



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**

**INSTITUTO DE INGENIERÍA**

**CRITERIO DE LINEALIZACIÓN EQUIVALENTE ESTOCÁSTICA  
APLICADO A SISTEMAS CON ASIMETRÍA EN FLUENCIA**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA CIVIL – ESTRUCTURAS**

**P R E S E N T A:**

**DARIO HERNÁNDEZ HERMAN**

**TUTORA:**

**DRA. SONIA ELDA RUIZ GÓMEZ**



**INSTITUTO  
DE INGENIERÍA  
UNAM**

**CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO D.F., MARZO DEL 2007**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **JURADO ASIGNADO**

Presidente:	Dr. Luis Esteva Maraboto
Secretario:	Dr. Orlando Javier Díaz López
Vocal:	Dra. Sonia Elda Ruiz Gómez
Primer suplente:	Dr. José Alberto Escobar Sánchez
Segundo suplente:	M.I. Octavio García Domínguez

Lugar donde se realizó la tesis:

Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México

## **TUTORA DE TESIS**

---

Dra. Sonia Elda Ruiz Gómez

## AGRADECIMIENTOS

*“Considero más valiente al que conquista sus deseos que al que conquista a sus enemigos, ya que la victoria más dura es la victoria sobre uno mismo”.*

Aristóteles.

A mis padres:

*Dario Hernández Lima y Elva Herman Rusinek*

A mis hermanas:

*Elva y Olga Libia*

A la Dra. Sonia E. Ruiz Gómez por su tutoría y consejos en esta parte tan importante de mi formación. Muchas gracias por la oportunidad de su confianza.

Al Dr. Francisco L. Silva González por su invaluable ayuda en la elaboración de este trabajo y sobretodo por su leal amistad. Gracias amigo!.

A mis sinodales Dr. Luis Esteva Maraboto, Dr. Orlando Díaz López, Dr. José Alberto Escobar Sánchez y M.I. Octavio García Domínguez por sus valiosos comentarios y sugerencias, así como al Dr. Pol Spanos por sus fructíferas indicaciones.

A todos mis profesores del Posgrado por auxiliarme durante todo este tiempo en mi educación humana y profesional.

A la Dra. Luz Rivera Salas por su valiosa amistad y respaldo ante las adversidades.

A mi familia, José Juan, Magdalena, Verónica, Miriam y demás familiares quienes me han brindado su cariño y afecto incondicional en todas las etapas de mi vida.

A todos mis amigos donde mi alma ha vivido en sus corazones y compartido los momentos más trascendentales. Gracias por apoyarme siempre!

A ti, por llamarme amigo cuando hemos necesitado pensar en voz alta y a Usted por confiar en mi persona.

Al Instituto de Ingeniería por las facilidades prestadas en sus instalaciones para el desarrollo del presente estudio y de mi preparación.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT y a la Dirección General de Estudios de Posgrado DGEP por el apoyo proporcionado.

## CONTENIDO

JURADO ASIGNADO-----	I
RESUMEN-----	II
ABSTRACT-----	II
CONTENIDO-----	III
TABLA DE SÍMBOLOS-----	V
INTRODUCCIÓN -----	1
I.1    Introducción-----	1
I.2    Antecedentes-----	1
I.3    Planteamiento del problema -----	2
I.4    Objetivos y alcances -----	3
I.4.1    Objetivos-----	3
I.4.2    Alcances -----	3
I.5    Procedimientos a seguir -----	3
CAPÍTULO 1.- MODELACIÓN HISTERÉTICA -----	4
1.1    El oscilador inclinado-----	4
1.2    Modelación diferencial -----	6
1.3    Modelo de Baber y Wen asimétrico sin degradación -----	8
1.4    Modelo de Baber y Wen asimétrico con degradación-----	10
1.5    Modelo de Suzuki y Minai asimétrico -----	12
1.6    Generalidades del comportamiento asimétrico-----	12
1.7    Limitaciones del modelo de Baber y Wen -----	13
CAPÍTULO 2.- SIMULACIÓN DE MONTE CARLO-----	15
2.1    Modelo no estacionario equivalente-----	15
2.1.1    Modelación de la densidad espectral -----	15
2.1.2    Modulación de la amplitud del proceso -----	17
2.2    Aplicación a un sismo real-----	18
2.3    Funciones de densidad de probabilidad de respuesta asimétricas -----	21
2.3.1    Desplazamiento-----	21
2.3.2    Velocidad-----	23
2.3.3    Componente histerética del desplazamiento-----	24
CAPÍTULO 3.- LINEALIZACIÓN EQUIVALENTE ESTOCÁSTICA-----	27
3.1    Obtención de la respuesta estocástica -----	27
3.2    Momentos de primer orden o valores medios -----	27
3.3    Valores medios de la respuesta ante un ruido blanco filtrado-----	28
3.4    Momentos de segundo orden -----	31
3.4.1    Matriz de covarianza-----	31
3.4.2    Nueva matriz de propiedades -----	32
3.4.3    Ecuación de Liapunov -----	33
3.5    Obtención de los coeficientes linealizadores -----	35
CAPÍTULO 4.- APLICACIÓN DEL MÉTODO -----	39
4.1    Descripción del análisis -----	39
4.2    Historias por tipo de modelo -----	39
4.2.1    Modelo de Suzuki-Minai asimétrico-----	39

4.2.2	Modelo de Baber y Wen sin degradación asimétrico-----	41
4.2.3	Modelo de Baber y Wen con degradación asimétrico-----	42
4.3	Análisis de las funciones de densidad de probabilidad de la respuesta -----	43
4.4	Influencia de la asimetría en la respuesta-----	44
4.5	Influencia de la ductilidad en el error -----	45
4.6	Efectividad del método en cuanto a tiempo de cómputo -----	46
CAPÍTULO 5.-CONCLUSIONES-----		48
REFERENCIAS -----		49
APÉNDICES-----		52
I.- Coeficientes linealizadores-----		52
I.1 Integración de los coeficientes linealizadores gaussianos-----		52
I.2 Modelo de Suzuki Minai asimétrico -----		53
I.2.1 Coeficiente Ce -----		53
I.2.1 Coeficiente Ke -----		53
I.2.3 Esperanza del modelo-----		53
I.2.4 Caso simétrico -----		54
I.3 Modelo de Baber y Wen sin degradación -----		54
I.3.1 Coeficiente Ce -----		54
I.3.1 Coeficiente Ke -----		55
I.3.3 Esperanza del modelo-----		55
I.3.4 Caso simétrico -----		56
I.4 Modelo de Baber y Wen con degradación -----		56
I.4.1 Coeficiente Ce -----		57
I.4.1 Coeficiente Ke -----		57
I.4.3 Esperanza del modelo-----		57
II.- Oscilador Duffing asimétrico-----		58
II.1 Ecuación de movimiento -----		58
II.2 Valor medio del oscilador -----		58
II.3 Covarianza del oscilador -----		59
II.4 Ecuaciones definitivas -----		60
III.- Tablas de esperanzas-----		61
III.1 Esperanzas de una variable-----		61
III.2 Esperanzas de dos variables-----		62
IV.- Condiciones iniciales -----		63
V.- Funciones especiales-----		67
AGRADECIMIENTOS -----		69

## TABLA DE SÍMBOLOS

$A$	Vector que contiene a la excitación.	$m$	Masa del oscilador.
$A$	Parámetro de degradación de rigidez y resistencia.	$m$	Parámetro de afilamiento.
$\alpha$	Relación de rigidez de postfluencia.	$\nu$	Parámetro de degradación de rigidez.
$a_g$	Aceleración del terreno (excitación).	$\xi$	Fracción del amortiguamiento crítico.
$\beta$	Parámetro de histéresis del modelo de Baber y Wen.	$n$	Parámetro de grado de transición.
$\Gamma$	Función integral Gamma.	$\rho_{v,z}$	Correlación entre velocidad y zeta.
$\gamma$	Parámetro de histéresis del modelo de Baber y Wen.	$\sigma_x$	Desviación estándar del desplazamiento.
$c$	Amortiguamiento del oscilador.	$\sigma_v$	Desviación estándar de la velocidad.
$c$	Resistencia normalizada del oscilador.	$\sigma_z$	Desviación estándar de la componente histerética del desplazamiento.
$c(t)$	Función moduladora de intensidad.	$S_o$	Amplitud del ruido blanco.
$c_y^+$	Resistencia positiva normalizada del oscilador.	$v$	Velocidad.
$c_y^-$	Resistencia negativa normalizada del oscilador.	$\bar{v}$	Media de la velocidad.
$\delta$	Función Delta de Dirac.	$V_o$	Matriz de covarianza.
$\delta_A$	Constante de degradación de rigidez y resistencia.	$V_{o^*}$	Cortante basal inicial.
$\delta_v$	Constante de degradación de rigidez.	$V_o$	Matriz de covarianza referida a su media.
$\delta_\eta$	Constante de degradación de resistencia.	$V_y$	Cortante de fluencia.
$E\langle \bullet \rangle$	Operador esperanza.	$V_y^+$	Cortante positivo de fluencia.
$E\langle \mu \rangle$	Esperanza de la ductilidad.	$V_y^-$	Cortante negativo de fluencia.
$\varepsilon$	Error.	$W$	Peso del oscilador.
$e_h$	Energía histerética disipada.	$x$	Desplazamiento.
$\eta$	Parámetro de degradación de resistencia.	$x_f$	Respuesta del filtro de Clough-Penzien.
$\phi$	Parámetro de asimetría (inclinación).	$x_g$	Respuesta del filtro de Kanai-Tajimi.
$G$	Matriz de propiedades del sistema.	$\bar{x}$	Media del desplazamiento.
$g$	Aceleración de la gravedad.	$\dot{x}$	Derivada de la variable $x$ respecto a $t$ .
$H$	Vector de coeficientes linealizadores.	$x_y$	Desplazamiento de fluencia simétrico.
$H$	Función Escalón de Heaviside.	$x_y^+$	Desplazamiento positivo de fluencia.
$h(v, z)$	Modelo diferencial de histéresis.	$x_y^-$	Desplazamiento negativo de fluencia.
$k$	Rigidez lineal del oscilador.	$\ddot{x}$	Aceleración absoluta del oscilador.
$L$	Longitud del oscilador.	$Y$	Vector de respuestas del oscilador.
$\mu$	Ductilidad desarrollada.	$Y_o$	Vector de respuestas referidas a su media.
$M$	Función hipergeométrica confluyente.	$\omega$	Frecuencia natural del oscilador.
		$z$	Componente histerética.
		$\bar{z}$	Media de la componente histerética.

## **RESUMEN**

Se estudian sistemas histeréticos de resistencia asimétrica, donde el sistema estructural posee una resistencia mayor en un sentido de aplicación de la carga que en el otro, fenómeno también conocido como asimetría en fluencia, donde se incluyen los efectos de degradación de rigidez y resistencia. El objetivo de estudio es proponer el método de linealización equivalente estocástica, como eficiente y razonablemente preciso para analizar sistemas con asimetría en fluencia sujetos a una excitación con incertidumbre. El criterio de linealización consiste en reemplazar la ecuación diferencial no-lineal que gobierna el comportamiento histerético asimétrico, por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales equivalentes, cuyos términos poseen las propiedades estocásticas equivalentes de la ecuación original. Se hacen las consideraciones pertinentes para un problema estocástico no-estacionario. Los procesos de excitación y respuestas se consideran gaussianos. Los resultados obtenidos muestran que ante una adecuada modelación de la asimetría en la resistencia, el error obtenido con el método de linealización propuesto es racionalmente bajo en proporción al ahorro de cálculo y el tiempo de cómputo es menor que el que se ocupa con métodos alternativos como la simulación de Monte Carlo. Se comentan brevemente las características de las funciones de densidad de probabilidad calculadas.

## **ABSTRACT**

Hysteretic systems are studied with asymmetric resistances, where a structural system has a larger resistance in one way of load application in comparison of the other side, effect also known as asymmetric yielding, where stiffness and yield degradation are considered. The objective of this study is to propose stochastic equivalent linearization as an efficient and reasonable precise way of analyzing asymmetric yielding systems with random excitation. Equivalent linearization method consists in replacing nonlinear differential equations that govern hysteretic behavior by an equivalent linear set of linear equations, which terms have stochastic properties of the original equation. Assumptions are made concerning to a non stationary stochastic problem. Excitation and response processes are considered as Gaussian. Obtained results show that with an adequate resistances asymmetric yielding modeling, obtained error is reasonable low in proportion to the saving of calculations and computing time that alternative methods takes such as Monte Carlo simulation. Briefly, characteristics of calculated probability density functions are commented.

# INTRODUCCIÓN

## I.1 INTRODUCCIÓN

Los criterios de análisis y diseño lineales difieren mucho de las curvas experimentales observadas de los elementos estructurales sujetos a cargas intensas, que demuestran una naturaleza *no-lineal*. Ante cargas dinámicas, se presentan ciclos de carga y descarga con la capacidad de disipación. La duración de una fase intensa sísmica es reducida en comparación con la vida útil de la estructura; no obstante, es en esta parte donde se demanda un comportamiento estructural que sobrepasa significativamente los límites elásticos.

En el presente trabajo se considera que en los ciclos *histeréticos* se presenta asimetría, es decir, que la resistencia de fluencia es diferente en cada dirección de aplicación de la carga. Para efectos prácticos, un sistema asimétrico con esta diferencia en sus resistencias, se le denomina: *asimétrico en fluencia*, o simplemente *asimétrico*.

Existen muchos casos prácticos que se suponen con histéresis simétrica, pero que exhiben asimetría debido a diferentes razones, tales como: la presencia de cargas asimétricas, geometría irregular (en diseños arquitectónicos no convencionales), estructuración irregular de las resistencias, asentamientos diferenciales, entre otras.

Un efecto que se presenta como resultado de los asentamientos diferenciales en los suelos blandos, es la inclinación de una estructura respecto a una línea vertical. Otra razón se debe a que una estructura llega a su estado de reposo después de un evento sísmico, pero existen muchos casos que debido a la fuerte interacción con el suelo, al moverse la estructura de un lado a otro, no llega a su posición vertical nuevamente en la etapa final de vibración libre y queda con una inclinación residual. Ambos casos se modelan como asimétricos en fluencia en el desarrollo de este trabajo y son de especial interés en la zona lacustre de la Ciudad de México.

Cargas meteorológicas como viento, lluvia y nieve, los efectos del paso de fluidos, oleaje, funcionamiento de maquinaria o movimiento de aeronaves y vehículos, son casos típicos que pueden estudiarse con la teoría de vibraciones aleatorias, por ejemplo, para mitigar los efectos de las amplitudes dinámicas, que pueden ser molestos al usuario, provocar una sensación de inseguridad por el movimiento oscilatorio y en casos más extremos, provocar un estado de falla de estructuras sujetas a excitaciones muy intensas.

Es precisamente cuando una estimación determinista de tener un solo análisis bajo un solo valor estimado de carga se convierte en insuficiente, pues no se conoce si es alta o baja la probabilidad que se presente dicho valor determinísticamente considerado. Por esta razón, una de las mayores fuentes de incertidumbre en la respuesta estructural es la originada por la excitación sísmica y motiva a desarrollar numerosos trabajos donde se considere dicha incertidumbre.

## I.2 ANTECEDENTES

La respuesta histerética determinista de una estructura asimétrica es sensiblemente mayor que una simétrica, como se describe en las investigaciones realizadas por Ruiz (1991) y Terán *et al.* (2000).

Por otra parte, para el caso con incertidumbre, la respuesta probabilista de un sistema asimétrico en fluencia difiere mucho de su contraparte simétrica como es de esperarse, y es uno de los motivos fundamentales para desarrollar el presente trabajo.

Una histéresis asimétrica genera respuestas con valores medios distintos de cero, aún cuando el valor medio de la excitación sea nulo. Esta hipótesis de considerar los valores medios se documentan en los trabajos de Baber (1984), Noori *et al.* (1986) y Spanos (1980), entre otros. Dobson *et al.* (1997) proponen un modelo asimétrico de cinco parámetros que es difícil de manejar, mientras que Sivaselvan y Reinhorn (2000) ofrecen una visión general de los modelos histeréticos incluido el asimétrico.

En cuanto a los procesos *estocásticos*, una de las primeras investigaciones se debe a Rayleigh (1877), donde resuelve problemas de mecánica clásica mediante la teoría de vibraciones. Asimismo, Einstein (1905) resuelve el problema del movimiento Browniano desde la perspectiva estocástica. Dentro de diversos procedimientos de solución, la *linealización equivalente estocástica* es ampliamente mencionada en la literatura, los trabajos de Kasakov (1965 y 1965b) y Atalik y Utku (1976) proponen deducciones importantes que aportan un mayor impulso al método de la linealización equivalente.

La linealización equivalente básicamente consiste en sustituir la ecuación diferencial no lineal que describe la histéresis, por una ecuación lineal, cuyas propiedades estocásticas nuevas son equivalentes a la ecuación original. La diferencia entre la ecuación no lineal y la lineal se minimiza en un sentido adecuado, como por ejemplo, minimizar el error cuadrático medio entre ambos sistemas de ecuaciones.

Para juzgar la bondad de la precisión del método de linealización equivalente estocástica, es regla general compararla contra otro método que consume mayor tiempo de cómputo y ofrece mejor precisión: la simulación de Monte Carlo.

### **I.3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

Uno de los problemas que enfrenta la ingeniería sísmica, es que para un sitio dado no existen registros suficientes para ajustar y constatar con un alto grado de certeza qué función de densidad de probabilidad de intensidad sísmica puede aplicarse para ese sitio.

Esto es normal debido a que los sismos intensos se presentan en brechas de decenas años y no es tan directo relacionar sismos de distinta magnitud entre sí. Esto significa hacer suposiciones en la función de densidad de probabilidad de entrada del sismo para considerar la incertidumbre en su amplitud; Generalmente se supone una función de densidad gaussiana. Esta hipótesis en realidad ofrece numerosas ventajas cuando se utiliza *ruido blanco filtrado*, técnica ampliamente utilizada en la simulación de sismos sintéticos.

Una vez definida la función de densidad de entrada, se analiza el experimento para generar histéresis con asimetría en fluencia; esto consiste en resolver un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales. Aquí se utilizan tres modelos originalmente simétricos y se modifican en el presente trabajo para desarrollar el comportamiento asimétrico. Dichos modelos originales se deben a Suzuki y Minai (1987) para comportamiento bilineal, el de Baber y Wen (1979) sin degradación con transición suave entre comportamiento lineal y no lineal y finalmente el de Baber y Wen (1981) con transición suave y degradación de rigidez y resistencia.

En los trabajos de linealización equivalente es común recurrir a la hipótesis de que las funciones de densidad tanto de excitación como de respuesta son *gaussianas*. Tanto Kasakov (1965 y 1965b) como Atalik y Utku (1976) así lo consideran y dichas hipótesis son fuente del éxito de sus teoremas.

En realidad únicamente el caso lineal cumple estrictamente dicha condición; es decir, que ante una excitación gaussiana, la respuesta es gaussiana, pero el caso no-lineal en definitiva proporciona respuestas *no gaussianas* de distinto nivel de complejidad. En esta tesis se utiliza esta hipótesis gaussiana como válida debido a la dificultad matemática del problema, como se explica en capítulos subsecuentes. El objetivo es demostrar que la hipótesis gaussiana cumple la labor de ser la primera aproximación razonable de sistemas complejos.

Silva (2002) propone un método que considera funciones de densidad de probabilidad *no gaussianas* de la respuesta, que es correcto al compararse con otras técnicas *no gaussianas* publicadas. Asimismo, se mencionan los trabajos realizados por Hampl y Schüeller (1989) y Hurtado (1998) que también aportan metodologías para problemas *no gaussianos*. Sin embargo, es conveniente tener como primera aproximación la hipótesis gaussiana para comprender posteriormente la naturaleza *no gaussiana* de asimetría, que en capítulos posteriores se demuestra las propiedades no gaussianas del fenómeno asimétrico.

## I.4 OBJETIVOS Y ALCANCES

### I.4.1 Objetivos

En el presente trabajo se tiene como objetivo general obtener la respuesta estocástica de un sistema asimétrico en fluencia bajo el criterio de linealización equivalente. Se tienen como valor de entrada una excitación aleatoria de media cero y varianza conocida a partir de un registro sísmico dado; posteriormente dicha excitación se aplica a sistemas que emplean los tres modelos histeréticos asimétricos.

Como respuesta se obtienen los valores medios y momentos de segundo orden; es decir, varianzas y correlaciones de todas las respuestas. En otras palabras, se obtienen las estadísticas para el desplazamiento, velocidad y resistencia mediante dos métodos para su posterior comparación, la simulación de Monte Carlo y la linealización equivalente estocástica gaussiana.

### I.4.2 Alcances

Se considera la *no linealidad* del material exclusivamente, excluyendo otro tipo de *no linealidades* como efectos de segundo orden ni interacción suelo-estructura, aún cuando son importantes en la asimetría. También se considera que la diferencia entre las resistencias de fluencia es baja. Todas las variables se consideran deterministas, a excepción de la excitación. En la linealización equivalente se supone que la respuesta tiene una función de densidad de probabilidad gaussiana, pero con valores medios distintos de cero.

## I.5 PROCEDIMIENTOS A SEGUIR

Para lograr el objetivo planteado, se requieren los siguientes pasos a seguir:

- Plantear los modelos diferenciales histeréticos que representen adecuadamente el comportamiento asimétrico en fluencia.
- Obtener funciones especiales equivalentes denominadas coeficientes linealizadores para cada uno de los modelos.
- Adecuar el criterio de linealización equivalente estocástica para la obtención de la estadística de la respuesta.
- Comparar el error obtenido contra los resultados obtenidos mediante simulación de Monte Carlo.

### 1.1 EL OSCILADOR INCLINADO

Este fenómeno ha sido previamente estudiado por varios investigadores (Ruiz 1991; Terán *et al* 2000), a través de análisis deterministas de la ecuación clásica de la dinámica, es decir, sistemas de un grado de libertad de una masa concentrada, amortiguador viscoso y resorte elastoplástico, sujetos a un conjunto de sismos reales y sintéticos. Ruiz (1991) ha mostrado resultados de demandas de ductilidad normalizadas para resistencias constantes, mientras que Terán *et al.* (2000) han propuesto espectros de índice de daño basados en energía para ductilidades constantes.

La respuesta de oscilador inclinado puede representarse mediante un sistema asimétrico en fluencia y la conclusión más importante de los trabajos mencionados es que la respuesta del sistema asimétrico es sensiblemente mayor que la de un sistema simétrico. En el presente trabajo se analiza el mismo tipo de oscilador.

En la figura 1.1 se muestra un oscilador que posee un alineamiento perfecto respecto a una línea vertical y su relación no lineal de esfuerzo-deformación es elastoplástica. El oscilador posee una masa concentrada  $m$ , rigidez elástica  $k$ , fluencias simétricas  $V_y$  e iguales deformaciones de fluencia  $x_y$  para ambos sentidos de aplicación de la carga.

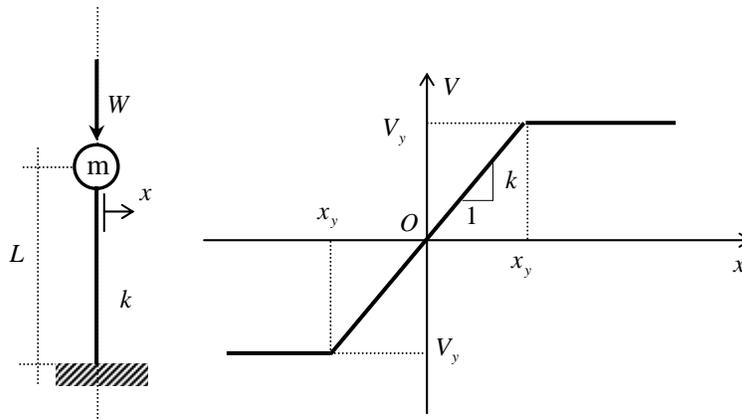


Figura 1.1 Oscilador no inclinado con fluencias simétricas

Un instante de tiempo después, el oscilador sufre una ligera inclinación medida en un ángulo  $\phi$  y posterior a la inclinación el peso  $W$  del oscilador se mantiene en reposo como se aprecia en la figura 1.2, sin que al momento se altere ninguna parte de la relación esfuerzo-deformación.

En el instante de la inclinación, el peso de la estructura genera una pequeña fuerza horizontal, es decir, un cortante basal inicial  $V_{o*}$  el cual se obtiene por condiciones puramente de estática. Del mismo modo, se genera un desplazamiento de la masa asociado a la inclinación, que puede o no llegar al desplazamiento de fluencia del oscilador. La descomposición trigonométrica del peso  $W$  se indica en la figura 1.3. Se supone que la inclinación  $\phi$  es pequeña y que para ángulos pequeños se supone que:

$$\begin{aligned} \text{Sen}(\phi) &\approx \phi \\ \text{Cos}(\phi) &\approx 1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

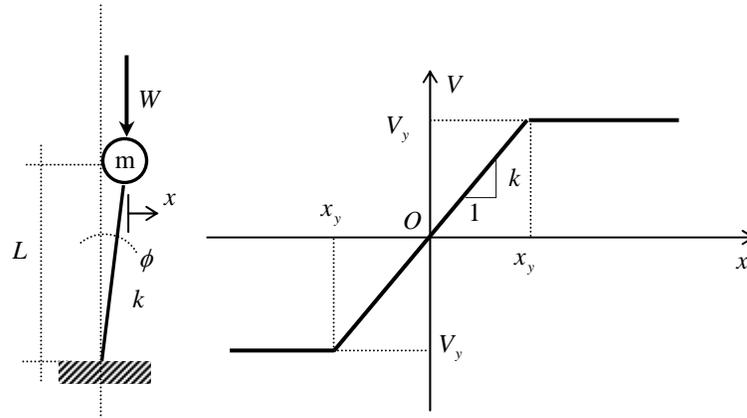


Figura 1.2 Oscilador inclinado con fluencias simétricas

Por conveniencia, en la misma figura 1.3 se define el cortante de fluencia  $V_y$  como una fracción  $c$  del peso  $V_y=cW$  y por la suposición trigonométrica hecha en la ecuación 1.1 el cortante basal  $V_{o*}=W \text{ Sen}(\phi)$  se convierte también en una fracción del peso  $V_{o*}=\phi W$  y se supone que la rigidez lineal  $k$  del sistema no se modifica. Al tratarse los cortantes de dos cantidades de las mismas unidades se pueden restar directamente, debido a que en el sentido de la inclinación el cortante de fluencia original  $V_y$  se disminuye a  $V_y^+$ , es decir, la estructura se debilita en dicho sentido.

