UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNAS APLICACIONES ELEMENTALES DE LA TEORÍA DE GAVILLAS SOBRE VARIEDADES SUAVES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRA EN CIENCIAS

P R E S E N T A

JOHANA LUVIANO FLORES

DIRECTOR DE TESIS: **DR. ERNESTO LUPERCIO LARA**

MÉXICO, D.F. MARZO, 2007

Agradecimientos

> *"El sendero de nuestra vida puede estar plegado de amargura e infortunio, pero si se actúa con sensatez e inteligencia (sabiduría), podemos ver la manera de encontrar algunas ventajas que no nos dejen renunciar a nuestros sueños."*

Doy las gracias a Dios por ayudarme a culminar uno de mis sueños.

Agradezco a CONACYT por el apoyo económico brindado durante el programa de maestría.

Doy gracias a mi madre por estar conmigo en los momentos más difíciles. Su amor y confianza me han sacado siempre adelante. Agradezco a mi hermana *Leydi* que me estimuló en muchas ocasiones y que sobre todo me ha apoyado incondicionalmente. Quiero agradecer el cariño que me han proporcionado mis hermanos, mi cuñado y con mucho amor a mi pequeño. Le doy las gracias a mi tía *Petra* por su cariño y ayuda. También agradezco a mi tío *Juan* por su afecto y apoyo.

Quiero agradecer a la *Dra. Larissa Sbitneva* por su cariño, ayuda y por compartir sus conocimientos conmigo.

Agradezco al *Dr. Ernesto Lupercio Lara* por haber aceptado dirigir mi tesis por la excepcional guia y confianza que siempre me ha brindado para entender la profundidad de los conceptos de esta teoría.

En memoria de mis abuelos y del *Dr. Lev Sabinin*.

Agradezco a los Doctores *Marcelo Aguilar*, *José Luis Cisneros*, *Carlos Prieto*, y *Javier Elizondo* por aceptar ser mis sinodales. Doy gracias al *Dr. Carlos Prieto* por sus valiosos comentarios sobre el manuscrito completo. Agradezco al *Dr. Marcelo Aguilar* por sus observaciones muy aceptadas sobre la manera en que se presenta el material y porque pese a sus múltiples ocupaciones hizo un gran esfuerzo por brindarme su apreciable ayuda.

Por último quiero expresar mi agradecimiento al *Ing. Clemente Bautista*, a mis profesores, a mis amigos que siempre han estado ahí y a mis demás familiares.

México, D.F. JOHANA LUVIANO FLORES
Marzo, 2007

Índice general

Introducción

La *teoría de gavillas* desempeña un profundo papel en análisis complejo, topología, geometría algebraica y otras ramas de las matemáticas.

Las gavillas fueron inventadas por Jean Leray como una herramienta para inferir propiedades globales a partir de algunas propiedades locales.

Uno puede trazar la evolución de esta área, comenzando con los trabajos de Henri Cartan en análisis complejo en 1940 (siguiendo trabajos de Kiyoshi Oka y de él mismo). Cartan con la ayuda de Jean-Pierre Serre, hizo decisivas contribuciones al desarrollo de la teoría de funciones holomorfas en varias variables complejas, usando la teoría de gavillas. Esta teoría fue también aplicada a la teoría de variedades complejas por Kunihiko Kodaira y Donald C. Spencer. Desde entonces, esta teoría ha sido un crucial aparato para el estudio de la geometría algebraica compleja. Fue Serre quien introdujo las gavillas en geometría algebraica. El trabajo de Serre fue generalizado por Alexander Grothendieck para establecer la teoría de esquemas, quien así mismo enriqueció la geometría algebraica, con el uso completo del álgebra homológica.

La *teoría de gavillas* es una importante herramienta para relacionar aspectos analíticos, topológicos y geométricos de una variedad algebraica. Un buen ejemplo es la sucesión exacta exponencial de gavillas, cuyos términos individuales $\mathbb{Z}(1)$, $\underline{\mathbb{C}}_X$ y $\underline{\mathbb{C}}_X^*$ reflejan la estructura topológica, analítica y geométrica de la variedad.

Describimos brevemente el contenido de este trabajo.

• En el Capítulo 1 se presentan algunos conceptos elementales de la teoría de gavillas que serán utilizados posteriormente. Estos son: pregavilla, gavilla, subgavilla, tallo, morfismo de gavillas, etc.. A menos que se indique lo contrario, todas las pregavillas (gavillas) estarán en la categoría de pregavillas (gavillas) de grupos abelianos sobre un espacio topológico X. Se observa que el kernel de un morfismo de gavillas es una gavilla. Sin embargo la imagen de un morfismo de gavillas es una pregavilla, pero no necesariamente es una gavilla. Para definir las gavillas de cohomologías es necesario que el kernel y la imagen de un morfismo de gavillas sean gavillas, para esto, se construye la gavilla asociada a una pregavilla, la cual verifica ciertas propiedades importantes. Definimos el funtor de secciones globales, el cual se demuestra que es un funtor exacto por la izquierda. También se introduce el concepto de gavilla inyectiva, se demuestra que para cualquier gavilla de grupos abelianos $\mathcal{A}$ sobre un espacio topológico X existe una gavilla inyectiva $\mathcal{I}$ y un monomorfismo $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{I}$.

• En el Capítulo 2 se estudia un complejo de gavillas $\mathcal{K}^\bullet$ a partir del cual se calculan las gavillas de cohomologías. Damos algunas definiciones y demostramos que dada una sucesión exacta corta de complejos de gavillas se obtiene una sucesión exacta larga de gavillas de cohomologías. Con la ayuda de una resolución inyectiva de una gavilla y el funtor de secciones globales definimos los grupos de cohomología de gavillas, los cuales son independientes de la resolución inyectiva. Se introducen algunos resultados para demostrar que: *Dada una sucesión exacta corta de gavillas de grupos abelianos se obtiene una sucesión exacta larga de grupos de cohomología de gavillas.*

• En el Capítulo 3 se desarrollan algunas herramientas para calcular los grupos de cohomología de gavillas. Se introducen las nociones de subcomplejo $\mathcal{L}^\bullet$ y filtración $F(\mathcal{K}^\bullet)$ de un complejo $\mathcal{K}^\bullet$ en una categoría abeliana $\mathcal{A}$. Se define un complejo doble $\mathcal{K}^{\bullet\bullet}$ y su complejo total $Tot(\mathcal{K}^{\bullet\bullet})$. Se dan algunos resultados importantes sobre la teoría de sucesiones espectrales. Se definie el n-ésimo grupo de hipercohomología $H^n(X, \mathcal{K}^\bullet)$ de un complejo de gavillas acotado inferiormente. Se demuestra que dados dos complejos de gavillas acotados inferiormente $\mathcal{L}^\bullet$ y $\mathcal{K}^\bullet$. Si $\phi : \mathcal{K}^\bullet \to \mathcal{L}^\bullet$ es un casi-isomorfismo entonces se induce un isomorfismo $H^n(X, \mathcal{K}^\bullet) \to H^n(X, \mathcal{L}^\bullet)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. En particular $H^n(X, \mathcal{A})$ se identifica con $H^n(X, \mathcal{K}^\bullet)$, donde $\mathcal{K}^\bullet$ es una resolución de $\mathcal{A}$.

• En el Capítulo 4 se define la cohomología de Čech $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ de grado p de la cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X con coeficientes en la pregavilla (gavilla) de grupos abelianos $\mathcal{A}$ sobre un espacio X. Se introduce la hipercohomología de Čech $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{K}^\bullet)$ para un complejo de gavillas acotado inferiormente $\mathcal{K}^\bullet$. Se demuestra que para gavillas localmente acíclicas, la cohomología de Čech $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ es isomorfa a la cohomología de gavillas $\check{H}^p(X, \mathcal{A})$, usando la teoría de sucesiones espectrales. Debido a que dada una sucesión exacta corta de gavillas no necesariamente se induce una sucesión exacta larga de grupos de cohomología de Čech y la definición depende de la cubierta $\mathcal{U}$, se introducen algunos resultados para solucionar estos problemas. Se considera el conjunto de cubiertas abiertas $N = \{\mathcal{U} = (U_x)_{x\in X} \mid x \in U_x$ para cada $x \in X\}$ de X, definimos un orden en N como sigue:

$$N \ni \mathcal{V} \geq \mathcal{U} \text{ si y sólo si } V_x \subseteq U_x \text{ para cada } x \in X.$$

Es fácil verificar que N con este orden es un conjunto dirigido. Se definen los grupos de cohomología de Čech $\check{H}^p(X, \mathcal{A}) = \varinjlim_{\mathcal{U}\in N} \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{A})$. Se demuestran dos resultados importantes, el primero es que una sucesión exacta corta de pregavillas induce una sucesión exacta larga de grupos de cohomología de Čech y el segundo es que para un espacio paracompacto X la hipercohomología de Čech es isomorfa a la hipercohomología de gavillas.

• En el Capítulo 5 se recuerda la noción de variedad suave modelada sobre un espacio vectorial topológico (posiblemente de dimensión infinita). Para M una variedad suave modelada en un espacio vectorial topológico, se define el complejo de De Rham $\underline{A}^\bullet_M$ de gavillas. Los grupos de cohomología de De Rham $H^p_{DR}(M)$ son los grupos de cohomología del complejo de formas $\underline{A}^\bullet_M(M) = A^\bullet(M)$ sobre M. Se introducen los conceptos de gavilla suave, gavilla fina y algunas implicaciones de estas definiciones. Se define el espacio ILH (el cual es el límite inverso de espacios de Hilbert separables H_n). Se demuestra que para M una variedad paracompacta, modelada en un espacio ILH, la cohomología de Čech $\check{H}^p(M, \mathbb{R})$ es isomorfa a la cohomología de De Rham $H^p_{DR}(M)$. El resultado importante de este Capítulo es el siguiente:

(*Weil* [**AW1**]) *Sea M una variedad suave en la cual las gavillas $\underline{A}^p_M$ son suaves (por ejemplo, sea M una variedad paracompacta suave modelada en un espacio ILH que satisface (5.4)). Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de M, y sea $(f_i)_{i\in I}$ una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$. Entonces para $\underline{c}$ un cociclo de Čech de grado p con coeficientes en la gavilla constante $\mathbb{R}_M$, sea ω la $p-$forma cerrada en M, tal que*

$$(\omega)_{/U_i} = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \sum_{i_1,\dots,i_p} c_{i_1,\dots,i_p,i} df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_p} \tag{1}$$

Entonces la clase de cohomología de Čech $[\underline{c}] \in \check{H}^p(M, \mathbb{R}_M)$ y la clase de cohomología de De Rham $[\omega] \in H^p_{DR}(M)$ se corresponden mutuamente bajo

el isomorfismo:
$H^p(M, \mathbb{R}_M) \xrightarrow{\sim} \check{H}^p_{DR}(M)$.

• En el Capítulo 6 se describen los haces de líneas sobre una variedad, salvo isomorfismos, en el caso suave y holomorfo. El propósito principal es la clasificación de las clases de isomorfismos de haces de líneas.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Gavillas

Comenzaremos definiendo una pregavilla $\mathcal{F}$ de conjuntos sobre un espacio topológico X, y daremos algunos ejemplos básicos, para posteriormente introducir la definición de una gavilla. En este trabajo consideramos pregavillas (gavillas) de grupos abelianos sobre un espacio topológico X.
Nota. Usaremos la palabra "espacio" como sinónimo de "espacio topológico".

Definición 1.1.1. *Una pregavilla $\mathcal{F}$ de conjuntos sobre un espacio X es un par $(\mathcal{F}, \rho)$, donde $\mathcal{F}$ es una aplicación que a cada subconjunto abierto U de X le asigna un conjunto $\mathcal{F}(U)$ y ρ es una aplicación que a cada par de subconjuntos abiertos $V \subseteq U$ de X le asigna una aplicación $\rho^{\mathcal{F}}_{V,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ (que llamaremos aplicación restricción) de modo que se cumplan las siguientes condiciones:*

(1) *$\mathcal{F}(\emptyset)$ es un conjunto con un elemento, que denotamos $\{*\}$,*

(2) *$\rho^{\mathcal{F}}_{U,U}$ es la aplicación identidad en $\mathcal{F}(U)$,*

(3) *(Transitividad). Si $W \subseteq V \subseteq U$ son subconjuntos abiertos de X, entonces*

$$\rho^{\mathcal{F}}_{W,U} = \rho^{\mathcal{F}}_{W,V} \circ \rho^{\mathcal{F}}_{V,U}. \tag{1.1}$$

Dicho de otro modo: Sea τ_X la categoría que tiene por objetos los subconjuntos abiertos de X y por morfismos las inclusiones naturales entre objetos (cuando existan). Sea C_{Conj} la categoría cuyos objetos son los conjuntos y cuyos morfismos son las funciones de conjuntos. Una pregavilla $\mathcal{F}$ de conjuntos sobre X es un funtor contravariante de τ_X a C_{Conj}, tal que manda al conjunto $\emptyset$ en $\{*\}$.

Cuando todos los $\mathcal{F}(U)$ son grupos (anillos, $\mathbb{C}$-álgebras, etc.) y los $\rho_{V,U}$ son homomorfismos de grupos (resp. anillos, $\mathbb{C}$-álgebras, etc.), decimos que $\mathcal{F}$ es una pregavilla de grupos (resp. anillos, $\mathbb{C}$-álgebras, etc.).
Nota. En una pregavilla de grupos denotamos al conjunto $\{*\}$ por $\{0\}$.

Ejemplo 1. Estos son algunos ejemplos de pregavillas sobre el espacio X.

$\diamond$) Consideremos un espacio Y. Para cada subconjunto abierto U de X, $\mathcal{F}(U)$ es el conjunto de aplicaciones continuas de U a Y. Para $V \subseteq U$, la aplicación restricción $\rho^{\mathcal{F}}_{V,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ es la restricción de las aplicaciones continuas de U a Y al subconjunto abierto V, esto es, $\rho^{\mathcal{F}}_{V,U}(f) = f|_V$ para $f : U \to Y$. Podemos ver que $\mathcal{F}$ es una pregavilla de conjuntos sobre el espacio X.

$\diamond\diamond$) Sea S un grupo abeliano. Para cada subconjunto abierto U de X, se define $\mathcal{S}$ como sigue:

$$\mathcal{S}(U) = \begin{cases} S & \text{si} \quad U \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si} \quad U = \emptyset. \end{cases}$$

Sean U y V subconjuntos abiertos de X con $V \subset U$, la aplicación restricción $\rho^{\mathcal{S}}_{V,U}$ es la identidad en S, salvo si $V = \emptyset$. Así, $\mathcal{S}$ es una pregavilla llamada la pregavilla constante.

$\diamond\diamond\diamond$) Tomemos $X = \mathbb{C}$. Para cada subconjunto abierto U de X

$$\mathcal{A}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ es analítica}\}.$$

Para subconjuntos abiertos $V \subseteq U$ de X, la aplicación restricción $\rho^{\mathcal{A}}_{V,U} : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$ es la restricción de funciones al subconjunto abierto V. Entonces, $\mathcal{A}$ es una pregavilla de conjuntos sobre el espacio X.

Sea X un espacio singular. Una pregavilla $\mathcal{F}$ de conjuntos sobre X es simplemente el conjunto $\mathcal{F}(X)$. Similarmente una pregavilla de grupos sobre X es un solo grupo.

Sea $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre un espacio X, sean U y V subconjuntos abiertos de X. El primer propósito de esta Sección es poder pegar los elementos de $\mathcal{F}(U)$ y $\mathcal{F}(V)$, y obtener un único elemento de $\mathcal{F}(U \cup V)$. Las pregavillas que cumplen esta condición son llamadas gavillas, la definición formal es la siguiente.

Definición 1.1.2. *Sea $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre un espacio X. Se dice que $\mathcal{F}$ es una gavilla si para cada subconjunto abierto V de X y para cada cubierta abierta $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de V se cumplen las dos condiciones siguientes:*

(1) *si s y $s' \in \mathcal{F}(V)$ cumplen que $\rho^{\mathcal{F}}_{U_i,V}(s) = \rho^{\mathcal{F}}_{U_i,V}(s')$ para cada $i \in I$, entonces $s = s'$,*

(2) *para cada familia $(s_i)_{i \in I}$, donde $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tal que*

$$\rho^{\mathcal{F}}_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) = \rho^{\mathcal{F}}_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j) \text{ para cada } i, j \in I,$$

existe un $s \in \mathcal{F}(V)$ tal que $\rho^{\mathcal{F}}_{U_i,V}(s) = s_i$ para todo $i \in I$.

El elemento s cuya existencia se afirma en la condición (2) es único por la condición (1). Además, si $\mathcal{F}$ es una pregavilla de grupos abelianos, podemos simplificar (1) poniendo $s' = 0$. La condición (2) dice que el elemento s de $\mathcal{F}$ sobre V es obtenido por pegar los elementos s_i de $\mathcal{F}$ sobre U_i. La condición $\rho^{\mathcal{F}}_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) = \rho^{\mathcal{F}}_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j)$ es llamada la condición de pegado. Para una gavilla $\mathcal{F}$ usaremos la notación $\Gamma(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$, por lo que a los elementos de $\mathcal{F}(U)$ se les llama secciones de $\mathcal{F}$ sobre U.

Dada una pregavilla $\mathcal{F}$ sobre X y un subconjunto abierto U de X, se obtiene una pregavilla $\mathcal{F}|_U$ sobre U, donde $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(U \cap V)$ para cada subconjunto abierto V de X. Llamamos a $\mathcal{F}|_U$ la *pregavilla restricción* al subconjunto abierto U. Si $\mathcal{F}$ es una gavilla, entonces $\mathcal{F}|_U$ es una gavilla. Por conveniencia usamos la notación $U_{ij} = U_i \cap U_j$, $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$, y así sucesivamente.

Ejemplo 2. Consideremos la pregavilla $\mathcal{F}$ de conjuntos sobre el espacio X del Ejemplo 1. Vamos a demostrar que la pregavilla $\mathcal{F}$ es una gavilla. Para ver la condición (2), sean V subconjunto abierto de X y $(U_i)_{i \in I}$ cubierta abierta de V. Consideremos la colección $(f_i)_{i \in I}$, donde cada $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ es una aplicación continua de U_i a Y. La condición $\rho^{\mathcal{F}}_{U_{ij},U_i}(f_i) = \rho^{\mathcal{F}}_{U_{ij},U_j}(f_j)$ implica que f_i y f_j tienen la misma restricción a U_{ij} para cada $i, j \in I$.

Entonces existe una única aplicación $f : V \to Y$ tal que $\rho^{\mathcal{F}}_{U_i,V}(f) = f_i$ para cualquier $i \in I$. Como cada f_i es continua y $V = \bigcup_{i\in I} U_i$, se sigue que f es continua. La condición (1) se verifica inmediatamente. Por lo tanto la pregavilla $\mathcal{F}$ sobre el espacio X es una gavilla.

Ejemplo 3. Sean X y E dos espacios. Sea $\pi : E \to X$ una aplicación suprayectiva continua. Para cada U subconjunto abierto de X, se define

$$\mathcal{G}(U) = \{s : U \to E \mid \ s \text{ es una aplicación continua y } \pi \circ s = \mathrm{Id}_U\}.$$

$\mathcal{G}$ es una pregavilla, la cual es también una gavilla.

Por otra parte si consideramos la pregavilla constante $\mathcal{S}$ definida en el Ejemplo 1 resulta que no es una gavilla si $S \neq 0$ y X es disconexo. Éste es un ejemplo de una pregavilla que no es una gavilla.

Si Y es un grupo, entonces la gavilla $\mathcal{F}$ del Ejemplo 2 es una gavilla de grupos. Algunas de las gavillas más importantes son de este tipo; los casos $Y = \mathbb{C}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}^*$ son especialmente significantes. Si X es una variedad suave, se tiene la gavilla $\underline{\mathbb{C}}_X$ de funciones suaves de valores complejos (en subconjuntos abiertos de X). Si X es una variedad compleja, se tiene la gavilla $\mathcal{O}_X$ de funciones holomorfas.

Dadas dos pregavillas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ de conjuntos (o grupos) sobre un espacio X, tenemos una noción natural de morfismo de pregavillas $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Tal morfismo es una aplicación que a cada subconjunto abierto U de X, le asigna una aplicación de conjuntos (o homomorfismo de grupos) $\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ tal que si $V \subseteq U$, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{V,U}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{V,U}"'] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\phi_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

Sean $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ dos morfismos de pregavillas de conjuntos (o grupos), su composición se define como: $(g \circ f)_U = g_U \circ f_U$ para cada subconjunto abierto U de X. Además, esta composición de morfismos de pregavillas de conjuntos (o grupos) es asociativa. El resultado es que tenemos definida la categoría de pregavillas de conjuntos. De manera similar se define la categoría de pregavillas de grupos, anillos, etc.. Se define un morfismo de gavillas exactamente de la misma forma que un morfismo de pregavillas. La categoría resultante de gavillas es una subcategoría plena de la categoría de pregavillas.

Nota. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son gavillas de grupos sobre un espacio X, denotamos simplemente por $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ el conjunto de morfismos de gavillas de grupos de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ es una gavilla de grupos abelianos, $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un grupo abeliano. Denotemos por $\mathbf{AB}(X)$ la categoría de gavillas de grupos abelianos sobre un espacio X.

Ejemplo 4. Sea $\mathcal{F}$ una gavilla sobre un espacio X. Consideremos un subconjunto abierto U de X y la gavilla restricción $\mathcal{F}|_U$. Para cualquier subconjunto abierto V de X, hacemos $\mathcal{G}(V) = \mathcal{F}|_U(V)$. Si definimos $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ por la aplicación restricción $\phi_V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{G}(V)$, entonces la compatibilidad de las aplicaciones restricción muestra que ϕ es un morfismo de gavillas, como se ve en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\phi_V"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{W,V}"] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{U\cap W, U\cap V}"] \\
\mathcal{F}(W) \arrow[r, "\phi_W"] & \mathcal{G}(W)
\end{tikzcd}$$

donde W es un subconjunto abierto de V.

Sea $\mathcal{G}$ una pregavilla sobre X, se dice que $\mathcal{F}$ es una subpregavilla de $\mathcal{G}$, si para cada subconjunto abierto U de X, $\mathcal{F}(U)$ es un subconjunto de $\mathcal{G}(U)$ y las aplicaciones restricción de $\mathcal{F}$ son inducidas por aquéllas de $\mathcal{G}$. Si, además, $\mathcal{G}$ es una gavilla, entonces $\mathcal{F}$ cumple la condición (1) de la Definición 1.1.2. Por otra parte, casi se cumple la condición (2) para $\mathcal{F}$, si $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ y $U = \bigcup U_i$, entonces hay un elemento $s \in \mathcal{G}(U)$ tal que $\rho^{\mathcal{G}}_{U_i,U}(s) = s_i$. Si siempre se tiene que $s \in \mathcal{F}(U)$, entonces $\mathcal{F}$ es una gavilla, y decimos que $\mathcal{F}$ es una subgavilla de $\mathcal{G}$.

Observación. No cada subpregavilla de una gavilla es una subgavilla. Se muestra esto más adelante.

Si X es una variedad suave, es claro que la gavilla $\underline{\mathbb{C}}_X$ de funciones suaves de valores complejos es una subgavilla de la gavilla $\mathbb{C}_X$ de funciones continuas de valores complejos.

1.2. Gavilla asociada

En esta Sección daremos algunas definiciones y resultados básicos, los cuales nos servirán para introducir el concepto de gavilla asociada. Para finalizar la Sección introduciremos la sucesión exacta de gavillas, y algunos resultados importantes. Definiremos el funtor de secciones globales, el cual se demuestra que es un funtor exacto por la izquierda, que utilizaremos para calcular grupos de cohomología de gavillas en el próximo Capítulo.

Como las gavillas nos permiten inferir propiedades globales a partir de algunas propiedades locales es importante tener un procedimiento que convierta una pregavilla en una gavilla. Antes de esto introduciremos la noción de *tallo* $\mathcal{F}_x$ de una pregavilla $\mathcal{F}$ sobre X en un punto x. Tal definición nos permite relacionar en una gavilla las propiedades globales y locales de los espacios en los que están definidas. Intuitivamente, un elemento de $\mathcal{F}_x$ es un elemento de $\mathcal{F}$ definido sobre una vecindad de x. Dos tales elementos están identificados si ellos coinciden en una vecindad (posiblemente pequeña).

Definición 1.2.1. *Sea $\mathcal{F}$ una pregavilla de conjuntos sobre un espacio X, y sea $x \in X$. El tallo $\mathcal{F}_x$ de $\mathcal{F}$ en x es el cociente del conjunto* $\coprod_{U \text{abierto},\, U \ni x} \mathcal{F}(U)$ *por la siguiente relación de equivalencia:*
$\mathcal{F}(U) \ni s \sim s' \in \mathcal{F}(V)$ si y sólo si existe un subconjunto abierto $W \subseteq U \cap V$ que contiene a x tal que $\rho^{\mathcal{F}}_{W,U}(s) = \rho^{\mathcal{F}}_{W,V}(s')$.

Los elementos de $\mathcal{F}_x$ son llamados *gérmenes* de elementos de $\mathcal{F}$ en x. Esto es familiar en análisis complejo: para una variedad compleja X, la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathcal{O}_{X,x}$ de funciones holomorfas de gérmenes en x es un anillo. Para $x \in U$ y $s \in \mathcal{F}(U)$, denotamos $s_x \in \mathcal{F}_x$ el elemento correspondiente al tallo en x. Este es llamado el germen de s en x.

Podemos ver que la pregavilla $\mathcal{A}$ del Ejemplo 1 es una gavilla. Los elementos de $\mathcal{A}_x$ constan de funciones analíticas en una vecindad de x.

Se puede definir $\mathcal{F}_x$ usando la noción de límite directo. Sea $J = \{V_i(x)\}$ el conjunto de vecindades abiertas de x. El conjunto $J = \{V_i(x)\}$ tiene un orden dado por; $V_i(x) \leq V_j(x)$ si $V_j(x) \subseteq V_i(x)$. Este conjunto ordenado es dirigido, es decir, para cualquiera $V_i(x)$, $V_j(x)$ en el conjunto existe un elemento $V_k(x)$ tal que $V_i(x) \leq V_k(x)$ y $V_j(x) \leq V_k(x)$. Dado $V_i(x) \leq V_j(x)$, tenemos la aplicación restricción $\rho_{V_j(x),V_i(x)} : \mathcal{F}(V_i(x)) \to \mathcal{F}(V_j(x))$ con la condición (3) de la Definición 1.1.1. Entonces el tallo $\mathcal{F}_x$ es el límite directo

$$\mathcal{F}_x = \lim_{\overrightarrow{V_i(x)\in J}} \mathcal{F}(V_i(x)). \tag{1.2}$$

En efecto la construcción en la Definición 1.2.1 es igual a la descripción estándar de este límite directo. El tallo de una pregavilla de grupos (grupos abelianos) es un grupo (grupo abeliano).

El siguiente teorema nos da un ejemplo elemental de cómo un hecho global se puede probar localmente.

Teorema 1.2.2. *Sea $\mathcal{F}$ una gavilla sobre un espacio X, sea U un subconjunto abierto de X y sean $f, g \in \mathcal{F}(U)$ tales que $f_x = g_x$ para todo $x \in U$. Entonces $f = g$.*

Demostración. Por hipótesis se tiene que para cada punto $x \in U$ existe una vecindad V_x de x en U, donde $\rho^{\mathcal{F}}_{V_x,U}(f) = \rho^{\mathcal{F}}_{V_x,U}(g)$. Como $U = \bigcup_{x\in U} V_x$, entonces $f = g$ por la condición (1) de la Definición 1.1.2. □

Observación. Éste teorema, muestra que el concepto de gavillas es en cierto modo local.

Un morfismo $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de pregavillas de conjuntos (resp. grupos) sobre X induce para cada $x \in X$ un morfismo de conjuntos (resp. un homomorfismo de grupos), $\phi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ sobre el tallo en x, el cual está dado por $\phi_x(s_x) = \phi(s)_x$. Para $x \in U$, hay una aplicación restricción $\rho^{\mathcal{F}}_{x,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$.

Sea $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de gavillas de grupos abelianos sobre un espacio X. Vamos a definir las pregavillas siguientes:

$$\begin{aligned}\ker(\phi) &: U \mapsto \ker(\phi_U),\\ \operatorname{coker}(\phi) &: U \mapsto \operatorname{coker}(\phi_U),\\ \operatorname{im}(\phi) &: U \mapsto \operatorname{im}(\phi_U),\\ \operatorname{coim}(\phi) &: U \mapsto \operatorname{coim}(\phi_U).\end{aligned}$$

Nota. Como para cada par de subconjuntos abiertos $V \subseteq U$ de X, se tiene que $\rho^{\mathcal{F}}_{V,U}(\ker(\phi_U)) \subseteq \ker(\phi_V)$. Se define la aplicación restricción $\rho^{\ker}_{V,U}$ como la restricción de $\rho^{\mathcal{F}}_{V,U}$ a $\ker(\phi_U)$, esto es, $\rho^{\ker(\phi)}_{V,U} = \rho^{\mathcal{F}}_{V,U}|_{\ker(\phi_U)}$. De una forma similar, las aplicaciones restricción de las otras pregavillas se definen a partir de restringir las aplicaciones restricción de $\mathcal{F}$ o $\mathcal{G}$ a los grupos $(\operatorname{coker}(\phi_U)$, $\operatorname{im}(\phi_U)$, o $\operatorname{coim}(\phi_U)$ para cada $U \subseteq X$) respectivamente.

