*(1-.0173)^2=.05$  (que corresponde al 95% de confianza)

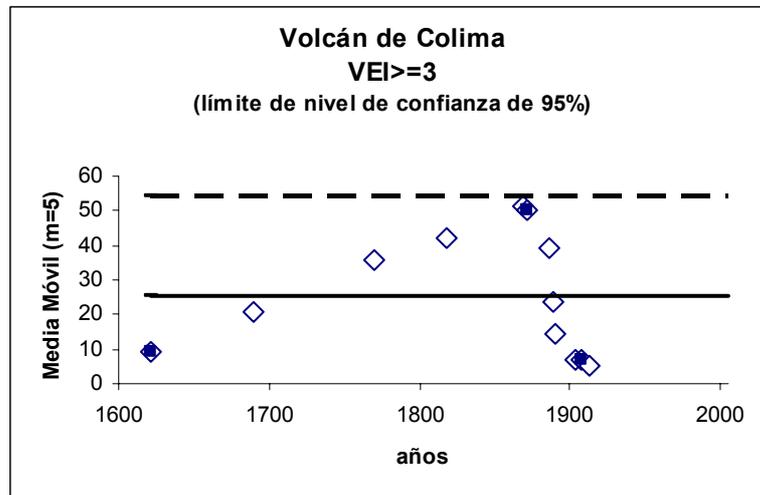


Fig. 3.5. Dependencia en el tiempo de la media móvil de 5 periodos de reposo consecutivos de la serie eruptiva del Volcán de Colima de magnitud  $VEI \geq 3$ . Los puntos representan los promedios de 5 periodos de reposo consecutivos graficados a la fecha del último de los periodos de reposo del promedio, así cada 5 puntos (puntos con fondo oscuro) son independientes. La línea horizontal gruesa es la media de los 17 periodos de reposo durante 1576-2005. La línea horizontal punteada representa el nivel superior del 5% de confianza igual a 54.4 años.

En la Figura 3.5 se aprecia un punto muy cerca del límite de nivel de confianza del 95%. Al realizar el análisis con un 90% de confianza se obtiene 48.86 años como límite superior. Entonces el total de 5 periodos de reposo  $t= 48.86*5=244.3$  y  $\chi^2 = 2*(244.3)/25.24=19.36$ . La probabilidad de caer en la cola derecha de este valor de  $\chi^2$  con 10 grados de libertad es  $p=0.0359$ , de la solución numérica de la ecuación 3.1. Esta es la probabilidad de que solo un punto elegido como aleatorio caiga fuera de 48.86 años. La probabilidad que cualquiera de los 3 puntos oscuros independientes graficados en la figura 3.6 excedan el límite específico de confianza está nuevamente dada por la distribución binomial con  $x=1$ ,  $n=3$  y  $p=.035$ . Ahora la probabilidad requerida es  $P=3*.0359*(1-.0359)^2=0.10$ , que corresponde al 90% de confianza.

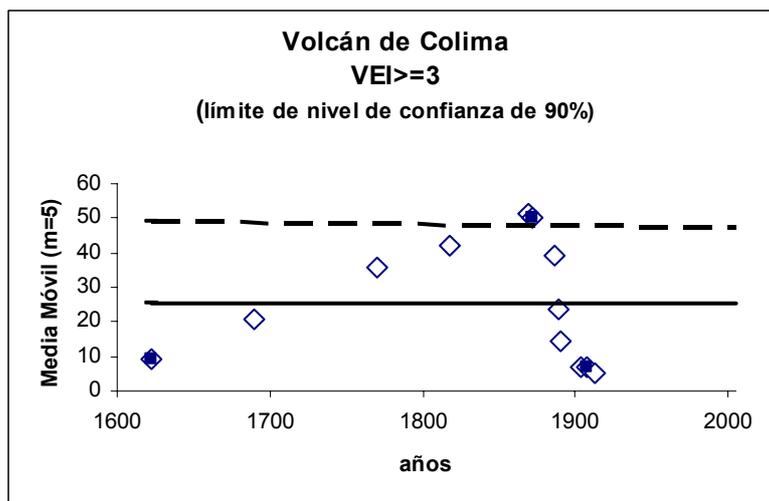


Fig. 3.6. Dependencia en el tiempo de la media móvil de 5 periodos de reposo consecutivos de la serie eruptiva del Volcán de Colima de magnitud  $VEI \geq 3$ . Los puntos representan los promedios de 5 periodos de reposo consecutivos graficados a la fecha del último de los periodos de reposo del promedio, así, de cada 5 puntos, uno (puntos oscuros) es independientes. La línea horizontal gruesa es la media de los 17 periodos de reposo durante 1576-2005. La línea horizontal punteada representa el nivel superior del 10% de confianza igual 48.86 años.

Las figuras 3.5 y 3.6 sugieren que la secuencia eruptiva del volcán de Colima es débilmente no-estacionaria. Esto significa que la condición de no-estacionaridad se satisface al 10% de confianza, pero no al 5%.

Esta condición puede explicarse considerando la naturaleza de la secuencia de erupciones. La figura 3.3 muestra claramente la existencia de dos regímenes eruptivos que ocurren en forma sucesiva y escalonada. Los regímenes altos, correspondientes a los períodos 1560-1630 y 1860-1913, muestran una alta tasa eruptiva del orden de 1 erupción por década en la categoría  $VEI \geq 3$ . En contraste, los regímenes bajos (1630-1860 y 1913-2006), muestran una tasa eruptiva del orden de 0.12 erupciones por década. Esta diferencia de casi un orden de magnitud en las tasas hace suponer que el proceso es no estacionario. De hecho, la prueba de media móvil desarrollada con los datos de erupciones ocurridas hasta antes de la década de 1990 muestra que la secuencia es no estacionaria al 95% de confianza (De la Cruz-Reyna, 1993, 1996). Sin embargo, al añadir los datos más recientes (1991-2006) se obtiene un acercamiento a la condición de estacionaridad.

Esto se explica considerando que los regímenes altos y los regímenes bajos suceden alrededor de una tasa media de largo plazo que tiende a ser constante (línea gruesa en la figura 3.3). La condición de “casi-estacionaridad” o de no-estacionaridad “débil”

adquiere sentido cuando se considera la escala de tiempo sobre la que se analiza la secuencia eruptiva. Si el análisis se hace sobre un periodo de tiempo grande comparado con la duración de los regímenes altos y bajos, se obtiene una aceptación de la hipótesis de estacionaridad, por lo menos a niveles de confianza bajos, del 5%. Si el análisis se hace sobre muestras más cortas, cuya duración no incluya varios regímenes altos y bajos, se obtiene una aceptación de la hipótesis de no-estacionaridad al mismo nivel de confianza.

Esto indica que es necesario tener extremo cuidado al hacer evaluaciones del peligro volcánico (probabilidad de ocurrencia de una erupción de determinada magnitud) y seleccionar adecuadamente la tasa eruptiva representativa del régimen vigente (para evaluaciones asociadas a la condición no-estacionaria), o la tasa media del largo plazo (para evaluaciones asociadas a una condición media estacionaria).

Esto cobra especial importancia al incorporar datos sobre una escala de tiempo más amplia. Tal es el caso de las erupciones que exceden la escala histórica. Para los datos geológicos de erupciones (tabla 1.2) no se ha podido determinar con precisión el valor de magnitud VEI, más se especula que es mayor a VEI 4 con base a la extensión y potencia de sus depósitos. Esto significa que estaremos considerando a las erupciones en la escala geológica de tiempo que pudieran alcanzar valores hasta VEI 6. La tabla 3.2 muestra las ocurrencias de erupciones con VEI mayor a 4 ocurridas en Holoceno (Cortés et al. 2005). Tampoco se han podido precisar las fechas de ocurrencia, debido a las incertidumbres en los métodos de fechamiento. Esto genera dificultades adicionales en el tratamiento estadístico de estos datos y en su ensamble con la secuencia histórica y sus parámetros estadísticos. Para abordar este problema se hacen a continuación una serie de consideraciones para compatibilizar la serie histórica con la serie geológica.

En la mayoría de los fenómenos naturales, incluyendo las erupciones volcánicas se observa una relación inversa aproximadamente lineal entre el logaritmo de las tasas de ocurrencia y la magnitud basada en la energía liberada (De la Cruz-Reyna, 1991, 1996). Esto hace que necesariamente las erupciones mayores ocurran a tasas bajas, comparadas con las tasas de las erupciones menores.

$$\text{Log}(\theta) = a M + c \quad (3.2)$$

Donde  $M$  es la medida de la intensidad eruptiva o magnitud,  $a$  y  $c$  son constantes que se obtienen de efectuar una regresión lineal y  $\theta$  es la tasa de ocurrencia (De la Cruz – Reyna, 1993, De la Cruz – Reyna y Carrasco-Núñez, 2002)

Intervalo en años A.P.	VEI >4
0-999	0
1000-1999	0
2000-2999	1
3000-3999	1
4000-4999	0
5000-5999	0
6000-7999	1
Total	3

Tabla 3.2. Ocurrencia en periodos de 100 décadas de los datos eruptivos geológicos del volcán de Colima con magnitud VEI > 4 (Cortés et al. 2005).

Debido a que la magnitud VEI de una erupción es un tanto ambigua y con posibilidad de extender los criterios de la tabla de clasificación de VEI (tabla 1.1) es posible para propósitos estadísticos designar valores intermedios, ya que el valor de la magnitud máxima VEI 6 puede ser cuestionable.

Se analizan combinaciones de posibles valores enteros e intermedios de magnitud VEI para los 3 registros geológicos de la tabla 3.2, condicionados a que *las erupciones con un VEI mayor ocurren a una tasa menor que las erupciones con un VEI menor*, manteniendo el criterio de que son erupciones mayores a una magnitud VEI 4.

	Tiempo en años AP desde la ocurrencia estimada de la erupción	VEI			
		Caso COL1	Caso COL2	Caso INCOL3	Caso INCOL4
1	7,040	6	5	4.5	5
2	3,600	5	5	4.5	4.5
3	2,300	5	5	4.5	4.5

Tabla 3.3. Combinaciones de valores enteros (casos COL1 y COL2) de magnitud VEI y combinaciones de valores intermedios (casos INCOL3 e INCOL4) de magnitud VEI, para los datos geológicos del volcán de Colima (Cortés et al. 2005).

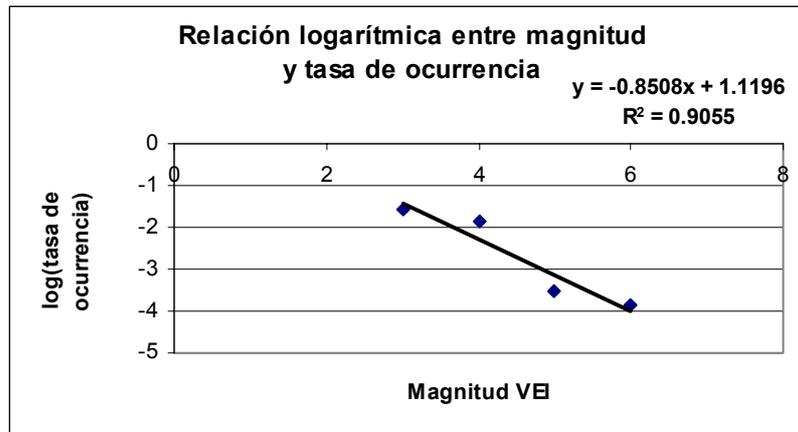
No se considera en la tabla 3.3 el caso de asignar a las magnitudes VEI de las erupciones geológicas valores totalmente distintos entre ellos pues se estaría tomando en cuenta que la tasa de ocurrencia de erupciones de distinta magnitud es la misma, es decir, que las tasas de ocurrencia de las magnitudes VEI 4.5, 5 y 6 ocurren con la misma frecuencia lo cual contradice la condición de que *las erupciones con un VEI mayor ocurren a una tasa menor que las erupciones con un VEI menor*. Por otro lado, en todo momento se mantiene la condición de que esas erupciones excedieron la magnitud VEI 4.

Para el siguiente análisis de verisimilitud el orden en la asignación de las magnitudes de las erupciones para cada caso en las 3 fechas geológicas (tabla 3.3) no afecta al propósito del análisis, pues las tasas de ocurrencia siguen siendo las mismas en cualquier orden. Por lo tanto solo se toman esos 4 casos.

Para el caso COL1 de las combinaciones de valores de magnitud VEI de los datos geológicos las tasas anuales de ocurrencia para VEI 5 sería  $2/7040$  y para VEI 6 sería  $1/7040$ ; para el caso COL2 la tasa anual de ocurrencia para VEI 5, es  $3/7040$ . Por medio de los datos históricos tenemos que la tasa anual de ocurrencia para VEI 3 es  $12/446$  y para VEI 4 es  $6/446$ .

Para analizar la verosimilitud de esas opciones, se grafica el logaritmo de las tasas anuales de ocurrencia de los casos COL1 y COL2 posibles bajo los criterios mencionados contra su magnitud VEI.

Caso COL1:



Caso COL2:

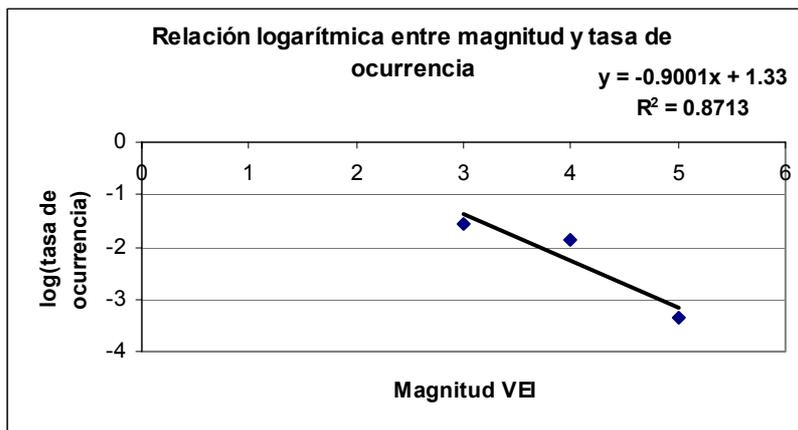


Fig. 3.7. Las gráficas representan la regresión lineal de la relación logarítmica de la tasa anual de ocurrencia y la magnitud de los datos eruptivos históricos y geológicos del volcán de Colima. Suponiendo los casos COL1 y COL2 posibles del valor de magnitud VEI en los datos geológicos de acuerdo a las condiciones especificadas, mostrando un valor satisfactorio de  $R^2$  para ambos casos.

Los dos ajustes son viables debido a que el valor del cuadrado del coeficiente de correlación  $R^2$  es suficientemente grande, aunque el caso COL1 tiene un mejor ajuste a una línea recta.

### Caso INCOL3:

Se considera que los valores geológicos son solamente un poco más grandes que VEI 4 sin llegar a ser necesariamente su magnitud VEI 5, por lo tanto se le asignaría un valor de VEI 4.5 a los tres valores; la regresión lineal correspondiente es:

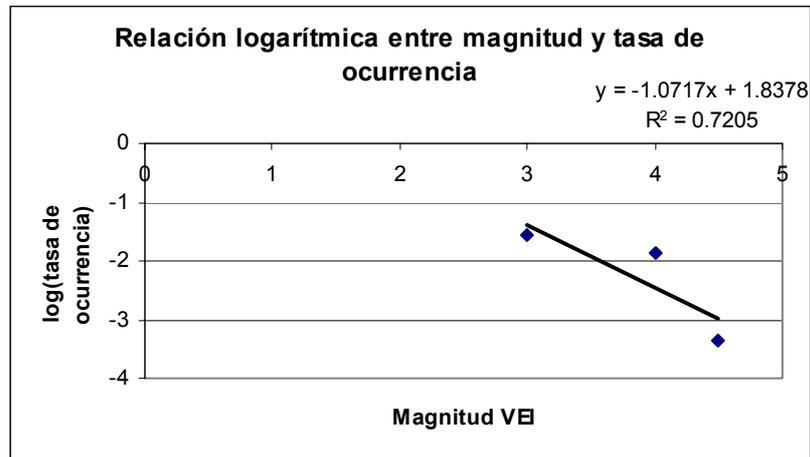


Fig. 3.8. Regresión lineal de las tasas anuales de ocurrencia de valores históricos con VEI 3 y 4, y tasa anual de ocurrencia de los 3 datos geológicos considerando una magnitud intermedia VEI 4.5, contra la magnitud correspondiente.

En la regresión lineal muestra un  $R^2 = 0.7205$ , el cual es un valor aun satisfactorio, para considerar este caso posible.

### Caso INCOL4:

Quizá alguna de las 3 erupciones geológicas es posible asignarle un VEI 5, mientras que las otras dos se consideran entre un VEI 4 y VEI 5, asignándoles por lo tanto un VEI 4.5. En este caso las tasas anuales de ocurrencia serian de 1/7040 para la magnitud VEI 5 y 2/7040 para la magnitud VEI 4.5.

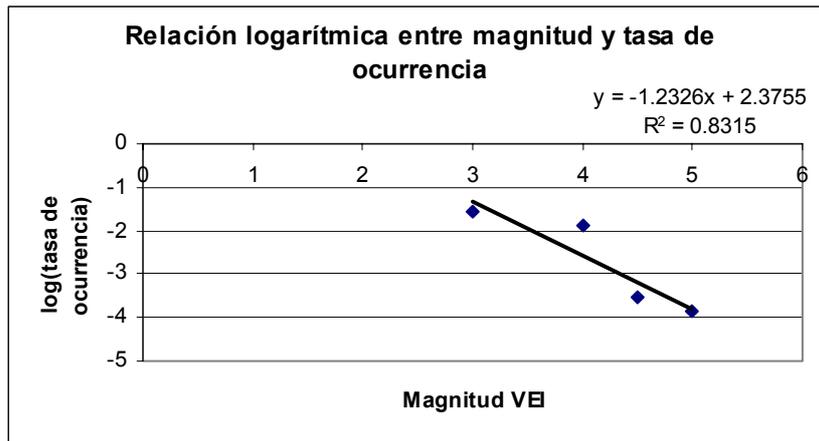


Fig. 3.9. Regresión lineal de las tasas anuales de ocurrencia de valores históricos con VEI 3 y 4, y tasas anuales de ocurrencia de los 3 datos geológicos del volcán de Colima considerando 2 erupciones con magnitud intermedia VEI 4.5 y para la restante una magnitud de VEI 5 contra la magnitud correspondiente.

La regresión lineal muestra un  $R^2 = 0.8315$ , el cual también es un valor satisfactorio.

Del total de los casos considerados (con valores intermedios y enteros) en esta sección el caso óptimo es el caso COL1 con valores enteros donde hay una erupción de VEI 6, y 2 erupciones con magnitud VEI 5 en el Holoceno.

Se concluye que la serie clasificada en magnitud VEI del volcán de Colima, refleja estacionaridad a largo plazo, pero en periodos pequeños existe una no-estacionaridad que se debilita con la longitud de la muestra temporal, haciendo posible identificar regimenes con tasas bajas y altas. Asimismo, no se observan valores atípicos (es decir observaciones con características diferentes de las demás que pudieran distorsionar seriamente el comportamiento de los contrastes estadísticos). Los periodos de reposo son independientes y la mejor posibilidad de incorporar los datos geológicos a la secuencia eruptiva es el caso COL1 de la tabla 3.3 correspondiente a una magnitud VEI 6 y 2 magnitudes con VEI 5 en el Holoceno.

### 3.1.2 VOLCÁN CITLALTÉPETL

En esta sección se estudia el comportamiento de la secuencia eruptiva de datos históricos y geológicos clasificados en magnitudes VEI (De la Cruz – Reyna y Carrasco-Núñez, 2002) para el volcán Pico de Orizaba o Citlaltépetl.

<b>Años</b>	<b>VEI 2</b>	<b>Años</b>	<b>VEI 2</b>
1530-1539	1	1770-1779	
1540-1549	1	1780-1789	
1550-1559		1790-1799	
1560-1569	1	1800-1809	
1570-1579		1810-1819	
1580-1589		1820-1829	
1590-1599		1830-1839	
1600-1609		1840-1849	1
1610-1619		1850-1859	
1620-1629		1860-1869	1
1630-1639		1870-1879	
1640-1649		1880-1889	
1650-1659		1890-1899	
1660-1669		1900-1909	
1670-1679		1910-1919	
1680-1689	1	1920-1929	
1690-1699		1930-1939	
1700-1709		1940-1949	
1710-1719		1950-1959	
1720-1729		1960-1969	
1730-1739		1970-1979	
1740-1749		1980-1989	
1750-1759		1990-1999	
1760-1769		2000-2009	
<b>TOTAL</b>			<b>6</b>

Años A.P.	VEI ≥ 4
0-2999	0
3000-5999	1
6000-8999	1
9000-11999	0
12000-14999	1
<b>TOTAL</b>	<b>3</b>

Tabla 3.4. Ocurrencia en décadas de los datos eruptivos históricos con magnitud VEI 2 y ocurrencia de los datos geológicos cada 300 décadas con magnitud VEI ≥ 4 del volcán Citlaltépetl.

La figura 3.10 muestra las gráficas de las series de tiempo correspondientes a los datos eruptivos del volcán Citlaltépetl efectuadas con los 6 valores históricos disponibles con magnitud VEI 2, y los 3 valores geológicos con magnitud VEI ≥ 4 mostrados en la tabla 3.4 (De la Cruz – Reyna y Carrasco-Núñez 2002).

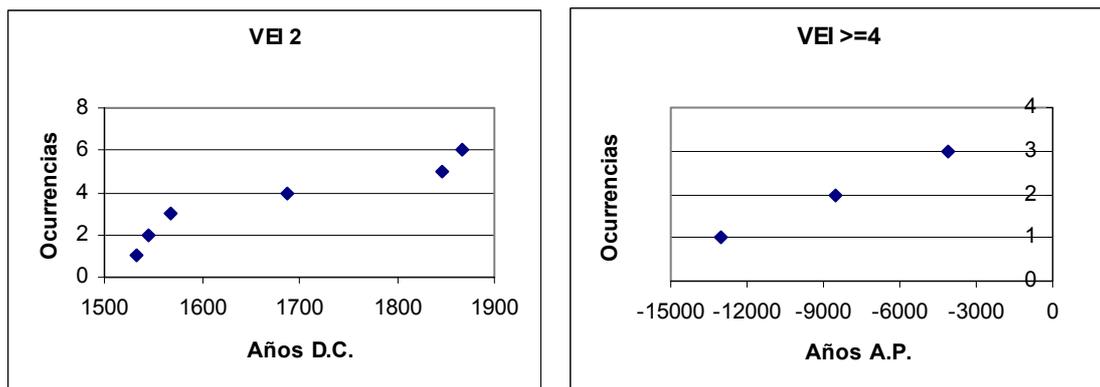


Fig. 3.10. Ocurrencia de erupciones acumulativas de la serie eruptiva histórica y geológica del volcán Citlaltépetl.

En las gráficas no se puede definir alguna periodicidad o distintas tasas de ocurrencia, ya que se trata de un registro de datos eruptivos muy pequeño.

La independencia entre los periodos de reposo es probada con la gráfica de correlación serial (Cox y Lewis, 1966). La gráfica de correlación serial es efectuada solamente para la serie eruptiva histórica que corresponde a los datos de magnitud VEI 2, pues la serie geológica cuenta con solo 2 periodos de reposo y no es posible concluir sobre la independencia de estos.

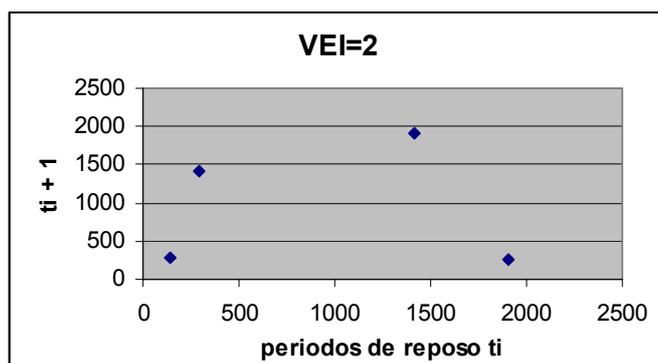


Fig. 3.11. Gráfica de correlación serial de  $t_i$  y  $t_{i+1}$  intervalos de reposo (medidos en meses desde la tabla 1.4.) entre erupciones con magnitud VEI 2 del volcán Citlaltépetl.

Gráficamente y considerando el bajo valor del coeficiente de correlación de 0.00165, se concluye la independencia entre los tiempos de espera entre erupciones con magnitud VEI 2.

Para observar la independencia de los periodos de reposo en el tiempo de ocurrencia se utiliza el método de Klein (1982) aplicado en la sección 3.1.1 para la serie eruptiva del volcán de Colima, los periodos de reposo se agrupan utilizando la media móvil para 2 periodos de reposo consecutivos.

En la figura 3.12 se muestra la gráfica de la media móvil de la serie eruptiva VEI 2 para el volcán Citlaltépetl con los promedios sucesivos de 2 periodos de reposo, la fecha en el eje de la abscisa corresponde a la fecha del último periodo de reposo de cada secuencia. La media de los periodos de reposo de 66.8 años es mostrada con la línea gruesa. Por medio de prueba y error se obtiene 185 años como limite superior de confianza 95%. La probabilidad de caer en la cola derecha de este valor de  $\chi^2$  con 10 grados de libertad es  $p=.0258$  (ecuación 3.1), esta es la probabilidad de que solo un punto elegido como aleatorio (puntos con fondo oscuro) caiga fuera de 185 años.

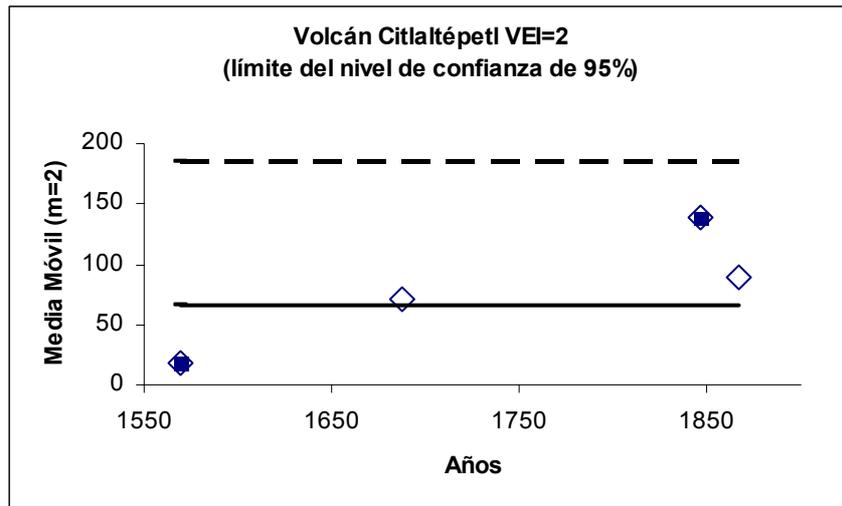


Fig. 3.12. Dependencia en el tiempo de la media móvil de 2 periodos de reposo consecutivos de la serie eruptiva del Volcán Citlaltépetl de magnitud VEI 2. Los puntos representan los promedios de los periodos de reposo consecutivos graficados a la fecha del último de los 2 periodos de reposo del promedio, así los puntos con fondo oscuro son independientes. La línea horizontal gruesa es la media de los 5 periodos de reposo durante 1533-1867. La línea horizontal punteada representa el nivel superior del 5% de confianza igual a 185 años.

En la Figura 3.12 todos los puntos se encuentran por debajo del límite de nivel de confianza al 95%. El análisis con un 90% de confianza se obtiene 155.89 años como límite superior. Utilizando la ecuación 3.1 y la distribución binomial es posible obtener la probabilidad de que solo un punto elegido como aleatorio caiga fuera de 155.89 años es  $p=0.053$ , que corresponde al 90% de confianza (fig. 3.13).

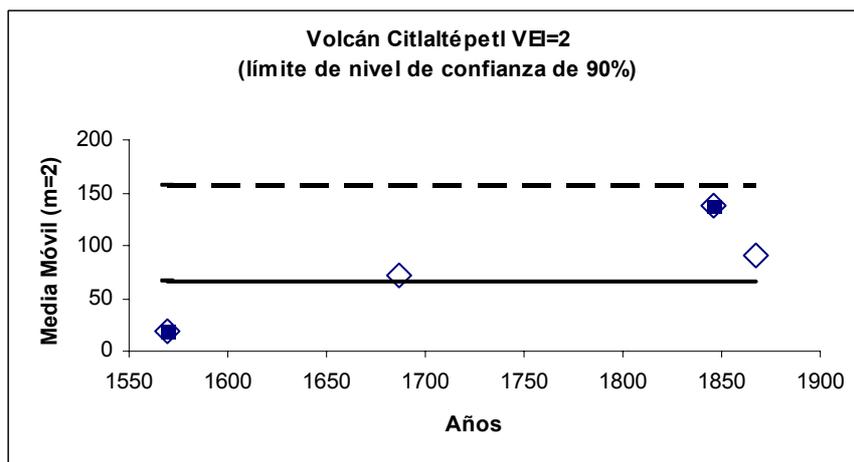


Fig. 3.13. Dependencia en el tiempo de la media móvil de 2 periodos de reposo consecutivos de la serie eruptiva del Volcán Citlaltépetl de magnitud VEI = 2. Los puntos representan los promedios de 2 periodos de reposo consecutivos graficados a la fecha del último de los periodos de reposo del promedio, así, de cada 2 puntos, uno (puntos oscuros) es independiente. La línea horizontal gruesa es la media de los 5 periodos de reposo durante 1533-1867. La línea horizontal punteada representa el nivel superior del 10% de confianza igual a 155.89 años.

En las figuras 3.12 y 3.13 todos los puntos se encuentran por debajo del límite de nivel de confianza al 95% y 90% por lo tanto se puede aceptar a la serie eruptiva VEI 2 del volcán Citlaltépetl como un proceso estacionario.

Debido a la incertidumbre de la magnitud VEI de las erupción geológicas registradas del volcán Citlaltépetl, se analizan combinaciones de posibles valores enteros de magnitud VEI para los 3 registros geológicos de la tabla 3.4, condicionados a que *las erupciones con un VEI mayor ocurren a una tasa menor que las erupciones con un VEI menor*, con el criterio de que son erupciones mayores o iguales a una magnitud VEI 4.

	Tiempo en años AP desde la ocurrencia estimada de la erupción	VEI	
		Caso CITLA1	Caso CITLA2
1	4100	4	4
2	8500	4	4
3	13000	4	5

Tabla 3.5. Combinaciones de valores enteros de magnitud VEI para los datos geológicos del volcán de Citlaltépetl (De la Cruz-Reyna y Carrasco-Núñez, 2002).

No se considera en la tabla 3.5 el caso de asignar a las magnitudes VEI de las erupciones geológicas valores totalmente distintos entre ellos pues implicaría que la tasa de ocurrencia de erupciones de distinta magnitud es la misma, es decir, que las tasas de ocurrencia de las magnitudes VEI 4, 5 y 6 ocurren con la misma frecuencia lo cual contradice la condición de que *las erupciones con un VEI mayor ocurren a una tasa menor que las erupciones con un VEI menor*. Por otro lado, en todo momento se mantiene la condición de que esas erupciones son mayores o iguales a la magnitud VEI 4.

Para el siguiente análisis de verosimilitud el orden en la asignación de las magnitudes de las erupciones para cada caso en las 3 fechas geológicas (tabla 3.5) no afecta al propósito del análisis, pues las tasas de ocurrencia siguen siendo las mismas en cualquier orden. Por lo tanto solo se toman esos 2 casos.

Para el caso CITLA1 de las combinaciones de valores de magnitud VEI de los datos geológicos la tasa anual de ocurrencia para VEI 4 sería 3/13000; y para el caso CITLA2 la tasa anual de ocurrencia para VEI 4, sería 2/8500 y para VEI 5 sería

1/13000. De los datos históricos tenemos que la tasa anual de ocurrencia para VEI 2 es 6/473.

Para analizar la verosimilitud de esas opciones, se grafica el logaritmo de las tasas anuales de ocurrencia de los dos casos posibles bajo los criterios mencionados contra su magnitud VEI.

Caso CITLA1:

En este caso se obtiene la recta  $y = -0.8701 x - 0.1566$  (relación 3.2) basada en dos puntos, correspondientes en las magnitudes VEI 4 y 2 con tasa anual de ocurrencia 3/13000 y 6/473 respectivamente; obteniendo una estimación de las tasas anuales de ocurrencia para las magnitudes restantes enlistadas en la tabla 3.6.

<b>Magnitud VEI</b>	<b>Tasa de ocurrencia (erupciones/años)</b>
2	0.01268499
3	0.00171076
4	0.00023077
5	0.00003112

Tabla 3.6. Resultados de la extrapolación de las tasas anuales de ocurrencia con magnitud VEI 2 y 4 para el volcán Citlaltépetl respecto a su magnitud VEI, obteniendo las tasas anuales de ocurrencia de erupciones de magnitud VEI 3 y 5.

El procedimiento y las magnitudes supuestas en este caso (CITLA1) para estimar las tasas anuales de ocurrencia es el mismo que se utilizó en De la Cruz-Reyna y Carrasco-Núñez (2002).