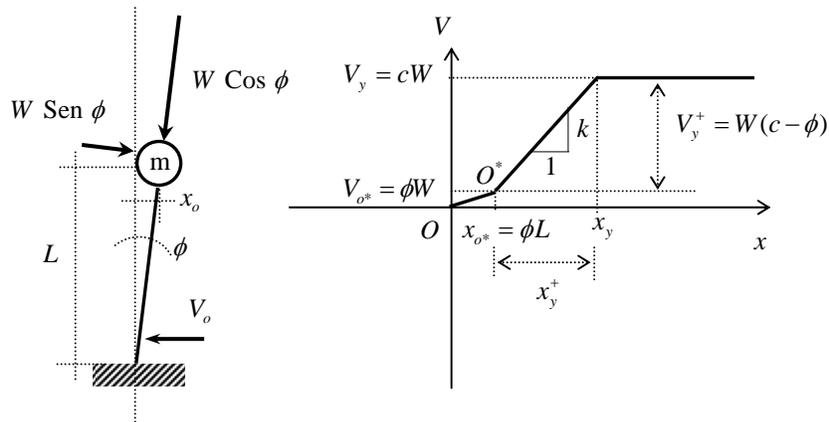


Figura 1.3 Oscilador inclinado cuya fluencia es alterada por un cortante basal inicial

Esta disminución también la sufre el desplazamiento de fluencia original  $x_y$ , de este modo, se genera un deslizamiento del origen del sistema elastoplástico de  $O$  hacia  $O^*$ . Para el sentido de la inclinación el cortante basal disminuye la resistencia de fluencia original, mientras que en el sentido contrario la fluencia original aumenta en el valor del cortante basal y por lo tanto, el sentido opuesto a la inclinación se convierte en el sentido más fuerte.

Finalmente, un oscilador inclinado con resistencias de fluencias simétricas, puede analizarse mediante un oscilador convencional perfectamente vertical como se indica en la figura 1.4 con resistencias de fluencia asimétricas. Es decir, se convierte en *asimétrico*, porque este nuevo oscilador posee un sentido débil con fluencia  $V_y^+$  y un sentido fuerte con fluencia  $V_y^-$  como se indica en la misma figura 1.4.

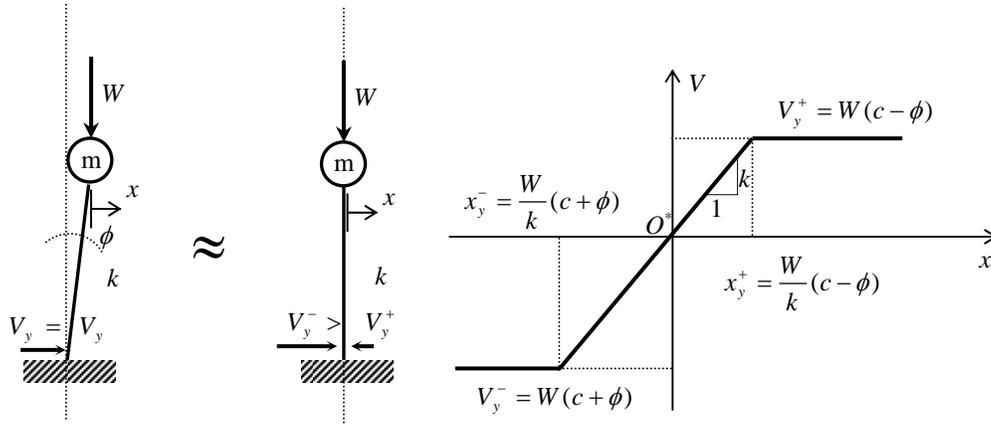


Figura 1.4 Oscilador no inclinado equivalente con fluencias asimétricas

Por claridad de las figuras expuestas, el ángulo de inclinación se muestra en sentido de las manecillas del reloj, o sentido *dextrógiro*. Por conveniencia matemática en el resto del trabajo se considera que una inclinación positiva ocurre en el sentido contrario a las manecillas del reloj o sentido *levógiro*.

Con esta convención de signos y suponer la masa unitaria  $m=1$ , es posible simplificar las resistencias de fluencias, de modo que un *aumento* en el ángulo de inclinación, sea un *aumento* de la resistencia en un sentido, por lo que se adoptan las resistencias normalizadas a la masa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} c_y^+ &= g(c + \phi) \\ c_y^- &= g(c - \phi) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Donde  $c_y^+$  es la resistencia normalizada del sentido fuerte,  $c_y^-$  es la resistencia normalizada del sentido débil,  $g$  es el valor de la aceleración de la gravedad y  $\phi$  el ángulo de inclinación. Por considerar la masa unitaria, utilizando la dinámica básica del oscilador, la rigidez  $k$  del sistema se convierte en el cuadrado de la frecuencia natural del oscilador  $\omega^2$  y por lo tanto los desplazamientos de fluencia para el sentido fuerte y débil son respectivamente:

$$\begin{aligned} x_y^+ &= g / \omega^2 (c + \phi) \\ x_y^- &= g / \omega^2 (c - \phi) \end{aligned} \quad (1.3)$$

El parámetro de asimetría es la inclinación  $\phi$ , lo que significa que a mayor inclinación existe mayor asimetría, debido a que es más fácil visualizar un ángulo de inclinación como medida física, que cualquier otro parámetro de asimetría más abstracto.

## 1.2 MODELACIÓN DIFERENCIAL

La histéresis es un fenómeno altamente no lineal que se analiza en diversas disciplinas, para la que se han desarrollado numerosos modelos de distinto nivel de complejidad.

Los modelos más sencillos son los osciladores *Duffing*, en donde la relación no lineal de esfuerzo deformación del resorte del oscilador se expresa mediante polinomios sencillos, generalmente cuadráticos o cúbicos asociados a un comportamiento no lineal elástico, muy útil para considerar no linealidades geométricas, sin embargo, es de mayor interés la no linealidad del material que forma ciclos inelásticos de histéresis.

Los modelos hysteréticos regularmente se expresan mediante ecuaciones algebraicas, denominados *seccionalmente continuos*, sin embargo, los puntos críticos de la histéresis como las fluencias, descarga o degradaciones se localizan mediante discontinuidades, es decir, cada zona posee una expresión algebraica completamente distinta, lo que impide tener una sola expresión continua, condición necesaria cuando se utiliza el método de linealización equivalente estocástica.

El siguiente grupo de modelos se denominan diferenciales, debido que la histéresis se expresa mediante una ecuación diferencial acoplada a la ecuación clásica de la dinámica. Dicha ecuación es no lineal y representa de forma adecuada ciclos de histéresis con la ventaja de ser una expresión continua. Estos modelos también se denominan “endocrónicos” según Casciati y Faravelli (1991), de sus raíces en griego “*endos*” (intrínseco), “*chronos*” (tiempo), significa que su expresión diferencial no contiene explícitamente el término  $t$  del tiempo, pero su cálculo está incluido en ellos.

Para el uso de este tipo de modelos, se comienza expresando la ecuación fundamental de la dinámica de un sistema con masa concentrada  $m$ , amortiguamiento  $c$ , rigidez lineal  $k$  y sujeto a una aceleración del terreno  $a_g(t)$ . Las respuestas del oscilador son el desplazamiento  $x$ , la velocidad  $\dot{x}$  y la aceleración absoluta  $\ddot{x}$ , donde cada punto sobrepuesto a la variable significa una derivada respecto al tiempo  $t$ . Para efectos de visualización en el resto del trabajo, a la velocidad  $\dot{x}$  se le denomina  $v$ , por lo que la ecuación fundamental se expresa como:

$$m\ddot{x} + cv + kx + F(x, v, z) = -ma_g(t) \quad (1.4)$$

Donde  $F(x, v, z)$  contiene el modelo diferencial, que a su vez se descompone en dos partes: la fuerza restauradora  $f_R(x, v, z)$  dependiente del desplazamiento  $x(t)$  y la fuerza hysterética dependiente de una variable auxiliar  $z(t)$ , que posee unidades del desplazamiento, se denomina *componente hysterética del desplazamiento* y forma los ciclos de histéresis:

$$F(x, v, z) = f_R(x, v, z) + f_H(x, v, z) \quad (1.5)$$

$$f_R(x, v, z) = \alpha kx(t) \quad (1.6)$$

$$f_H(x, v, z) = (1 - \alpha)kz(t) \quad (1.7)$$

Donde  $\alpha$  es la relación entre rigidez de postfluencia y la rigidez lineal, conocida también como endurecimiento por deformación en un oscilador bilineal o relación de postfluencia. Dado que el modelo endocrónico es otra ecuación diferencial que debe resolverse simultáneamente, conviene expresar la ecuación fundamental de movimiento en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha k & (1 - \alpha)k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -ma_g(t) \\ h(v, z) \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

Donde  $h(v, z)$  es la ecuación diferencial que contiene al modelo hysterético y se expresa como la derivada de la variable auxiliar  $z$ , es decir  $\dot{z} = h(v, z)$ . Si normaliza el sistema al dividir entre la masa  $m$ , se puede expresar la ecuación 1.8 de movimiento como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi\omega & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\omega^2 & (1-\alpha)\omega^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -a_g(t) \\ h(v, z) \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

Se refiere que el modelo es asimétrico cuando:

$$h(v, z) \neq h(-v, -z) \quad (1.10)$$

Por razones de integración numérica es conveniente descomponer las ecuaciones diferenciales de segundo orden 1.9 por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias para resolverlas por el algoritmo de Fehlberg (1969), mejor conocido como el método de Runge-Kutta-Fehlberg que se encuentra disponible en diversas referencias, tales como las recetas numéricas para Fortran elaboradas por Press *et al.* (1986). Al sustituir  $y_1 = x$ ,  $y_2 = v$  y  $y_3 = z$ , las ecuaciones por resolver para cualquiera de los tres modelos presentados son:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -2\xi\omega y_2 - \alpha\omega^2 y_1 - (1-\alpha)\omega^2 y_3 - a_g(t) \\ \dot{y}_3 &= h(y_2, y_3) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Donde  $y_1$  se refiere al desplazamiento,  $y_2$  a la velocidad,  $y_3$  a la componente histerética  $z$  y el modelo diferencial se expresa en  $h(y_2, y_3)$ . La relación de postfluencia es  $\alpha$ , la fracción del amortiguamiento crítico es  $\xi$ , la frecuencia del oscilador es  $\omega$  y la aceleración del terreno es  $a_g(t)$ .

### 1.3 MODELO DE BABER Y WEN ASIMÉTRICO SIN DEGRADACIÓN

Una primera propuesta de modelación diferencial histerética se debe a Bouc (1971) y posteriormente mejorada por Baber y Wen (1979), quienes plantearon el siguiente modelo diferencial simétrico de tres parámetros, que expresado en el sistema de ecuaciones 1.11 es:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -2\xi\omega y_2 - \alpha\omega^2 y_1 - (1-\alpha)\omega^2 y_3 - a_g(t) \\ \dot{y}_3 &= y_2 - \beta y_3 |y_2| |y_3|^{n-1} - \gamma y_2 |y_3|^n \end{aligned} \quad (1.12)$$

El primer parámetro  $n$  regula el grado de transición de la parte lineal a la no lineal, siendo muy suave para valores alrededor de uno y transición brusca en valores de quince o más. Los parámetros restantes  $\beta$  y  $\gamma$  se plantean originalmente como constantes arbitrarias y definen diversas formas de histéresis para distintas relaciones entre ellos. Sin embargo, la ventaja es que estos tres parámetros no cambian durante todo el análisis.

Un inconveniente de manejar dichos parámetros arbitrariamente es que no se conoce la resistencia del oscilador ni la forma de la histéresis hasta una vez terminado el análisis. Un primer paso es acotar la resistencia, para lograrlo es favorable encontrar el valor máximo de la componente histerética del desplazamiento  $z$  e igualar este resultado a la resistencia simétrica normalizada del oscilador  $c$ , dicho resultado se encuentra en Silva (1998). Menciona que se aplica a sistemas sin tendencia al endurecimiento, es decir, cumple la condición de que  $\beta/\gamma=1$ , por lo que los parámetros mencionados valen:

$$\beta = \gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{k}{gc} \right)^n \quad (1.13)$$

Donde  $k$  es la rigidez elástica,  $g$  el valor de la gravedad y  $c$  la resistencia normalizada. Es claro hacer notar que ahora el sistema posterior al análisis el oscilador posee una resistencia  $c$ .

Para lograr que el modelo de Baber y Wen (1979) sin degradación se convierta en asimétrico, es necesario recurrir a otra hipótesis, que las constantes  $\beta$  y  $\gamma$  sean ahora funciones y dependan de las deformaciones de fluencia asimétricas.

La constante  $\beta$  es múltiplo de  $\gamma$  en el modelo original, por lo que en el caso asimétrico la función  $\beta(z)$  es también múltiplo de  $\gamma(z)$ , es decir,  $\beta(z) = m\gamma(z)$ , lo que completa las dos funciones. Asimismo, para evitar relaciones arbitrarias entre ambas funciones, se propone un parámetro adicional  $m$ , que se denomina “parámetro de afilamiento”, que regula la amplitud de los lazos de histéresis, por lo que la función propuesta en este trabajo es:

$$\gamma = \frac{m}{1+m} \left( \frac{1}{x_y^\pm} \right)^n \quad (1.14)$$

Donde  $m$  es el parámetro de afilamiento y  $x_y^\pm$  son las deformaciones de fluencia que cambia de la fluencia fuerte a la fluencia débil dependiendo del instante de tiempo que se analiza, por lo que es necesario expresar dicho cambio según la zona de la componente histerética que se analiza. Desglosando las deformaciones de fluencia la ecuación anterior se expresa en términos de la componente histerética  $z$  y del parámetro adicional de asimetría  $\phi$ , de modo que terminado el análisis, el oscilador posee resistencias asimétricas  $c_y^+$  y  $c_y^-$ .

$$\gamma(z) = \frac{m}{1+m} \left( \frac{k}{g(c + \text{sign}(z)\phi)} \right)^n \quad (1.15)$$

Donde  $\text{sign}(z)$  es la función signo. La expresión para  $\gamma(z)$  es ligeramente más complicada que para el caso simétrico original si se incluyese el parámetro de afilamiento  $m$ :

$$\gamma(z) = \frac{m}{1+m} \left( \frac{k}{gc} \right)^n \quad (1.16)$$

Finalmente el planteamiento para el modelo de Baber y Wen asimétrico es:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -2\xi\omega y_2 - \alpha\omega^2 y_1 - (1-\alpha)\omega^2 y_3 - a_g(t) \\ \dot{y}_3 &= y_2 - \beta(z) y_3 |y_2| |y_3|^{m-1} - \gamma(z) y_2 |y_3|^n \end{aligned} \quad (1.17)$$

Donde  $\gamma(z)$  se define en la ecuación 1.15 y depende de la asimetría  $\phi$ , y la función  $\beta(z) = m\gamma(z)$ . Respecto al parámetro de afilamiento  $m$ , Casciati y Faravelli (1991) indican que para ciclos de histéresis típicos de elementos de acero el parámetro vale  $m=1$  y para casos típicos de concreto  $m=-0.5$ , pero en esta propuesta no se limita únicamente a estos valores siendo el intervalo para  $m$  de  $-1 < m < \infty$ .

Posteriormente se grafica en la figura 1.5 un oscilador asimétrico ante una excitación  $a_g = -100 \sin(\pi t)$ , periodo del oscilador de  $T=2$  s, fracción del amortiguamiento crítico de  $\xi=0.05$ , resistencia normalizada de  $c=0.1$ , para un valor de la gravedad de 981 gals, una relación de postfluencia  $\alpha=0.10$  y asimetría de  $\phi=0.01$ , para los casos de afilamiento de  $m=-0.5$  y  $m=0.5$  respectivamente.

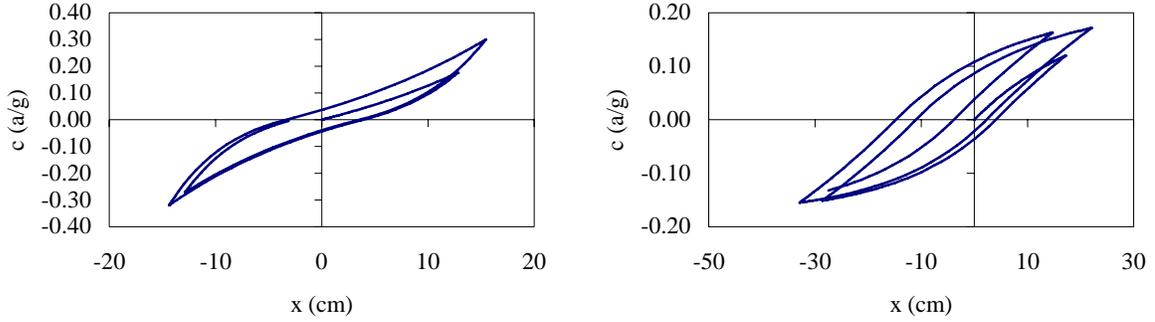


Figura 1.5 Modelo de Baber y Wen asimétrico para  $m=-0.5$  y  $m=0.5$

El parámetro  $n$  se utiliza de la misma forma que en el caso simétrico, teóricamente si  $n$  tiende a infinito se tiene un comportamiento bilineal y una transición perfecta entre comportamiento lineal y el no lineal. Con las mismas propiedades del oscilador y con  $m=1$ , se indican una transición suave y una más fuerte en la figura 1.6.

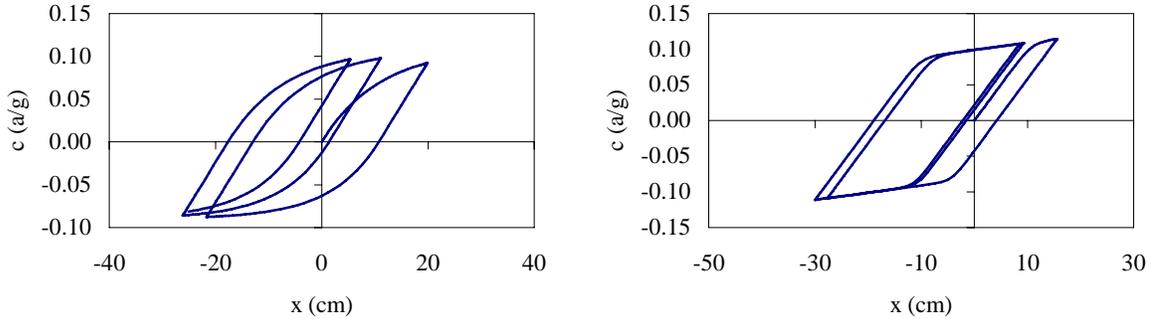


Figura 1.6 Modelo de Baber y Wen asimétrico para  $n=1$  y  $n=9$

#### 1.4 MODELO DE BABER Y WEN ASIMÉTRICO CON DEGRADACIÓN

Baber y Wen (1981) mejoraron su modelo simétrico para agregar las propiedades de degradación de rigidez y resistencia. En dicho planteamiento es necesario calcular la energía disipada  $e_h$  en cada ciclo, que depende de la velocidad  $v$  y de la componente histerética  $z$  de la siguiente forma:

$$e_h(t) = (1-\alpha)k \int_0^t z(\tau)v(\tau)d\tau \tag{1.18}$$

Baber y Wen (1981) proponen tres parámetros de degradación que se asocian a tres funciones que se calculan en cada instante de tiempo, que a su vez dependen de la energía disipada:

$$\begin{aligned}
 A(t) &= A_o - \delta_A e_h(t) \\
 \eta(t) &= \eta_o + \delta_\eta e_h(t) \\
 \nu(t) &= \nu_o + \delta_\nu e_h(t)
 \end{aligned}
 \tag{1.19}$$

Donde  $\nu(t)$  es la función para la degradación de rigidez,  $\eta(t)$  para la degradación de resistencia y  $A(t)$  para la degradación de rigidez y resistencia, o la combinación de todas ellas si se requiere la degradación de resistencia y rigidez simultáneamente.

Estas funciones dependen de un valor inicial  $A_o$ ,  $\nu_o$  y  $\eta_o$  que generalmente valen la unidad, y cada función depende de una fracción de la energía  $e_h$ . Dichas fracciones de la energía se expresan como  $\delta_\eta$ ,  $\delta_\nu$ , y  $\delta_A$  respectivamente según del caso que se trate y son los tres parámetros de degradación. Describas las tres funciones de degradación, el modelo simétrico de Baber y Wen (1981) es:

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= y_2 \\
 \dot{y}_2 &= -2\xi\omega y_2 - \alpha\omega^2 y_1 - (1-\alpha)\omega^2 y_3 - a_g(t) \\
 \dot{y}_3 &= \left\{ Ay_2 - \nu \left( \beta y_3 |y_2| |y_3|^{n-1} + \gamma y_2 |y_3|^n \right) \right\} / \eta
 \end{aligned}
 \tag{1.20}$$

Definido el problema simétrico de degradación planteado por Baber y Wen (1981) se plantea el caso asimétrico con las mismas modificaciones hechas al modelo simétrico descritas en la sección anterior, es decir, modificar los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$  que es donde interviene la asimetría  $\phi$ . En los parámetros originales de degradación no interviene la asimetría, por lo que es necesario usar las funciones asimétricas del modelo de Baber y Wen anterior, para obtener el nuevo modelo con degradación rigidez y resistencia asimétrico, el cual es:

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= y_2 \\
 \dot{y}_2 &= -2\xi\omega y_2 - \alpha\omega^2 y_1 - (1-\alpha)\omega^2 y_3 - a_g(t) \\
 \dot{y}_3 &= \left\{ Ay_2 - \nu \left( \beta(z) y_3 |y_2| |y_3|^{n-1} + \gamma(z) y_2 |y_3|^n \right) \right\} / \eta
 \end{aligned}
 \tag{1.21}$$

En donde  $\beta(z)$  y  $\gamma(z)$  se definen en la sección anterior para el caso sin degradación. Se grafica a continuación un caso asimétrico de degradación de resistencia y otro caso de degradación de rigidez respectivamente en la figura 1.7 para  $\delta_\eta=0.00005$  y el otro caso para  $\delta_\nu=0.00005$ .

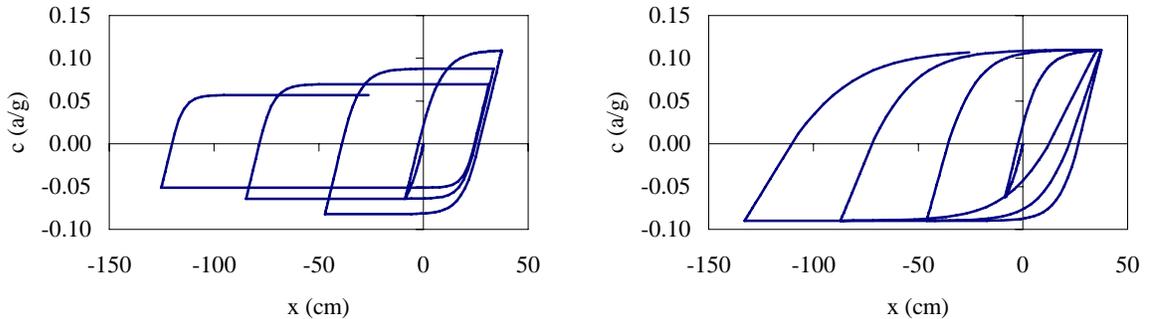


Figura 1.7 Modelo de Baber y Wen con degradación de rigidez ó resistencia

Los parámetros de degradación funcionan de la misma forma en el caso simétrico tanto en el asimétrico, es decir, que a mayor valor de los parámetros  $\delta_\eta$ ,  $\delta_\nu$ , y  $\delta_A$ , mayor es la degradación.

### 1.5 MODELO DE SUZUKI Y MINAI ASIMÉTRICO

Otro modelo más sencillo es el elastoplástico simétrico publicado por Suzuki y Minai (1987), que dicho modelo fácilmente se convierte en bilineal, quienes se basan en una simplificación del modelo de Baber y Wen (1979) sin degradación al calcular el límite cuando el parámetro  $n$  tiende a infinito.

Consideran que en las fluencias simétricas  $x_y$  ocurre una discontinuidad que puede expresarse mediante la función escalón de Heaviside (véase el Apéndice V para funciones especiales) y del signo de la componente histerética del desplazamiento  $z$ . Al conocer que el valor de  $x_y$  es mayor que cero, el modelo simétrico se expresa como:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -2\xi\omega y_2 - \alpha\omega^2 y_1 - (1-\alpha)\omega^2 y_3 - a_g(t) \\ \dot{y}_3 &= y_2 \left\{ 1 - H(y_2)H(y_3 - x_y) - H(-y_2)H(-y_3 - x_y) \right\} \end{aligned} \tag{1.22}$$

Al realizar el mismo desarrollo con las hipótesis asimétricas hechas en las secciones anteriores, es decir, que se tienen desplazamientos de fluencia asimétricos  $x_y^+$  y  $x_y^-$  y sus valores son distintos entre sí, se concluye que el modelo elastoplástico asimétrico es:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -2\xi\omega y_2 - \alpha\omega^2 y_1 - (1-\alpha)\omega^2 y_3 - a_g(t) \\ \dot{y}_3 &= y_2 \left\{ 1 - H(y_2)H(y_3 - x_y^+) - H(-y_2)H(-y_3 - x_y^-) \right\} \end{aligned} \tag{1.23}$$

Donde  $H(x)$  es la función escalón de Heaviside. Se grafica el mismo oscilador con este modelo en la figura 1.8, para el caso de un elastoplástico perfecto y el segundo caso con una relación de postfluencia  $\alpha=0.10$  para un modelo bilineal.

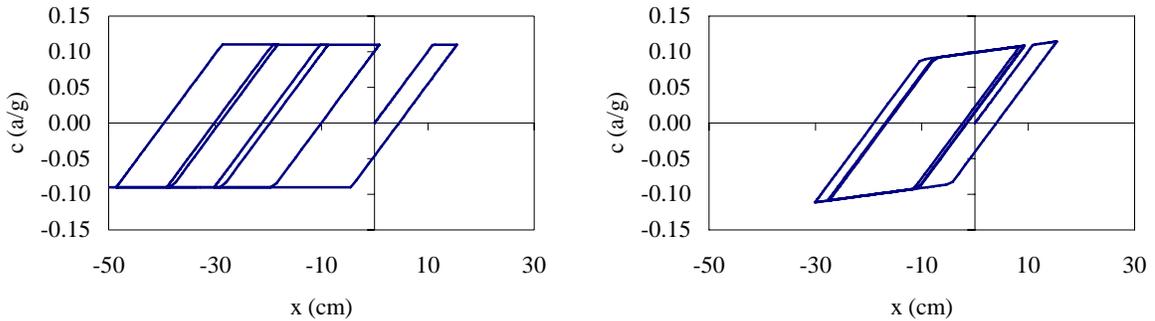


Figura 1.8 Modelo elastoplástico perfecto y bilineal asimétricos

### 1.6 GENERALIDADES DEL COMPORTAMIENTO ASIMÉTRICO

Todos los ciclos de histéresis mostrados son asimétricos, y se observan algunas generalidades que se aprecian en la figura 1.9:

- *Sentido débil.* Es la dirección en sentido de la inclinación, en esta dirección de vibración del oscilador, la resistencia de fluencia original se ve disminuida por el desplome. El sentido es *dominante*, es decir, donde se genera la mayor parte de la respuesta. Dado que la respuesta es mayor, el resultado cae del lado de la inseguridad si se supusiera una histéresis simétrica.
- *Sentido Fuerte.* Es la dirección contraria al sentido del desplome, en este sentido el valor de fluencia que se incrementa, La respuesta es sustancialmente menor y el resultado es conservador respecto a suponer una histéresis simétrica, esta dirección generalmente no es de interés por caer del lado de la seguridad.