Vamos a verificar que la pregavilla $\ker(\phi)$ de grupos abelianos es una gavilla. Tomemos V subconjunto abierto de X, $(U_i)_{i\in I}$ cubierta abierta de V. Sea $s \in \ker(\phi_V)$ tal que $\rho^{\ker(\phi)}_{U_i,V}(s) = 0$ para cada $i \in I$, puesto que $\ker(\phi_V) \subseteq \mathcal{F}(V)$ y $\mathcal{F}$ es una gavilla, se tiene que $s = 0$ para cada $i \in I$, por lo tanto la pregavilla $\ker(\phi)$ cumple la condición (1) de la Definición 1.1.2. Sea $\{s_i\}_{i\in I}$ una familia de secciones de $\ker(\phi)$ sobre U_i. Supóngase que $\rho^{\ker(\phi)}_{U_{ij},U_i}(s_i) = \rho^{\ker(\phi)}_{U_{ij},U_j}(s_j)$ para cada $i, j \in I$. Como $\mathcal{F}$ es una gavilla existe $s \in \mathcal{F}(V)$ tal que $\rho^{\mathcal{F}}_{U_i,V}(s) = s_i$ para todo $i \in I$. Sea $t = \phi_V(s)$, entonces

$$\rho^{\mathcal{G}}_{U_i,V}(t) = \rho^{\mathcal{G}}_{U_i,V}\phi_V(s) = \phi_{U_i}\rho^{\mathcal{F}}_{U_i,V}(s) = \phi_{U_i}(s_i) = 0 \text{ para cada } i \in I.$$

Como $\mathcal{G}$ es una gavilla, tenemos que $t = 0$. Entonces $s \in \ker(\phi_V)$. Por lo tanto la pregavilla $\ker(\phi)$ es una gavilla, la denotaremos por $\operatorname{Ker}(\phi)$.

La pregavilla $\operatorname{im}(\phi)$ no es siempre una gavilla. Un contraejemplo es cuando consideramos $X = \mathbb{C}\,\mathrm{P}^1$, $\mathcal{F} = \underline{\mathcal{O}}_X$, $\mathcal{G} = \underline{\mathcal{O}}^*_X$ (la gavilla de funciones holomorfas no cero) y ϕ la aplicación exponencial: $\phi_U(f) = \exp(f)$. Aquí, las únicas funciones holomorfas sobre $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^1$ son constantes, así que $\operatorname{im}(\phi)$ es la pregavilla cero. Sin embargo $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^1$ puede ser cubierto por dos cartas afines U y V, con coordenadas z en U y w en V, donde $z = 1/w$ en $U \cap V$ se pega a una función meromorfa sobre X. Por lo tanto el pegado de z y $1/w$ no está en $\mathcal{G}$.

Observación. Éste es un ejemplo de una subpregavilla de una gavilla que no es una gavilla.

Uno de los objetivos en esta Sección es asignarle a una pregavilla una gavilla. Para definir las gavillas de cohomologías es necesario que el kernel y la imagen de un morfismo de gavillas sea una gavillas. Pero la imagen de un morfismo de gavillas no necesariamente es una gavilla, esta es una de las razones por las que se construye la gavilla asociada a una pregavilla.

Sea $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre un espacio X. Una aplicación

$$\gamma : U \to \coprod_{x\in U} \mathcal{F}_x$$

se dice que es una sección continua si:

1). Para cada $x \in U$, $\gamma(x) \in \mathcal{F}_x$ (para algún $s \in \mathcal{F}(U)$, donde U es una vecindad de x se tiene que $\gamma(x) = s_x$).

2). Para cada $x \in U$ existe una vecindad V de x en U y una sección s en $\mathcal{F}(V)$, tal que $\rho^{\mathcal{F}}_{y,V}(s) = s_y = \gamma(y)$ para cada $y \in V$.

Proposición y Definición 1.2.3. *Para cualquier subconjunto abierto U de X, sea $\tilde{\mathcal{F}}(U) = \{\gamma : U \to \coprod_{x\in U} \mathcal{F}_x \mid \ \gamma$ es una sección continua$\}$. Para $V \subseteq U$, sea $\rho^{\tilde{\mathcal{F}}}_{V,U} : \tilde{\mathcal{F}}(U) \to \tilde{\mathcal{F}}(V)$ la aplicación restricción $\rho^{\tilde{\mathcal{F}}}_{V,U}(\gamma) = \gamma|_V$. Entonces la pregavilla $\tilde{\mathcal{F}}$ es una gavilla, llamada la gavilla asociada a $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ es una pregavilla de grupos, entonces la gavilla asociada $\tilde{\mathcal{F}}$ es una gavilla de grupos.*

Demostración. Tomemos V subconjunto abierto de X y $(U_i)_{i\in I}$ cubierta abierta de V. Sea $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ una familia de secciones continuas, donde cada $\gamma_i \in \tilde{\mathcal{F}}(U_i)$. Se construye una aplicación

$$\gamma : V \to \coprod_{x\in V} \mathcal{F}_x,$$

como sigue.

Si $x \in V$ entonces $x \in U_i$ para algún $i \in I$, se define $\gamma(x) = \gamma_i(x)$. Si además, $x \in U_j$, donde $j \neq i$ se tiene que

$$\rho^{\tilde{\mathcal{F}}}_{U_{ij},U_i}(\gamma_i) = \gamma_i\ |_{U_{ij}} \quad \text{y} \quad \rho^{\tilde{\mathcal{F}}}_{U_{ij},U_i}(\gamma_j) = \gamma_j|_{U_{ij}}.$$

Por la propiedad $2)$ de una sección continua existe W subconjunto abierto de X, con $x \in W \subseteq U_{ij}$ y $s \in \mathcal{F}(W)$ tal que $\rho^{\mathcal{F}}_{y,W}(s) = s_y = \gamma_i(y) = \gamma_j(y)$ para cada $y \in W$. Por lo tanto γ esta bien definida. Falta probar que γ tiene la propiedad $2)$. Para $x \in V$ ($x \in U_i$ para algún $i \in I$) existe una vecindad $\tilde{W}$ de x en U_i por lo tanto en V y $s \in \mathcal{F}(\tilde{W})$ tal que $\rho^{\mathcal{F}}_{y,\tilde{W}}(s) = s_y = \gamma_i(y) = \gamma(y)$ para cada $y \in \tilde{W}$. Entonces γ es una sección continua. Por construcción $\rho^{\tilde{\mathcal{F}}}_{U_i,U}(\gamma) = \gamma_i$ para cada $i \in I$. Supongamos que existe γ' tal que $\rho^{\tilde{\mathcal{F}}}_{U_i,U}(\gamma') = \gamma_i$ para cada $i \in I$. Sea $x \in V$ tal que $\gamma'(x) \neq \gamma(x)$.m Como $x \in V$, $x \in U_i$ para algún $i \in I$, se tiene que

$$\gamma_i(x) = \gamma'(x) \ \text{ y } \ \gamma(x) = \gamma_i(x),$$

entonces $\gamma'(x) = \gamma(x)$ contradicción. Por lo tanto γ es única. $\square$

Observación. Para cualquier pregavilla $\mathcal{F}$, hay un morfismo canónico de pregavillas $\phi : \mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ a la gavilla asociada; para U un subconjunto abierto y $s \in \mathcal{F}(U)$, $\phi(s)$ es la aplicación continua $\phi(s)(x) = \gamma(x) = s_x = \rho^{\mathcal{F}}_{x,U}(s)$.

Proposición 1.2.4. (1) *Para cualquier pregavilla $\mathcal{F}$ en X, el morfismo $\phi : \mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}}$ induce un isomorfismo de tallos $\phi_x : \mathcal{F}_x \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{F}}_x$.*

(2) *Si $\mathcal{F}$ es una gavilla en X, el morfismo de pregavillas $\phi : \mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}}$ es un isomorfismo.*

(3) *Para cualquier pregavilla $\mathcal{F}$ de grupos y cualquier gavilla $\mathcal{G}$ de grupos en X, hay una biyección canónica* $\mathrm{Hom}_X(\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. *Un resultado similar se tiene para pregavillas y gavillas de conjuntos.*

Demostración. La aplicación $\phi_x : \mathcal{F}_x \to \tilde{\mathcal{F}}_x$ es un morfismo, basta mostrar que ϕ_x es biyectivo. Tomemos una vecindad U de x y $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\phi_x(s_x) = \phi(s)_x = 0$, como $\tilde{\mathcal{F}}$ es una gavilla existe una vecindad $V \subseteq U$ de x con $\rho^{\tilde{\mathcal{F}}}_{V,U}(\phi(s)) = 0$. Entonces $\phi(s)|_V = 0$, en particular $\phi(s)(x) = s_x = 0$. Por lo tanto ϕ_x es inyectivo. Ahora, sea $\nu \in \tilde{\mathcal{F}}_x$, entonces $\nu = \gamma_x$ para alguna vecindad abierta U de x y algún $\gamma \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$, por la definición de $\tilde{\mathcal{F}}$ existe una vecindad W de x en U y un $s \in \mathcal{F}(W)$ con $\gamma(x) = s_x$ para todo $x \in W$. En otras palabras $\phi_W(s) = \gamma$. Así, $\phi_x(s_x) = \gamma_x = \nu$. Por lo tanto ϕ_x es suprayectivo. Esto demuestra (1).

Sean $\mathcal{F}$ una gavilla sobre X, U subconjunto abierto en X y la aplicación canónica $\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \tilde{\mathcal{F}}(U)$. Demostremos que ϕ_U es una biyección. Primero consideremos s, s' en $\mathcal{F}(U)$ las cuales tienen la misma imagen en $\tilde{\mathcal{F}}(U)$. Esto significa que $\phi(s)(x) = s_x = s'_x = \phi(s')(x)$ (como elementos del tallo $\mathcal{F}_x$) para cada $x \in U$, por el Teorema 1.2.2 se tiene que $s = s'$. Ahora sea γ una sección continua de $\tilde{\mathcal{F}}$ sobre U. Para cada $x \in U$ existe una vecindad abierta V_x de x en U y un elemento $s'(V_x)$ de $\mathcal{F}(V_x)$ tal que $\rho^{\mathcal{F}}_{x,V_x}(s(V_x)) = s_x = \gamma(x)$ para cada $x \in V_x$. Para $x, y \in U$, la restricción de $s(V_x)$ y de $s(V_y)$ a $V_x \cap V_y$ son iguales, por la primera parte de la demostración de (2), ya que tienen la misma imagen en $\mathcal{F}_z$ para cualquier $z \in V_x \cap V_y$. Como $\mathcal{F}$ es una gavilla existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho^{\mathcal{F}}_{V_x,U}(s) = s(V_x)$ para cualquier $x \in U$. Esto en particular implica que $\rho^{\mathcal{F}}_{x,U}(s) = \rho^{\mathcal{F}}_{x,V_x}(s(V_x)) = s_x$ para cualquier x. Esto prueba (2).

Sea $\mathcal{F}$ una pregavilla de grupos, y sea $\phi_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}}$ el morfismo canónico de pregavillas de grupos. Entonces, para una gavilla $\mathcal{G}$ de grupos, hay una aplicación $\alpha : \mathrm{Hom}_X(\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ definida por $\alpha(g) = g \circ \phi$, donde $\phi = \phi_{\mathcal{F}}$. Mostremos que α es inyectiva. Sean $f, f' : \tilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{G}$ dos morfismos de gavillas tales que $\alpha(f) = f \circ \phi = f' \circ \phi = \alpha(f')$. Para U un subconjunto abierto de X y $\gamma \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$, tenemos que mostrar que $f(\gamma) = f'(\gamma)$. Debido a que $\mathcal{G}$ es una gavilla, es suficiente mostrar que $f(\gamma)(x) = f'(\gamma)(x)$ para cada $x \in U$

como elementos del tallo $\mathcal{G}_x$ (sera suficiente debido a (2)). Existe alguna vecindad abierta V de x y una sección s' de $\mathcal{F}$ sobre V tal que $\phi(s')(x) = \gamma(x)$ en $\mathcal{F}_x$. Por lo tanto $f(\gamma(x)) = f \circ \phi(s')(x) = f' \circ \phi(s')(x) = f'(\gamma(x))$ en el tallo $\mathcal{G}_x$. De aquí $f(\gamma)$ y $f'(\gamma)$ tienen la misma imagen en cada tallo; ya que $\mathcal{G}$ es una gavilla, ellas deben coincidir.

Falta demostrar que α es suprayectiva. Se puede ver que cada morfismo de pregavillas de grupos $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ se factoriza a través de un morfismo $\tilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{G}$, ya que f induce un morfismo de gavillas asociadas $\tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{G}}$ que podemos componer con la inversa del isomorfismo $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{G}}$. Esto da el morfismo requerido de gavillas de grupos. □

Sea $\mathcal{S}$ la pregavilla constante definida en el Ejemplo 1, su gavilla asociada se denota por $\mathcal{S}_X$ (en vez de $\tilde{\mathcal{S}}$). Tal gavilla $\mathcal{S}_X$ es llamada una *gavilla constante*. Cada tallo $\mathcal{S}_{X,x}$ de $\mathcal{S}_X$ es identificado con S. Para un subconjunto abierto U de X, una sección $\gamma \in \mathcal{S}_X(U)$ es continua si y sólo si ésta es *localmente constante*. Por lo tanto $\mathcal{S}_X(U)$ es el conjunto de secciones localmente constante $U \to S$.

Usamos la noción de la gavilla asociada para definir la *imagen de un morfismo de gavillas* $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Consideremos la pregavilla $\mathrm{im}(\phi)$, su gavilla asociada es denotada por $\mathrm{Im}(\phi)$. Una sección s de $\mathcal{G}$ sobre U pertenece a $\mathrm{Im}(\phi)$ si y sólo si para cada $x \in U$, el elemento s_x de $\mathcal{G}_x$ pertenece a la imagen de ϕ_x.

En este trabajo estamos interesados en las gavillas de grupos abelianos. Para $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de gavillas de grupos abelianos, la gavilla $\mathrm{Ker}(\phi)$ es una subgavilla de $\mathcal{F}$ y la gavilla $\mathrm{Im}(\phi)$ es una subgavilla de $\mathcal{G}$. Una sucesión $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C}$ de gavillas de grupos es exacta si y sólo si las dos subgavillas $\mathrm{Im}(f)$ y $\mathrm{Ker}(g)$ de $\mathcal{B}$ coinciden.

Proposición 1.2.5. *Dos subgavillas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ de una gavilla $\mathcal{G}$ coinciden si y sólo si para cada $x \in X$, los tallos $\mathcal{F}_x$ y $\mathcal{F}'_x$ coinciden como conjuntos de $\mathcal{G}_x$.*

El siguiente resultado da una caracterización puramente local de una sucesión exacta de gavillas.

Proposición 1.2.6. *Una sucesión $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C}$ de morfismos de gavillas de grupos es exacta si y sólo si para cada $x \in X$, la sucesión de grupos $\mathcal{A}_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{B}_x \xrightarrow{g_x} \mathcal{C}_x$ es exacta.*

Demostración. La demostración se sigue de la Proposición 1.2.5. □

Damos uno de los ejemplos más importantes de una sucesión exacta de gavillas, el cual es la sucesión exacta exponencial. El kernel de la exponencial $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ es el subgrupo $2\pi\sqrt{-1} \cdot \mathbb{Z}$ de $\mathbb{C}$. Siguiendo a Deligne, denotemos este grupo por $\mathbb{Z}(1)$. Este es un grupo cíclico, el cual tiene un generador después de una elección de una raíz cuadrada de -1.

Lema 1.2.7. *Para una variedad suave X, tenemos una sucesión exacta de gavillas*

$$0 \to \mathbb{Z}(1) \to \underline{\mathbb{C}}_X \xrightarrow{exp} \underline{\mathbb{C}}_X^* \to 1 \tag{1.3}$$

Demostración. El único punto no trivial es que el morfismo de gavillas $exp : \underline{\mathbb{C}}_X \to \underline{\mathbb{C}}_X^*$ es suprayectivo. Para cada $x \in X$ y cada $f_x \in \underline{\mathbb{C}}_{X,x}^*$ existe una vecindad abierta contraible U de x tal que f_x es el germen en x de una función suave $f : U \to \mathbb{C}^*$. Existe una función suave $g : U \to \mathbb{C}$ tal que $exp(g) = f$. Entonces para $g_x \in \underline{\mathbb{C}}_{X,x}$, el germen en x de g, tenemos $exp(g_x) = f_x$. Así, exp da un morfismo suprayectivo en los tallos en x. Por Proposición 1.2.6, exp es suprayectivo. □

Ahora nos enfocamos en la categoría de gavillas de grupos abelianos $\mathbf{AB}(X)$ sobre un espacio X. Recordemos que denotamos por $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ el grupo abeliano de morfismos en esta categoría.

Una categoría $\mathbf{A}$ es **abeliana** si

$\mathbf{A}\ 0$. $\mathbf{A}$ tiene un objeto cero.

$\mathbf{A}\ 1$. Para cada par de objetos hay un producto y

$\mathbf{A}\ 1^*$. una suma.

$\mathbf{A}\ 2$. Cada morfismo tiene un núcleo y

$\mathbf{A}\ 2^*$. un conúcleo.

$\mathbf{A}\ 3$. Cada monomorfismo es un núcleo de un morfismo.

$\mathbf{A}\ 3^*$. Cada epimorfismo es un conúcleo de un morfismo.

Proposición 1.2.8. *La categoría de gavillas de grupos abelianos $\mathbf{AB}(X)$ sobre un espacio X es una categoría abeliana.*

Demostración. Para ver $\mathbf{A\ 0}$., sea $\mathcal{A} \in \mathbf{AB}(X)$ tal que $\mathcal{A}(U) = 0$ para cada subconjunto abierto U de X. Sean $\mathcal{F},\ \mathcal{G} \in \mathbf{AB}(X)$ definimos la suma directa $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ de gavillas como la gavilla asociada a la pregavilla $U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$. Se puede definir el límite directo $\varinjlim_{i \in I} \mathcal{F}_i$ de gavillas de grupos abelianos, donde I es un conjunto dirigido. Esta es la gavilla asociada a la pregavilla $U \mapsto \varinjlim_{i \in I} \mathcal{F}_i(U)$. Productos y límites inversos son fácil de definir, así se obtiene directamente una gavilla tomando el producto o límite inverso de cada conjunto abierto. Por lo tanto se cumplen $\mathbf{A\ 1}$. y $\mathbf{A\ 1}^*$..

Sea $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo en $\mathcal{AB}(X)$. Anteriormente, ya definimos el núcleo y la imagen de ϕ. También tenemos la noción del conúcleo de un morfismo de gavillas $\mathrm{Coker}(\phi)$ el cual es la gavilla asociada a la pregavilla $\mathrm{coker}(\phi)$. La coimagen de un morfismo de gavillas $\mathrm{Coim}(\phi)$ es la gavilla asociada a la pregavilla $\mathrm{coim}(\phi)$. Por lo tanto se cumplen $\mathbf{A\ 2}$. y $\mathbf{A\ 2}^*$. El morfismo natural $\mathrm{Coim}(\phi) \to \mathrm{Im}(\phi)$ es un isomorfismo. Recordemos que un morfismo $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es llamado un monomorfismo si $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$, un epimorfismo si $\mathrm{Coker}(\phi) = 0$. Por lo tanto se cumplen $\mathbf{A\ 3}$. y $\mathbf{A\ 3}^*$.. $\square$

Consideremos el funtor $\Gamma(X, -) : \mathcal{AB}(X) \to \mathcal{AB}$, tal que $\Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$. $\Gamma(X, -)$ es llamado el *funtor de secciones globales*.

Lema 1.2.9. *El funtor $\Gamma(X, -)$ es exacto por la izquierda, i.e., para cada sucesión exacta*

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$$

en $\mathcal{AB}(X)$, la sucesión correspondiente

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{A}) \to \Gamma(X, \mathcal{B}) \to \Gamma(X, \mathcal{C})$$

es exacta.

El funtor $\Gamma(X, -)$ no es exacto en general. Por ejemplo, la aplicación exponencial $exp : \underline{\mathbb{C}}_X(X) \to \underline{\mathbb{C}}^*_X(X)$ no es suprayectivo si $H^1(X, \mathbb{Z}) \neq 0$.

1.3. Gavilla inyectiva

En la presente sección definimos el concepto de gavilla inyectiva de grupos abelianos sobre X. Esta definición sirve para definir resoluciones inyectivas de gavillas, las cuales son una herramienta importante para definir los grupos de cohomología de gavillas en el próximo capítulo.

Sea $\mathcal{AB}(X)$ la categoría de gavillas de grupos abelianos sobre X.

Definición 1.3.1. *Una gavilla $\mathcal{F}$ de grupos abelianos sobre X es llamada una gavilla inyectiva si para cualquier diagrama en $\mathcal{AB}(X)$*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{B} \\ \mathcal{F} & \end{tikzcd}$$

con $\mathrm{Ker}(i) = 0$ *existe un morfismo* $g : \mathcal{B} \to \mathcal{F}$ *en* $\mathcal{AB}(X)$ *tal que* $g \circ i = f$.

Si X es un espacio singular, recuperamos la noción de grupo abeliano inyectivo. Un grupo abeliano A es inyectivo si y sólo si éste es *divisible*, i.e., para cada $n \in \mathbb{N}$ el homomorfismo $x \mapsto n \cdot x$ de A en A, es suprayectivo.

Lema 1.3.2. *Sea* $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$ *una sucesión exacta de gavillas de grupos abelianos sobre un espacio X, donde $\mathcal{A}$ es una gavilla inyectiva. Entonces la sucesión se escinde, es decir, existe un morfismo $p : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ en $\mathcal{AB}(X)$ tal que* $p \circ i = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$.

Demostración. Como $\mathcal{A}$ es una gavilla inyectiva y $\mathrm{Ker}(i) = 0$ ya que la sucesión de gavillas es exacta, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{B} \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "p"] & \mathcal{C} \arrow[r] & 0 \\ & \mathcal{A} & & & \end{tikzcd}$$

Esto es, existe $p : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que $p \circ i = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$. $\square$

Lema 1.3.3. *Para cualquier gavilla $\mathcal{F}$ de grupos abelianos sobre un espacio X existe una gavilla inyectiva $\mathcal{I}$ de grupos abelianos y un monomorfismo $f : \mathcal{F} \to \mathcal{I}$.*

Demostración. Recordemos que para cualquier grupo abeliano B existe una inyección $B \hookrightarrow J$, donde J es un grupo abeliano inyectivo [**KSB**]. Para cada $x \in X$, tómese una resolución inyectiva $\mathcal{F}_x \hookrightarrow \mathcal{J}_x$ del grupo abeliano $\mathcal{F}_x$.

Sea $\tilde{\mathcal{J}}_x$ la llamada "gavilla rascacielos" la cual tiene todos los tallos iguales a 0, excepto el tallo en x, el cual es igual a $\mathcal{J}_x$. En otras palabras

$$\tilde{\mathcal{J}}_x(U) = \begin{cases} \mathcal{J}_x & \text{si} \quad x \in U, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin U. \end{cases}$$

Para cualquier gavilla $\mathcal{A}$ de grupos abelianos, se tiene

$$\mathrm{Hom}_X(\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{J}}_x) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathcal{A}_x, \mathcal{J}_x).$$

Por lo que $\tilde{\mathcal{J}}_x$ es una gavilla inyectiva y tenemos un morfismo natural $\mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{J}}_x$. Por lo tanto tenemos un morfismo $\mathcal{F} \to \prod_{x \in X} \tilde{\mathcal{J}}_x$. El producto de cualquier familia de gavillas inyectivas es claramente inyectivo. El morfismo $\mathcal{F} \to \prod_{x \in X} \tilde{\mathcal{J}}_x$ es entonces un monomorfismo de $\mathcal{F}$ en una gavilla inyectiva. $\square$

Capítulo 2

Cohomología de gavillas

En este Capítulo, se introducen algunos conceptos y resultados preliminares, los cuales son usados para definir las gavillas de cohomologías de un complejo de gavillas y los grupos de cohomología de gavillas. También se demuestra que dada una sucesión exacta corta de gavillas, se obtiene una sucesión exacta larga de grupos de cohomología de gavillas.
Nota. En este Capítulo, todas las gavillas serán consideradas en la categoría de gavillas de grupos abelianos $\mathbf{AB}(X)$ sobre un espacio X.

2.1. Complejos de gavillas

Definición 2.1.1. *Un complejo de gavillas $(\mathcal{K}^\bullet, d)$ en $\mathbf{AB}(X)$ es una sucesión de morfismos de gavillas en $\mathbf{AB}(X)$ (se llaman las diferenciales del complejo)*

$$\cdots \xrightarrow{d^{n-1}} \mathcal{K}^n \xrightarrow{d^n} \mathcal{K}^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

tal que $d^n \circ d^{n-1} = 0$, es decir, la gavilla $\mathrm{Im}(d^{n-1})$ es una subgavilla de la gavilla $\mathrm{Ker}(d^n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. A menudo se omite la diferencial y se denota al complejo de gavillas $(\mathcal{K}^\bullet, d)$ por $\mathcal{K}^\bullet$.

La $j-$ésima *gavilla de cohomologías* del complejo de gavillas $\mathcal{K}^\bullet$ es la gavilla

$$\underline{H}^j(\mathcal{K}^\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}(d^j)}{\mathrm{Im}(d^{j-1})}.$$

Un morfismo de complejos de gavillas $\psi : \mathcal{K}^\bullet \to \mathcal{L}^\bullet$ es una sucesión de morfismos de gavillas $\psi^n : \mathcal{K}^n \to \mathcal{L}^n$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "d_{\mathcal{K}}^{n-2}"] & \mathcal{K}^{n-1} \arrow[r, "d_{\mathcal{K}}^{n-1}"] \arrow[d, "\psi^{n-1}"] & \mathcal{K}^{n} \arrow[r, "d_{\mathcal{K}}^{n}"] \arrow[d, "\psi^{n}"] & \mathcal{K}^{n+1} \arrow[r, "d_{\mathcal{K}}^{n+1}"] \arrow[d, "\psi^{n+1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "d_{\mathcal{L}}^{n-2}"] & \mathcal{L}^{n-1} \arrow[r, "d_{\mathcal{L}}^{n-1}"] & \mathcal{L}^{n} \arrow[r, "d_{\mathcal{L}}^{n}"] & \mathcal{L}^{n+1} \arrow[r, "d_{\mathcal{L}}^{n+1}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Cualquier morfismo ψ de complejos de gavillas induce morfismos de gavillas de cohomologías

$$\underline{H}^n(\psi) : \underline{H}^n(\mathcal{K}^\bullet) \to \underline{H}^n(\mathcal{L}^\bullet).$$

Dados dos morfismos de complejos de gavillas ψ y ς de $\mathcal{K}^\bullet$ a $\mathcal{L}^\bullet$, una *homotopía* H de ψ a ς es una sucesión de morfismos $\mathrm{H}^n : \mathcal{K}^n \to \mathcal{L}^{n-1}$ de gavillas tal que $d_{\mathcal{L}}^{n-1} \circ \mathrm{H}^n + \mathrm{H}^{n+1} \circ d_{\mathcal{K}}^n = \psi^n - \varsigma^n$ para todo n. Se dice que ψ es homotópico a ς, en símbolos $\psi \simeq \varsigma$, si existe una homotopía entre ellos, en tal caso la aplicación inducida en gavillas de cohomologías coincide. Decimos que ψ es una nulhomotopía si $\psi \simeq c$, es decir, ψ es homotópico al morfismo constante $c : \mathcal{K}^\bullet \to \mathcal{L}^\bullet$. Un morfismo de complejos de gavillas $f : \mathcal{K}^\bullet \to \mathcal{L}^\bullet$ se llama una *equivalencia homotópica* si existe un morfismo $g : \mathcal{L}^\bullet \to \mathcal{K}^\bullet$ tal que $f \circ g$ y $g \circ f$ son homotópicos a la aplicación identidad.

Una sucesión exacta de complejos de gavillas $\mathcal{A}^\bullet \xrightarrow{f} \mathcal{B}^\bullet \xrightarrow{g} \mathcal{C}^\bullet$ consta de morfismos de complejos $f : \mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$ y $g : \mathcal{B}^\bullet \to \mathcal{C}^\bullet$ tales que para cada $n \in \mathbb{Z}$ la sucesión $\mathcal{A}^n \xrightarrow{f^n} \mathcal{B}^n \xrightarrow{g^n} \mathcal{C}^n$ es exacta.