Caso CITLA2:

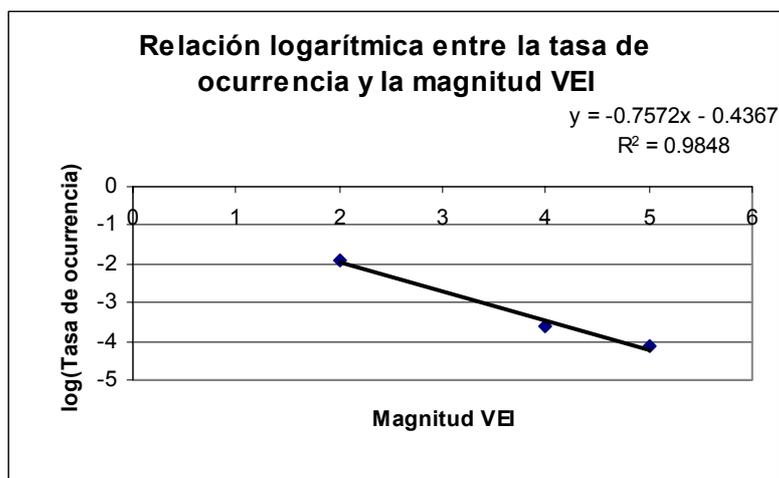


Fig. 3.14. Regresión lineal del logaritmo de las tasas anuales de ocurrencias contra su magnitud VEI, suponiendo 2 erupciones con magnitud VEI 4 en 8,500 años y una erupción con magnitud VEI 5 para las erupciones geológicas del volcán Citlaltépetl.

A partir de la ecuación de la regresión lineal de la figura 3.14 se obtiene la tasa anual de ocurrencia para VEI 3 por medio de la ecuación 3.2. En la tabla 3.7 se enlistan las tasas resultantes.

Magnitud VEI	Tasa de ocurrencia (erupciones/años)
2	0.01268499
3	0.00195749
4	0.00023529
5	0.00007692

Tabla 3.7. Tasas anuales de ocurrencia de erupciones con valores para las magnitudes VEI 2, 4 y 5 asignados en el caso CITLA2 de la tabla 3.5, y la tasa anual de ocurrencia de VEI 3 interpolada utilizando la ecuación 3.2 para la serie eruptiva del volcán Citlaltépetl.

El valor de la  $R^2$  en el caso CITLA2 es muy cercano a uno. La comparación de ambos casos por medio de la  $R^2$  se hace poco significativa por la pequeña cantidad de datos disponibles, además la diferencia en las tasas anuales de ocurrencia entre ambos casos es muy pequeña por lo que se puede concluir que los dos modelos son viables, aclarando que esto es suponiendo que los datos históricos y geológicos disponibles son totalmente confiables, que la serie eruptiva se comporta como en el pasado, es

completamente estacionaria y que la relación lineal entre el logaritmo de la tasa eruptiva y la magnitud VEI se cumple rigurosamente (ecuación 3.2).

Por otro lado se analiza un tercer caso, aquí denominado MPCITLA3, que considera la información publicada en el Mapa de Peligros del volcán Citlaltépetl (Sheridan et. al, 2001), que supone tasas anuales de ocurrencia para erupciones que pueden corresponder a las magnitudes VEI 4 y 5 iguales a 1/4000 y 1/9000 respectivamente. La tasa anual de ocurrencia para VEI 2 es 6/473 obtenida de los registros históricos.

Caso MPCITLA3:

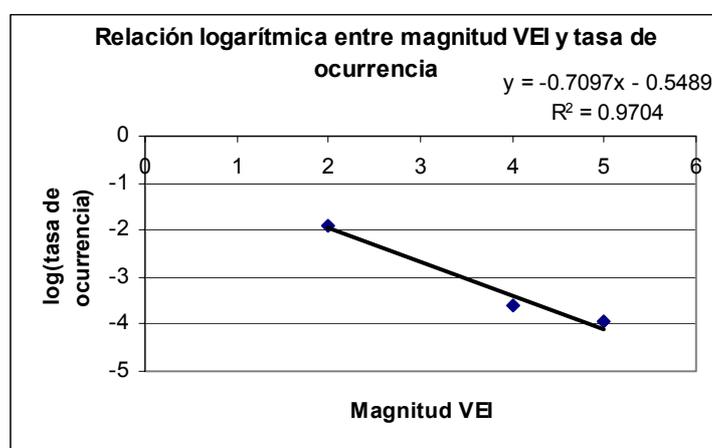


Fig. 3.15. Regresión lineal del logaritmo de las tasas anuales de ocurrencia contra su magnitud VEI, utilizando información (tabla 1.6) del mapa de peligros del volcán Citlaltépetl (Sheridan et. al, 2001).

El  $R^2$  es un valor muy cercano a uno, permaneciendo por debajo de los valores obtenidos en los casos CITLA1 y CITLA2. La tasa anual de ocurrencia eruptiva correspondiente a VEI 3, se calcula extrapolando la relación 3.2. En la tabla 3.8 se enlistan las tasas anuales resultantes.

Magnitud VEI	Tasa de ocurrencia (erupciones/años)
2	0.01268499
3	0.00209894
4	0.00025000
5	0.00011111

Tabla 3.8. Tasas anuales de ocurrencia de erupciones con valores para las magnitudes VEI 2, 4 y 5 asignados en la tabla 1.6 del mapa de peligros del volcán Citlaltépetl (Sheridan et. al, 2001), y la tasa anual de ocurrencia de VEI 3 interpolada utilizando la ecuación 3.2 para la serie eruptiva del volcán Citlaltépetl.

Los 3 casos analizados en la asignación de valores de magnitud VEI para la serie eruptiva geológica del volcán Citlaltépetl proporcionan resultados parecidos, resultando difícil comparar usando solamente el criterio de la  $R^2$ , ya que en el caso CITLA1 se obtiene la ecuación única de una recta pues solo se cuenta con 2 puntos, por lo tanto los casos CITLA1 Y CITLA2 se pueden considerar viables suponiendo que la serie eruptiva se comporta como en el pasado. En el caso MPCITLA3 aunque también es viable con un valor de la  $R^2$  aceptable, permanece por debajo de los valores obtenidos en los demás casos analizados para el volcán Citlaltépetl. Además, en este caso se observa una diferencia demasiado pequeña entre las tasas anuales de ocurrencia de las erupciones de magnitud VEI 4 y 5. En la tabla 3.9 se comparan las tasas anuales de ocurrencia obtenidas en los tres casos analizados en esta sección.

<b>Magnitud VEI</b>	<b>Caso CITLA1</b>	<b>Caso CITLA2</b>	<b>Caso MPCITLA3</b>
2	0.01268499	0.01268499	0.01268499
3	0.00171076	0.00195749	0.00209894
4	0.00023077	0.00023529	0.00025000
5	0.00003112	0.00007692	0.00011111

Tabla 3.9. Tasas anuales de ocurrencia eruptivas anuales obtenidas de los casos CITLA1, CITLA2 Y MPCITLA3, para el volcán Citlaltépetl.

Se observa en la tabla 3.9 que los valores de las tasas anuales de ocurrencia correspondientes a un VEI 4 y 5 para el caso MPCITLA3 difieren poco a comparación de los casos CITLA1 Y CITLA2 donde se muestra mayor consistencia en las tasas de ocurrencia eruptiva.

Los resultados y conclusiones obtenidas con los datos disponibles son que, la tasa de ocurrencia para el volcán Citlaltépetl es estacionaria al 90% y 95% del nivel de confianza, con independencia de los periodos de reposo entre erupciones, y el caso más viable para la asignación de magnitud VEI para los registros geológicos es el caso CITLA1. Es importante considerar la posibilidad de la existencia de muchas más erupciones para el volcán Citlatépetl con magnitudes medianas a grandes aún no reconocidas geológicamente.

### 3.1.3 VOLCÁN POPOCATÉPETL

La serie eruptiva histórica del volcán Popocatépetl con valores estimados de magnitud VEI se enlistan en la tabla 3.10.

	VEI				VEI		
	2	3	≥ 2		2	3	≥ 2
1510-1519	1	1	2	1760-1769	0	0	0
1520-1529	0	0	0	1770-1779	0	0	0
1530-1539	1	0	1	1780-1789	0	0	0
1540-1549	1	0	1	1790-1799	0	0	0
1550-1559	0	0	0	1800-1809	0	0	0
1560-1569	0	0	0	1810-1819	0	0	0
1570-1579	1	0	1	1820-1829	0	0	0
1580-1589	0	0	0	1830-1839	0	0	0
1590-1599	1	0	1	1840-1849	0	0	0
1600-1609	0	0	0	1850-1859	0	0	0
1610-1619	0	0	0	1860-1869	0	0	0
1620-1629	0	0	0	1870-1879	0	0	0
1630-1639	0	0	0	1880-1889	0	0	0
1640-1649	1	0	1	1890-1899	0	0	0
1650-1659	0	0	0	1900-1909	0	0	0
1660-1669	2	1	3	1910-1919	1	0	1
1670-1679	0	0	0	1920-1929	2	0	2
1680-1689	0	0	0	1930-1939	0	0	0
1690-1699	1	0	1	1940-1949	0	0	0
1700-1709	0	0	0	1950-1959	0	0	0
1710-1719	0	0	0	1960-1969	0	0	0
1720-1729	0	0	0	1970-1979	0	0	0
1730-1739	0	0	0	1980-1989	0	0	0
1740-1749	0	0	0	1990-1999	1	0	1
1750-1759	0	0	0	2000-2009	1	1	2
				<b>Total</b>	<b>14</b>	<b>3</b>	<b>17</b>

Tabla 3.10. Ocurrencia en décadas de datos eruptivos históricos del volcán Popocatépetl clasificados en magnitud VEI 2, 3 y ≥2.

El comportamiento de la serie eruptiva histórica del volcán Popocatepetl a través del tiempo se muestra en la figura 3.16.

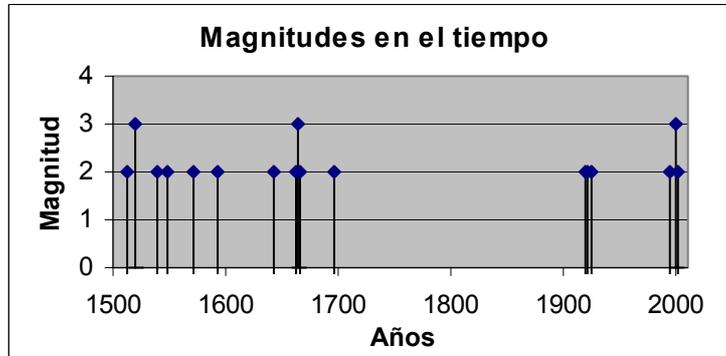
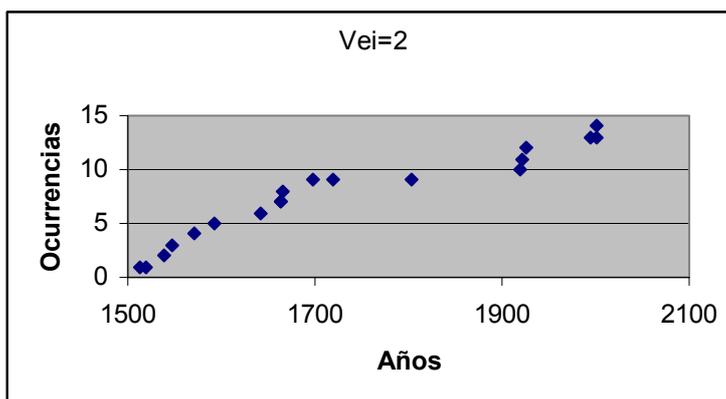


Fig. 3.16. Serie eruptiva histórica de magnitud VEI en el tiempo del volcán Popocatepetl (tabla 1.7).

En la serie de tiempo del volcán Popocatepetl no se observa periodicidad, ni tendencia, y tampoco valores atípicos. Se nota una predominancia de erupciones con magnitud VEI 2.

Las gráficas de la figura 3.17 muestran las series históricas acumulativas a través del tiempo de diferentes categorías VEI.



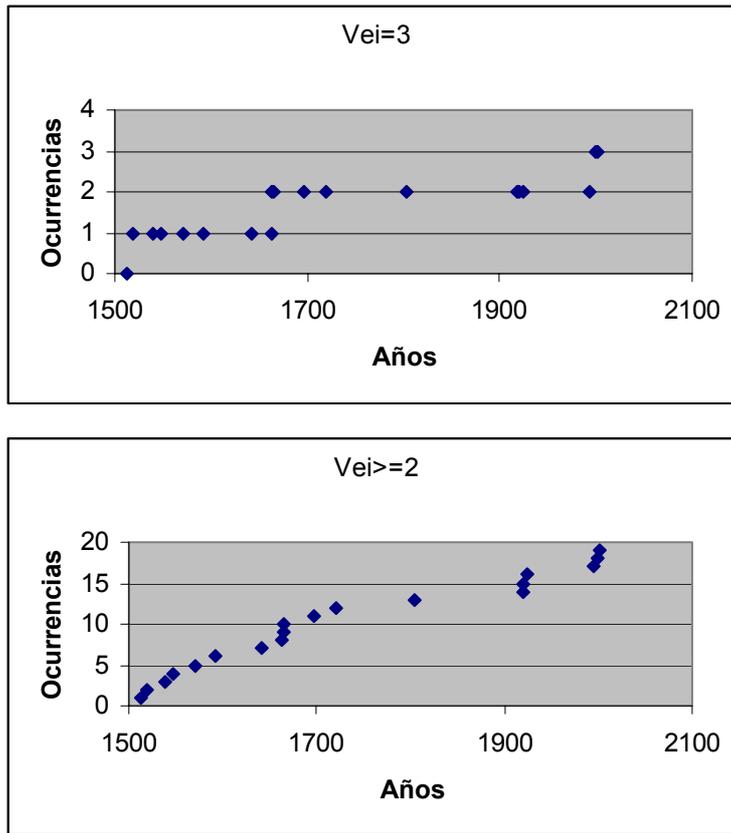
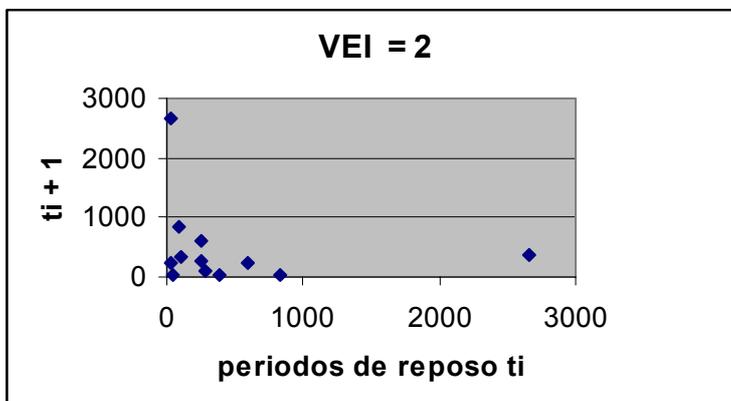


Fig. 3.17. Las Gráficas representan el número acumulado de las erupciones históricas del volcán Popocatépetl en las categorías de magnitud VEI igual 2, 3, y  $\geq 2$ .

Las gráficas no muestran periodicidad en los datos ni variaciones evidentes en la tasa de ocurrencia.

La independencia entre los periodos de reposo es probada como en las secciones anteriores para los volcanes Colima y Citlaltépetl, con la gráfica de correlación serial (Cox y Lewis, 1966).



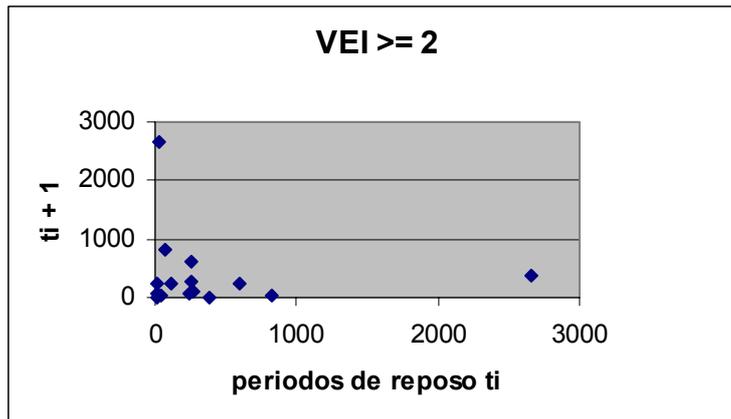


Fig. 3.18. Gráfica de correlación serial de  $t_i$  y  $t_{i+1}$  intervalos de reposo (medidos en meses desde la tabla 1.7.) entre erupciones del volcán Popocatépetl para la serie clasificada en magnitud VEI 2 y  $\geq 2$ .

El coeficiente de correlación entre  $t_i$  y  $t_{i+1}$  para la serie clasificada en VEI 2 y  $\geq 2$  es -0.174 y -.097 respectivamente. De aquí se concluye independencia entre los periodos de reposo entre erupciones con magnitud VEI 2 y  $\geq 2$ . Para la serie clasificada en magnitud VEI 3 solo se cuentan con 2 periodos de reposo con los cuales no es posible obtener información de independencia de manera explícita, pero se podría suponer independencia ya que los valores de periodos de reposo entre erupciones de magnitud VEI 3 están incluidos en la serie de tiempo de periodos de reposo entre erupciones de magnitud VEI  $\geq 2$  y se observa que el coeficiente de correlación resulta ser menor en la serie de magnitud VEI  $\geq 2$  que en la serie de magnitud VEI 2. Por lo tanto se supone independencia en los periodos de reposo entre erupciones para la serie eruptiva histórica del volcán Popocatépetl.

En forma análoga a los casos anteriores, la dependencia en el tiempo o el agrupamiento de periodos de reposo se verifica utilizando la media móvil con 5 periodos de reposo consecutivos por medio del método mostrado por Klein (1982).

En la figura 3.19 se muestra la gráfica de la media móvil de 5 periodos de reposos para la serie eruptiva VEI  $\geq 2$  del volcán Popocatépetl. La media de los periodos de reposo es de 30.56 años y se considera un 5% de oportunidad de que alguno de los 3 puntos oscuros independientes caiga fuera de la línea punteada. Como en secciones anteriores (3.1.1 y 3.1.2), por medio de prueba y error se obtiene el límite superior de confianza al 95% correspondiente a 65.98 años para la serie eruptiva del volcán Popocatépetl.

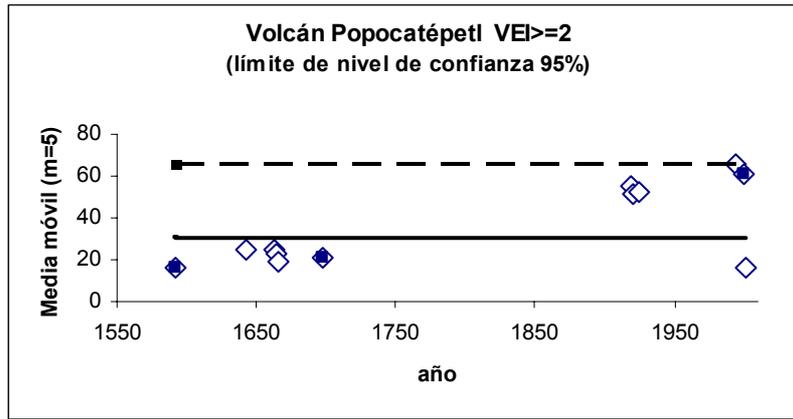


Fig. 3.19. Dependencia en el tiempo de la media móvil de 5 periodos de reposo consecutivos de la serie eruptiva del Volcán Popocatépetl de magnitud  $VEI \geq 2$ . Los puntos representan los promedios de los periodos de reposo consecutivos graficados a la fecha del último de los 5 periodos de reposo del promedio, así cada 5 puntos es decir los puntos con fondo oscuro son independientes. La línea horizontal gruesa es la media de los 16 periodos de reposo igual a 30.56 años durante 1512-2001. La línea horizontal punteada representa el nivel superior del 5% de confianza igual a 65.98 años.

En la Figura 3.19 se observa que no existe algún punto fuera del límite del nivel de confianza aunque si muy cerca del límite. En la figura 3.20 se grafica con la línea punteada el límite de confianza de 90% con valor igual a 59.16 años.

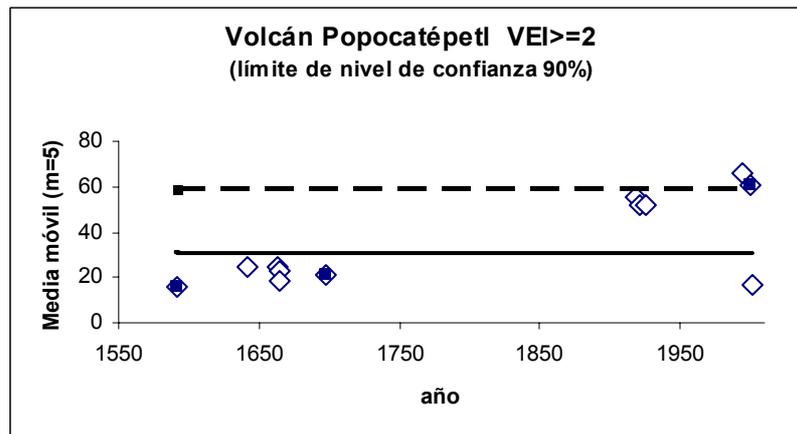


Fig. 3.20. Dependencia en el tiempo de la media móvil de 5 periodos de reposo consecutivos de la serie eruptiva del Volcán Popocatépetl de magnitud  $VEI \geq 2$ . Los puntos representan los promedios de los periodos de reposo consecutivos graficados a la fecha del último de los 5 periodos de reposo del promedio, así cada 5 puntos es decir los puntos con fondo oscuro son independientes. La línea horizontal gruesa es la media de los 16 periodos de reposo igual a 30.56 años durante 1512-2001. La línea horizontal punteada representa el nivel superior del 10% de confianza igual a 59.16 años.

En la grafica de la figura 3.20 el nivel de confianza esta ligeramente por debajo de uno de los puntos sombreados, por lo que se plantea la posible existencia de una débil no-estacionaridad, similar a la observada en el volcán de Colima (sección 3.1.1).

Las frecuencias de las magnitudes para datos históricos consisten de 14 erupciones de magnitud VEI 2, y 3 erupciones de magnitud VEI 3 desde 1512. En la serie geológica (tabla 1.8) se registran 9 erupciones a las que no se les ha asignado un VEI. Se cree que fueron erupciones plinianas y que la del año 23,000 fue una erupción tipo Bezymianny o Santa Helena, por lo tanto a esta se le considerará en este estudio una magnitud igual a VEI 5. Para las erupciones restantes se consideran 4 casos:

Caso SMPOPO1:

<b>Años A.P.</b>	<b>VEI</b>
1,100	4
1,700	4
2,150	4
5,000	4
7,100	4
9,100	4
10,700	4
14,000	4
23,000	5

Tabla 3.11. Registros geológicos en años antes del presente con magnitud asignada igual a VEI 4, para los registros hasta 14,000 años A.P. y con un valor en magnitud VEI 5 para la erupción de 23,000 años A.P. del volcán Popocatépetl.

Se obtienen las tasas anuales de ocurrencia para VEI 2, 3, 4 y 5 igual a 14/494, 3/494, 8/14000 y 1/23000 respectivamente. Para confirmar la viabilidad de este modelo se efectúa la regresión logarítmica entre la tasa anual de ocurrencia y la magnitud (De la Cruz-Reyna, 1991, 2002 y De la Cruz - Reyna y Tilling, 2006).

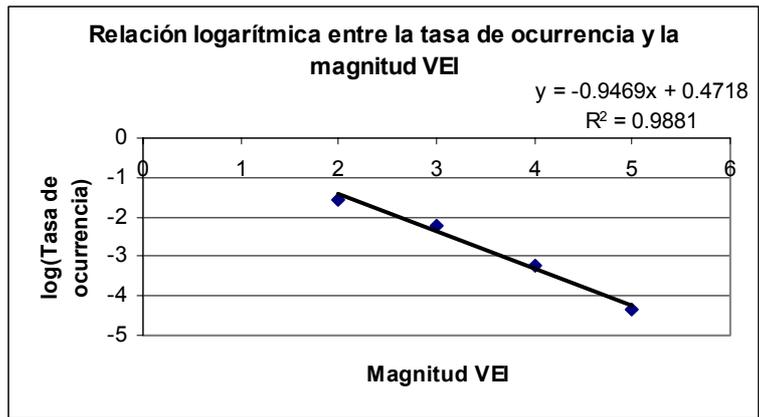


Fig. 3.21. Regresión lineal del logaritmo de la tasa anual de ocurrencia contra la magnitud VEI utilizando datos geológicos e históricos del volcán Popocatepetl, suponiendo 8 datos geológicos con VEI 4 y uno con VEI 5.

La regresión lineal proporciona un buen ajuste con un valor de  $R^2$  muy cercano a la unidad.

Caso SMPOPO2:

Se suponen 2 valores de los datos geológicos igual a VEI 5, y los restantes una magnitud VEI 4, con tasas anuales de ocurrencia igual a 14/494, 3/494, 7/10700 y 2/23000 para erupciones con magnitud igual a VEI 2, 3, 4 y 5 respectivamente.

Años A.P.	VEI
1,100	4
1,700	4
2,150	4
5,000	4
7,100	4
9,100	4
10,700	4
14,000	5
23,000	5

Tabla 3.12. Registros geológicos en años antes del presente, con 7 valores con magnitud asignada igual a VEI 4 para los registros desde 10,700 años A.P. y con 2 valor con magnitud igual a VEI 5 en 14000 y 23,000 años A.P. para el volcán Popocatepetl.

Se realiza una regresión lineal para observar la viabilidad de este modelo, obteniendo un mejor ajuste con un valor de  $R^2$  aun más cercano a la unidad (Fig. 3.22).

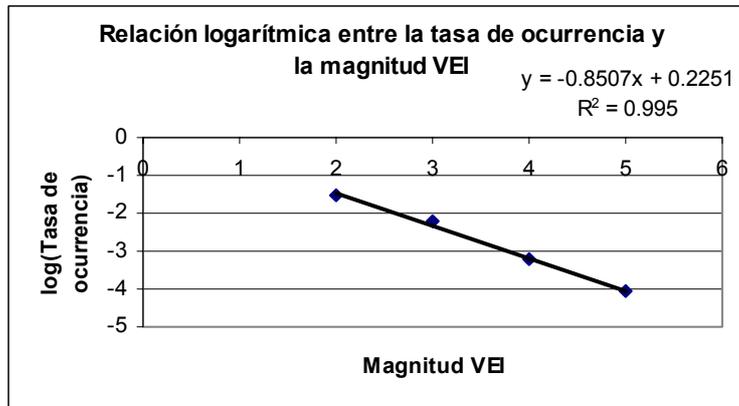


Fig. 3.22. Regresión lineal del logaritmo de la tasa anual de ocurrencia contra la magnitud VEI utilizando datos geológicos e históricos del volcán Popocatépetl, suponiendo 7 datos geológicos con VEI 4, y 2 con magnitud VEI 5

Caso SMPOPO3:

Ahora se supone que 3 erupciones tienen magnitud VEI 5 y las 6 restantes magnitud VEI 4.

Años A.P.	VEI
1100	4
1700	4
2150	4
5000	4
7100	4
9100	4
10700	5
14 000	5
23 000	5

Tabla 3.13. Registros geológicos en años antes del presente, con magnitud asignada igual a VEI 4 para los datos de 9,100 años A.P. y con 3 valores con magnitud igual a VEI 5 para erupciones de hace 23,000 años A.P. del volcán Popocatépetl.

La regresión lineal para este caso es también muy buena con un  $R^2 = 0.995$  valor casi idéntico de  $R^2$  al modelo SMPOPO2 estudiado previamente.

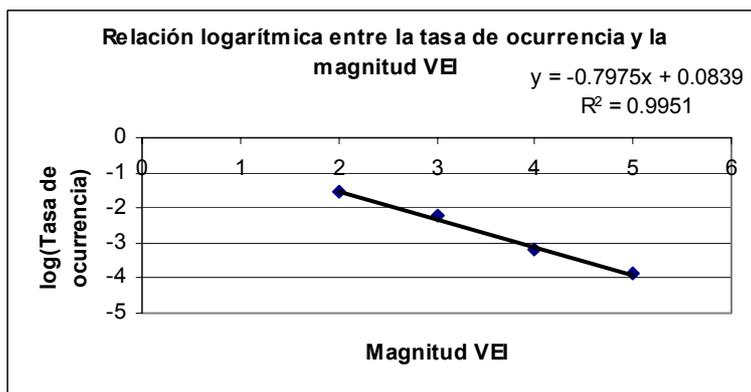


Fig. 3.23. Regresión lineal del logaritmo de la tasa anual de ocurrencia contra la magnitud VEI utilizando datos geológicos e históricos del volcán Popocatépetl, suponiendo 6 datos geológicos con VEI 4, y 3 datos geológicos con magnitud VEI 5

#### Caso SMPOPO4:

Se suponen 2 erupciones de magnitud VEI 5, una erupción de magnitud VEI 6 y las restantes 6 erupciones de magnitud VEI 4.

Años A.P.	VEI
1100	4
1700	4
2150	4
5000	4
7100	4
9100	4
10700	5
14 000	6
23 000	5

Tabla 3.14. Registros geológicos en años antes del presente, con magnitud asignada igual a VEI 4 para los datos de 9,100 años A.P., 2 erupciones con valor de magnitud igual a VEI 5 en 23,000 años y 1 erupción de magnitud VEI 6 en 23,000 años A.P. del volcán Popocatépetl.

Se realiza una regresión lineal para observar la viabilidad de este modelo.

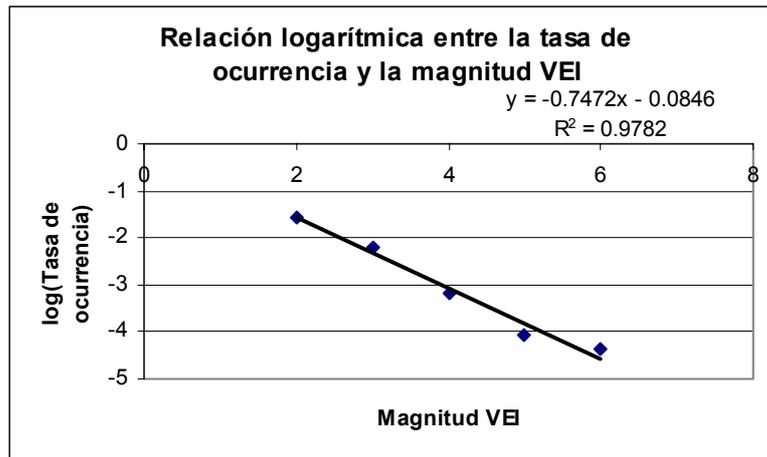


Fig. 3.24. Regresión lineal del logaritmo de la tasa anual de ocurrencia contra la magnitud VEI utilizando datos geológicos e históricos del volcán Popocatepetl, suponiendo 6 datos geológicos con magnitud VEI 4, 2 con magnitud VEI 5 y 1 con magnitud VEI 6.

La regresión lineal proporciona también un buen ajuste con un valor de  $R^2$  cercano a la unidad.

Podemos observar que la regresión lineal varía muy poco al cambiar un valor geológico de magnitud VEI 4, por una magnitud VEI 5, o por una magnitud VEI 6 por lo que se puede concluir que los cuatro modelos son viables.

Hasta el momento en los cuatro casos previamente analizados se utilizó la serie eruptiva del volcán Popocatepetl correspondiente a la tabla 1.8 mostrando el  $R^2$  más grande en el caso SMPOPO3 que consiste de 3 erupciones con magnitud VEI 5 y 6 erupciones con magnitud VEI 4; seguido por el caso SMPOPO2 que consiste de 2 erupciones con magnitud VEI 5 y 7 erupciones con magnitud VEI 4 manteniendo una diferencia de milésima entre ambos ajustes. Se analizaron otros casos intercambiando la cantidad de erupciones con magnitud VEI 4 por erupciones con magnitud VEI 5, pero los resultados no mejoraron a los obtenidos en los casos SMPOPO2 y SMPOPO3.

Debido a la poca diferencia en los resultados obtenidos en los casos SMPOPO2 y SMPOPO3, se les efectúa la prueba de bondad de ajuste Kolmogorov – Smirnof. En la tabla 3.15 se dan los resultados para un nivel de confianza del 90%, observándose que ambos casos son viables encontrándose el estadístico por debajo del valor crítico.

VEI	K-S .90	DN Max
SMPOPO2	0.4940	0.0178
SMPOPO3	0.4940	0.0488

Tabla 3.15. Prueba de Bondad de ajuste Kolmogorov - Smirnov con valor crítico de .4940 sobre los valores DN Max calculados como la diferencia absoluta de los valores ajustados y observados acumulados.

Resultando con mayor calidad de ajuste el caso SMPOPO2. Por lo tanto se tomará este caso para realizar la metodología expuesta en el presente trabajo y obtener el peligro volcánico.

Por otro lado se analiza un quinto caso nombrado MPOPO5 el cual considera las tasas anuales de ocurrencia (tabla 1.9) publicadas en el mapa de peligros del volcán Popocatépetl de Macías et al (1995a) con una magnitud VEI estimada en De la Cruz-Reyna y Tilling (2006).

Caso MPOPO5:

Con registros geológicos obtenidos de Macías et al (1995, 1995a) se obtiene el gráfico de la figura 3.25.