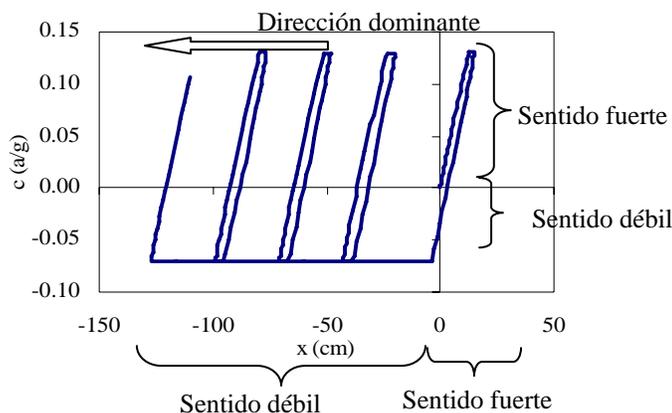


Figura 1.9 Direcciones fuertes y débil de un ciclo de histéresis asimétrico

Finalmente se menciona que:

- Un ligero cambio en el ángulo de inclinación puede generar una diferencia importante en las resistencias, pero más importante es el aumento sustancial en la respuesta en el sentido dominante, es decir, en el sentido débil del oscilador.
- La primera fluencia ocurre generalmente en el sentido débil, posteriormente el oscilador encuentra dificultad para fluir en el sentido fuerte y regresa fácilmente al sentido débil. Se repite este ciclo numerosas veces de modo que el número de veces que fluye en el sentido débil es mucho mayor que sus respectivas fluencias en el sentido fuerte, por lo que la respuesta se incrementa sustancialmente en el sentido dominante del oscilador.
- Este caso asimétrico no basta con modelarlo como un ciclo de histéresis simétrico con un corrimiento o un deslizamiento del origen, deben modelarse explícitamente las fluencias asimétricas.

## 1.7 LIMITACIONES DEL MODELO DE BABER Y WEN

Pese a sus ventajas, los modelos diferenciales o endocrónicos no reciben consenso universal, dado que la mayoría de ellos tienen algunas deficiencias en la descripción del comportamiento histerético, como lo discuten detalladamente Casciati y Faravelli (1991) y plantean una solución alternativa. Dichos autores mencionan que el modelo de Baber y Wen en cualquier variante presenta las dos siguientes limitaciones:

1. Al final de un ciclo el modelo endocrónico es incapaz por sí mismo de regresar al último punto de deformación máxima alcanzado por la carga previa. La deformación máxima se alcanza con un valor adicional de carga estática. Este efecto puede disminuirse si se seleccionan apropiadamente los parámetros del modelo, en específico, aumentando el parámetro de transición  $n$ .
2. Si durante la descarga la resistencia no cambia de signo, las recargas sucesivas están caracterizadas por un incremento de la deformación inelástica, lo cual viola los postulados de estabilidad de Ilyushin y Drucker, ambos teoremas se encuentran en la teoría clásica de la plasticidad, véase por ejemplo Lubliner (1998). Dichos teoremas establecen que la deformación inelástica se incrementa solo si la fuerza asociada a esa deformación permanece en su nivel de fluencia, no en el instante de carga cero. El comportamiento anómalo se nota principalmente en la zona de descarga, ya que la diferencia de energía disipada es negativa, mientras que el postulado establece que la energía siempre debe ser positiva.

Estas dos anomalías se reflejan en la incapacidad del modelo de no cerrar los ciclos de histéresis bajo ciertas condiciones. Se observa en la figura 1.10 un caso que viola los postulados de Ilyushin y Drucker donde el parámetro del Modelo de Baber y Wen es  $n=1$  y la carga son dos impulsos con una fase intermedia débil.

$$a_g(t) = 100 \exp[-(5-t)^2] - 100 \exp[-(15-t)^2] \quad (1.24)$$

Después del primer impulso el ciclo entra en una etapa de vibración libre intermedia y se genera el primer comportamiento errático al no cerrar el ciclo de histéresis, debido a que después de disipar energía durante la carga, el modelo disipa un diferencial de energía negativa durante la descarga, es decir, en el primer ciclo de desplazamiento.

Posteriormente se estabiliza en una resistencia de media cero, pero en al no disipar un diferencial de energía positiva, compensa el error incrementando sucesivamente el desplazamiento, esto es lo que origina el comportamiento anómalo. Al volver a cargar con un segundo impulso sucede lo mismo en la etapa de vibración libre final.

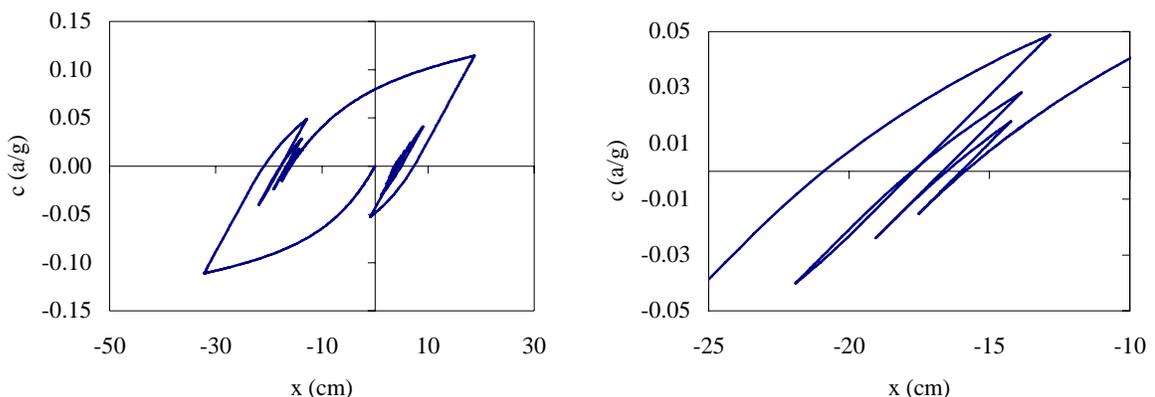


Figura 1.10 Caso que viola el postulado de Ilyushin y Drucker y un acercamiento

## 2.1 MODELO NO ESTACIONARIO EQUIVALENTE

Para juzgar la bondad del método de linealización equivalente se utilizan resultados obtenidos mediante simulación de Monte Carlo. Para este fin se generan sismos sintéticos.

Existen numerosos criterios para obtener un sismo sintético con propiedades no estacionarias a partir de *espectros evolutivos*, es decir, donde la densidad espectral depende de la frecuencia y su evolución en el tiempo. En este trabajo se utiliza la propuesta de Yeh y Wen (1989) llamada *espectro instantáneo*, donde un sismo simulado se descompone en dos partes:

$$a_s(t) = c(t)\zeta(t) \quad (2.1)$$

En donde  $a_s(t)$  es el sismo simulado,  $c(t)$  es una función moduladora de intensidad en el tiempo, la cual es determinista y la componente aleatoria  $\zeta(t)$ , la cual es un proceso aleatorio gaussiano estacionario, que puede ser *ruido blanco* filtrado. En las dos secciones siguientes se explica cómo obtener dichas funciones.

### 2.1.1 Modelación de la densidad espectral

El proceso estacionario gaussiano más simple es el ruido blanco. Una ventaja que motiva a utilizar dicha técnica es que su función de autocorrelación es sencilla y cuyo valor es  $2\pi S_o \delta(\tau)$ , donde  $S_o$  es la amplitud del ruido blanco y  $\delta(\tau)$  es una Delta de Dirac. (Véase Clough y Penzien, 1975).

El punto de partida es obtener la densidad espectral a partir del espectro de amplitudes de Fourier de la señal real  $a(t)$ , mediante el algoritmo de la transformada rápida de Fourier o (FFT):

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.2)$$

Por lo que la densidad espectral de la señal es (Véase Clough y Penzien, 1975):

$$S(\omega) = \frac{2\pi}{T} |A(\omega)|^2 \quad (2.3)$$

Donde T es la duración de la fase intensa. Posteriormente se debe ajustar un modelo matemático mediante una función a la densidad espectral obtenida. Dicha función se conoce como *filtro* debido a que representa matemáticamente la densidad espectral. Los filtros se proponen de acuerdo al número de frecuencias dominantes. Un caso simple es el filtro de Kanai (1957) y Tajimi (1960), donde la densidad espectral es:

$$S_{KT}(\omega) = S_o \left( \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_g^2)^2 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \right) \quad (2.4)$$

En donde los parámetros  $\omega_g$  y  $\xi_g$  se consideran deterministas y pueden interpretarse como la frecuencia y amortiguamientos equivalentes del terreno respectivamente. La única desventaja de este filtro es que no amortigua las frecuencias bajas que en sismos reales tienden a cero, y en  $\omega=0$  el filtro teóricamente no vale cero, que correspondería por ejemplo, a una señal con su media distinta de cero.

Un filtro de segundo orden es todavía deseable por razones analíticas, puesto que su manejo matemático no es complejo, el inconveniente que tiene es que representa adecuadamente únicamente dos frecuencias dominantes, cuando existen varios casos donde es necesario obtener más de dos frecuencias. No obstante, Clough y Penzien (1975) mejoraron el filtro anterior al hacer pasar la respuesta del filtro de Kanai (1957) y Tajimi (1960) por un segundo filtro que atenúa componentes de baja frecuencia y su densidad espectral es:

$$S_{CP}(\omega) = S_o \left( \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \right) \left( \frac{\omega^4}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_f^2 \omega_f^2 \omega^2} \right) \quad (2.5)$$

En donde los parámetros  $\omega_f$  y  $\xi_f$  se consideran la frecuencia y amortiguamiento del segundo filtro. Se deben encontrar los valores de los cuatro parámetros  $\omega_g, \xi_g, \omega_f$  y  $\xi_f$  del filtro de Clough y Penzien (1975) más la amplitud del ruido blanco  $S_o$ , que intervienen en la ecuación 2.5. Lo cual se realiza ajustando la densidad espectral de la señal real  $S(\omega)$  respecto al trazo de la función del filtro 2.5 mediante mínimos cuadrados no lineales.

Debe cumplirse que la varianza del filtro corresponda a la varianza real del proceso  $\sigma_o^2$ , lo cual se hace mediante dos formas, primero encontrar un factor de escala que ajuste el área bajo la curva de la densidad espectral  $S_{CP}(\omega)$  a la unidad, o ajustar la mitad de la curva a un área de  $1/2$ , de modo que la amplitud del proceso quede controlada únicamente por la función moduladora  $c(t)$ . O bien, el uso de la fórmula siguiente propuesta por Yeh y Wen (1989) que corresponde a evaluar dicha área, sustituyendo  $\sigma_o^2$  por la unidad:

$$S_o = \frac{\sigma_o^2}{\pi} \frac{2\xi_g \xi_f \left[ (\omega_g^2 - \omega_f^2)^2 + 4\omega_g^2 \omega_f^2 (\xi_g^2 - \xi_f^2) + 4\xi_g \xi_f \omega_g \omega_f (\omega_g^2 + \omega_f^2) \right]}{\omega_g^4 (\xi_g \omega_f + \xi_f \omega_g) + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \left[ \xi_g \omega_f^3 + \xi_f \omega_g^3 + 4\xi_g \xi_f \omega_g \omega_f (\xi_g \omega_f + \xi_f \omega_g) \right]} \quad (2.6)$$

Es posible mejorar los filtros de diversas formas, aunque no es el objetivo primordial de este trabajo existen filtros como la superposición de varias funciones gaussianas propuestas por Grigoriu *et al.* (1988) que ofrecen resultados prometedores, donde se elimina el problema de tener pocas frecuencias, pero en realidad también se complica la función de autocorrelación de dicho filtro y al mismo tiempo su manejo analítico. El filtro de varias funciones gaussianas es de la forma:

$$S_{GG}(\omega) = \sigma_o^2 \sum_{i=1}^n A_i \exp\left(-\frac{(\omega - B_i)^2}{2C_i^2}\right) \quad (2.7)$$

Donde  $\sigma_o^2$  es la varianza del proceso real,  $A_i, B_i$  y  $C_i$  de cada campana  $i$  son constantes por determinar por mínimos cuadrados no lineales. La varianza por ajustar se realiza mediante:

$$S_o = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_o^2 \left/ \sum_{i=1}^n A_i C_i \left[ 1 + \text{Erf}\left(\frac{B_i}{\sqrt{2}C_i}\right) \right] \right. \quad (2.8)$$

Donde  $S_o$  es la amplitud del ruido blanco y  $\text{Erf}(f)$  es la función error. Por razones numéricas, cuando  $B/C > 5$  el valor grande de la función error se aproxima a la unidad y se puede simplificar para obtener una expresión más sencilla:

$$S_o = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_o^2 / \sum_{i=1}^n A_i C_i \quad (2.9)$$

Una vez que se ha ajustado por cualquier método y filtro la densidad espectral  $S(\omega)$  de la señal original, se calcula el espectro de potencia unilateral  $G(\omega)$ :

$$G(\omega) = 2S(\omega) \quad (2.10)$$

Cada realización o sismo simulado se hace según el procedimiento originalmente propuesto por Bolotin (1969) y utilizado posteriormente por varios autores, de los cuales se puede mencionar más recientemente a Spanos y Vargas Loli (1985). Cada realización se puede idealizar como la superposición de numerosas ondas trigonométricas de distinta amplitud y fase:

$$\zeta(t) = F^{-1} \left[ \sqrt{2G(\omega)\Delta\omega} \varphi \right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \sqrt{2G(\omega)\Delta\omega} \varphi d\omega \quad (2.11)$$

Donde  $F^{-1}[\cdot]$  es la antitransformada de Fourier,  $G(\omega)$  el espectro de potencia que contiene las frecuencias dominantes,  $\Delta\omega$  el intervalo de las frecuencias y  $\varphi$  es un ángulo de fase aleatorio uniformemente distribuido que adquiere valores en el intervalo  $[0, 2\pi]$  que le da la propiedad aleatoria al proceso completo.

Dado que cada realización se hace en el dominio de los números reales, es posible simplificar la antitransformada de Fourier de la siguiente manera:

$$\zeta(t) = \sum_{j=1}^n \left[ \sqrt{2G(\omega_j)\Delta\omega} \text{Cos}(\omega_j t + \varphi) \right] \quad (2.12)$$

En caso de requerirse, se puede demostrar que el proceso anterior posee media cero y función de autocorrelación:

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{j=1}^n G(\omega_j)\Delta\omega \text{Cos}(\omega_j \tau) \quad (2.13)$$

### 2.1.2 Modulación de la amplitud del proceso

La modulación de la amplitud por ser determinista es más sencilla que filtrar el ruido blanco, simplemente se hace un ajuste de una  $c^2(t)$  sobre la  $a^2(t)$  real de la señal mediante mínimos cuadrados no lineales, de modo que sea lo más fidedigna posible.

Existen también varias propuestas de funciones moduladoras de intensidad, las que se utilizan en este trabajo son las propuestas por Yeh y Wen (1989):

$$c^2(t) = A \frac{t^B}{D + t^E} e^{-Ct} \quad (2.14)$$

Y la propuesta por Grigoriu *et al.* (1988) que son la suma de varias funciones gaussianas truncadas:

$$c^2(t) = \sum_{i=1}^n A_i \exp\left(-\frac{(t - B_i)^2}{2C_i^2}\right) \quad (2.15)$$

Donde  $A, B, C, D$  y  $E$  en ambos casos son constantes por determinar, generalmente por mínimos cuadrados no lineales.

Se tiene presente que si en el ajuste de la densidad espectral se considera a la varianza del proceso como unitaria, entonces la amplitud del proceso queda únicamente controlada por la amplitud de la función moduladora  $c(t)$ .

Por esta razón, conviene hacer el ajuste en  $\int c^2(t)$  para ajustar la intensidad de Arias y no únicamente la modulación en  $c^2(t)$ . Todo esto con el fin de que  $c(t)$  se refiera a una señal de la misma intensidad que la señal real.

## 2.2 APLICACIÓN A UN SISMO REAL

En esta tesis se toma como ejemplo un caso conocido, el sismo del 19 de Septiembre de 1985 registrado en la Secretaría de Comunicaciones y Transportes, proporcionado en la Base Mexicana de Sismos Fuertes (1997). Se referirá a dicho sismo en el resto de este trabajo como el sismo de SCT.

Los parámetros ajustados para el modelo de Clough y Penzien (1975) son:

$$\begin{aligned} S_o &= 0.00727765 \\ \omega_g &= 3.1017 & \zeta_g &= 0.0220 \\ \omega_f &= 2.2988 & \zeta_f &= 0.0493 \end{aligned} \quad (2.16)$$

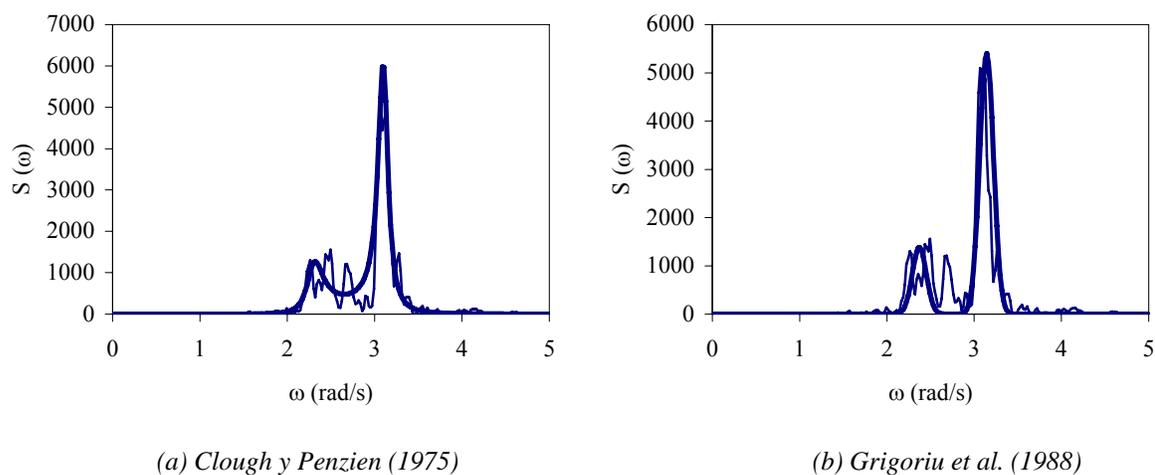


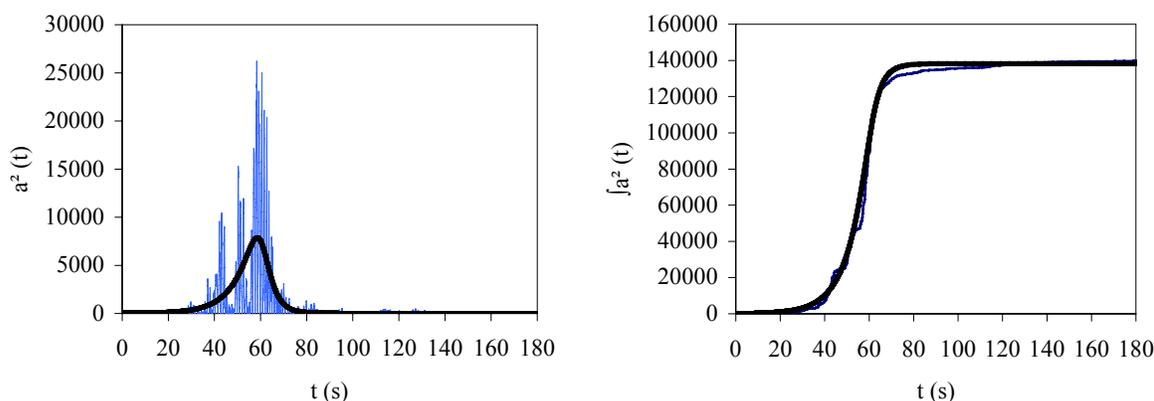
Figura 2.1 Ajuste de los filtros para el sismo de SCT

Para el caso de la superposición de campanas gaussianas de Grigoriu *et al.* (1988) se suponen tres campanas gaussianas para modelar lo mejor posible tres frecuencias naturales o más representativas del sismo, por lo que la densidad espectral es:

$$S(\omega) = 1387.50 \exp\left(-\frac{(\omega - 2.371)^2}{0.0128}\right) + 5400 \exp\left(-\frac{(\omega - 3.142)^2}{0.0128}\right) + 0.3375 \exp\left(-\frac{(\omega - 8.976)^2}{0.50}\right) \quad (2.17)$$

Ambos ajustes se ilustran en la figura 2.1. El ajuste de la función moduladora de intensidad de Yeh y Wen (1989) resulta:

$$c^2(t) = 5.8161 \times 10^{48} \frac{t^{-0.3389}}{2.166 \times 10^{47} + t^{26.530}} \text{Exp}(-0.1258t) \quad (2.18)$$



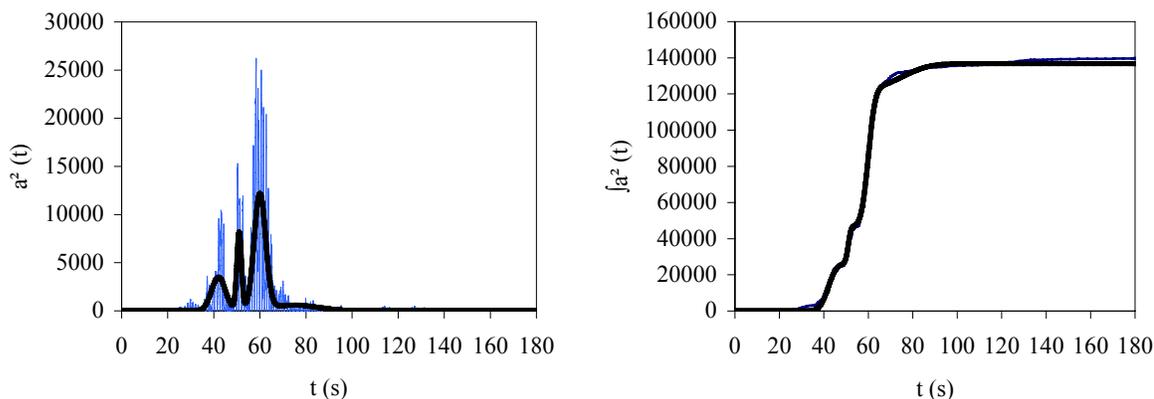
(a) Modulación en el tiempo

(b) Modulación acumulada

Figura 2.2 Modulación de intensidad en el tiempo, modelo de Yeh y Wen (1989)

En la figura 2.3 se muestra el caso de las campanas gaussianas de Grigoriu *et al.* (1988) es:

$$c^2(t) = 3500 \exp\left(-\frac{(t-42)^2}{18}\right) + 8096 \exp\left(-\frac{(t-51)^2}{2}\right) + 12000 \exp\left(-\frac{(t-60)^2}{12.50}\right) + 600 \exp\left(-\frac{(t-75)^2}{200}\right) \quad (2.19)$$

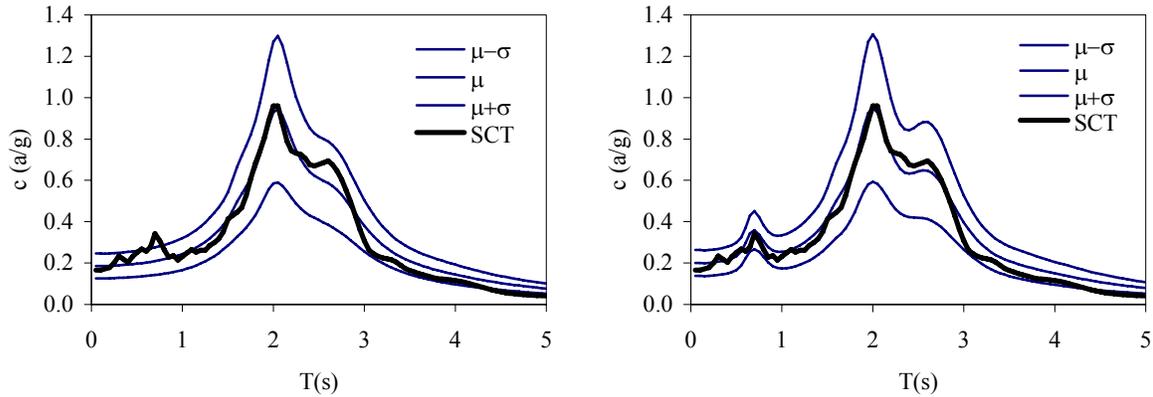


(a) Modulación en el tiempo

(b) Modulación acumulada

Figura 2.3 Modulación de intensidad en el tiempo, modelo de suma de gaussianas de Grigoriu *et al.* (1988)

Para constatar la bondad de los ajustes hechos, se calculan 1000 sismos sintéticos y de ellos se obtiene la respuesta lineal mediante el método de las “ocho constantes” como se describe en Chopra (2001). Se grafican la media de los espectros de aceleración absoluta más y menos una desviación estándar superpuestos con el espectro del sismo real en la figura 2.4 para cada filtro.

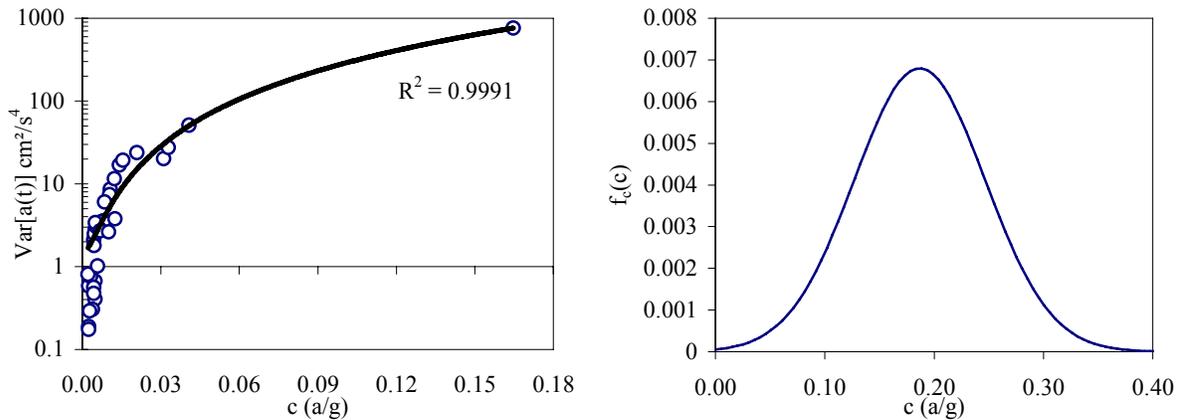


(a) Clough y Penzien (1975)

(b) Grigoriu et al. (1988)

Figura 2.4 Espectros probabilistas lineales de los sismos simulados para SCT

La propiedad más importante observada en los espectros de la figura 2.4 es que el filtro de Clough y Penzien (1975) reproduce adecuadamente dos frecuencias, mientras que el de Grigoriu *et al.*(1988) reproduce tres frecuencias naturales, condiciones impuestas desde el ajuste.



(a) Varianza de los sismos registrados en SCT

(b) Densidad de probabilidad de los sismos simulados

Figura 2.5 Sismos reales y simulados en SCT

Una señal es un conjunto de valores de aceleración, si a este conjunto se le obtiene su varianza, se posee una cantidad que es directamente proporcional con la intensidad de la señal, es decir, señales intensas poseen varianzas grandes.