Proposición 2.1.2. *Sea $0 \to \mathcal{A}^\bullet \xrightarrow{f} \mathcal{B}^\bullet \xrightarrow{g} \mathcal{C}^\bullet \to 0$ una sucesión exacta de complejos de gavillas. Entonces tenemos una sucesión exacta larga de gavillas de cohomologías*

$$\cdots \to \underline{H}^n(\mathcal{A}^\bullet) \xrightarrow{H^n(f)} \underline{H}^n(\mathcal{B}^\bullet) \xrightarrow{H^n(g)} \underline{H}^n(\mathcal{C}^\bullet) \xrightarrow{\delta} \underline{H}^{n+1}(\mathcal{A}^\bullet) \to \cdots, \quad (2.1)$$

donde δ es el morfismo de gavillas definido en tallos como sigue. Para $s \in \underline{H}^n(\mathcal{C}^\bullet)$ y $x \in X$, sea ρ un elemento de $\mathcal{B}_x^n$ tal que $g_x(\rho) = s$. Entonces $d_{\mathcal{B}}^n(\rho)$ tiene imagen cero en $\mathcal{C}_x^{n+1}$, por lo tanto existe $t \in \mathcal{A}_x^{n+1}$ tal que $f_x^{n+1}(t) = d_{\mathcal{B}}^n(\rho)$ es fácil probar que $t \in \underline{H}^{n+1}(\mathcal{A}^\bullet)_x$; $\delta(s)_x$ es entonces la clase de t en $\underline{H}^{n+1}(\mathcal{A})_x = \frac{\mathrm{Ker}(d_x^{n+1})}{\mathrm{Im}(d_x^n)}$.

Demostración. Para demostrar la Proposición basta verificarla localmente, ya que una sucesión de gavillas es exacta si y sólo si es exacta en tallos, esto es, si es exacta localmente. Sea $x \in X$, entonces la sucesión $0 \to \mathcal{A}_x^\bullet \xrightarrow{f_x} \mathcal{B}_x^\bullet \xrightarrow{g_x} \mathcal{C}_x^\bullet \to 0$ es una sucesión exacta de complejos de grupos abelianos. Usando álgebra homológica se tiene una sucesión exacta larga de grupos de cohomología. Como es para cada $x \in X$, obtenemos una sucesión exacta larga, donde los objetos son pregavillas, aplicando la gavilla asociada obtenemos el resultado.

□

2.2. Resolución inyectiva

Una *resolución de una gavilla* $\mathcal{A} \in \mathbf{AB}(X)$ es un complejo de gavillas $\mathcal{K}^\bullet$ junto con un morfismo $i : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{K}^0$ en $\mathbf{AB}(X)$ tal que

(1) i es un monomorfismo con imagen igual a $\mathrm{Ker}(d^0)$.

(2) Para $n \geq 1$, el núcleo de d^n coincide con la imagen de d^{n-1}.

Entonces $\underline{H}^0(\mathcal{K}^\bullet) = \mathcal{A}$ y $\underline{H}^j(\mathcal{K}^\bullet) = 0$ para $j > 0$. La resolución será denotada por $\mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{K}^\bullet$. Dadas dos resoluciones $\mathcal{A} \xrightarrow{i_1} \mathcal{K}_1^\bullet$ y $\mathcal{A} \xrightarrow{i_2} \mathcal{K}_2^\bullet$ de $\mathcal{A}$, un morfismo de resoluciones es un morfismo de complejos $\phi : \mathcal{K}_1^\bullet \to \mathcal{K}_2^\bullet$ tal que $\phi^0 \circ i_1 = i_2$ en $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{A}, \mathcal{K}_2^0)$.

Un complejo $\mathcal{K}^\bullet$ de gavillas se llama *acíclico* si toda gavilla de cohomología $\underline{H}^j(\mathcal{K}^\bullet)$ es cero. Nótese que dado un complejo de gavillas $\mathcal{K}^\bullet$ e $i : \mathcal{A} \to \mathcal{K}^0$, $\mathcal{K}^\bullet$ es una resolución de $\mathcal{A}$ si y sólo si el complejo $\mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{K}^0 \to \mathcal{K}^1 \cdots \to \mathcal{K}^n$ es acíclico.

Proposición 2.2.1. (1) *Para cualquier gavilla $\mathcal{A}$ de grupos abelianos, existe una resolución $\mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{I}^\bullet$ de $\mathcal{A}$ en la cual cada gavilla $\mathcal{I}^n$ es inyectiva. Esta se llama una* <u>*resolución inyectiva*</u> *de $\mathcal{A}$.*

(2) *Sea $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfismo en $\mathbf{AB}(X)$. Dada una resolución $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{I}^\bullet$ de $\mathcal{A}$ y una resolución inyectiva $\mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{J}^\bullet$ de $\mathcal{B}$ existe un morfismo de complejos $\psi : \mathcal{I}^\bullet \to \mathcal{J}^\bullet$ tal que $\psi^0 \circ f = g \circ \phi$. Este morfismo de complejos es único salvo homotopía.*

Demostración. Para probar (1), construimos por inducción en $n \in \mathbb{N}$ una sucesión exacta $\mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{I}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} \mathcal{I}^n$ con $\mathcal{I}^0, \cdots, \mathcal{I}^n$ gavillas inyectivas. El caso $n = 0$ se sigue fácilmente del Lema 1.3.3. Teniendo elección en $\mathcal{I}^n$, entonces elegimos una gavilla inyectiva $\mathcal{I}^{n+1}$ y un monomorfismo $\mathcal{I}^n / \operatorname{Im}(d^{n-1}) \xrightarrow{d^n} \mathcal{I}^{n+1}$ con $\mathcal{I}^{n+1}$ una gavilla inyectiva.

Para demostrar (2), construimos $\psi : \mathcal{I}^n \to \mathcal{J}^n$ por inducción en n. La existencia de ψ^0 se sigue del hecho que $\mathcal{J}^0$ es inyectiva. Si $\psi^0, \psi^1, ..., \psi^n$ han sido construidas (para algún $n \geq 1$), la aplicación $d^n \circ \psi^n : \mathcal{I}^n \to \mathcal{J}^{n+1}$ tiene composición cero con d^{n-1}, ya que $d^n \circ \psi^n \circ d^{n-1} = d^n \circ d^{n-1} \circ \psi^{n-1} = 0$. De aquí esto se factoriza a través de un morfismo $f : \mathcal{I}^n / \operatorname{Im}(d^{n-1}) \to \mathcal{J}^{n+1}$. Tenemos $\mathcal{I}^n / \operatorname{Im}(d^{n-1}) = \mathcal{I}^n / \operatorname{Ker}(d^n)$ ya que $\mathcal{I}^\bullet$ es una resolución de $\mathcal{A}$. Nótese que d^n induce un morfismo $\mathcal{I}^n / \operatorname{Im}(d^{n-1}) \hookrightarrow \mathcal{I}^{n+1}$. Usando el hecho de que $\mathcal{J}^{n+1}$ es una gavilla inyectiva se obtiene un morfismo $\psi^{n+1} : \mathcal{I}^{n+1} \to \mathcal{J}^{n+1}$ extendiendo f, entonces tenemos que $\psi^{n+1} \circ d^n = d^n \circ \psi^n$.

Ahora sea $\rho = (\rho^n)$ otro morfismo de complejos de gavillas con la misma propiedad. Construimos por inducción para $n \geq 0$ un morfismo $\mathrm{H}^n : \mathcal{I}^n \to \mathcal{J}^{n-1}$ tal que

$$d^{n-1} \circ \mathrm{H}^i + \mathrm{H}^{i+1} \circ d^i = \psi^i - \rho^i \qquad (E_i)$$

(por comodidad, consideremos $d^{-1} = 0$). Supongamos que $\mathrm{H}^0, \mathrm{H}^1, ..., \mathrm{H}^n$ han sido construidos, y la ecuación E_i se satisface para $i \leq n-1$. Entonces $\psi^n - \rho^n - d^{n-1} \circ \mathrm{H}^n$ se anula en $\operatorname{Ker}(d^n)$, de acuerdo a la ecuación E_{n-1}. Por lo tanto existe un morfismo de gavillas $h : \operatorname{Im}(d^n) \to \mathcal{J}^n$ tal que $h \circ d^n = \psi^n - \rho^n - d^{n-1} \circ \mathrm{H}^n$. Entonces si tomamos $\mathrm{H}^{n+1} : \mathcal{I}^{n+1} \to \mathcal{J}^n$ cualquier extensión de h (la cual existe ya que $\mathcal{J}^n$ es inyectiva), E_n se satisface. $\square$

Corolario 2.2.2. *Dadas dos resoluciones inyectivas $\mathcal{I}_1^\bullet$ y $\mathcal{I}_2^\bullet$ de una gavilla $\mathcal{A}$ de grupos abelianos existe un morfismo ϕ de resoluciones de $\mathcal{I}_1^\bullet$ a $\mathcal{I}_2^\bullet$, el cual es una equivalencia homotópica. Este morfismo es único salvo homotopía.*

Ahora, vamos a definir los grupos de cohomología de gavillas.

Proposición y Definición 2.2.3. *Para una gavilla $\mathcal{A}$ de grupos abelianos sobre un espacio X, los grupos de cohomología de gavillas $H^j(X, \mathcal{A})$ se definen como sigue. Sea $\mathcal{I}^\bullet$ una resolución inyectiva de $\mathcal{A}$. Definimos $H^j(X, \mathcal{A})$ como el j-ésimo grupo de cohomología del complejo*

$$\cdots \to \Gamma(X, \mathcal{I}^j) \to \Gamma(X, \mathcal{I}^{j+1}) \to \cdots$$

Salvo isomorfismo canónico, estos grupos son independientes de la resolución inyectiva. Si $\mathcal{A}$ es una gavilla inyectiva, $H^j(X, \mathcal{A}) = 0$ para $j > 0$.

Cualquier morfismo $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ induce un homomorfismo de grupos bien definido $H^j(X,\mathcal{A}) \to H^j(X,\mathcal{B})$. El grupo de cohomología $H^0(X,\mathcal{A})$ es canónicamente isomorfo a $\Gamma(X,\mathcal{A})$.

Demostración. Dadas dos resoluciones inyectivas $\mathcal{I}_1^\bullet$ y $\mathcal{I}_2^\bullet$ de $\mathcal{A}$ según la Proposición 2.2.1 existe un morfismo de resoluciones, el cual da un morfismo de complejo $\Gamma(X,\mathcal{I}_1^\bullet)$ a $\Gamma(X,\mathcal{I}_2^\bullet)$. Este morfismo es único salvo homotopía, por lo tanto la aplicación inducida en grupos de cohomología está bien definida y es un isomorfismo. Esto muestra que $H^j(X,\mathcal{A})$ es independiente de la resolución. Si $\mathcal{A}$ es inyectiva, podemos elegir la resolución inyectiva $\mathcal{I} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathcal{I} \to 0 \to 0 \cdots$, de aquí $H^p(X,\mathcal{A}) = 0$ para $p > 0$. Dado un morfismo $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ en $\mathbf{AB}(X)$, una resolución inyectiva $\mathcal{I}^\bullet$ de $\mathcal{A}$ y una resolución inyectiva $\mathcal{J}^\bullet$ de $\mathcal{B}$, se puede encontrar un morfismo $\psi : \mathcal{I}^\bullet \to \mathcal{J}^\bullet$ de complejos de gavillas como en la Proposición 2.2.1. Esto induce un morfismo del complejo de secciones globales, de aquí un homomorfismo $H^j(X,\mathcal{A}) \to H^j(X,\mathcal{B})$. Como el morfismo ψ es único salvo homotopía, el homomorfismo inducido en cohomología esta bien definido. Finalmente, se tiene la sucesión exacta

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{A}) \to \Gamma(X,\mathcal{I}^0) \to \Gamma(X,\mathcal{I}^1)$$

por el Lema 1.2.9. Por lo tanto $H^0(X,\mathcal{I}^\bullet) = \Gamma(X,\mathcal{A})$. □

Esta definición de grupos de cohomología de gavillas nos permite probar un resultado básico, la sucesión exacta larga de grupos de cohomología de gavillas.

Proposición 2.2.4. *Sea $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \to 0$ una sucesión exacta de gavillas de grupos abelianos. Sean $\mathcal{A} \xrightarrow{u} \mathcal{I}^\bullet$ y $\mathcal{C} \xrightarrow{v} \mathcal{J}^\bullet$ resoluciones inyectivas. Entonces existe una resolución inyectiva $\mathcal{B} \xrightarrow{w} \mathcal{K}^\bullet$ y un diagrama* *conmutativo*

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{I}^0 \arrow[r] \arrow[d, "a^0"] & \mathcal{I}^1 \arrow[r] \arrow[d, "a^1"] & \cdots \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{B} \arrow[r, "w"] \arrow[d, "g"] & \mathcal{K}^0 \arrow[r] \arrow[d, "b^0"] & \mathcal{K}^1 \arrow[r] \arrow[d, "b^1"] & \cdots \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{C} \arrow[r, "v"] \arrow[d] & \mathcal{J}^0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{J}^1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

con cada sucesión $0 \to \mathcal{I}^n \to \mathcal{K}^n \to \mathcal{J}^n \to 0$ *exacta.*

Demostración. Póngase $\mathcal{K}^n = \mathcal{I}^n \oplus \mathcal{J}^n$. Definiremos $d_{\mathcal{K}}^{-1} = w : \mathcal{B} \to \mathcal{I}^0 \oplus \mathcal{J}^0$ como $w = \alpha \oplus v \circ g$, donde $\alpha : \mathcal{B} \to \mathcal{I}^0$ satisface $\alpha \circ f = u$. Entonces construimos $d_{\mathcal{K}}^n : \mathcal{I}^n \oplus \mathcal{J}^n \to \mathcal{I}^{n+1} \oplus \mathcal{J}^{n+1}$ por inducción sobre n (para $n \geq 0$) así que la siguiente condición se verifica para todo $n \geq -1$

(a) $d_{\mathcal{K}}^n$ se representa por una matriz de bloques $\begin{pmatrix} d_{\mathcal{I}}^n & h^n \\ 0 & d_{\mathcal{J}}^n \end{pmatrix}$ (tenemos que $d_{\mathcal{I}}^{-1} = u$ y $d_{\mathcal{J}}^{-1} = v$).

(b) $d_{\mathcal{K}}^{n+1} \circ d_{\mathcal{K}}^n = 0$.

Es necesario que definamos por inducción $h^n : \mathcal{J}^n \to \mathcal{I}^{n+1}$. Supóngase que h^{n-1} ha sido construido (por lo tanto $d_{\mathcal{K}}^{n-1}$). La única condición para que h^n se verifique es que $h^n \circ d_{\mathcal{J}}^{n-1} = -d_{\mathcal{I}}^n \circ h^{n-1}$. La existencia de h^n con esta restricción se sigue de la hipótesis de que $\mathcal{I}^{n+1}$ es inyectivo y el hecho que $(-d_{\mathcal{I}}^n \circ h^{n-1}) \circ d_{\mathcal{J}}^{n-2} = d_{\mathcal{I}}^n \circ d_{\mathcal{I}}^{n-1} \circ h^{n-2} = 0$.

Nótese que la condición (a) y (b) implican que el complejo $(\mathcal{I}^n \oplus \mathcal{J}^n, d_{\mathcal{K}}^n)$ es una resolución de $\mathcal{B}$, usando Proposición 2.1.2. Por lo tanto hemos cumplido todas las condiciones requeridas. □

Corolario 2.2.5. *Si* $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$ *es una sucesión exacta de gavillas de grupos abelianos, tenemos una sucesión exacta larga de cohomología de grupos*

$$\cdots \to H^n(X, \mathcal{A}) \to H^n(X, \mathcal{B}) \to H^n(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X, \mathcal{A}) \to \cdots \tag{2.2}$$

Demostración. Sean $\mathcal{A} \to \mathcal{I}^\bullet$ y $\mathcal{C} \to \mathcal{J}^\bullet$ resoluciones inyectivas. Vamos a construir una resolución inyectiva $\mathcal{B} \to \mathcal{K}^\bullet$, como en la Proposición 2.2.4. Entonces para cada n tenemos una sucesión exacta $0 \to \mathcal{I}^n \to \mathcal{K}^n \to \mathcal{J}^n \to 0$. Debido a que $\mathcal{I}^n$ es inyectivo se tiene una sucesión exacta $0 \to \Gamma(X, \mathcal{I}^n) \to \Gamma(X, \mathcal{K}^n) \to \Gamma(X, \mathcal{J}^n) \to 0$. Ahora tenemos una sucesión exacta de complejos de grupos abelianos $0 \to \Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet) \to \Gamma(X, \mathcal{K}^\bullet) \to \Gamma(X, \mathcal{J}^\bullet) \to 0$. Por la Proposición 2.1.2, tenemos una sucesión exacta larga que involucra los grupos de cohomología de gavillas, a saber, la sucesión deseada $(2{,}2)$. $\square$

Capítulo 3

Sucesiones espectrales

Las sucesiones espectrales son una herramienta de álgebra homológica que tienen muchas aplicaciones en álgebra, geometría algebraica y topología algebraica. Introducidas por Jean Leray en 1946. Utilizamos las sucesiones espectrales para estudiar la relación que existe entre la cohomología de gavillas, la cohomología de Čech y la cohomología de De Rham.

Definición 3.0.6. *Sea $\mathbf{Ab}$ una categoría abeliana. Una sucesión espectral E (de tipo cohomologico) es una colección de objetos $\{E_r\}$ para $r \geq 0$ en $\mathbf{Ab}$ tal que:*

$a)$ *Para cada $r \geq 0$, E_r es un complejo de objetos bigraduados en $\mathbf{Ab}$, esto es,*

$$E_r = (E_r^{p,q}, d_r)_{p,q \in \mathbb{Z}},$$

donde la diferencial $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ tiene bigrado $(r, -r+1)$ y $d_r \circ d_r = 0$.

$b)$ *Para cada $r \geq 0$, se tiene el isomorfismo siguiente:*

$$H^*(E_r) \cong E_{r+1}.$$

3.1. La sucesión espectral de una filtración

Comenzaremos dando algunas definiciones preliminares, para posteriormente introducir la definición de una sucesión espectral de una filtración de un complejo en la categoría abeliana $\mathbf{Ab}$.

En toda esta Sección $\mathbf{Ab}$ es una categoría abeliana.

Un complejo $(K^\bullet, d)$ en $\mathbf{Ab}$ es una sucesión de morfismos de objetos en $\mathbf{Ab}$ (se llaman las diferenciales del complejo)

$$\cdots \xrightarrow{d^{n-1}} K^n \xrightarrow{d^n} K^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

tal que $d^n \circ d^{n-1} = 0$, es decir $\mathrm{Im}(d^{n-1}) \subseteq \mathrm{Ker}(d^n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. La cohomología de grado n del complejo $(K^\bullet, d)$ es

$$H^n(K^\bullet) = \frac{Z^n}{B^n},$$

donde $Z^n = \mathrm{Ker}(d^n)$ es un objeto en $\mathbf{Ab}$ cuyos elementos se llaman cociclos. $B^n = \mathrm{Im}(d^{n-1})$ es un objeto en $\mathbf{Ab}$ cuyos elementos se llaman cofronteras.

Un *subcomplejo* $(L^\bullet, d)$ del complejo $(K^\bullet, d)$ consiste de una familia de objetos $\{L^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ en $\mathbf{Ab}$, donde $L^p \subseteq K^p$ y $d(L^p) \subseteq L^{p+1}$ para cada $p \in \mathbb{Z}$. El complejo cociente $(J^\bullet, d)$ es definido por $J^\bullet = K^\bullet / L^\bullet$.

Una *filtración* $F(K^\bullet)$ del complejo $(K^\bullet, d)$ es una colección de subcomplejos $\{(F^p(K^\bullet), d)\}_{p\in\mathbb{Z}}$ del complejo $(K^\bullet, d)$ tal que $F^{p+1}(K^\bullet) \subseteq F^p(K^\bullet)$ para cada $p \in \mathbb{Z}$, es decir, una sucesión decreciente de subcomplejos

$$\cdots \subseteq F^{p+1}(K^\bullet) \subseteq F^p(K^\bullet) \subseteq \cdots$$

La filtración se llama

- *regular* si para cada i existe n_i tal que $F^p(K^\bullet) \cap K^i = 0$ para $p > n_i$.
- *exhaustiva* si para cada i existe un entero m_i tal que $K^i \subseteq F^{m_i}(K^\bullet)$.

El complejo (ordinario) $(Gr_F(K^\bullet), \tilde{d})$ asociado a la filtración $F(K^\bullet)$ es:

$$Gr_F(K^\bullet) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} Gr_F^p(K^\bullet) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \frac{F^p(K^\bullet)}{F^{p+1}(K^\bullet)},$$

donde la diferencial $\tilde{d}$ es inducida por la diferencial d.

Definimos los objetos bigraduados en $\mathbf{Ab}$

$$Z_r^{p,q} := \{x \in F^p(K^{p+q}) \mid d(x) \in F^{p+r}(K^{p+q+1})\}$$

para $p, q \in \mathbb{Z}$ y $r \in \mathbb{Z}$.

Como $F^p(K^{p+q+1}) \subseteq F^{p+r}(K^{p+q+1})$ para $r \leq 0$, entonces $Z_r^{p,q} = F^p(K^{p+q})$ para $r \leq 0$. Tenemos por lo tanto la siguiente sucesión de inclusiones

$$F^p(K^{p+q}) = Z_0^{p,q} \supseteq Z_1^{p,q} \supseteq \cdots \supseteq Z_r^{p,q} \supseteq Z_{r+1}^{p,q} \supseteq \cdots \supseteq \ker(d) \cap F^p(K^{p+q})$$

Sea
$$E_r^{p,q} := \frac{Z_r^{p,q}}{d(Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}) + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}$$
para $p, q \in \mathbb{Z}$ y $r \geq 0$.

Vamos a construir la diferencial
$$d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}. \tag{3.1}$$
como sigue.

Si $a \in E_r^{p,q}$ es representado por algún $x \in F^p(K^{p+q})$ tal que $d(x) \in F^{p+r}(K^{p+q+1})$. Entonces $d(x)$ es un represente de $d_r(a)$. Demostremos que está bien definido; independientemente de la elección de x; se necesita verificar que para $x \in Z_{r-1}^{p+1,q-1}(K^\bullet)$, la clase de $d(x)$ en $E_r^{p+r,q-r+1}$ es trivial. Esto es claro, ya que $d(x) \in d(Z_{r-1}^{p+1,q-1}(K^\bullet))$ tiene clase cero en $E_r^{p+r,q-r+1}$.

Proposición 3.1.1. *Tenemos $d_r \circ d_r = 0$, y la cohomología*
$$\mathrm{Ker}(d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}) / \mathrm{Im}(d_r : E_r^{p-r,q+r-1} \to E_r^{p,q})$$
se identifica canónicamente con $E_{r+1}^{p,q}$.

Demostración. Describimos el grupo $A = \mathrm{Ker}(d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1})$. Éste consiste en las clases en $E_r^{p,q}$ representadas por algún $x \in F^p(K^{p+q})$ tal que $d(x) = d(z) + y$, donde $y \in F^{p+r+1}(K^{p+q+1})$ y $z \in F^{p+1}(K^{p+q})$ con $d(z) \in F^{p+r}(K^{p+q+1})$. Esta clase es representada también por $x - z$ la cual satisface $d(x - z) = y \in F^{p+r+1}(K^{p+q+1})$. Se tiene una aplicación bien definida $f : A \to E_{r+1}^{p,q}$ la cual aplica la clase de x a la clase de $x - z$. El núcleo de esta aplicación consta de la clase de $x \in F^p(K^{p+q})$ tal que $x - z$ es de la forma $x - z = u + d(v)$, para $u \in Z_r^{p+1,q-1}(K^\bullet)$ y $v \in Z_r^{p-r,q+r-1}(K^\bullet)$. Se tiene que $u \in F^{p+1}(K^{p+q})$, $d(u) \in F^{p+r+1}(K^{p+q+1})$, $v \in F^{p-r}(K^{p+q-1})$ y $d(v) \in F^p(K^{p+q})$. Por lo tanto $[x] \in E_r^{p,q}$ es igual a $d_r([v])$, donde $[v] \in E_r^{p-r,q+r-1}$. Así el núcleo de f esta contenido en la imagen de $d_r^{p-r,q+r-1}$. Tomemos b en la imagen de $d_r^{p-r,q+r-1}$, entonces existe $c \in E_r^{p-r,q+r-1}$ tal que $d_r^{p-r,q+r-1}(c) = b$. Sea $w \in F^{p-r}(K^{p+q-1})$ tal que $d(w) \in F^p(K^{p+q})$ algún representante de c; se tiene que
$$d_r^{p-r,q+r-1}(c) = [d(w)] = b,$$
como $d_r \circ d_r = 0$ entonces la clase $d(w) \in A$. Por lo tanto, $f([d(w)]) = [d(w) - z]$ para algún $z \in Z_{r-1}^{p+1,q-1}$ tal que $d(w) - z = y \in F_{p+q+1}^{p+r+1}$. Entonces $[d(w)]$ está en el núcleo de f. Así la imagen de $d_r^{p-r,q+r-1}$ está contenida en el núcleo de f. $\square$

Tenemos los términos $E_0 = (E_0^{p,q}, d_0)$, $E_1 = (E_1^{p,q}, d_1)$, $E_2 = (E_2^{p,q}, d_2)$, etc. de la sucesión espectral de la filtración $F(K^\bullet)$ del complejo $(K^\bullet, d)$ en $\mathbf{Ab}$; cada uno de ellos da un complejo, con la diferencial d_r de bigrado $(r, -r+1)$ y la cohomología del complejo E_r es igual a E_{r+1} esto se sigue por la Proposición 3.1.1. Además, tenemos que para cada $p, q \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a)\ E_0^{p,q} &= \tfrac{F^p(K^{p+q})}{F^p(K^{p+q})} \\ &= Gr_F^p(K^{p+q}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b)\ E_1^{p,q} &= \tfrac{Z_1^{p,q}}{d(Z_0^{p-r+1,q+r-2})+Z_0^{p+1,q-1}} \\ &= H^{p+q}(\tfrac{F^p(K^\bullet)}{F^{p+1}(K^\bullet)}) \\ &= H^{p+q}(Gr_F^p(K^\bullet)). \end{aligned}$$

Estamos interesados en la cohomología $H^n(K^\bullet)$ del complejo $(K^\bullet, D)$. Introducimos una filtración de $H^*(K^\bullet)$ poniendo

$$F^p(H^q(K^\bullet)) = \frac{F^p(Z^q)}{F^p(B^q)}.$$

El complejo asociado es

$$Gr_F(H^*(K^\bullet)) = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} Gr_F^p(H^q)(K^\bullet),$$

donde

$$Gr_F^p(H^q(K^\bullet)) = \frac{F^p(H^q(K^\bullet))}{F^{p+1}(H^q(K^\bullet))}.$$

En analogía con la definición de los términos E_r, se puede también definir esto como sigue. Sea $Z_\infty^{p,q} := \{x \in F^p(K^{p+q}) : d(x) = 0\}$ los cociclos en $F^p(K^{p+q})$, y sea $B_\infty^{p,q} := F^p(K^{p+q}) \cap \mathrm{Im}(d)$ las cofronteras en $F^p(K^{p+q})$. $Z_\infty^{p,q}$ y $B_\infty^{p,q}$ son objetos en $\mathbf{Ab}$. Ahora definimos

$$E_\infty^{p,q} := \frac{Z_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q} + Z_\infty^{p+1,q-1}}.$$

Lema 3.1.2. *Para* $p, q \in \mathbb{Z}$

$$E_\infty^{p,q} = Gr_F^p(H^{p+q}(K^\bullet)).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
E_\infty^{p,q} &= \tfrac{Z_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q}+Z_\infty^{p+1,q-1}} \\
&= \tfrac{\{x\in F^p(K^{p+q}):d(x)=0\}}{F^p(K^{p+q})\cap \mathrm{Im}(d)} \\
&\cong \tfrac{F^p(Z^{p+q})/F^p(B^{p+q})}{F^{p+1}(Z^{p+q})/F^{p+1}(B^{p+q})} \\
&= \tfrac{F^p(H^{p+q}(K^\bullet))}{F^{p+1}(H^{p+q}(K^\bullet))} \\
&= Gr_F^p(H^{p+q}(K^\bullet)).
\end{aligned}$$

□

El caso en el cual los términos E_r se aproximan a E_∞ se hace preciso en la próxima proposición.