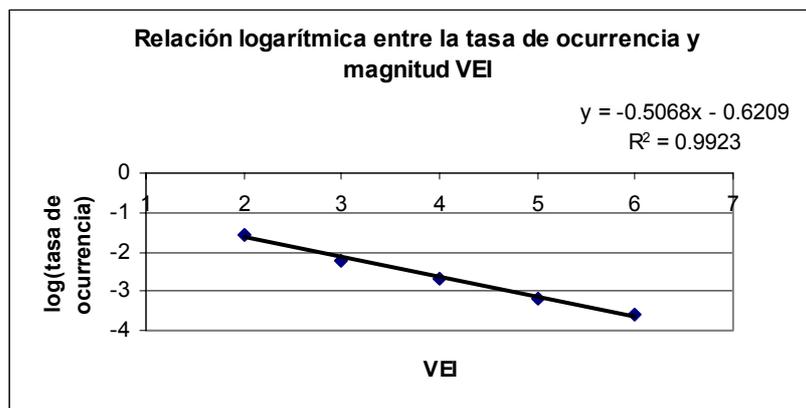


Fig. 3.25. Regresión lineal del logaritmo de la tasa anual de ocurrencia contra la magnitud VEI utilizando datos geológicos (tabla 1.9) e históricos (tabla 1.7) del volcán Popocatépetl.

El resultado del ajuste utilizando las tasas anuales eruptivas de 2/1000 para VEI 4, 10/15000 para VEI 5 y 10/40000 para VEI 6 es muy bueno con un  $R^2$  cercano a la unidad, aunque existe gran diferencia en el valor de las tasas anuales de ocurrencia

de este modelo con respecto a los anteriores debida a las considerables diferencias entre las fuentes de información utilizadas.

#### Caso EPOPO6:

Debido a la gran incertidumbre de las ocurrencias de erupciones geológicas se realiza el caso EPOPO6 basado en la serie histórica (tabla 1.7) con tasas anuales de ocurrencia 14/494 y 3/494 de magnitud VEI 2 y 3 respectivamente, y utilizando la relación logarítmica (ecuación 3.2) se extrapola matemáticamente la recta  $y = -0.669x - 0.2096$ . Las tasas anuales de ocurrencia eruptivas con magnitud VEI 4, 5 y 6 resultantes son .00130137, .0002789 y .00005976 respectivamente. Con base en estos resultados extrapolados se obtiene la cantidad esperada de aproximadamente 30, 6 y 1 erupciones de magnitud VEI 4, 5 y 6 respectivamente en un periodo de 23,000 años. Las tasas anuales de ocurrencia obtenidas en este análisis se asemejan más a las listadas en la tabla 1.9 que las de la tabla 1.8.

Estos resultados son poco confiables debido a que están basados solo en 2 puntos que corresponden a las tasas anuales de ocurrencia de los datos históricos disponibles por lo tanto la pendiente de la recta resultante es muy sensible a algún cambio en las tasas anuales de ocurrencia de las erupciones que consisten de 14 y 3 erupciones en 494 años de magnitud VEI 2 y 3 respectivamente, afectando de manera importante los resultados si se encontrase alguna diferencia o error en la asignación de la magnitud de estos registros históricos, o si ocurre alguna otra erupción en el futuro próximo.

Por otro lado es importante considerar la posibilidad de la existencia de muchas más erupciones para el volcán Popocatépetl con magnitudes medianas a grandes no reconocidas aún geológicamente, aclarando que esto es suponiendo que los datos históricos obtenidos son totalmente confiables, que la serie eruptiva se comporta como en el pasado.

Para finalizar se comparan las tasas anuales de ocurrencia obtenidas de registros geológicos de distinta fuente (tabla 1.8 y 1.9) y las tasas anuales de ocurrencia obtenidas para valores de VEI grandes basándose en la extrapolación de los datos históricos (tabla 1.7) para el volcán Popocatépetl. Considerando 3 fuentes distintas de información utilizando el caso SMPOPO2 de combinaciones como representante de los 4 primeros ajustes los cuales se realizaron con combinaciones del registro

geológico mostrado en la tabla 1.8, el caso MPOPO5 representa el registro geológico enlistado en la tabla 1.9 y el caso EPOPO6 corresponde a la extrapolación del registro histórico descrito en la tabla 1.7.

	VEI 4	VEI 5	VEI 6
Tasa anual de ocurrencia para el caso SMPOPO2 (Núm. De erupciones estimado en 23,000)	0.00065421 (15)	0.00008696 (2)	-----
Tasa anual de ocurrencia para el caso MPOPO5 (Núm. De erupciones estimado en 23,000)	0.00200000 (46)	0.00066667 (15)	0.00025000 (6)
Tasa anual de ocurrencia para el caso EPOPO6 (Núm. De erupciones estimado en 23,000)	0.00130137 (30)	0.0002789 (6)	0.00005976 (1)

Tabla 3.16. Comparación de tasas anuales de ocurrencia obtenidas de 3 distintas fuentes para magnitudes VEI 4, 5 y 6. El caso SMPOPO2 representa a los valores geológicos mostrados en la tabla 1.8 (Siebe y Macías, 2004), el caso MPOPO5 representa a los valores geológicos listados en la tabla 1.9 (Macías et al., 1995a) y el caso EPOPO6 representa los valores históricos extrapolados de la tabla 1.7 (De la Cruz-Reyna y Tilling, 2006).

En la tabla 3.16. se listan las tasas anuales de ocurrencia considerando 3 casos los cuales consisten en: 7 erupciones de magnitud VEI 4 en 10,700 años y 2 erupciones de magnitud VEI 5 en 23,000 años, correspondientes al caso SMPOPO2; 2 erupciones de magnitud VEI 4 en 1000 años, 10 erupciones de magnitud VEI 5 en 15,000 años y 10 erupciones de magnitud VEI 6 en 40,000 años, correspondiente al caso MPOPO5; y por último las tasas anuales de ocurrencia extrapoladas de la serie histórica con 14 erupciones VEI 2 y 3 erupciones VEI 3 en 494 años, correspondientes al caso EPOPO6.

Se observa en la tabla 3.16 que la diferencia en las tasas anuales de ocurrencia estimadas entre los casos SMPOPO2 y MPOPO5 es demasiado grande, notando que el número de erupciones esperadas en 23,000 se triplican; donde el caso EPOPO6 resulta aproximadamente la cantidad media entre los casos SMPOPO2 y MPOPO5.

Se concluye que los periodos de reposo entre la ocurrencia de erupciones de la serie histórica del volcán Popocatépetl son independientes, mientras que la serie eruptiva presenta una “débil” no-estacionaridad. La asignación del valor de magnitud para los registros geológicos resulto ser muy variable a causa de la diferencia en la fuente de información donde estadísticamente se considera el mejor modelo SMPOPO2 con los registros geológicos enlistados en la tabla 1.8. Es importante tomar en cuenta que

matemáticamente los resultados muestran que es posible considerar mas erupciones que las registradas en la tabla 1.8 acercándose al registro geológico mostrado en la tabla 1.9 considerando que la serie eruptiva se comporte como en el pasado.

### 3.2. ANÁLISIS DE TIEMPOS DE ESPERA ENTRE ERUPCIONES CON LA FUNCIÓN DE PROBABILIDAD DE WEIBULL.

En esta sección, se aplica la distribución de probabilidad de Weibull a los tiempos de espera asociados a series eruptivas clasificadas por magnitud VEI de los volcanes Colima, Citlaltépetl y Popocatépetl.

La metodología general para este análisis es obtener en primer lugar la distribución de datos de los periodos de reposo entre erupciones registradas. Después se obtienen los parámetros de la distribución basándose en el método gráfico, por medio de una regresión lineal (ecuación 2.4). Al obtener los coeficientes de la recta resultante se determinan los parámetros de forma  $k$  y de escala  $a$ : la pendiente de la recta obtenida por la regresión lineal es igual a  $k$  y la intercepción es igual a  $k \ln(1/a)$ . De esta manera es posible evaluar la función de distribución de Weibull que caracteriza los tiempos de espera entre erupciones y así calcular la función de supervivencia (ecuación 2.3) de la distribución de Weibull y de allí determinar la probabilidad de que el tiempo de espera sea mayor a un valor dado. Este valor es de particular importancia en la evaluación del riesgo ya que provee un criterio de planeación de uso del suelo en zonas potencialmente amenazadas por productos volcánicos.

#### 3.2.1 VOLCÁN DE COLIMA

Para utilizar la distribución de Weibull (sección 2.1) primero se obtienen las frecuencias observadas de los periodos de reposo entre erupciones, en particular se tomará una longitud de periodos de reposo entre erupciones en unidades de 10 años para los datos históricos, y de 1,000 años para los datos geológicos.

En las tablas 3.17 y 3.18 se exponen la frecuencia  $n_i$ , el periodo de reposo  $t_i$  y la

$i$

$t_i$	VEI 2		VEI 3		VEI 4		VEI $\geq 2$		VEI $\geq 3$	
	$n_i$	$F(t_i)$	$n_i$	$F(t_i)$	$n_i$	$F(t_i)$	$n_i$	$F(t_i)$	$n_i$	$F(t_i)$
1	4	0.44	2	0.22	0	0.00	14	0.70	10	0.67
2	0	0.44	3	0.56	3	0.60	1	0.75	0	0.67
3	0	0.44	0	0.56	0	0.60	1	0.80	0	0.67
4	0	0.44	0	0.56	0	0.60	0	0.80	1	0.73
5	2	0.67	0	0.56	0	0.60	2	0.90	1	0.80
6	0	0.67	0	0.56	0	0.60	0	0.90	0	0.80
7	0	0.67	0	0.56	0	0.60	1	0.95	1	0.87
8	1	0.78	2	0.78	1	0.80	1	1.00	1	0.93
9	1	0.89	1	0.89	0	0.80			1	1.00
10	0	0.89	1	1.00	0	0.80				
11	0	0.89			0	0.80				
12	0	0.89			0	0.80				
13	1	1.00			0	0.80				
14					0	0.8				
15					0	0.8				
16					0	0.8				
17					0	0.8				
18					0	0.8				
19					1	1				

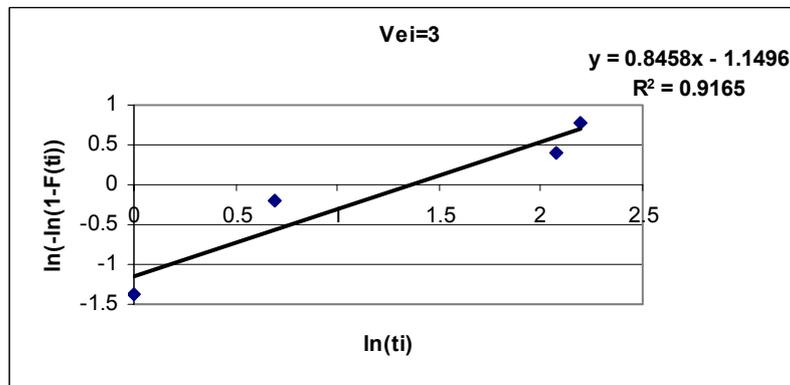
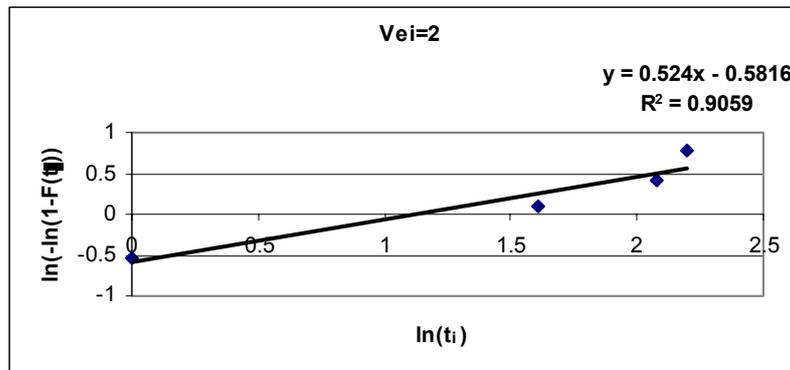
<b>N</b>	<b>9</b>		<b>9</b>		<b>5</b>		<b>20</b>		<b>15</b>	
----------	----------	--	----------	--	----------	--	-----------	--	-----------	--

Tabla 3.17. Frecuencia  $n_i$ , del periodo de reposo  $t_i$  en unidades de 10 años para los datos históricos clasificados en magnitud VEI 2, 3, 4,  $\geq 2$  y  $\geq 3$ , los valores  $F(t_i)$  corresponden a la función acumulativa experimental (ecuación. 2.5) y  $N$  es el total de periodos de reposo observados en la serie eruptiva histórica del volcán de Colima mostrada en la tabla 1.3.

VEI>4		
$t_i$	$n_i$	$F(t_i)$
1	1	0.5
2	0	0.5
3	1	1
<b>N</b>	<b>2</b>	

Tabla 3.18. Frecuencia  $n_i$ , del periodo de reposo  $t_i$  en unidades de 100 décadas, los valores  $F(t_i)$  corresponden a la función acumulativa experimental y  $N$  es el total de periodos de reposo observados de la serie eruptiva geológica del volcán de Colima para VEI > 4 mostrada en la tabla 1.2.

Utilizando los datos (tablas 3.17 y 3.18) de las series eruptivas histórica y geológica del volcán de Colima, se calculan los elementos  $\ln(-\ln(1/(1-F(t_i))))$  y  $\ln(t_i)$  de la regresión lineal (ecuación 2.4) para conocer la viabilidad del ajuste de la distribución de Weibull a los datos observados y obtener los parámetros de la distribución de Weibull para la serie eruptiva clasificada en magnitud VEI 2, 3, 4,  $\geq 2$ ,  $\geq 3$  y  $>4$  del volcán de Colima (Bebbington y Laid; 1996).



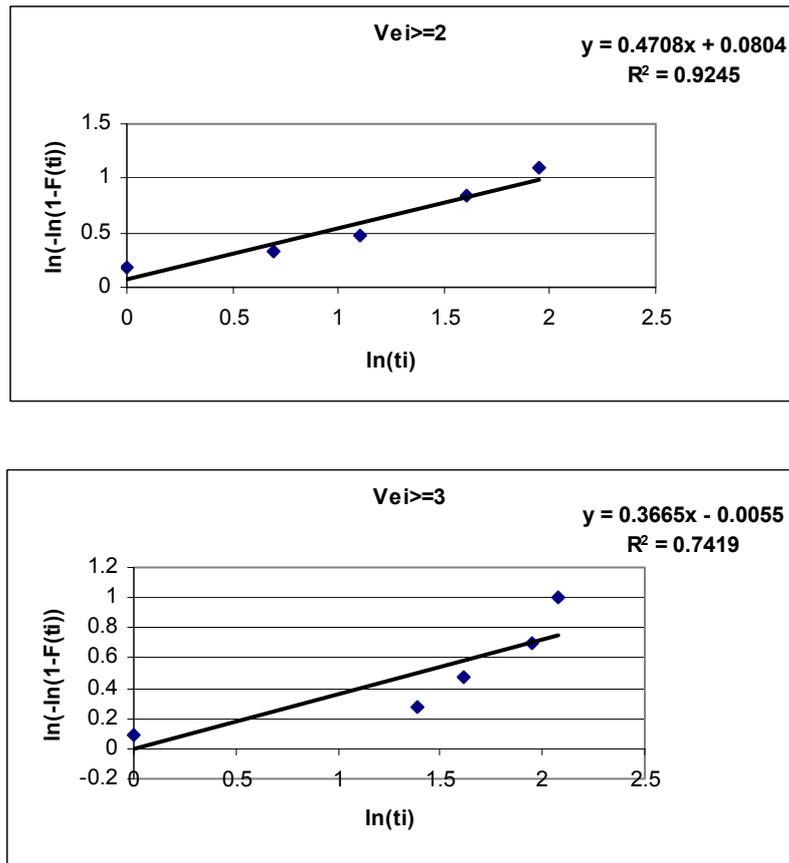


Fig. 3.26. Regresión lineal de  $\ln(-\ln(1/(1-F(t_i))))$  contra  $\ln(t_i)$  para obtener los parámetros de la distribución de Weibull y conocer la viabilidad del ajuste de la distribución de Weibull a los datos observados de la serie eruptiva del volcán de Colima por medio del cuadrado del coeficiente de correlación la  $R^2$  (Bebbington y Laid; 1996).

Para los casos de las series eruptivas de  $VEI > 4$  y  $VEI = 4$  debido a la pequeña cantidad de erupciones registradas es posible obtener las rectas  $y = 1.0928x - 0.3665$  y  $y = 0.4063x - 0.3691$ , respectivamente. En las gráficas de las regresiones lineales de la figura 3.26 se observa la  $R^2$  para todos los casos cercana a la unidad. El valor mas pequeño de  $R^2$  corresponde a la regresión lineal de la serie eruptiva  $VEI \geq 3$  con un valor igual a 0.74, considerándose un valor aún satisfactorio para mostrar la viabilidad del ajuste de los tiempos de espera por medio de la distribución de Weibull. En el caso que el valor de  $R^2$  fuera muy pequeño se podría decir que los tiempos de espera no se ajustan a una distribución de Weibull, en la situación de  $VEI \geq 3$  aún es posible considerar el ajuste de los tiempos de espera aunque puede afectar en la precisión del ajuste.

Los parámetros necesarios para calcular la función de distribución de Weibull para las series eruptivas clasificadas en magnitud se enlistan en la tabla 3.19.

	VEI 2	VEI 3	VEI 4	VEI ≥ 2	VEI ≥ 3	VEI > 4
Parámetro de forma $k$	0.524	0.846	0.406	0.471	0.367	1.093
Parámetro de escala $a$	3.034	3.893	2.480	0.843	1.015	1.398

Tabla 3.19. Parámetros de forma  $k$  y escala  $a$ , para la función de distribución de Weibull clasificados en magnitud VEI.

Los parámetros permiten evaluar la función de distribución de Weibull y por lo tanto la función de supervivencia  $S(t_i)$ , la probabilidad de que el periodo de reposo entre erupciones sea mayor a  $t_i$  (ecuación 2.3).

Los datos observados de las series eruptivas clasificadas en magnitud del volcán de Colima y los datos calculados por la función de supervivencia de Weibull son comparados en las tablas 3.20 y 3.21.

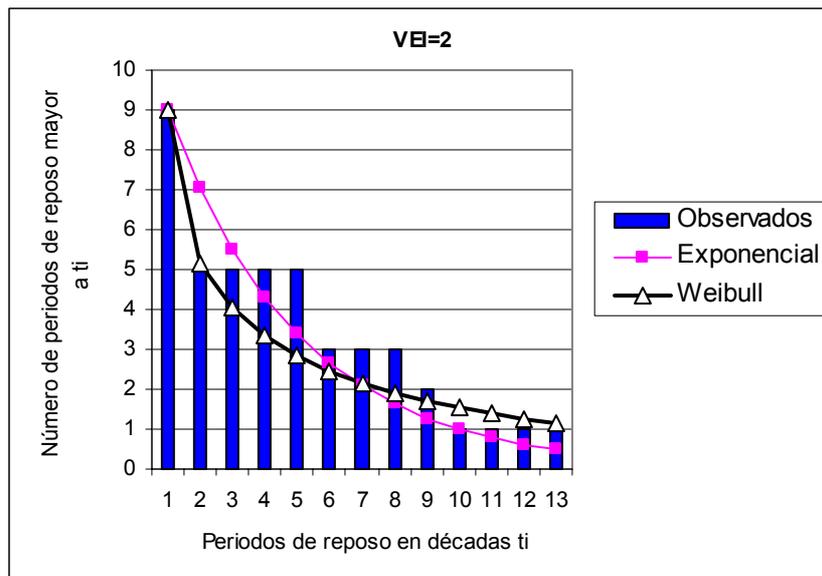
$t_i$	VEI 2		VEI 3		VEI 4		VEI ≥ 2		VEI ≥ 3	
	OBS	CALC	OBS	CALC	OBS	CALC	OBS	CALC	OBS	CALC
0	9	9.00	9	9.00	5	5.00	20	20.00	15	15.00
1	5	5.15	7	6.56	5	2.50	6	6.77	5	5.55
2	5	4.03	4	5.09	2	2.00	5	4.45	5	4.16
3	5	3.33	4	4.04	2	1.70	4	3.25	5	3.39
4	5	2.83	4	3.24	2	1.48	4	2.49	4	2.87
5	3	2.45	4	2.62	2	1.32	2	1.98	3	2.49
6	3	2.15	4	2.13	2	1.19	2	1.61	3	2.20
7	3	1.91	4	1.74	2	1.09	1	1.33	2	1.97
8	2	1.71	2	1.43	1	1.00			1	1.78
9	1	1.54	1	1.18	1	0.92				
10	1	1.39			1	0.86				
11	1	1.26			1	0.80				
12	1	1.15			1	0.75				
13					1	0.70				
14					1	0.66				
15					1	0.63				
16					1	0.59				
17					1	0.56				
18					1	0.53				

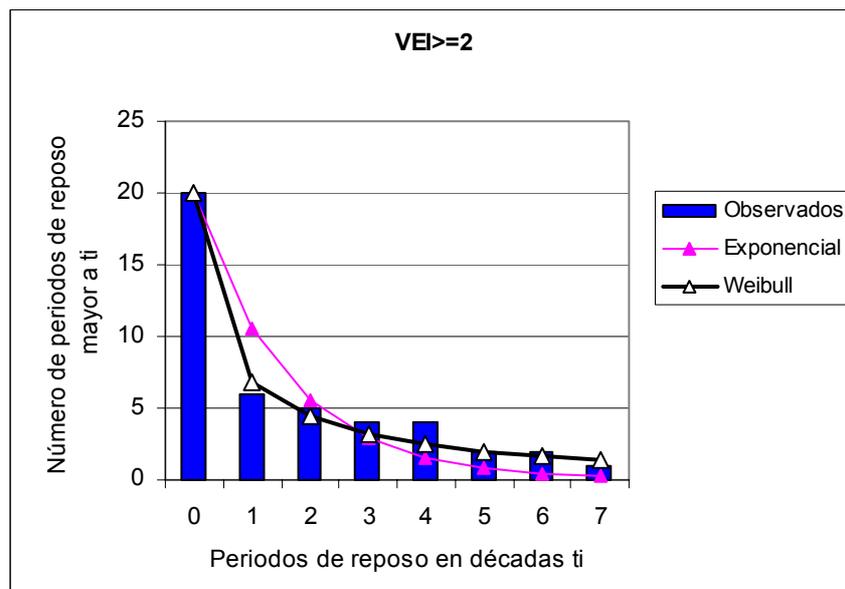
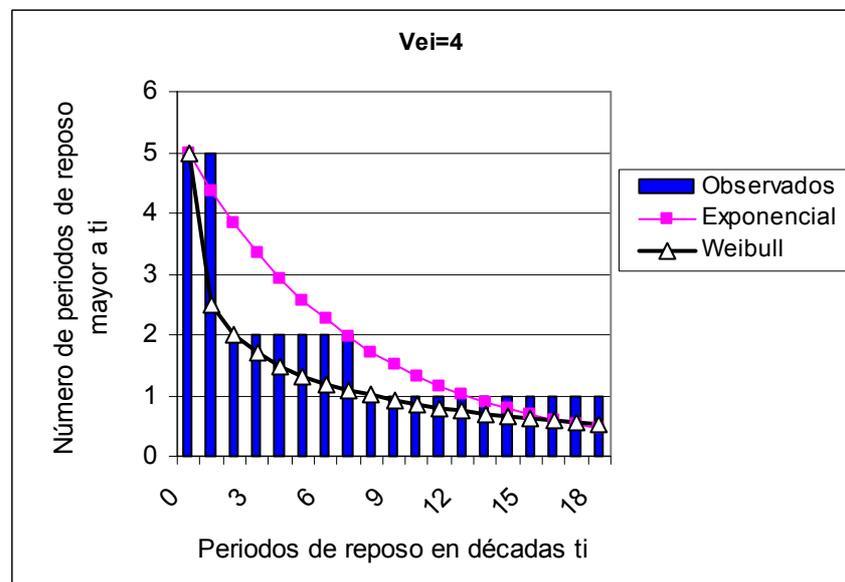
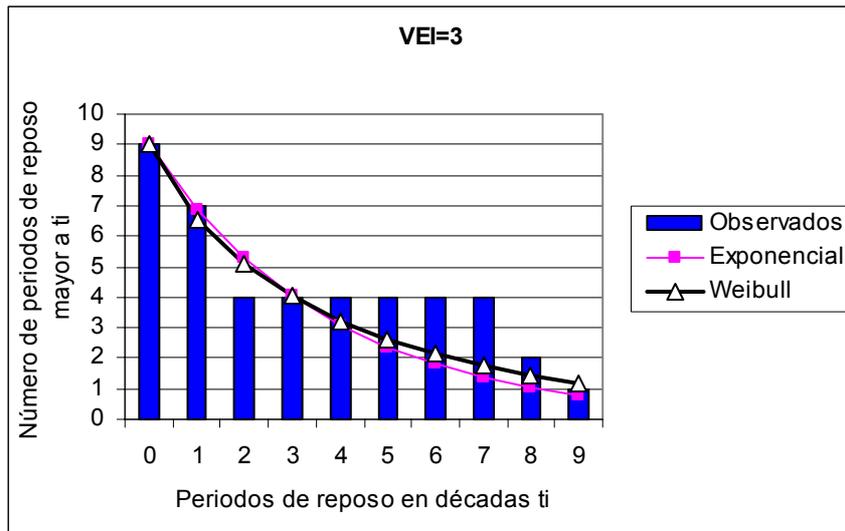
Tabla 3.20. El número de periodos de reposo calculado "CALC" mayores a  $t_i$  (periodo de reposo en unidades de 10 años) es obtenido del producto de  $S(t_i)*N$  y los datos observados "OBS" es el número de periodos de reposo observados de la serie eruptiva histórica mayores a  $t_i$  del volcán de Colima.

	VEI > 4	
$t_i$	OBS	CALC
0	2	2
1	1	1.00
2	1	0.46

Tabla 3.21. El número de periodos de reposo calculado "CALC" mayores a  $t_i$  (periodo de reposo en unidades de 100 décadas) es obtenido del producto de  $S(t_i)*N$  y los datos observados "OBS" es el número de periodos de reposo observados mayores a  $t_i$  de la serie eruptiva geológica del volcán de Colima.

Los valores calculados de la función de Supervivencia de Weibull se muestran en la figura 3.27. Para visualizar el ajuste se comparan con valores obtenidos de la función exponencial y con los valores observados de la serie eruptiva histórica y geológica del volcán de Colima. La función exponencial se calculó con el parámetro de escala igual a 11/45, 12/45, 6/45, 29/45, 18/45 y 3/7, para VEI 2, 3, 4,  $\geq 2$ ,  $\geq 3$  y  $>4$  respectivamente.





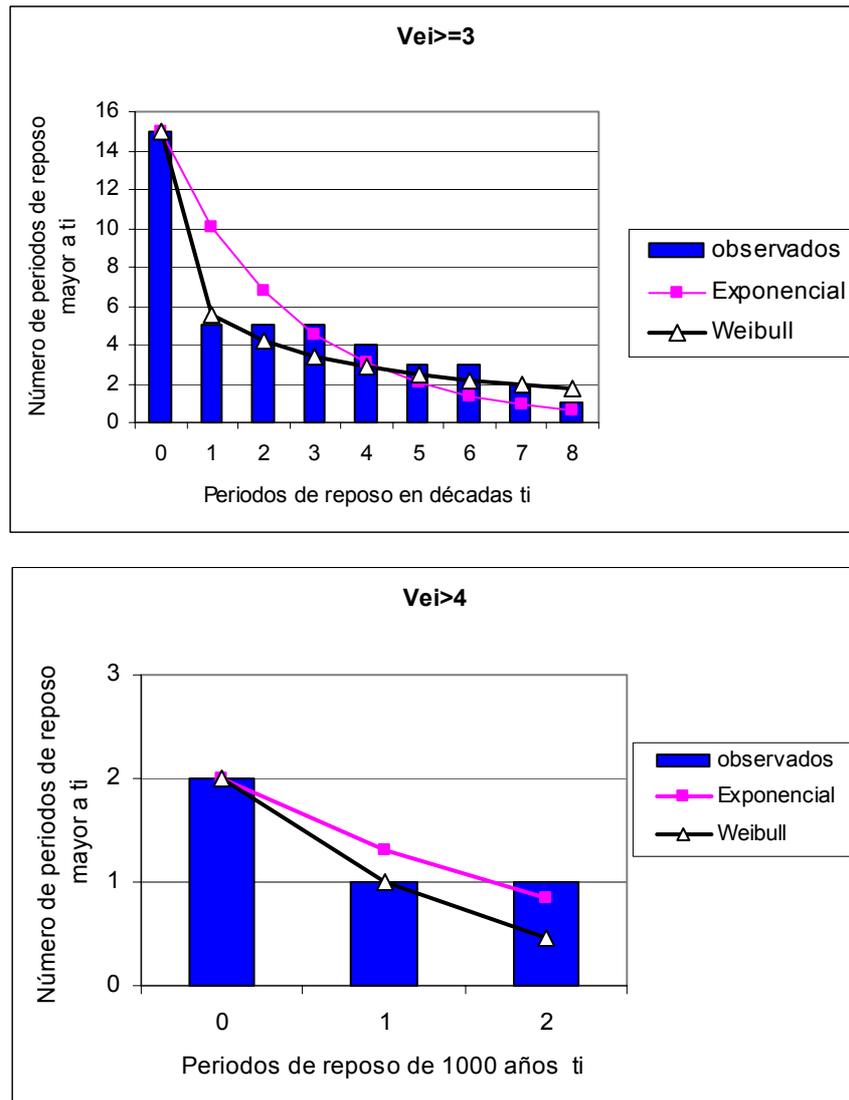


Fig. 3.27. Comparación de los datos calculados por medio de la función de supervivencia de Weibull (línea con triángulos), función de supervivencia Exponencial (línea con cuadros) y datos observados (barras) del número de periodos de reposo mayor a  $t_i$ , para la serie eruptiva histórica clasificada en magnitud (VEI 2, 3, 4,  $\geq 2$  y  $\geq 3$ ) y geológica (VEI > 4) del volcán de Colima.

En la figura 3.27 se aprecian las graficas de las funciones de supervivencia para cada clasificación en magnitud, observando en todos los casos un mejor ajuste por medio de la función de supervivencia de Weibull que por el obtenido con la función de supervivencia exponencial a los datos observados de las series eruptivas. Esta diferencia radica en la virtud de generalidad de la distribución de Weibull debido a su parámetro de forma que le proporciona mayor precisión en el ajuste a datos estacionarios y no-estacionarios. En cambio la distribución exponencial se limita a procesos estacionarios.

Para la serie geológica (tabla 1.2) se tiene una menor precisión, probablemente por lo pequeño de la muestra, el rango de incertidumbre en las fechas geológicas que causa imprecisión en los periodos de reposo observados y/o la selección de la duración total de la muestra.

La función de distribución de Weibull es el complemento de la función de supervivencia de Weibull analizada anteriormente, por lo tanto la función de distribución definida como  $P(t \leq t_i)$  (ecuación 2.2) calcula la probabilidad de que el periodo de reposo entre erupciones sea a lo más  $t_i$  medido en unidades de 10 años para la serie eruptiva histórica y en unidades de 1000 años para la serie eruptiva geológica.

<b>Probabilidad de que el periodo de reposo sea igual o menor a <math>t_i</math></b>					
<b><math>F(t_i)</math></b>					
<b><math>t_i</math></b>	<b>VEI 2</b>	<b>VEI 3</b>	<b>VEI 4</b>	<b>VEI <math>\geq 2</math></b>	<b>VEI <math>\geq 3</math></b>
1	0.4282	0.2715	0.4991	0.6617	0.6301
2	0.5524	0.4341	0.6000	0.7773	0.7226
3	0.6299	0.5517	0.6605	0.8376	0.7741
4	0.6852	0.6406	0.7031	0.8753	0.8085
5	0.7272	0.7094	0.7354	0.9009	0.8337
6	0.7606	0.7635	0.7611	0.9195	0.8531
7	0.7877	0.8065	0.7822	0.9334	0.8686
8	0.8102	0.8410	0.8000	0.9441	0.8813
9	0.8293	0.8689	0.8151		0.8919
10	0.8456	0.8915	0.8283		
11	0.8597		0.8398		
12	0.8720		0.8501		
13	0.8828		0.8592		
14			0.8674		
15			0.8748		
16			0.8815		
17			0.8876		
18			0.8933		
19			0.8984		

Tabla 3.22. Valores estimados con la función de distribución de probabilidad de Weibull que muestran la probabilidad de que el periodo de reposo sea igual o menor a  $t_i$ . Donde  $t_i$  es el periodo de reposo medido en décadas para la serie eruptiva histórica clasificada en magnitud VEI 2, 3, 4,  $\geq 2$  y  $\geq 3$ .

Por ejemplo la probabilidad de que el periodo de reposo sea menor o igual a 20 años con un VEI específico se muestra en la tabla 3.23.

VEI 2	VEI 3	VEI 4	VEI $\geq 2$	VEI $\geq 3$
0.5524	0.4341	0.6000	0.7773	0.7226

Tabla 3.23. Probabilidades de que el tiempo de espera entre erupciones sea menor o igual a 20 años (obtenidas de la tabla 3.22) para el volcán de Colima.

Para los datos geológicos la probabilidad de que el periodo de reposo entre erupciones sea menor o igual a  $t_i$  mostrada en la tabla 3.24 esta definida como  $P(t \leq t_i)$  (ecuación 2.2) con  $t_i$  igual a periodos medidos en unidades de 1000 años.

	$F(t_i)$
$t_i$	VEI > 4
1	0.50
2	0.77
3	0.90

Tabla 3.24. Valores estimados con  $F(t_i)$  función de distribución de probabilidad de Weibull muestran la probabilidad de que el periodo de reposo sea igual o menor a  $t_i$ , con  $t_i$  igual a un periodo de reposo medido en unidades de 100 décadas.

La probabilidad de que el tiempo de espera sea menor o igual a  $t_i$  implica que al menos ocurra una erupción en el intervalo de tiempo  $[0, t_i]$ , es decir que ocurra al menos una erupción dentro de un periodo igual a  $t_i$ .