Como variable de entrada cada señal real posee una media, que generalmente es cercana a cero y puede suponerse como tal y una varianza, que está asociada en proporción directa a la aceleración máxima de la señal analizada. Como conjunto de señales simuladas, se tiene una aceleración máxima media del terreno asociada y una varianza en proporción directa de la intensidad de la señal.

Con el fin de visualizar dicha varianza con una cantidad física de mayor uso, en la figura 2.5.a se grafican las varianzas de 36 eventos reales disponibles registrados en SCT y se aprecia un ajuste de un polinomio cuadrático a la varianza respecto a la aceleración máxima del terreno de cada registro.

Significa que la varianza en este caso sigue un ajuste cuadrático respecto a la aceleración máxima del terreno de cada evento. Esto es de utilidad cuando se desea obtener la varianza de sismos de intensidad moderada y al mismo tiempo se dispone de una aceleración deseada, pero no del registro.

Por otra parte, en la figura 2.5.b. se aprecia la densidad de probabilidad supuesta como gaussiana de los 1,000 sismos simulados con la técnica descrita en la sección anterior. Sismos que son utilizados en la obtención de los espectros de la figura 2.4.

La media de las aceleraciones máximas de los 1000 sismos simulados a partir de las propiedades de la señal original de SCT es de  $\mu=0.187$  gals, valor muy cercano a la aceleración máxima de la señal real, y las realizaciones poseen una desviación estándar de  $\sigma=0.06$  gals.

## 2.3 FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE RESPUESTA ASIMÉTRICAS

Una de las hipótesis importantes de la linealización equivalente gaussiana es suponer que la función de densidad de entrada es gaussiana, como la que se observa en la figura 2.5.b. Para el caso de la función de densidad de la respuesta, en la mayoría de los casos se supone también gaussiana, pero en el caso de la asimetría en fluencia no es así, incluso, las funciones de densidad de probabilidad que se presentan a continuación no son siquiera modelos comunes de funciones de densidad de probabilidad.

Para obtener una historia de funciones de densidad de probabilidad por tratarse de un caso no estacionario, es necesario generar 100,000 realizaciones en cada modelo para obtener una buena aproximación.

### 2.3.1 Desplazamiento

En lo que sigue se analiza el mismo oscilador que en el capítulo anterior para distintos casos. El oscilador tiene periodo natural de  $T=2$  s, fracción del amortiguamiento crítico de  $\xi=0.05$ , resistencia normalizada de  $c=0.1$ , valor de la aceleración de la gravedad de 981 gals, una asimetría mayor que el caso anterior de  $\phi=0.03$ , relación de rigidez de postfluencia  $\alpha=0.10$  y respuesta de alta ductilidad de  $E<\mu>=9.12$ .

Se utiliza el filtro de Clough y Penzien con los parámetros obtenidos en la sección anterior y la función moduladora de intensidad de Grigoriu *et al.* (1988) con el modelo bilineal de Suzuki y Minai (1987).

En la figura 2.6 se aprecia la historia de funciones de densidad de probabilidad del desplazamiento donde hay dos características importantes. Los valores medios del desplazamiento son distintos de cero, efecto que crece cuando se llega a la fase intensa de la señal original y la segunda característica es que posteriormente la media del desplazamiento se estabiliza en un valor residual.

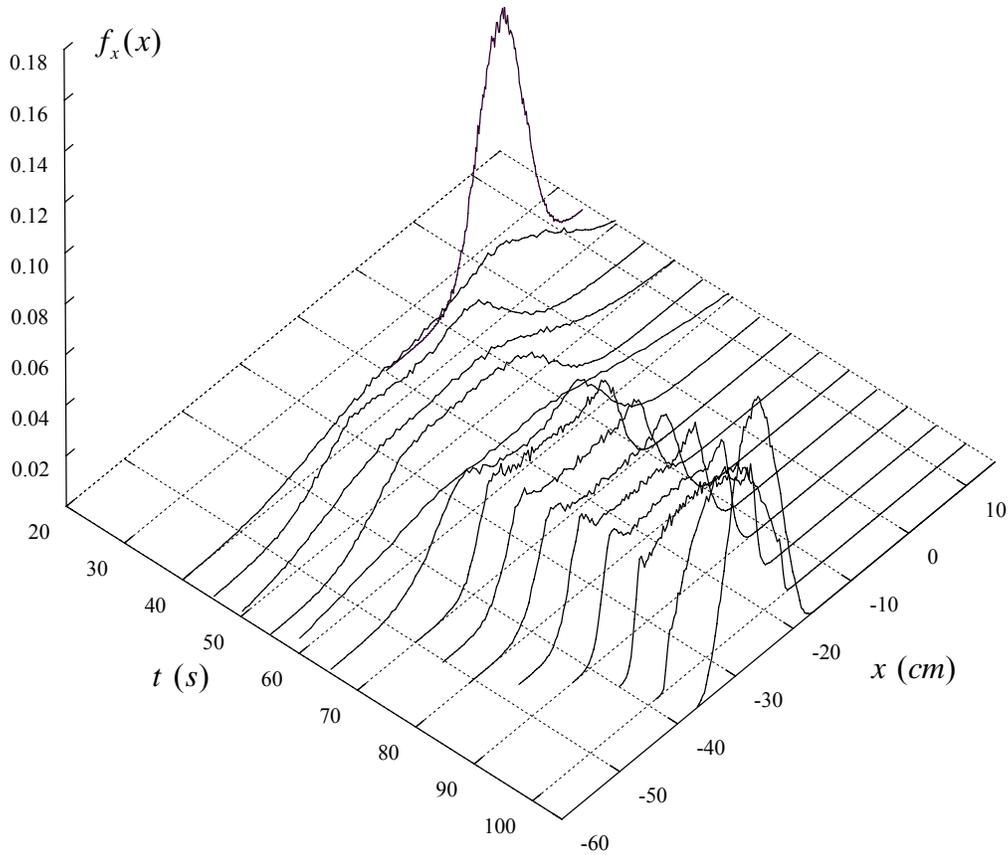


Figura 2.6 Historia de la función de densidad de probabilidad del desplazamiento

La otra característica de la historia es que las funciones no son estrictamente gaussianas en la fase intensa. En la figura 2.7 se aprecia que la función de densidad es gaussiana para  $t=35$  s, cuando el fenómeno se encuentra en su intervalo de comportamiento elástico, no obstante, para  $t=40$  s, se muestra una función típica, que ligeramente tiende a ser bimodal.

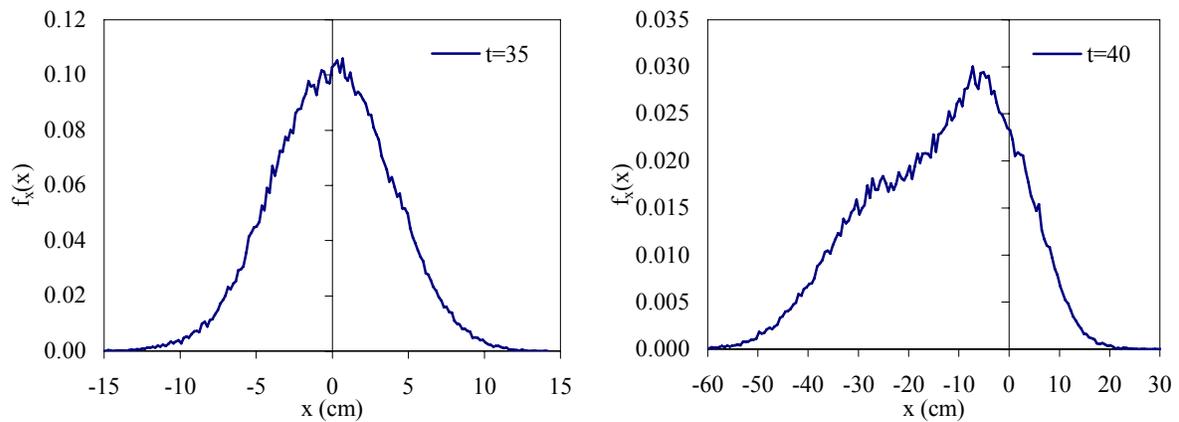


Figura 2.7 Funciones de densidad de probabilidad del desplazamiento en  $t=35$  y  $t=40$  s respectivamente

Al evolucionar el fenómeno hasta su fase intensa, en  $t=45$  s ó en  $t=65$  s, se aprecia que la función de densidad presenta dos valores dominantes es decir, es bimodal, como se aprecia claramente en la figura 2.8.

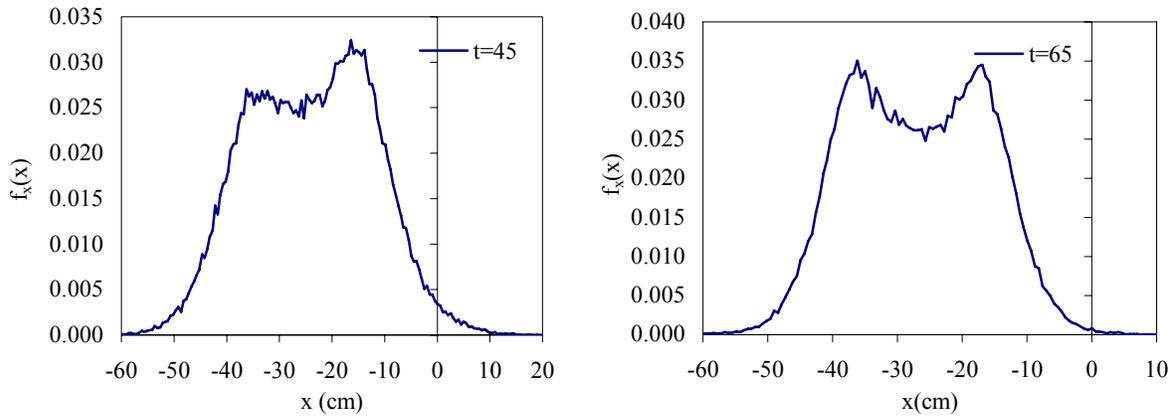


Figura 2.8 Función de densidad para el desplazamiento en  $t=45$  y  $t=65$  s respectivamente

### 2.3.2 Velocidad

Para el caso de la velocidad los valores medios no son muy distintos de cero y las funciones de densidad parecen tener cierta simetría como se aprecia en la figura 2.9.

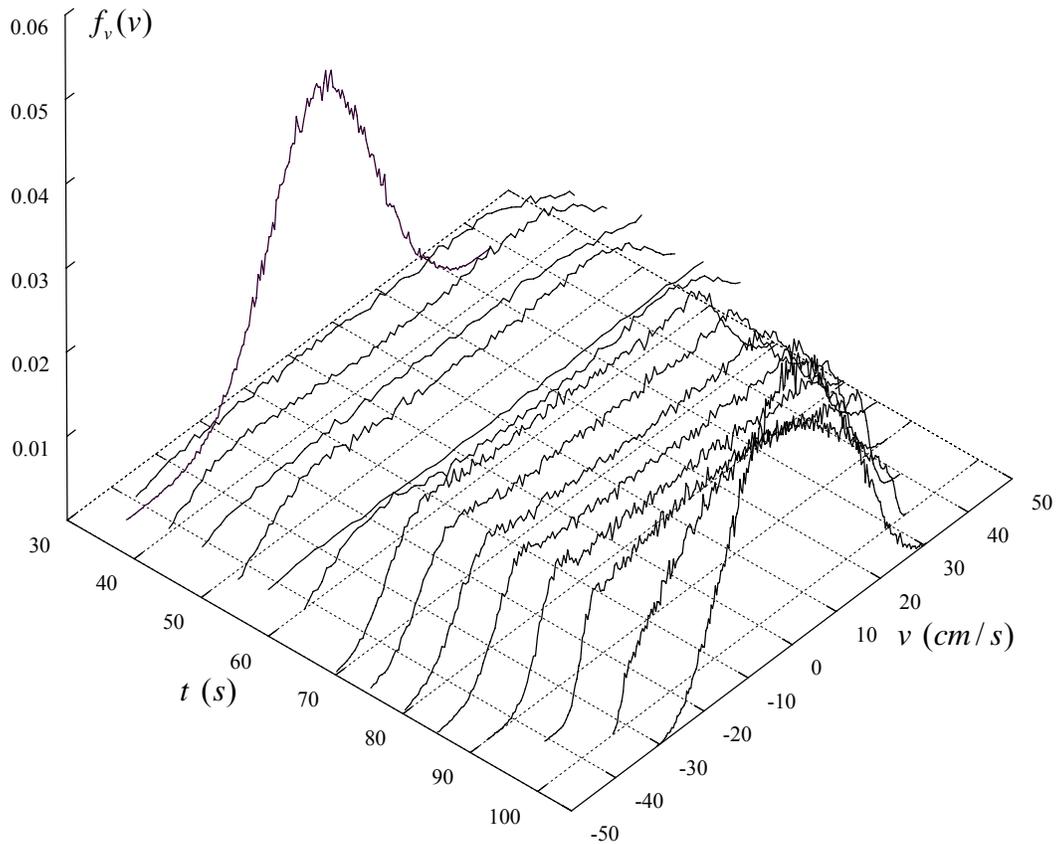


Figura 2.9 Historia de la función de densidad de la velocidad.

Para la fase intensa igualmente se tienen dos valores dominantes como se muestra en la figura 2.10 y además la función converge hacia una meseta como se muestra para  $t=85$  s.

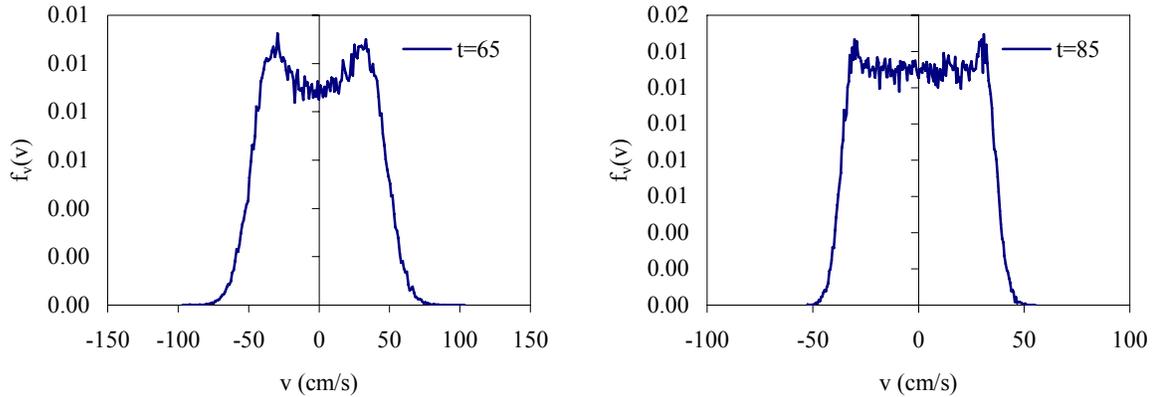


Figura 2.10 Función de densidad para la velocidad en  $t=65$  y  $t=85$  s respectivamente

### 2.3.3 Componente histerética del desplazamiento

En el caso de la componente histerética, estas funciones son las que más alejadas parecen de las funciones de densidad gaussianas. Se muestra la historia de funciones de densidad de probabilidad para la componente histerética  $z$  en la figura 2.11.

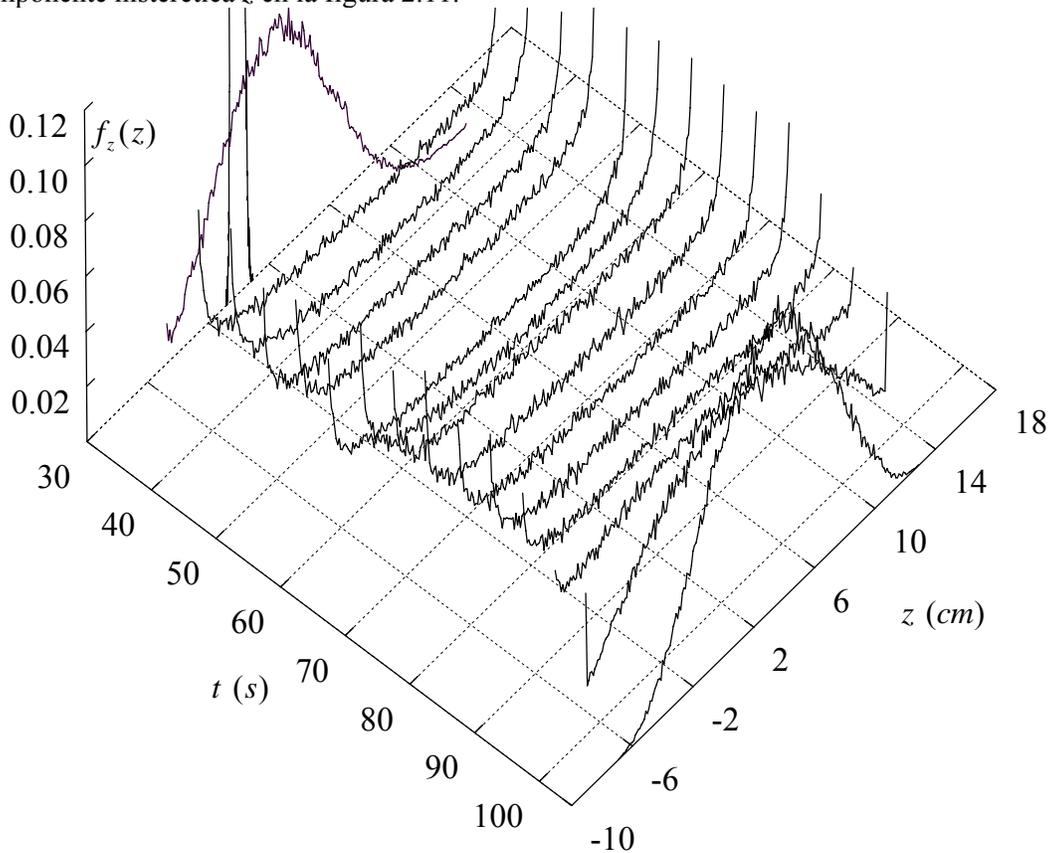
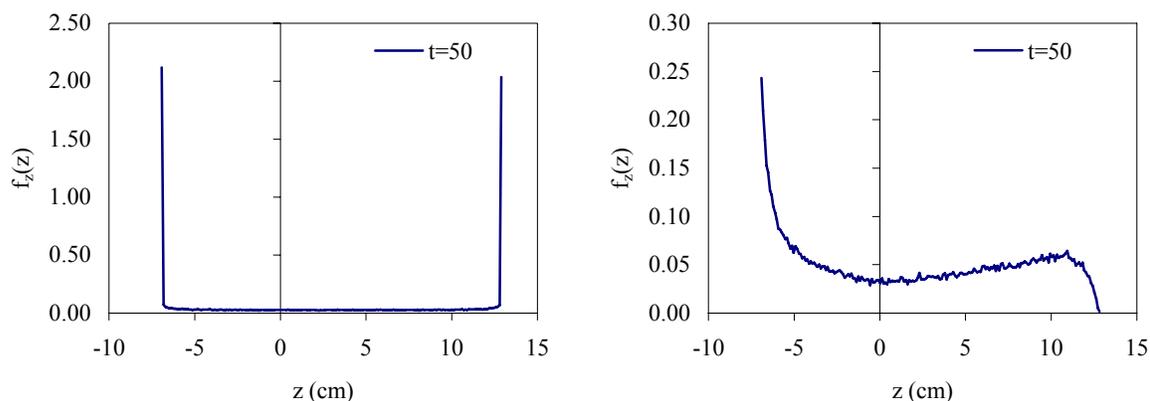


Figura 2.11 Historia de la función de densidad de probabilidad de la componente histerética  $z$

En la figura 2.12 se muestran funciones de los modelos asimétricos bilineal de Suzuki y Minai (1987) y de Baber y Wen (1979) sin degradación.



(a) Modelo bilineal de Suzuki y Minai

(b) Modelo de Baber y Wen sin degradación

Figura 2.12 Función de densidad para la componente histerética en  $t=50$

Para el caso bilineal en la misma figura 2.12.a se observa que de las 100,000 realizaciones ninguna excede los límites de fluencia asimétricos, es por ello la razón que esta función sea acotada en el eje de las abscisas a estos valores y la transición es brusca semejante a la histéresis desarrollada por el modelo con una distribución parecida a la uniforme y crece justo en los desplazamientos de fluencia asimétricos.

Esta propiedad se menciona en los trabajos de Silva (2002), Hurtado (1998) y Hapml y Schüeller (1989), donde se proponen densidades de probabilidad no gaussianas exclusivamente en la componente histerética del desplazamiento para el caso simétrico con media cero y presentan un buen ajuste.

En la figura 2.12.b se observa que el parámetro de  $n=1$  en el modelo de Baber y Wen sin degradación ofrece una transición suave tanto en la histéresis como en la función de densidad de probabilidad. El lado izquierdo corresponde a la resistencia débil, por lo que la función de densidad de probabilidad crece, mientras que el lado derecho corresponde a la resistencia fuerte, al ser un valor mayor que la resistencia débil la función de densidad de probabilidad decrece.

Significa que en el sentido fuerte, muchos de los sismos no hacen que el sistema fluya y generan comportamiento lineal parcial, mientras que del lado de la resistencia débil, todos los sismos hacen que el sistema fluya y generan comportamiento no lineal y por lo tanto, función de densidad de probabilidad no gaussiana.

En la figura 2.13 se presenta el modelo de Baber y Wen (1981) con degradación de rigidez utilizando el mismo oscilador con el parámetro de degradación  $\delta_{\eta}=0.00005$ . Las funciones de densidad de probabilidad también presentan transición suave con dos valores dominantes en las deformaciones de fluencia.

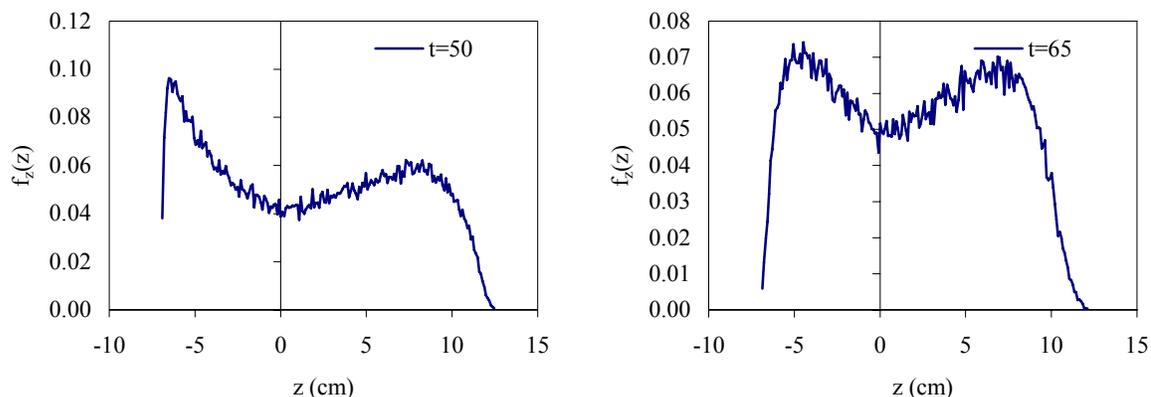


Figura 2.13 Función de densidad para el modelo de Baber y Wen con degradación de rigidez

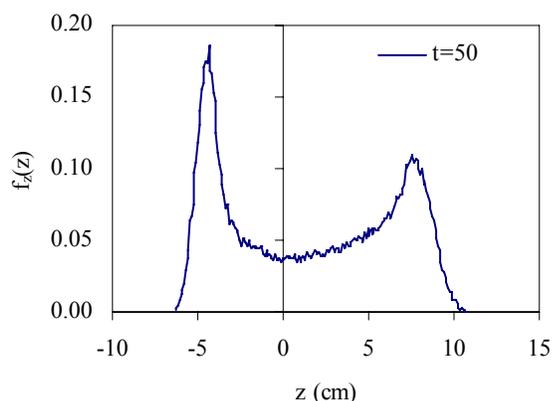


Figura 2.14 Función de densidad para el modelo de Baber y Wen con degradación de resistencia

En la figura 2.14 se aprecia que en el caso de la degradación de resistencia del modelo de Baber y Wen (1981) con parámetro de degradación  $\delta_v=0.00005$ . En ambos casos de degradación se aprecia que las transiciones son más suaves, lo cual tiene sentido, pues en el caso de degradación de resistencia, la componente histerética en cada ciclo de carga disminuye, y ésta componente al ser muy variable para cada sismo simulado ofrece una transición muy suave alrededor de las deformaciones de fluencia.

Para efectos de utilizar la linealización equivalente gaussiana, se expresan los siguientes razonamientos respecto a las funciones de densidad de probabilidad presentadas:

- En todos los casos, las funciones de densidad de probabilidad son asimétricas, por tratarse de un fenómeno asimétrico. En el sentido débil, la función de densidad de la componente histerética tiene valores mayores que su contraparte en el sentido fuerte.
- Por inspección de las gráficas observadas, los valores medios de la respuesta no pueden suponerse igual a cero, sobre todo en el desplazamiento, donde la media es fuertemente alejada de cero.
- A excepción de los intervalos de comportamiento elástico, las densidades de probabilidad para el desplazamiento, velocidad y componente histerética, son todas *no gaussianas*.
- Las funciones de densidad en el eje de las abscisas se encuentran siempre acotada a los valores correspondientes de las deformaciones de fluencia y no exceden en ningún caso dichos valores.

### 3.1 OBTENCIÓN DE LA RESPUESTA ESTOCÁSTICA

Una vez que se ha obtenido la respuesta mediante simulación de Monte Carlo se plantea ahora el método de la linealización equivalente como opción alternativa para tener los mismos resultados de manera aproximada, pues dicho método se justifica dado que la simulación de Monte Carlo es un método de alto consumo de recursos computacionales. Aquí se utiliza la técnica de *estado de espacio* que es adecuada en el desarrollo de la teoría de vibraciones aleatorias.

### 3.2 MOMENTOS DE PRIMER ORDEN O VALORES MEDIOS

Una histéresis asimétrica genera respuestas con valores medios distintos de cero, aún cuando el valor medio de la excitación sea cero. Para analizar sistemas asimétricos es imprescindible considerar en las hipótesis que las respuestas poseen valores medios distintos de cero como lo hace Baber (1984), quien sin embargo considera una histéresis simétrica.

Noori *et al.* (1986) proponen el caso con media distinta de cero, con el inconveniente de un modelo simétrico pero para una excitación con media distinta de cero. Spanos (1981) propone la solución de modelos asimétricos con osciladores sencillos no hysteréticos y en otro trabajo, Spanos (1980) realiza un planteamiento general de casos asimétricos, que para el presente trabajo es de mayor utilidad. Una descripción más detallada del planteamiento de Spanos (1980) se encuentra en Roberts y Spanos (1990) que se desarrolla en el Apéndice II para un oscilador no hysterético.