Proposición 3.1.3. *Sea $F(K^\bullet)$ una filtración del complejo $(K^\bullet, d)$. Supóngase que para cada n tenemos enteros $m_n \leq q_n$ tales que $K^n \cap F^{q_n}(K^\bullet) = 0$ y $K^n \subseteq F^{m_n}(K^\bullet)$. Sea $r = r(n) = \max(q_{n+1} - m_n, q_n - m_{n-1})$. Entonces para cualquier p tenemos*

$$E_r^{p,n-p} = E_{r+1}^{p,n-p} = \cdots = E_\infty^{p,n-p}.$$

Demostración. Los únicos valores de p para los cuales $E_s^{p,n-p}$ puede ser no cero están en el intervalo $\{m_n, \cdots, q_n\}$. La diferencial $d_s : E_s^{p,n-p} \longrightarrow E_s^{p+s,n-p-s+1}$ es por lo tanto cero si $s \geq q_{n+1} - m_n$. Esto muestra que para r como en la afirmación, está diferencial y la diferencial $d_r : E_r^{p-r,n-p+r-1} \longrightarrow E_r^{p,n-p}$ son cero. Tenemos que $E_{s+1}^{p,n-p} = E_s^{p,n-p}$ para $s \geq r$. El mismo argumento muestra que $E_s^{p,n-p} = E_\infty^{p,n-p}$ para $s \geq r$ suficientemente grande. □

Cuando la condición de la Proposición 3.1.3 se cumple para todo p y n (para r conveniente el cual puede depender de (p, n)), decimos que la sucesión espectral converge a $E_\infty^{p,q}$. La Proposición 3.1.3 dice que si la filtración $F(K^\bullet)$ es regular y exhaustiva, la sucesión espectral es convergente. Frecuentemente se dice que la sucesión espectral “converge a $H^n(K^\bullet)$.”

Decimos que una sucesión espectral *se colapsa* en E_r si tenemos que $E_r = E_{r+1} = \cdots = E_\infty$.

Proposición 3.1.4. *Considérese un complejo con una filtración regular y exhaustiva. Supóngase que para algunos enteros p y $r \geq 2$, se cumple lo siguiente: Para cada n tenemos que $E_r^{n-l,l} = 0$ para $l \neq p$, entonces la sucesión espectral se colapsa en E_r y para cada n tenemos un isomorfismo canónico $H^n(K^\bullet) \xrightarrow{\sim} E_r^{n-l,l}$.*

Demostración. Sabemos que la sucesión espectral converge. Por lo tanto es suficiente demostrar que $E_s = E_{s+1}$ para cualquier $s \geq r$. Supóngase verdadero para $r \leq s' < s$. Entonces tenemos que $E_s^{n-l,l} = E_r^{n-l,l}$ por la suposición inductiva y es cero a menos que $l = p$. La diferencial $d_s : E_s^{n-l,l} \to E_s^{n-l+s,l-s+1}$ sólo podría ser no cero si $l = p$ y $l - s + 1 = p$, lo cual es imposible ya que $s \geq 2$. Por lo tanto $E_s = E_{s+1}$. Para $s \geq r$ suficientemente grande tenemos que $E_r^{n-l,l} = E_\infty^{n-l,l}$ pero $E_\infty^{n-l,l}$ converge a $H^n(K^\bullet)$, por lo tanto tenemos el isomorfismo canónico

$$H^n(K^\bullet) \xrightarrow{\sim} E_r^{n-l,l}.$$

□

Tenemos que $E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p(K^\bullet)/F^{p+1}(K^\bullet))$. La diferencial

$$d_1 : H^{p+q}(F^p(K^\bullet)/F^{p+1}(K^\bullet)) \to H^{p+q+1}(F^{p+1}(K^\bullet)/F^{p+2}(K^\bullet))$$

es el homomorfismo de conexión en la sucesión exacta de complejos

$$0 \to F^{p+1}/F^{p+2} \to F^p/F^{p+2} \to F^p/F^{p+1} \to 0.$$

Un morfismo $\phi : E_r^{p,q} \to (E')_r^{p,q}$ de sucesiones espectrales es una collección de morfismos $\phi_r : E_r^{p,q} \to (E')_r^{p,q}$ para cada $r \geq 0$ tal que $d'_r \circ \phi_r = \phi_r \circ d_r$. Dados dos complejos $(K^\bullet, d)$ y $(L^\bullet, d')$ con filtraciones $F(K^\bullet)$ y $G(L^\bullet)$ respectivamente, un morfismo $\phi : K^\bullet \to L^\bullet$ se dice que es compatible con la filtración si $\phi(F^p(K^\bullet)) \subseteq G^p(L^\bullet)$ para todo p. Tal ϕ induce un morfismo de sucesiones espectrales.

Proposición 3.1.5. *Sean $E_r^{\bullet\bullet}$ y $(E')_r^{\bullet\bullet}$ sucesiones espectrales convergentes y $\phi_r : E_r^{p,q} \to (E')_r^{p,q}$ un morfismo de sucesiones espectrales. Si para algún s, ϕ_s es un ismorfismo, entonces ϕ_r es un ismorfismo para todo $r \geq s$, incluyendo $r = \infty$.*

Demostración. Por hipótesis tenemos que para $s \in \mathbb{Z}$

$$\phi_s : E_s^{p,q} \to (E')_s^{p,q} \qquad (1)$$

es un isomorfismo. Por definición de un morfismo de sucesiones espectrales se tiene que:

$$d'_s \circ \phi_s = \phi_s \circ d_s. \qquad (2)$$

Por las propiedades de las sucesiones espectrales tenemos que:

$$E_{s+1}^{p,q} \cong H(E_s^{p,q})$$

y

$$(E')_{s+1}^{p,q} \cong H((E')_s^{p,q}),$$

entonces $\phi_{s+1} : E_{s+1}^{p,q} \to (E')_{s+1}^{p,q}$ es un isomorfismo por (1) y (2). Por lo tanto $\phi_r : E_r^{p,q} \to (E')_r^{p,q}$ es un isomorfismo para $r \geq s$, incluyendo a $r = \infty$ ya que ambas sucesiones espectrales son convergentes. $\square$

Esta proposición es utilizada para comparar las diferentes cohomologías de un complejo en $\mathbf{Ab}$.

3.2. La sucesión espectral de un complejo doble

En esta Sección $\mathbf{Ab}$ es una categoría abeliana.

Un *complejo doble* $(K^{\bullet\bullet}, \delta, d)$ es una familia de objetos $\{K^{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ en $\mathbf{Ab}$, junto con dos clases de diferenciales

(1) *La diferencial horizontal* δ *o* δ_K *la cual aplica* $K^{p,q}$ *a* $K^{p+1,q}$.

(2) *La diferencial vertical* d *o* d_K *la cual aplica* $K^{p,q}$ *a* $K^{p,q+1}$.

Se requieren las siguientes propiedades

$$\delta \circ \delta = d \circ d = 0 \quad \text{y} \quad \delta \circ d = d \circ \delta. \tag{3.2}$$

Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo, y sus filas y columnas son complejos:

$$\begin{tikzcd}
 & {} & {} & \\
{} \arrow[r, "\delta"] & K^{p,q+1} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & K^{p+1,q+1} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & {} \\
{} \arrow[r, "\delta"] & K^{p,q} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & K^{p+1,q} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & {} \\
 & {} \arrow[u, "d"] & {} \arrow[u, "d"] &
\end{tikzcd}$$

Un complejo doble $K^{\bullet\bullet}$

El *primer grado* de un elemento de $K^{p,q}$ es p, su *segundo grado* es q y su *grado total* es $p+q$.

Un morfismo de complejos dobles $\phi : K^{\bullet\bullet} \to L^{\bullet\bullet}$ es una familia de morfismos $\phi^{p,q} : K^{p,q} \to L^{p,q}$ que conmutan con las diferenciales:

$$\delta_L \circ \phi = \phi \circ \delta_K \text{ y } d_L \circ \phi = \phi \circ d_K.$$

El complejo total $(Tot(K^{\bullet\bullet}), D)$ del complejo doble $(K^{\bullet\bullet}, \delta, d)$ es definido como:

$$Tot^n(K^{\bullet\bullet}) = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q} \quad , \quad D = \delta + (-1)^p d,$$

donde el signo se introduce para que $D \circ D = 0$, como fácilmente se verifica. En algunas ocasiones omitimos la diferencial del complejo total y lo denotamos simplemente por $Tot(K^{\bullet\bullet})$.

Nota. Un morfismo de complejos dobles induce un morfismo de los complejos totales correspondientes, así como un morfismo de los grupos de cohomología.

Un cociclo c de grado n en $Tot(K^{\bullet\bullet})$ consta de una colección $\{c_{p_i}\}_{0\leq i\leq n}$, donde $c_{p_i} \in K^{p+i,n-p-i}$ tal que se cumple lo siguiente:
(1) $c = c_{p_0} \oplus \cdots \oplus c_{p_n}$,
(2) $d(c_{p_0}) = 0$,
(3) $\delta(c_{p_i}) = (-1)^{p+i} d(c_{p_{i+1}})$ y
(4) $\delta(c_{p_n}) = 0$.

Los cociclos pueden ser difíciles de construir a causa de la presencia de las dos diferenciales d y δ. Nos gustaría descuidar una de las diferenciales. Esto es lo que ofrece la teoría de sucesiones espectrales.

Hay dos filtraciones naturales en el complejo total $Tot(K^{\bullet\bullet})$.

- La *primera filtración* $F_H(Tot(K^{\bullet\bullet}))$ es dada por los subcomplejos $F_H^p(Tot(K^{\bullet\bullet})) = \bigoplus_{i\geq p} K^{i,j}$ con las componentes $\bigoplus_{i\geq p} K^{i,n-i}$ de grado n.

- La *segunda filtración* $(F_V(Tot(K^{\bullet\bullet}))$ es dada por los subcomplejos $F_V^q(Tot(K^{\bullet\bullet})) = \bigoplus_{j\geq q} K^{i,j}$ con las componentes $\bigoplus_{j\geq q} K^{n-j,j}$ de grado n.

La sucesión espectral de una filtración de un complejo en $\mathbf{Ab}$ es una herramienta algebraica usada para extraer información de la cohomología del complejo total $Tot(K^{\bullet\bullet})$.

Consideremos la primera filtración del complejo total $Tot(K^{\bullet\bullet})$. La sucesión espectral correspondiente se llama la primera sucesión espectral. El término E_1 es la cohomología del cociente graduado de la filtración. El complejo $F_H^p(Tot(K^{\bullet\bullet}))/F_H^{p+1}(Tot(K^{\bullet\bullet}))$ es la "complejo columna"

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \Big\uparrow {\scriptstyle (-1)^{j+1}\cdot d} \\ K^{p,j+1} \\ \Big\uparrow {\scriptstyle (-1)^{j}\cdot d} \\ K^{p,j} \\ \Big\uparrow {\scriptstyle (-1)^{j-1}\cdot d} \\ \vdots \end{array}$$

con $K^{p,j}$ de grado $p+j$. Así $E_1^{p,q}$ es la cohomología vertical de bigrado (p,q) (i.e., la cohomología de $K^{\bullet\bullet}$ con respecto a lo largo de la diferencial vertical). Entonces la diferencial $d_1 : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$ es la aplicación en cohomología vertical inducida por la diferencial horizontal δ. En cuanto al término E_2, tenemos

$$E_2 = H_H(H_V(K^{\bullet\bullet})) \tag{3.3}$$

(cohomología horizontal de la cohomología vertical).

La convergencia de la primera sucesión espectral no representa problema para un complejo doble $K^{\bullet\bullet}$ tal que $K^{p,q} \neq 0$ implica que $p \geq 0$ y $q \geq 0$. Tal complejo doble a menudo se dice que está concentrado en el primer cuadrante. La correspondiente sucesión espectral se dice que es una "sucesión espectral de primer cuadrante." Para una tal sucesión espectral, hay un homomorfismo $H^n(Tot(K^{\bullet\bullet})) \to E_2^{n,0}$, con imagen igual al subgrupo $E_\infty^{n,0}$ de $E_2^{n,0}$. Éste se llama un *homomorfismo borde*. Usando este homomorfismo borde, se tiene la sucesión exacta para la cohomología de grado inferior

$$0 \to E_2^{n,0} \to H^1(Tot(K^{\bullet\bullet})) \to E_2^{0,1} \to E_2^{2,0} \to H^2(Tot(K^{\bullet\bullet}))$$

La segunda sucesión espectral de un complejo doble que corresponde a la segunda filtración, es analizada similarmente. El término $E_1^{p,q}$ es la cohomología horizontal de bigrado (p,q). El término E_2 es

$$E_2 = H_V(H_H(K^{\bullet\bullet})). \tag{3.4}$$

El resultado siguiente es muy útil.

Lema 3.2.1. *Sean $K^{\bullet\bullet}$ y $L^{\bullet\bullet}$ complejos dobles tales que existe k para el cual $K^{p,q} = L^{p,q} = 0$ a menos que $p \geq k$ y $q \geq k$. Sea $\phi : K^{\bullet\bullet} \to L^{\bullet\bullet}$un morfismo de complejos dobles. Si ϕ induce un isomorfismo de grupos de cohomología horizontal $H_H^{p,q}(K^{\bullet\bullet}) \xrightarrow{\sim} H_H^{p,q}(L^{\bullet\bullet})$, entonces ϕ induce un isomorfismo $H^j(K^{\bullet\bullet}) \xrightarrow{\sim} H^j(L^{\bullet\bullet})$. La misma conclusión se tiene si ϕ induce un isomorfismo de los grupos de cohomología vertical.*

Demostración. Esta es una consecuencia fácil de la Proposición 3.1.5. Las sucesiones espectrales de la segunda filtración de $K^{\bullet\bullet}$ y $L^{\bullet\bullet}$ son convergentes. ϕ induce un morfismo entre estas sucesiones espectrales. Éste es un isomorfismo en los términos E_1. Por lo tanto también tenemos un isomorfismo de los términos E_∞. Ahora, para un n dado, los términos $E^{p,n-p}(K^{\bullet\bullet})$ son los cocientes graduados para una filtración finita (i.e., regular y exhaustiva) $F^p(K^{\bullet\bullet})$ de $H^n(K^{\bullet\bullet})$. Una afirmación similar es verdadera para $E_\infty^{p,n-p}(L^{\bullet\bullet})$. Ya que tenemos un isomorfismo del cociente graduado, el resultado se sigue. $\square$

Un caso importante de una sucesión espectral es el de una sucesión espectral esférica. Esto significa que para algún $k \geq 1$, tenemos $E_2^{p,q} = 0$ a menos que $q = 0$ o $q = k$. Entonces tenemos $E_r^{p,q} = E_2^{p,q}$ para $r \leq k+1$, seguido por

$$\begin{aligned} E_{k+2}^{p,0} &= E_2^{p,0}/d_{k+1}(E_2^{p-k-1,k}) \\ E_{k+2}^{p,k} &= \mathrm{Ker}(d_{k+1} : E_2^{p,k} \to E_2^{p+k+1,0}) \end{aligned}$$

La sucesión espectral se degenera a E_{k+2}. Podemos entonces poner junta la sucesión exacta corta

$$0 \to E_\infty^{n,0} \to H^n(Tot(K^{\bullet\bullet})) \to E_\infty^{n-k,k} \to 0$$

en una sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} \cdots \to E_2^{n-k-1,k} \xrightarrow{d_{k+1}} E_2^{n,0} \to H^n(Tot(K^{\bullet\bullet})) \\ \to E_2^{n-k,k} \xrightarrow{d_{k+1}} E_2^{n+1,0} \cdots \to \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.3. Hipercohomología

La hipercohomología es una generalización de la cohomología de gavillas. Se demostró en la Proposición 1.2.8 que la categoría de gavillas de grupos abelianos $\mathbf{AB}(X)$ sobre un espacio X es una categoría abeliana.

Necesitaremos complejos dobles para definir y calcular la hipercohomología de un complejo en $\mathbf{AB}(X)$. Un ejemplo de un complejo en $\mathbf{AB}(X)$ que ocurre en geometría es el complejo de De Rham

$$\underline{A}^0_M \xrightarrow{d} \underline{A}^1_M \xrightarrow{d} \cdots$$

donde la gavilla $\underline{A}^p_M$ de $p-$formas es de grado p y d denota la diferencial exterior. Un complejo de $\mathcal{K}^\bullet$ en $\mathbf{AB}(X)$ se dice que es acotado inferiormente si existe un entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathcal{K}^p = 0$ para $p < k$.

Proposición 3.3.1. *Sea $(\mathcal{K}^\bullet, d_{\mathcal{K}})$ un complejo en $\mathbf{AB}(X)$ acotado inferiormente. Existe un complejo doble $(\mathcal{I}^{\bullet\bullet}, \delta_{\mathcal{I}}, d_{\mathcal{I}})$ con $\mathcal{I}^{p,q} = 0$ para $p < 0$, y un morfismo de complejos $u : \mathcal{K}^\bullet \to (\mathcal{I}^{0,\bullet}, d_{\mathcal{I}})$ tal que*

(1) *Para cada $q \in \mathbb{Z}$, el complejo $\mathcal{I}^{\bullet,q}$ en $\mathbf{AB}(X)$ con diferencial δ es una resolución inyectiva de $\mathcal{K}^q$.*

(2) *Para cada $q \in \mathbb{Z}$, el complejo $\delta_{\mathcal{I}}(\mathcal{I}^{\bullet,q-1}) \subseteq \mathcal{I}^{\bullet,q}$ en $\mathbf{AB}(X)$ es una resolución inyectiva de $d_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}^{q-1})$.*

(3) *Para cada $q \in \mathbb{Z}$, el complejo $\mathrm{Ker}(\delta_{\mathcal{I}} : \mathcal{I}^{\bullet,q-1} \to \mathcal{I}^{\bullet,q}) \subseteq \mathcal{I}^{\bullet,q}$ en $\mathbf{AB}(X)$ es una resolución inyectiva de $\mathrm{Ker}(d_{\mathcal{K}} : \mathcal{K}^{q-1} \to \mathcal{K}^q)$.*

(4) *Para cada $q \in \mathbb{Z}$, el complejo $\underline{H}^{\bullet;q}_H(\mathcal{I}^{\bullet\bullet})$ (cohomología horizontal) en $\mathbf{AB}(X)$ es una resolución inyectiva de $\underline{H}^q(\mathcal{K}^\bullet)$.*

Además, si $f : \mathcal{K}^\bullet \to \mathcal{L}^\bullet$ es un morfismo de complejos en $\mathbf{AB}(X)$ acotados inferiormente, y si $\mathcal{I}^{\bullet\bullet}$ y $\mathcal{J}^{\bullet\bullet}$ son complejos dobles como se describió más arriba, f puede extenderse a un morfismo de complejos dobles, el cuál es único salvo homotopía.

Demostración. Usaremos la Proposición 2.2.1 repetidamente. Sea k tal que $\mathcal{K}^q = 0$ para $q < k$. Primero construimos una resolución inyectiva $\mathcal{H}^{\bullet,q}$ de $\underline{H}^q(\mathcal{K}^\bullet)$ para todo q, y una resolución inyectiva $\mathcal{R}^{\bullet,q}$ de $d_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}^{q-1})$. Entonces usando la Proposición 2.2.1 encontramos una resolución inyectiva $\mathcal{S}^{\bullet,q}$ del $\mathrm{Ker}(d_{\mathcal{K}} : \mathcal{K}^q \to \mathcal{K}^{q+1})$, por inducción sobre $q \geq k$, tal que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
d_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}^{q-1}) & \to & \mathcal{R}^{\bullet,q} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Ker}(d_{\mathcal{K}} : \mathcal{K}^q \to \mathcal{K}^{q+1}) & \to & \mathcal{S}^{\bullet,q} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\underline{H}^q(\mathcal{K}^\bullet) & \to & \mathcal{H}^{\bullet,q} \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

Encontramos, por inducción sobre q, una resolución inyectiva $(\mathcal{I}^{\bullet,q}, \delta)$ de $\mathcal{K}^q$ y un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Ker}(d_{\mathcal{K}} : \mathcal{K}^q \to \mathcal{K}^{q+1}) & \to & \mathcal{S}^{\bullet,q} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{K}^q & \to & \mathcal{I}^{\bullet,q} \\
\downarrow & & \downarrow \\
d_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}^q) & \to & \mathcal{R}^{\bullet,q+1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

Definimos la diferencial vertical $\delta_{\mathcal{I}} : \mathcal{I}^{\bullet,q} \to \mathcal{I}^{\bullet,q+1}$ como la composición de las aplicaciones $\mathcal{I}^{\bullet,q} \to \mathcal{R}^{\bullet,q+1}$, $\mathcal{R}^{\bullet,q+1} \to \mathcal{S}^{\bullet,q+1}$ y $\mathcal{S}^{\bullet,q+1} \to \mathcal{I}^{\bullet,q+1}$. La composición $\delta_{\mathcal{I}} \circ \delta_{\mathcal{I}}$ es 0, porque está se factoriza a través de una composición la cual es 0 por construcción. Ya que $\delta_{\mathcal{I}}$ es un morfismo de complejos, tenemos un complejo doble. Todas las otras propiedades de $\mathcal{I}^{\bullet\bullet}$ son fácilmente verificadas. La última parte de la afirmación es probada de la misma manera que la Proposición 2.2.1.

El complejo doble $\mathcal{I}^{\bullet\bullet}$ se llama resolución inyectiva de $\mathcal{K}^{\bullet}$. Usaremos resoluciones inyectivas para definir los grupos de hipercohomología de un complejo en $\mathbf{AB}(X)$. $\square$

Definición y Proposición 3.3.2. *Sea $\mathcal{K}^{\bullet}$ un complejo en $\mathbf{AB}(X)$ acotado inferiormente. El grupo de hipercohomología $H^p(X, \mathcal{K}^{\bullet})$ es el p-ésimo grupo de cohomología del complejo doble $\Gamma(X, \mathcal{I}^{\bullet,\bullet})$, donde $\mathcal{I}^{\bullet\bullet}$ es una resolución inyectiva de $\mathcal{K}^{\bullet}$. Estos grupos de cohomología están definidos independientemente de la resolución inyectiva. Cualquier morfismo $\phi : \mathcal{K}^{\bullet} \to \mathcal{L}^{\bullet}$ de complejos de gavillas induce un grupo de homomorfismos $H^p(X, \mathcal{K}^{\bullet}) \to H^p(X, \mathcal{L}^{\bullet})$.*

Demostración. Ésta se sigue de la Proposición 3.3.1. $\square$

Nótese que una gavilla $\mathcal{A}$ puede ser vista como un complejo en $\mathbf{AB}(X)$, el cual es $\mathcal{A}$ en grado 0 y 0 en todos los otros grados. Entonces para un tal complejo recuperamos la cohomología de gavillas como se definió en la Sección 1. El resultado siguiente es una generalización de la Proposición 2.2.4 y del Corolario 2.2.5 para una sucesión exacta corta de complejos en $\mathbf{AB}(X)$.

Proposición 3.3.3. *Sea $0 \to \mathcal{A}^{\bullet} \to \mathcal{B}^{\bullet} \to \mathcal{C}^{\bullet} \to 0$ una sucesión exacta corta de complejos en $\mathbf{AB}(X)$ acotados inferiormente. Sea $\mathcal{I}^{\bullet\bullet}$ una resolución inyectiva de $\mathcal{A}^{\bullet}$ e $\mathcal{J}^{\bullet\bullet}$ una resolución inyectiva de $\mathcal{C}^{\bullet}$. Entonces existe una resolución inyectiva $\mathcal{K}^{\bullet\bullet}$ de $\mathcal{B}^{\bullet}$ y un diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}^{\bullet\bullet} & \longrightarrow & \mathcal{K}^{\bullet\bullet} & \longrightarrow & \mathcal{J}^{\bullet\bullet} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}^{\bullet} & \longrightarrow & \mathcal{B}^{\bullet} & \longrightarrow & \mathcal{C}^{\bullet} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Corolario 3.3.4. *Bajo las suposiciones de la Proposición 3.3.3 existe una sucesión exacta larga*

$$\cdots \to H^p(X, \mathcal{A}^{\bullet}) \to H^p(X, \mathcal{B}^{\bullet}) \to H^p(X, \mathcal{C}^{\bullet}) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(X, \mathcal{A}^{\bullet}) \to \cdots$$

Proposición 3.3.5. *Sea $\mathcal{K}^{\bullet}$ un complejo en $\mathbf{AB}(X)$ acotado inferiormente. Entonces hay una sucesión espectral convergente con $E_1^{p,q} = H^q(X, \mathcal{K}^p)$ y $E_\infty^{p,q} = Gr_F^p(H^{p+q}(X, \mathcal{K}^{\bullet}))$ para alguna filtración $F(\mathcal{K}^{\bullet})$. Entonces la diferencial $d_1 : H^q(X, \mathcal{K}^p) \to H^q(X, \mathcal{K}^{p+1})$ es inducida por el morfismo de gavillas $d_{\mathcal{K}}^p : \mathcal{K}^p \to \mathcal{K}^{p+1}$.*

Demostración. Tómese una resolución inyectiva $\mathcal{I}^{\bullet\bullet}$ de $\mathcal{K}^\bullet$ como en la Proposición 3.3.1 (está debe soló satisfacer la propiedad (1) en 3.3.1). Entonces $H^\bullet(\mathcal{K}^\bullet)$ es la cohomología del complejo doble $\Gamma(X, \mathcal{I}^{\bullet\bullet})$. Consideremos la segunda filtración de este complejo doble. El término E_1 es la cohomología vertical, i.e., $E_1^{p,q}$ es el grado de la $q-$cohomología del complejo $\Gamma(X, \mathcal{I}^{\bullet,p})$. Ya que $\mathcal{I}^{\bullet,p}$ es una resolución inyectiva de la gavilla $\mathcal{K}^p$, tenemos $E_1^{p,q} = H^q(X, \mathcal{K}^p)$. La diferencial d_1 es inducida por la diferencial horizontal, la cual es un morfismo de complejos $\Gamma(X, \mathcal{I}^{\bullet,p}) \to \Gamma(X, \mathcal{I}^{\bullet,p+1})$ inducida por el morfismo de complejos $\mathcal{I}^{\bullet,p} \xrightarrow{d} \mathcal{I}^{\bullet,p+1}$ de una resolución inyectiva de $\mathcal{K}^p$ a una resolución inyectiva de $\mathcal{K}^{p+1}$. Por lo tanto $d_1 : H^q(X, \mathcal{K}^p) \to H^q(X, \mathcal{K}^{p+1})$ es inducida por $d_{\mathcal{K}}^p : \mathcal{K}^p \to \mathcal{K}^{p+1}$. Así $\mathcal{K}^{\bullet\bullet}$ es acotado inferiormente, existe algún k tal que $\mathcal{I}^{p,q} = 0$ a menos que $p \geq 0$ y $q \geq k$. Por lo tanto la sucesión espectral converge. Los términos E_∞ son entonces cocientes graduados para la filtración de $H^\bullet(\Gamma(X, \mathcal{I}^{\bullet\bullet})) = H^\bullet(X, \mathcal{K}^\bullet)$ inducida por la filtración de $\mathcal{K}^\bullet$ por el subcomplejo

$$F^p(\mathcal{K}^\bullet) = 0 \to \cdots \to 0 \to \mathcal{K}^p \to \mathcal{K}^{p+1} \to \cdots .$$

□

Corolario 3.3.6. *Sea $\mathcal{K}^\bullet$ un complejo en $\mathbf{AB}(X)$ acotado inferiormente. Supongamos que cada gavilla del complejo $\mathcal{K}^\bullet$ es <u>acíclica</u>, i.e., satisface $H^q(X, \mathcal{K}^p) = 0$ para $q > 0$. Entonces tenemos un isomorfismo canónico entre los grupos de hipercohomología $H^n(X, \mathcal{K}^\bullet)$ y los grupos de cohomología del complejo*

$$\cdots \to \Gamma(X, \mathcal{K}^p) \to \Gamma(X, \mathcal{K}^{p+1}) \to \cdots .$$

Demostración. La suposición significa que $E_1^{p,q} = 0$ para $q \neq 0$. Lo mismo se tiene para el término E_2, y por la Proposición 3.1.4 tenemos $H^n(\mathcal{K}^\bullet) = E_2^{n,0}$. Ahora los términos E_2 son los grupos de cohomología del complejo de grupos con $E_1^{n,0} = \Gamma(X, \mathcal{K}^n)$ de grado n. □

Vamos a introducir la sucesión espectral de hipercohomología. Sea $\mathcal{K}^\bullet$ un complejo en $\mathbf{AB}(X)$ acotado inferiormente en X, tal que cada gavilla $\mathcal{K}^p$ es acíclica. Sea $\mathcal{I}^{\bullet\bullet}$ una resolución inyectiva de $\mathcal{K}^\bullet$ que cumple las condiciones de la Proposición 3.3.1. Consideremos el complejo doble de grupos abelianos $\Gamma(X, \mathcal{I}^{\bullet\bullet})$. La cohomología horizontal es la cohomología del complejo $\Gamma(X, \mathcal{I}^{\bullet,p})$, i.e., la cohomología de gavilla $H^q(X, \mathcal{K}^p)$, la cual es cero para

$q > 0$. Por lo tanto la segunda sucesión espectral se degenera a E_2, y la cohomología total del complejo doble $\Gamma(X, \mathcal{I}^{\bullet\bullet})$ se identifica con la cohomología del complejo $\Gamma(X, \mathcal{K}^{\bullet})$.