Por ejemplo la probabilidad de que el tiempo de espera sea a lo más 2000 años con un VEI >4 es igual a 0.77 (tabla 3.24).

La serie eruptiva histórica del volcán de Colima es considerada débilmente no-estacionaria, por lo tanto el resultado del ajuste con la función de distribución de probabilidad de Weibull es mejor que con el ajuste obtenido por la función de distribución exponencial. La metodología aquí mostrada para analizar el periodo de espera de una serie eruptiva es aplicable a series estacionarias y no-estacionarias.

### 3.2.2 VOLCÁN CITLALTÉPETL

En el análisis para el volcán Citlaltépetl se aplica la misma metodología explicada al inicio de esta sección 3.2 para ajustar los tiempos de espera entre erupciones. En este caso, debido a los pocos datos disponibles, se ajustan en un mismo proceso los datos históricos (tabla 1.4) con magnitud VEI 2 y los datos geológicos con magnitud  $VEI \geq 4$  (sección 3.1.2.) (De la Cruz-Reyna y Carrasco - Núñez, 2002).

Para ello, se tabula la frecuencia observada de los periodos de reposo históricos con erupciones de magnitud igual a VEI 2 midiendo los intervalos de reposo en unidades de 10 años, y para los datos geológicos  $VEI \geq 4$  se miden los intervalos de reposo en unidades de 3,000 años.

VEI = 2		
$t_i$	$n_i$	$F(t_i)$
1	1	0.20
2	2	0.60
3	0	0.60
4	0	0.60
5	0	0.60
6	0	0.60
7	0	0.60
8	0	0.60
9	0	0.60
10	0	0.60
11	0	0.60
12	1	0.80
13	0	0.80
14	0	0.80
15	0	0.80
16	1	1
<b>N</b>	<b>5</b>	

Tabla 3.25. Los periodos de reposo  $t_i$  entre erupciones están medidos en unidades de 10 años, donde  $n_i$  es la frecuencia de periodos de reposo igual a  $t_i$ , los valores  $F(t_i)$  corresponden a la función experimental acumulativa y  $N$  es el total de periodos de reposo para la serie eruptiva mostrada en la tabla 1.4 clasificada en magnitud VEI 2 del volcán Citlaltépetl.

VEI $\geq 4$		
$t_i$	$n_i$	$F(t_i)$
1	1	0.5
2	1	1
<b>N</b>	<b>2</b>	

Tabla 3.26. Se muestran los periodos de reposo  $t_i$  en unidades de 3,000 años,  $n_i$  es la frecuencia de periodos de reposo igual a  $t_i$ ,  $F(t_i)$  es la función experimental acumulativa y  $N$  es el total de periodos de reposo de la serie eruptiva geológica del volcán Citlaltépetl (sección 1.4.2) con magnitud VEI  $\geq 4$ .

Los resultados de las tablas 3.25 y 3.26 se utilizan para realizar la regresión lineal (ecuación 2.4) y obtener los parámetros de forma  $k$  y escala  $a$  de la distribución de Weibull.

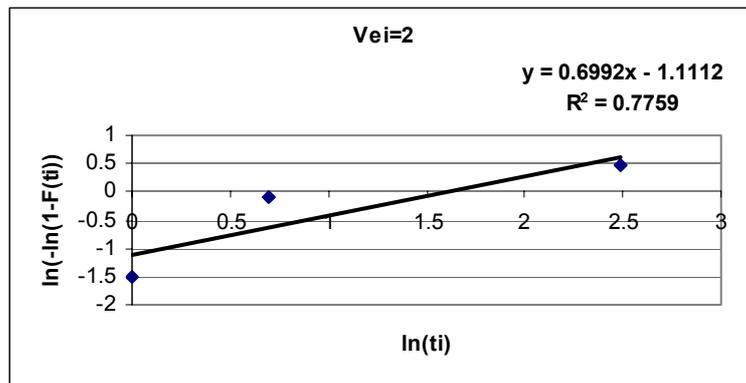


Fig. 3.28. Regresión lineal de  $\ln(-\ln(1/(1-F(t_i))))$  contra  $\ln(t_i)$  para obtener los parámetros de la distribución de Weibull y conocer la viabilidad del ajuste de la distribución de Weibull por medio de  $R^2$  (cuadrado del coeficiente de correlación) para los datos observados históricos VEI = 2 (Bebbington y Laid, 1996).

Para obtener los parámetros de la distribución de Weibull correspondientes a los datos geológicos de magnitud VEI  $\geq 4$  se utiliza la recta (ecuación 2.4):  $y = 1.732x - .3665$ . En la figura 3.28 se obtiene un valor de  $R^2$  suficiente para verificar la validez del ajuste y obtener los parámetros para la serie clasificada en magnitud VEI 2. Los parámetros estimados de la función de distribución de Weibull son mostrados en la tabla 3.27.

	VEI = 2	VEI ≥ 4
<b>Parámetro de forma <math>k</math></b>	0.699	1.732
<b>Parámetro de escala <math>a</math></b>	4.900	1.236

Tabla 3.27. Parámetros de la función de probabilidad de Weibull, para la serie eruptiva del volcán Citlaltépetl con magnitud VEI = 2 y VEI ≥ 4.

La probabilidad de que el tiempo de espera entre erupciones sea mayor que un periodo dado  $t_i$ , se calcula por medio de la función de Supervivencia  $S(t_i)$ . Los datos observados y calculados por la función de supervivencia de Weibull se comparan en las tablas 3.28 y 3.29:

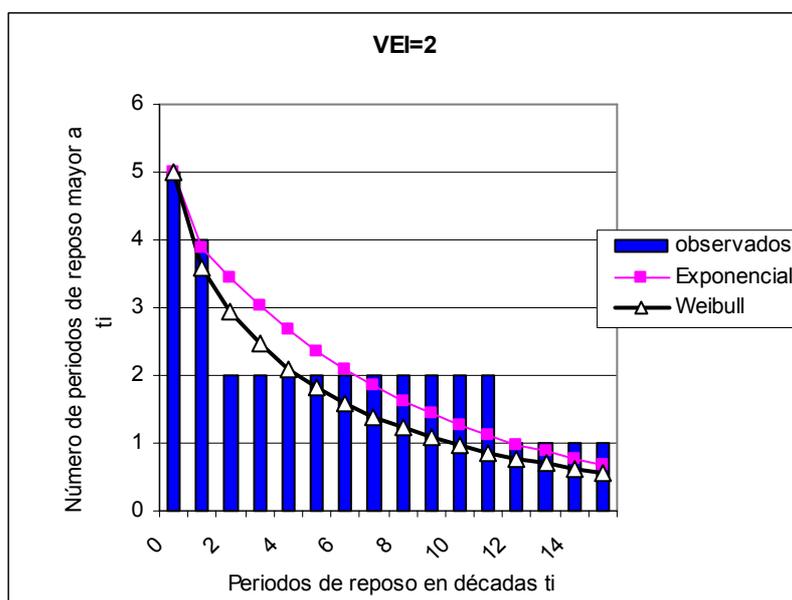
$t_i$	VEI = 2	
	OBSERVADOS	CALCULADOS
0	5	5.00
1	4	3.60
2	2	2.93
3	2	2.46
4	2	2.10
5	2	1.81
6	2	1.58
7	2	1.39
8	2	1.22
9	2	1.08
10	2	0.96
11	2	0.86
12	1	0.77
13	1	0.69
14	1	0.62
15	1	0.56

Tabla 3.28. La columna "CALCULADOS" corresponde al número esperado de periodos de reposo mayor a  $t_i$  se calculó como el producto de  $S(t_i)*N$ . La columna "OBSERVADOS" corresponde al número observado de periodos de reposo mayores a  $t_i$ , medidos en unidades de 10 años para la serie eruptiva histórica del volcán Citlaltépetl con magnitud VEI 2.

VEI $\geq 4$		
$t_i$	OBSERVADOS	CALCULADOS
0	2	2
1	1	1.00

Tabla 3.29. La columna "CALCULADOS" corresponde al número de periodos de reposo mayor a  $t_i$  se calculó como el producto de  $S(t_i) \cdot N$ . La columna "OBSERVADOS" corresponde al número de periodos de reposo observados mayores a  $t_i$ , para la serie geológica VEI  $\geq 4$  con periodos de reposo medidos en unidades de 300 décadas para el volcán Citlaltépetl.

Los valores calculados de la función de Supervivencia de la distribución exponencial con parámetros 6/48 y 3/5 para las magnitudes VEI 2 y  $\geq 4$  respectivamente, la función de Supervivencia de la distribución de Weibull y los valores observados de periodos de reposo de la serie eruptiva del volcán Citlaltépetl se grafican en la figura 3.29.



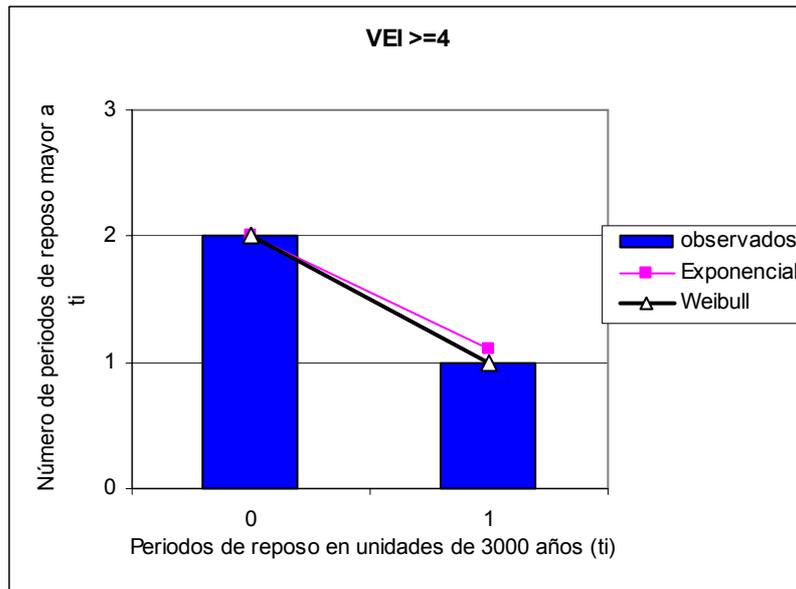


Fig. 3.29. Gráfica de los datos calculados por medio de la función de Supervivencia de Weibull (línea con triángulos) y la función de supervivencia exponencial (línea con cuadros), y los datos observados (barras) del número de periodos de reposo mayor a  $t_i$ , para la serie histórica eruptiva del volcán Citlaltépetl con magnitud VEI 2 y para la serie geológica eruptiva del volcán de Citlaltépetl con magnitud  $VEI \geq 4$ .

Las gráficas de la figura 3.29 muestran un mejor ajuste de la función de supervivencia de Weibull que con el ajuste de la función de supervivencia exponencial a los datos observados de las series eruptivas con magnitud  $VEI=2$  y  $VEI \geq 4$ .

La probabilidad de que el periodo de reposo entre erupciones sea a lo más  $t_i$  se muestra en las tablas 3.30 y 3.31 definida como  $P(t \leq t_i)$  en la ecuación (2.2).

$t_i$	VEI 2 $F(t_i)$
1	0.2805
2	0.4140
3	0.5082
4	0.5801
5	0.6373
6	0.6840
7	0.7229
8	0.7556
9	0.7834
10	0.8073
11	0.8280
12	0.8460
13	0.8617
14	0.8755
15	0.8877
16	0.8985

Tabla 3.30. Valores estimados con la función de distribución de probabilidad de Weibull (ecuación 2.2) muestran la probabilidad de que el periodo de reposo sea igual o menor a  $t_i$  para la magnitud VEI 2 donde  $t_i$  está medido en décadas.

$t_i$	VEI $\geq 4$ $F(t_i)$
1	0.500
2	0.900

Tabla 3.31. Valores estimados con la función de distribución de probabilidad de Weibull muestran la probabilidad de que el periodo de reposo sea igual o menor a  $t_i$  medido en unidades de 300 décadas para VEI  $\geq 4$ .

Por ejemplo de la tabla 3.30 se obtiene la probabilidad de que un periodo de reposo sea menor o igual a 30 años es igual a 0.5082 para una erupción de magnitud VEI 2 en el volcán Citlaltépetl.

En la tabla 3.31 las probabilidades se dividieron aproximadamente en  $\frac{1}{2}$  y 1, lo cual no proporciona información relevante debido a las pocas observaciones registradas además de estar en una escala de tiempo muy amplia debido a que los periodos de

reposito están en unidades de 3000 años, obteniendo una probabilidad de  $\frac{1}{2}$  de tener un periodo de reposo menor o igual a 3000 años y una probabilidad de casi 1 de tener un periodo de reposo menor o igual a 6000 años.

El ajuste efectuado a la serie eruptiva del volcán Citlaltépetl por medio de la función de distribución de Weibull es semejante a la obtenida con la función de distribución exponencial, esto se adjudica a que la serie eruptiva del volcán Citlaltépetl tiene la característica de ser estacionaria.

### 3.2.3 VOLCÁN POPOCATÉPETL

Como en las secciones precedentes, primero se obtiene la frecuencia observada de los periodos de reposo entre erupciones (Tablas 3.33 y 3.34). En particular se mide la longitud de periodos de reposo entre erupciones en décadas para los eventos históricos con magnitud VEI 2 y 3. Para los datos geológicos se toma el caso SMPOPO2 descrito en la sección 3.1.3, (tabla 3.11) los periodos de reposo medidos en unidades de 100 décadas para 7 datos geológicos eruptivos en 10,700 años A.P., para la magnitudes de VEI 4.

<b>Años A.P.</b>	<b>VEI = 4</b>
0-999	
1000-1999	2
2000-2999	1
3000-3999	
4000-4999	
5000-5999	1
6000-6999	
7000-7999	1
8000-8999	
9000-9999	1
10000-10999	1
<b>TOTAL</b>	<b>7</b>

Tabla 3.32. Ocurrencia de los eventos eruptivos geológicos del volcán Popocatépetl en periodos medidos en unidades de 1000 años, considerando 7 datos eruptivos con magnitud igual a 4, para el periodo de 10,700 años A.P. (caso SMPOPO2 sección 3.1.3).

$t_i$	VEI 2		VEI 3		$t_i$	VEI 2		VEI 3	
	$n_i$	$F(t_i)$	$n_i$	$F(t_i)$		$n_i$	$F(t_i)$	$n_i$	$F(t_i)$
1	3	0.27	0	0	18	0	0.91	0	0.5
2	3	0.55	0	0	19	0	0.91	0	0.5
3	2	0.73	0	0	20	0	0.91	0	0.5
4	0	0.73	0	0	21	0	0.91	0	0.5
5	1	0.82	0	0	22	1	1	0	0.5
6	0	0.82	0	0	23			0	0.5
7	1	0.91	0	0	24			0	0.5
8	0	0.91	0	0	25			0	0.5
9	0	0.91	0	0	26			0	0.5
10	0	0.91	0	0	27			0	0.5
11	0	0.91	0	0	28			0	0.5
12	0	0.91	0	0	29			0	0.5
13	0	0.91	0	0	30			0	0.5
14	0	0.91	0	0	31			0	0.5
15	0	0.91	1	0.5	32			0	0.5
16	0	0.91	0	0.5	33			0	0.5
17	0	0.91	0	0.5	34			1	1
					<b>N</b>	<b>11</b>		<b>2</b>	

Tabla 3.33. Frecuencia  $n_i$ , del periodo de reposo  $t_i$  medido en unidades de 10 años y valores  $F(t_i)$  de la función acumulativa experimental (ecuación 2.5), donde  $N$  es el total de periodos de reposo en los registros históricos observados del volcán Popocatépetl clasificados en magnitud VEI 2 y 3.

VEI 4		
$t_i$	$n_i$	$F(t_i)$
1	2	0.40
2	2	0.80
3	1	1.00
<b>N</b>	<b>5</b>	

Tabla 3.34. Frecuencia  $n_i$ , del periodo de reposo  $t_i$  medido en unidades de 100 décadas y valores  $F(t_i)$  de la función acumulativa experimental (ecuación 2.5), donde  $N$  es el total de periodos de reposo en los registros geológicos observados del volcán Popocatépetl con magnitud VEI 4 (se consideran 7 erupciones con VEI 4 en 10,700 años).

Los parámetros de la distribución de Weibull se calculan (ecuación 4) utilizando los datos de las tablas 3.33 y 3.34 (Bebbington y Laid; 1996).

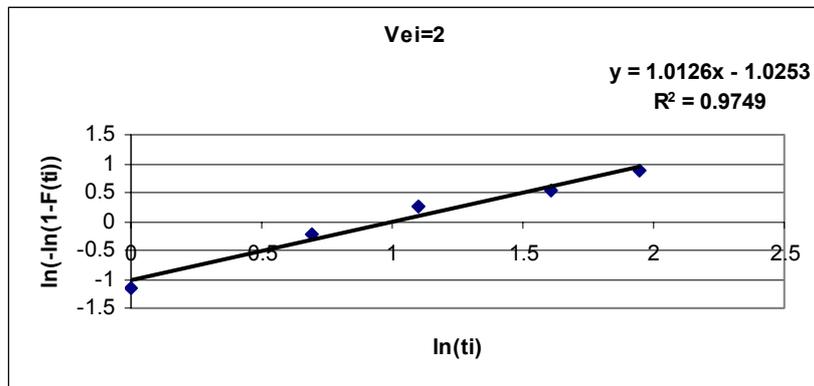


Fig. 3.30. Regresión lineal de  $\ln(-\ln(1/(1-F(t_i))))$  contra  $\ln(t_i)$  para obtener los parámetros de la distribución de Weibull y conocer la viabilidad del ajuste de los datos observados a la distribución de Weibull por medio del valor  $R^2$  de la serie clasificada en magnitud VEI 2(Bebbington y Laid; 1996).

En las series eruptivas de magnitud VEI 3 y 4, debido a que solo se cuenta con 2 puntos es posible obtener las rectas  $y = 1.4671 x - 4.3395$  y  $y = 1.6557 x - 0.6717$ , respectivamente.

Los parámetros necesarios para calcular la función de distribución de Weibull son:

	VEI 2	VEI 3	VEI 4
<b>Parámetro de forma <math>k</math></b>	1.0126	1.4671	1.6557
<b>Parámetro de escala <math>a</math></b>	2.7526	19.2570	1.5003

Tabla 3.35. Parámetros de forma  $k$  y escala  $a$ , para la función de distribución de Weibull clasificados en magnitud VEI.

Los datos observados y los datos calculados por la función de supervivencia de Weibull  $S(t_i)$  (ecuación 2.3) se comparan en las tablas 3.36 y 3.37.

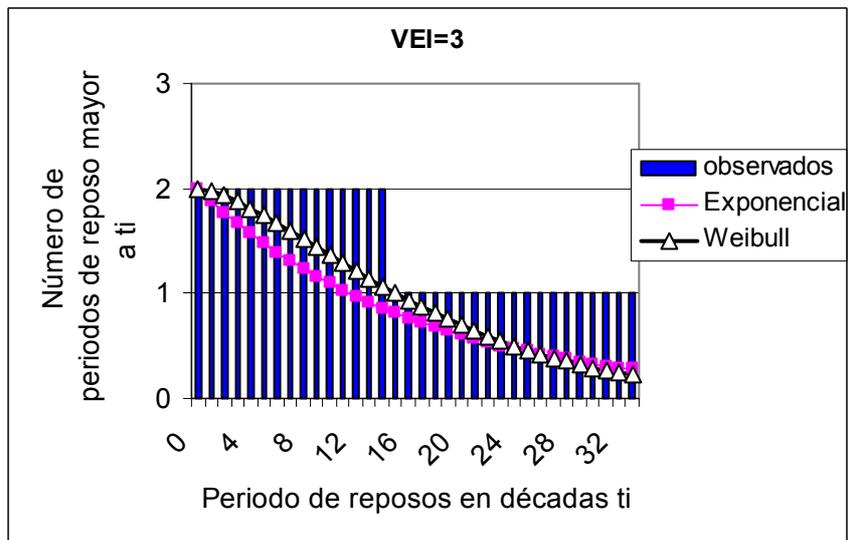
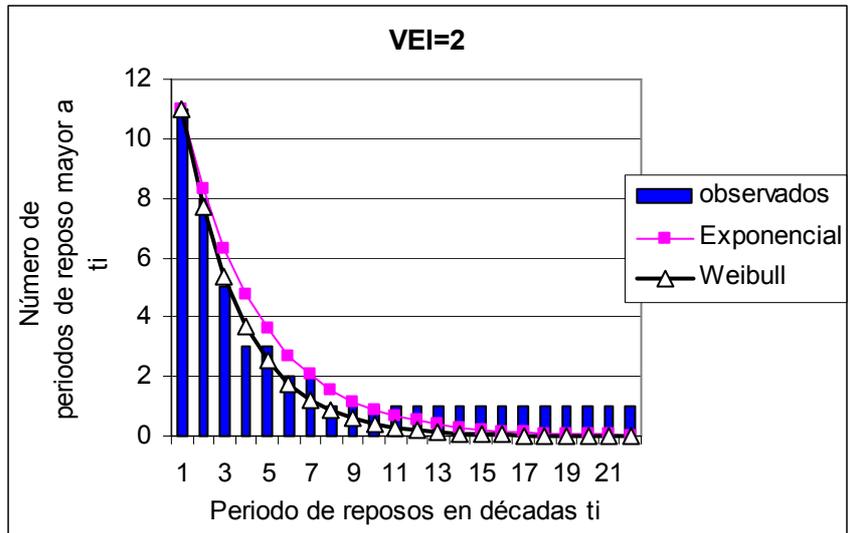
	VEI 2		VEI 3			VEI 2		VEI 3	
$t_i$	OBS	CALCU	OBS	CALCU	$t_i$	OBS	CALCU	OBS	CALCU
0	11	11	2	2	17	1	0.02	1	0.87
1	8	7.68	2	1.97	18	1	0.01	1	0.81
2	5	5.33	2	1.93	19	1	0.01	1	0.75
3	3	3.69	2	1.87	20	1	0.01	1	0.69
4	3	2.55	2	1.81	21	1	0	1	0.64
5	2	1.76	2	1.74	22			1	0.59
6	2	1.22	2	1.67	23			1	0.55
7	1	0.84	2	1.59	24			1	0.5
8	1	0.58	2	1.52	25			1	0.46
9	1	0.4	2	1.44	26			1	0.42
10	1	0.27	2	1.36	27			1	0.39
11	1	0.19	2	1.29	28			1	0.35
12	1	0.13	2	1.21	29			1	0.32
13	1	0.09	2	1.14	30			1	0.29
14	1	0.06	2	1.07	31			1	0.27
15	1	0.04	1	1	32			1	0.24
16	1	0.03	1	0.93	33			1	0.22

Tabla 3.36. La columna "CALCU" corresponde al número de periodos de reposo mayor a  $t_i$  medido en décadas. Es calculado como el producto de  $S(t_i)*N$  y la columna de "OBS" corresponde al número de periodos de reposo observados mayor a  $t_i$  en la serie eruptiva histórica del volcán Popocatépetl mostrada en la tabla 1.7.

	VEI 4	
$t_i$	OBS	CALCU
0	5	5.00
1	3	3.00
2	1	1

Tabla 3.37. La columna "CALCU" corresponde al número de periodos de reposo mayores a  $t_i$  calculado como el producto de  $S(t_i)*N$  y la columna de "OBS" corresponde al número de periodos de reposo observados mayores a  $t_i$  en la serie eruptiva geológica del volcán Popocatépetl mostrada en la tabla 1.8. Donde  $t_i$  esta en unidades de 1000 años.

Los valores obtenidos de la función de supervivencia exponencial con parámetros iguales a 14/50, 3/50 y 7/11 para las magnitudes VEI 2, 3 y 4 respectivamente, y los valores de la función de Supervivencia de Weibull son comparados a los valores observados de las series eruptivas del volcán Popocatepetl en la figura 3.31.



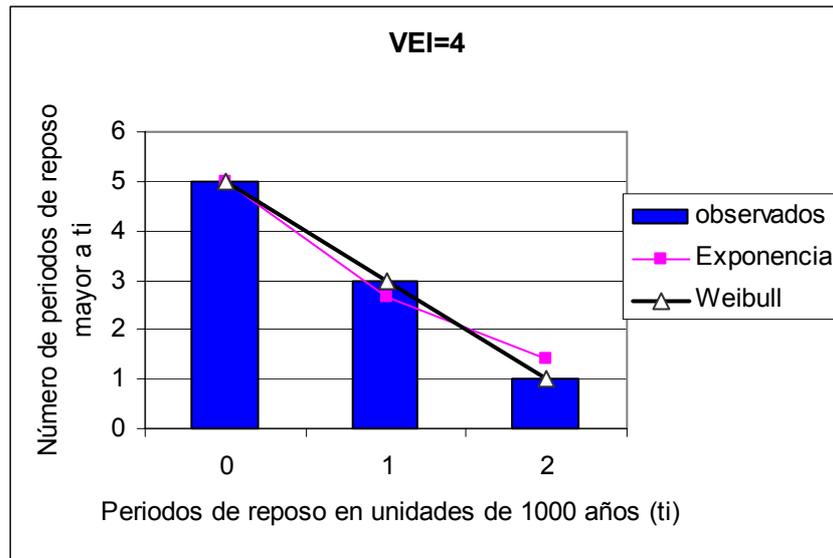


Fig. 3.31. Graficas de los datos calculados por medio de la función de Supervivencia de Weibull, exponencial, y los datos observados del número de periodos de reposo mayor a  $t_i$ , para la serie eruptiva histórica (clasificada en magnitud VEI 2 y VEI 3) y geológica (magnitud VEI 4) del volcán de Popocatepetl.

Se observa (fig. 3.31) un mejor ajuste por medio de la función de Supervivencia de Weibull que con la función exponencial a los datos observados de las series eruptivas histórica y geológica clasificadas en magnitud VEI.

La probabilidad de que ocurra al menos una erupción dentro de un periodo  $t_i$  (medido en décadas para valores históricos con magnitud VEI 2 y 3, y medido en unidades de 1000 años para los valores geológicos con magnitud VEI 4) esta definida como  $P(t \leq t_i)$  ecuación (2.2), es decir que la probabilidad de que el periodo de reposo entre erupciones sea a lo más  $t_i$ , esta mostrada en la tabla 3.38.

Probabilidad de que el periodo de reposo sea igual o menor a $t_i$		
	$F(t_i)$	
$t_i$	VEI 2	VEI 3
1	0.30140831	0.012958356
2	0.515031071	0.035417141
3	0.664141577	0.063277101
4	0.767772281	0.094884057
5	0.83961604	0.129166983
6	0.889337758	0.165330473
7	0.923704728	0.202744797
8	0.947434133	0.240894661
9	0.96380452	0.279351163
10	0.975089792	0.317754591
11	0.982864553	0.355802847
12	0.988217782	0.393243064
13	0.991901818	0.429865139
14	0.994435963	0.465496501
15	0.996178397	0.499997702
16	0.997375999	0.533258595
17	0.998198835	0.565194952
18	0.99876399	0.595745428
19	0.999152039	0.624868808
20	0.999418404	0.652541502
21	0.999601193	0.678755252
22	0.999726595	0.703515035
23		0.726837152
24		0.748747485
25		0.769279908
26		0.78847486
27		0.806378048
28		0.82303929
29		0.838511488
30		0.85284971
31		0.86611039
32		0.878350627
33		0.889627579
34		0.899997946

Tabla 3.38. Valores estimados con la función de distribución de probabilidad de Weibull muestran la probabilidad de que el periodo de reposo sea igual o menor a  $t_i$  década(s) para la serie eruptiva histórica del volcán Popocatépetl.

<b>Probabilidad de que el periodo de reposo sea igual o menor a <math>t_i</math></b>	
	<b><math>F(t_i)</math></b>
<b><math>t_i</math></b>	<b>VEI 4</b>
1	0.40000827
2	0.80001892
3	0.95713031

Tabla 3.39. Valores estimados con la función de distribución de probabilidad de Weibull muestran la probabilidad de que el periodo de reposo sea igual o menor a  $t_i$  (medido en unidades de 1000 años) para la serie eruptiva geológica del volcán Popocatepetl.

En resumen, la distribución de Weibull se ha aplicado a series eruptivas de los volcanes Popocatepetl, Citlaltépetl y Colima con buenos ajustes a los datos observados correspondientes. La distribución de Weibull es una distribución que puede aplicarse a datos no-estacionarios debido a la generalidad y flexibilidad que posee por medio del parámetro de forma, dando buenos resultados, en cambio la función de distribución exponencial es limitada para series estacionarias para obtener buenos resultados.

La comparación de los ajustes de la función de supervivencia de Weibull y la función de supervivencia exponencial permite observar como afecta la no - estacionaridad de la serie eruptiva al ajuste.

En las secciones anteriores para los volcanes Colima y Citlaltépetl se ha mostrado también un mejor ajuste por medio de la función de distribución de Weibull.

### 3.3 PROBABILIDADES DE OCURRENCIA DE ERUPCIÓN CALCULADAS A PARTIR DE UN PROCESO DE POISSON NO-HOMOGÉNEO DE PARETO

En esta sección se estima el peligro volcánico aplicando un proceso de Poisson no-homogéneo de Pareto a las series eruptivas de los volcanes Popocatépetl, Citlaltépetl y Colima. Para concluir se comparan los ajustes obtenidos con las distribuciones de Poisson homogénea y Binomial.

La metodología general para este análisis es obtener en primer lugar la tasa variable de ocurrencia de un proceso de Poisson no-homogéneo. Para esto se utiliza la teoría moderna de los valores extremos con la función de distribución generalizada de Pareto con el propósito de obtener la tasa de ocurrencia del proceso (ecuación 2.12). Los parámetros de la distribución generalizada de Pareto  $k$  y  $a$ , se obtienen de manera gráfica realizando una regresión lineal de la media de los excesos (exceso es la cantidad en magnitud que sobrepasa un valor fijo “umbral”) contra la magnitud umbral fija, donde la pendiente de la recta obtenida por la regresión es igual a  $-k/1+k$  y la intercepción es  $a/1+k$ . Posteriormente se calcula la ocurrencia de  $n$  erupciones en un periodo dado.

#### 3.3.1 VOLCÁN DE COLIMA

En primer lugar se calcularán las probabilidades de ocurrencia de una erupción con magnitud VEI definida, manejándose como la probabilidad de que ocurra un exceso “e” sobre una magnitud umbral predeterminada. Exceso es el valor en que la magnitud sobrepasa a un valor fijo (“umbral”). En este caso se usará un umbral VEI 2. Debido a que no se tienen los valores exactos de magnitud y fecha de ocurrencia para los datos geológicos que fueron incorporados a esta estimación, se analizará el primer caso, que supone valores enteros asignados a la magnitud de los registros geológicos descritos en la tabla 3.3.

El caso COL1 supone que 2 de los 3 datos geológicos tienen una magnitud igual a VEI 5 y al restante se le asigna un VEI 6.

Para aplicar el proceso de Poisson no-homogéneo (sección 2.2), se obtiene la medida de la intensidad por medio de la teoría de los valores extremos (sección 2.3). Para esto, es necesario antes comprobar que, con nuestros datos, los excesos son ajustables a una distribución generalizada de Pareto DGP (ecuación 2.9). Esto se logra al comprobar que la distribución de los excedentes (es decir, las erupciones con valor de magnitud mayor a la magnitud del umbral fijado) sobre un umbral se comporta como una DGP por medio de un método gráfico utilizando la función lineal (ecuación 2.10). Si el ajuste lineal es lo suficientemente bueno entre la media de los excedentes de cada umbral fijo contra el umbral, se concluye que los excesos (es decir, las diferencias entre los valores de los excedentes y el umbral fijado) se pueden ajustar a una distribución generalizada Pareto (Davison y Smith, 1990).

A continuación, se muestra el número de ocurrencias de erupciones clasificadas en magnitud VEI de las series eruptivas geológica e histórica (sección 3.1.1) del volcán de Colima, incluyendo la tasa anual de ocurrencia en su respectivo rango de años.

	<b>Rango de años históricos</b>	
	446	
<b>VEI</b>	<b>Número de ocurrencias</b>	<b>Tasa de ocurrencia (erupciones/años)</b>
2	11	0.024663677
3	12	0.02690583
4	6	0.013452915
	<b>Rango de años geológicos</b>	
	7040	
<b>VEI</b>	<b>Número de ocurrencias</b>	<b>Tasa de ocurrencia (erupciones/años)</b>
5	2	0.000284091
6	1	0.000142045

Tabla 3.40. Tasa anual y número de ocurrencias, clasificadas en su magnitud VEI para las series eruptivas histórica y geológica del volcán de Colima.

A partir de las tasas anuales de ocurrencia obtenidas se cuantifican las erupciones de cada magnitud VEI sobre un periodo de 10,000 años, multiplicando la tasa anual de ocurrencia por 10,000. Estos resultados se muestran en la tabla 3.41.

VEI	2	3	4	5	6
<b>Tasa de Ocurrencia (erupciones/años)</b>	0.0247	0.0269	0.0135	0.0003	0.0001
<b>Número estimado de erupciones en 10,000 años</b>	246.6368	269.0583	134.5291	2.8409	1.4205

Tabla 3.41. Tasa anual de ocurrencia y número esperado de ocurrencias de erupciones en un periodo de tiempo de 10,000 años, clasificadas en magnitud VEI.

Es decir que en 10,000 años se espera que ocurra una media de 247 erupciones con magnitud VEI 2, 269 erupciones con magnitud VEI 3, 135 erupciones VEI 4, 3 erupciones con magnitud VEI 5, y 1 erupción con magnitud VEI 6 aproximadamente.