Aquí se comienza expresando que los modelos hysteréticos desarrollados para un grado de libertad son un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v \\ -2\xi\omega v - \alpha\omega^2 x - (1-\alpha)\omega^2 z - a_g(t) \\ h(v, z) \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Donde las variables de respuesta de la estructura son  $x$  que es el desplazamiento,  $v$  ó  $\dot{x}$  indistintamente se refieren a la velocidad y la componente hysterética  $z$ . Aquí  $h(v, z)$  es cualquiera de los tres modelos diferenciales que se definen con ecuaciones diferenciales no lineales: el de Suzuki y Minai (1987), Baber y Wen sin degradación (1979) y Baber y Wen con degradación (1981). El sistema de ecuaciones anterior puede expresarse como el siguiente desarrollo de matrices y vectores:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\alpha\omega^2 & -2\xi\omega & -(1-\alpha)\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ v \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -a_g(t) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ h(v, z) \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Designando a  $Y_E = \{x \quad v \quad z\}^T$  como vector de respuesta de la estructura se obtiene:

$$\dot{Y}_E = G_E Y_E + A + H \quad (3.3)$$

Donde  $A = \{0 \quad -a_g(t) \quad 0\}^T$ ,  $H = \{0 \quad 0 \quad h(v, z)\}^T$  y la matriz  $G$  es una matriz de constantes:

$$G_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\alpha\omega^2 & -2\xi\omega & -(1-\alpha)\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Para obtener los valores medios de las respuestas, simplemente se aplica el operador esperanza  $E\langle \cdot \rangle$  al sistema 3.3 para obtener:

$$E\langle \dot{Y}_E \rangle = G_E E\langle Y_E \rangle + E\langle A \rangle + E\langle H \rangle \quad (3.5)$$

Donde  $E\langle Y_E \rangle$  contiene el vector de valores medios de las variables. Estas son parte de la estadística de la respuesta como se indica a continuación en forma vectorial:

$$E\langle Y_E \rangle = \{\bar{x} \quad \bar{v} \quad \bar{z}\}^T \quad (3.6)$$

El término  $E\langle H \rangle$  en la ecuación 3.5 contiene a la esperanza directa de cualquiera de los tres modelos diferenciales propuestos. Esta hipótesis es fundamental, puesto que no es conveniente aproximar o simplificar de otra forma la obtención directa de la esperanza del modelo y es preferible manejarla analíticamente. Dicha esperanza depende de los valores medios de las respuestas, así como de sus varianzas. Véase en el Apéndice II esta relación. De este modo el vector  $E\langle H \rangle$  contiene la esperanza del modelo como se indica:

$$E\langle H \rangle = \{0 \quad 0 \quad E\langle h(v, z) \rangle\}^T \quad (3.7)$$

El término  $E\langle A \rangle$  de la ecuación 3.5 contiene el valor medio de la excitación, que en el caso de excitaciones sísmicas, puede considerarse cero, es decir  $E\langle A \rangle = 0$ .

### 3.3 VALORES MEDIOS DE LA RESPUESTA ANTE UN RUIDO BLANCO FILTRADO

La excitación se modela como *ruido blanco filtrado*, donde la respuesta de cada filtro satisface su propia ecuación de movimiento:

$$\ddot{x}_i + 2\xi_i\omega_i v_i + \omega_i^2 x_i = -a_i(t) \quad (3.8)$$

La respuesta del primer filtrado de Kanai (1957) y Tajimi (1960) es su aceleración absoluta:

$$a_{KT}(t) = \ddot{x}_g + a_o(t) = -2\xi_g\omega_g v_g - \omega_g^2 x_g \quad (3.9)$$

Donde  $a_o(t)$  es el ruido blanco,  $\xi_g, \omega_g$  son los parámetros del primer filtro descritos en el capítulo anterior y  $x_g, v_g$  son el desplazamiento y velocidad de respuesta del primer filtro. La ecuación anterior se puede expresar en términos de vectores como:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{v}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_g \\ -2\xi_g\omega_g v_g - \omega_g^2 x_g \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

La respuesta del primer filtro se introduce como excitación en el segundo filtro de Clough y Penzien (1975), es decir:

$$a_{CP}(t) = \ddot{x}_f - a_{KT}(t) = 2\xi_g \omega_g v_g + \omega_g^2 x_g - 2\xi_f \omega_f v_f - \omega_f^2 x_f \quad (3.11)$$

Donde  $a_{KT}(t)$  es la respuesta del primer filtro de Kanai(1957) y Tajimi(1960),  $\xi_f, \omega_f$  son los parámetros del segundo filtro descritos en el capítulo anterior y  $x_f, v_f$  son el desplazamiento y velocidad de respuesta del segundo filtro. En términos de vectores la ecuación anterior se expresa como:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_f \\ \dot{v}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_f \\ -2\xi_f \omega_f v_f - \omega_f^2 x_f + 2\xi_g \omega_g v_g + \omega_g^2 x_g \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Los sistemas de ecuaciones de los filtros 3.10 y 3.12 deben resolverse simultáneamente, por lo que pueden agruparse en un sistema de respuesta de los filtros:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_f \\ \dot{v}_f \\ \dot{x}_g \\ \dot{v}_g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_f^2 & -2\xi_f \omega_f & \omega_g^2 & 2\xi_g \omega_g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_g^2 & -2\xi_g \omega_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_f \\ v_f \\ x_g \\ v_g \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Si se designa  $Y_F = \{x_f \ v_f \ x_g \ v_g\}^T$  como vector de respuesta de los filtros, el sistema de ecuaciones 3.13 se puede expresar como:

$$\dot{Y}_F = G_F Y_F \quad (3.14)$$

La excitación final ya filtrada y modulada se representa como:

$$a_g(t) = c(t) \left[ -2\xi_f \omega_f v_f - \omega_f^2 x_f + 2\xi_g \omega_g v_g + \omega_g^2 x_g \right] \quad (3.15)$$

Donde  $a_g(t)$  es la excitación del oscilador y  $\xi_g, \omega_g, \xi_f$  y  $\omega_f$  son los parámetros de los filtros, y  $c(t)$  es la función moduladora de amplitud, dicha función fue descrita en el capítulo anterior. La ecuación anterior contiene también la respuesta de los filtros. Dicha ecuación se expresa en forma matricial como sigue:

$$A = \begin{Bmatrix} 0 \\ -a_g(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_f^2 c(t) & 2\xi_f \omega_f c(t) & -\omega_g^2 c(t) & -2\xi_g \omega_g c(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_f \\ v_f \\ x_g \\ v_g \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Es decir:

$$A = G_A Y_F \quad (3.17)$$

Enseguida se consideran las tres variables de respuesta de la estructura  $x, v$  y  $z$ , más las cuatro adicionales de los filtros generan un vector de respuesta extendido de orden de tres a siete, es decir.

$$Y = \{x \ v \ z \ x_f \ v_f \ x_g \ v_g\}^T \quad (3.18)$$

Asimismo, se tienen que resolver simultáneamente los sistemas de ecuaciones de los filtros 3.13 y el de la estructura 3.5, por lo que es conveniente expresar unas matrices de constantes anteriores agrupadas según el nuevo vector extendido de respuestas 3.18 de la siguiente forma:

$$\dot{Y} = GY + H = \begin{bmatrix} G_E & G_A \\ 0 & G_F \end{bmatrix} Y + H \quad (3.19)$$

Desglosando las matrices descritas en 3.4, 3.13 y 3.16 en la ecuación anterior, se tiene que:

$$G = \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha\omega^2 & -2\xi\omega & -(1-\alpha)\omega^2 & \omega_f^2 c(t) & 2\xi_f \omega_f c(t) & -\omega_g^2 c(t) & -2\xi_g \omega_g c(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_f^2 & -2\xi_f \omega_f & \omega_g^2 & 2\xi_g \omega_g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_g^2 & -2\xi_g \omega_g \end{array} \right] \quad (3.20)$$

Aplicando el operador esperanza en el sistema extendido 3.19 para obtener los valores medios de las respuestas del sistema aumentado se obtiene:

$$E\langle \dot{Y} \rangle = GE\langle Y \rangle + E\langle H \rangle \quad (3.21)$$

Desglosando el desarrollo anterior de las esperanzas anteriores, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{v}} \\ \dot{\bar{z}} \\ \dot{\bar{x}}_f \\ \dot{\bar{v}}_f \\ \dot{\bar{x}}_g \\ \dot{\bar{v}}_g \end{Bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha\omega^2 & -2\xi\omega & -(1-\alpha)\omega^2 & \omega_f^2 c(t) & 2\xi_f \omega_f c(t) & -\omega_g^2 c(t) & -2\xi_g \omega_g c(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_f^2 & -2\xi_f \omega_f & \omega_g^2 & 2\xi_g \omega_g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_g^2 & -2\xi_g \omega_g \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{v} \\ \bar{z} \\ \bar{x}_f \\ \bar{v}_f \\ \bar{x}_g \\ \bar{v}_g \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} E\langle h(v, z) \rangle \quad (3.22)$$

Al realizar la multiplicación de la matriz con el vector y realizando la suma, se obtiene finalmente un conjunto de siete ecuaciones diferenciales lineales por resolver:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{v}} \\ \dot{\bar{z}} \\ \dot{\bar{x}}_f \\ \dot{\bar{v}}_f \\ \dot{\bar{x}}_g \\ \dot{\bar{v}}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{v} \\ -\alpha\omega^2 \bar{x} - 2\xi\omega \bar{v} - (1-\alpha)\omega^2 \bar{z} + \omega_f^2 c(t) \bar{x}_f + 2\xi_f \omega_f c(t) \bar{v}_f - \omega_g^2 c(t) \bar{x}_g - 2\xi_g \omega_g c(t) \bar{v}_g \\ \hline E\langle h(v, z) \rangle \\ \bar{v}_f \\ -\omega_f^2 \bar{x}_f - 2\xi_f \omega_f \bar{v}_f + \omega_g^2 \bar{x}_g + 2\xi_g \omega_g \bar{v}_g \\ \bar{v}_g \\ -\omega_g^2 \bar{x}_g - 2\xi_g \omega_g \bar{v}_g \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Estas siete ecuaciones diferenciales se resuelven simultáneamente con la solución de la ecuación de Liapunov para el caso no estacionario que se describe en la siguiente sección 3.4.3.

El paso siguiente es calcular la esperanza  $E\langle h(v,z) \rangle$  para cada uno de los tres modelos planteados, el de Suzuki y Minai (1987), Baber y Wen sin degradación (1979) y Baber y Wen con degradación (1981). Los resultados de dichas esperanzas se resumen en el Apéndice I referente a los coeficientes linealizadores.

### 3.4 MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN

#### 3.4.1 Matriz de Covarianza

Los momentos de segundo orden se refieren a las varianzas y correlaciones de todas las respuestas incluidas las respuestas de los filtros. La manera apropiada de obtener dichas cantidades es mediante una matriz que se denomina de *covarianza*. Esta se obtiene de la siguiente forma: Sea el vector extendido de respuesta 3.18:

$$Y = \{x \ v \ z \ x_f \ v_f \ x_g \ v_g\}^T \quad (3.24)$$

Al multiplicar los vectores de respuesta de la siguiente forma se obtiene la matriz:

$$YY^T = \begin{bmatrix} x \\ v \\ z \\ x_f \\ v_f \\ x_g \\ v_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & v & z & x_f & v_f & x_g & v_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & xv & xz & xx_f & xv_f & xx_g & xv_g \\ & v^2 & v z & vx_f & vv_f & vx_g & vv_g \\ & & z^2 & zx_f & zv_f & zx_g & zv_g \\ & & & x_f^2 & x_f v_f & x_f x_g & x_f v_g \\ & & & & \text{Simétrica} & v_f^2 & v_f x_g & v_f v_g \\ & & & & & & x_g^2 & x_g v_g \\ & & & & & & & v_g^2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Al aplicar el operador esperanza en la matriz anterior, por definición se obtiene la matriz de correlación  $V$ :

$$V = E\langle YY^T \rangle = E \left\langle \begin{bmatrix} x^2 & xv & xz & xx_f & xv_f & xx_g & xv_g \\ & v^2 & v z & vx_f & vv_f & vx_g & vv_g \\ & & z^2 & zx_f & zv_f & zx_g & zv_g \\ & & & x_f^2 & x_f v_f & x_f x_g & x_f v_g \\ & & & & \text{Simétrica} & v_f^2 & v_f x_g & v_f v_g \\ & & & & & & x_g^2 & x_g v_g \\ & & & & & & & v_g^2 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (3.26)$$

La covarianza de dos variables  $x$  y  $v$  se define como sigue, (véase por ejemplo Papoulis (1965)).

$$COV(xv) = E\langle (x - \bar{x})(v - \bar{v}) \rangle = E\langle xv \rangle - \bar{x} \bar{v} \quad (3.27)$$

De esta cantidad se deduce que la varianza de una variable es:

$$VAR(x) = E\langle (x - \bar{x})(x - \bar{x}) \rangle = E\langle x^2 \rangle - \bar{x}^2 \quad (3.28)$$

El coeficiente de correlación de dos variables es:

$$\sigma_{x,v} = \frac{COV(xv)}{\sigma_x \sigma_v} = \frac{E\langle xv \rangle - \bar{x} \bar{v}}{\sqrt{(E\langle x^2 \rangle - \bar{x}^2)(E\langle v^2 \rangle - \bar{v}^2)}} \quad (3.29)$$

El desarrollo para la siguiente sección se realiza para un vector de respuestas referido a su media, es decir:

$$Y_o = \{(x - \bar{x}) \quad (v - \bar{v}) \quad (z - \bar{z}) \quad (x_f - \bar{x}_f) \quad (v_f - \bar{v}_f) \quad (x_g - \bar{x}_g) \quad (v_g - \bar{v}_g)\}^T \quad (3.30)$$

La definición de covarianza es la misma para este caso:

$$COV(x_o v_o) = E\langle (x - \bar{x})(v - \bar{v}) \rangle = E\langle xv \rangle - \bar{x} \bar{v} \quad (3.31)$$

Por lo que la matriz de correlación del vector de respuesta  $Y_o$  se define como:

$$V_o = E\langle Y_o Y_o^T \rangle \quad (3.32)$$

### 3.4.2 Nueva matriz de propiedades

El siguiente paso es aplicar el criterio de linealización equivalente. Si se retoma el sistema reducido de ecuaciones 3.1, que incluyen al modelo diferencial no lineal  $h(v,z)$ , se tiene que el sistema de respuestas por resolver es:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v \\ -2\xi\omega v - \alpha\omega^2 x - (1-\alpha)\omega^2 z - a_g(t) \\ h(v,z) \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

No obstante, las ecuaciones para  $h(v,z)$  son *no lineales* dado que contienen exponentes o productos. Como la solución de la ecuación no lineal es difícil, se plantea sustituir la ecuación no lineal del modelo, por una ecuación lineal equivalente más simple:

$$h(v,z) = c_e v + k_e z \quad (3.34)$$

Donde  $c_e$  y  $k_e$  son dos funciones dependientes de la estadística de la respuesta que se denominan *coeficientes linealizadores*, cuya propiedad más importante es que poseen las características estadísticas de la ecuación no lineal original, de modo que el sistema 3.33 se puede expresar en su forma lineal equivalente como:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v \\ -2\xi\omega v - \alpha\omega^2 x - (1-\alpha)\omega^2 z - a_g(t) \\ c_e v + k_e z \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Al sustituir el vector  $H$  no lineal del modelo en el sistema de ecuaciones 3.3, por el nuevo vector 3.35 que contiene al modelo lineal equivalente, el sistema por resolver se simplifica y se expresa de la siguiente forma:

$$\dot{Y}_E = G_E Y_E + A \quad (3.36)$$

Donde la matriz de constantes  $G_E$  es nueva e incluye ahora a los coeficientes linealizadores equivalentes  $c_e$  y  $k_e$ :

$$\dot{Y}_E = G_E Y_E + A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\alpha\omega^2 & -2\xi\omega & -(1-\alpha)\omega^2 \\ 0 & c_e & k_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ v \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -a(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

El resto de las matrices debidas a los filtros y la excitación no cambian, por lo que la matriz  $G$  extendida definida en 3.20, del mismo modo incluye ahora los coeficientes linealizadores:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha\omega^2 & -2\xi\omega & -(1-\alpha)\omega^2 & \omega_f^2 c(t) & 2\xi_f \omega_f c(t) & -\omega_g^2 c(t) & -2\xi_g \omega_g c(t) \\ 0 & c_e & k_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_f^2 & -2\xi_f \omega_f & \omega_g^2 & 2\xi_g \omega_g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_g^2 & -2\xi_g \omega_g \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Por lo que el sistema extendido de ecuaciones de respuesta utilizando la matriz de propiedades  $G$  anterior es:

$$\dot{Y} = GY + A \quad (3.39)$$

### 3.4.3 Ecuación de Liapunov

La ecuación diferencial 3.39 se conoce como ecuación de Liapunov, para la cual existen varias posibles soluciones. Enseguida se utiliza el vector de respuestas aumentado referido a su media 3.30 y su matriz de covarianza definida en 3.32. Al derivar dicha matriz de correlación, los operadores esperanza y derivada se pueden permutar y aplicando la regla de la cadena, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} V_o = \frac{d}{dt} E \langle Y_o Y_o^T \rangle = E \left\langle Y_o \frac{dY_o^T}{dt} \right\rangle + E \left\langle \frac{dY_o}{dt} Y_o^T \right\rangle \quad (3.40)$$

Sustituyendo el sistema de ecuaciones 3.39 para el caso cuando el vector  $Y_o$  se refiere a las medias en el resultado anterior se obtiene:

$$\dot{V}_o = E \left\langle Y_o \frac{dY_o^T}{dt} \right\rangle + E \left\langle \frac{dY_o}{dt} Y_o^T \right\rangle = E \left\langle Y_o (GY_o + A_o)^T \right\rangle + E \left\langle (GY_o + A_o) Y_o^T \right\rangle \quad (3.41)$$

Desarrollando los productos:

$$\dot{V}_o = GE \langle Y_o Y_o^T \rangle + E \langle Y_o Y_o^T \rangle G^T + E \langle Y_o A_o^T \rangle + E \langle A_o Y_o^T \rangle \quad (3.42)$$

En la ecuación anterior, se encuentra la matriz de correlación  $V_o$ :

$$\dot{V}_o = GV_o + V_o G^T + E \langle Y_o A_o^T \rangle + E \langle A_o Y_o^T \rangle \quad (3.43)$$

Nótese que las dos últimas esperanzas dependen de la excitación  $A_o$  y del vector de respuesta  $Y_o$ . Por lo que a continuación se explica como simplificar la obtención de dichas esperanzas restantes.

La solución de la ecuación diferencial de Liapunov 3.39 es de la siguiente forma, que se encuentra en Roberts y Spanos (1990):

$$Y(t) = \text{Exp}[Gt]Y(0) + \int_0^t \text{Exp}[G(t-\tau)]A(\tau)d\tau \quad (3.44)$$

Donde  $Y(t)$  es el vector de respuesta y simultáneamente la solución de la ecuación diferencial,  $G$  es la matriz de propiedades,  $Y(0)$  son las condiciones iniciales del vector y  $A(\tau)$  es el vector que contiene a la excitación. En la solución anterior se tiene una integral de convolución.

Si en la solución 3.44 se sustituye  $Y(t)$  por el vector que se refiere a su media  $Y_o(t)$ , se postmultiplica por  $A_o^T$  y aplicando en la solución el operador esperanza, se obtiene una de las esperanzas involucradas en la ecuación 3.43:

$$E\langle Y_o A_o^T \rangle = \text{Exp}[Gt]E\langle Y_o(0)A_o^T \rangle + \int_0^t \text{Exp}[G(t-\tau)]E\langle A_o A_o^T \rangle d\tau \quad (3.45)$$

Por otro lado, si las condiciones iniciales  $Y(0)$  son deterministas, o al menos no están correlacionadas con el proceso de excitación  $A(t)$  (Roberts y Spanos (1990)), entonces la solución 3.45 se simplifica dado que esta hipótesis significa que  $E\langle Y_o(0)A_o^T \rangle = 0$ .

Se observa en la ecuación anterior que aparece la matriz de covarianza  $V_A = E\langle A_o A_o^T \rangle$  del proceso de excitación. Con lo anterior, las dos esperanzas restantes por calcular de la ecuación 3.43 se resumen en:

$$E\langle Y_o A_o^T \rangle + E\langle A_o Y_o^T \rangle = \int_0^t \text{Exp}[G(t-\tau)]\{V_A + V_A^T\}d\tau \quad (3.46)$$

El siguiente paso es calcular la matriz de covarianza de la excitación, definiendo que el vector  $A_o$  contiene a la excitación de la siguiente forma en el sistema extendido:

$$A_o = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ a_o(t)\}^T \quad (3.47)$$

De modo que la matriz de correlación de la excitación es:

$$V_A = E\langle A_o A_o^T \rangle = E\left\langle \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_o^2(t) \end{bmatrix} \right\rangle \quad (3.48)$$

El único término que aparece en la matriz es la varianza  $\sigma_o^2$  del proceso, es decir:

$$E\langle a_o^2(t) \rangle = \sigma_o^2 \quad (3.49)$$

En este paso es necesario hacer una simplificación importante en el proceso de excitación, la cual es suponer que la varianza  $\sigma_o^2$  corresponde a una excitación modelada como ruido blanco. Es ampliamente conocido que la varianza del ruido blanco vale:

$$\sigma_o^2 = 2\pi S_o \quad (3.50)$$

Que puede consultarse en Roberts y Spanos (1990), en donde  $S_o$  es la amplitud constante de la densidad espectral en el dominio de las frecuencias. Además, el ruido blanco tiene función de correlación:

$$R(\tau) = 2\pi S_o \delta(\tau) \quad (3.51)$$

Al sustituir lo anterior en la integral 3.46, se facilita la integración y se obtiene una nueva matriz que agrupa a las dos esperanzas que contienen a la excitación:

$$\Theta = E\langle Y_o A_o^T \rangle + E\langle A_o Y_o^T \rangle = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2\pi S_o \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Al sustituir el resultado anterior en 3.43, finalmente se tiene que la solución de la ecuación diferencial de Liapunov para el caso no estacionario queda de la forma:

$$\dot{V}_o = G V_o + V_o G^T + \Theta \quad (3.53)$$

Donde  $V_o$  se define en 3.32,  $G$  en 3.38, y  $\Theta$  en 3.52. Esto completa la demostración de la solución de la ecuación de Liapunov. El sistema de ecuaciones anterior posee condiciones iniciales, las cuales se discuten en el Apéndice IV.

Para efectos de programación y por razones de simetría de la matriz de covarianza, enseguida se definen 28 ecuaciones diferenciales, las cuales se enumeran de la siguiente forma:

$$V_o = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \\ y_2 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_3 & y_9 & y_{14} & y_{15} & y_{16} & y_{17} & y_{18} \\ y_4 & y_{10} & y_{15} & y_{19} & y_{20} & y_{21} & y_{22} \\ y_5 & y_{11} & y_{16} & y_{20} & y_{23} & y_{24} & y_{25} \\ y_6 & y_{12} & y_{17} & y_{21} & y_{24} & y_{26} & y_{27} \\ y_7 & y_{13} & y_{18} & y_{22} & y_{25} & y_{27} & y_{28} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Bajo esta numeración se tienen 28 ecuaciones que resuelven los momentos de segundo orden de la ecuación 3.53, más el sistema de siete ecuaciones diferenciales 3.23 que resuelven los valores medios, dan un total de 35 ecuaciones diferenciales simultáneas, que pueden resolverse mediante el algoritmo del Fehlberg (1969) mejor conocido como el de Runge-Kutta-Fehlberg.

### 3.5 OBTENCIÓN DE LOS COEFICIENTES LINEALIZADORES

Hasta el momento se definió una ecuación lineal equivalente, quedando pendiente el cálculo de los coeficientes linealizadores  $c_e$  y  $k_e$ , lo cual se explica en esta sección.

El sustituir la ecuación original no lineal por otra lineal más simple genera un error, el cual es la diferencia entre ambos sistemas:

$$\varepsilon = h(v, z) - (c_e v + k_e z) \quad (3.55)$$

Dicho error se minimiza en un sentido adecuado y al mismo tiempo que ofrezca una solución analítica, por ejemplo, minimizar el error cuadrático medio entre ambos sistemas de ecuaciones:

$$E\langle \varepsilon^2 \rangle \rightarrow \min \quad (3.56)$$

Hasta este punto se utiliza un criterio que es similar al método de los mínimos cuadrados, en donde los datos aunque no se parecen a una recta se les asigna una recta que puede ser cualquiera de una familia de ellas. Al minimizar el error cuadrático medio, se encuentran unas constantes que proporcionan la mejor de todas las rectas. En este caso, los coeficientes linealizadores por encontrar son aquellas funciones que proporcionan la mejor de las soluciones de la ecuación lineal equivalente con las propiedades estocásticas de la ecuación no lineal original.

Se define un vector de coeficientes linealizadores:

$$H_e = \{c_e \quad k_e\}^T \quad (3.57)$$

Para que el error efectivamente se trate de un mínimo, se recurre al cálculo diferencial para un problema de máximos y mínimos, dicho desarrollo se realiza con la ayuda de Silva (2002). Para que error sea un mínimo, debe cumplirse que el gradiente de la función de error sea nulo, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_e} E\langle \varepsilon^2 \rangle &= E\left\langle \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial c_e} \right\rangle = 0 \\ \frac{\partial}{\partial k_e} E\langle \varepsilon^2 \rangle &= E\left\langle \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial k_e} \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} E\left\langle \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial c_e} \right\rangle &= E\left\langle \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial c_e} \right\rangle = 2E\left\langle \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial c_e} \right\rangle = 0 \\ E\left\langle \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_e} \right\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Sustituyendo el error de la ecuación 3.55 en las condiciones anteriores de la ecuación 3.58, se obtiene que:

$$\begin{aligned} E\left\langle \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial c_e} \right\rangle &= E\langle (h(v, z) - c_e v - k_e z)(-v) \rangle = 0 \\ E\left\langle \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_e} \right\rangle &= E\langle (h(v, z) - c_e v - k_e z)(-z) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Despejando las esperanzas de la igualdad anterior:

$$\begin{aligned} E\langle (c_e v + k_e z)(v) \rangle &= E\langle v h(v, z) \rangle \\ E\langle (c_e v + k_e z)(z) \rangle &= E\langle z h(v, z) \rangle \end{aligned} \quad (3.61)$$

Al separar las matrices y ordenar matricialmente el lado izquierdo de la ecuación anterior se obtiene que:

$$E \left\langle \left\{ \begin{array}{l} (c_e v^2 + k_e v z) \\ (c_e v z + k_e z^2) \end{array} \right\} \right\rangle = E \left\langle \begin{bmatrix} v^2 & v z \\ v z & z^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_e \\ k_e \end{Bmatrix} \right\rangle = E \langle Y Y^T \rangle H_e \quad (3.62)$$

Realizando el mismo procedimiento para el lado derecho de la igualdad 3.61, se obtiene que:

$$E \left\langle h(v, z) \begin{Bmatrix} v \\ z \end{Bmatrix} \right\rangle = E \langle h(v, z) Y \rangle \quad (3.63)$$

Igualando los resultados de 3.62 y 3.63, se obtienen las siguientes esperanzas:

$$E \langle Y Y^T \rangle H_e = E \langle h(v, z) Y \rangle \quad (3.64)$$

A continuación se obtiene el teorema del cual relaciona el vector de coeficientes linealizadores con el inverso de la matriz de correlación de la respuesta que aparece en la ecuación anterior junto con el modelo  $h(v, z)$ .

$$H_e = V^{-1} E \langle h(v, z) Y \rangle \quad (3.65)$$

Los coeficientes linealizadores obtenidos de esta forma pueden ser gaussianos o no, dado que la función de densidad que interviene en la esperanza 3.65 puede ser cualquiera, como lo menciona Silva (2002). En el presente trabajo se suponen funciones gaussianas, por lo que el resultado anterior puede simplificarse.