Por otra parte, la primera sucesión espectral tiene como término E_1 la cohomología vertical

$$E_1^{p,q} = \operatorname{Ker}(d : \Gamma(X, \mathcal{I}^{p,q}) \to \Gamma(X, \mathcal{I}^{p,q+1})/d\Gamma(X, \mathcal{I}^{p,q-1}).$$

Recordemos, con la notación de la demostración de la Proposición 3.3.1, obtenemos que

(1) $\mathcal{S}^{\bullet,q} = \operatorname{Ker}(d : \mathcal{I}^{\bullet,q} \to I^{\bullet,q+1})$ es una resolución inyectiva de $\operatorname{Ker}(d_{\mathcal{K}}^q)$.

(2) $\mathcal{R}^{\bullet,q} = \mathcal{I}^{\bullet,q}/\mathcal{S}^{\bullet,q}$ es una resolución inyectiva de $\operatorname{Im}(d_{\mathcal{K}}^{q-1})$.

(3) $\mathcal{H}^{\bullet,q} = \mathcal{S}^{\bullet,q}/\mathcal{R}^{\bullet,q}$ es una resolución inyectiva de $\underline{H}^q(\mathcal{K}^{\bullet})$.

Por lo tanto obtenemos

$$E_1^{p,q} = \Gamma(X, \mathcal{S}^{p,q})/\Gamma(X, \mathcal{R}^{p,q}) = \Gamma(X, \mathcal{H}^{p,q}).$$

La diferencial $d_1 : \Gamma(X, \mathcal{H}^{p,q}) \to \Gamma(X, \mathcal{H}^{p+1,q})$ es inducida por la diferencial $\mathcal{H}^{p,q} \to \mathcal{H}^{p+1,q}$ en la resolución inyectiva $\mathcal{H}^{\bullet,q}$ de $\underline{H}^q(\mathcal{K}^{\bullet})$. De aquí tenemos

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \underline{H}^q(\mathcal{K}^{\bullet})). \tag{3.6}$$

Proposición 3.3.7. *Para cualquier complejo $\mathcal{K}^{\bullet}$ en $\mathbf{AB}(X)$ acotado inferiormente sobre un espacio X existe una sucesión espectral convergente*

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \underline{H}^q(\mathcal{K}^{\bullet})),$$

con término E_∞ el cociente graduado de alguna filtración de $H^{\bullet}(X, \mathcal{K}^{\bullet})$. Cualquier morfismo de complejos en $\mathbf{AB}(X)$ induce morfismos de las sucesiones espectrales correspondiente.

Demostración. Tenemos probado esto más arriba en el caso en que $\mathcal{K}^{\bullet}$ es un complejo en $\mathbf{AB}(X)$ acíclico. Dado cualquier complejo $\mathcal{K}^{\bullet}$ en $\mathbf{AB}(X)$ acotado inferiormente existe una resolución inyectiva $\mathcal{I}^{\bullet\bullet}$ de $\mathcal{K}^{\bullet}$. Sea $\mathcal{I}^{\bullet}$ el complejo total de $\mathcal{I}^{\bullet\bullet}$. Entonces la hipercohomología de $\mathcal{K}^{\bullet}$ es por definición la de $\mathcal{I}^{\bullet}$, y consideramos la sucesión espectral que obtenemos de $\mathcal{I}^{\bullet}$, la cual da lo que queríamos, ya que $\underline{H}^n(\mathcal{K}^{\bullet}) \xrightarrow{\sim} \underline{H}^n(\mathcal{I}^{\bullet})$. $\square$

Esta se llama *sucesión espectral de hipercohomología*, la cual tiene muchas consecuencias. Decimos que un morfismo $\phi : \mathcal{K}^\bullet \to \mathcal{L}^\bullet$ de complejos en $\mathbf{AB}(X)$ es casi-isomorfismo si para cada n, ϕ induce un isomorfismo $\underline{H}^n(\mathcal{K}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \underline{H}^n(\mathcal{L}^\bullet)$ de gavillas de cohomología.

Proposición 3.3.8. *Sea $\mathcal{K}^\bullet$ y $\mathcal{L}^\bullet$ complejos de gavillas acotados inferiormente, y sea $\phi : \mathcal{K}^\bullet \to \mathcal{L}^\bullet$ un casi-isomorfismo. Para cada n el homomorfismo inducido $H^n(X, \mathcal{K}^\bullet) \to H^n(X, \mathcal{L}^\bullet)$ es un isomorfismo. En particular, la cohomología $H^n(X, \mathcal{A})$ de una gavilla $\mathcal{A}$ identificada con la hipercohomología $H^n(X, \mathcal{K}^\bullet)$ de cualquier resolución $\mathcal{K}^\bullet$ de $\mathcal{A}$. En el caso en que $\mathcal{K}^\bullet$ es una resolución acíclica de $\mathcal{A}$, entonces $H^j(X, \mathcal{A})$ es el $j-$ésimo grupo de cohomología del complejo*

$$\cdots \to \Gamma(X, \mathcal{K}^p) \to \Gamma(X, \mathcal{K}^{p+1}) \to \cdots$$

Demostración. Sean $E_r^{\bullet,\bullet}(\mathcal{K}^\bullet)$ y $E_r^{\bullet,\bullet}(\mathcal{L}^\bullet)$ las sucesiones espectrales de hipercohomología para $\mathcal{K}^\bullet$ y $\mathcal{L}^\bullet$. Conforme a la Proposición 3.3.7, tenemos un morfismo natural de complejos filtrados para las resoluciones inyectivas; de aquí tenemos un morfismo de sucesiones espectrales $\phi_r : E_r^{p,q}(\mathcal{K}^\bullet) \to E_r^{p,q}(\mathcal{L}^\bullet)$. Para $r = 1$, ϕ_1 es un isomorfismo por la suposición. Ya que ambas sucesiones espectrales son convergentes, vemos de la Proposición 3.2.1 que ϕ_∞ es un isomorfismo. Ahora tenemos un morfismo $\phi : H^n(X, \mathcal{K}^\bullet) \to H^n(X, \mathcal{L}^\bullet)$, el cual es compatible con las filtraciones finitas de ambos grupos, e induce isomorfismo en los grupos cocientes. Fácilmente se ve que éste es un isomorfismo. □

Capítulo 4

Cohomología e hipercohomología de Čech

4.1. Cohomología de Čech

En esta Sección estudiaremos algunos conceptos y resultados de la cohomología de Čech. Se demuestra que existe un homomorfismo entre la cohomología de Čech y la cohomología de gavillas.

Sea $\mathcal{A}$ una pregavilla de grupos abelianos sobre un espacio X y sea $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta de X. Recordemos que $\mathcal{A}(\emptyset) = \{0\}$. Para definir la cohomología de Čech de la cubierta $\mathcal{U}$ con coeficientes en la pregavilla $\mathcal{A}$ necesitamos dar la definición de los $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A})$. Para $i_0, ..., i_p \in I$, $U_{i_0,...,i_p}$ denota la intersección $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}$. Para $p \geq 0$, sea $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}) = \prod_{i_0,...,i_p} \mathcal{A}(U_{i_0,...,i_p})$, el producto recorrido sobre $(p + 1)-$tuplas de elementos de I. Un elemento $\underline{\alpha}$ de $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ es una familia $\alpha_{i_0,...,i_p} \in \mathcal{A}(U_{i_0,...,i_p})$. Definimos un homomorfismo $\delta : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \to C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ como sigue:

$$\delta(\underline{\alpha})_{i_0,...,i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (\alpha_{i_0,...,i_{j-1},i_{j+1},...,i_{p+1}})|_{U_{i_0,...,i_{p+1}}}, \tag{4.1}$$

Nótese que como $\mathcal{A}(\emptyset) = \{0\}$, sólo necesitamos considerar aquellas $p-$tuplas $i_0, ..., i_p$ para las cuales $U_{i_0,...,i_p} \neq \emptyset$ en la definición de $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A})$.

Proposición y Definición 4.1.1. *Tenemos que $\delta \circ \delta = 0$. La cohomología de grado p del complejo de grupos abelianos*

$$\cdots \xrightarrow{\delta} C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\delta} C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\delta} \cdots \tag{4.2}$$

se denota por $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{A})$ *y se llama la* <u>*cohomología de Čech*</u> *de grado* p *de la cubierta* $\mathcal{U}$ *con coeficientes en la pregavilla* $\mathcal{A}$. *Si* $\mathcal{A}$ *es una gavilla, tenemos* $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{A}) = \Gamma(X,\mathcal{A})$. *Un elemento* $\underline{\alpha} = (\alpha_{i_0,\dots,i_p})$ *de* $C^p(\mathcal{U},\mathcal{A})$ *se llama un* $p-$*cociclo de Čech de la cubierta* $\mathcal{U}$ *con coeficientes en* $\mathcal{A}$. $\delta(\underline{\alpha})$ *se llama la cofrontera de* $\underline{\alpha}$. *La imagen del* $p-$*cociclo* $\underline{\alpha}$ *en* $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{A})$ *se llama la clase de cohomología de* $\underline{\alpha}$. *El complejo 4.2 se llama el complejo de Čech de* $\mathcal{U}$ *con coeficientes en* $\mathcal{A}$ *y es denotado* $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{A})$.

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned}
\delta\circ\delta(\underline{\alpha})_{i_0,\dots,i_{p+2}} &= \sum_j (-1)^j(\delta\circ\alpha)_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_{p+2}}\\
&= \sum_{k<j}(-1)^j(-1)^k\alpha_{i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_{p+2}}\\
&\quad + \sum_{k>j}(-1)^j(-1)^{k-1}\alpha_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_{p+2}}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

El grupo $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{A})$ es el núcleo de la aplicación

$$\delta : \prod_i \mathcal{A}(U_i) \to \prod_{i,j}\mathcal{A}(U_{ij}).$$

Una familia $(s_i \in \mathcal{A}(U_i))$ está en el núcleo de δ si y sólo si para todo $i,j\in I$, tenemos $s_i = s_j$ en U_{ij}. Como $\mathcal{A}$ es una gavilla, esto significa que al pegarse todos los s_i forman un (único) elemento de $\Gamma(X,\mathcal{A})$. □

La cohomología de Čech de grado 1 aparece ya implícita en el siglo XIX trabajada por Cousin para encontrar una función meromorfa f en una superficie Riemanniana S con polos en a lo más un conjunto finito de puntos $x_1,...,x_n$, con parte polar dada g_k en cada x_k. Por parte polar en cada x_k, decimos la "parte negativa" de la serie de Laurent de f en x_k. No hay obstrucción local; por lo tanto se puede encontrar una cubierta abierta $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ de S, y funciones meromorfas f_i sobre U_i, con la parte polar requerida. Entonces $\alpha_{ij} = f_j - f_i$ es holomorfa en U_{ij}, ya que la parte polar en cada x_k se cancela. Tenemos

$$\delta(\alpha)_{ijk} = \alpha_{jk} - \alpha_{ik} + \alpha_{ij} = f_k - f_j + f_i - f_k + f_j - f_i = 0$$

sobre U_{ijk}. Así α_{ij} es un $1-$cociclo de Čech con valores en la gavilla $\mathcal{O}_S$ de funciones holomorfas. Si la clase de cohomología de α es cero, existe $h_i \in$

$\Gamma(U_i, \mathcal{O}_S)$ tal que $h_j - h_i = \alpha_{ij}$ sobre U_{ij}. Entonces $f_i - h_i = f_j - h_j$ sobre U_{ij}, así obtenemos una función meromorfa global sobre S con la parte polar dada en $x_1, .., x_n$. Inversamente, si tal función meromorfa existe, entonces $h_i = f_i - f$ es una $0-$cocadena de $(U_i)_{i\in I}$ con coeficientes en $\mathcal{O}_S$, con cofrontera igual a α. En conclusión, el problema de Cousin tiene una solución positiva si y sólo si la clase de cohomología de α_{ij} en $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_S)$ es cero. En gran parte el problema de Cousin (en dimensiones mayores) guió a H. Cartan y Oka a aplicaciones de la teoría de gavillas en variable compleja.

Lema 4.1.2. *Sea $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta del espacio X tal que $X = U_i$ para algún $i \in I$. Entonces para cualquier pregavilla $\mathcal{A}$ de grupos abelianos sobre X, tenemos $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}) = 0$ para $p > 0$.*

Demostración. Construimos una nulhomotopía H (i.e., una homotopía de la aplicación identidad y la aplicación constante cero), esto es, un homomorfismo $H : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \to C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ tal que $\delta \circ H + H \circ \delta = \mathrm{Id}$ en $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ para $p > 0$. Esto demostrará el Lema. En efecto, sea $\underline{\alpha}$ un cociclo de Čech de grado p. Entonces $\underline{\alpha} = \delta(H(\underline{\alpha}))$. Póngase $H(\underline{\alpha})_{i_0,\ldots,i_{p-1}} = (\underline{\alpha})_{i,i_0,\ldots,i_{p-1}}$. Verifiquemos que H es una nulhomotopía

$$\begin{aligned}
\delta(H(\underline{\alpha}))_{i_0,\ldots,i_p} &= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j H(\underline{\alpha})_{i_0,\ldots,i_{j-1},i_{j+1},\ldots,i_p} \\
&= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j(\alpha_{i,i_0,\ldots,i_{j-1},i_{j+1},\ldots,i_p}) \\
&= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j(\alpha_{i_0,\ldots,i_{j-1},i_{j+1},\ldots,i_p}). \\
H(\delta(\underline{\alpha}))_{i_0,\ldots,i_p} &= \delta(\underline{\alpha})_{i,i_0,\ldots,i_p} \\
&= (\alpha_{i_0,\ldots,i_p}) - \sum_{j=0}^{p}(-1)^j(\alpha_{i,i_0,\ldots,i_{j-1},i_{j+1},\ldots,i_p}) \\
&= (\alpha_{i_0,\ldots,i_p}) - \sum_{j=0}^{p}(-1)^j(\alpha_{i_0,\ldots,i_{j-1},i_{j+1},\ldots,i_p}).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Por (4.3)

$$\delta \circ H + H \circ \delta = \mathrm{Id} \;\; \text{en} \;\; C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \;\; \text{para } p > 0.$$

□

Ahora consideremos el complejo de Čech $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{A})$. Para cualquier subconjunto abierto V de X tenemos una cubierta abierta inducida $\mathcal{U}|_V = (V \cap$

$U_i)_{i\in I}$ de V. Podemos formar el complejo de Čech $C^\bullet(\mathcal{U}|_V, \mathcal{A})$ para está cubierta y para $\mathcal{A}|_V$. Hay aplicaciones restricción naturales a los subconjuntos abiertos más pequeños, así obtenemos un complejo $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ de pregavillas sobre X. Tenemos un morfismo natural $j : \mathcal{A} \to \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{A})$. Si $\mathcal{A}$ es una gavilla, obtenemos un complejo de gavillas sobre X.

Proposición 4.1.3. *Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Entonces para cualquier gavilla $\mathcal{A}$ de grupos abelianos sobre X, $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ es una resolución de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Es suficiente mostrar que cada $x \in X$ tiene una vecindad abierta V tal que la sucesión

$$0 \to \mathcal{A}(W) \xrightarrow{j} C^0(\mathcal{U}|_W, \mathcal{A}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}|_W, \mathcal{A}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

es exacta, para cada subconjunto abierto W en V. En efecto, ya que un límite directo de sucesiones exactas es aún exacto, entonces obtenemos una sucesión exacta para los tallos en x. Por la Proposición 1.2.6, entonces tenemos una sucesión exacta de gavillas. Tomar $V = U_{i_0}$, para algún U_{i_0} el cual contiene a x. Entonces para $W \subseteq V$, la cubierta abierta $(U_i \cap W)$ de W tiene a $W = W \cap U_{i_0}$ entre su rango, por lo tanto la sucesión de arriba es exacta por el Lema 4.1.2. $\square$

A continuación enunciamos los dos resultados importantes de esta Sección.

Proposición 4.1.4. *Para cualquier gavilla $\mathcal{A}$ de grupos abelianos sobre un espacio X y cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, hay un homomorfismo canónico de grupos $\check{H}^j(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \to H^j(X, \mathcal{A})$ de la cohomología de Čech a la cohomología de gavilla, inducido por un morfismo de resoluciones de $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ a alguna resolución inyectiva de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{I}^\bullet$ una resolución inyectiva de $\mathcal{A}$. Por la Proposición 4.1.3, $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ es una resolución de $\mathcal{A}$. Por la Proposición 2.2.1(2), existe un morfismo de resoluciones $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \to \mathcal{I}^\bullet$, el cual es único salvo homotopía. Entonces la aplicación inducida en el complejo de secciones globales da el homomorfismo de grupo $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \to H^p(X, \mathcal{A})$. $\square$

Observación. Se prueba más adelante que el homomorfismo definido en la Proposición 4.1.4 es un isomorfismo cuando el espacio X es paracompacto.

Por lo tanto se puede usar la cohomología de Čech para construir clases en cohomología de gavillas. Estamos interesados en la pregunta de si todas clases de cohomología de gavillas pueden ser capturadas de esta manera. Primero, consideramos la cohomología de Čech de gavillas inyectivas.

Lema 4.1.5. *Sea $\mathcal{I}$ una gavilla sobre X la cual tiene la propiedad de que para cada subconjunto abierto V, la gavilla $U \mapsto \mathcal{I}(V \cap U)$ sobre X es inyectiva. Entonces para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, se tiene $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{I}) = 0$ para $p > 0$.*

Demostración. La gavilla $\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{I})$ es un producto de gavillas del tipo $U \mapsto \mathcal{I}(V \cap U)$, por lo tanto es inyectiva. Así $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{I})$ es una resolución inyectiva de $\mathcal{I}$. El complejo de secciones globales es $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{I})$, y su cohomología es $H^p(X, \mathcal{I})$. Así tenemos $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{I}) \cong H^p(X, \mathcal{I})$, el cuál es 0 para $p > 0$. □

4.2. Hipercohomología de Čech

Sea $\mathcal{K}^\bullet$ un complejo de gavillas acotado inferiormente sobre el espacio X. Formemos el complejo doble

$$
\begin{tikzcd}
 & \vphantom{X} & \vphantom{X} & \\
\cdots \arrow[r, "\delta"] & C^p(\mathcal{U}, \mathcal{K}^{q+1}) \arrow[u, "d_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, "\delta"] & C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{K}^{q+1}) \arrow[u, "d_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, "\delta"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta"] & C^p(\mathcal{U}, \mathcal{K}^{q}) \arrow[u, "d_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, "\delta"] & C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{K}^{q}) \arrow[u, "d_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, "\delta"] & \cdots \\
 & \vphantom{X} \arrow[u, "d_{\mathcal{K}}"] & \vphantom{X} \arrow[u, "d_{\mathcal{K}}"] &
\end{tikzcd}
\tag{4.4}
$$

La *hipercohomología de Čech* $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{K}^\bullet)$ es la cohomología total de este complejo doble. El complejo doble es denotado por $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{K}^\bullet)$.

Estudiaremos esta hipercohomología de Čech para una resolución $\mathcal{I}^\bullet$ de una gavilla $\mathcal{A}$ la cual tiene la propiedad del Lema 4.1.5. La resolución inyectiva construida en la demostración de la Proposición 2.2.1 es de este tipo. También tiene la propiedad de que para U un subconjunto abierto de X, $\mathcal{I}^\bullet|_U$ es una resolución inyectiva de $\mathcal{A}_U$.

El siguiente Teorema muestra que para una gavilla localmente acíclica el homomorfismo de la Proposición 4.1.4 es realmente un isomorfismo.

Teorema 4.2.1. *Sea $\mathcal{A}$ una gavilla sobre X, y sea $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta de X tal que $H^q(U_{i_0,\ldots,i_p}, \mathcal{A}) = 0$ para todo $q > 0$ e $i_0, \ldots, i_p \in I$. Entonces el homomorfismo canónico $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \to H^p(X, \mathcal{A})$ de la Proposición 4.1.4 es un isomorfismo para toda $p \geq 0$.*

Demostración. Sea $\mathcal{J}^\bullet$ una resolución inyectiva de la gavilla $\mathcal{A}$. Consideremos el complejo doble $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{I}^\bullet)$, donde $\mathcal{I}^q = 0$ para $q < -1$, $\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{A}$ y $\mathcal{I}^t = \mathcal{J}^t$ para $t \geq 0$ como se muestra en el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & {} & {} & & {} & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{I}^q) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{I}^q) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{I}^q) \arrow[r] \arrow[u] & {} \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & & \vdots \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{I}^2) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{I}^2) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{I}^2) \arrow[r] \arrow[u] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{I}^1) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{I}^1) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{I}^1) \arrow[r] \arrow[u] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{I}^0) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{I}^0) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{I}^0) \arrow[r] \arrow[u] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[u] & {} \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\tag{4.5}
$$

El complejo total $Tot(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{I}^\bullet))$ del complejo doble $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{I}^\bullet)$ es definido como:

$$Tot^n(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{I}^\bullet)) = \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{I}^q).$$

Las dos filtraciones naturales del complejo total son:

1) La primera filtración $F_H(Tot(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{I}^\bullet)))$ es dada por los subcomplejos $F_H^p(Tot(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{I}^\bullet))) = \bigoplus_{i\geq p} \mathcal{C}^i(\mathcal{U},\mathcal{I}^j)$.

2) La segunda filtración $F_V(Tot(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{I}^\bullet)))$ es dada por los subcomplejos $F_V^q(Tot(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{I}^\bullet))) = \bigoplus_{j\geq q} \mathcal{C}^i(\mathcal{U},\mathcal{I}^j)$.

Al considerar la primera filtración $F_H(Tot(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{I}^\bullet)))$ tenemos una colección de columnas complejas

$$
\begin{array}{ccccc}
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{I}^q) & \mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{I}^q) & \cdots & \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{I}^q) \\
\uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{I}^2) & \mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{I}^2) & \cdots & \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{I}^2) \\
\uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{I}^1) & \mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{I}^1) & \cdots & \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{I}^1) \\
\uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{I}^0) & \mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{I}^0) & \cdots & \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{I}^0) \\
\uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{A}) & \mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{A}) & \cdots & \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{A}) \\
\uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
0 & 0 & & 0
\end{array}
\tag{4.6}
$$

El término $E_1^{p,\bullet}$ es la cohomología vertical del complejo $\mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{I}^\bullet)$. Por lo tanto para cada q tenemos que $E_1^{p,q} = H_V^{p+q}(\frac{F_H^p(Tot(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{I}^\bullet)))}{F_H^{p+1}(Tot(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{I}^\bullet)))}) = \prod_{i_0,\ldots,i_p} H^q(U_{i_0,\ldots,i_p},\mathcal{A})$=0 para $q > 0$ por hipótesis. Al calcular el término E_1 de la sucesión espectral el diagrama 4.5 se convierte en:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \prod_i \mathcal{A}(U_i) \arrow[r] & \prod_{i_0,i_1} \mathcal{A}(U_{i_0,i_1}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{4.7}$$

Por las propiedades de la sucesión espectral, se tiene que

$$E_2^{p,q} = H(E_1^{p,q}),$$

la cual es cero para $q > 0$ y $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ para $q = 0$.

Por la Proposición 3.1.4 tenemos que la sucesión se colapsa en E_2 y hay un isomorfismo entre $H^n(Tot(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{I}^\bullet)))$ y $E_r^{n,0} = \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ para $r \geq 2$.

Ahora, si consideramos la segunda filtración. Haciendo un procedimiento análogo. Utilizando el hecho de que $\mathcal{I}^\bullet = \mathcal{J}^\bullet$ es una resolución inyectiva $\mathcal{A}$ y el Lema 4.2.5 tenemos que

$$(E')_2^{p,q} = H((E')_1^{p,q}),$$

la cual es cero para $p > 0$ y es $H^q(X, \mathcal{A})$ para $p = 0$.

Por la Proposición 3.1.4 tenemos que la sucesión se colapsa en $(E')_2$ y hay un isomorfismo entre $H^n(Tot(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{I}^\bullet)))$ y $(E')_r^{0,n} = \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ para $r \geq 2$.

Por la Proposición 3.1.5 se tiene que $E_r^{p,q} \xrightarrow{\sim} (E')_r^{p,q}$ para $r > 2$, incluyendo $r = \infty$.

Considerando ambas sucesiones espectrales obtenemos el resultado

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} H^p(X, \mathcal{A})$$

para $p \geq 0$.

$\square$

Considérese el caso de la gavilla constante $\mathcal{B}_X$ sobre X, para X una variedad de dimensión finita y $\mathcal{B}$ algún grupo abeliano. Siguiendo a A. Weil [**AW1**], una cubierta abierta $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ se llama una *cubierta buena* si todas intersecciónes no vacías $U_{i_0,\ldots,i_p}$ son contraíbles. Se puede mostrar que la hipótesis del Teorema 4.2.1 se satisface (para $\mathcal{B} = \mathbb{R}$). Entonces el Teorema 4.2.1 dice que la cohomología de gavillas $H^p(X, \mathcal{B}_X)$ es la cohomología de un complejo simplicial, el *nervio* de la cubierta, con coeficientes en $\mathcal{B}_X$. Este nervio tiene un vértice para cada elemento de I, y un $p-$simplejo con vértices $i_0, \ldots, i_p$ es completo siempre que la intersección $U_{i_0,\ldots,i_p}$ es no vacía. Por lo tanto la cohomología de Čech es isomorfa a la cohomología simplicial. Si X es una variedad Riemanniana, una buena cubierta puede ser construida como sigue. Un subconjunto S de X se llama geodésicamente convexo si dado dos puntos x y y de S, hay una única geodésica de x a y, y esta geodésica esta contenida en S. Un subconjunto geodésico es contraíble. Se puede cubrir X por subconjuntos geodésicamente convexos; tal cubierta es buena.

La cohomología de Čech tiene la ventaja de que nos permite una construcción fácil y explícita de un producto copa

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \otimes \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to \check{H}^{p+q}(\mathcal{U}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \tag{4.8}$$

Aquí $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son gavillas de grupos abelianos sobre X, y la *gavilla del producto* tensorial $\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}$ es la gavilla asociada a la pregavilla $U \mapsto \mathcal{F}(U)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{G}(U)$. El tallo en x de $\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}$ es $F_x \otimes G_x$. El producto taza será definido de un morfismo de complejos. Primero necesitamos la noción del producto tensorial $\mathcal{A}^\bullet \otimes \mathcal{B}^\bullet$ de dos complejos; este es el complejo total del complejo doble $\mathcal{A}^p\otimes\mathcal{B}^q$. Así, el grado del término n de $\mathcal{A}^\bullet \otimes \mathcal{B}^\bullet$ es $\oplus_p \mathcal{A}^p \otimes \mathcal{B}^{n-p}$. La diferencial en $\mathcal{A}^\bullet \otimes \mathcal{B}^\bullet$ es $d(a \otimes b) = (da) \otimes b + (-1)^p a \otimes db$ para $a \in \mathcal{A}^p$, $b \in \mathcal{B}^q$. Tenemos el producto tensorial evidente $\otimes : H^p(\mathcal{A}^\bullet) \otimes H^q(\mathcal{B}^\bullet) \to H^{p+q}(\mathcal{A}^\bullet \otimes \mathcal{B}^\bullet)$.

Ahora volvemos a las gavillas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ de grupos abelianos sobre X. Tenemos los complejos $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ y $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G})$. La parte interesante es la construcción de un morfismo de complejos

$$\phi : \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}). \tag{4.9}$$

Para $\underline{\alpha} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ y $\underline{\beta} \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$, ponemos

$$\phi(\underline{\alpha} \otimes \underline{\beta})_{i_0,\ldots,i_{p+q}} = \alpha_{i_0,\ldots,i_p} \otimes \beta_{i_p,\ldots,i_{p+q}}. \tag{4.10}$$

Se comprueba fácilmente que ϕ es de hecho un morfismo de complejos. La demostración es la misma como para el producto copa en el complejo de cocadenas singulares en un espacio. La aplicación inducida en cohomología da el producto copa en la cohomología de Čech. Para $\underline{\alpha}$ un cociclo de Čech de grado p con coeficientes en $\mathcal{F}$ y $\underline{\beta}$ un cociclo de Čech de grado q con coeficientes en $\mathcal{G}$, tenemos

$$(\underline{\alpha} \cup \underline{\beta})_{i_0,\dots,i_{p+q}} = \alpha_{i_0,\dots,i_p} \otimes \beta_{i_p,\dots,i_{p+q}}. \tag{4.11}$$

El producto copa tiene la propiedad siguiente.