Con el objetivo de comprobar la validez del ajuste de los excedentes y excesos, (donde, como se menciona arriba, exceso es la diferencia entre el excedente y el umbral predeterminado, y excedente es la magnitud de las erupciones que sean mayores a la magnitud del umbral), es necesario cuantificar la cantidad de estos por arriba de un umbral.

El número de excedentes es la cantidad de erupciones que tienen magnitud mayor a la magnitud del umbral VEI. Por lo tanto el número de excedentes y excesos es la misma cantidad, ya que si existe un exceso es necesaria la existencia de un excedente y viceversa.

**Umbral 1**

VEI	Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 1, es decir número de Excesos	Suma de las magnitudes de los Excedentes	Suma de las magnitudes de los Excesos
2	246.64	493.27	246.64
3	269.06	807.17	538.12
4	134.53	538.12	403.59
5	2.84	14.20	11.36
6	1.42	8.52	7.10
<b>Total</b>	654.49	1861.29	1206.81

**Umbral 2**

<b>VEI</b>	<b>Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 2, es decir número de Excesos</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excedentes</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excesos</b>
3	269.06	807.17	269.06
4	134.53	538.12	269.06
5	2.84	14.20	8.52
6	1.42	8.52	5.68
<b>Total</b>	407.85	1368.02	552.32

**Umbral 3**

<b>VEI</b>	<b>Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 3, es decir número de Excesos</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excedentes</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excesos</b>
4	134.53	538.12	134.53
5	2.84	14.20	5.68
6	1.42	8.52	4.26
<b>Total</b>	138.79	560.84	144.47

**Umbral 4**

<b>VEI</b>	<b>Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 4, es decir número de Excesos</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excedentes</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excesos</b>
5	2.84	14.20	2.84
6	1.42	8.52	2.84
<b>Total</b>	4.26	22.73	5.68

**Umbral 5**

<b>VEI</b>	<b>Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 5, es decir número de Excesos</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excedentes</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excesos</b>
6	1.42	8.52	1.42
<b>Total</b>	1.42	8.52	1.42

Tabla 3.42. En la primera columna se muestra la magnitud VEI por arriba del umbral elegido, la segunda columna es el número de erupciones mayores al umbral clasificado por magnitud es decir el número de erupciones que exceden el umbral, la tercera columna es el producto de la columna 1 por la columna 2 resultando la suma en magnitud de los excedentes (es decir, las magnitudes que sobrepasan el umbral) clasificada en magnitud VEI y en la cuarta columna es el producto del número de Excesos de una erupción (es decir la diferencia entre excedente y umbral) para cada magnitud VEI por el valor de exceso (es decir la magnitud VEI de la erupción correspondiente menos la magnitud del umbral). Los umbrales tomados son VEI 1, 2, 3, 4 y 5, y por definición el número de excedentes y el número de excesos es el mismo.

Para obtener la media de los excesos (suma de las diferencias positivas de la magnitud del umbral fijo y la magnitud de las erupciones que sobrepasan el umbral, entre el número de excesos) y la media de los excedentes (suma de la magnitud VEI de las erupciones que sobrepasan el umbral fijo entre el número de excedentes) se utilizan los resultados de la tabla 3.42 y la ecuación 2.11.

Umbral	VEI 1	VEI 2	VEI 3	VEI 4	VEI 5
<b>Media de Excedentes</b>	2.84	3.35	4.04	5.33	6.00
<b>Media de Excesos</b>	1.84	1.35	1.04	1.33	1.00

Tabla 3.43. Resultados de la media de los excesos y excedentes sobre un umbral fijo para la serie eruptiva del Volcán de Colima con umbrales igual a VEI 1, 2, 3, 4 y 5.

Primero se obtiene el gráfico (figura 3.32) de media de excedentes sobre un umbral y se comprueba la viabilidad del ajuste de los datos observados a la distribución generalizada Pareto DGP (Davison y Smith, 1990) con un  $R^2$  que debe ser cercano a la unidad.

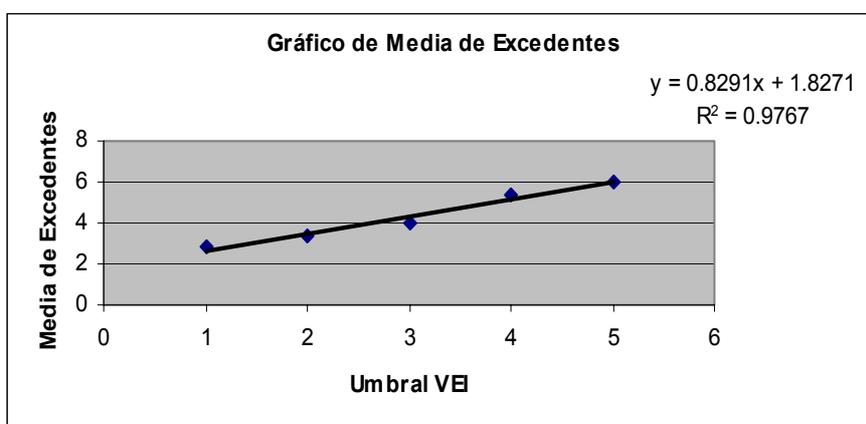


Fig. 3.32. El eje de las abscisas corresponde a la magnitud VEI de los umbrales y en el eje de la ordenada se muestra la media de los excedentes. El gráfico de media de excedentes comprueba la viabilidad del ajuste de los excesos (diferencia positiva de las magnitudes del umbral fijo y las erupciones que sobrepasen el umbral) por medio de la distribución generalizada de Pareto DGP. La Regresión lineal de la media de excedentes contra el valor de magnitud VEI es satisfactorio con un  $R^2 = 0.9767$ .

Por la propiedad 1 de la estabilidad del umbral (sección 2.3.1) se sabe que los excesos pueden ser ajustados a una DGP y se procede a hacer el análisis de los excesos, obteniendo los parámetros de la distribución por medio de un método gráfico donde se realiza una regresión lineal entre la media de los excesos y un umbral fijo.

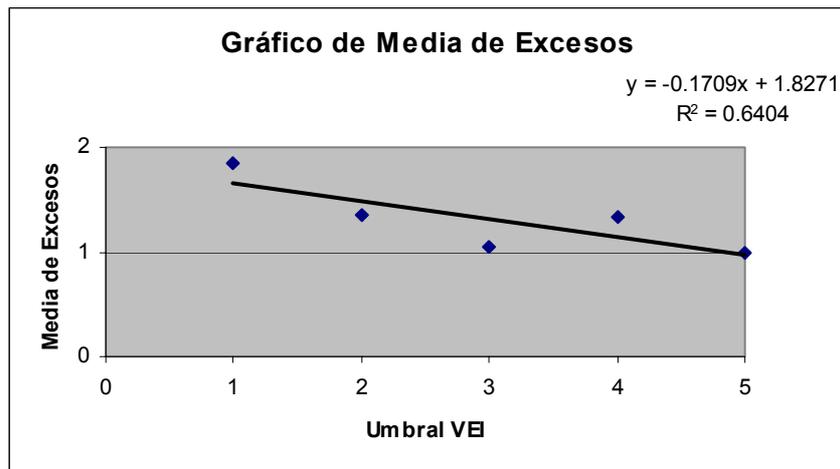


Fig. 3.33. Regresión lineal de la media de los excesos sobre un umbral fijo de la serie eruptiva del volcán de Colima contra la magnitud VEI del umbral, donde se obtiene un valor de  $R^2$  suficiente para validar la regresión y obtener los parámetros  $k$  y  $a$  para el volcán de Colima.

En la figura 3.33. se muestra la regresión lineal con un  $R^2= 0.6404$ , el cual es suficiente para obtener el valor de los parámetros de la DGP necesarios para la evaluación del peligro volcánico para el volcán de Colima por medio de una distribución Poisson no-homogénea Pareto.

De otra manera, si  $R^2$  no hubiera sido satisfactorio en la regresión lineal, los datos se pueden dividir en grupos en los que se pueda ajustar una línea recta, provocando que la ecuación cambie dependiendo del umbral elegido y su alcance, por ejemplo en la figura 3.34. se muestra que si se dividen los valores en 2 grupos se obtiene un  $R^2$  mucho mejor que el que se observa en la figura 3.33. Entonces la ecuación 1 (figura 3.34) se usa cuando se tienen umbrales fijos 1, 2 ó 3, y sus valores sólo se podrían extrapolar al cociente  $2.216/.4015= 5.5$ , es decir a una magnitud VEI 5 (considerando solo los 3 primeros valores de media de excesos); de la misma manera se utiliza la ecuación 2 (figura 3.34) si se fijan los umbrales 4 ó 5 y se puede extrapolar evaluando la ecuación 2 (figura 3.34) para obtener una magnitud igual a VEI 6, 7 y 8, pero sin considerar la información que representan los primeros 3 datos de la serie de media de excesos.

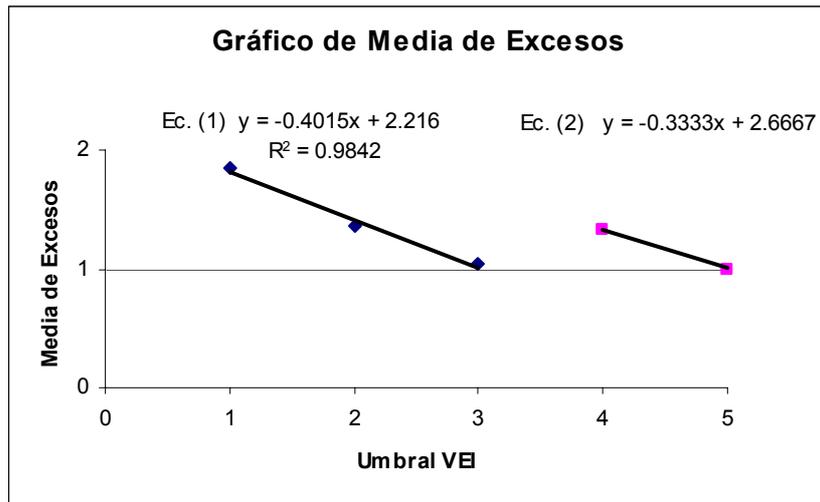


Fig. 3.34. Media de excesos para el volcán de Colima considerando 2 datos geológicos igual a VEI 5 y un dato geológico igual a VEI 6. En la abscisa se muestra la magnitud del umbral para cada media de excesos correspondiente (tabla 3.43). La regresión lineal fue obtenida de dividir los datos de la tabla 3.43 en 2 grupos para obtener un  $R^2$  óptimo resultando 2 ecuaciones distintas para obtener los parámetros de la DGP dependiendo del umbral utilizado.

El agrupamiento de los datos de medias de excesos de la gráfica de la figura 3.34 puede ser consecuencia de la distinta naturaleza de los datos (registros geológicos e históricos), pues se observa que las medias de excesos del primer grupo se obtuvieron con los registros históricos y geológicos del volcán de Colima, y el segundo grupo solo contiene excesos obtenidos de los registros geológicos.

Para propósitos de este estudio se utiliza la regresión lineal de la figura 3.33 para obtener los parámetros, debido a que se considera la totalidad de los registros, incorporando tanto la información histórica como la geológica y el valor de  $R^2$  aún permite soportar la validez del ajuste para los excesos.

Por medio de la regresión lineal (figura 3.33) de la media de los excesos contra un umbral fijo y utilizando las relaciones 2.10 y 2.11 de la sección 2.3.1, se obtienen los parámetros de la DGP donde la intercepción es igual a  $a/(1+k)$  y la pendiente es igual a  $-k/(1+k)$ .

<b>Parámetro de forma <math>k</math></b>	0.206
<b>Parámetro de escala <math>a</math></b>	2.204

Tabla 3.44. Parámetros de la DGP para los excesos sobre un umbral de las series eruptivas geológica e histórica del volcán de Colima.

Es posible calcular la función de DGP que ajusta los excesos utilizando los parámetros de la tabla 3.44. La probabilidad de ocurrencia de los excesos, se obtiene utilizando un proceso de Poisson no-homogéneo de Pareto (sección 2.2.2), para esto se necesita conocer la tasa de ocurrencia de exceso  $\theta$  del proceso Poisson no-homogéneo (ecuación 2.12).

Considerando un umbral igual a una magnitud VEI 2 e intervalos de longitud igual a 25 años, resultan 400 intervalos uniformes en 10,000 años.

La tasa de ocurrencia de excesos es la probabilidad de tener un exceso mayor a "e" en magnitud dado que ya superó el umbral de magnitud 2 mediante la DGP en periodos de 25 años (400 intervalos), se lista en la tabla 3.45.

<b>Exceso "e"</b>	<b>Tasa de ocurrencia <math>\theta</math> (en 25 años)</b>
1	0.63318
2	0.37331
3	0.20631
4	0.10497
5	0.04786

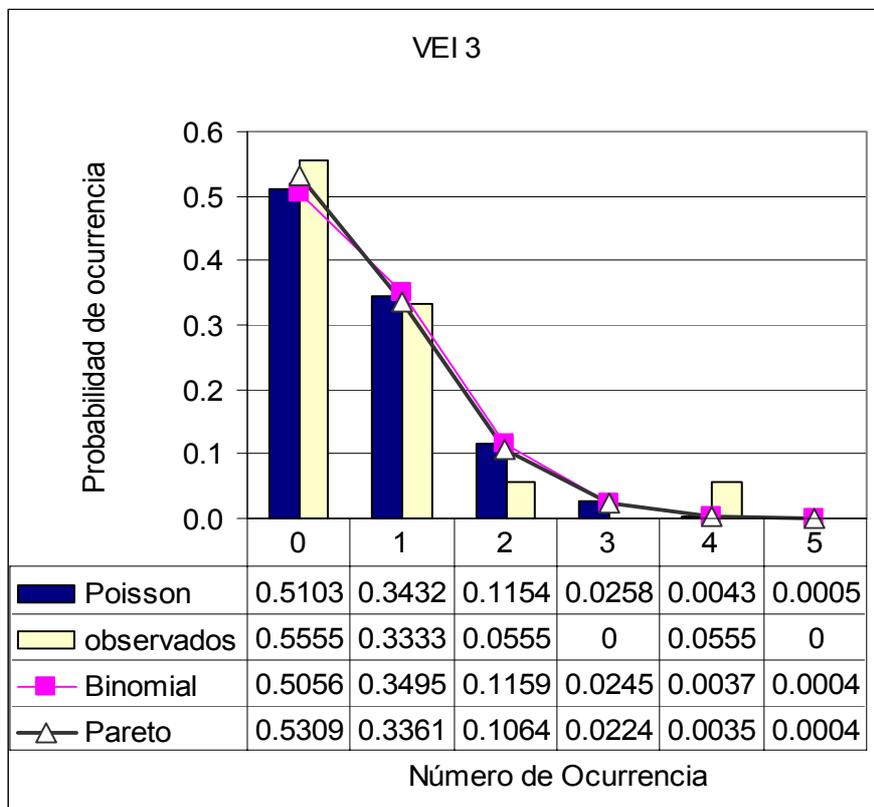
Tabla 3.45. En la primera columna se muestra el exceso "e", es decir la diferencia en magnitud entre los valores que exceden un umbral y el valor del umbral de magnitud igual a 2, en la segunda columna se muestra la tasa de ocurrencia derivada de la ecuación 2.12 correspondiente a la tasa de ocurrencia de excesos mayores a "e" dado que ya superó el umbral 2 en periodos de 25 años.

Las probabilidades de que ocurran  $n$  eventos con un exceso "e" para un umbral de magnitud igual a 2 en un intervalo de longitud igual a 25 años se muestra en la tabla 3.46.

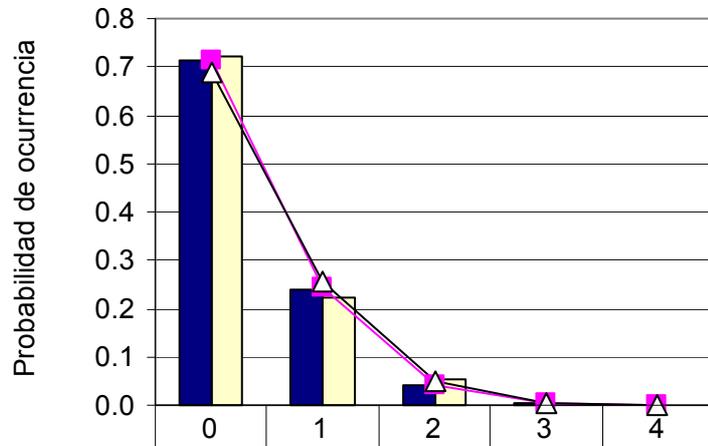
	VEI 3	VEI 4	VEI 5	VEI 6
<b>Probabilidades de que ocurran <math>n</math> eventos con exceso "<math>e</math>" considerando un umbral de 2</b>				
$n$	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$	$e = 4$
0	0.53090	0.68845	0.81358	0.90035
1	0.33616	0.25700	0.16785	0.09451
2	0.10642	0.04797	0.01731	0.00496
3	0.02246	0.00597	0.00119	0.00017
4	0.00356	0.00056	0.00006	4.55E-06
5	0.00045	0.00004	2.53E-06	9.56E-08
6	0.00005	2.59E-06	8.71E-08	1.67E-09
<b>Total</b>	1	1	1	1

Tabla 3.46. Probabilidades de que ocurran  $n$  eventos para el volcán de Colima con exceso " $e$ " considerando un umbral de magnitud 2, obtenidas de un proceso de Poisson no-homogéneo de Pareto.

Los resultados obtenidos por medio de una distribución de Poisson no-homogénea con función de intensidad DGP, se comparan con la distribución de Poisson homogénea, la distribución Binomial y los valores observados disponibles (registros geológicos donde 2 erupciones son consideradas con magnitud VEI 5 y 1 erupción de magnitud VEI 6 y los registros históricos desde el año 1560 D.C.) en las graficas de la figura 3.35.



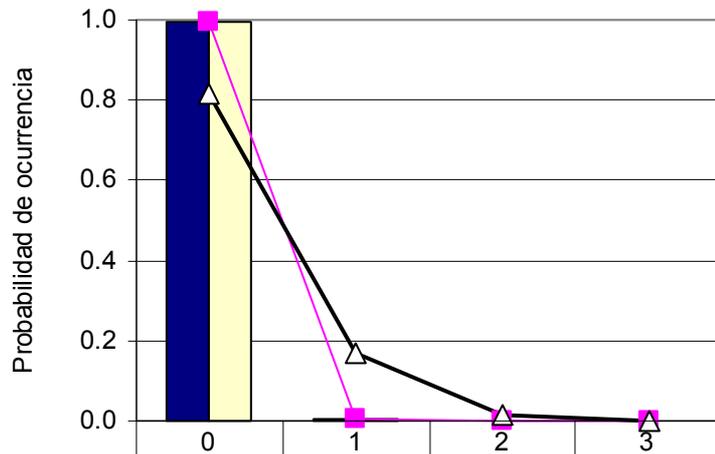
VEI 4



■ Poisson	0.71439	0.24027	0.04040	0.00453	0.00038
■ observados	0.72222	0.22222	0.05556	0	0
■ Binomial	0.71276	0.24299	0.03976	0.00416	0.00031
—△ Pareto	0.68845	0.25700	0.04797	0.00597	0.00056

Número de Ocurrencia

VEI 5



■ Poisson	0.99292	0.00705	0.00003	5.93E-08
■ observados	0.99290	0.00710	0	0
■ Binomial	0.99292	0.00705	0.00002	5.24E-08
—△ Pareto	0.81358	0.16785	0.01731	0.00119

Número de Ocurrencia

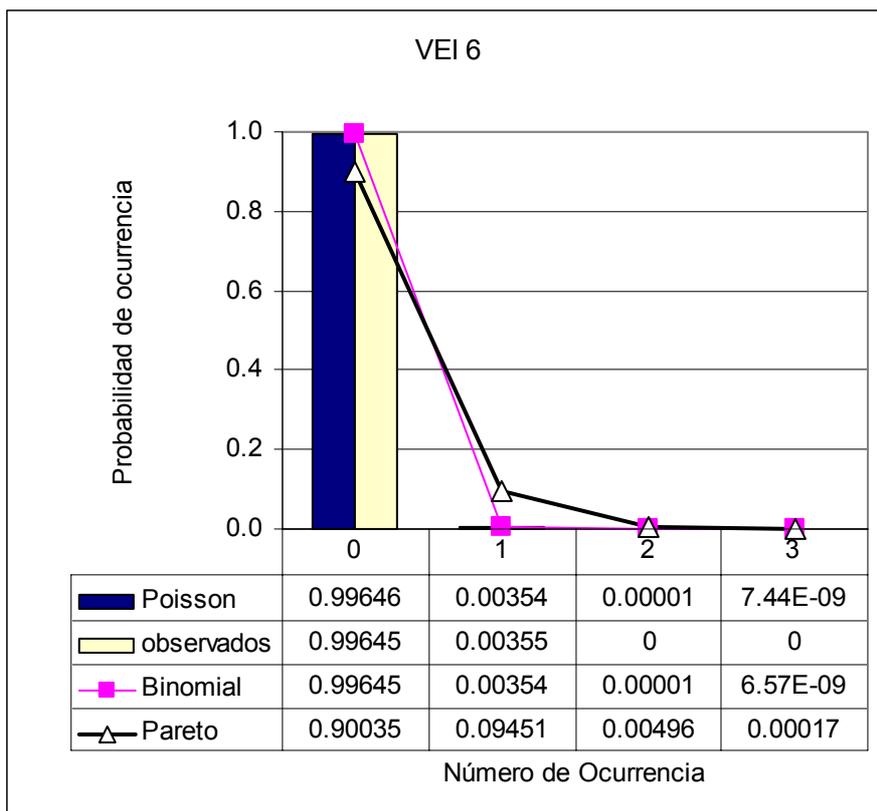


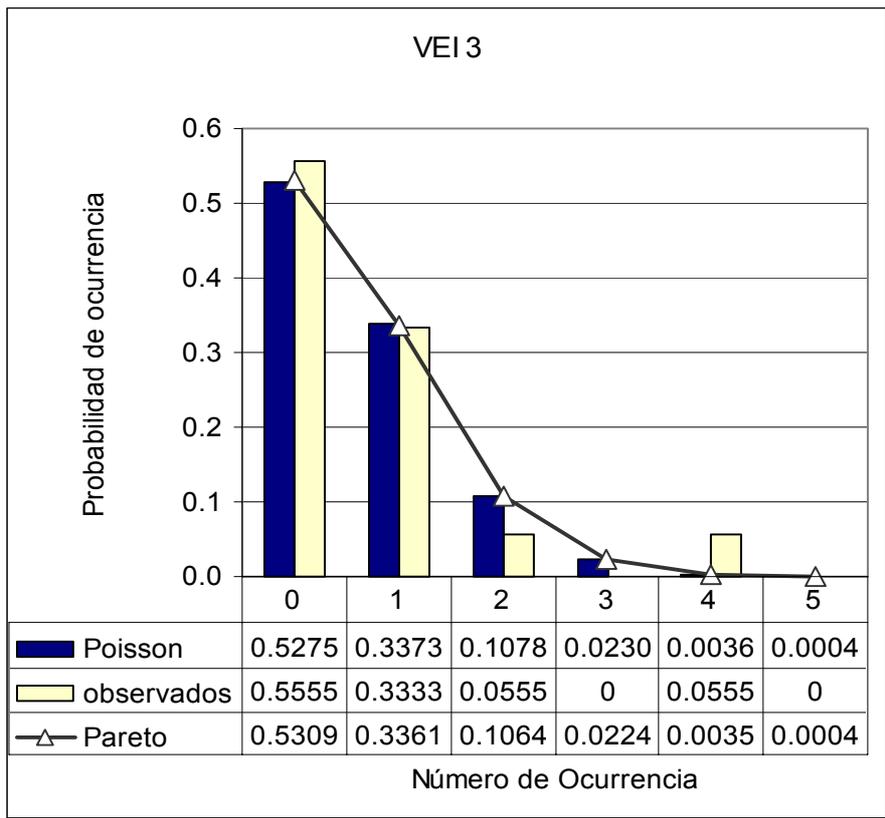
Fig. 3.35. Las gráficas comparan la probabilidad (peligro) de ocurrencia de erupción para el volcán de Colima entre los valores observados (Barra clara), la distribución Poisson homogénea (Barra oscura), Binomial (línea con cuadros oscuros) y Poisson no-homogénea de Pareto (línea con triángulos sin relleno). Se utilizaron registros geológicos (dos con valor VEI 5 y uno con valor VEI 6) e históricos. La tabla adjunta a las gráficas muestra las probabilidades de  $n$  ocurrencias en un periodo de 25 años.

En la figura 3.35. se comparan los valores observados disponibles de la serie eruptiva del volcán de Colima con distintas distribuciones de probabilidad, donde la distribución Poisson homogénea y la distribución Binomial casi coinciden como es de esperarse debido a que la distribución Poisson es una distribución límite de la distribución Binomial, la distribución Poisson no-homogénea con función de intensidad como distribución generalizada Pareto lleva un ajuste muy parecido al resto pero con mayor suavidad. Esta suavidad se debe a que la distribución Poisson no-homogénea Pareto (DPNHP) contiene una tasa variable la cual contiene un parámetro de forma  $k$  de esta manera incorporando mayor información al ajuste por lo tanto se recomienda la distribución de Poisson no-homogénea para ajustar series eruptivas no-estacionarias.

El ajuste resultante de la distribución Poisson no-homogénea Pareto (DPNHP) difiere un poco con los demás en las magnitudes VEI 5 y 6, observando mayores probabilidades de ocurrencia pero aún así disminuyen con suavidad y mayor lentitud

que los demás ajustes llegando a invertirse las posiciones con las distribuciones Binomial y Poisson homogénea que disminuyen mas rápidamente debido a que se tienen pocas observaciones en un gran periodo de tiempo limitando la forma del ajuste. Por otro lado la DPNHP enfatiza en la información de los valores extremos a causa de la tasa de ocurrencia del proceso Poisson no-Homogéneo Pareto provocando probabilidades mayores de al menos una erupción de las magnitudes grandes a comparación de los otros ajustes.

Los resultados obtenidos en De la Cruz-Reyna (1993 y 1996) utilizando una distribución Poisson simple para estimar el peligro volcánico del volcán de Colima son comparados con los obtenidos en el presente estudio con la distribución DPNHP en la figura 3.36. Para esto se toma un intervalo de tiempo común igual a 25 años, para las magnitudes VEI 3 y VEI 4.



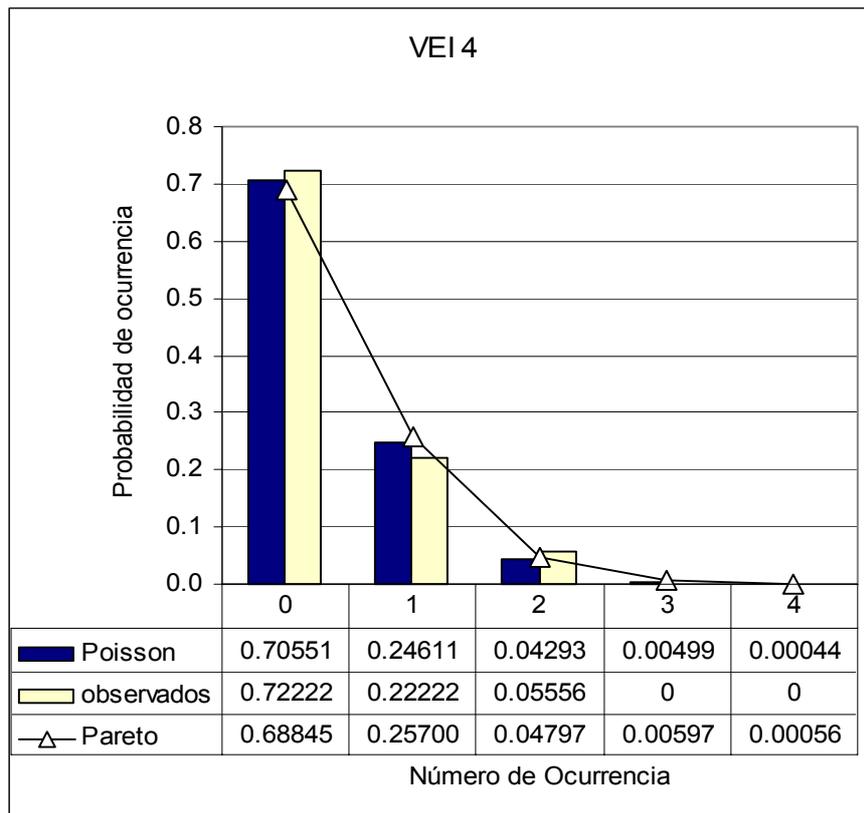


Fig. 3.36. En las graficas se comparan las probabilidades de ocurrencia que representan el peligro volcánico para el volcán de Colima del presente estudio por medio de una DPNHP para el caso COL1 (tabla 3.3) considerado en el presente análisis (línea) y las probabilidades de ocurrencia resultantes de una distribución Poisson simple (barras oscuras) publicada en De la Cruz-Reyna (1993), con parámetros igual a  $(11/43) \cdot (2.5)$  y  $(6/43) \cdot (2.5)$  para los casos de magnitud VEI 3 y 4. En la tabla correspondiente a cada gráfica se enlistan las probabilidades de n ocurrencias en un periodo de 25 años.

El ajuste efectuado suponiendo los valores geológicos correspondientes al caso COL1 (tabla 3.3) es muy similar a las publicadas en De la Cruz-Reyna (1993 y 1996), esto puede ser causa de la débil no-estacionaridad inherente a la serie del volcán Colima (ver sección 3.1.1). Las consecuencias de las diferencias obtenidas en la estimación del peligro volcánico para el volcán de Colima en especial para las erupciones de magnitud mayores serán discutidas más adelante en el capítulo 4.

### 3.3.2 VOLCÁN CITLALTÉPETL

El método para estimar el peligro volcánico se aplica ahora a las series eruptivas histórica y geológica del volcán Citlaltépetl o Pico de Orizaba, que consisten de 6 datos históricos y 3 datos geológicos listados en la tabla 3.5, donde los datos geológicos se han determinado con un VEI  $\geq 4$  (De la Cruz - Reyna y Carrasco-Núñez, 2002; Rossotti, 2005).

Para este análisis se toma el caso CITLA1 (tabla 3.5, sección 3.1.2) que supone que todos los datos geológicos tienen magnitud igual a VEI 4, y el caso MPCITLA3 (tabla 3.8, sección 3.1.2) que utiliza la información publicada en el mapa de peligros del volcán Citlaltépetl (Sheridan et. al., 2001, tabla 1.6).

Se inicia con el caso CITLA1, obteniendo las tasas anuales y número de ocurrencia clasificadas en magnitud VEI. Los valores para la tasa anual de ocurrencia de los datos eruptivos con magnitud VEI igual a 3 y 5 son el resultado de la extrapolación de los datos observados desarrollada en la sección 3.1.2 y listada en la tabla 3.6.

<b>VEI</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>Tasa de ocurrencia (erupciones/años)</b>	0.0126850	0.0017108	0.0002308	0.0000311
<b>Número estimado de ocurrencias en 100,000 años</b>	1268.50	171.08	23.08	3.11

Tabla 3.47. Se muestran los números estimados de ocurrencias eruptivas en 100,000 años clasificados en magnitud VEI, obtenidos de multiplicar el valor de la tasa anual de ocurrencia por 100,000 años.

En este análisis hay que mantener en mente que los excedentes son definidos como las erupciones con magnitud mayor a un umbral de magnitud fijo, y los excesos son la diferencia de las magnitudes de los excedentes y el umbral. En la tabla 3.48 se cuantifica la cantidad de excesos y excedentes por arriba de un umbral fijo.

**Umbral 1**

<b>VEI</b>	<b>Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 1, es decir número de Excesos</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excedentes</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excesos</b>
2	1268.50	2537.00	1268.50
3	171.08	513.23	342.15
4	23.08	92.31	69.23
5	3.11	15.56	12.45
<b>Total</b>	1465.76	3158.09	1692.33

**Umbral 2**

<b>VEI</b>	<b>Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 2, es decir número de Excesos</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excedentes</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excesos</b>
3	171.08	513.23	171.08
4	23.08	92.31	46.15
5	3.11	15.56	9.33
<b>Total</b>	197.26	621.10	226.57

**Umbral 3**

<b>VEI</b>	<b>Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 3, es decir número de Excesos</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excedentes</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excesos</b>
4	23.08	92.31	23.08
5	3.11	15.56	6.22
<b>Total</b>	26.19	107.87	29.30

**Umbral 4**

<b>VEI</b>	<b>Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 4, es decir número de Excesos</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excedentes</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excesos</b>
5	3.11	15.56	3.11
<b>Total</b>	3.11	15.56	3.11

Tabla 3.48. En la primera columna se muestra la magnitud VEI por arriba del umbral elegido, la segunda columna es el número de erupciones mayores al umbral clasificado por magnitud es decir el número de erupciones que exceden el umbral, la tercera columna es el producto de la columna 1 por la columna 2 resultando la suma de los excedentes (es decir, la suma de las magnitudes de las erupciones que sobrepasan el umbral) clasificada en magnitud VEI y en la cuarta columna es el producto del número de erupciones que exceden el umbral por el valor de exceso (es decir la diferencia entre la magnitud del excedente y el umbral). Los umbrales tomados son VEI 1, 2, 3 y 4, en todos los casos el número de excedentes y el número de excesos es el mismo.

Con los datos hasta el momento calculados es posible obtener las medias de excedentes y excesos utilizando la ecuación (2.11).