Kasakov (1965) y Atalik y Utku (1976) logran utilizar las ventajas que ofrece la función gaussiana, mencionan que la forma de relacionar dichas constantes con el vector de respuesta es:

$$H_e = E \langle \nabla h(v, z) \rangle \quad (3.66)$$

Donde  $\nabla$  es el operador *Nabla*, y la obtención de los coeficientes mediante la ecuación 3.66 es más sencilla que mediante la forma 3.65, por lo que los coeficientes linealizadores se obtienen de la forma:

$$c_e = E \left\langle \frac{\partial h(v, z)}{\partial v} \right\rangle \quad (3.67)$$

$$k_e = E \left\langle \frac{\partial h(v, z)}{\partial z} \right\rangle \quad (3.68)$$

La expresión anterior se encuentra ampliamente documentada en muchos trabajos de linealización equivalente gaussiana. Al expresar la ecuación anterior en términos de integrales, los coeficientes linealizadores se obtienen de la siguiente forma:

$$H_e = E\langle \nabla h(v, z) \rangle = \begin{Bmatrix} c_e \\ k_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h(v, z)}{\partial v} f_{v,z}(\bar{v}, \bar{z}, \sigma_v, \sigma_z, \rho_{v,z}) dv dz \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h(v, z)}{\partial z} f_{v,z}(\bar{v}, \bar{z}, \sigma_v, \sigma_z, \rho_{v,z}) dv dz \end{Bmatrix} \quad (3.69)$$

Donde  $f_{v,z}$  es ahora la función de densidad gaussiana de dos variables con medias distintas de cero. En caso de ser necesario, es posible calcular los coeficientes linealizadores mediante el modelo referido a su media, (como lo hacen Roberts y Spanos (1990)):

$$H_e = E\langle \nabla h_o(v_o, z_o) \rangle = \begin{Bmatrix} c_e \\ k_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_o(v_o + \bar{v}, z_o + \bar{z})}{\partial v_o} f_{v_o, z_o}(\sigma_{v_o}, \sigma_{z_o}, \rho_{v_o, z_o}) dv_o dz_o \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_o(v_o + \bar{v}, z_o + \bar{z})}{\partial z_o} f_{v_o, z_o}(\sigma_{v_o}, \sigma_{z_o}, \rho_{v_o, z_o}) dv_o dz_o \end{Bmatrix} \quad (3.70)$$

Donde  $f_{v_o, z_o}$  es la función de densidad gaussiana de dos variables para  $v$  y  $z$  con medias *cero* y coeficiente de correlación  $\rho_{v_o, z_o}$ . Los coeficientes obtenidos mediante la expresión 3.69 ó 3.70 son idénticos.

En el Apéndice II se presenta la obtención de un coeficiente linealizador asimétrico correspondiente a un oscilador *Duffing* de manera sencilla, mientras para que los tres modelos histeréticos propuestos, en el Apéndice I se desarrollan las expresiones para sus coeficientes linealizadores.

Dichos coeficientes linealizadores son el resultado de un ejercicio de integración de dos variables. Salvo algunos casos, el resultado de las integrales no se expresa de manera cerrada, lo cual significa que al menos una de las variables de integración queda expresada en términos de otra integral, aunque efectivamente más sencilla que la original. Dichas integrales deben resolverse para cada paso de tiempo en la obtención de la respuesta mediante cualquier técnica de integración, por ejemplo, mediante cuadraturas de integración. En este trabajo se utiliza la cuadratura de Simpson.

#### 4.1 DESCRIPCIÓN DEL ANÁLISIS

Hasta este instante se poseen todos los requerimientos teóricos para determinar numéricamente la bondad del criterio de la linealización equivalente gaussiana para sistemas asimétricos propuestos en esta tesis. Con fines prácticos se considera que la solución mediante la simulación de Monte Carlo es la *exacta* y la solución mediante linealización equivalente es la *aproximación*.

El siguiente paso es comparar ambos métodos variando algunos parámetros decisivos en la estadística de la respuesta. Esta última se refiere a los valores de primer orden o valores medios, y los de segundo orden, que son desviación estándar y correlaciones de cada una de las variables de respuesta, es decir, de desplazamiento, velocidad y componente histerética del desplazamiento. Se omiten estadísticas de orden superior dado que la linealización equivalente gaussiana proporciona momentos hasta de segundo orden exclusivamente.

La diferencia entre ambas respuestas genera un error  $\varepsilon$ , el cual se considera que es *relativo* respecto a la solución exacta o de Monte Carlo.

$$\varepsilon = \frac{\text{Linealización} - \text{Monte Carlo}}{\text{Monte Carlo}} \cdot 100 \quad (4.1)$$

El error  $\varepsilon$  posee signo, lo cual significa que en un error positivo la linealización equivalente sobreestima la respuesta, mientras que en un error negativo la subestima.

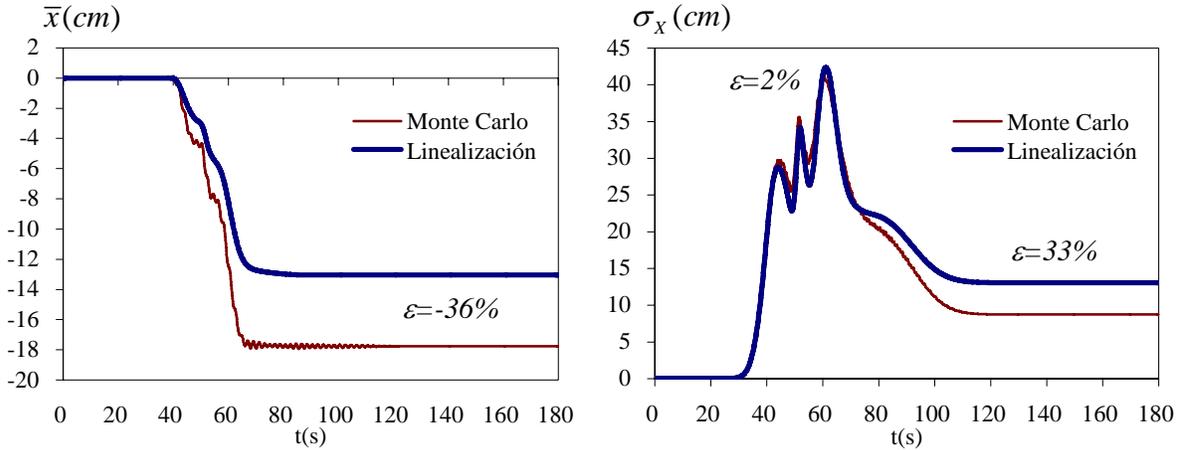
#### 4.2 HISTORIAS POR TIPO DE MODELO

En esta sección se indican las características en común de las historias. La masa es unitaria, la relación de postfluencia es  $\alpha=0.1$ , el periodo del oscilador es de  $T=2$  s, fracción del amortiguamiento crítico de  $\xi=0.05$ , asimetría en fluencia de  $\phi=0.03$ , la resistencia normalizada  $c$  varía con el fin de obtener una ductilidad media de  $E\langle\mu\rangle=1.5$  y comparar así el error entre los modelos de distintas características, mientras que el número de realizaciones o sismos simulados depende del tipo de respuesta por obtener. Se utiliza la misma señal de SCT con las mismas propiedades de modulación y filtrado descritos en el capítulo 2.

##### 4.2.1 Modelo de Suzuki-Minai asimétrico

Este modelo representa el comportamiento bilineal asimétrico, para el cual la resistencia del oscilador es de  $c=0.54$  para una ductilidad media de  $E\langle\mu\rangle=1.5$  y se utilizan 10,000 sismos simulados. En la figura 4.1.a se observa que en el valor medio del desplazamiento, el error en la etapa final de la respuesta es de  $\varepsilon=-36\%$ , mientras que en la desviación estándar del desplazamiento (en la figura 4.1.b) es de  $\varepsilon=33\%$ .

En este caso, la linealización subestima la respuesta en los valores medios, mientras que en la desviación estándar la sobreestima. No obstante, en la desviación estándar máxima, el error es de  $\varepsilon=2\%$ , el cual es bajo con respecto a los otros errores.

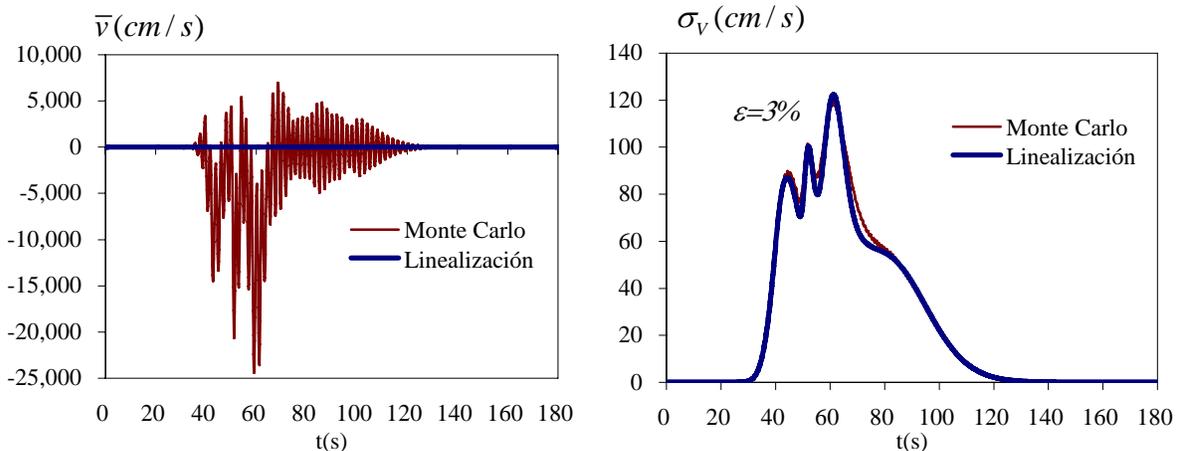


(a) Valor medio del desplazamiento

(b) Desviación estándar del desplazamiento

Figura 4.1 Historias en el tiempo, modelo de Suzuki-Minai

Respecto a la velocidad, el valor medio obtenido mediante simulación de Monte Carlo no ofrece una descripción adecuada del trazo de la historia, mientras que el obtenido mediante la linealización equivalente en la figura 4.2.a se aprecia como una horizontal en el origen, por lo tanto no es posible compararlos. En el caso de la historia de la desviación estándar por ambos métodos, sugieren un ajuste bueno con un error de  $\varepsilon=3\%$  en su valor máximo, como se aprecia en la figura 4.2.b.



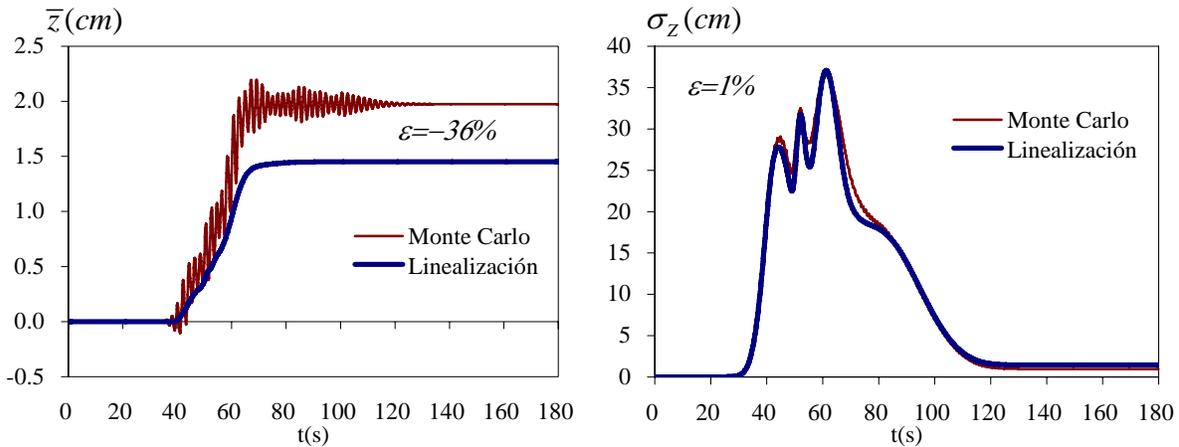
(a) Valor medio de la velocidad

(b) Desviación estándar de la velocidad

Figura 4.2 Historias en el tiempo, modelo de Suzuki-Minai

La componente histerética  $z$  posee unidades de desplazamiento y posee un error similar al desplazamiento, en esta variable la diferencia entre funciones de densidad de probabilidad es más acentuada. Sin embargo, en la historia de su estadística, dicha diferencia no muestra errores sustanciales.

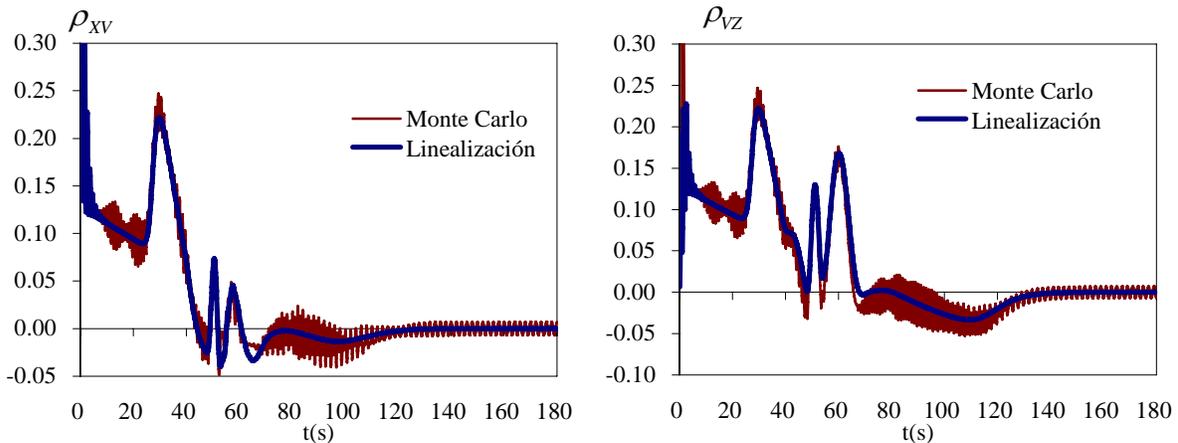
En el valor medio de la componente histerética  $z$  el error en la zona de descarga es de  $\varepsilon=-36\%$ , como en el caso del desplazamiento y en la desviación estándar es de  $\varepsilon=1\%$ , ambos casos se muestran en la figura 4.3.



(a) Valor medio de la componente histerética  $z$       (b) Desviación estándar de la componente histerética  $z$

Figura 4.3 Historias en el tiempo, modelo de Suzuki-Minai

Los coeficientes de correlación son variables de segundo orden y su respuesta es de interés porque uno de ellos es necesario en cada paso de integración para calcular los coeficientes linealizadores. En este caso, los coeficientes de correlación entre las variables muestran un ajuste muy bueno sin errores significativos, como se muestra en la figura 4.4.



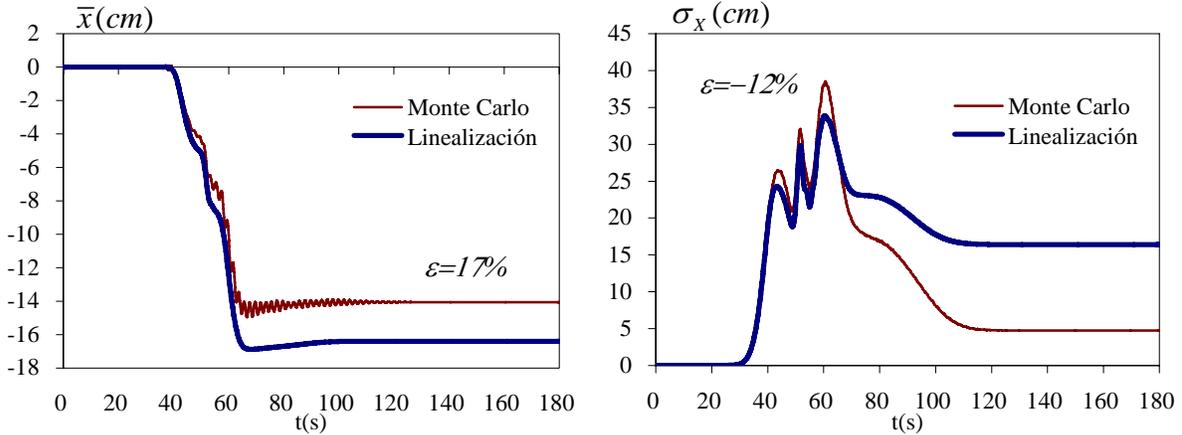
(a) Entre desplazamiento y velocidad

(b) Entre del velocidad y componente histerética

Figura 4.4 Historias en el tiempo de los coeficientes de correlación, modelo de Suzuki-Minai

#### 4.2.2 Modelo de Baber y Wen sin degradación asimétrico

Para este modelo de transición suave con asimetría, se supone que la resistencia del oscilador es de  $c=0.50$  para una ductilidad media de  $E\langle\mu\rangle=1.5$ . El parámetro de transición es de  $n=3.5$  y el de afilamiento es  $m=0.9$  y se utilizan 10,000 sismos simulados. El desplazamiento es la variable que mayor error genera en todos los modelos, por lo que basta considerar esta variable como una referencia respecto a las otras variables que generan menor error. Para este modelo, el error decrece en el valor medio del desplazamiento y es de signo contrario respecto al modelo de Suzuki-Minai (1987) siendo de  $\varepsilon=17\%$ , mientras que el error en la desviación estándar es de  $\varepsilon=-12\%$  como se aprecia en la figura 4.5.



(a) Valor medio del desplazamiento

(b) Desviación estándar del desplazamiento

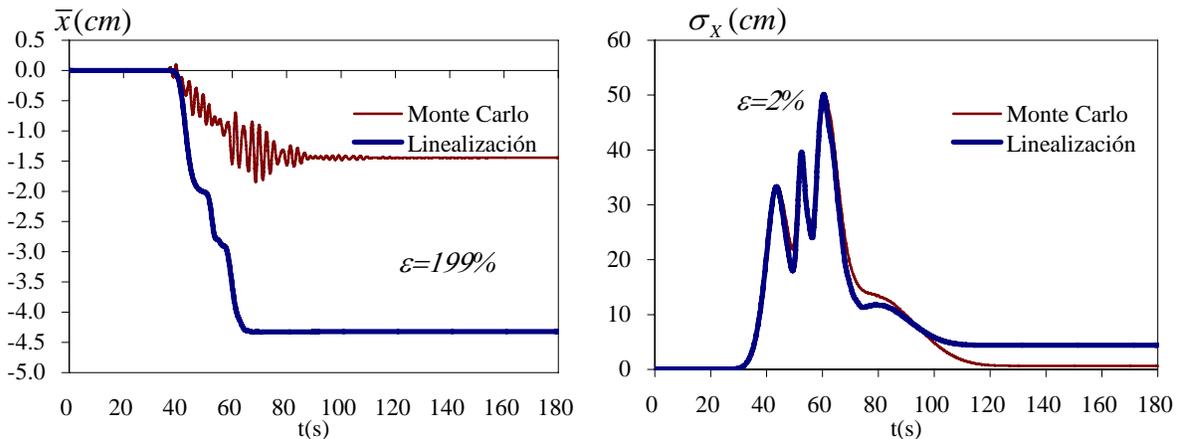
Figura 4.5 Historias en el tiempo, modelo de Baber y Wen (1979) sin degradación

### 4.2.3 Modelo de Baber y Wen con degradación asimétrico

La resistencia del oscilador se supone de  $c=0.59$  para una ductilidad media de  $E\langle\mu\rangle=1.5$  y dado que se trata de un modelo con mayor complejidad, es necesario utilizar 20,000 sismos simulados para obtener buena precisión en la respuesta.

Se considera degradación de rigidez y resistencia simultáneas, los parámetros de degradación como fracción de la energía disipada son  $\delta_A= \delta_v= \delta_r=0.00005$ .

En este caso, se aprecia en la figura 4.6 que el error en el valor medio del desplazamiento aumenta a  $\varepsilon=199\%$ , mientras que para la desviación estándar disminuye a  $\varepsilon=2\%$ . El error en el resto de las variables es de menor proporción, lo cual significa que si el error en la desviación estándar máxima del desplazamiento es del  $\varepsilon=2\%$ , el error en la desviación estándar de la velocidad y en la desviación estándar de la componente histerética son aún menores.



(a) Valor medio del desplazamiento

(b) Desviación estándar del desplazamiento

Figura 4.6 Historias en el tiempo, modelo de Baber y Wen (1981) con degradación

### 4.3 ANÁLISIS DE LAS FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE LA RESPUESTA

Los errores que se obtienen dependen de las hipótesis hechas descritas en los capítulos anteriores: Una causa de error es suponer el modelo lineal equivalente cuando el modelo es una ecuación diferencial no lineal. Otra causa de error es la hipótesis de considerar las funciones de densidad gaussianas en el modelo equivalente, dicho criterio es al que generalmente se le atribuye mayor error. Esto se puede comprobar al graficar las funciones de densidad de cada variable obtenidas por ambos métodos. En la figura 4.7 se grafican las funciones de densidad para el desplazamiento en la fase intensa de la señal, que es donde se perciben mayores diferencias y los pasos subsecuentes de la historia del análisis arrastran de poco en poco el error acumulado.

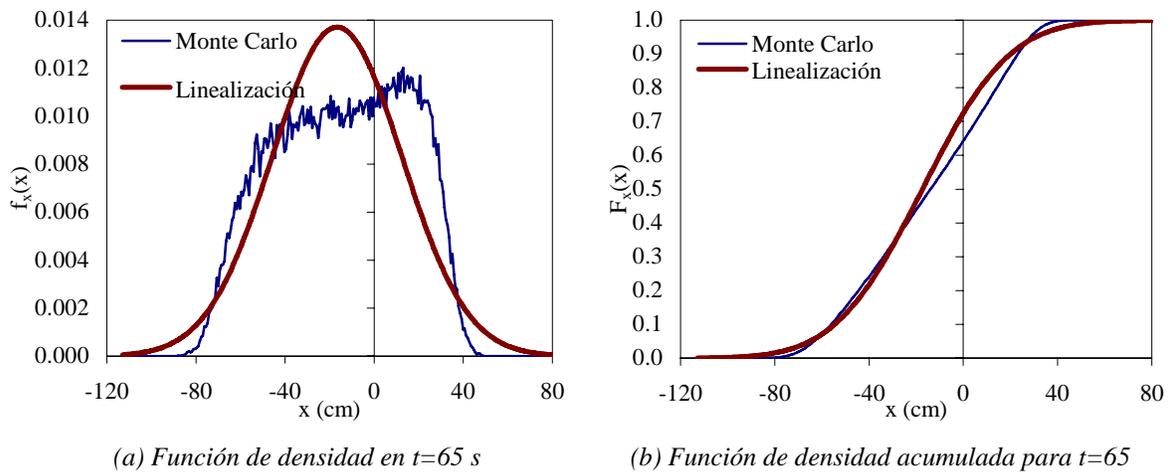


Figura 4.7 Desplazamiento en la fase intensa, modelo de Baber y Wen sin degradación

En el caso del desplazamiento la función de densidad de probabilidad muestra diferencias importantes en el valor máximo y los valores extremos, además de que la obtenida por Monte Carlo es bimodal y la gaussiana presenta un solo valor máximo. Pese a ello, en la función de densidad de probabilidad acumulada de la figura 4.7.b, dichas diferencias no parecen ser drásticamente distintas, lo que indica que la función gaussiana cumple su objetivo de ser equivalente a la original.

En el caso de la función de densidad de probabilidad de la componente histerética del desplazamiento no se puede afirmar lo mismo, ver la figura 4.8 para apreciar las diferencias. Aún cuando la media y desviación estándar de la componente histerética del desplazamiento que proporcionan la linealización equivalente son las mejores posibles, las diferencias por los dos métodos son evidentemente notorias tanto en la función de densidad como en la acumulada.

Las funciones de densidad de probabilidad para la componente histerética del desplazamiento obtenidas por la simulación de Monte Carlo, poseen propiedades como sesgo, valores multimodales, asimetría y otras características inadecuadas para una función gaussiana. Estas diferencias son importantes y son fuente del error que se obtiene.

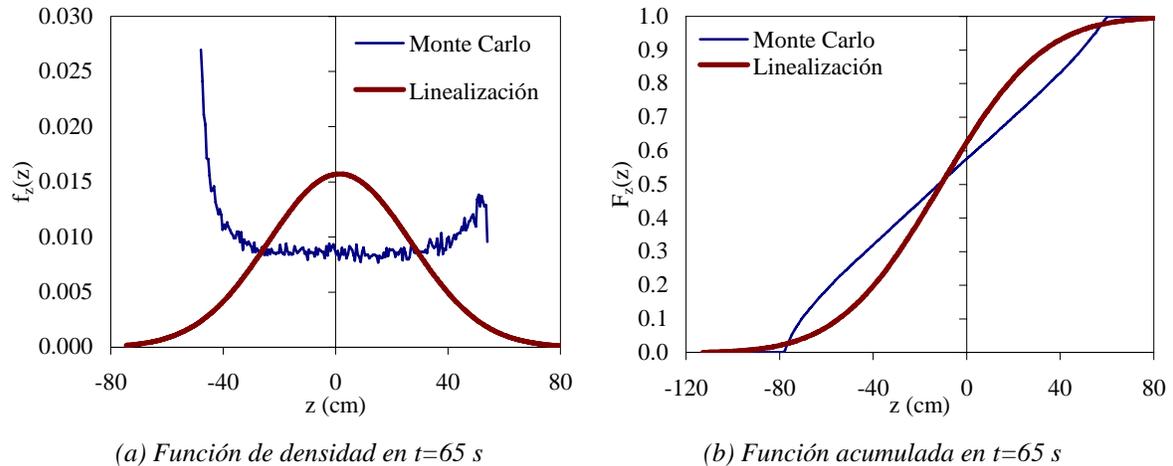


Figura 4.8 Componente histerética en la fase intensa, modelo de Baber y Wen (1979) sin degradación

#### 4.4 INFLUENCIA DE LA ASIMETRÍA EN LA RESPUESTA

Para obtener respuestas con distintos grados de asimetría se utiliza el modelo de Baber y Wen (1979) sin degradación. El cambio de la respuesta es altamente sensible a un ligero cambio en el parámetro de asimetría  $\phi$ , especialmente para los valores medios de todas las variables.