Proposición 4.2.2. (1) *El producto copa es asociativo, i.e., para* $\alpha \in \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, $\beta \in \check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G}), \gamma \in \check{H}^r(\mathcal{U},\mathcal{H})$, *tenemos*

$$\alpha \cup (\beta \cup \gamma) = (\alpha \cup \beta) \cup \gamma \in \check{H}^{p+q+r}(\mathcal{U}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \otimes \mathcal{H}).$$

(2) *El producto copa es graduado conmutativo. Si* $\alpha \in \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}),\ \beta \in \check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$, *tenemos*

$$\alpha \cup \beta = (-1)^{pq} \beta \cup \alpha \in \check{H}^{p+q}(\mathcal{U}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}).$$

Demostración. Véase [**MG-JH**]. □

También vamos a usar la noción del producto tensorial $\mathcal{K}^\bullet \otimes \mathcal{L}^\bullet$ de dos complejos de gavillas de grupos abelianos. La componente de grado n de $\mathcal{K}^\bullet \otimes \mathcal{L}^\bullet$ es $\oplus_p \mathcal{K}^p \otimes \mathcal{L}^{n-p}$. Hay un morfismo de complejos

$$\phi : Tot(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{K}^\bullet)) \otimes Tot(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{L}^\bullet)) \to Tot(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{K}^\bullet \otimes \mathcal{L}^\bullet)).$$

Para $\underline{\alpha}$ una $p-$cocadena de Čech con valores en $\mathcal{K}^l$, y $\underline{\beta}$ una $q-$cocadena de Čech con valores en $\mathcal{L}^m$, $\phi(\underline{\alpha} \otimes \underline{\beta})$ es la $p+q-$cocadena con valores en $\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{L}^m$ dada por la fórmula (4.10).

La cohomología de Čech tiene dos desventajas. La primera es que no hay razón para que una sucesión exacta de gavillas de origen a una sucesión exacta larga de grupos de cohomología de Čech. La segunda es que los grupos de cohomología de Čech depende de la elección de la cubierta abierta. Hay una solución a ambos problemas, por lo menos para un espacio paracompacto X.

Dadas dos cubiertas abiertas $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$, $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ de X decimos que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ si y sólo si existe una función $f : J \to I$ tal que $V_j \subseteq U_{f(j)}$ para todo $j \in J$. Entonces escribimos $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$. Dada tal función f, existe un morfismo de complejos $f_* : C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{A}) \to C^\bullet(\mathcal{V},\mathcal{A})$ tal que para

$\underline{\alpha}$ una $p-$cocadena de Čech para la cubierta $\mathcal{U}$, $f_*(\underline{\alpha})$ es la $p-$cocadena de la cubierta $\mathcal{V}$ definida por

$$f_*(\underline{\alpha})_{j_0,\dots,j_p} = (\alpha_{f(j_0),\dots,f(j_p)})|_{V_{j_0,\dots,j_p}} \tag{4.12}$$

Notemos que como $\alpha_{f(j_0),\dots,f(j_p)}$ es una sección de $\mathcal{A}$ sobre $U_{f(j_0),\dots,f(j_p)}$, podemos restringir a $\alpha_{f(j_0),\dots,f(j_p)}$ a un abierto más pequeño $V_{j_0,\dots,j_p}$.

Lema 4.2.3. *Dadas dos funciones $f, f' : J \to I$ tales que $V_j \subseteq U_{f(j)}$, $V_j \subseteq U_{f'(j)}$, hay una homotopía entre f_* y f'_*.*

Demostración. Sólo escribimos abajo la formula para la homotopía H en una $p-$cocadena $\underline{\alpha}$ para la cubierta $\mathcal{U}$

$$H(\underline{\alpha})_{j_0,\dots,j_{p-1}} = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k res(\alpha_{f(j_0),\dots,f(j_k),f'(j_k),\dots,f'(j_{p-1})}),$$

donde res denota la operación de restricción de $U_{f(j_o),\dots,f(j_k),f'(j_k),\dots,f'(j_{p-1})}$ a $V_{j_0,\dots,j_{p-1}}$. $\square$

El Lema 4.2.3 implica que la aplicación inducida $f_* : \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{A}) \to \check{H}^p(\mathcal{V},\mathcal{A})$ es independiente de f.

Observación. La clase de cubiertas abiertas de X no es necesariamente un conjunto. Para solucionar este problema considérese el siguiente conjunto de cubiertas abiertas de X

$$N = \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} = (U_x)_{x\in X} \text{ y } x \in U_x \text{ para cada } x \in X\}.$$

Para $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ en el conjunto N definimos un orden por

$$\mathcal{U} \geq \mathcal{V} \text{ si y sólo si } \forall x \in X\ V_x \subseteq U_x.$$

El conjunto N con este orden es un conjunto dirigido.

Sea $\mathcal{U}' = (U_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta de X, defínase una cubierta $\tilde{\mathcal{U}}$ a partir de la cubierta $\mathcal{U}'$ de la siguiente manera. Para cada $x \in X$ existe algún $U_i \in \mathcal{U}'$ tal que $x \in U_i$, pongáse $\tilde{U}_x = U_i$, entonces $\tilde{\mathcal{U}} = ((\tilde{U})_x)_{x\in X} \in N$.

Definición 4.2.4. *Sea $\mathcal{A}$ una gavilla de grupos abelianos sobre un espacio X. El complejo de Čech $C^\bullet(X,\mathcal{A})$ es dado por*

$$C^p(X,\mathcal{A}) = \varinjlim_{\mathcal{U}\in N} C^p(\mathcal{U},\mathcal{A})$$

Los grupos de cohomología de Čech $\check{H}^p(X, \mathcal{A})$ *son definidos como*

$$\check{H}^p(X, \mathcal{A}) = \frac{\mathrm{Ker}(\delta : C^p(X, \mathcal{A}) \to C^{p+1}(X, \mathcal{A}))}{\mathrm{Im}(\delta : C^{p-1}(X, \mathcal{A}) \to C^p(X, \mathcal{A}))} \cong \varinjlim_{\mathcal{U} \in N} \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}),$$

El problema de obtener una sucesión exacta larga para cohomología de Čech de una sucesión exacta corta puede ser formulado como sigue: introducimos la noción de sucesión exacta de pregavillas. La sucesión $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$ de pregavillas sobre X se llama exacta si para cada subconjunto abierto U la sucesión $0 \to \mathcal{A}(U) \to \mathcal{B}(U) \to \mathcal{C}(U) \to 0$ es exacta. Nótese que si estas pregavillas son todas gavillas, una sucesión exacta corta de gavillas en general no da origen a una sucesión exacta corta de pregavillas, ya que el concepto de gavillas es local.

Lema 4.2.5. *Sea* $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$ *una sucesión exacta de pregavillas de grupos abelianos sobre* X*. Entonces tenemos una sucesión exacta larga de grupos*

$$0 \to \check{H}^0(X, \mathcal{A}) \to \check{H}^0(X, \mathcal{B}) \to \check{H}^0(X, \mathcal{C}) \to \check{H}^1(X, \mathcal{A}) \to \cdots \tag{4.13}$$

Demostración. Para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$, tenemos una sucesión exacta de complejos

$$0 \to \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{B}) \to \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{C}) \to 0.$$

Entonces tenemos una sucesión exacta larga de grupos de cohomología de Čech para esta cubierta. El límite directo de estas sucesiones exactas es aún exacto. □

Similarmente uno define los grupos de hipercohomología de Čech $\check{H}^p(X, \mathcal{K}^\bullet)$ con coeficientes en un complejo de pregavillas acotado inferiormente $\mathcal{K}^\bullet$. Ahora estudiamos la relación de la hipercohomología de Čech y la hipercohomología de gavillas. Serán isomorfas para un espacio paracompacto. Una cubierta abierta $(U_i)_{i \in I}$ de X es *localmente finita* si cada punto de X está contenido tan sólo en un número finito de abiertos de la cubierta.

Definición 4.2.6. *Un espacio* X *se dice que es paracompacto si* X *es de Hausdorff y para cada cubierta abierta* $(U_i)_{i \in I}$*, existe un refinamiento* $(V_j)_{j \in J}$ *el cual es una cubierta abierta localmente finita.*

Un subconjunto cerrado de un espacio paracompacto es paracompacto. A continuación damos algunos resultados básicos de espacios paracompactos, que se demuestran en [**MUN**].

Proposición 4.2.7. (1) *Sea Z un subconjunto cerrado de un espacio paracompacto X. Entonces cada vecindad de Z contiene una vecindad cerrada.*

(2) *Sea $(U_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta de un espacio paracompacto X. Existe una cubierta abierta $(V_i)_{i\in I}$ tal que $\overline{V}_i \subseteq U_i$ para todo i.*

(3) *Cualquier espacio métrico es paracompacto.*

Las variedades de dimensión infinita consideradas en este libro son paracompactas (aunque no localmente compactas).

Teorema 4.2.8. (1) *Hay un homomorfismo natural de los grupos $\check{H}^p(X,\mathcal{K}^\bullet) \to H^p(X,\mathcal{K}^\bullet)$.*

(2) *Supóngase que para cualquier pregavilla $\mathcal{A}$ de grupos abelianos sobre X, tal que la gavilla asociada a $\mathcal{A}$ es cero, los grupos de cohomología de Čech $\check{H}^p(X,\mathcal{A})$ son todos 0. Entonces el homomorfismo de arriba $\check{H}^p(X,\mathcal{K}^\bullet) \to H^p(X,\mathcal{K}^\bullet)$ es un isomorfismo para cualquier complejo de gavillas acotado inferiormente $\mathcal{K}^\bullet$.*

(3) *Si X es paracompacto, y para cualquier pregavilla $\mathcal{A}$ de grupos abelianos sobre X su gavilla asociada es cero, entonces $\check{H}^p(X,\mathcal{A}) = 0$ para toda p. Por lo tanto, para X paracompacto, la hipercohomología de Čech es canónicamente isomorfa a la hipercohomología de gavilla.*

Demostración. Considérese un complejo de gavillas acotado inferiormente $\mathcal{K}^\bullet$ y una resolución inyectiva $\mathcal{I}^{\bullet\bullet}$ de $\mathcal{K}^\bullet$, sea $Tot(\mathcal{I}^{\bullet\bullet})$ el complejo total de $\mathcal{I}^{\bullet\bullet}$. Sean $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ y $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ dos cubiertas abiertas de X, tal que $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$. Elegir una aplicación $f : J \to I$ tal que $V_j \subseteq U_{f(j)}$, y sea $f_* : C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{K}^\bullet) \to C^\bullet(\mathcal{V},\mathcal{K}^\bullet)$ el morfismo correspondiente del complejo doble. Entonces podemos construir un diagrama de resoluciones de $\mathcal{K}^\bullet$, el cual es conmutativo salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{K}^\bullet) \arrow[rr, "f_*"] \arrow[dr] & & \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{V},\mathcal{K}^\bullet) \arrow[dl] \\ & Tot(\mathcal{I}^{\bullet\bullet}) & \end{tikzcd}$$

Así, en grupos de hipercohomogía, obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{K}^\bullet) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \check{H}^p(\mathcal{V},\mathcal{K}^\bullet) \arrow[dl] \\ & H^p(X,\mathcal{K}^\bullet) & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, obtenemos homomorfismos

$$can : \check{H}^p(X,\mathcal{K}^\bullet) = \varinjlim_{\vec{u}} \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{K}^\bullet) \to H^p(X,\mathcal{K}^\bullet).$$

Esto prueba (1).

Bajo la suposición de (2), primero probemos que $can : \check{H}^p(X,\mathcal{A}) \to H^p(X,\mathcal{A})$ es un isomorfismo para todo $p \geq 0$ y toda gavilla $\mathcal{A}$. Para $p = 0$, ya tenemos un isomorfismo $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} H^0(X,\mathcal{A})$ para cualquier cubierta abierta. Ahora la suposición implica que para $\mathcal{F}$ cualquier pregavilla de grupos abelianos y para $\tilde{\mathcal{F}}$ la gavilla asociada, tenemos isomorfismos $\check{H}^p(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{H}^p(X,\tilde{\mathcal{F}})$. Esto implica que para cada sucesión exacta de gavillas $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$, tenemos una correspondiente sucesión exacta larga de grupos de cohomología de Čech. En efecto, la gavilla $\mathcal{C}$ es la gavilla asociada a la pregavilla $\mathcal{F}(U) = \mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)$. El Lema 4.2.5 da una sucesión exacta larga

$$\cdots \to \check{H}^p(X,\mathcal{A}) \to \check{H}^p(X,\mathcal{B}) \to \check{H}^p(X,\mathcal{F}) = \check{H}^p(X,\mathcal{C}) \to \cdots$$

Esta sucesión exacta aplica a la sucesión exacta de grupos de cohomología de gavilla. Supóngase que sabemos que $can : \check{H}^i(X,\mathcal{A}) \to H^i(X,\mathcal{A})$ es un isomorfismo para toda $i \leq p$ y todas las gavillas $\mathcal{A}$ sobre X. Dada una gavilla $\mathcal{A}$, sea $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{I}$ un monomorfismo, donde $\mathcal{I}$ tiene la propiedad del Lema 4.1.5. Tenemos un diagrama conmutativo de sucesiones exactas

$$\begin{tikzcd} \check{H}^p(X,\mathcal{I}) \arrow[r] \arrow[d, "can"] & \check{H}^p(X,\mathcal{I}/\mathcal{A}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "can"] & \check{H}^{p+1}(X,\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "can"] & 0 \\ H^p(X,\mathcal{I}) \arrow[r] & H^p(X,\mathcal{I}/\mathcal{A}) \arrow[r] & H^{p+1}(X,\mathcal{A}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

como $\check{H}^{p+1}(X,\mathcal{I}) = 0$ por el lema 4.1.5. Ya que las dos primeras aplicaciones verticales son isomorfas, lo es la tercera. Así, $can : \check{H}^p(X,\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim}$

$H^p(X, \mathcal{A})$. En el caso de complejos de gavillas acotado inferiormente, se establece una sucesión espectral convergente

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(X, \underline{H}^q(\mathcal{K}^\bullet)),$$

con el término E_∞ el cociente graduado de alguna filtración de los grupos de hipercohomología de Čech de $\mathcal{K}^\bullet$. Esta sucesión espectral aplica a la sucesión espectral correspondiente de hipercohomología de gavilla. Ya que tenemos un isomorfismo de los términos E_2, tenemos un isomorfismo de hipercohomología de Čech con hipercohomología de gavilla. Esto prueba (2).

Ahora supóngase que X es paracompacto, y sea $\mathcal{A}$ una pregavilla de grupos abelianos tal que la gavilla asociada $\tilde{\mathcal{A}}$ es cero. No es difícil probar que cada clase en $\check{H}^p(X, \mathcal{A}) = \lim\limits_{\vec{u}} \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ es representada por un $p-$cociclo de Čech de alguna cubierta abierta localmente finita $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X, con coeficientes en $\mathcal{A}$. Conforme a la Proposición 4.2.7, existe una cubierta abierta $(V_i)_{i \in I}$ de X tal que $\overline{V}_i \subseteq U_i$ para todo i. Encontrar una cubierta $\mathcal{W}$ refinamiento de $\mathcal{U}$, tal que α induce la $0-$cocadena de $\mathcal{W}$. Esto verificará (3). Elegimos para cada $x \in X$ una vecindad abierta W_x de x con la siguiente condiciones

(a) W_x es unión solo de un número finito de U_i.

(b) Siempre que $x \in V_i$, tenemos $W_x \subseteq V_i$.

(c) W_x no es unión de V_i a menos que $x \in U_i$.

Ahora usamos la suposición de que la gavilla asociada $\tilde{\mathcal{A}}$ es 0. Dado un subconjunto abierto V, $s \in \mathcal{A}(V)$ y $x \in V$, existe una vecindad abierta Z de x tal que s tiene imagen cero en $\mathcal{A}(V)$. Esto es porque el tallo de $\mathcal{A}$ en x es 0. Dado x, hay sólo un número finito de componentes $\alpha_{i_0,\dots,i_p}$ donde cada U_{i_j} contiene a x. Reemplazando W_x por una vecindad pequeña, podemos suponer que α tiene restricción cero a W_x, dando la propiedad

(d) Si $x \in U_{i_0,\dots,i_p}$, entonces $\alpha_{i_0,\dots,i_p}$ tiene restricción cero a $W \cap U_{i_0,\dots,i_p}$.

Tenemos la cubierta abierta $\mathcal{W} = (W_x)_{x \in X}$. Ahora podemos elegir una aplicación $f : X \to I$ tal que $x \in V_{f(x)}$, por lo tanto $W_x \subseteq V_{f(x)} \subset U_{f(x)}$ por (b). Esto induce un homomorfismo $f_* : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \to C^p(\mathcal{W}, \mathcal{A})$, y afirmamos que la imagen de α es 0. En efecto, sea $x_0, \dots, x_p \in X$ tal que $W_{x_0} \cap \cdots \cap W_{x_p} \neq \emptyset$; entonces tenemos $W_{x_k} \subseteq V_{f(x_k)}$. Poner $i_k = f(x_k)$. Para $0 \leq k \leq p$, W_{x_0} se une con V_{i_k}, por lo tanto esta contenida en V_{i_k}. Por (c), esto implica que $x_0 \in U_{i_0,\dots,i_p}$. Por (d), $\alpha_{i_0,\dots,i_p}$ tiene restricción cero a $W_{x_0} \cap U_{i_0,\dots,i_p}$, por lo tanto a $W_{x_0} \cap \cdots \cap W_{x_p}$. $\square$

Capítulo 5

Cohomología de De Rham

El objetivo de la presente Sección es demostrar el isomorfismo que existe entre la cohomología de gavillas con coeficientes en la gavilla constante $\mathbb{R}_M$ y la cohomología de De Rham de una variedad suave M, la cual cumple ciertas condiciones importantes. Para obtener el resultado es necesario introducir algunos conceptos y resultados fundamentales. Sea $\mathcal{A}$ una gavilla de grupos abelianos sobre un espacio X y sea $K^\bullet$ una resolución acíclica de $\mathcal{A}$, por la Sección 2 sabemos que los grupos de cohomología de gavillas $H^p(X, \mathcal{A})$ son los grupos de cohomología del complejo $\Gamma(X, \mathcal{K}^0) \to \Gamma(X, \mathcal{K}^1) \to \cdots$. Esto será útil para obtener resultados generales los cuales dicen que ciertas gavillas son acíclicas. Para una variedad suave M, hay una resolución natural de la gavilla constante $\mathbb{R}_M$, es decir, el complejo de De Rham.

5.1. Complejo de De Rham

Recordemos la noción de variedad suave modelada sobre un espacio vectorial topológico (posiblemente de dimensión infinita). Consideremos un espacio vectorial topológico E, el cual se supondrá que es localmente convexo y de Hausdorff. Una función f de un subconjunto abierto U de E a un espacio vectorial topológico F se dice que es continuamente diferenciable (o de clase C^1) si para cada $x \in U$ y $v \in E$, el límite $df(x; v) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$ existe y es continuo como una función de $(x; v)$. Similarmente se tiene la noción de función de clase C^2, y etc.. Entonces la $n-$ésima derivada $d^{(n)}f(x; v_1, v_2, ..., v_n)$ se supone que es una función continua en $U \times E^n$ la cual es claramente multilineal en las últimas n variables. Llamamos a f una función suave si es de clase C^k para toda $k \in \mathbb{N}$, i.e., $f \in C^\infty$. Una forma diferencial ω de grado n (o simplemente una $n-$forma) en el subconjunto abierto U de E es una función suave $\omega : U \times E^n \to \mathbb{R}$ la cual es multilineal y alternante en las últimas n variables. La diferencial exterior $d\omega$ de una $n-$forma es la $(n+1)-$forma

$$d\omega(x; v_1, v_2, ..., v_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} D\omega(-; v_1, ..., \hat{v}_j, ..., v_{n+1})(x, v_j). \tag{5.1}$$

Aquí $D\omega(-; v_1, ..., \hat{v}_j, ..., v_{n+1})$ es una función suave en U, que toma su derivada parcial en la dirección de v_j. La diferencial d satisface $d \circ d = 0$, por lo tanto tenemos el complejo de De Rham

$$\cdots \xrightarrow{d} A^p(U) \xrightarrow{d} A^{p+1}(U) \xrightarrow{d} \cdots , \tag{5.2}$$

donde $A^p(U)$ denota el espacio vectorial de $p-$formas en U. Este complejo de De Rham es denotado por $A^\bullet(U)$.

Lema 5.1.1. *(Lema de Poincaré) Sea U un subconjunto abierto convexo del espacio vectorial topológico E. Entonces el complejo de De Rham 5.2 tiene $H^p(A^\bullet(U)) = 0$ para $p > 0$, y $H^0(A^\bullet(U)) = \mathbb{R}$.*

Demostración. Para la demostración véase por ejemplo [**B-T**], aplicar sin cambios. □

Una variedad suave modelada en E, es un espacio de Hausdorff M equipado con una cubierta abierta $(U_i)_{i\in I}$ y con homeomorfismos $\phi_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i$, para V_i un subconjunto abierto de E. Se requiere que las funciones de transición $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_{ij}) \xrightarrow{\sim} \phi_j(U_{ij})$ sean funciones suave entre subconjuntos abiertos de E. Dada una variedad suave modelada M en E, se tiene la noción de funciones suaves, de $p-$formas, del complejo de De Rham, y etc..

Para un subconjunto abierto U de M, el espacio $A^p(U)$ de $p-$formas diferenciables en M, consiste en familias $\omega_i \in A^p(\phi_i(U_i \cap U))$ que satisfacen la condición del pegado $(\phi_j \circ \phi_i^{-1})^* \omega_j = \omega_i$ en $\phi_i(U_{ij} \cap U)$. Entonces tenemos la gavilla $\underline{A}^p_M$ de $p-$formas, tal que $\underline{A}^p_M(U) = A^p(U)$. El complejo de gavillas

$$\underline{A}^0_M \xrightarrow{d} \underline{A}^1_M \xrightarrow{d} \cdots , \tag{5.3}$$

se llama el complejo de De Rham de gavillas y es denotado por $\underline{A}^\bullet_M$.

Definición 5.1.2. *Los grupos de* <u>*cohomología de De Rham*</u> $H^p_{DR}(M)$ *de una variedad suave son los grupos de cohomología del complejo de De Rham* $A^\bullet(M)$.

Nuestro proposito principal en esta Sección es comparar la cohomología de De Rham de una variedad suave M con su cohomología de Čech $H^p(M, \mathbb{R}_M)$.

Proposición 5.1.3. *Sea M una variada suave. El complejo de gavillas $\underline{A}^\bullet_M$ es una resolución de la gavilla constante $\mathbb{R}_M$.*

Demostración. Es suficiente mostrar que para cualquier $x \in M$, el complejo del tallo $\underline{A}^\bullet_{M,x}$ es una resolución de $\mathbb{R}$. Como M es una variedad suave, podemos también suponer que M es un subconjunto abierto de E. Ya que E es localmente convexo, existe un sistema fundamental de vecindades abiertas U de x las cuales son convexas. Entonces tenemos $\underline{A}^p_{M,x} = \varinjlim_{U \text{ convexo}} A^p(U)$. El complejo $\mathbb{R} \to A^0(U) \to A^1(U) \to \cdots$ es acíclico por el Lema 5.1.1. El resultado se tiene usando el hecho de que un límite directo de sucesiones exactas es exacto. $\square$

Queremos mostrar que para una extensa clase de variedades, las gavillas $\underline{A}^p_M$ son acíclicas. Para este objetivo usaremos la teoría de gavillas suaves. Resultará que las gavillas suaves son acíclicas.

Primero necesitamos definir la imagen inversa de una gavilla $\mathcal{A}$ sobre Y bajo una función continua $f : X \to Y$. Comenzaremos con una definición bastante abstracta, y entonces daremos una descripción más concreta. La definición abstracta se dada en dos pasos. Primero se construye una pregavilla $\mathcal{B}$ sobre X por

$$\mathcal{B}(U) = \varinjlim_{\substack{V \subseteq Y \text{ abierto} \\ f(U) \subseteq V}} \mathcal{A}(V).$$

Entonces la imagen inversa $f^{-1}(\mathcal{A})$ es la gavilla asociada a la pregavilla $\mathcal{B}$. Esta <u>*imagen inversa*</u> $f^{-1}(\mathcal{A})$ tendrá tallo en $x \in X$ igual al tallo $\mathcal{A}_{f(x)}$.

Aquí está la descripción más concreta. Una sección $U \ni x \mapsto s_x \in \mathcal{A}_{f(x)}$ sobre un subconjunto abierto U de X se llama continua, si para cualquier $x \in U$, existe una vecindad V de $f(x)$ en Y y una sección σ de $\mathcal{A}$ sobre V, tal que $s_z = \sigma_{f(z)}$ para toda $z \in U \cap F^{-1}(V)$. Entonces $f^{-1}(\mathcal{A})(U)$ es el conjunto de secciones continuas $U \ni x \mapsto s_x$.

Para una gavilla $\mathcal{A}$ sobre un espacio X y para un subespacio cerrado $Z \xhookrightarrow{i} X$, póngase $\Gamma(Z, \mathcal{A}) = \Gamma(Z, i^{-1}(\mathcal{A}))$.

Lema 5.1.4. *Sea X un espacio paracompacto, y sea $i : Z \hookrightarrow X$ la inclusión de un subconjunto cerrado. Entonces para cualquier gavilla $\mathcal{A}$ de conjuntos en X tenemos $\Gamma(Z, \mathcal{A}) = \lim\limits_{\vec{U}} \Gamma(U, \mathcal{A})$, donde el límite directo es tomado sobre todas las vecindades abiertas de Z.*

Demostración. Hay una función natural $\lim\limits_{\vec{U}} \Gamma(U, \mathcal{A}) \to \Gamma(Z, \mathcal{A})$. El punto crucial es mostrar que esta función es suprayectiva. Sea $s \in \Gamma(Z, \mathcal{A})$. Para todo $x \in Z$, sea $s_x \in i^{-1}(\mathcal{A})_x = \mathcal{A}_x$ el germen de s en x. Sea $s \in \Gamma(Z, A)$, existe una vecindad U'_x en x, y una sección σ_x de $\mathcal{A}$ sobre U'_x, tal que $(\sigma_x)_y = s_y$ para todo $y \in U'_x$ (esto es una consecuencia de la definición de $i^{-1}(\mathcal{A})$). Entonces ya que X es paracompacto existe una familia localmente finita $(U_i)_{i \in I}$ de subconjuntos abiertos de X, tal que $Z \subseteq \bigcup_i U_i$ y cada U_i esta contenida en alguna U'_x. Podemos entonces encontrar otra familia $(V_i)_{i \in I}$ tal que $\overline{V}_i \subseteq U_i$. Para cada $i \in I$, tenemos una sección s_i de $\mathcal{A}$ sobre U_i, tal que s_i coincide con s sobre $U_i \cap Z$. Para cada $x \in X$, sea Y_x una vecindad abierta de x en X tal que el conjunto T_x de i, para el cual $Y_x \cap V_i$ es no vacío, es un conjunto finito. Encogiendo a Y_x si es necesario, podemos suponer que $x \in U_i$ para $i \in T_x$. Para cada $i, j \in T_x$, las secciones s_i y s_j coinciden sobre alguna vecindad N_{ij} de x. Sea W_x la intersección de Y_x con todas las N_{ij} (para $i, j \in T_x$); entonces sobre W_x, tenemos una sección bien definida u_x de $\mathcal{A}$, la cual en cada y es igual a s_i para cada i tal que $y \in W_x \cap U_i$. Para $x, y \in Z$, las secciones u_x, u_y evidentemente tienen la misma restricción a $W_x \cap W_y$. Como $\mathcal{A}$ es una gavilla, obtenemos una sección u de $\mathcal{A}$ sobre $\bigcup_{x \in Z} W_x$, cuya restricción W_x es igual a u_x. Por lo tanto $s \in \Gamma(Z, \mathcal{A})$ es la restricción a Z de $u \in \Gamma(\bigcup_{x \in Z} W_x, \mathcal{A})$. $\square$

Definición 5.1.5. *Una gavilla $\mathcal{A}$ de conjuntos sobre un espacio X se llama una gavilla suave si para cada subconjunto cerrado Z de X, la aplicación restricción $\Gamma(X, \mathcal{A}) \to \Gamma(Z, \mathcal{A})$ es suprayectiva.*

Nótese que si $\mathcal{A}$ es una gavilla suave en X, y Z es un subconjunto cerrado de X, entonces $\mathcal{A}_{/Z}$ es una gavilla suave en Z.

Teorema 5.1.6. *Sea X un espacio paracompacto. Entonces*

(1) Cualquier gavilla inyectiva de grupos abelianos en X es suave.

(2) Cualquier gavilla suave de grupos abelianos en X es acíclica.

Demostración. Mostremos que una gavilla inyectiva $\mathcal{A}$ en cualquier espacio X es una *gavilla flácida*, i.e., para cualquier subconjunto abierto U de X, la aplicación restricción $\Gamma(X, \mathcal{A}) \to \Gamma(U, \mathcal{A})$ es suprayectiva. Ahora el Lema 5.1.4 implica que una gavilla suave en un espacio compacto es suave. En Sección 2, construimos un encaje $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}(U) = \Pi_{x \in U} \mathcal{A}_x$. Esta gavilla $\mathcal{I}$ es inyectiva y suave. Como $\mathcal{A}$ es inyectiva, $\mathcal{A}$ es sumando directo de la gavilla $\mathcal{I}$. Pero un sumando directo de una gavilla suave es también suave. Esto prueba (1).