Umbral	VEI 1	VEI 2	VEI 3	VEI 4
<b>Media de Excesos</b>	1.155	1.149	1.119	1
<b>Media de Excedentes</b>	2.155	3.149	4.119	5

Tabla 3.49. Resultados de la media de los excesos y excedentes sobre un umbral fijo para la serie eruptiva del Volcán Citlaltépetl con umbrales igual a VEI 1, 2, 3 y 4.

Las regresiones lineales de la media de excedentes y de la media de excesos sobre un umbral contra la magnitud VEI del umbral fijo, darán la validez del ajuste de los excesos observados a una DGP (Davison y Smith, 1990).

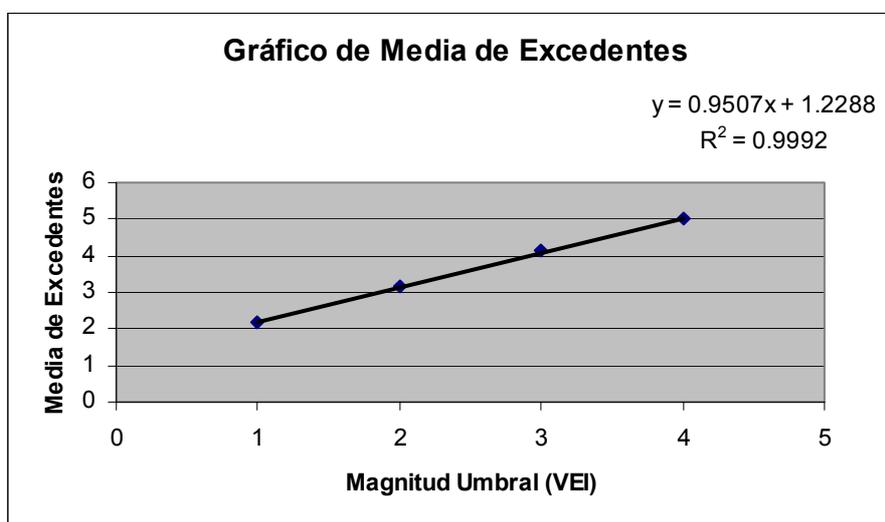


Fig. 3.37. Regresión lineal de la media de excedentes contra el valor de magnitud VEI, obteniendo un ajuste satisfactorio con un  $R^2 \approx 1$ .

Los excesos pueden ser ajustados a una DGP (propiedad 1 para estabilidad del umbral, sección 2.3.1) y se procede a hacer el análisis de los excesos. La validación del ajuste a los valores observados y los parámetros de la DGP se obtienen de la misma manera que en la sección 3.3.1 por medio de un método gráfico.

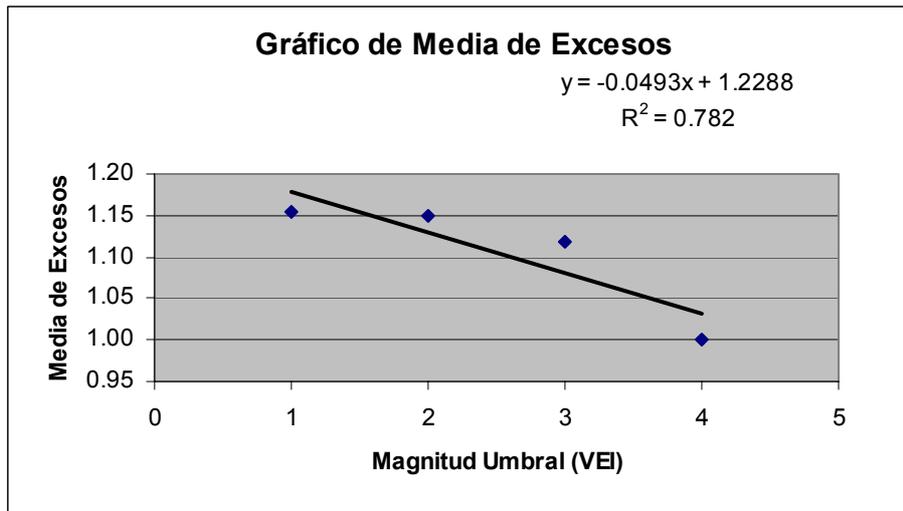


Fig. 3.38. Regresión lineal de la media de los excesos sobre un umbral fijo contra la magnitud VEI del umbral, con valor de  $R^2$  suficientemente grande para validar la regresión y obtener los parámetros.

Los parámetros de forma y escala de la DGP (sección 2.3.1) para ajustar los excesos sobre un umbral en este caso igual a la magnitud VEI 2 se muestran en la tabla 3.50.

<b>Parámetro de forma <math>k</math></b>	0.0519
<b>Parámetro de escala <math>a</math></b>	1.2925

Tabla 3.50. Parámetros de la Distribución Generalizada de Pareto para los excesos sobre un umbral de las series eruptivas geológica e histórica del volcán de Citlaltépetl

La ocurrencia de los excesos se obtiene utilizando un proceso de Poisson no-homogéneo. Debido a que los excesos se distribuyen como DGP, se puede utilizar la ecuación (2.12) como tasa de ocurrencia  $\theta$  del proceso Poisson no-homogéneo.

El intervalo de tiempo utilizado tiene longitud de 500 años, por lo tanto se obtienen 200 intervalos uniformes en 100,000 años.

La tasa de excedencia “e” dado que ya superó el umbral de magnitud 2 mediante la DGP en periodos de 500 años (200 intervalos), se muestra en la tabla 3.51.

<b>Exceso "e"</b>	<b>Tasa de ocurrencia <math>\theta</math> (en 500 años)</b>
1	0.448
2	0.197
3	0.083
4	0.034
5	0.013

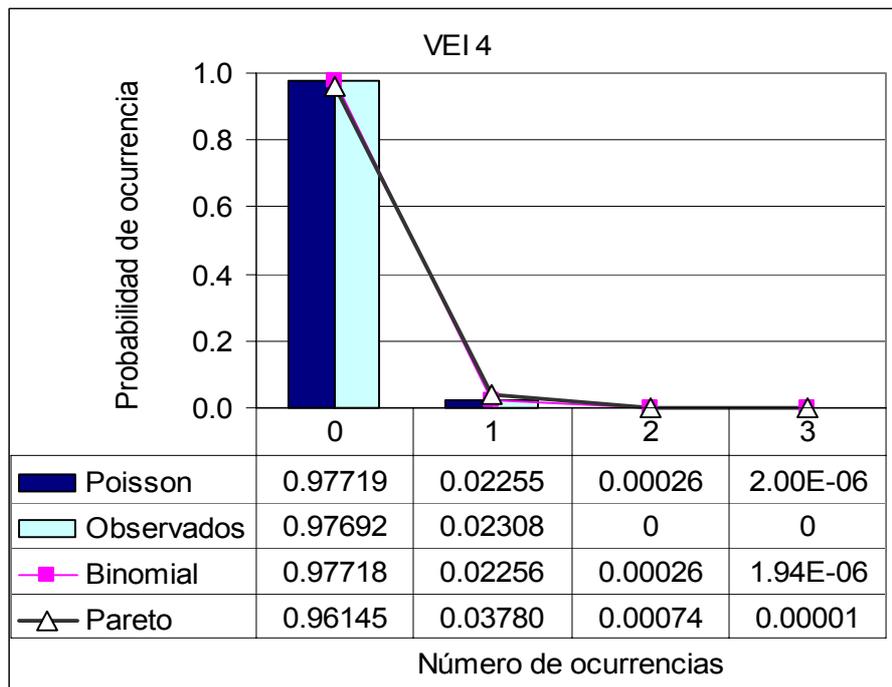
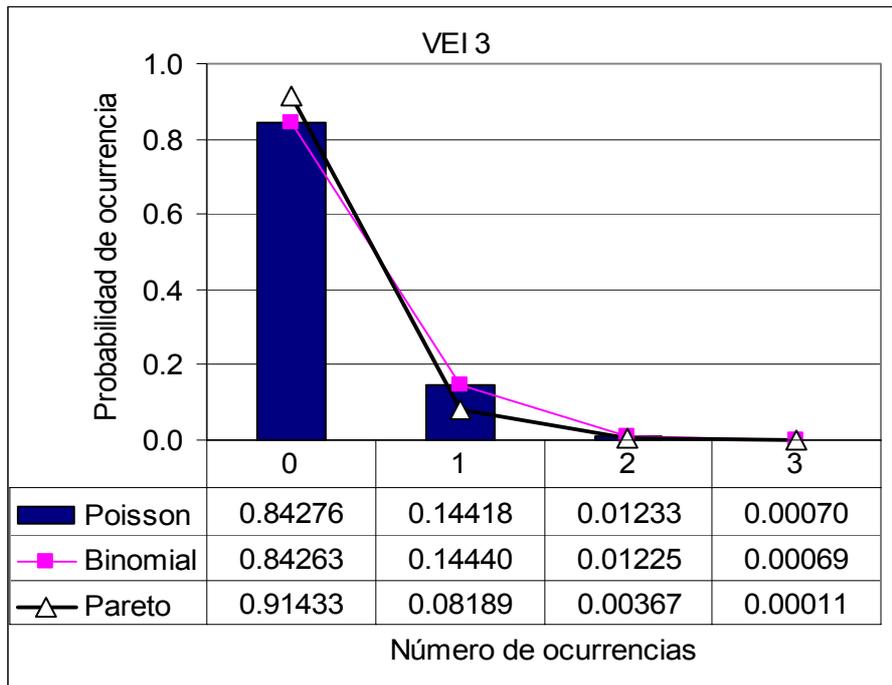
Tabla 3.51. La primera columna se muestra el exceso "e", es decir la diferencia en magnitud entre los valores que exceden un umbral y el valor del umbral de magnitud 2, en la segunda columna se muestra la tasa de ocurrencia (ecuación 2.12) correspondiente a tener un exceso mayor a "e" dado que ya superó el umbral 2, generada por medio de la DGP para periodos de 500 años.

En la tabla 3.52 se muestra la probabilidad de que ocurran  $n$  eventos con un exceso "e" para un umbral de magnitud igual a 2 utilizando DPNHP.

	<b>VEI 3</b>	<b>VEI 4</b>	<b>VEI 5</b>
<b>Probabilidad de que ocurra <math>n</math> eventos con exceso "e" considerando un umbral de 2</b>			
<b><math>n</math></b>	<b>e = 1</b>	<b>e = 2</b>	<b>e = 3</b>
<b>0</b>	0.639	0.822	0.920
<b>1</b>	0.286	0.161	0.077
<b>2</b>	0.064	0.016	0.003
<b>3</b>	0.010	0.001	8.82E-05
<b>4</b>	0.001	5.11E-05	1.83E-06
<b>Total</b>	1	1	1

Tabla 3.52. Probabilidades de que ocurra  $n$  eventos con exceso "e" considerando un umbral de magnitud 2 en un intervalo de 500 años, obtenidas de DPNHP con función de intensidad correspondiente a la función DGP obteniendo una medida de intensidad por medio de la ecuación (2.12).

Se comparan los resultados obtenidos por medio de la DPNHP con un proceso de Poisson homogéneo, la distribución Binomial y los valores observados disponibles en las graficas mostradas en la figura 3.39. Los intervalos utilizados tienen longitud de 500 años.



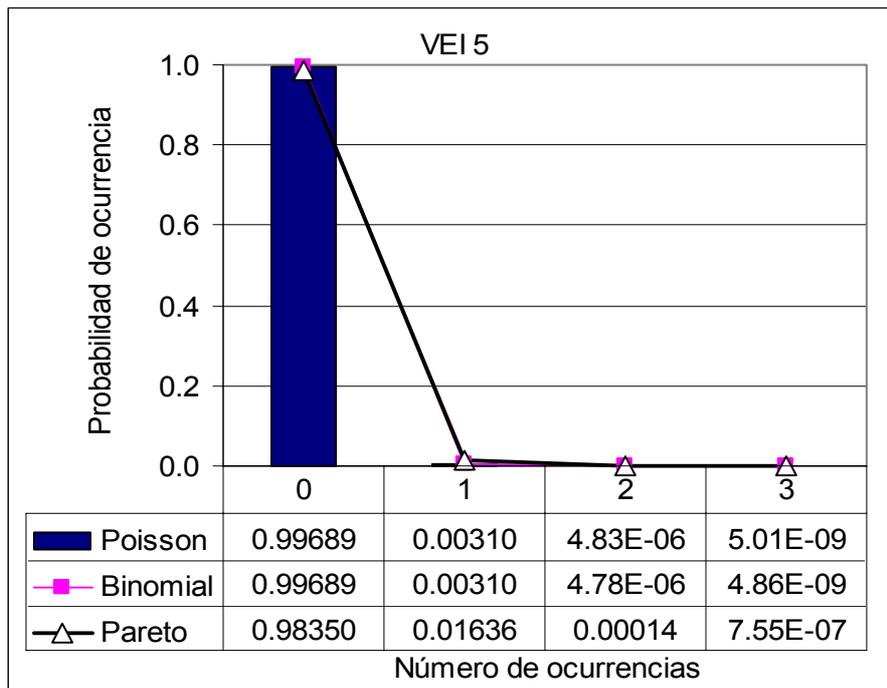


Fig. 3.39. Las gráficas comparan la probabilidad del peligro volcánico para el volcán Citlaltépetl entre la distribución Poisson homogénea (Barra oscura), Binomial (línea con cuadros oscuros) y Poisson no-homogénea de Pareto (línea con triángulos sin relleno); solo para la magnitud VEI 4 se tienen valores observados (Barra clara). Las tablas desplegadas en cada gráfica enlistan las probabilidades de n ocurrencias visualizadas en la grafica.

En las gráficas se muestra mayor suavidad y flexibilidad en la forma del ajuste por medio de la DPNHP que con las distribuciones Binomial y Poisson homogénea. Estas dos distribuciones son muy parecidas entre sí, en cambio el proceso de Poisson no-homogéneo contiene una tasa variable la cual contiene un parámetro de forma  $k$  el cual incorpora mayor información al ajuste.

En las graficas correspondientes a las magnitudes VEI 4 y VEI 5 de la figura 3.39 las probabilidades de la DPNHP son mayores que las obtenidas con las distribuciones Poisson homogénea y Binomial. Sin embargo las probabilidades obtenidas de la DPNHP para la magnitud VEI 3 producen valores menores recomparados con las demás. También se observa que los ajustes del número de ocurrencias no varían mucho.

A continuación se presenta un breve análisis para los valores supuestos en el caso MPCITLA3 descrito en la sección 3.1.2 con tasas anuales de ocurrencia de 1/4000 y 1/9000 para las magnitudes VEI 4 y 5 respectivamente, obtenidas del mapa de

peligros del volcán Citlaltépetl (Sheridan et al., 2001) en la tabla 3.53 y la tasa anual de ocurrencia correspondiente a la magnitud VEI 2 obtenida de la serie histórica del volcán Citlaltépetl (De la Cruz- Reyna y Carrasco-Núñez, 2002). La tasa anual de ocurrencia para erupciones de magnitud VEI 3 es obtenida de una extrapolación lineal (figura 3.15).

<b>VEI</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>Tasa de ocurrencia (erupciones/años)</b>	0.0126850	0.0020989	0.0002500	0.0001111
<b>Número estimado de ocurrencias en 10,000 años</b>	126.85	20.99	2.50	1.11

Tabla 3.53. Se muestran los números estimados de ocurrencias eruptivas en 10,000 años clasificados en magnitud VEI, obtenidos de multiplicar el valor de la tasa anual de ocurrencia por 10,000 años. La tasa anual de ocurrencia correspondiente a la magnitud VEI 2 es obtenida de los registros históricos, las tasas anuales de ocurrencia para erupciones con magnitud VEI 4 y 5 se obtuvieron del mapa de peligros del volcán Citlaltépetl (Sheridan et al., 2001) y el valor correspondiente a la magnitud VEI 3 se obtuvo de una extrapolación lineal (figura 3.15).

Es decir que en 10,000 años, considerando un proceso estacionario, o con una media estacionaria, se espera que ocurran aproximadamente 127 erupciones con magnitud VEI 2, 21 erupciones con magnitud VEI 3, 2 erupciones con magnitud VEI 4 y 1 erupciones con magnitud VEI 5.

Se cuantifica la cantidad de los excesos y los excedentes por arriba de un umbral predeterminado en la tabla 3.54.

<b>Umbral</b>	<b>1</b>		
<b>VEI</b>	<b>Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 1, es decir número de Excesos</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excedentes</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excesos</b>
2	126.85	253.70	126.85
3	20.99	62.97	41.98
4	2.50	10.00	7.50
5	1.11	5.56	4.44
<b>Total</b>	151.45	332.22	180.77

**Umbral 2**

VEI	Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 2, es decir número de Excesos	Suma de las magnitudes de los Excedentes	Suma de las magnitudes de los Excesos
3	20.99	62.97	20.99
4	2.50	10.00	5.00
5	1.11	5.56	3.33
<b>Total</b>	24.60	78.52	29.32

**Umbral 3**

VEI	Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 3, es decir número de Excesos	Suma de las magnitudes de los Excedentes	Suma de las magnitudes de los Excesos
4	2.50	10.00	2.50
5	1.11	5.56	2.22
<b>Total</b>	3.61	15.56	4.72

**Umbral 4**

VEI	Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 4, es decir número de Excesos	Suma de las magnitudes de los Excedentes	Suma de las magnitudes de los Excesos
5	1.11	5.56	1.11
<b>Total</b>	1.11	5.56	1.11

Tabla 3.54. En la primera columna se muestra la magnitud VEI por arriba del umbral elegido, la segunda columna es el número de erupciones mayores al umbral clasificado por magnitud es decir el número de erupciones que exceden el umbral, la tercera columna es el producto de la columna 1 por la columna 2 resultando la suma de los excedentes clasificada en magnitud VEI y la cuarta columna es el producto del número de erupciones que exceden el umbral por el valor de exceso. Los umbrales tomados son VEI 1, 2, 3 y 4, en todos los casos el número de excedentes y el número de excesos es el mismo para el volcán Citlaltépetl.

Las medias de excedentes y excesos con sus respectivos umbrales se enlistan en la tabla 3.55.

Umbral	VEI 1	VEI 2	VEI 3	VEI 4
<b>Media de Excedentes</b>	2.194	3.192	4.308	5
<b>Media de Excesos</b>	1.194	1.192	1.308	1

Tabla 3.55. Resultados de la media de los excesos y excedentes sobre un umbral fijo para la serie eruptiva del Volcán Citlaltépetl con umbrales igual a VEI 1, 2, 3 y 4.

Para comprobar la validez del ajuste de los excesos en magnitud se comprueba que los excedentes sobre un umbral son ajustables a una DGP.

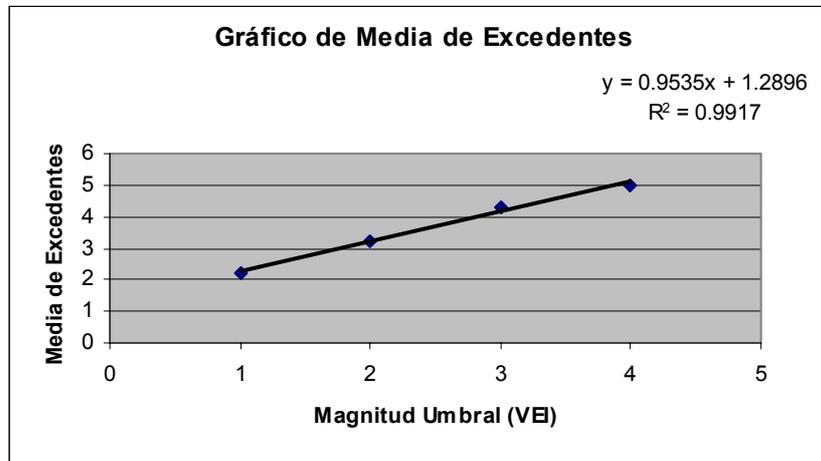


Fig. 3.40. Regresión lineal de la media de excedentes contra el valor de magnitud VEI, obteniendo un ajuste satisfactorio con un  $R^2 \approx 1$ .

Por la propiedad 1 para la estabilidad del umbral (sección 2.3.1), los excesos pueden ser ajustados a una DGP.

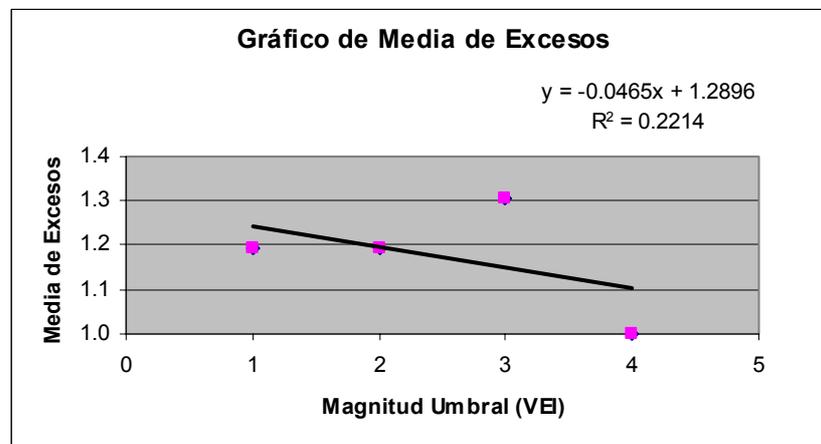


Fig. 3.41. Regresión lineal de la media de los excesos sobre un umbral fijo contra la magnitud VEI del umbral, en éste caso con valor de  $R^2$  que no es suficientemente grande para validar la regresión y obtener los parámetros.

En la figura 3.41 se muestra la regresión lineal de la media de excesos,  $R^2 = 0.2214$ , que no permite obtener el valor de los parámetros de la DGP necesarios para la evaluación del peligro volcánico para el volcán Citlaltépetl para ese caso. La poca correlación observada es posiblemente causada por la poca diferencia en los valores de las tasas anuales de ocurrencia correspondientes a las magnitudes VEI 4 y 5 (tabla

3.53) inferidas del Mapa de Peligros (Sheridan et al. 2001), a comparación de las tasas anuales de ocurrencia obtenidas en el caso CITLA1 (tabla 3.47) para el análisis de peligro del volcán Citlaltépetl, por la inconsistencia de las tasas anuales de ocurrencia entre las magnitudes altas y bajas y por la dificultad de asignar valores VEI a las regiones de peligro representadas en el mapa.

En conclusión, el caso CITLA1 es el más viable. Las consecuencias en la estimación del peligro volcánico de las diferencias en los resultados de los ajustes de las diferentes distribuciones en la figura 3.39, en particular para erupciones mayores, se discutirán en el próximo capítulo.

### 3.3.3 VOLCÁN POPOCATÉPETL

La estimación del peligro volcánico para la serie eruptiva histórica y geológica del volcán Popocatépetl se efectúa de la misma manera que para las series eruptivas de los volcanes Citlaltépetl y Colima, aplicando la metodología descrita a los casos SMPOPO2 y MPOPO5 descrito en la sección 3.1.3, tabla 3.11.

El caso SMPOPO2 el cual supone valores de magnitud igual a VEI 4 para 7 datos geológicos en 10,700 años A.P. y magnitud igual a VEI 5 para 2 datos geológicos en 23,000 años A.P.

<b>VEI</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>Tasa de ocurrencia (erupciones/años)</b>	0.02834	0.00607	0.00065	0.00009
<b>Número estimado de ocurrencias en 100,000 años</b>	2834	607	65	9

Tabla 3.56. Se muestran los números estimados de ocurrencias eruptivas en 100,000 años clasificados en magnitud VEI, obtenidos de multiplicar el valor de la tasa anual de ocurrencia por 100,000 años, donde las tasas de ocurrencia es el resultado de una extrapolación lineal.

Para comprobar la validez del ajuste de los excesos en magnitud se comprueba que los excedentes sobre un umbral son ajustables a una DGP, para esto se cuantifica la cantidad de los excesos y los excedentes por arriba de un umbral predeterminado.

**Umbral 1**

<b>VEI</b>	<b>Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 1, es decir número de Excesos</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excedentes</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excesos</b>
2	2834.01	5668.02	2834.01
3	607.29	1821.86	1214.57
4	65.42	261.68	196.26
5	8.70	43.48	34.78
<b>Total</b>	<b>3515.41</b>	<b>7795.04</b>	<b>4279.63</b>

**Umbral 2**

<b>VEI</b>	<b>Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 2, es decir número de Excesos</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excedentes</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excesos</b>
3	607.29	1821.86	607.29
4	65.42	261.68	130.84
5	8.70	43.48	26.09
<b>Total</b>	<b>681.40</b>	<b>2127.02</b>	<b>764.22</b>

**Umbral 3**

<b>VEI</b>	<b>Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 3, es decir número de Excesos</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excedentes</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excesos</b>
4	65.42	261.68	65.42
5	8.70	43.48	17.39
<b>Total</b>	<b>74.12</b>	<b>305.16</b>	<b>82.81</b>

**Umbral 4**

<b>VEI</b>	<b>Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 4, es decir número de Excesos</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excedentes</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excesos</b>
5	8.70	43.48	8.70
<b>Total</b>	<b>8.70</b>	<b>43.48</b>	<b>8.70</b>

Tabla 3.57. En la primera columna se muestra la magnitud VEI por arriba del umbral elegido, la segunda columna es el número de erupciones mayores al umbral clasificado por magnitud es decir el número de erupciones que exceden el umbral, la tercera columna es el producto de la columna 1 por la columna 2 resultando la suma de los excedentes clasificada en magnitud VEI y en la cuarta columna es el producto del número de erupciones que exceden el umbral por el valor de exceso. Los umbrales tomados son VEI 1, 2, 3 y 4, en todos los casos el número de excedentes y el número de excesos es el mismo para el volcán Popocatepetl.

Las medias de excedentes y excesos con sus respectivos umbrales se obtienen utilizando la ecuación (2.11) de la sección 2.3.1.

Umbral	VEI 1	VEI 2	VEI 3	VEI 4
<b>Media de Excedentes</b>	2.22	3.12	4.12	5.00
<b>Media de Excesos</b>	1.22	1.12	1.12	1.00

Tabla 3.58. Resultados de la media de los excesos y excedentes sobre un umbral fijo para la serie eruptiva del Volcán Popocatepetl con umbrales igual a VEI 1, 2, 3 y 4.

Se efectúan las regresiones lineales de la media de excedentes y excesos sobre un umbral contra la magnitud VEI del umbral fijo obtener los parámetros y dar validez al ajuste de los excesos observados a una DGP (Davison y Smith, 1990).

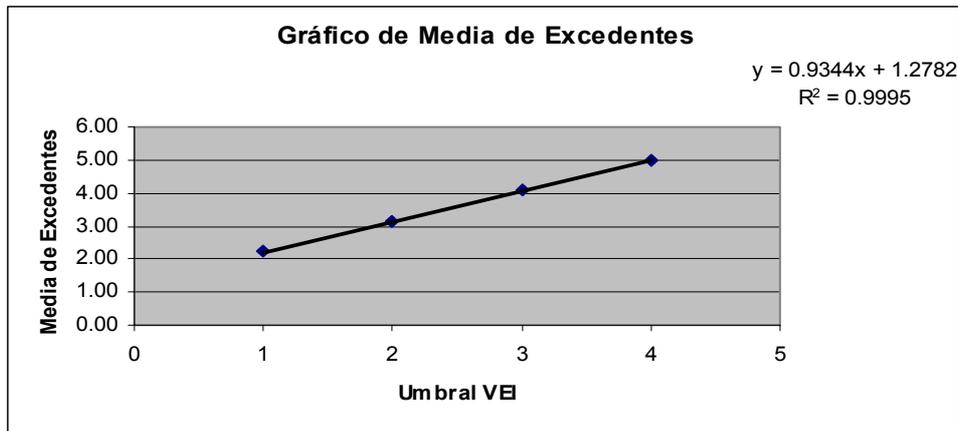


Fig. 3.42. Regresión lineal de la media de excedentes contra el valor de magnitud VEI, obteniendo un ajuste satisfactorio con un  $R^2 \approx 1$ .

Por la propiedad 1 para la estabilidad del umbral (sección 2.3.1) se sabe que los excesos pueden ser ajustados a una DGP.

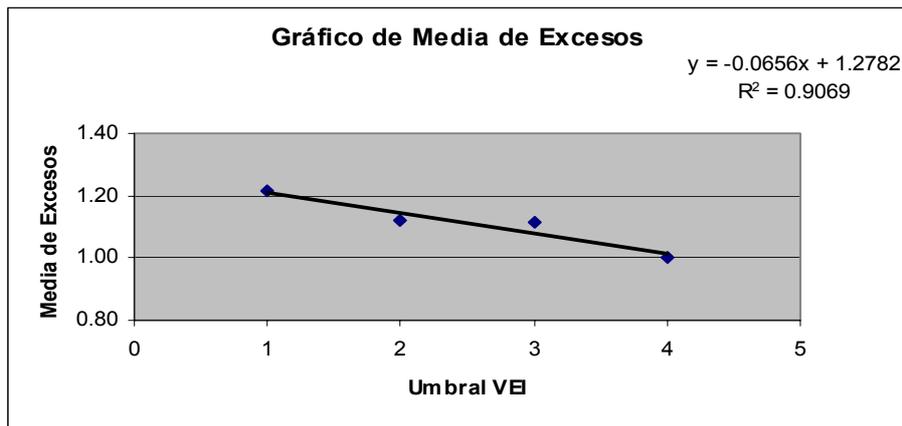


Fig. 3.43. Regresión lineal de la media de los excesos sobre un umbral fijo contra la magnitud VEI del umbral, con valor de  $R^2$  suficientemente grande para validar la regresión y obtener los parámetros.

Los parámetros de forma  $k$  y escala  $a$  de la DGP (sección 2.3.1) se muestran en la tabla 3.59.

<b>Parámetro de forma <math>k</math></b>	0.070
<b>Parámetro de escala <math>a</math></b>	1.368

Tabla 3.59. Parámetros de la DGP para los excesos sobre un umbral de las series eruptivas geológica e histórica del volcán Popocatepetl

La tasa de ocurrencia de excedencias se calcula usando la DGP que ajusta los excesos arriba de una magnitud umbral VEI en este caso un umbral VEI = 2 (Tabla 3.60). El intervalo de tiempo utilizado es de 150 años, y por lo tanto consiste de 680 intervalos uniformes en 100,000 años.

<b>Exceso "e"</b>	<b>Tasa de ocurrencia <math>\theta</math> (en 150 años)</b>
1	0.48259
2	0.21854
3	0.09445
4	0.03873
5	0.01497

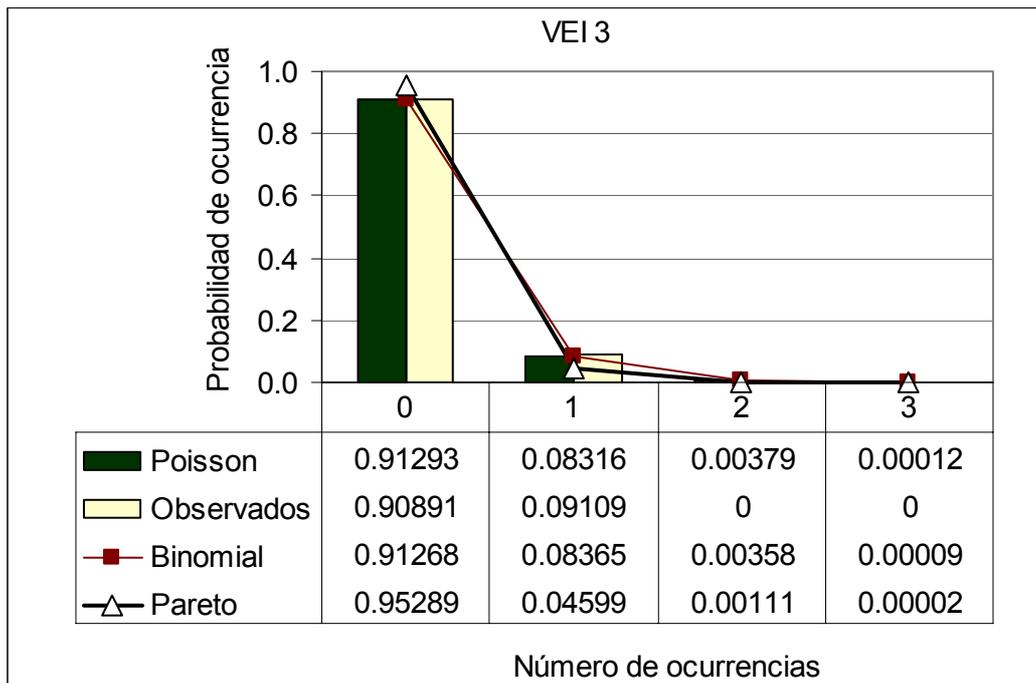
Tabla 3.60. La primera columna se muestra el exceso "e", es decir la diferencia en magnitud entre los valores que exceden un umbral y el valor del umbral de magnitud 2, en la segunda columna se muestra la tasa de excedencia (ecuación 2.12) correspondiente a tener un exceso mayor a "e" dado que ya superó el umbral 2 en un intervalo de 150 años.

Utilizando un proceso de Poisson no-homogéneo con función de intensidad Pareto se obtienen las probabilidades de que ocurran  $n$  eventos con un exceso "e" para un umbral de magnitud igual a 2, mostradas en la tabla 3.61.

	VEI 3	VEI 4	VEI 5	VEI 6
Probabilidad de que ocurran $n$ eventos con exceso "e" considerando un umbral de 2				
$n$	e = 1	e = 2	e = 3	e = 4
0	0.61718	0.80369	0.90987	0.96201
1	0.29785	0.17564	0.08594	0.03726
2	0.07187	0.01919	0.00406	0.00072
3	0.01156	0.00140	0.00013	9.32E-06
4	0.00139	0.00008	3.E-06	9.E-08
5	0.00013	3.E-06	6.E-08	7.E-10
6	0.00001	1.E-07	9.E-10	5.E-12
<b>Total</b>	1	1	1	1

Tabla 3.61. Probabilidades de que ocurran  $n$  eventos con exceso "e" considerando un umbral de magnitud 2, obtenidas de la DPNHP obteniendo la tasa de excedencia en un periodo de 150 años (ecuación 2.12) para el volcán Popocatepetl.