La figura 4.9.a muestra la historia de los valores medios del desplazamiento obtenidos por simulación de Monte Carlo, mientras que la figura 4.9.b los mismos resultados mediante linealización equivalente, para una resistencia de  $c=0.5$ , asimetría variable desde una ductilidad media de  $E\langle\mu\rangle=1.5$ , la cual se reduce gradualmente hasta  $E\langle\mu\rangle=1.26$  correspondiente al caso simétrico de  $\phi=0.00$ . En el caso simétrico el valor medio del desplazamiento vale cero en toda la historia.

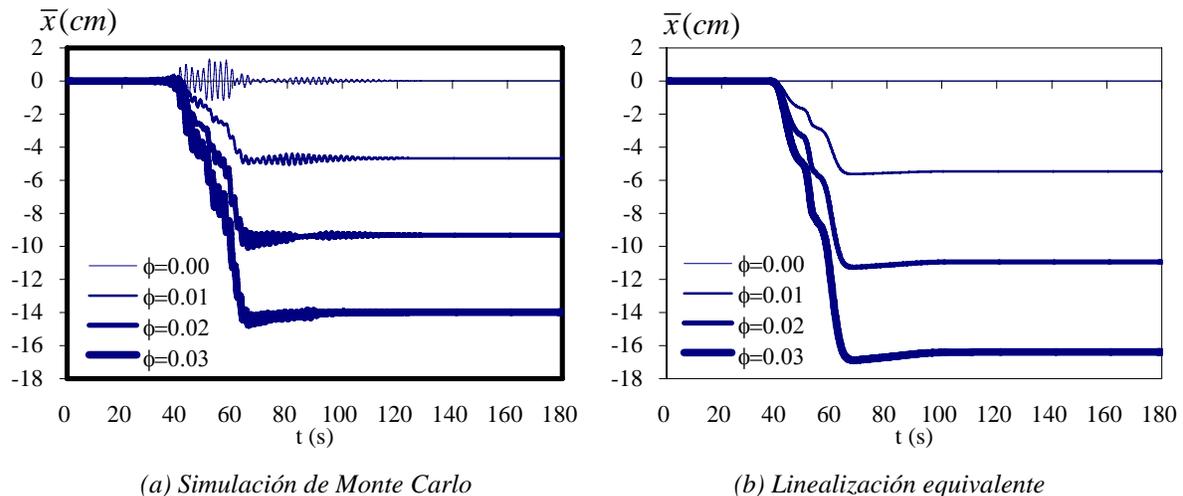


Figura 4.9 Valor medio del desplazamiento para distintas asimetrías

Las desviaciones estándar de las variables no sufren grandes variaciones con el cambio de la asimetría  $\phi$ , sobretodo en los valores máximos y exceptuando las zonas donde los valores medios tienen influencia sobre la desviación estándar, como se aprecia en la figura 4.10.

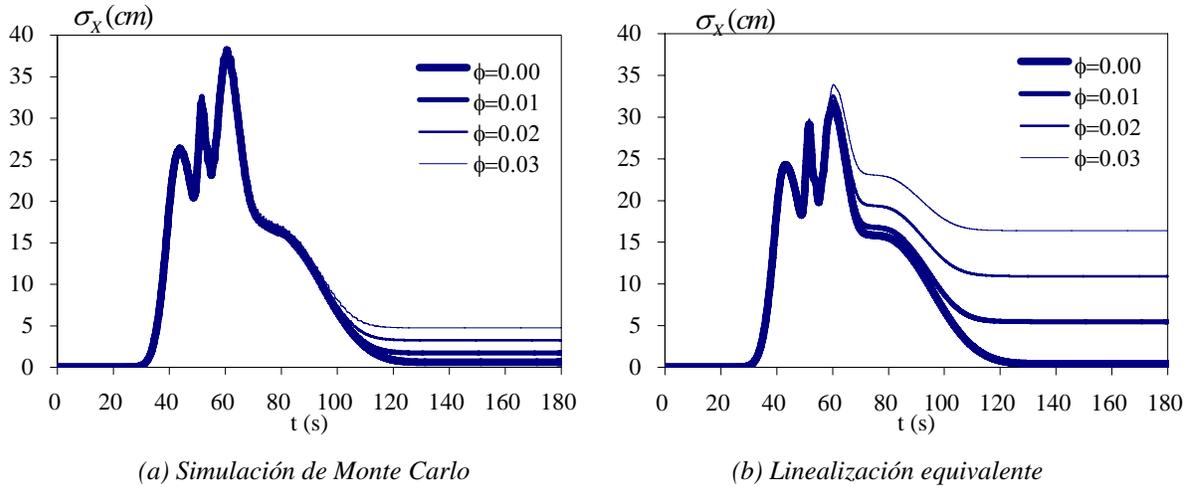


Figura 4.10 Desviación estándar del desplazamiento para distintas asimetrías

#### 4.5 INFLUENCIA DE LA DUCTILIDAD EN EL ERROR

Una de las desventajas de la linealización equivalente es que el error obtenido es sensible respecto a la ductilidad. Dicho error no es constante ni creciente en todos los casos, pues depende del tipo de modelo utilizado (dado que cada modelo desarrolla funciones de densidad de probabilidad en todas las variables distintas entre sí). El error también depende de la variable analizada, en donde las variables más sensibles al error son el valor medio y la desviación estándar del desplazamiento.

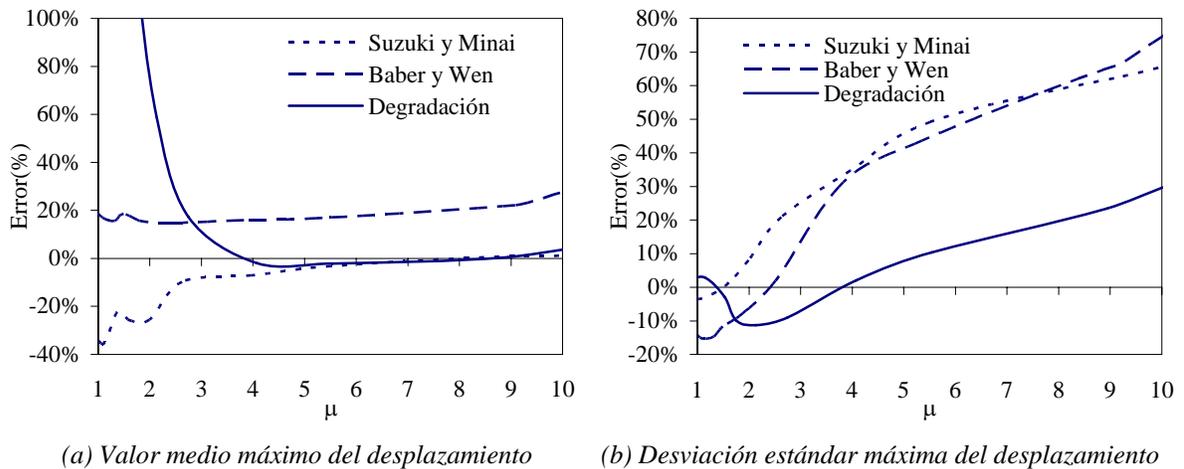


Figura 4.11 Variación del error respecto al tipo de modelo

En la figura 4.11.a se observa el error del valor medio del desplazamiento para cada uno de los modelos respecto a la esperanza de la ductilidad  $\mu$ , y para una asimetría fija de  $\phi=0.03$ . Para el modelo de Baber y Wen (1981) con degradación, el error aumenta considerablemente para ductilidades bajas y disminuye conforme la ductilidad aumenta, mientras que los otros dos modelos de Suzuki Minai (1987) bilineal y Baber y Wen (1979) sin degradación, así como el resto de las ductilidades, el error se conserva razonablemente inferior en el intervalo  $-40\% < \varepsilon < 20\%$  aún para ductilidades muy altas.

El error de la desviación estándar del desplazamiento se muestra en la figura 4.14.b. Se aprecia que todos los modelos tienen la tendencia a aumentar el error si se aumenta la ductilidad desarrollada y contrariamente al caso del valor medio, el modelo de Baber y Wen (1981) con degradación proporciona menor error respecto a los otros dos modelos.

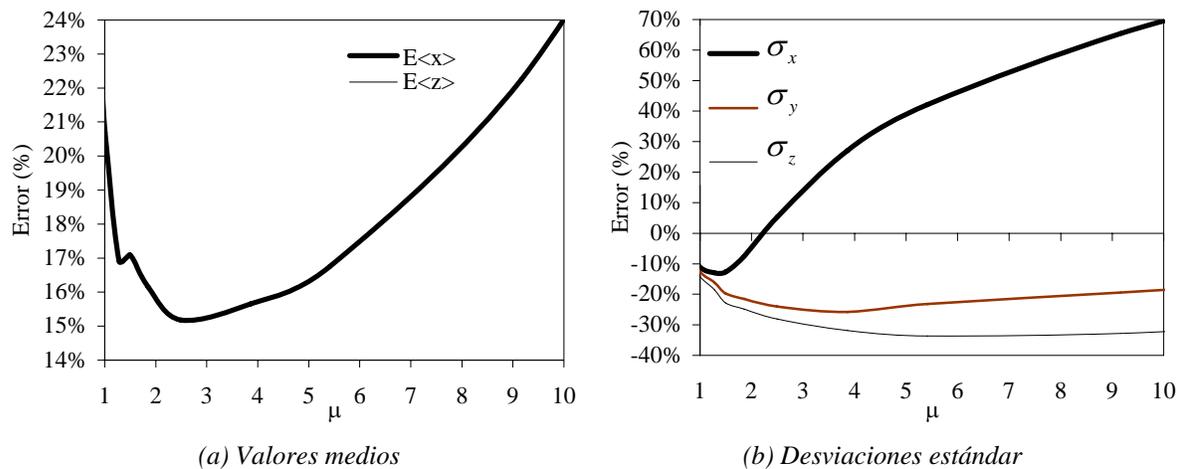


Figura 4.12 Variación del error respecto al tipo de variable

Algunas variables son más sensibles que otras en cuanto al error se refiere, lo cual se ejemplifica con el modelo de Baber y Wen (1979) sin degradación en la gráfica 4.12.a, donde para una asimetría fija de  $\phi=0.03$  se muestra que el valor medio del desplazamiento es el mismo que el error del valor medio de la componente histerética  $E\langle z \rangle$  y que para ductilidades muy altas y muy bajas dicho error es mayor, dejando una zona donde este error es mínimo.

En la figura 4.12.b se aprecia que las desviaciones estándar de la velocidad y componente histerética son estables y el error es alrededor de  $\varepsilon=-30\%$  para todos los valores de ductilidad desarrollada. No obstante, la desviación estándar del desplazamiento crece conforme la ductilidad también crece, siendo el error importante en ductilidades altas.

#### 4.6 EFECTIVIDAD DEL MÉTODO EN CUANTO A TIEMPO DE CÓMPUTO

Una de las razones principales para utilizar el método de la linealización equivalente, es que el consumo de tiempo es sustancialmente menor al de la simulación de Monte Carlo. Aún cuando se realizan integraciones numéricas de funciones complicadas en cada paso de integración, como regla general en casos asimétricos, la linealización consume el 3% del tiempo que se obtendría una respuesta similar con la simulación de Monte Carlo.

Los osciladores Duffing consumen muy pocas realizaciones, Spanos (1980) e Iwan y Mason (1978) reportan 200 ó 300 simulaciones, lo cual no parece ser problemático. Sin embargo, los modelos histeréticos requieren cuantiosas realizaciones, Wen (1980) y Baber (1984) en trabajos con modelos simétricos utilizan 200 realizaciones, en el caso de asimetría en fluencia este número de simulaciones apenas describe la desviación estándar del desplazamiento, pero en definitiva el valor medio del desplazamiento y las otras variables requieren más. Schüeller *et al.* (1997) han sugerido distintas pruebas de eficiencia y precisión de diversos sistemas estructurales estocásticos con el fin de mejorar la abundante literatura sobre el tema.

En cuanto a la simulación de Monte Carlo de sistemas con asimetría en fluencia, se concluye que un número aceptablemente bueno de realizaciones para que todas las variables ofrezcan una buena aproximación de la solución estable, es de tres mil.

La única excepción son las funciones de densidad, que ni siquiera un tope de 100 mil realizaciones fueron suficientes para lograr la solución estable, esto significa que probablemente trescientas mil ó un millón de realizaciones son necesarias para describir satisfactoriamente las funciones de densidad de probabilidad asimétricas obtenidas por simulación de Monte Carlo.

Este número alto de realizaciones es el principal incentivo para continuar el uso del método de linealización equivalente como método alternativo y eficiente, al entenderse esta última expresión como la capacidad de ahorrar sustancialmente los recursos utilizados, en específico, tiempo de cálculo.

- a) Se revisan tres modelos diferenciales o endocrónicos los cuales reproducen el comportamiento asimétrico en fluencia de un sistema de un grado de libertad. Los modelos simétricos originales de Suzuki y Minai (1987), Baber y Wen sin degradación (1979), y Baber y Wen con degradación (1981). Estos modelos poseen parámetros que se utilizan indistintamente tanto en ciclos simétricos como asimétricos. La asimetría del ciclo de histéresis se regula con un solo parámetro y es consistente con el comportamiento obtenido en los estudios previos (Ruiz 1991, y Terán *et al.* 2000).
- b) Se proponen coeficientes linealizadores asimétricos, con medias distintas de cero, así como el valor medio de cada modelo. Los coeficientes no son cerrados al expresarse en término de otras integrales, pese a ello, la integración respecto a una variable permite que los coeficientes presentados se calculen de manera eficiente.
- c) Se demuestra que en los sistemas asimétricos en fluencia ninguna de las funciones de densidad de probabilidad del desplazamiento, velocidad y componente histerética es gaussiana, por lo que se hace evidente que la hipótesis gaussiana hecha en linealización equivalente es insuficiente y es una fuente importante del error obtenido. Las funciones de densidad de probabilidad muestran asimetría y sesgos importantes así como formas multimodales.
- d) Los valores medios de la respuesta son altamente sensibles a la asimetría del sistema, un ligero cambio en el valor de la asimetría genera importantes cambios en los valores medios, mientras que las desviaciones estándar y los coeficientes de correlación son similares al caso simétrico. Por el solo hecho de que los valores medios sean distintos, las funciones de densidad de probabilidad de los sistemas asimétricos difieren mucho respecto de los sistemas simétricos.
- e) Como tendencia general, el error de la linealización equivalente aumenta con el incremento de la ductilidad media desarrollada. Los valores medios y los coeficientes de correlación no muestran una tendencia clara del error mientras que el error más importante es en la desviación estándar del desplazamiento, el cual aumenta conforme crece la ductilidad desarrollada.
- f) La mayoría de trabajos de linealización equivalente proporcionan errores alrededor del 20%, como en los trabajos de Spanos (1980) e Iwan (1980) porque se refieren a sistemas de baja no linealidad, por lo que el error obtenido en este trabajo es razonablemente aceptable, además de la ventaja de tener un enorme ahorro en cálculos. Indica que la linealización puede ser una buena solución en sistemas de ductilidades bajas y al menos una buena aproximación para sistemas de ductilidades moderadas.
- g) El error de la desviación estándar del desplazamiento en sistemas de ductilidad menor o igual que cuatro es del 30% y para una asimetría del 3% o menor. Dicha ductilidad es común en sistemas estructurales en la práctica, por lo que es aceptable manejar esa cantidad de error al usar linealización equivalente gaussiana. Para ductilidades mayores no es recomendable utilizar el resultado de la linealización equivalente y es preferible utilizar la simulación de Monte Carlo.
- h) En el presente estudio no se analizan cambios en las propiedades básicas del oscilador como periodo y amortiguamiento. La tendencia del error puede variar en casos distintos.

El método de la linealización equivalente requiere el cálculo de los coeficientes linealizadores en cada paso de integración de la ecuación de movimiento. Dichos coeficientes dependen de la estadística de la respuesta, es decir, de los valores medios, desviaciones estándar y coeficientes de correlación de las variables de respuesta. Dado que los coeficientes se obtienen a partir de esperanzas matemáticas, definidas por integrales de funciones de las variables de respuesta, conviene dichos coeficientes estén definidos por expresiones analíticas con el fin de reducir la mayor cantidad de cálculos numéricos.

Todos los modelos diferenciales  $h(v,z)$  se expresan en términos de la velocidad  $v$  y de la componente histerética  $z$ . Ambas respuestas, son a su vez las variables de integración para el cálculo de las esperanzas. Durante la integración, se aplican dos criterios esenciales según lo observado en la estadística del fenómeno de asimetría.

- 1.- Las variables están correlacionadas
- 2.- Los valores medios de las variables son distintos de cero.

Las funciones especiales de las siguientes expresiones se pueden consultar en el Apéndice V. Se aplica ahora una hipótesis muy importante, la función de densidad de probabilidad en el cálculo de la esperanza es gaussiana bivariada.

### I.1 INTEGRACIÓN DE LOS COEFICIENTES LINEALIZADORES GAUSSIANOS

Sea la función de densidad gaussiana (Papoulis, 1965) de dos variables para la velocidad  $v$  y la componente histerética  $z$ :

$$f_{v,z}(v,z) = \frac{1}{2\pi\sigma_v\sigma_z\sqrt{1-r^2}} \text{Exp} \left\{ -\frac{\frac{(v-\bar{v})^2}{\sigma_v^2} - \frac{2r(v-\bar{v})(z-\bar{z})}{\sigma_v\sigma_z} + \frac{(z-\bar{z})^2}{\sigma_z^2}}{2(1-r^2)} \right\} \quad (\text{I.1})$$

Donde  $r$  es el coeficiente de correlación entre  $v$  y  $z$ , el valor medio de la velocidad es  $\bar{v}$ , el valor medio de la componente histerética es  $\bar{z}$ , la desviación estándar de la velocidad es  $\sigma_v$  y la desviación estándar de la componente histerética es  $\sigma_z$ .

Para el cálculo de la estadística de la respuesta se requiere obtener dos coeficientes linealizadores y además el valor medio del modelo, en la forma que se justifica en el Apéndice II:

$$c_e = E \left\langle \frac{\partial h(v,z)}{\partial v} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h(v,z)}{\partial v} f_{v,z}(v,z) dv dz \quad (\text{I.2})$$

$$k_e = E \left\langle \frac{\partial h(v,z)}{\partial z} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h(v,z)}{\partial z} f_{v,z}(v,z) dv dz \quad (\text{I.3})$$

$$\bar{h}(v,z) = E \langle h(v,z) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(v,z) f_{v,z}(v,z) dv dz \quad (\text{I.4})$$

En las siguientes secciones se encuentran las expresiones para los coeficientes linealizadores y la expresión para el valor medio de cada uno de los modelos histeréticos.

Asimismo se dan expresiones aún más simplificadas para el caso simétrico sin valores medios ni asimetría, donde se cumplen las condiciones que  $\phi = \bar{v} = \bar{z} = \bar{h}(v, z) = 0$ .

## I.2 MODELO DE SUZUKI Y MINAI ASIMÉTRICO

El modelo se expresa como:

$$h(v, z) = v \left( 1 - H(v)H(z - x_y^+) - H(-v)H(-z - x_y^-) \right) \quad (\text{I.5})$$

Donde  $x_y^-$  y  $x_y^+$  son las deformaciones de fluencia.

### I.2.1 Coeficiente $C_e$

$$c_e = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \text{Erf} \left( \frac{x_y^+ - \bar{z}}{\sqrt{2}\sigma_z} \right) + \frac{1}{4} \text{Erf} \left( \frac{x_y^- + \bar{z}}{\sqrt{2}\sigma_z} \right) + I_{sm} \quad (\text{I.6})$$

Donde:

$$I_{sm} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma_z} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Exp} \left( -\frac{(z - \bar{z})^2}{2\sigma_z^2} \right) \text{Erf} \left( \frac{\sigma_z \bar{v} + r\sigma_v [z - \bar{z}]}{\sqrt{2 - 2r^2}\sigma_v\sigma_z} \right) \left\{ H(-z - x_y^-) - H(z - x_y^+) \right\} dz \quad (\text{I.7})$$

Las funciones especiales para este modelo son:

$\text{Erf}(x)$  Función error de x

$H(x)$  Escalón unitario o función de Heaviside de x.

### I.2.2 Coeficiente $K_e$

$$k_e = k_{e1} + k_{e2} \quad (\text{I.8})$$

Donde:

$$k_{e1} = \frac{e^{-\frac{(x_y^+ - \bar{z})^2}{2\sigma_z^2}}}{2\pi^{3/2}\sqrt{2 - 2r^2}\sigma_z^2} \left\{ \text{Exp} \left( \frac{[\sigma_z \bar{v} + r\sigma_v (x_y^+ - \bar{z})]^2}{2(r^2 - 1)\sigma_v^2\sigma_z^2} \right) \sqrt{2\pi}(r^2 - 1)\sigma_v\sigma_z \right. \\ \left. - \pi\sqrt{1 - r^2} (r\sigma_v (x_y^+ - \bar{z}) + \sigma_z \bar{v}) \left[ 1 + \text{Erf} \left( \frac{\sigma_z \bar{v} + r\sigma_v (x_y^+ - \bar{z})}{\sqrt{2 - 2r^2}\sigma_v\sigma_z} \right) \right] \right\} \quad (\text{I.9})$$

$$k_{e2} = \frac{e^{-\frac{(x_y^- + \bar{z})^2}{2\sigma_z^2}}}{4\pi\sqrt{1 - r^2}\sigma_z^2} \left\{ 2\text{Exp} \left( \frac{[\sigma_z \bar{v} - r\sigma_v (x_y^- + \bar{z})]^2}{2(r^2 - 1)\sigma_v^2\sigma_z^2} \right) (r^2 - 1)\sigma_v\sigma_z \right. \\ \left. + \sqrt{2\pi}\sqrt{1 - r^2} (\sigma_z \bar{v} - r\sigma_v (x_y^- + \bar{z})) \left[ 1 - \text{Erf} \left( \frac{-\sigma_z \bar{v} + r\sigma_v (x_y^- + \bar{z})}{\sqrt{2}\sqrt{1 - r^2}\sigma_v\sigma_z} \right) \right] \right\} \quad (\text{I.10})$$

### I.2.3 Esperanza del modelo

$$\bar{h}(v, z) = \bar{v} - \frac{1}{2\pi\sigma_z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \{ fs_1(z) + fs_2(z) \} dz \quad (\text{I.11})$$

Donde:

$$f_{s_1} = \frac{H(-z - x_y^-)}{\sqrt{2-2r^2}} \text{Exp} \left( -\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma_z^2} \right) \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2} \text{Exp} \left( \frac{[\sigma_z \bar{v} + r\sigma_v(z-\bar{z})]^2}{2(r^2-1)\sigma_v^2\sigma_z^2} \right) (r^2-1)\sigma_v\sigma_z + \\ \sqrt{\pi - \pi r^2} (\sigma_z \bar{v} + r\sigma_v(z-\bar{z})) \left[ 1 - \text{Erf} \left( \frac{\sigma_z \bar{v} + r\sigma_v(z-\bar{z})}{\sqrt{2}\sqrt{1-r^2}\sigma_v\sigma_z} \right) \right] \end{array} \right\} \quad (\text{I.12})$$

$$f_{s_2} = \frac{H(z - x_y^+)}{\sqrt{4-4r^2}} \text{Exp} \left( -\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma_z^2} \right) \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{Exp} \left( \frac{[\sigma_z \bar{v} + r\sigma_v(z-\bar{z})]^2}{2(r^2-1)\sigma_v^2\sigma_z^2} \right) (r^2-1)\sigma_v\sigma_z - \\ \sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2} (\sigma_z \bar{v} + r\sigma_v(z-\bar{z})) \left[ 1 + \text{Erf} \left( \frac{\sigma_z \bar{v} + r\sigma_v(z-\bar{z})}{\sqrt{2}\sqrt{1-r^2}\sigma_v\sigma_z} \right) \right] \end{array} \right\} \quad (\text{I.13})$$

### I.2.4 Caso simétrico

$$c_e = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \text{Erf} \left( \frac{x_y}{\sqrt{2}\sigma_z} \right) \right\} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma_z} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Exp} \left( -\frac{z^2}{2\sigma_z^2} \right) \text{Erf} \left( \frac{rz}{\sqrt{2-2r^2}\sigma_z} \right) \{ H(-z - x_y^+) - H(z - x_y^-) \} dz \quad (\text{I.14})$$

$$k_e = \frac{\sigma_v}{2\pi\sqrt{2-2r^2}\sigma_z^2} \text{Exp} \left( -\frac{x_y^2}{2\sigma_z^2} \right) \left[ \sqrt{2} \text{Exp} \left( \frac{r^2 x_y^2}{2(r^2-1)\sigma_z^2} \right) (r^2-1)\sigma_z - r x_y \sqrt{\pi - \pi r^2} \left\{ 1 + \text{Erf} \left( \frac{r x_y}{\sqrt{2-2r^2}\sigma_z} \right) \right\} \right] \quad (\text{I.15})$$

## I.3 MODELO DE BABER Y WEN ASIMÉTRICO SIN DEGRADACIÓN

El modelo se expresa como:

$$h(v, z) = v - \beta(z) |v| |z|^{n-1} - \gamma(z) v |z|^n \quad (\text{I.16})$$

Donde:

$$\gamma(z) = \frac{m}{1+m} \left( \frac{k}{g(c + \text{sign}(z)\phi)} \right)^n \quad (\text{I.17})$$

Y la función  $\beta(z) = m\gamma(z)$ . Los parámetros  $n$  y  $m$  regulan el grado de transición y elafilamiento de la histéresis respectivamente, que a diferencia de otros coeficientes, dichos parámetros pueden adoptar un valor decimal sin limitarse a valores enteros, tradicionalmente publicados para el caso simétrico. Por otro lado,  $k$ ,  $g$  y  $c$  son propiedades del oscilador y el parámetro  $\phi$  es la asimetría.

### I.3.1 Coeficiente $C_e$

$$c_e = 1 - \frac{2^{(n-2)/2} \text{Exp} \left( -\frac{\bar{z}^2}{2\sigma_z^2} \right) m \sigma_z^{n-1}}{(1+m)\sqrt{\pi}} \left( \frac{k}{g(c+\phi)(c-\phi)} \right)^n \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2\bar{z}} [(c-\phi)^n - (c+\phi)^n] \Gamma \left( 1 + \frac{n}{2} \right) M \left( 1 + \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\bar{z}^2}{2\sigma_z^2} \right) + \\ \sigma_z [(c-\phi)^n + (c+\phi)^n] \Gamma \left( \frac{n+1}{2} \right) M \left( \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\bar{z}^2}{2\sigma_z^2} \right) \end{array} \right\} + I_c \quad (\text{I.18})$$

Donde:

$$I_c = \frac{m^2}{(1+m)\sqrt{2\pi}\sigma_z} \left(\frac{k}{g}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z|z|^{n-1}}{(c+\phi \operatorname{sign}(z))^n} \operatorname{Exp}\left(-\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma_z^2}\right) \operatorname{Erf}\left(\frac{\sigma_z \bar{v} + r\sigma_v(z-\bar{z})}{\sqrt{2-2r^2}\sigma_v\sigma_z}\right) dz \quad (\text{I.19})$$

Las funciones especiales para este modelo son:

$\operatorname{sign}(x)$	Función signo de x.
$\operatorname{Erf}(x)$	Función error de x.
$M(a,b,x)$	Función hipergeométrica confluyente para x.
$\Gamma(x)$	Función gamma para x.