Ahora mostremos que dada una sucesión exacta $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ en $\mathcal{AB}(X)$ con $\mathcal{F}$ suave, la aplicación $\Gamma(X, \mathcal{G}) \to \Gamma(X, \mathcal{H})$ es suprayectiva. Sea $s \in \Gamma(X, \mathcal{H})$. Como X es paracompacto, existe una cubierta abierta localmente finita $(U_i)_{i \in I}$ de X y una sección t_i de $\mathcal{G}$ sobre U_i tal que t_i se proyecta a s. Ahora tenemos una cubierta abierta (V_i) tal que $\overline{V_i} \subseteq U_i$. Sea $Z_i = \overline{V_i}$. Consideremos el conjunto de pares (J, t_J) consistente en un subconjunto J de I y una sección t_J de $\mathcal{G}$ sobre el conjunto cerrado $Z_J := \bigcup_{i \in J} Z_i$ se proyecta a s. Esto está ordenado por $(J, t_J) < (K, t_K)$ si y sólo si $J \subseteq K$ y $t_J = (t_K)_{/Z_J}$. Cualquier cadena decreciente en este conjunto tiene un elemento máximo. Por lo tanto por el Lema de Zorn, existe un elemento máximo (J, t_J). Supóngase que existe $i \in I \backslash J$. Tenemos la sección $t_J - -t_i$ de $\mathcal{F}$ sobre $Z_J \cap Z_i$. Ya que $\mathcal{F}$ es suave, podemos extender está a una sección u de $\mathcal{F}$ sobre X. Entonces $t_J \in \Gamma(Z_J, \mathcal{G})$ y $t_i + u \in \Gamma(Z_i, \mathcal{G})$ tienen la misma restricción a $Z_J \cap Z_i$. Por la condición del pegado se tiene una seción $t_{J \cup \{i\}}$ de G sobre $Z_{J \cup \{i\}}$ la cual se proyecta a s. Esto contradice el hecho que (J, t_J) era un elemento máximo, lo que muestra que $\Gamma(X, \mathcal{G}) \to \Gamma(X, \mathcal{H})$ es sobreyectivo.

Esto implica que dada una sucesión exacta de gavillas $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ con $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ gavillas suaves, entonces $\mathcal{H}$ es una gavilla suave. Por inducción vamos a demostrar que para cualquier gavilla suave $\mathcal{F}$, se tiene que $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ para $n \geq 1$. Para probar el caso $n = 1$, elegimos un monomorfismo $\mathcal{F} \to \mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}$ es una gavilla inyectiva. Tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{I}) \to \Gamma(X, \mathcal{I}/\mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to 0,$$

como $H^1(X, \mathcal{I}) = 0$. Ya que $\mathcal{F}$ es suave, la aplicación
$\Gamma(X, I) \to \Gamma(X, \mathcal{I}/\mathcal{F})$ es sobre, por lo tanto $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$. Construir como

arriba una sucesión exacta $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I} \to \mathcal{I}/\mathcal{F} \to 0$, con $\mathcal{I}$ inyectiva, por lo tanto suave. $\mathcal{I}/\mathcal{F}$ es también suave. La sucesión exacta

$$H^n(X, \mathcal{I}/\mathcal{F}) = 0 \to H^{n+1}(X, \mathcal{F}) \to H^{n+1}(X, \mathcal{I}) = 0$$

muestra que $H^{n+1}(X, \mathcal{F}) = 0$, lo cual completa el paso inductivo. $\square$

Corolario 5.1.7. *Sea M una variedad suave paracompata tal que las gavillas $\underline{A}_M^p$ son suave. Entonces la cohomología de gavillas $H^p(M, \mathbb{R}_M)$ es canónicamente isomorfa a la cohomología de De Rham $H_{DR}^p(M)$.*

Como las gavillas suaves son acíclicas, se sigue de la Proposición 3.3.7 que se puede usar una resolución de gavillas suaves para calcular la cohomología de una gavilla de grupos abelianos en un espacio paracompacto X. Necesitamos un criterio para que una gavilla sea suave. Un endomorfismo de una gavilla $\mathcal{A}$ de grupos abelianos es un morfismo $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ en $\mathcal{AB}(X)$. Hay una gavilla de anillos $\underline{End}(\mathcal{A}) = \underline{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$, con sección global igual a $End_X(\mathcal{A}) = Hom_X(\mathcal{A}, \mathcal{A})$.

Definición 5.1.8. *Una gavilla $\mathcal{A}$ de grupos abelianos sobre un espacio X se llama una <u>gavilla fina</u> si la gavilla $\underline{End}(\mathcal{A})$ es suave.*

Si s es una sección global de una gavilla $\mathcal{A}$ de grupos sobre X, el *Soporte* de s es:

$$\mathrm{Sop}(s) = \{x \in X \mid s_x = 0\}^{\perp}.$$

Definición 5.1.9. *Sea $\mathcal{A}$ una gavilla de grupos abelianos en un espacio X, y sea $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ una cubierta abierta de X. Una <u>partición de la unidad</u> para la gavilla $\mathcal{A}$ subordinada a la cubierta $\mathcal{U}$ es una familia f_i de endomorfismos de la gavilla $\mathcal{A}$ la cual tiene las siguientes propiedades:*

(1) *Para cualquier subconjunto abierto V y cualquier sección s de $\mathcal{A}$ sobre V, la sección $f_i(s)$ tiene soporte contenido en $V \cap U_i$.*

(2) *Cada punto x en X tiene una vecindad abierta V tal que sólo un numero finito de s_i no son cero en V.*

(3) *Tenemos $\Sigma_{i \in I} s_i = \mathrm{Id}$ es el endomorfismo identidad de $\mathcal{A}$. Notemos que la $\Sigma_{i \in I} s_i$ tiene sentido por (2), la suma es localmente finita.*

Relacionando esta noción abstracta de partición de la unidad con la clásica, sea M una variedad suave. Supóngase que f_i es una partición suave de la unidad subordinada a la cubierta abierta $(U_i)_{i \in I}$. Esto quiere decir que f_i es

una función suave en M con soporte en U_i, que la suma $\Sigma_{i \in I} f_i$ es localmente finita e igual a 1. Entonces f_i induce un endomorfismo de la gavilla $\underline{A}^p_M$ de $p-$formas, es decir, multiplicación por f_i. El endomorfismo de $\underline{A}^p_M$ será denotado por f_i. Las condiciones (1), (2) y (3) de la Definición 5.1.9 se satisfacen, así que (f_i) es una partición de la unidad de la gavilla $\underline{A}^p_M$.
Observación. Cuando el espacio X es paracompacto decimos que una gavilla de grupos abelianos es fina si tiene una partición de la unidad subordinada a cualquier cubierta abierta de X.

Proposición 5.1.10. *Sea $\mathcal{A}$ una gavilla de grupos abelianos en un espacio paracompacto y sea $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ cualquier cubierta abierta de X. Supóngase que la gavilla A es fina. Entonces la gavilla $\mathcal{A}$ es suave.*

Demostración. Sea $Z \overset{i}{\hookrightarrow} X$ un subconjunto cerrado de X, y sea $s \in \Gamma(Z, i^{-1}(\mathcal{A}))$ una sección de $i^{-1}(\mathcal{A})$ sobre Z. Según el Lema 5.1.3 existe un conjunto abierto U que contiene a Z, y una sección s' de $\mathcal{A}$ sobre U, la cual se restringe a s. Entonces $\{U, X \backslash Z\}$ es una cubierta abierta de X. Sea (f_1, f_2) una partición de la unidad correspondiente. $f_1 = \mathrm{Id} - f_2$ es igual a Id en una vecindad de Z. Hay una sección global σ de $\mathcal{A}$ sobre X tal que $\sigma = f_1(s')$ sobre U y $\sigma = 0$ sobre $X \backslash \mathrm{Sop}(f_1)$. En efecto U y $X \backslash \mathrm{Sop}(f_1)$ son dos conjuntos abiertos que cubren a X, y la restricción de σ a la intersección $U \backslash \mathrm{Sop}(f_1)$ es igual a 0. La restricción de σ a una vecindad de Z es igual a s', así σ se aplica a $s \in \Gamma(Z, i^{-1}(A))$. $\square$

Sabemos que toda cubierta abierta de un espacio paracompacto admite una partición de la unidad subordinada a ella (esto es, de hecho, equivalente a la paracompacidad). Si el espacio es una variedad suave, la partición de la unidad puede tomarse suave.

Decimos que el espacio vectorial E es un espacio ILH si $E = \lim_{\vec{n}} H_n$ es un límite inverso de espacios de Hilbert H_n separables. La topología en E es la topología del límite inverso. Ésta es la topología más gruesa que hace todas las funciones proyectivas $p_n : E \to H_n$ continuas. Requerimos que para cualquier bola abierta B en H_n, se tenga

$$p_n^{-1}(\overline{B}) = \overline{p_n^{-1}(B)} \tag{5.4}$$

(lo que implica que la imagen de p_n es densa). Los ejemplos de espacios vectoriales topológicos del tipo ILH incluyen al espacio $C^\infty(S^1)$ de funciones suaves $S^1 \to \mathbb{R}$, con su topología de Fréchet. Un conjunto abierto U se llama *completo* si es de la forma $U = p_n^{-1}(V)$, para algún n y alguna bola abierta V en H_n. Los conjuntos abiertos completos forman una base de la topología de E. Un subconjunto abierto U de E se dice que es un *conjunto escamado* si existen algunos conjuntos completos $V, V_1, ..., V_q$ tal que $U = V \cap^c \overline{V}_1 \cdots \cap^c \overline{V}_q$.

Lema 5.1.11. *Sea $E = \lim\limits_{\vec{n}} H_n$ un espacio ILH que cumple la condición 5.4. Entonces para cada subconjunto abierto U de E, existe una función suave f en E la cual tiene soporte contenido en $\overline{U}$ y es tal que $f(x) > 0$ para $x \in U$.*

Demostración. Sea $U = V \cap^c \overline{V}_1 \cap^c \cdots \cap^c \overline{V}_q$. Suponer $V = p_n^{-1}(W)$, para W una bola abierta en H_n. Hay una función suave g en H_n, tal que $g(x) = 0$ para $x \in H_n \ \overline{W}$ y $g(x) > 0$ para $x \in W$. En efecto se puede tomar para g una función suave conveniente de la distancia al centro de la bola. Entonces $\phi = g \circ p_n$ es una función suave en E tal que $\phi(y) = 0$ para $y \notin p_n^{-1}(\overline{W}) = \vec{V}$ y $\phi(y) > 0$ para $y \in p_n^{-1}(W)$. Para $1 \leq j \leq q$, sea $V_j = p_{n_j}^{-1}(W_j)$, para W_j una bola abierta en el espacio de Hilbert H_{n_j}. Existe una función suave g_j en H_{n_j}, tal que

$$\begin{aligned} 0 \leq g_j(x) < 1 &\text{ para } x \notin \overline{W}_j \\ g_j(x) = 1 &\text{ para } x \in \overline{W}_j \end{aligned}$$

Sea $\phi_j = \phi \circ p_{n_j}$. Tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \phi_j(x) < 1 &\text{ para } x \notin \overline{V}_j \\ \phi_j(x) = 1 &\text{ para } x \in \overline{V}_j \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(x) = \phi(x)\Pi_{j=1}^q(1 - \phi_j(x))$ satisface los requisitos. $\square$

Antes de comenzar el próximo lema, notemos que cada subconjunto abierto U de E tiene la propiedad de ser $2-$numerable (i.e., su topología tiene una base numerable). Por lo tanto U es *Lindelöf*, es decir, para cualquier cubierta abierta $(U_i)_{i \in I}$, existe un subconjunto numerable J de I tal que $(U_i)_{i \in J}$ es una cubierta. También U es metrizable.

Lema 5.1.12. *Sea E como en el Lema 5.1.11, sea W un subconjunto abierto de E, y sea $(Z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una cubierta abierta de W cuyos abiertos son completos contenidos en W. Hay una cubierta abierta $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tal que*

(1) $V_j \subseteq Z_j$ para todo j;

(2) cada V_j es un conjunto escamado;

(3) la cubierta cerrada $\overline{V}_j$ es localmente finita.

Demostración. Cada Z_j es de la forma $Z_j = p_{n_j}^{-1}(B_{a_j}(x_j))$, donde $B_{a_j}(x_j)$ es la bola abierta de centro x_j y radio a_j en H_{n_j}. Definir V_j inductivamente. Poner $V_1 = Z_1$. Teniendo definido V_{j-1}, poner

$$V_j = Z_j \cap^c \overline{p_{n_1}^{-1} B_{r_{1j}(x_1)}} \cap^c \cdots \cap^c \overline{p_{n_{j-1}}^{-1} B_{r_{j-1,j}(x_{j-1})}}$$

donde $r_{1j} = a_1 - \frac{1}{j}, ..., r_{j-1,j} = a_{j-1} - \frac{1}{j}$. Cada V_j es un conjunto escamado que contiene a Z_j. Afirmamos que los V_j cubren a W. Sea $x \in W$, y sea j el entero más pequeño tal que $x \in Z_j$. Entonces $x \in V_j$, de lo contrario para algún $k \in \{1, ..., j-1\}$, x debe pertenecer a $\overline{p_{n_k}^{-1} B_{r_{k,j}(x_k)}} \subseteq Z_k$, una contradición. Mostremos que la cubierta $(\overline{V}_j)$ es localmente finita. Sea $x \in W$, suponer $x \in Z_j$. Poner $y = p_{n_j}(x) \in B_{a_j}(x_j)$. Sea s un número > 0 tal que la bola $B_s(y)$ está contenida en $B_{a_j}(x_j)$. Sea $t = s/2$. Para toda k suficientemente grande, la bola $B_t(y)$ esta contenida en $B_{r_{jk}(x_j)}$, y por lo tanto $p_{n_j}^{-1}(B_t(y))$ no es unión de $\overline{V}_k$. Por lo tanto la vecindad abierta $p_{n_j}^{-1}(B_t(y))$ de x intersecta sólo un número finito de $\overline{V}_k$. □

Notemos que el Lema 5.1.12 claramente implica que W es paracompacto.

Proposición 5.1.13. *Sea E un espacio ILH, que satisface la condición (5.4). Entonces para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de E, existe una partición de la unidad suave subordinada a $\mathcal{U}$.*

Demostración. Como E es paracompacto, podemos asumir que (U_i) es localmente finita. Sea (Z_i) una cubierta abierta de E tal que $\overline{Z}_i \subset U_i$ para toda i. Si podemos encontrar funciones suaves $f_i \geq 0$ con soporte en $\overline{Z}_i$, tal que $\Sigma_i f_i = 1$, tendremos una partición de la unidad para (U_i). Reemplazando la cubierta (Z_i) por un refinamiento, podemos remplazar I por un subconjunto numerable y obtener una cubierta. Por lo tanto podemos suponer que $\mathbb{N}$ es el conjunto indexado. Denotemos nuestra cubierta por $(Z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ y construir conjuntos escamado $V_j \subset Z_j$ como en el Lema 5.1.11. Por el Lema 5.1.12, existe para cada $j \in \mathbb{N}$ una función suave $g_j \geq 0$, con soporte en $\overline{V}_j$, tal que $g_j(x) > 0$ para $x \in V_j$. La función $g = \Sigma_j g_j$ en E es suave ya que $(\overline{V}_j)$ es localmente finita, por lo tanto la suma es localmente finita. Como cada $x \in E$ pertenece a algún V_j, tenemos $g(x) \geq g_j(x) > 0$. Así las funciones $f_j = \frac{g_j}{g}$ son suaves ≥ 0, con $Supp(f_j) \in \overline{V}_j \subset \overline{Z}_j$, y $\Sigma_j f_j = 1$. Esto nos da la partición de la unidad para la cubierta (U_i). □

Corolario 5.1.14. *Sea E un espacio ILH. Sean A, B subconjuntos cerrados ajenos no vacíos de E. Entonces existe una función suave g en E tal que $g(x) = 0$ para $x \in A$, $g(x) = 1$ para $x \in B$, y $0 \leq g(x) \leq 1$ para toda x.*

Demostración. $\{E \backslash B, E \backslash A\}$ es una cubierta abierta de E. Sea (f, g) una partición de la unidad correspondiente. Tenemos $0 \leq g(x) = 1 - f(x) \leq 1$. Para $x \in A$, tenemos $g(x) = 1 - f(x) = 0$; para $x \in B$, tenemos $g(x) = 1 - f(x) = 1$. □

Teorema 5.1.15. *Sea M una variedad paracompacta modelada en un espacio ILH que satisface (5.4). Entonces para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de M, existe una partición de la unidad suave subordinada a $\mathcal{U}$.*

Demostración. Podemos también suponer que cada U_i es difeomorfo a un conjunto abierto completo de E y que cada cubierta es localmente finita. Existe una cubierta abierta (V_i) tal que $\overline{V}_i \subset U_i$. Como U_i es difeomorfo a un conjunto abierto de E, vemos del Lema 5.1.12 que existe una función suave g_i en U_i, con soporte en $\overline{V}_i$, tal que $g_i(x) > 0$ para toda $x \in V_i$. Poniendo $g_i(x) = 0$ para $x \notin U_i$, obtenemos una función suave g_i en M, con soporte en $\overline{V}_i$, la cual es positiva en V_i. Así $g = \Sigma_i g_i$ es una función suave positiva, y así las funciones $f_i = \frac{g_i}{g}$ constan de una partición de la unidad subordinada a (U_i). □

Vamos a resumir los resultados obtenidos para variedades modeladas en espacios ILH.

Teorema 5.1.16. *Sea M una variedad paracompacta modelada en un espacio ILH que satisface (5.4). Entonces las gavillas $\underline{A}^p_M$ son suaves, y tienen isomorfismos canónicos*

$$\check{H}^p(M, \mathbb{R}_M) \xrightarrow{\sim} H^p(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H^p_{DR}(M).$$

Si M es un subconjunto abierto convexo de E, estos grupos son 0 para $p > 0$.

Demostración. Por el Teorema 5.1.15 tenemos que para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de M existe una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$. Entonces las gavillas $\underline{A}^p_M$ son finas y por la proposición 5.1.10 se tiene que $\underline{A}^p_M$ suave. Por lo tanto las gavillas $\underline{A}^p_M$ son acíclicas por el Teorema 5.1.6. Sea $\underline{A}^\bullet_M$ una resolución inyectiva de la gavilla constante $\mathbb{R}_M$. Por el Teorema 4.2.1 tenemos que

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathbb{R}_M) \xrightarrow{\sim} H^p(M, \mathbb{R}_M)$$

para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de M y para $p \geq 0$. Entonces

$$\check{H}^p(M, \mathbb{R}_M) \xrightarrow{\sim} H^p(M, \mathbb{R}_M) \xrightarrow{\sim} H^p(M, \mathbb{R}).$$

Además, por el Corolario 5.1.7 tenemos que $H^p(M, \mathbb{R}_M) \xrightarrow{\sim} H^p_{DR}(M)$. Por lo tanto,

$$\check{H}^p(M, \mathbb{R}_M) \xrightarrow{\sim} H^p(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H^p_{DR}(M)$$

para $p \geq 0$.

$\square$

Queremos escribir abajo un isomorfismo explícito entre los grupos de cohomología de Čech y los grupos de cohomología de De Rham. Tal isomorfismo fue primero dado en [**AW1**]. Observar que el isomorfismo

$$H^p(M, \mathbb{R}_M) \to H^p(M, \underline{A}^\bullet_M)$$

es inducido por el casi-isomorfismo $\mathbb{R}_M \to \underline{A}^\bullet_M$. Con respecto al isomorfismo $H^p_{DR}(M) \to H^p(M, \underline{A}^\bullet_M)$, es muy natural para el punto de vista de la hipercohomología de Čech. Es decir, aplicamos $A^\bullet(M)$ a la primera columna de $\Pi_i A^\bullet(U_i)$ por las aplicaciones restricción de M a cada U_i.

$$\begin{tikzcd}
A^2(M) \arrow[r] & \Pi_i A^2(U_i) \arrow[r, "\delta"] & \Pi_{i,j} A^2(U_{ij}) \arrow[r, "\delta"] & \cdots \\
A^1(M) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \Pi_i A^1(U_i) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \Pi_{i,j} A^1(U_{ij}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \cdots \\
A^0(M) \arrow[r] \arrow[u, "d"] & \Pi_i A^0(U_i) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \Pi_{i,j} A^0(U_{ij}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Sea $\mathcal{U} = (U_i)$ una cubierta abierta de M. Notemos que la clase de cohomología del $p-$cociclo de Čech $\underline{c}$ de la cubierta $\mathcal{U}$ con coeficientes en $\mathbb{R}_M$

corresponderá a la clase de cohomología de la $p-$forma cerrada ω bajo este isomorfismo si podemos encontrar una cocadena $(\alpha_q)_{0\leq q\leq p-1}$ de grado $(p-1)$ en el complejo doble de Čech $C^\bullet(\underline{A}_M^\bullet)$ con las siguientes propiedades:

(1) Cada $\underline{\alpha}_q$ es una $(p-1-q)-$cocadena de Čech con valores en $\underline{A}_M^q$, y tenemos

$$(\delta\underline{\alpha}_q)_{i_0,\dots,i_{p-q}} = (-1)^{p-q-1}d((\underline{\alpha}_{q-1})_{i_0,\dots,i_{p-q}})$$

para $1\leq q\leq p-1$.

(2) $(d\underline{\alpha}_{p-1})_i$ es la restricción de ω a U_i.

(3) $\delta\underline{\alpha}_0 = -\underline{c}$.

$$\begin{tikzcd}
\omega & & & & \\
\underline{\alpha}_{p-1} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & * & & & \\
 & \underline{\alpha}_{p-2} \arrow[u, "-d"] \arrow[r, "\delta"] & * & & \\
 & & \underline{\alpha}_{p-3} \arrow[u, "d"] & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & \underline{\alpha}_0 \arrow[r, "\delta"] & -c
\end{tikzcd}$$

En efecto, estas condiciones quieren decir que la cofrontera total $\delta + (-1)^p d$ (donde p es el primer grado) de la cocadena de Čech $\Sigma_{q=0}^{p-1}\underline{\alpha}_q$ es igual a la diferencia $\omega - c$, donde ω es visto como una $0-$cocadena con valores en $\underline{A}_M^p$, y c es una $p-$cocadena con valores en $\underline{A}_M^0$. Comenzando de c, construimos $\underline{\alpha}_1$, $\underline{\alpha}_2$, y etc., inductivamente. Para esto, elegimos una partición de la unidad (f_i) subordinada a $\mathcal{U}$.

Lema 5.1.17. *Sea $H : C^\bullet(\mathcal{U}, \underline{A}_M^p) \to C^{\bullet-1}(\mathcal{U}, \underline{A}_M^p)$ dada por*

$$H(\underline{\alpha})_{i_1,\dots,i_p} = \sum_i f_i \alpha_{i,i_1,\dots,i_p}$$

Entonces para cada $p\geq 0$, H da una nulo homotopía del complejo de Čech para la gavilla $\underline{A}_M^p$.

Demostración. Tenemos que:

$$\delta(H(\underline{\alpha}))_{i_0,\ldots,i_p} = \sum_{j=0}^{p}(-1)^j H(\underline{\alpha})_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_p} = \sum_{j=0}^{p}\sum_{i}(-1)^j f_i \alpha_{i,i_0\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_p}.$$

Por otra parte tenemos

$$\begin{aligned} H(\delta(\underline{\alpha}))_{i_0,\ldots,i_p} &= \sum_i f_i \delta(\underline{\alpha})_{i,i_0,\ldots,i_p} \\ &= \sum_i f_i \alpha_{i_0,\ldots,i_p} - \sum_i f_i \sum_{j=0}^{p}(-1)^j \alpha_{i,i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_p} \\ &= (\alpha_{i_0,\ldots,i_p}) - \delta(H(\underline{\alpha}))_{i_0,\ldots,i_p} \end{aligned}$$

□

Ahora vamos a encontrar $\underline{\alpha}_q$ por inducción en q, comenzando con $q = 0$. Primero tomemos $\underline{\alpha}_0 = -H(c)$, ya que $\delta(H(c)) = c$ por el Lema 5.1.17. Esto da

$$(\underline{\alpha}_0)_{i_1,\ldots,i_p} = -\sum_i f_i c_{i,i_0,\ldots,i_p}.$$

Para $1 \leq q \leq p-1$, queremos $\delta(\underline{\alpha}_q) = (-1)^{p-q-1} d\underline{\alpha}_{q-1}$. Pero $d\underline{\alpha}_{q-1}$ es el kernel de δ, ya que $\delta d\underline{\alpha}_{q-1} = d\delta\underline{\alpha}_{q-1} = (-1)^{p-q} dd\underline{\alpha}_{q-2}$ usando la hipótesis inductiva. Por lo tanto tenemos $d\underline{\alpha}_{q-1} = \delta H(d\underline{\alpha}_{q-1})$, así ponemos $\underline{\alpha}_q = (-1)^{p-q-1} H(d\underline{\alpha}_{q-1})$, produciendo

$$(\underline{\alpha}_1)_{i_2,\ldots,i_p} = -(-1)^{p-2} \sum_{i_0,i_1} C_{i_0,i_1,\ldots,i_p} f_{i_0} df_{i_1},$$

y etc.. Finalmente, el último término es

$$(\underline{\alpha}_{p-1})_i = -(-1)^{(p-1)(p-2)/2} \sum_{i_1,\ldots,i_p} c_{i_1,\ldots,i_p,i} f_{i_1} df_{i_2} \wedge \cdots \wedge df_{i_p}.$$

La $p-$forma cerrada $\omega_i = (d\underline{\alpha}_{p-1})_i$ en U_i tiene la misma restricción a U_{ij}, ya que $\delta d\underline{\alpha}_{p-1} = d\delta\underline{\alpha}_{p-1} = dd\underline{\alpha}_{p-2} = 0$. Por lo tanto hemos probado lo siguiente.

Proposición 5.1.18. (*Weil* [**AW1**]) *Sea M una variedad suave en la cual las gavillas $\underline{A}_M^p$ son suaves (por ejemplo, M es una variedad paracompacta suave modelada en un espacio ILH que satisface (5.4)). Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de M, y sea $(f_i)_{i\in I}$ una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$. Entonces para $\underline{c}$ un cociclo de Čech de grado p con coeficientes en la gavilla constante $\mathbb{R}_M$, sea ω la $p-$forma cerrada en M, tal que*

$$(\omega)|_{U_i} = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \sum_{i_1,\dots,i_p} c_{i_1,\dots,i_p,i} df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_p} \tag{5.5}$$

Entonces la clase de cohomología $[\underline{c}] \in H^p(M, \mathbb{R}_M)$ y la clase de cohomología $[\omega] \in H^p_{DR}(M)$ se corresponden mutuamente bajo el isomorfismo $H^p(M, \mathbb{R}_M) \xrightarrow{\sim} H^p_{DR}(M)$.

Capítulo 6

Haces de líneas

6.1. Clasificación de haces de líneas

En esta Sección vamos a describir haces de líneas sobre una variedad salvo isomorfismos, en el caso suave y holomorfo. El resultado importante es la clasificación de las clases de isomorfismos de haces de líneas.

En toda está Sección M será una variedad suave y paracompacta. Por la Sección 4 se tiene que la cohomología de gavillas es isomorfa a la cohomología de Čech. Si M verifica las hipótesis del teorema 5.1.16, tenemos que la cohomología de De Rham $H^p_{DR}(M)$ es isomorfa a la cohomología de Čech $\check{H}^p(M, \mathbb{R}_M)$.

Definición 6.1.1. *Un haz de líneas L sobre M, es una triada (L, M, ρ), donde L es una variedad suave que se llama espacio total, $\rho : L \to M$ es un aplicación continua que se llama aplicación proyección. Para cualquier $x \in M$, $L_x := \rho^{-1}(x)$ es un espacio vectorial sobre los números complejos. Además, satisface:*

- $\bullet)$ *La condición de trivialidad local. Para cada $x \in M$, existe una vecindad U de x en M, y un homeomorfismo*

$$h : \rho^{-1}(U) \to \mathbb{C} \times U,$$

tal que, para cada $x \in U$, se tiene un isomorfismo lineal sobre los complejos

$$\rho^{-1}(x) \cong \{x\} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{C}. \qquad (*)$$

A M se la llama espacio base.

Observación. Cuando es posible elegir U igual al espacio base, se tiene un haz de líneas trivial.