Los resultados obtenidos por medio de una DPNHP, se comparan con los resultados obtenidos usando la distribución de Poisson homogénea, la distribución Binomial y los datos observados en las graficas mostradas en la figura 3.44.



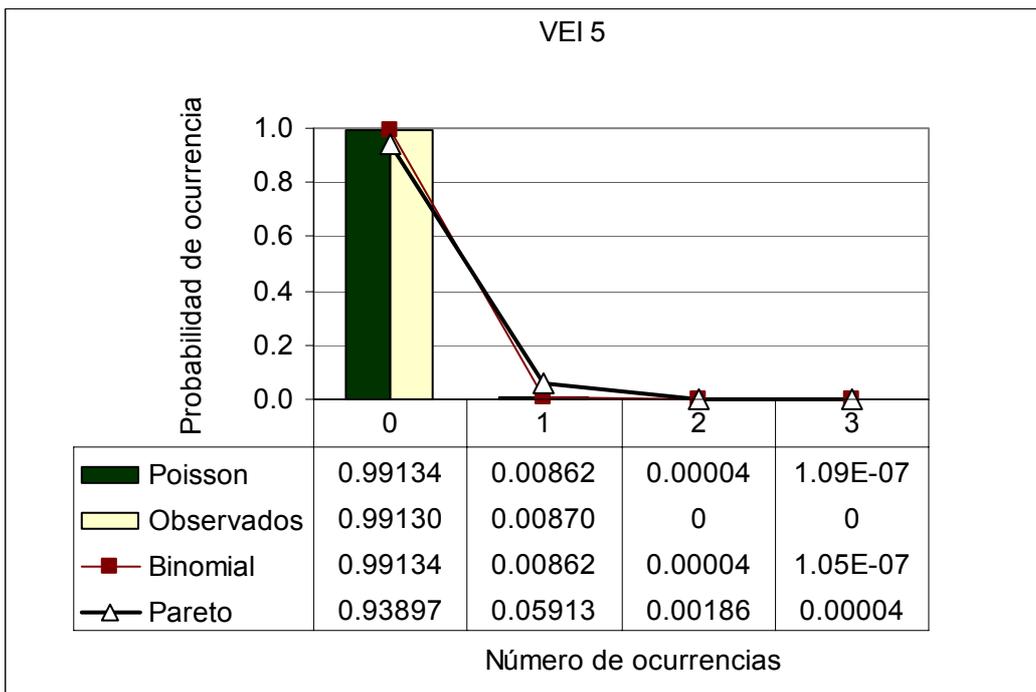
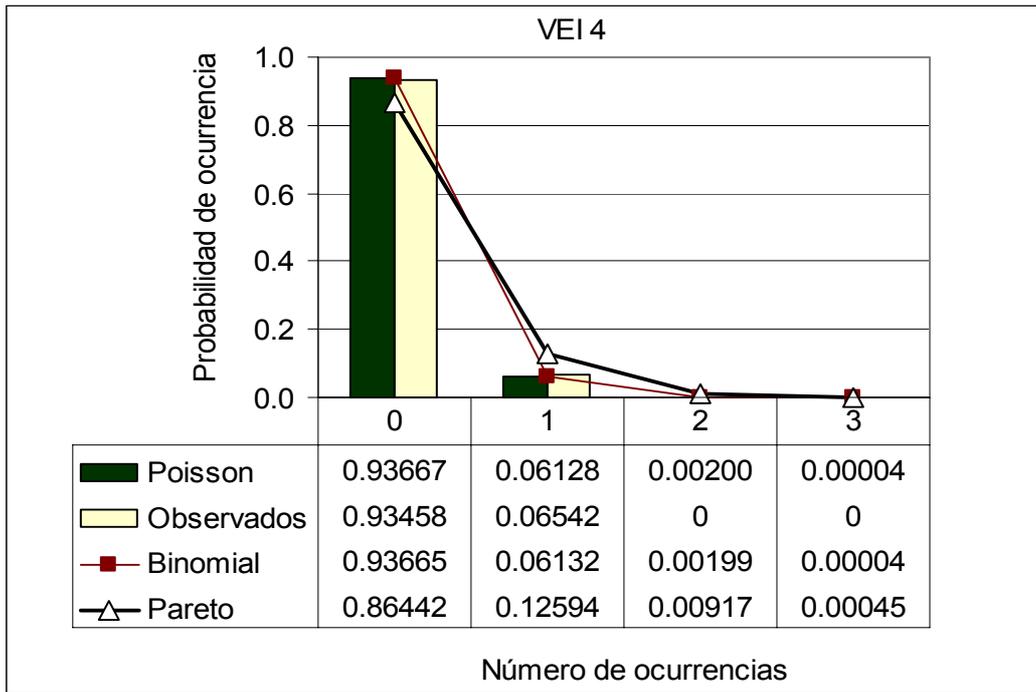


Fig. 3.44. Gráficas con distintos ajustes de la serie eruptiva del volcán Popocatépetl con las distribuciones Poisson homogéneo (barra oscura), Binomial (línea con cuadros) Poisson no-homogénea con función de intensidad generalizada de Pareto (línea con triángulos) y los valores observados disponibles (barra clara) para las magnitudes VEI 4 y 5 distribuidos en intervalos de 100 años y en 15 años para la magnitud VEI 3. Las tablas respectivas a cada gráfica en listan las probabilidades de n ocurrencias en un intervalo de tiempo.

En las gráficas de la figura 3.44 se muestran los ajustes del número de ocurrencias. Los datos observados consisten de 3 valores de magnitud VEI 3 en 494 años permitiendo comparar los ajustes divididos en intervalos de 15 años. Los valores observados con magnitud VEI 4 y 5 son 7 ocurrencias en 10,700 años y 2 ocurrencias en 23,000 años, conviniendo comparar los ajustes tomando intervalos de longitud igual a 100 años. La DPNHP que contiene una tasa variable, incorpora mayor información al ajuste y suavidad a la forma que las otras distribuciones, mientras que los ajustes resultantes de la distribución Binomial y de Poisson homogéneo resultan muy semejantes. Se observa en la gráfica correspondiente a la magnitud VEI 3 que los valores correspondientes al ajuste con la DPNHP muestran una probabilidad menor en la ocurrencia de erupciones, sin embargo en los ajustes para las magnitudes mayores VEI 4 y 5 reflejan probabilidades mayores de ocurrencia de al menos una erupción de esas magnitudes a comparación de los demás ajustes.

Ahora se analizan los valores supuestos en el caso MPOPO5 descrito en la sección 3.1.3 con tasas anuales de ocurrencia 2/1000 para VEI 4, 10/15,000 para VEI 5 y 10/40,000 para VEI 6.

<b>VEI</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>Tasa de ocurrencia (erupciones/años)</b>	0.02834	0.00607	0.00200	0.00067	0.00025
<b>Número estimado de ocurrencias en 10,000 años</b>	283	61	20	7	3

Tabla 3.62. Se muestran los números estimados de ocurrencias eruptivas en 10,000 años clasificados en magnitud VEI, obtenidos de multiplicar el valor de la tasa anual de ocurrencia por 10,000 años, donde las tasas anuales de ocurrencia es el resultado de una extrapolación lineal.

La cantidad de los excesos y los excedentes por arriba de un umbral predeterminado se cuantifica para comprobar la validez de los excesos a una DGP (Tabla 3.63).

**Umbral 1**

<b>VEI</b>	<b>Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 1, es decir número de Excesos</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excedentes</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excesos</b>
2	283.40	566.80	283.40
3	60.73	182.19	121.46
4	20.00	80.00	60.00
5	6.67	33.33	26.67
6	2.50	15.00	12.50
<b>Total</b>	<b>373.30</b>	<b>877.32</b>	<b>504.02</b>

**Umbral 2**

<b>VEI</b>	<b>Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 2, es decir número de Excesos</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excedentes</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excesos</b>
3	60.73	182.19	60.73
4	20.00	80.00	40.00
5	6.67	33.33	20.00
6	2.50	15.00	10.00
<b>Total</b>	<b>89.90</b>	<b>310.52</b>	<b>130.73</b>

**Umbral 3**

<b>VEI</b>	<b>Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 3, es decir número de Excesos</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excedentes</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excesos</b>
4	20.00	80.00	20.00
5	6.67	33.33	13.33
6	2.50	15.00	7.50
<b>Total</b>	<b>29.17</b>	<b>128.33</b>	<b>40.83</b>

**Umbral 4**

<b>VEI</b>	<b>Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 4, es decir número de Excesos</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excedentes</b>	<b>Suma de las magnitudes de los Excesos</b>
5	6.67	33.33	6.67
6	2.50	15.00	5.00
<b>Total</b>	<b>9.17</b>	<b>48.33</b>	<b>11.67</b>

**Umbral 5**

VEI	Número de erupciones mayores a una magnitud VEI 5, es decir número de Excesos	Suma de las magnitudes de los Excedentes	Suma de las magnitudes de los Excesos
6	2.50	15.00	2.50
<b>Total</b>	2.50	15.00	2.50

Tabla 3.63. En la primera columna se muestra la magnitud VEI por arriba del umbral elegido, la segunda columna es el número de erupciones que exceden el umbral, la tercera columna es el producto de la columna 1 por la columna 2 resultando la suma de los excedentes clasificada en magnitud VEI y en la cuarta columna es el producto del número de erupciones que exceden el umbral por el valor de exceso. Los umbrales tomados son VEI 1, 2, 3, 4 y 5, en todos los casos el número de excedentes y el número de excesos es el mismo para el volcán Popocatépetl.

Las regresiones lineales de la media de excedentes y excesos (Tabla 3.64) sobre un umbral contra la magnitud VEI del umbral predeterminado se muestran en las figuras 3.45 y 3.46.

Umbral	VEI 1	VEI 2	VEI 3	VEI 4	VEI 5
<b>Media de Excedentes</b>	2.35	3.45	4.40	5.27	6.00
<b>Media de Excesos</b>	1.35	1.45	1.40	1.27	1.00

Tabla 3.64. Resultados de la media de los excesos y excedentes sobre un umbral fijo para la serie eruptiva del volcán Popocatépetl con umbrales igual a VEI =1, 2, 3, 4 y 5.

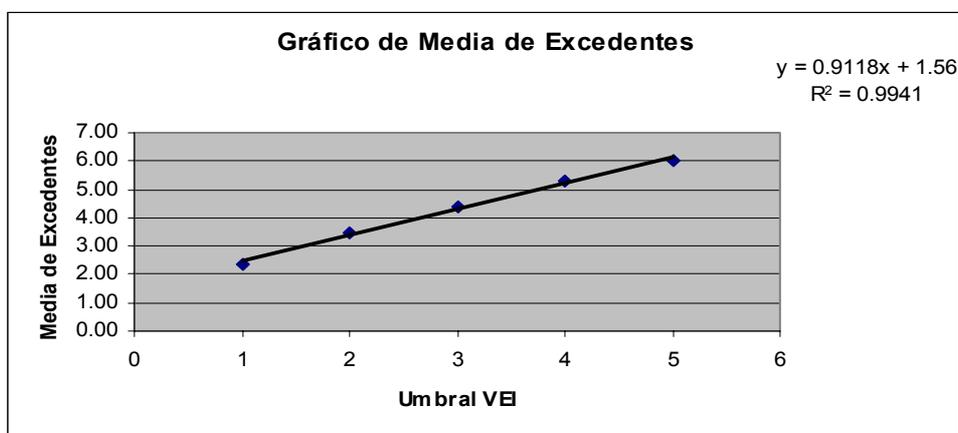


Fig. 3.45. Regresión lineal de la media de excedentes contra el valor de magnitud VEI, obteniendo un  $R^2 \approx 1$ .

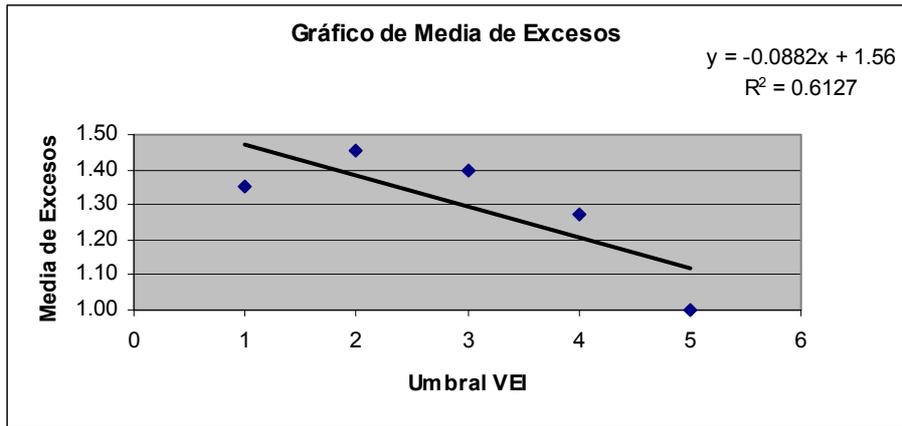


Fig. 3.46. Regresión lineal de la media de los excesos sobre un umbral fijo contra la magnitud VEI del umbral, con valor de  $R^2$  suficiente para validar la regresión y obtener los parámetros.

La línea recta de la regresión (figura 3.46) tiene intercepción  $a/(1+k)$  y pendiente  $-k/(1+k)$ , de esta manera se obtienen los parámetros de forma  $k$  y escala  $a$  (Tabla 3.65) de la función generalizada de Pareto para ajustar los excesos sobre un umbral en este caso igual a la magnitud VEI 2.

<b>Parámetro de forma <math>k</math></b>	0.097
<b>Parámetro de escala <math>a</math></b>	1.711

Tabla 3.65. Parámetros de la DGP para los excesos sobre un umbral de las series eruptivas geológica e histórica del volcán Popocaltépetl correspondientes al caso MPOPO5 (sección 3.1.3).

Se calcula la función de la DGP que ajusta los excesos arriba de una magnitud umbral VEI 2. La ocurrencia de estos excesos, es decir los valores máximos o erupciones mayores, se obtiene utilizando un proceso de Poisson no-homogéneo.

La tasa de ocurrencia  $\theta$  (ecuación 2.12) de la DPNHP es determinada considerando 100 intervalos con longitud igual a 100 años (Tabla 3.66).

<b>Exceso "e"</b>	<b>Tasa de ocurrencia <math>\theta</math> (en 100 años)</b>
1	0.49254
2	0.26001
3	0.13160
4	0.06348
5	0.02898

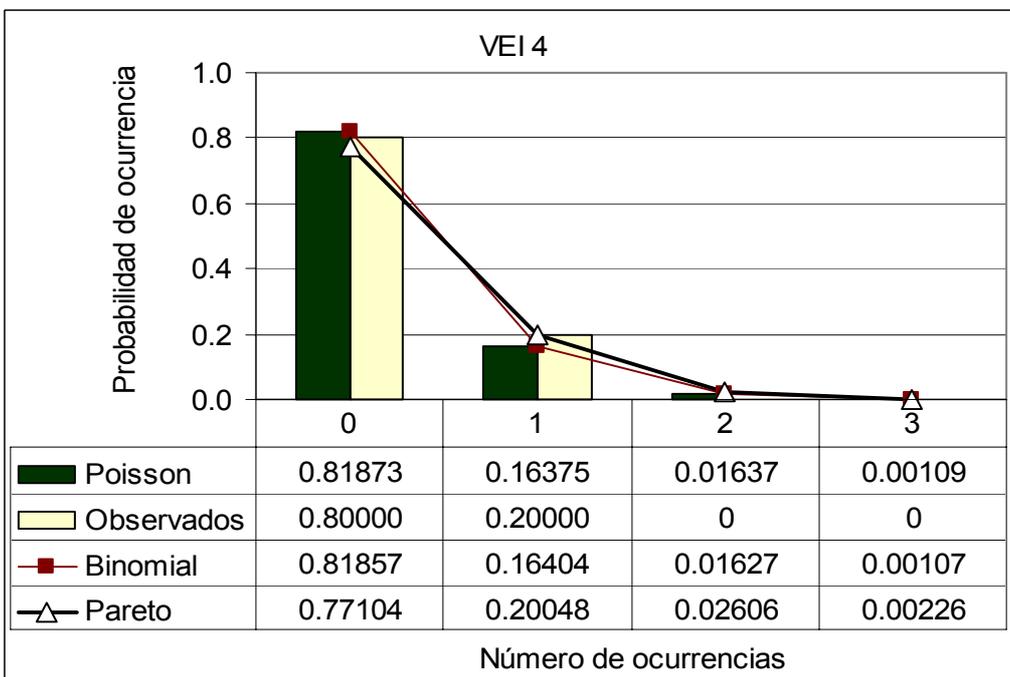
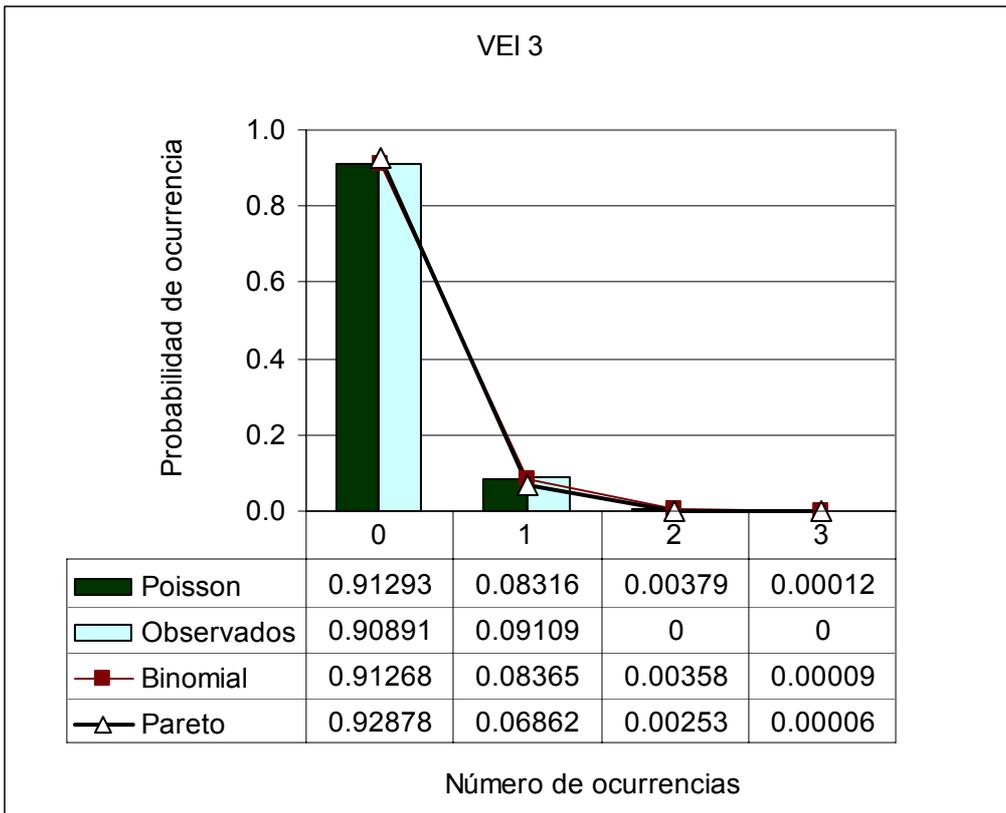
Tabla 3.66. La primera columna se muestra el exceso "e", es decir la diferencia en magnitud entre los valores que exceden un umbral VEI 2, en la segunda columna se muestra la tasa de ocurrencia de excesos considerando intervalos de 100 años.

Las probabilidades de que ocurran n eventos con un exceso "e" para un umbral de magnitud igual a 2 en un periodo de 100 años se enlista en la tabla 3.67.

	<b>VEI 3</b>	<b>VEI 4</b>	<b>VEI 5</b>	<b>VEI 6</b>
<b>Probabilidad de que ocurran n eventos con exceso "e" considerando un umbral de 2</b>				
<b>n</b>	<b>e = 1</b>	<b>e = 2</b>	<b>e = 3</b>	<b>e = 4</b>
<b>0</b>	0.61107	0.77104	0.87669	0.93849
<b>1</b>	0.30098	0.20048	0.11537	0.05958
<b>2</b>	0.07412	0.02606	0.00759	0.00189
<b>3</b>	0.01217	0.00226	3.33E-04	4.00E-05
<b>4</b>	0.00150	0.00015	1.10E-05	6.35E-07
<b>5</b>	0.00015	0.00001	2.88E-07	8.06E-09
<b>Total</b>	1	1	1	1

Tabla 3.67. Probabilidades de que ocurran n eventos con exceso "e" considerando un umbral de magnitud 2 en intervalos igual a 100 años, obtenidas de la DPNHP para el caso MPOPO5 (sección 3.1.3) volcán Popocatépetl.

Los resultados obtenidos por medio de una DPNHP, se comparan con los de la distribución de Poisson homogénea y la distribución Binomial utilizada en De la Cruz-Reyna y Tilling (2006) en las graficas mostradas en la figura 3.47.



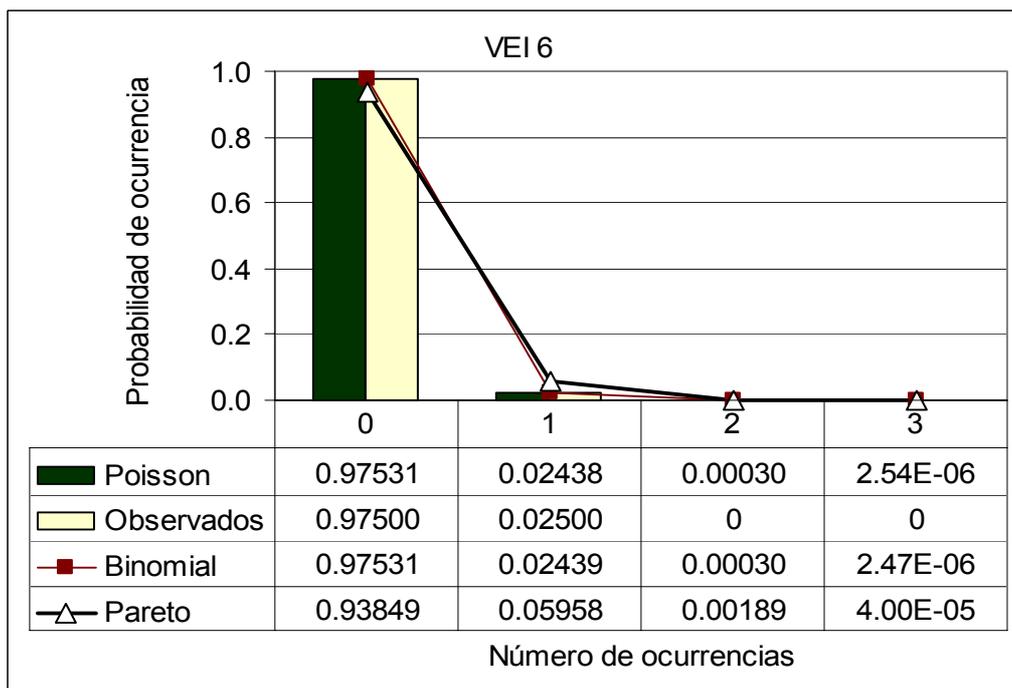
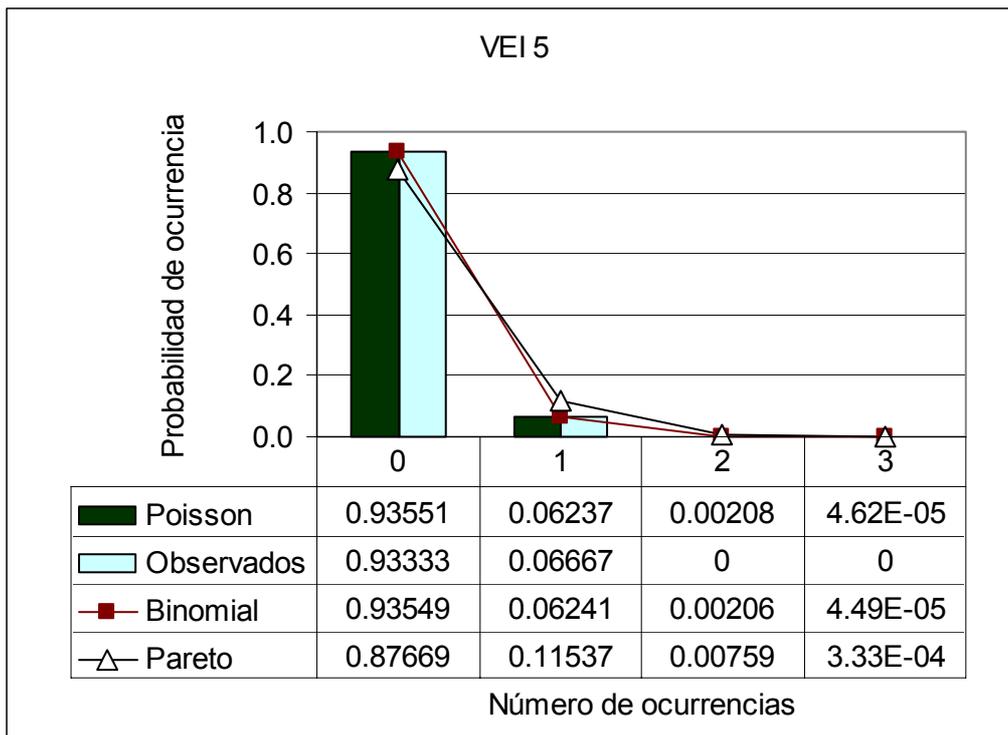


Fig. 3.47. Gráficas con distintos ajustes de la serie eruptiva del volcán Popocatépetl con las distribuciones Poisson homogéneo (barra oscura), Binomial (línea con cuadros), Poisson no-homogéneo con función de intensidad generalizada de Pareto (línea con triángulos) y los valores observados disponibles (barra clara) medidos en intervalos igual a 15 años para la gráfica correspondiente a la magnitud VEI 3 e intervalos de longitud igual a 100 años para las magnitudes VEI 4, 5 y 6. En la tabla respectiva a cada magnitud representa las probabilidades de ocurrencia calculadas con las distintas distribuciones de probabilidad en listadas. El ajuste de número de ocurrencias obtenido con la distribución Binomial es equivalente al ajuste realizado por De la Cruz-Reyna y Tilling (2006) considerando una longitud de intervalo distinta.

En las gráficas de la figura 3.47 se muestran ajustes del número de ocurrencias eruptivas para el volcán Popocatepetl. Los datos observados consisten en 3 valores de magnitud VEI 3 en 494 años divididos en intervalos de 15 años. Los valores observados de magnitud VEI 4, 5 y 6 son: 2 valores en 1000 años, 10 valores en 15,000 años y 10 valores en 40,000 respectivamente, tomando intervalos de longitud igual a 100 años. La DPNHP mantiene probabilidades mayores en comparación con las otras distribuciones graficadas en las magnitudes mayores VEI 4, 5 y 6, en cambio la DPNHP correspondiente a la magnitud VEI 3 provee probabilidades de ocurrencia ligeramente menores a los ajustes resultantes de las distribuciones Binomial y Poisson homogénea.

Las figuras 3.44 y 3.47 muestran ajustes de probabilidad de ocurrencia con diferentes valores geológicos de magnitud correspondientes a los casos dos y cinco. Los resultados proporcionados por las distribuciones Binomial y Poisson homogénea mantienen gran semejanza en los resultados. En el caso de los resultados obtenidos por la DPNHP se nota una probabilidad de ocurrencia ligeramente menor correspondiente a la magnitud VEI 3 y una mayor probabilidad de ocurrencia eruptiva para las magnitudes mayores VEI 4, 5 y 6.

El ajuste resultante de la distribución Binomial en la figura 3.47 es obtenido utilizando las tasas de ocurrencia presentadas por De la Cruz–Reyna y Tilling (2006), estas tasas coinciden con las magnitudes de los valores geológicos supuestos en el caso MPOPO5.

Las distribuciones de Poisson, Binomial y de Pareto (DPNHP) coinciden bastante bien en la magnitud moderada (VEI 3). Sin embargo, en las magnitudes mayores (VEI 4 o más), la de Pareto (DPNHP) genera valores más altos de la probabilidad de al menos una ocurrencia en tiempos relativamente cortos (decenas a centenas de años). Esto sugiere que la pura extrapolación de datos históricos podría tender a una subestimación de las probabilidades de erupciones mayores, mientras la DPNHP, que incorpora los datos geológicos, rinde valores más altos de esas probabilidades, provocando consecuencias importantes en la evaluación del riesgo y en la planeación futura de uso del suelo. Las consecuencias de las diferencias en la estimación del peligro volcánico para el volcán Popocatepetl, en particular para erupciones mayores se discutirán en el siguiente capítulo.

## CAPÍTULO 4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo se propuso una metodología estadística para analizar el peligro volcánico, que aplicada a los volcanes activos poligenéticos Popocatepetl, Citlaltépetl y Colima produce resultados satisfactorios. Esta metodología puede ser aplicada a series eruptivas de cualquier otro volcán para estimar el peligro volcánico, aún en los casos en que la escasez de datos, la distinta naturaleza y escala entre los registros históricos y geológicos, y la no-estacionaridad de la serie eruptiva, dificulten o impidan la aplicación de métodos estadísticos convencionales.

En el desarrollo de éste trabajo, primero se realizó un análisis exploratorio de los datos disponibles para obtener información básica de las variables en estudio, destacando el análisis de estacionaridad. Este análisis, al ser aplicado a las series eruptivas de los volcanes Popocatepetl y Colima, detectó una “débil” no-estacionaridad, que puede afectar los pronósticos de peligro. En estos casos, es conveniente utilizar metodologías de procesos no-homogéneos para su evaluación. Para la serie eruptiva del volcán Citlaltépetl se concluyó que se cumplía la condición de estacionaridad.

En el caso del volcán de Colima la condición de no-estacionaridad “débil” tiene poco o ningún efecto significativo en el análisis del peligro al largo plazo. Sin embargo cuando se analizan separadamente muestras de ocurrencias sobre intervalos “cortos” (comparables o menores que la escala de la no-estacionaridad), su efecto puede ser muy importante y conducir a estimaciones erróneas del peligro. Debe ponerse entonces gran cuidado en lo que los efectos de no-estacionaridad dependen del tamaño del segmento de serie cuando se hace un análisis de peligro volcánico.

Generalmente los registros disponibles de series eruptivas son escasos, causando serios problemas en la estimación del peligro volcánico cuando se utilizan métodos estadísticos convencionales. Para extender las series eruptivas de los volcanes objeto

de este estudio, se complementaron dos bases de datos de naturaleza distinta: los datos de erupciones históricas con los datos geológicos publicados de erupciones, generalmente inferidos del estudio de los depósitos volcánicos. Estas bases de datos difieren en dos aspectos importantes, las series históricas proveen información precisa de las fechas de ocurrencia de las erupciones y generalmente también información más precisa de la magnitud VEI de las mismas. Sin embargo, dada la baja tasa de ocurrencia de las erupciones mayores, rara vez las series históricas contienen información de las erupciones en la parte alta de la escala VEI. En contraste, las series geológicas rara vez contienen información de las erupciones menores, puesto que dejan depósitos delgados, y las fechas de ocurrencia de las erupciones están siempre sujetas a las incertidumbres de los diversos métodos de fechamiento utilizados. Asimismo, la estimación de las magnitudes de las erupciones geológicas considera los volúmenes de los depósitos, puede estar sujeta a errores considerables. La incertidumbre en la magnitud y en la fecha de ocurrencia de los eventos eruptivos geológicos motivó la elaboración de distintos modelos para su incorporación en las series históricas bajo diferentes condiciones, para darle mayor consistencia a la asignación de los valores de magnitud VEI, permitiendo así obtener una muestra óptima, o al menos más representativa del comportamiento de la secuencia eruptiva para aplicar las metodologías propuestas al cálculo del peligro volcánico.

En el caso del volcán de Colima, el modelo analizado más viable consiste en considerar que a dos de los tres valores de las erupciones mayores de la serie geológica, de las que se tiene certeza que excedieron la magnitud VEI 4, se les asigne magnitud VEI 5 y al evento restante se le asigne magnitud VEI 6, todos ellos ocurridos durante un periodo estimado de 7,040 años. También se analizaron otras combinaciones, incluso algunas que incluyeron combinaciones de magnitudes con valores intermedios. Sin embargo se encontró poca diferencia en los resultados.

En el caso del volcán Citlaltépetl se supuso que los 3 datos geológicos reportados en la literatura tuvieron probablemente una magnitud VEI 4.

Para el volcán Popocatepetl se concluyó que es matemáticamente posible que haya ocurrido una cantidad de erupciones más grande, especialmente del rango de magnitudes VEI 4 y 5, que las reportadas en base a las observaciones de los depósitos de campo y (Siebe y Macías, 2004). Por otro lado, las tasas anuales de ocurrencia eruptivas indicadas en el mapa de peligros (Macías et al, 1995a), consideran un número mayor de erupciones que las obtenidas por la estimación

estadística basada en la serie eruptiva histórica del volcán Popocatepetl. Sin embargo, debe tenerse muy en cuenta que los resultados matemáticos basados únicamente en la extrapolación de las erupciones históricas no son del todo confiables en este caso, por ser muy sensibles a cambios o errores en el registro histórico.

El análisis de los tiempos de espera entre erupciones, utilizando la función de distribución de supervivencia de Weibull, proporcionó flexibilidad y gran exactitud, mejorando el ajuste obtenido con una función de distribución exponencial para los tiempos de espera registrados en las series eruptivas de los volcanes Popocatepetl, Citlaltépetl y Colima. La función de distribución de Weibull, debido a los parámetros de forma y escala, permite generalizar el ajuste a tiempos de espera de series eruptivas no-estacionarias.

La estimación del peligro volcánico, como la probabilidad de ocurrencia de una erupción con cierta magnitud en un intervalo de tiempo determinado, fue obtenida con un proceso no-homogéneo con distribución de Poisson no - homogénea de Pareto (DPNHP), basado en la teoría de los valores extremos. Los resultados de este modelo se compararon con los valores observados disponibles y estimaciones de peligro volcánico obtenidas con la distribución Poisson homogénea y la distribución Binomial, para las series eruptivas de los volcanes Popocatepetl, Citlaltépetl y Colima, mostrando una ligera diferencia y mayor suavidad en la forma del ajuste. El proceso de Poisson no-homogéneo de Pareto permite enfatizar el efecto de la ocurrencia de valores extremos de magnitud de la serie eruptiva en la estimación del peligro volcánico.

La estimación del peligro volcánico con la DPNHP se comparó con resultados publicados por otros autores, donde se observó un comportamiento similar para los ajustes de las series eruptivas de los volcanes Popocatepetl, Citlaltépetl y Colima. Este comportamiento consiste en que la probabilidad de ocurrencia eruptiva obtenida con la DPNHP es sistemáticamente menor, comparada con la probabilidad de ocurrencia obtenida con las distribuciones Binomial y de Poisson homogénea, considerando una magnitud moderada VEI 3. Cuando se trata de la probabilidad de ocurrencia de magnitudes mayores como VEI 4, 5, o 6 ocurre lo contrario. En otras palabras, el uso de la DPNHP reduce ligeramente las probabilidades de ocurrencia de las erupciones moderadas, pero incrementa las probabilidades de ocurrencia de las erupciones mayores.

La teoría de los valores extremos o raros puede aportar nuevas perspectivas en el área de la vulcanología, ya que los modelos de esta teoría consideran la escasez de datos o en ocasiones su inexistencia, permitiendo enfatizar la importancia relativa de los casos raros, como las erupciones de mayor magnitud o de magnitud extrema, cuyas tasas de ocurrencia presentan grandes incertidumbres. Por lo tanto la combinación de la distribución de Weibull y la distribución de la teoría de los valores extremos ataca los problemas comunes en series volcánicas como la no-estacionaridad y la escasez de datos eruptivos, sin importar la naturaleza y escala.

Las probabilidades de que al menos ocurra una erupción en los siguientes  $t$  años son comparadas en la tabla 4.1 para los tres volcanes en estudio clasificados en magnitud VEI 3, 4, 5 y 6. Considerando 2 modelos para el análisis del volcán Popocatepetl, donde uno supone los datos geológicos del mapa de peligros (Macías et al. 1995a) y el segundo modelo supone los datos geológicos observados en los depósitos de campo (Siebe y Macías, 2004). Las probabilidades de que al menos ocurra 1 erupción para el volcán Citlaltépetl son obtenidas asignando magnitudes VEI igual a 4 en las erupciones geológicas ocurridas durante un periodo igual a 13,000 años. Para obtener las probabilidades de ocurrencia, de la tabla 4.1, correspondientes al volcán de Colima se suponen dos de los tres valores de las erupciones mayores de la serie geológica con magnitud VEI 5 y al evento restante se le asigna magnitud VEI 6, todos ellos ocurridos durante un periodo estimado de 7,040 años.

VEI 3				
Años	Colima	Popocatepetl MP(1995)	Popocatepetl SM (2004)	Citlaltépetl
20	0.39743	0.09381	0.06232	0.01775
50	0.71815	0.21829	0.14859	0.04379
100	0.92056	0.38893	0.27510	0.08567
500	1.00000	0.91479	0.79984	0.36097

VEI 4				
Años	Colima	Popocatepetl MP(1995)	Popocatepetl SM (2004)	Citlaltépetl
20	0.25818	0.05067	0.02872	0.00783
50	0.52603	0.12191	0.07026	0.01946
100	0.77535	0.22896	0.13558	0.03855
500	0.99943	0.72748	0.51735	0.17845

VEI 5				
Años	Colima	Popocatepetl MP(1995)	Popocatepetl SM (2004)	Citlaltépetl
20	0.15215	0.02598	0.01251	0.00332
50	0.33809	0.06368	0.03099	0.00828
100	0.56187	0.12331	0.06103	0.01650
500	0.98386	0.48212	0.27009	0.07981

VEI 6				
Años	Colima	Popocatepetl MP(1995)	Popocatepetl SM (2004)	Citlaltépetl
20	0.08055	0.01262	0.00515	0.00135
50	0.18936	0.03124	0.01283	0.00338
100	0.34287	0.06151	0.02549	0.00674
500	0.87747	0.27197	0.12112	0.03324

Tabla 4.1. Comparación entre las probabilidades de que ocurra al menos una erupción (DPNHP) de cada clase VEI 3, 4, 5 y 6 en los próximos 20, 50, 100 y 500 años, para los volcanes Citlaltépetl, Colima y Popocatepetl. Donde se asignó magnitudes VEI a los valores geológicos de los tres volcanes en estudio como: 2 erupciones igual a VEI 5 y una erupción con magnitud VEI 6 ocurridas durante 7,040 años para el volcán de Colima; 7 erupciones con magnitud VEI 5 y 2 erupciones con magnitud VEI 6 durante un periodo estimado de 23,000 años para el volcán Popocatepetl correspondiente al modelo "Popocatepetl SM 2004"; 2 erupciones en 1000 años con magnitud VEI 4, 10 erupciones durante 15,000 años con magnitud VEI 5 y 10 erupciones en 40,000 años con magnitud VEI 6, correspondiente a la información registrada en el mapa de peligros (Macías et al. 1995a) considerada en el modelo "Popocatepetl MP 1995" para el volcán Popocatepetl. En el caso de los registros eruptivos geológicos para el Volcán Citlaltépetl se asignó la magnitud VEI 4 para las 3 erupciones ocurridas en un periodo estimado de 13,000 años.

En la Tabla 4.1 se observan las probabilidades de ocurrencia de al menos una erupción obtenida con la DPNHP, correspondientes al volcán de Colima, mayor es en

todos los casos VEI y para todos los intervalos de tiempo considerados, en comparación de los demás volcanes.

Para visualizar la comparación entre las probabilidades de ocurrencia de al menos una erupción durante 20, 50, 100 y 500 años, para la magnitud moderada (VEI 3) y las magnitudes mayores (VEI 4, 5 y 6) de la tabla 4.1., se realiza la comparación de la probabilidad de al menos una erupción del volcán de Colima con relación a los demás volcanes en la tabla 4.2., que consiste en el número de veces el cual la probabilidad correspondiente al volcán de Colima es mayor que la de los demás modelos considerados para los volcanes Popocatepetl y Citlaltépetl.

VEI 3			
Años	Popocatepetl MP(1995)	Popocatepetl SM (2004)	Citlaltépetl
20	4	6	22
50	3	5	16
100	2	3	11
500	1	1	3
VEI 4			
Años	Popocatepetl MP(1995)	Popocatepetl SM (2004)	Citlaltépetl
20	5	9	33
50	4	7	27
100	3	6	20
500	1	2	6
VEI 5			
Años	Popocatepetl MP(1995)	Popocatepetl SM (2004)	Citlaltépetl
20	6	12	46
50	5	11	41
100	5	9	34
500	2	4	12
VEI 6			
Años	Popocatepetl MP(1995)	Popocatepetl SM (2004)	Citlaltépetl
20	6	16	60
50	6	15	56
100	6	13	51
500	3	7	26

Tabla 4.2. Número de veces aproximado en que la probabilidad de ocurrencia de una erupción moderada (VEI 3) y una erupción mayor (VEI 4, 5 y 6) para los siguientes 20, 50, 100 y 500 años en el volcán de Colima es mayor que en los volcanes Popocatepetl y Citlaltépetl.

Por ejemplo, para la magnitud moderada VEI 3 en la tabla 4.2 es interpretada como la probabilidad de que ocurra a lo menos una erupción del volcán Colima durante los próximos 20, 50, 100 y 500 años con magnitud VEI 3 consiste en 4, 3, 2 y 1 veces aproximadamente mayor a comparación del modelo considerado “Popocatépetl MP 1995”. Las probabilidades del volcán Colima son mayores comparadas con las probabilidades obtenidas en el modelo “Popocatépetl SM 2004” para los siguientes 20, 50, 100 y 500 años en 6, 5, 3 y 1 veces respectivamente. Al comparar las probabilidades obtenidas para el volcán de Colima contra las del volcán Citlaltépetl resulta que son mayores las del volcán Colima por 22, 16, 11 y 3 veces aproximadamente en los próximos 20, 50, 100 y 500 años respectivamente.

Se concluye que la probabilidad de ocurrencia de al menos una erupción para cada volcán objeto de este estudio para los próximos 20, 50, 100 y 500 años, es mayor para el volcán de Colima, con menor frecuencia el volcán Popocatépetl y por último el volcán Citlaltépetl es el que tiene menores probabilidades de ocurrencia de al menos una erupción volcánica en los periodos considerados en las tablas 4.1 y 4.2. Esto indica que entre los grandes estratovolcanes, el volcán de Colima es el de mayor peligro en México. Sin embargo, debe tomarse en cuenta que este argumento se basa exclusivamente en las tasas de ocurrencias calculadas con la información histórica y geológica disponible y por lo tanto algunos de estos resultados podrían requerir una reevaluación Bayesiana a la luz de nuevos datos, o de información adicional sobre los procesos que gobiernan a las series eruptivas.

Los resultados numéricos obtenidos en este trabajo pueden modificar en la estimación del riesgo volcánico, debido a que el peligro volcánico es una componente directa del riesgo, implicando un aumento en la componente del riesgo volcánico asociada a la mayor probabilidad de ocurrencia de magnitudes mayores, como VEI 4, 5 y 6. Aunque este aumento es pequeño debe ser tomado en cuenta al valorar el riesgo volcánico y al diseñar las medidas preventivas correspondientes, ya que la vulnerabilidad ante estas erupciones puede alcanzar valores cercanos al 100%.

## REFERENCIAS

Anderson C.W, Mole N., y Nadarajah S., 1997. A Switching Poisson Process Model For High Concentrations in Short-Range Atmospheric Dispersion. *Atmospheric Environment*. 31(6): 813-824.

Araña V., y Ortiz, R., 1984. *Volcanología*. Rueda, España.

Bebbington M. S. y C. D. Lai., 1996. Statistical Analysis of New Zealand Volcanic Occurrence Data. *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 74: 101-110.

Beguiría, S., 2005. Uncertainties in Partial Duration Series Modelling of Extremes Related of the Choice of the Threshold Value. *Journal of Hydrology* 303: 215-230.

Bradson, B. B. y Palutikov, J. P., 2000. Test of the Generalized Pareto Distribution for Predicting Extreme Wind Speeds. *Journal of Applied Meteorology* 39: 1627- 1640.

Bretón González, M., Ramírez J. y Navarro C., 2002. Summary of the Historical Eruptive Activity of Volcán de Colima, Mexico 1519-2000. *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 117: 21-46.

Canavos, G., 1996. *Probabilidad y Estadística; Aplicaciones y Métodos*. Mc Graw Hill, México.

Carrasco-Núñez, G., 1993. Structure, eruptive history and some major hazardous events at Citlaltépetl volcano (Pico de Orizaba), Mexico. Tesis de Doctorado, Michigan Technological University.

Carrasco-Núñez, G., Ban, M., 1994. Geologic map and structure sections of the Citlaltépetl volcano summit area, Mexico: *Cartas Geológicas y Mineras* 9. Instituto de Geología, UNAM.

Carrasco-Núñez, G., 2000. Structure and proximal stratigraphy of Citlaltépetl volcano (Pico de Orizaba), México. *Cenozoic Tectonic and Volcanism in Mexico*. Geological Society of America Bulletin 334: 247-262.

Carta, S., Figari R., Sartoris G., Sassi E., Scandone R., 1981. A Statistical Model for Vesuvius and Its Volcanological Implications. *Bulletin of Volcanology* 44-2: 129 – 151.

Cas R.A.F y Wright J.V., *Volcanic Successions*. Chapman & Hall, Londres.

Casetti, G., Frazzetta G., Romano R., 1981. A Statistical Analysis in Time of the Eruptive Events on Mount Etna (Italy) from 1323 to 1980. *Bulletin of Volcanology* 44-3: 283 – 295.

Cebrián, A.C., 1999. *Análisis, Modelización y Predicción de Episodios de Sequía*. Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza.

Coles, S. 2001. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer-Verlang London.

Cortés, A., Garduño-Monroy, V.H., Navarro-Ochoa, C., Komorowski, J.C., Saucedo, R., Macías, J.L., Gavilanes, J.C., 2005. *Carta Geológica del Complejo Volcánico de Colima con Geología del Complejo Volcánico de Colima*. Instituto de Geología UNAM. México D.F.

Cox, D.R. y Lewis, P.A.W., 1966. *The Statistical Analysis of Series of Events*. Methuen and Co. London.

Cox, D.R. y Isham, V., 1980. *Point Process*. Chapman and Hall London.

Davison, A. C., Smith, R. L., 1990. Models for Exceedances over High Thresholds. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B* 52: 393-442.

De la Cruz-Reyna, S., 1991. Poisson-Distributed Patterns of Explosive Activity. *Bulletin of Volcanology* 54: 57-67.

De la Cruz-Reyna S., 1993. Random Patterns of Occurrence of Explosive Eruptions at Colima Volcano, México. *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 51-68.

De la Cruz-Reyna, S, Quezada, J.L, Peña, C., Zepeda, O., Sánchez, T., 1995. Historia de la actividad del Popocatepetl (1354-1995). En: Volcán Popocatepetl, Estudios Realizados Durante la Crisis de 1994-1995. CENAPRED-UNAM, México, D.F. 3-22.

De la Cruz-Reyna, S., 1996. Long – Term Probabilistic Analysis of Future Explosive Eruptions. In: Scarpa, R., Tilling, R.I. (Eds.), Monitoring and Mitigation of Volcanic Hazards. Springer, Berlín. 599-629.

De la Cruz-Reyna, S., 1996a. Estimación del Riesgo Volcánico en Términos de la Distribución Estadística de Erupciones Explosivas. Sistema Nacional de Protección Civil. Centro Nacional de Prevención de Desastres (CENAPRED), 27p. (Cuadernos de Investigación, 38). México, D.F.

De la Cruz Reyna S., Carrasco Núñez. G., 2002. Probabilistic Hazard Analysis of Citlaltepétl (Pico de Orizaba) Volcano, Eastern Mexican Volcanic Belt. Journal of Volcanology and Geothermal Research 113: 307-318.

De la Cruz – Reyna S., 2004. Peligro y Riesgo Volcánico en México. Volcanes Series Fascículos. 1º Edición. CENAPRED.

De la Cruz Reyna, Tilling R., 2006. Scientific and Public Responses to the Ongoing Volcanic Crisis At Popocatepetl Volcano, México: Importance of an Effective Hazards Warning System. Aceptado para publicación en Journal of Volcanology and Geothermal Research.

Díaz Hernandez, Adan, 2003. Teoría de Valores Extremos para Sucesiones de Variables Aleatorias Dependientes. Tesis Licenciatura (Actuario)-UNAM, Facultad de Ciencias.

Feller W., 1973. Introducción a la Teoría de las Probabilidades y sus Aplicaciones. Editorial limusa – Wiley, S.A. México.

Ferrás G. Sergio., 2003. Probabilistic Prediction of The Next Large Earthquake in The Michoacán Fault – Segment of The Mexican Subduction Zone. Geofísica Internacional 42: 69-81.

Ferrari, L., López-Martínez, M., Aguirre-Díaz, G., Carrasco- Núñez, G., 1999. Space-Time Patterns of Cenozoic Arc Volcanism in Central Mexico: From Sierra Madre Occidental to the Mexican Volcanic Belt. *Geology* 27: 303-306.

Fisher, R.A. y Tippett, L.H.C., 1928. Limiting forms of the frequency distributions of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 24: 180-190.

Fournier d'Albe, E.M., 1979. Objectives of volcanic monitoring and prediction. *Journal of the Geological Society of London* 136: 321-326.

Gasperini, P. et al., 1990. Statistical Analysis of Seismic and Eruptive Activities at Mt. Etna During 1978-1987. *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 40: 317-325.

Gnedenko, B.V., 1943. Sur la Distribution Limite du Terme d'une Serie Aleatoire. *Annals of Mathematics* 44, 423-453.

Gray L. Henry y Odell L. Patrick., 1970. *Probability for Practicing Engineers*. Barnes and Noble, New York.

Gumbel, E. J., 1958. *Statistics of Extremes*. Columbia University Press, New York.

Hernández A., 2005. Distribución Límite de los Extremos del Modelo T-Student Truncado Para Datos de Lluvia Diaria. Tesis Doctoral presentada a la Universidad Simón Bolívar. Venezuela.

Hédervári P., 1963. On the energy and magnitude of volcanic eruptions. *Bulletin of Volcanology* 25: 373-385.

Ho, Chih-Hsiang., 1990. Bayesian Analysis of Volcanic Eruptions. *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 43: 91-98.

Ho, Chih-Hsiang., 1991a. Time Trend Analysis of Basaltic Volcanism for The Yucca Mountain Site. *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 46: 61-72.

Ho, Chih-Hsiang., 1991b. Nonhomogeneous Poisson Model for Volcanic Eruptions. *Mathematical Geology* 23:167-173.

Ho Chih Hsiang, 1992. Predictions of Volcanic Eruption at Mt. Vesuvius, Italy. *Journal of Geodynamics*. 15: 13-18.

Ho, Chih-Hsiang., 1995. Sensitivity in Volcanic Hazard Assessment for the Yucca Mountain High-Level Nuclear Waste Repository Site: The Model and the Data. *Mathematical Geology* 27: 239-258.

Ho, Chih-Hsiang., 1996. Volcanic Time-Trend Analysis. *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 74:171-177.

Hosking, J.R.M. y Wallis, J.R., 1987. Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution. *Technometrics* 29 (3): 333-349.

Höskuldsson, A., 1992. Le complexe volcanique Pico de Orizaba - Sierra Negra-Cerro Las Cumbres (Sud-Est Mexicain): Structure, dynamismes éruptifs et évaluations des aléas. Tesis de doctorado, Universidad de Blaise Pascal, Francia. 210 pp.

Jagger, T. y Elsner, J., 2005. Climatology Models for Extreme Hurricane Winds near the United States. *Journal of Climate* 19: 3220-3236.

Klein F.W., 1982. Patterns of Historical eruptions at Hawaiian Volcanoes. *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 12: 1-35.

Lang, M., Ouarda, T.B.M.J., Bobée B. Towards operational guidelines for over-threshold modeling. *Journal of Hydrology* 225 (1999): 103–117.

Leadbetter, M.R. Lindgren, G. y Rootzen, A. 1983. *Extremes and related properties of random sequences and series*. Springer Verlag, New York.

Lin X.G., 2003. Statistical modelling of severe wind gust. En: *International Congress on Modelling and Simulation*, Townsville, 14-17 July, 2: 620-5.

Luhr J.F. y Carmichael I.S.E. 1990. Geology of Volcán de Colima. *Boletín Instituto de Geofísica UNAM*. México.

Martínez Ramos, Patricia Alejandra., 2003. Un Modelo Estadístico para Valores Extremos en Series de datos Actuariales. Tesis Licenciatura (Actuario)-UNAM, Facultad de Ciencias.

Macías J.L., Carrasco-Núñez G., Siebe C., 1995. Zonificación de Peligros Volcánicos del Popocatepetl. En: Volcán Popocatepetl, Estudios Realizados Durante la Crisis de 1994-1995. CENAPRED-UNAM, México, D.F. 79-91.

Macías, J.L., Carrasco-Núñez, G., Delgado, H., Martin, A.L., Siebe, C. Hobblit, R.P., Sheridan M., Tilling, R.I., 1995a. Mapa de Peligros del Volcán Popocatepetl. Instituto de Geofísica, UNAM- CENAPRED, México, D.F.

Macías, J.L. y Siebe Claus, 2005. Popocatepetl's Crater Filled to The Brim: Significance for Hazard Evaluation. Instituto de Geofísica, UNAM, México. Journal of Volcanology and Geothermal Research 141: 327– 330.

Macías J.L., 2005. Geología e historia eruptiva de algunos de los grandes volcanes activos de México. Boletín de la Sociedad Geológica Mexicana Temas Selectos de la Geología Mexicana Tomo LVII. 3: 379-424.

McNeil, A.J. y Saladin, T., 1997. The Peaks Over Thresholds Method for Estimating High Quantiles of Loss Distributions. Coloquio 28<sup>th</sup> internacional ASTIN Bulletin.

McNeil, A.J., 1999. Extreme Value Theory for Risk Managers. Internal Modelling and CAD II. RISK Books, 93-113.

Mulargia, F. Tinti, S., Boschi, E., 1985. A Statistical Analysis of Flank Eruptions on Etna Volcano. Journal of Volcanology and Geothermal Research 23: 263-272.

Mulargia, F., Gasperini, P., Tinti, S., 1987. Identifying Different Regimes in Eruptive Activity: An Application to Etna Volcano. Journal of Volcanology and Geothermal Research 34: 89 - 106.

Mulargia, F., Gasperini, P., Marzocchi, W., 1991. Pattern Recognition Applied to Volcanic Activity: Identification of the Precursory Patterns to Etna Recent Flank

Eruptions and Periods of Rest. *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 45: 187– 196.

Newhall, C. G., Self, S., 1982. The Volcanic Explosivity Index (VEI): An Estimate of Explosive Magnitude for Historical Volcanism. *Journal of Geophysical Research*, 87C2: 1231-1238.

Pickands, J., 1971. The Two Dimensional Poisson Process and Extremal Processes. *Journal of Applied Probability* 8: 745-756.

Pickands, J., 1975. Statistical Inference Using Extreme order statistics. *Annals of Statistics* 3 (1): 119-131.

Reiss R.D., M. Thomas., 2001. *Statistical Analysis of Extreme Values*. Birkhauser, 2° edición. Basel.

Reyment.,R A., 1969. Statistical Analysis of some Volcanologic Data. Regarded as Series of Point Events. *PAGEOPH*. 74(3): 57-77.

Robin, C., Cantagrel, J.M., 1982. Le Pico de Orizaba (Mexique): Structure et évolution d'un grand volcan andésitique complexe. *Bulletin of Volcanology*. 45: 299-315.

Robin C., 1984. Le Volcan Popo (Mexique): Structure, evolution petrologique et risques. *Bulletin of Volcanology*. 47 :1–23.

Rodríguez-Elizarraraz, S.R., 1995. Estratigrafía y Estructura del Volcán de Colima, México. *Revista Mexicana Ciencias Geológicas* 12: 22-46.

Ross S.M., 1983. *Stochastic Processes*. John Wiley & Sons. New York.

Saucedo R., 1997. Reconstrucción de la Erupción de 1913 del Volcán de Colima. Tesis Maestro en Ciencias.

Saucedo R., Macías J.L., Bursik M.I., Mora J.C., Gavilanes J.C., Cortes A., 2002. Emplacement of pyroclastic flows during the 1998-1999 eruption of Volcán de Colima, México. *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 117: 129-153.

Saucedo R., Macías J.L., Sheridan M.F., Bursik M.I., Komorowski J.C., 2006. Modeling of pyroclastic flows of Colima Volcano, Mexico: implications for hazard assessment. *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 139: 103– 115.

Sheridan M., Carrasco-Núñez, G., Hubbard B., Siebe, C. Rodríguez-Elizarrarás S. Mapa de Peligros del Volcán Citlatépetl. Instituto de Geografía, UNAM, México, D.F.

Simkin T, Siebert L, McClelland L, Bridge D, Newhall C, Latter J H, 1981. *Volcanoes of the World: a regional directory, gazetteer, and chronology of volcanism during the last 10,000 years.* Hutchinson Ross Pub Co, Stroudsburg.

Smith, R.L., 1989. Extreme Value Analysis of Environmental Time Series: An Application to Trend Detection in Ground-level Ozone (with discussion). *Statistical Science* 4: 367-393.

Smith R.L., 2001. Extreme Value Statistics in Meteorology and The Environment. *Environmental Statistics* 8: 300–357.

Siebe, C., Abrams, M., Macías, J.L., 1995. Derrumbes gigantes, depósitos de avalancha de escombros y edad del actual cono del Volcán Popocatépetl. En: *Volcán Popocatépetl, Estudios Realizados Durante la Crisis de 1994-1995.* CENAPRED-UNAM, México, D.F. 195-220.

Siebe, C., Abrams, M., Macías, J.L., Obenholzner, J., 1996. Repeated volcanic disasters in Prehispanic time at Popocatépetl, Central Mexico: past key to the future? *Geology* 24: 399– 402.

Siebe, C. y Macías, J.L., 2004. Volcanic Hazards in the Mexico city Metropolitan Area From Eruptions at Popocatépetl, Nevado de Toluca, and Jocotitlán Stratovolcanoes and Monogenetic Scoria Cones in The Sierra Chichinautzin Volcanic Field. *Fieldtrip Books, vol. 1.* Geological Society of America.

Tilling, Robert I. y Punongbayan, Raymundo S., 1993. Apuntes para un curso breve sobre los peligros volcánicos. Publicado por Organización Mundial de Observatorios Vulcanológicos. Presentado en: Curso breve sobre los peligros volcánicos; Santa Fé, Nuevo México, 2-3 jul. 1989

Tsuya H.,1955. Geological and Petrological Studies of Volcano Fuji,5. Bulletin of the Earthquake Research Institute, University of Tokyo. 33: 341-384.

Walker GPL., 1980. The Taupo Pumice: Product of the most Powerful Known (Ultraplinian) eruption?. Journal of Volcanology and Geothermal Research 8: 69– 94.

Wickman, F. E., 1965a. Repose Period Patterns of Volcanoes, 4. Eruption Histories of Some Selected Volcanoes. Arkiv för Mineralogi och Geologi 4: 337-350

Wickman, F. E., 1965b. Repose Period Patterns of Volcanoes, 5. General Discussion and a Tentative Stochastic Model. Arkiv för Mineralogi och Geologi 4: 351-367.

Wickman, F. E., 1976. Markov Models of Repose - Period Patterns of Volcanoes. In: D F Merriam Ed. Random Processes in Geology. Springer-Verlag Berlín, 135-161.

Yokoyama I., 1957. Energetics in active volcanoes. Bulletin of the Earthquake Research Institute, University of Tokyo. 35: 75-97.

Páginas de Internet:

Global Volcanism Program.

<http://www.volcano.si.edu>.

Instituto de Geofísica UNAM.

<http://www.geofisica.unam.mx/vulcanologia/index.html>

Observatorio del volcán de Colima.

<http://www.ucol.mx>.

## APÉNDICE

### A1. La distribución Generalizada de Valores Extremos

La teoría clásica de los valores extremos busca secuencias normalizadoras  $a_n > 0$  y  $b_n$ , tal que  $(M_n - b_n)/a_n$  converja a una distribución, entonces:

$$P\left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z\right] = F\left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z\right]^n = F(M_n \leq za_n + b_n)^n = F(za_n + b_n)^n$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $F(za_n + b_n)^n \rightarrow H(z)$ , donde  $H$  es una función de distribución no-degenerada.

Definición: Una función de distribución degenerada es la función de una variable aleatoria discreta que asigna toda la probabilidad, es decir probabilidad uno, a un solo número, un solo punto o de otra manera apenas a un resultado de un experimento al azar.

La distribución límite aproximada es la distribución Generalizada de Valores Extremos (GVE), dada por la siguiente expresión:

$$H(z) = \exp\left\{-\left[1 - k\left(\frac{z - \mu}{a}\right)\right]^{1/k}\right\}$$

$$\text{Valido sobre el rango de } \left\{z : \left[1 - k\left(\frac{z - \mu}{a}\right)\right] > 0\right\}$$

$$-\infty < \mu < \infty$$

$$a > 0$$

$$-\infty < k < \infty$$

donde  $\mu$  es el parámetro de localización,  $a$  es el parámetro de escala, y  $k$  es el parámetro de forma, que es el más importante porque determina el comportamiento de la cola de la distribución de los datos  $X_i$  (Smith, 1989).

Este argumento permite ajustar los extremos de una serie de observaciones independientes  $X_1, X_2, \dots$ . Los datos son divididos en bloques de longitud  $n$ , generando un máximo por bloque  $M_{n,1}, M_{n,2}, \dots, M_{n,m}$ ; por medio de la distribución GVE (Hernández, 2005).

**A2.** Límite de la función de distribución de Pareto cuando el parámetro de forma  $k \rightarrow 0$ , es igual a la distribución exponencial.

Demostración:

Sabemos que  $\lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{1/k} = e$  y podemos escribir que  $\lim_{k \rightarrow 0} (1+ak)^{1/k} = e^a$ . Por

lo tanto:  $F(y) = 1 - \left(1 - \frac{ky}{a}\right)^{1/k} \approx 1 - e^{-y/a}$  cuando  $k$  tiende a cero.

**A3.** Teorema que caracteriza el modelo asintótico de los excedentes de un umbral dado, como la distribución generalizada Pareto.

Teorema. (Smith, 1989) Sea  $X_1, X_2, \dots$  una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución  $F$  común, y sea  $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ .

Sea  $X$  un término  $X_i$  cualquiera de la secuencia, y supongamos que  $F$  satisface el Teorema de Valores Extremos por lo que, para  $n$  grande  $P(M_n \leq x) \approx H(x)$

$$\text{Donde } H(x) = \exp\left\{-\left[1 - k\left(\frac{x-u}{a}\right)\right]^{1/k}\right\}$$

para algún valor  $a, u > 0$  y  $k$  cualquiera. Entonces, para algún valor  $u$  suficientemente grande, la función de distribución de  $(X - u)$  condicionada sobre  $X > u$ , se aproxima a una distribución generalizada de Pareto DGP.

$$G_{k,a}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{ky}{a}\right)^{1/k} & \text{con } k \neq 0 \\ 1 - e^{-y/a} & \text{con } k = 0 \end{cases}$$

Donde  $y = X - u$ . Si  $k \leq 0$ ,  $0 < y < \infty$ ; Si  $k > 0$ ,  $0 < y < a/k$ .

Por lo tanto, para un umbral  $u$  lo suficientemente grande, existe un parámetro,  $a$ , que depende de  $u$  y un parámetro  $k$ ; para los cuales la Distribución Generalizada de Pareto es una muy buena aproximación de la distribución de los excedentes de  $u$ . La demostración se puede ver en Leadbetter et al. (1983).

El teorema implica, que si la secuencia de máximos por bloque tiene aproximadamente una distribución  $H$ , entonces los excedentes del umbral tienen aproximadamente una distribución que pertenece a la familia generalizada de Pareto (Pickands, 1975).

**A4.** Demostración de la linealidad de la función media de exceso sobre un umbral  $u$ :

Sea  $X$  una variable aleatoria positiva con función de distribución  $F$  y esperanza finita, con  $0 < u < x_F$

$$\begin{aligned} E(X - u | X > u) &= \int_u^{x_F} (x - u) d \frac{F(x)}{1 - F(u)} = \frac{1}{1 - F(u)} \left( (x - u)F(x) \Big|_u^{x_F} - \int_u^{x_F} F(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{1 - F(u)} \left( (x_F - u) - \int_u^{x_F} F(x) dx \right) = \frac{1}{1 - F(u)} \left( \int_u^{x_F} dx - \int_u^{x_F} F(x) dx \right) = \frac{1}{1 - F(u)} \int_u^{x_F} 1 - F(x) dx \end{aligned}$$

Por otro lado sea  $G_{k,a}$  la función de Distribución Generalizada de Pareto.

$$\begin{aligned} \int_u^{x_F} 1 - G_{k,a}(x) dx &= \int_u^{x_F} \left( 1 - \frac{kx}{a} \right)^{1/k} dx = \left[ - \frac{a \left( 1 - \frac{kx}{a} \right)^{1 + \frac{1}{k}}}{k \left( 1 + \frac{1}{k} \right)} \right]_u^{x_F} = 0 - \left[ - \frac{a \left( 1 - \frac{ku}{a} \right)^{1 + \frac{1}{k}}}{k \left( 1 + \frac{1}{k} \right)} \right] \\ &= \frac{a \left( 1 - \frac{ku}{a} \right)^{1 + \frac{1}{k}}}{k \left( 1 + \frac{1}{k} \right)} = \frac{a \left( 1 - \frac{ku}{a} \right)}{k + 1} (1 - G_{k,a}(u)) = \frac{a - ku}{k + 1} (1 - G_{k,a}(u)) \end{aligned}$$

$x_F = a/k$  para  $k > 0$ , y  $x_F = \infty$  si  $k \leq 0$  pero  $k > -1$

$$\frac{1}{(1 - G_{k,a}(u))} \int_u^{x_F} 1 - G_{k,a}(x) dx = \frac{a - ku}{k + 1}$$

Suponemos que  $F$  satisface el Teorema de Valores Extremos por lo que para  $n$  grande satisface  $F^n(X) \approx G_{k,a}(X)$

Por lo tanto

$$E(x - u/x > u) = \frac{1}{(1 - G_{k,a}(u))} \int_u^{x_F} 1 - G_{k,a}(x) dx = \frac{a - ku}{k + 1}$$

$$E(x - u/x > u) = \frac{a - ku}{k + 1}$$

(Díaz, A. 2003).