El concepto de un haz de líneas suave puede ser definido similarmente. Se requiere que ρ sea una aplicación suave y que para cada $x \in M$, existe una vecindad U de x en M, y un difeomorfismo

$$h : \rho^{-1}(U) \to \mathbb{C} \times U,$$

tal que, para cada $x \in U$, se tiene un isomorfismo lineal sobre los complejos

$$\rho^{-1}(x) \cong \{x\} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{C}. \qquad (*).$$

Ejemplo 5. Sean $M = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| = 1\}$ y $L = S^1 \times \mathbb{C}$. Definimos

$$\begin{array}{rccc} \rho : & L & \to & M, \\ & (x, z) & \mapsto & x \end{array}$$

Se tiene que para cada $x \in M$, $\rho^{-1}(x) \cong \mathbb{C}$ y $h : \rho^{-1}(M) \to L$ es un homeomorfismo, por lo tanto L es un haz de líneas suave trivial.

Si L_1 y L_2 son haces de líneas (suaves) sobre M. Un isomorfismo de haces de líneas es un homeomorfismo (difeomorfismo)

$$\phi : L_1 \xrightarrow{\sim} L_2,$$

el cual satisface las siguientes dos condiciones.

$\star$) ϕ es compatible con la proyección a M, esto es $\rho_1 = \rho_2 \circ \phi$;

$\star\star$) Para cualquier $x \in M$, el homeomorfismo (difeomorfismo) $(L_1)_x \xrightarrow{\sim} (L_2)_x$ es $\mathbb{C}$- lineal.

Una sección de un haz de líneas (suave) es una función continua (suave) $s : M \to L$ tal que $s(m) \in L_m$ para todo $m \in M$, esto es, $\rho \circ s = \mathrm{Id}_m$.

La condición de trivialidad local significa que cada propiedad de un haz de líneas se tiene localmente. Para cada $x \in M$ existe una vecindad U de x y un isomorfismo entre el haz de líneas trivial $\mathbb{C} \times U$ y $L|_U = \rho^{-1}(U)$. Tal isomorfismo corresponde a una sección suave $s : U \to L$ la cual en ninguna parte de U es nula; dado s, se define $\phi : \mathbb{C} \times U \xrightarrow{\sim} L_{/U} = p^{-1}(U)$ por $\phi(y) =$

$(\frac{y}{s(p(y))}, p(y))$. Por lo tanto la función $\frac{y}{s(p(y))}$ de valores en $\mathbb{C}^*$ es caracterizada por $\frac{y}{s(p(y))} \cdot s(p(y)) = y$; esto está bien definido porque $p(y) = p(s(p(y)))$.

Ahora daremos la construcción del haz asociado a un haz de líneas. Si $L \to M$ es un haz de líneas, tenemos la sección cero $0 : M \hookrightarrow L$; su imagen se llama la sección cero de L. Denotemos por L^+ el complemento en L de la sección cero. Si y_1, y_2 son puntos de L en la misma fibra, hay un número bien definido $\frac{y_1}{y_2}$ tal que $y_1 = \frac{y_1}{y_2} \cdot y_2$. Sea $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. La aplicación $L^+ \mapsto M$ es un haz principal localmente trivial con grupo estructural $\mathbb{C}^*$ que actúa por dilataciones en la fibras.

Se puede recuperar L de L^+ como un haz asociado, es decir, $L = (L^+ \times \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$, donde $\lambda \in \mathbb{C}^*$ actúa en $L^+ \times \mathbb{C}$ por $\lambda \cdot (y, u) = (\lambda^{-1} \cdot y, \lambda \cdot u)$. Esta construcción $(L^+ \times \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$ se denota por $L^+ \underset{\mathbb{C}^*}{\times} \mathbb{C}$. En términos concretos, un haz de líneas sobre M es lo mismo que un haz principal con grupo de estructura $\mathbb{C}^*$ (en corto, un $\mathbb{C}^*-$haz principal). Más aún, si L es un haz de líneas y L^+ el correspondiente $\mathbb{C}^*-$haz principal, el grupo de automorfismos del haz de líneas L es igual al grupo de clases de isomorfismos del $\mathbb{C}^*-$haz principal; en realidad, ambos grupos son isomorfos al grupo $\Gamma(M, \underline{\mathbb{C}^*})$ de funciones suaves de valores $\mathbb{C}^*$.

Otra forma en términos categóricos es la siguiente. Para una variedad fija M, sea C_1 la categoría cuyos objetos son haces de líneas sobre M, y cuyos morfismos son isomorfismos de haces de líneas. Similarmente sea C_2 la categoría de $\mathbb{C}^*-$haces principales $Q \to M$, cuyos morfismos son isomorfismos de haces principales. Observe que la asociación $L \mapsto L^+$ define un funtor $F : C_1 \to C_2$; tal que para cada isomorfismo $\phi : L_1 \to L_2$ entre haces de líneas, se tiene un isomorfismo correspondiente $F(\phi) : F(L_1) = L_1^+ \xrightarrow{\sim} F(L_2) = L_2^+$. Se dice que F es una *equivalencia de categorías* (véase [**McL1**]) si las siguientes dos condiciones se satisfacen:

(1) Para L_1, L_2 objetos de C_1, la aplicación

$$Hom_{C_1}(L_1, L_2) \to Hom_{C_2}(F(L_1), F(L_2))$$

es biyectiva;

(2) Cada objeto de C_2 es isomorfo a un objeto de la forma $F(L)$, para algún objeto L de C_1.

Proposición 6.1.2. *Sea C_1 la categoría de haces de líneas sobre M, C_2 la categoría de $\mathbb{C}^*-$haces principales sobre M, $F : C_1 \to C_2$ el funtor $F(L) = L^+$. Entonces F es una equivalencia de categorías entre C_1 y C_2.*

Demostración. La propiedad (1) ya se ha observado arriba en el caso $L_1 = L_2$. El caso donde L_1 y L_2 son isomorfas se sigue inmediatamente. ahora afirmamos que si L_1 y L_2 no son isomorfas como haces de líneas, L_1^+ y L_2^+ no son isomorfas como $\mathbb{C}^*-$haces. En realidad, tal isomorfismo implicaría que el haz de líneas asociado a $L_1^+ \underset{\mathbb{C}^*}{\times} \mathbb{C}$ es isomorfo a $L_2^+ \underset{\mathbb{C}^*}{\times} \mathbb{C}$, por lo tanto L_1 es isomorfo a L_2. (2) se sigue de la construcción del haz de líneas asociado a un haz $\mathbb{C}^*$. $\square$

Notemos que un funtor $F : C_1 \to C_2$ es una equivalencia de categorías si y solo si existe un funtor *casi-inverso* $G : C_1 \to C_2$, para el cual hay una transformación natural invertible $\phi_1 : G \circ F \to \mathrm{Id}_{C_1}$ y $\phi_2 : G \circ F \to \mathrm{Id}_{C_2}$. En nuestro caso $G(P) = P \underset{\mathbb{C}^*}{\times} \mathbb{C} \to M$.

Si $p : L \to M$ es un haz de líneas, y si $f : N \to M$ es un función suave entre variedades, el *pull-back* f^*L de L es el haz de líneas $L \times_M N \xrightarrow{p_2} N$. Para s una sección de L sobre un subconjunto abierto U de M, denotamos por f^*s la correspondiente sección de f^*L sobre $f^{-1}(U)$. Si $f : U \hookrightarrow M$ es la inclusión de un conjunto abierto, el pull-back f^*L es a menudo denotado $L_{/U}$, y se llama la restricción e L al conjunto abierto U. La correspondiente notación para $\mathbb{C}^*-$haz principal es el pull-back $P \times_M N$ de un $\mathbb{C}^*-$haz principal $P \to M$.

Damos el ejemplo importante del haz de líneas tautológico sobre un espacio proyectivo y del correspondiente $\mathbb{C}^*-$haz principal. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$, y sea $\mathbb{P} = (E\backslash\{0\})/\mathbb{C}^*$ el espacio proyectivo de líneas en E. Recordar que $\mathbb{P}$ es una variedad, y que la aplicación proyectiva $p : E \setminus \{0\} \to \mathbb{P}$ es un $\mathbb{C}^*-$haz principal. Sea $E = \mathbb{C}^n$, con coordenadas $(z_1, ..., z_n)$; en este caso $\mathbb{P} = \mathbb{C}\,\mathrm{P}^{n-1}$. Para $x \in \mathbb{C}\,\mathrm{P}^{n-1}$, un punto $(z_1, ..., z_n)$ en $p^{-1}(x)$ se llama un conjunto de *coordenadas homogéneas* para x. Notemos que $E\backslash\{0\}$ esta cubierto por los conjuntos $V_i = \{(z_1, ..., z_n) : z_i \neq 0\}$ (donde $1 \leq i \leq n$); entonces $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^{n-1}$ es cubierto por los conjuntos $U_i = p(V_i)$. Sobre U_i, la proyección p admite la sección suave s_i caracterizada por $z_i = 1$.

El correspondiente haz de líneas $L \to \mathbb{P}$ puede ser descrito como la *explosión* del origen en E. En otras palabras, $L \subset E \times \mathbb{P}$ es la subvariedad que consiste del par (v, l), donde v es un punto de E, l es una líneas de E, y $v \in l$. Notemos que la fibra de L sobre l es exactamente la líneas l; esto es por lo que este haz de líneas se llama " tautológico ".

Para un espacio de Hilbert separable E, el espacio proyectivo $\mathbb{P}$ de E es una variedad modelada en $E/\mathbb{C}$. Para (e_n) una base ortonormal de E, $E \setminus \{0\}$

esta cubierto por los conjuntos abiertos $V_i = \Sigma_n z_n e_n; z_i \neq 0$. Pic es cubierto por los conjuntos abiertos $U_i = p(V_i)$. Los conjuntos abiertos U_i se identifican con el subespacio $(\mathbb{C} \cdot e_i)^{\perp}$ de E; a $v \in (\mathbb{C} \cdot e_i)^{\perp}$ le corresponde la línea generada por $v + e_i$. Otra vez $p : E \setminus \{0\} \to \mathbb{P}$ es un $\mathbb{C}^*-$haz principal.

El significado de la Proposición 6.1.2 es que dado un haz de líneas podemos asociarle un $\mathbb{C}^*-$haz principal y dado un $\mathbb{C}^*-$haz principal podemos asociarle su haz de líneas, salvo isomorfismo. En algunos casos, el lenguaje de haces de líneas es más conveniente. Este es por supuesto el caso si uno esta interesado en el espacio $\Gamma(M, L)$ de secciones suaves de un haz de líneas L; este espacio de secciones es un módulo sobre el anillo $C^{\infty}(M)_{\mathbb{C}}$ de funciones suaves de valores complejos. En otro caso, el lenguaje de $\mathbb{C}^*-$haces es más conveniente. Por ejemplo, el producto tensorial $L_1 \otimes L_2$ de haces de líneas correspondientes es el *producto* de $\mathbb{C}^*-$haces principales. El producto $Q_1 \underset{\mathbb{C}^*}{\times} Q_2$ de dos $\mathbb{C}^*-$haces principales es el cociente del producto fibrado $Q_1 \times_M Q_2$ por la siguiente acción de $\mathbb{C}^*$:

$$\lambda \cdot (y_1, y_2) = (\lambda^{-1} \cdot y_1, \lambda \cdot y_2).$$

Como producto tensorial, la operación de producto contraído es asociativa y conmutativa (salvo isomorfismo natural). Para seccioness_1 y s_2 de los haces de líneas L_1 y L_2, obtenemos una sección $s_1 \otimes s_2$ de $L_1 \otimes L_2$. El inverso de un haz de líneas corresponde a la operación la que transforma el $\mathbb{C}^*-$haz principal $Q \to M$ en el haz $\overline{Q} \to M$, donde $\overline{Q} = Q$, tal que la acción de $\lambda \in \mathbb{C}^*$ en $\overline{Q}$ es la acción de λ^{-1} en Q. Para haces de líneas, el inverso es dado por la construcción del dual L^* de L; una sección de L^* es lo mismo que una función en L la cual es $\mathbb{C}^*-$homogénea de grado 1.

En este camino se obtiene una estructura de grupo conmutativo en el conjunto de clases de isomorfismos de haces de líneas sobre M, tal conjunto es el grupo de Picard, $\mathrm{Pic}^{\infty}(M)$. Queremos describir este grupo conmutativo en términos topológicos. La idea es que un haz de líneas L es clasificado por una cierta obstrucción encontrando una sección global no nula de de $L - \{0\}$, en otras palabras, una sección global del $\mathbb{C}^*-$haz L^+. Localmente se puede encontrar tal sección. Se sigue que existe una cubierta abierta $(U_i)_{i \in I}$ de M tal que $L^+_{/U_i}$ tiene una sección s_i. Entonces sobre la intersección $U_{ij} := U_i \cap U_j$ de dos conjuntos abiertos de la cubierta, tenemos la función suave invertible $g_{ij} = \frac{s_i}{s_j}$. sobre la intersección U_{ijk} de tres conjuntos abiertos, tenemos la relación cociclo

$$g_{ik} = g_{ij} \cdot g_{jk}.$$

Por lo tanto los g_{ij} forman un cociclo de Čech de grado 1 de la cubierta (U_i) con coeficientes en la gavilla $\underline{\mathbb{C}}^*_M$ de funciones suaves invertibles de valores complejos, la cual fue estudiada en el Capitulo 1.

Teorema 6.1.3. (1) *La clase de cohomología* $c(L) \in \check{H}^1(M, \underline{\mathbb{C}}^*_M)$ *del cociclo de Čech* g_{ij}^{-1} *es independiente de la cubierta abierta y de la elección de la sección* s_i.

(2) *La asignacón* $L \mapsto c(L)$ *da un isomorfismo entre el grupo* $\mathrm{Pic}^{\infty(M)}$ *de clases de isomorfismos entre haces de líneas sobre* M *y el grupo de cohomología de Čech* $\check{H}^1(M, \underline{\mathbb{C}}^*_M)$.

Demostración. Primero mostraremos que para una cubierta abierta dada $\mathcal{U} = (U_i)$, la clase de cohomología de Čech de g_{ij} es independiente de la sección s_i de L^+ sobre U_i. Cualquier otra sección es de la forma $s'_i = f_i \cdot s_i$, donde f_i es una función invertible de valores $\mathbb{C}^*$ sobre U_i, i.e., una sección de $\underline{\mathbb{C}}^*_M$ sobre U_i. Entonces tenemos, para el $1-$cociclo de Čech g'_{ij} correspondiente a s'_i cumple

$$\begin{aligned} g'_{ij} &= \frac{s'_i}{s'_j} = \frac{f_i}{f_j} \cdot \frac{s_i}{s_j} \\ &= \frac{f_i}{f_j} \cdot g_{ij}. \end{aligned}$$

Sea $\underline{f}$ la $0-$cocadena de Čech con coeficientes en $\underline{\mathbb{C}}^*_M$ la cual toma el valor f_i en U_i. La cofrontera de Čech de $\underline{f}$ es igual a la diferencia entre los cociclos g_{ij} y g'_{ij}.

Ahora tenemos que mostrar la independencia de la cubierta abierta. Podemos asumir que la cubierta abierta $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ es un refinamiento de $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$, lo cual implica que hay una función $f : J \to I$ tal que $V_j \subseteq U_{f(j)}$ para cualquier $j \in J$. Entonces, para $s_i \in \Gamma(U_i, L^+)$, obtenemos una sección t_i de L^+ sobre V_j, como la restricción de $s_{f(j)}$ a $V_j \subseteq U_{f(j)}$. El $1-$cociclo de Čech para la cubierta V_j obtenido de estos V_j es claramente la imagen del $1-$cociclo bajo la aplicación inducido $f_* : C^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}}^*_M) \to C^1(\mathcal{V}, \underline{\mathbb{C}}^*_M)$. Esto prueba (1).

La demostración de (2) procede como sigue. Primero es fácil ver que $[L] \mapsto c(L)$ define un homomorfismo de grupos

$$c : \mathrm{Pic}^\infty(M) \to \check{H}^1(M, \underline{\mathbb{C}}^*_M).$$

c_1 es inyectivo, ya que la trivialidad de la clase de cohomología de g_{ij} quiere decir que existe una sección de $\underline{\mathbb{C}}_M^*$ sobre U_i tal que $g_{ij} = \frac{f_i}{f_j}$; pero entonces $s_i' = \frac{s_i}{f_i}$ es una sección de L^+ sobre U_i, y tenemos $s_i' = s_j'$ sobre $U_i \cap U_j$. Así los s_i' dan una sección global de L^+ sobre M, lo cual muestra que L^+ (por lo tanto también L) es el haz trivial.

La soprayectividad de ϕ se prueba construyendo un $\mathbb{C}^*-$haz principal $Q \to M$ asociado a un $1-$cociclo dado g_{ij} de (U_i) con coeficientes en $\underline{\mathbb{C}}_M^*$. Comenzamos con un espacio $W = \amalg_{i\in I} U_i \times \mathbb{C}^*$, y construimos un espacio cociente haciendo las siguientes identificaciones: para $x \in U_{ij}$ y $\lambda \in \mathbb{C}^*$, identificamos $(x, \lambda) \in U_i \times \mathbb{C}^*$ con $(x, \lambda \cdot g_{ij}(x)) \in U_j \times \mathbb{C}^*$. Este aplicación del espacio cociente a M admite una acción natural de $\mathbb{C}^*$, y es en realidad un $\mathbb{C}^*-$haz principal sobre M. Este último hecho depende de la relación del cociclo g_{ij}. Hay una sección s_i de Q sobre U_i, tal que $s_i(x)$ es la clase de $(x, 1) \in U_i \times \mathbb{C}^*$. Por construcción, tenemos $\frac{s_i}{s_j} = g_{ij}$ sobre U_{ij} concluyendo la demostración. $\square$

Sea $f : N \to M$ una función suave entre variedades. La operación de pull-back de haces de líneas de M a N induce un homomorfismo de grupos $f^* : \check{H}^1(M, \underline{\mathbb{C}}_M^*) \to \check{H}^1(N, \underline{\mathbb{C}}_N^*)$ el cual es la composición de la imagen inversa de la aplicación $\check{H}^1(M, \underline{\mathbb{C}}_M^*) \to \check{H}^1(N, f^{-1}\underline{\mathbb{C}}_M^*)$ con la aplicación inducida por el morfismo de gavillas $f^{-1}\underline{\mathbb{C}}_M^* \to \underline{\mathbb{C}}_N^*$.

Como un ejemplo, volvamos al $\mathbb{C}^*-$haz principal $\mathbb{C}^n \backslash \{0\} \xrightarrow{p} \mathbb{C}\,\mathrm{P}^{n-1}$. Usando la cubierta de $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^{n-1}$ por los U_i (definidos por la condición $z_i \neq 0$), tenemos $g_{ij} = \frac{z_j}{z_i}$. Este es el $1-$cociclo para el haz de líneas tautológico.

Ahora tenemos la sucesión exacta exponencial de gavillas.

$$0 \to \mathbb{Z}(1) = 2\pi\sqrt{-1} \cdot \mathbb{Z} \to \underline{\mathbb{C}}_M \xrightarrow{exp} \underline{\mathbb{C}}_M^* \to 0$$

la cual da una sucesión exacta larga de grupos de cohomología. Los grupos de cohomología $\check{H}^i(M, \underline{\mathbb{C}}_M)$ son 0 si $i > 0$, por nuestra suposición en M, el hecho de que $\underline{\mathbb{C}}_M$ es una gavilla suave (Teorema 5.1.16) y el hecho de que una gavilla suave en un espacio paracompacto es acíclica (Teorema 5.1.6). Así tenemos un isomorfismo de grupos de cohomología $\check{H}^1(M, \underline{\mathbb{C}}_M^*) \xrightarrow{\sim} \check{H}^2(M, \mathbb{Z}(1))$. Esto implica el siguiente corolario.

Corolario 6.1.4. *El grupo* $\mathrm{Pic}^\infty(M)$ *es canónicamente isomorfo al grupo de cohomología de Čech* $\check{H}^2(M, \mathbb{Z}(1))$.

Observación. Ya que $\check{H}^2(M,\mathbb{Z}(1)) \cong H^2(M,\mathbb{Z})$, la clase de cohomología $c(L)$ del Teorema 6.1.3 se denota por $c_1(L)$ y se llama la primera clase de Chern de L.

Nosotros escribiremos un $2-$cociclo de Čech $\underline{\mu}$ con valores en $\mathbb{Z}(1)$ que representa a $c_1(L)$. Si g_{ij} son los cociclos de transición para el haz de líneas L, y si se tiene una rama de $Log(g_{ij})$ logaritmo de g_{ij} sobre U_{ij}, entonces $\mu_{ijk} = -Log(g_{ijk}) + Log(g_{ik}) - Log(g_{ij})$ es un $2-$cociclo de Čech de valor $\mathbb{Z}(1)$ el cual representa $c_1(L)$.

Es a menudo importante considerar métricas en haces de líneas.

Definición 6.1.5. *Sea $L \to M$ un haz de líneas. Una métrica hermitiana en L es una función suave $h : L \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ tal que $h(\lambda \cdot x) = |\lambda|^2 \cdot h(x)$ para $x \in L$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, y $h(x) > 0$ si $x \in L^+$. Un haz de líneas hermitiano es un haz de líneas equipado con métrica hermitiana. Un isomorfismo de haces de líneas hermitianos es un isomorfismo de haces de líneas el cual es compatible con las métricas.*

Observemos que si h es una métrica hermitiana en L, entonces para dos secciones s_1 y s_2 de L sobre el mismo conjunto abierto, se puede definir una función de valor complejo (s_1, s_2) por $(s_1, s_2) = \frac{s_1}{s} \cdot (\overline{\frac{s_2}{s}}) \cdot h(s)$ para cualquier sección no-nula s. La parja $(\ ,\ )$ es hermitiana. Se tiene $(s, s) = h(s)$.

A un haz de líneas hermitiano $L \to M$ con métrica hermitiana h, se le asocia un haz de círculos $L^1 \to M$, donde $L^1 = \{x \in L : h(x) = 1\}$. Este es en efecto un haz principal con el grupo de circulo $\mathbb{T}$ como grupo de estructura. Inversamente, sea $P \to M$ un $\mathbb{T}-$haz principal; construimos el haz de líneas $L := P \underset{\mathbb{T}}{\times} \mathbb{C} \to M$, donde $\mathbb{T}$ actúa en $\mathbb{C}$ por multiplicación escalar. La métrica hermitiana h es entonces definida por $h(x, \lambda) = |\lambda|^2$, para $x \in P$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Ahora tenemos el siguiente análogo de la Proposición 6.1.2.

Proposición 6.1.6. *Los funtores $(L, h) \mapsto L^1$ y $P \mapsto P \underset{\mathbb{T}}{\times} \mathbb{C}$ son funtores casi-inversos entre la categoría de haces de líneas hermitianos sobre M, y la categoría de $\mathbb{T}-$haces sobre M.*

Usando particiones de la unidad, es fácil probar

Proposición 6.1.7. *Cada haz de líneas sobre una variedad paracompacta satisface la suposición del Teorema 5.1.16 admite una métrica hermitiana.*

El análogo del Teorema 6.1.3 y el Corolario 6.1.4 para haz de líneas hermitiano es

Teorema 6.1.8. *El grupo de clases de isomorfismos entre haces de líneas hermitiano sobre M es isomorfo al grupo de cohomología de Čech $\check{H}^1(M, \mathbb{T}_M)$, por lo tanto también a $\check{H}^2(M, \mathbb{Z}(1))$.*

La demostración es la misma del Teorema 6.1.3 pero las funciones de transición tienen codominio en $\mathbb{T}$ en vez de $\mathbb{C}^*$.

Este da otra demostración de la existencia de una métrica hermitiana en cualquier haz de líneas. Ahora volvemos al haz de líneas holomorfo sobre variedades complejas.

Sea M una variedad compleja.

Definición 6.1.9. *Un haz de líneas holomorfo $L \mapsto M$ es un haz vectorial holomorfo de rango 1. Para cualquier $x \in M$, la fibra $L_x := p^{-1}(x)$ es un espacio vectorial de dimensión uno sobre $\mathbb{C}$.*

Si L_1 y L_2 son haces de líneas holomorfos sobre M, un isomorfismo de haces de líneas holomorfos es un difeomorfismo complejo-analítico $\phi : L_1 \xrightarrow{\sim} L_2$ el cual satisface las siguientes dos condiciones:

(a) ϕ es compatible con la proyección a M, esto es , $p_1 = p_2 \circ \phi$;

(b) para cualquier $x \in M$, el difeomorfismo inducido $(L_1)_x \xrightarrow{\sim} (L_2)_x$ es $\mathbb{C}-$lineal.

Para un haz de líneas holomorfo $L \to M$, el complemento L^+ de la sección cero da un $\mathbb{C}^*-$haz principal holomorfo localmente trivial $L^+ \to M$. El holomorfismo análogo de la Proposición 6.1.2 se tiene, i.e., la categoría de haces de líneas holomorfos sobre M es equivalente a la categoría de $\mathbb{C}^*-$haces principales holomorfos. El análogo del Teorema 6.1.3 es expresado en términos del cociclo de transición g_{ij} asociado a una cubierta abierta (U_i) y a una sección holomorfa s_i de L^+ sobre U_i; entonces $g_{ij} = \frac{s_i}{s_j}$ es una función holomorfa invertible sobre U_{ij}, i.e., una sección de la gavilla $\mathcal{O}_M^*$ de gérmes de funciones holomorfas invertibles.

Teorema 6.1.10. (1) *La clase de cohomología en $\check{H}^1(M, \mathcal{O}_M^*)$ del cociclo de Čech g_{ij} es independiente de la cubierta abierta y de la elección de las secciones s_i.*

(2) *El grupo de Picard $\mathrm{Pic}_{\mathcal{O}}(M)$ de clases isomorfas de haces de líneas holomorfas sobre M, es isomorfo al grupo de cohomología de gavillas, esto es,*

$$\mathrm{Pic}_{\mathcal{O}}(M) \cong \check{H}^1(M, \mathcal{O}_M^*).$$

Analizamos el grupo de Picard, se usa la sucesión exponencial exacta:

$$0 \to \mathbb{Z}(1) \to \mathcal{O}_M \xrightarrow{exp} \mathcal{O}_M^* \to 0. \tag{6.1}$$

Esta da la sucesión exacta de grupos

$$\begin{aligned} \cdots \to \check{H}^1(M, \mathbb{Z}(1)) \to \check{H}^1(M, \mathcal{O}_M) \to \check{H}^1(M, \mathcal{O}_M^*) \\ \to \check{H}^2(M, \mathbb{Z}(1)) \to \check{H}^2(M, \mathcal{O}_M) \to \cdots \end{aligned}$$

El grupo de Picard $\mathrm{Pic}_{\mathcal{O}}(M) = \check{H}^1(M, \mathcal{O}_M^*)$ aparece como una extensión del grupo discreto

$$\mathrm{Ker}(\check{H}^2(M, \mathbb{Z}(1)) \to \check{H}^2(M, \mathcal{O}_M)),$$

por el grupo de Lie conexo

$$\check{H}^1(M, \mathcal{O}_M) / \mathrm{Im}(\check{H}^1(M, \mathbb{Z}(1))).$$

Notamos que el haz de líneas tautológico sobre el espacio proyectivo $\mathbb{P}$ de un espacio vectorial E es un haz de líneas holomorfo. Las funciones de transición $g_{ij} = \frac{z_i}{z_j}$ son por lo tanto también holomorfas. El grupo de Picard $\mathrm{Pic}_{\mathcal{O}}(\mathbb{P})$ es igual a $\check{H}^2(\mathbb{P}, \mathbb{Z}(1)) = \mathbb{Z}$, porque $\check{H}^j(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = 0$ para $j = 1$ o 2.

Bibliografía

[**AW1**] A.Weil,

"Sur les théorèmes de de Rham".

Comm. Math. Helv. **26**, *17-14* 1952.

[**BRT**] B. R. Tennison,

"Sheaf Theory".

Cambridge University Press, 1975.

[**CAW**] C. A. Weibel,

"An introduction to Homological Algebra".

Cambridge University Press, 1994.

[**FWW**] Frank W. Warner,

"Foundations of Differentiable Manifolds
Lie Groups".

Springer-Verlag, 1983.

[**JLB**] Jean-Luc Brylinski,

"Loop Spaces,

Characteristic Classes

and Geometric Quantization".

Birkhäuser Boston, 1993.

[**KSB**] Kenneth S. Brown,

"Cohomology of Groups".

Springer-Verlag, 1982.

[**KU2**] Kenji Ueno,
"Algebraic Geometry 2".
American Mathematical Society, 2001.

[**LAN**] S. Lang,
" Introduction to Differentiable Manifolds".
Academic Press, 1962.

[**McL1**] S. Mac Lane,
"Categories for the Working Mathematician".
Springer-Verlag, 1971.

[**MG-JH**] M. Greenberg and J.Harper,
" Algebraic Topology. A first Coourse".
Math. Lecture Note Series, Benjamin, 1981.

[**MUN**] J. Munkres,
" Topology: A first Course".
Prentice-Hall, 1975.

[**PG-JH**] P. Griffiths and J. Harris,
"Principles of Algebraic Geometry".
Wiley, New York, 1978.

[**RB - LT**] R. Bott and L. Tu,
"Differential Forms in Algebraic Topology".
Springer-Verlag, 1982.

Índice alfabético