### I.3.2 Coeficiente Ke

$$k_e = \frac{m}{2(1+m)\pi^{3/2}\sigma_z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Exp}\left(-\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma_z^2}\right) |z|^{n-2} \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{2n\pi}z [\sigma_z \bar{v} + r\sigma_v(z-\bar{z})] \left(\frac{k}{g(c+\phi \operatorname{sign}(z))}\right)^n \\ \left[ \begin{array}{l} 2\sqrt{1-r^2}\sigma_v\sigma_z f_{k1} + \frac{\sqrt{2\pi}\operatorname{sign}(z)}{[c+\phi \operatorname{sign}(z)]^n} f_{k2} + \\ \frac{2m|z|(r^2-1)}{\sqrt{2-2r^2}} \left(\frac{k}{g(c+\phi \operatorname{sign}(z))}\right)^n \times \\ \left[ \begin{array}{l} \sqrt{2\pi}\sigma_v\sigma f_{k1} + \frac{\pi}{1-r^2} f_{k2} \end{array} \right] \end{array} \right\} dz \quad (\text{I.20})$$

Donde:

$$f_{k1}(z) = \operatorname{Exp}\left(\frac{[\sigma_z \bar{v} + r\sigma_v(z-\bar{z})]^2}{2(r^2-1)\sigma_v\sigma_z^2}\right) \quad (\text{I.21})$$

$$f_{k2}(z) = [\sigma_z \bar{v} + r\sigma_v(z-\bar{z})] \operatorname{Erf}\left(\frac{\sigma_z \bar{v} + r\sigma_v(z-\bar{z})}{\sqrt{2-2r^2}\sigma_v\sigma_z}\right) \quad (\text{I.22})$$

### I.3.3 Esperanza del modelo

$$h(v, z) = \bar{v} - \frac{2^{(n-2)/2} \operatorname{Exp}\left(-\frac{\bar{z}^2}{2\sigma_z^2}\right) m\sqrt{1-r^2}\sigma_z^{n-2}}{(1+m)\sqrt{\pi-\pi r^2}} \left(\frac{k}{g(c+\phi)(c-\phi)}\right)^n c_1 + I_h \quad (\text{I.23})$$

Donde:

$$c_1 = \sqrt{2} [(c+\phi)^n - (c-\phi)^n] \Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right) \left[ r\sigma_v\sigma_z^2 M\left(1+\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\bar{z}^2}{2\sigma_z^2}\right) + \bar{z}(\sigma_z \bar{v} - r\sigma_v \bar{z}) M\left(1+\frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\bar{z}^2}{2\sigma_z^2}\right) \right] + \sigma_z [(c-\phi)^n + (c+\phi)^n] \left[ \begin{array}{l} (\sigma_z \bar{v} - r\sigma_v \bar{z}) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) M\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\bar{z}^2}{2\sigma_z^2}\right) + \\ 2r\sigma_v \bar{z} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) M\left(\frac{n+3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\bar{z}^2}{2\sigma_z^2}\right) \end{array} \right] \quad (\text{I.24})$$

$$I_h = \frac{m^2}{2(1+m)\pi\sigma_z^2} \left(\frac{k}{g}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} z|z|^{n-1} \text{Exp}\left(-\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma_z^2}\right) \left\{ \begin{array}{l} -2\sigma_v\sigma_z\sqrt{1-r^2}f_{k1} - \\ \sqrt{2\pi} \\ (c+\phi\text{sign}(z))^n f_{k2} \end{array} \right\} dz \quad (\text{I.25})$$

### I.3.4 Caso simétrico

Los coeficientes simétricos se encuentran ampliamente publicados, por ejemplo en Wen (1980) aunque con algunas limitantes, por ejemplo, expresar las integrales en términos de series. Dichos coeficientes, en realidad son una simplificación de los coeficientes asimétricos anteriores. Los coeficientes simétricos son de la forma:

$$\begin{aligned} c_e &= \beta f1 + \gamma f2 \\ k_e &= \beta f3 + \gamma f4 \end{aligned} \quad (\text{I.26})$$

Donde:

$$\begin{aligned} f1 &= \frac{2^{n/2}\sigma_z^n}{\pi} \Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right) I_B \\ f2 &= \frac{2^{n/2}\sigma_z^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \\ f3 &= \frac{2^{n/2}\sigma_z^{n-1}\sigma_v n}{\pi} \Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right) \left\{ rI_B + \frac{2(1-r^2)^{(n+1)/2}}{n} \right\} \\ f4 &= \frac{2^{n/2}\sigma_z^{n-1}\sigma_v nr}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

La propuesta de este trabajo para no limitar al valor de  $n$  a números enteros, es que la integral  $I_B$  por resolver puede expresarse en términos de la función Beta incompleta en términos de los parámetros del modelo.

$$I_B = \text{sign}(r) B_{r^2} \left( \frac{1}{2}, \frac{n+1}{2} \right) \quad (\text{I.28})$$

Otra ventaja de expresar la integral en términos de la función beta incompleta, es que dicha integral posee límites en  $-1 \leq r \leq 1$ , los cuales a continuación se indican:

$$-2 \leq I_B \leq 2 \quad \text{Para } n \geq 1 \quad (\text{I.29})$$

$$-\pi \leq I_B \leq \pi \quad \text{Para } n < 1 \quad (\text{I.30})$$

## I.4 MODELO DE BABER Y WEN CON DEGRADACIÓN

El modelo se expresa como:

$$h(v, z) = \left\{ Av - v \left[ \beta(z) z|v||z|^{n-1} + \gamma(z) v|z|^n \right] \right\} / \eta \quad (\text{I.31})$$

Donde el parámetro  $\nu$  corresponde a la degradación de resistencia,  $\eta$  corresponde a la degradación de rigidez y  $A$  corresponde a la degradación de rigidez y resistencia simultánea. Estos parámetros son funciones de la energía disipada en cada ciclo.

$$\begin{aligned} A(t) &= A_o - \delta_A e_h(t) \\ \eta(t) &= \eta_o + \delta_\eta e_h(t) \\ \nu(t) &= \nu_o + \delta_\nu e_h(t) \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

Las fracciones de la energía  $\delta_\eta$ ,  $\delta_\nu$ , y  $\delta_A$  se utilizan del mismo modo que el caso determinista. La energía en cada paso se obtiene directamente de la matriz de covarianza en el proceso de linealización por lo que los parámetros de degradación pueden considerarse en ese intervalo como constantes:

$$de_h(t) = (1 - \alpha)k E \langle z(t)v(t) \rangle = (1 - \alpha)ky_g \quad (\text{I.33})$$

#### I.4.1 Coeficiente Ce

El coeficiente es muy similar al caso sin degradación con algunas funciones añadidas. El coeficiente queda como:

$$c_e = \frac{A}{\eta} - \frac{2^{(n-2)/2} \text{Exp}\left(-\frac{\bar{z}^2}{2\sigma_z^2}\right) \nu m \sigma_z^{n-1}}{(1+m)\sqrt{\pi}\eta} \left(\frac{k}{g(c+\phi)(c-\phi)}\right)^n \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{2\bar{z}} [(c-\phi)^n - (c+\phi)^n] \Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right) M\left(1+\frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\bar{z}^2}{2\sigma_z^2}\right) + \\ &\sigma_z [(c-\phi)^n + (c+\phi)^n] \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) M\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\bar{z}^2}{2\sigma_z^2}\right) \end{aligned} \right\} - \frac{\nu}{\eta} I_c \quad (\text{I.34})$$

El resto de las variables y funciones en definición son las mismas que en el caso sin degradación.

#### I.4.2 Coeficiente Ke

$$k_e = \frac{\nu m}{2\eta(1+m)\pi^{3/2}\sigma_z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Exp}\left(-\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma_z^2}\right) |z|^{n-2} \left\{ \begin{aligned} &-\sqrt{2n\pi}z [\sigma_z \bar{\nu} + r\sigma_\nu(z-\bar{z})] \left(\frac{k}{g(c+\phi \text{sign}(z))}\right)^n \\ &-\left(\frac{k}{g}\right)^n m(n-1)\sqrt{\pi}z \left\{ \begin{aligned} &2\sqrt{1-r^2}\sigma_\nu\sigma_z f_{k1} + \frac{\sqrt{2\pi} \text{sign}(z)}{[c+\phi \text{sign}(z)]^n} f_{k2} + \\ &\frac{2m|z|(r^2-1)}{\sqrt{2-2r^2}} \left[\frac{k}{g(c+\phi \text{sign}(z))}\right]^n \times \\ &\left[\sqrt{2\pi}\sigma_\nu\sigma_z f_{k1} + \frac{\pi}{1-r^2} f_{k2}\right] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} dz \quad (\text{I.35})$$

#### I.4.3 Esperanza del modelo

$$h(\nu, z) = \frac{A}{\eta} \bar{\nu} - \frac{2^{(n-2)/2} \text{Exp}\left(-\frac{\bar{z}^2}{2\sigma_z^2}\right) \nu m \sqrt{1-r^2} \sigma_z^{n-2}}{(1+m)\eta\sqrt{\pi-\pi r^2}} \left(\frac{k}{g(c+\phi)(c-\phi)}\right)^n c_1 + \frac{\nu}{\eta} I_h \quad (\text{I.36})$$

## II.1 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Un oscilador Duffing es aquel que posee un resorte con comportamiento no lineal representado por polinomios. Dichos polinomios no poseen la capacidad de formar ciclos de histéresis, no obstante, presentan mucha utilidad en los trabajos de linealización equivalente al verificar que los criterios empleados son los correctos.

Para el caso de asimetría en fluencia, se plantea un oscilador Duffing desarrollado en la sección 7.3.2 de Roberts y Spanos (1990), que posee características similares como son, relación fuerza deformación asimétrica y respuesta con media distinta de cero. Dicho planteamiento en su esencia se desarrolla en el presente apéndice. Se comienza con la ecuación de movimiento que es:

$$\ddot{q} + 2\xi\dot{q} + (1 + 3\varepsilon)q + h(q) = -a(t) \quad (\text{II.1})$$

Donde  $q$  es el desplazamiento,  $\dot{q}$  la velocidad,  $\xi$  está asociado al amortiguamiento y  $\varepsilon$  es un parámetro de no linealidad, significa que a mayor valor de  $\varepsilon$ , mayor no linealidad presenta el oscilador y  $h(q)$  es el modelo asimétrico, el cual se expresa mediante un polinomio cúbico de la siguiente forma:

$$h(q) = \varepsilon q^2 (3 + q) \quad (\text{II.2})$$

La primera verificación es constatar que se trata de un polinomio asimétrico, es decir:

$$h(-q) = \varepsilon(-q)^2 (3 - q) = \varepsilon q^2 (3 - q) \quad (\text{II.3})$$

Por lo que se comprueba que existe asimetría:

$$h(-q) \neq h(q) \quad (\text{II.4})$$

## II.2 VALOR MEDIO DEL OSCILADOR

Como paso siguiente se obtiene la esperanza directa de la ecuación de movimiento II.1 y considerando que la media de la excitación  $a(t)$  es cero:

$$\ddot{m} + 2\xi\dot{m} + (1 + 3\varepsilon)m + E\langle h(q) \rangle = 0 \quad (\text{II.5})$$

Donde  $m = E\langle q \rangle$  es la historia del valor medio del desplazamiento. La observación fundamental, es que todavía no se sustituye el modelo no lineal por la ecuación lineal equivalente, es decir, Roberts y Spanos (1990) consideran necesario que se obtenga la esperanza del modelo directamente.

Para la obtención de la esperanza del modelo, primero se separan cada uno de los términos del polinomio cúbico y se consulta la tabla de esperanzas del Apéndice III para una variable con media no cero y función de densidad gaussiana, con lo que se obtiene:

$$E\langle h(q) \rangle = 3\varepsilon E\langle q^2 \rangle + \varepsilon E\langle q^3 \rangle = 3\varepsilon(m^2 + \sigma^2) + \varepsilon(m^3 + 3m\sigma^2) \quad (\text{II.6})$$

Donde  $m$  es el valor medio de  $q$ , y  $\sigma^2$  es la varianza de  $q$ . Tanto el valor medio como la varianza son variables de respuesta y deben obtenerse por integración de las ecuaciones diferenciales de Liapunov. Desarrollando el valor medio del modelo II.6 se obtiene:

$$E\langle h(q) \rangle = 3\varepsilon m^2 + 3\varepsilon \sigma^2 + \varepsilon m^3 + 3\varepsilon m\sigma^2 \quad (\text{II.7})$$

Despejando  $\dot{m}$  de la ecuación de movimiento II.5 y sustituyendo la esperanza del modelo II.7 se obtiene la primera ecuación diferencial de medias que resolver.

$$\dot{m} = -2\xi\dot{m} - (1+3\varepsilon)m - (3\varepsilon m^2 + 3\varepsilon\sigma^2 + \varepsilon m^3 + 3\varepsilon m\sigma^2) \quad (\text{II.8})$$

### II.3 COVARIANZA DEL OSCILADOR

En este momento se propone la ecuación lineal equivalente que sustituye al modelo no lineal, mediante los coeficientes linealizadores  $C_e$  y  $K_e$  que multiplican a la velocidad  $\dot{q}$  y desplazamiento  $q$  respectivamente en lugar del modelo asimétrico no lineal:

$$\ddot{q} + (2\xi + C_e)\dot{q} + (1 + 3\varepsilon + K_e)q = -a(t) \quad (\text{II.9})$$

Para obtener los coeficientes linealizadores, se aplica el teorema de Kasakov (1965) y Atalik y Utku (1976) para procesos gaussianos:

$$C_e = E\left\langle \frac{\partial h(q)}{\partial \dot{q}} \right\rangle = 0 \quad (\text{II.10})$$

$$K_e = E\left\langle \frac{\partial h(q)}{\partial q} \right\rangle = E\langle 6\varepsilon q + 3\varepsilon q^2 \rangle = 6\varepsilon E\langle q \rangle + 3\varepsilon E\langle q^2 \rangle \quad (\text{II.11})$$

Consultando la tabla de esperanzas del Apéndice III, se tiene que el coeficiente linealizador  $K_e$  vale:

$$K_e = 6\varepsilon m + 3\varepsilon(m^2 + \sigma^2) \quad (\text{II.12})$$

Dado que  $C_e$  vale cero y se tiene un solo coeficiente linealizador  $K_e$ , la ecuación de movimiento II.9 se puede expresar de forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1+3\varepsilon+K_e) & -2\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -a(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

Utilizando solución de la ecuación de Liapunov de la forma:

$$V = GV + VG^T + A \quad (\text{II.14})$$

Se tiene que las variables desglosadas son:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{11} & \dot{v}_{12} \\ \dot{v}_{12} & \dot{v}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1+3\varepsilon+K_e) & -2\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (1+3\varepsilon+K_e) \\ 1 & -2\xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

Al desarrollar los productos de las matrices, se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{11} & \dot{v}_{12} \\ \dot{v}_{12} & \dot{v}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_{12} & -(1+3\varepsilon+K_e)v_{11} - 2\xi v_{12} + v_{22} \\ -(1+3\varepsilon+K_e)v_{11} - 2\xi v_{12} + v_{22} & -2(1+3\varepsilon+K_e)v_{12} + 4\xi v_{12} - a(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

Roberts y Spanos normalizan la excitación de entrada de modo si  $\varepsilon=0$ , exista una modulación definida por  $\alpha(t)$  y que esta sea unitaria, es decir:

$$a(t) = \frac{4\xi}{\pi S_o} \alpha^2(t) \quad (\text{II.17})$$

#### II.4 ECUACIONES DEFINITIVAS

Sustituyendo las variables  $X_1 = m$ ,  $X_2 = \dot{m}$ ,  $X_3 = v_{11} = \sigma^2$ ,  $X_4 = v_{12} = \rho_{q,q} \sigma \sigma_q$  y  $X_5 = v_{22} = \sigma_q^2$ , en la ecuación de medias II.8 y en la de covarianza II.16, se tiene un conjunto de cinco ecuaciones diferenciales lineales, que son las que aparecen publicadas en Roberts y Spanos(1990):

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= -2\xi X_2 - X_1(1+3\varepsilon+3\varepsilon X_1+3\varepsilon X_3+\varepsilon X_1^2) - 3\varepsilon X_3 \\ \dot{X}_3 &= 2X_4 \\ \dot{X}_4 &= -(1+3\varepsilon+K_e)X_3 - 2\xi X_4 + X_5 \\ \dot{X}_5 &= -2(1+3\varepsilon+K_e)X_4 - 4\xi X_5 + 4\xi \alpha^2(t) \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Finalmente Roberts y Spanos (1990) en la sección 10.4.6 hacen la comparación de la linealización equivalente contra la simulación de Monte Carlo con 300 realizaciones, considerando valores de no linealidad  $\varepsilon=2$ , un valor asociado al amortiguamiento de  $\beta=2\xi=0.05$  y  $0.2$  y con una modulación del tipo:

$$\alpha(t) = \text{Exp}(-0.025t) - \text{Exp}(-0.25t) \quad (\text{II.19})$$

Mencionan que el error que obtienen se encuentra en el intervalo  $0 < \text{err} < 10\%$ , lo que indica que la precisión es razonablemente buena.

III.1 ESPERANZAS DE UNA VARIABLE			
$E\langle g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x) dx$			
Media No Cero		Media Cero	
$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \text{Exp}\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$		$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \text{Exp}\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$	
$g(x)$	$E\langle g(x) \rangle$	$g(x)$	$E\langle g(x) \rangle$
$x$	$\mu$	$\text{Cos}(ax)$	$\text{Exp}\left(-\frac{a^2\sigma^2}{2}\right)$
$x^2$	$\mu^2 + \sigma^2$	$\text{Cos}(ax^2)$	$\frac{1}{(1+4a^2\sigma^4)^{1/4}} \text{Cos}\left(\frac{1}{2} \text{Arc tan}[2a\sigma^2]\right)$
$x^3$	$\mu^3 + 3\mu\sigma^2$	$\text{Sin}(ax^2)$	$\frac{1}{(1+4a^2\sigma^4)^{1/4}} \text{Sin}\left(\frac{1}{2} \text{Arc tan}[2a\sigma^2]\right)$
$x^4$	$\mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4$	${}_1F_1(a, b, cx)$	${}_2F_2\left(\left\{\frac{a+1}{2}, \frac{a}{2}\right\}, \left\{\frac{b+1}{2}, \frac{b}{2}\right\}, \frac{c^2\sigma^2}{2}\right)$
$x^5$	$\mu^5 + 10\mu^3\sigma^2 + 15\mu\sigma^4$	${}_1F_1(a, b, cx^2)$	${}_2F_1\left(\left\{\frac{1}{2}, a\right\}, \{b\}, 2c\sigma^2\right)$
$\text{sign}(x)$	$\text{Erf}\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$	$\ln(ax)$	$\frac{1}{2} \left[ \ln\left(-\frac{a}{2}\right) + \ln(a) + 2\ln(\sigma) - \gamma \right]^\dagger$
$ x $	$\mu \text{Erf}\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{Exp}\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)$	$\ln(ax^2)$	$2\ln(\sigma) + \ln(a/2) - \gamma$
$H(x)$	$\frac{1}{2} \left[ 1 + \text{Erf}\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right]$	$x^n$	$\frac{2^{(n-2)/2} [(-1)^n + 1]}{\sqrt{\pi}} \sigma^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$
$\delta(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \text{Exp}\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)$	$x \text{Arc tan}(x)$	$-\text{Exp}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \left[ \text{Erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - 1 \right]$
$\text{Exp}(ax)$	$\text{Exp}\left(\frac{2a\mu + a^2\sigma^2}{2}\right)$	$\text{Cosh}(x)$	$\text{Exp}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)$
$\text{Exp}(ax^2 + bx)$	$\frac{1}{\sqrt{1-2a\sigma^2}} \text{Exp}\left(\frac{2b\mu + 2a\mu^2 + b^2\sigma^2}{2-4a\sigma^2}\right)$	$J_n(x)^\ddagger$	$\frac{1}{2} \text{Exp}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) \left[ I_{n/2}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) + I_{n/2}\left(-\frac{\sigma^2}{4}\right) \right] \left\{ \text{Cos}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - i \text{Sin}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right\}$

<sup>†</sup> Gamma de Euler  $\gamma = 0.577216\dots$

<sup>‡</sup> Función de Bessel

**III.2 ESPERANZAS DE DOS VARIABLES**

$$E\langle g(x, y) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{xy}(x, y) dx dy$$

Media No Cero		Media Cero	
$f_z(x, y) = \alpha_1 \text{Exp} \left[ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left( \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r \frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right) \right]$ $\alpha_1 = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1-r^2}}$		$f_z(x, y) = \alpha_1 \text{Exp} \left[ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left( \frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2r \frac{xy}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right) \right]$	
$g(x, y)$	$E\langle g(x, y) \rangle$	$g(x, y)$	$E\langle g(x, y) \rangle$
$xy$	$r\sigma_x\sigma_y + \mu_x\mu_y$	$\text{sign}(ax)y$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} r\sigma_y \text{sign}(a)$
$x^2 y$	$2r\sigma_x\sigma_y\mu_x + (\mu_x^2 + \mu_y^2)\mu_y$	$\text{Sin}(ax)y$	$a \text{Exp} \left( -\frac{a^2 \sigma_x^2}{2} \right) r\sigma_x\sigma_y$
$x^3 y$	$3r\sigma_x\sigma_y(\mu_x^2 + \sigma_x^2) + \mu_x\mu_y(3\sigma_x^2 + \mu_x^2)$	$\text{exp}(ax^2 + bx)y$	$\frac{br\sigma_x\sigma_y}{(1-2a\sigma_x^2)^{3/2}} \text{exp} \left( \frac{b^2 \sigma_x^2}{2-4a\sigma_x^2} \right)$
$x^4 y$	$4r\sigma_x\sigma_y\mu_x(3\sigma_x^2 + \mu_x^2) + (3\sigma_x^4 + 6\mu_x^2\sigma_x^2 + \mu_x^4)\mu_y$	$\text{sign}(x)\text{sign}(y)$	$\frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \right)$
$x^2 y^2$	$4r\sigma_x\sigma_y\mu_x\mu_y + \mu_x^2(\sigma_y^2 + \mu_y^2) + \sigma_x^2 \left[ (1+2r^2)\sigma_y^2 + \mu_y^2 \right]$	$H(x)H(y)$	$\frac{1}{4\pi} \left[ \pi + 2 \arctan \left( \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \right) \right]$
$H(x)y$	$\frac{r\sigma_y}{\sqrt{2\pi}} \text{exp} \left( -\frac{\mu_x^2}{2\sigma_x^2} \right) + \frac{\mu_y}{2} \left[ 1 + \text{erf} \left( \frac{\mu_x}{\sqrt{2}\sigma_x} \right) \right]$	$\delta(x)\delta(y)$	$\frac{1}{2\pi \sqrt{1-r^2} \sigma_x \sigma_y}$
$H(x)y^2$	$\frac{r\sigma_y}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \text{Exp} \left( -\frac{\mu_x^2}{2\sigma_x^2} \right) (2\sigma_x\mu_y - r\sigma_y\mu_x) + \frac{r\sigma_y^2 + \mu_y^2}{2} \left[ 1 + \text{Erf} \left( \frac{\mu_x}{\sqrt{2}\sigma_x} \right) \right]$	$x^n y$	$-\frac{2^{(n-2)/2} [(-1)^n - 1]}{\sqrt{\pi}} r\sigma_x^n \sigma_y \Gamma \left( \frac{n+2}{2} \right)$
$\text{Exp}(ax)y$	$\text{Exp} \left( \frac{a^2 \sigma_x^2 + 2a\mu_x}{2} \right) (ar\sigma_x\sigma_y + \mu_y)$	$x \text{Erf}(y)$	$\frac{r\sigma_x\sigma_y}{\sqrt{\pi + 2\pi\sigma_y^2}}$

Esta sección desarrollada por Roberts y Spanos (1990) trata sobre cuáles son las *condiciones iniciales* en las ecuaciones diferenciales que se deben considerar cuando se calcula la respuesta *no estacionaria* de un sistema mediante la ecuación de Liapunov:

$$\dot{V}_o = GV_o + V_oG^T + \Theta \quad (IV.1)$$

Se analizan nuevamente las condiciones del proceso de filtrado con ayuda de la figura IV.1, en la cual, el primer paso es generar un vector de entrada de ruido blanco estacionario que ya incluye incertidumbre en su amplitud. Posteriormente se realiza un proceso de filtrado donde cada filtro satisface su propia ecuación de movimiento.

Sin embargo, el proceso de filtrado ofrece cierto valor de respuesta de cada filtro, pero no de su estadística. Si el ruido blanco de entrada es estacionario, debe existir una respuesta final estacionaria que incluyan las estadísticas de todos los filtros aplicados. A dichos filtros, Roberts y Spanos (1990) los denominan *prefiltro* y su respuesta estocástica estacionaria es la *condición inicial*.

El siguiente paso, es permitir que las condiciones iniciales lleguen a su estado estacionario, antes de multiplicar el proceso por la función moduladora de intensidad determinista  $c(t)$ .

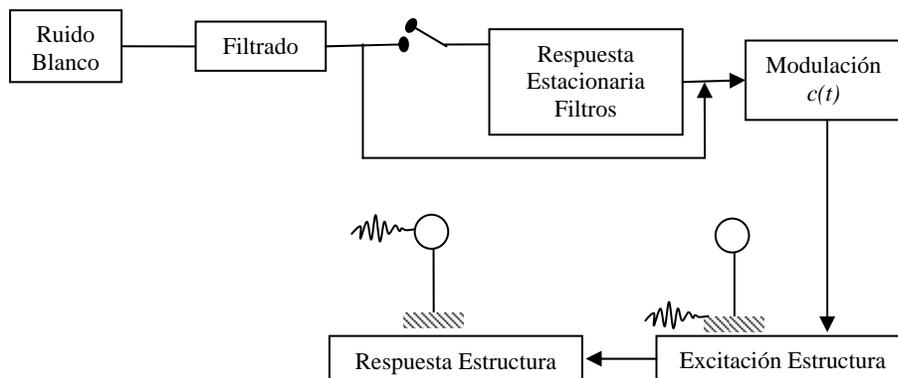


Figura IV.1 Proceso de filtrado y modulación para la estructura.

En la figura IV.1 se aprecia un interruptor de condiciones iniciales, que cuando está activado, indica que se considera la respuesta estacionaria de los filtros como condición inicial, mientras que si está desactivado, indica que se consideran condiciones iniciales cero.

La diferencia de considerar condiciones iniciales nulas o no, se aprecia en la figura IV.2 en los primeros 20 segundos de la historia utilizando la modulación de Yeh y Wen (1989). Considerar condiciones iniciales cero origina un desfase en el tiempo de la linealización equivalente, en específico, en la rama ascendente de la respuesta, previa a la fase intensa.

Se observa en la figura IV.2.a que antes de  $t=20$  s existe una respuesta tardía de la linealización equivalente, que es el tiempo en que los filtros buscan su propia condición estacionaria restando efectividad a esos segundos que corresponden a la condición no estacionaria de la estructura. Cuando se consigue ese estado estacionario de la respuesta de los filtros, en ese momento comienza la fase no estacionaria de la estructura.

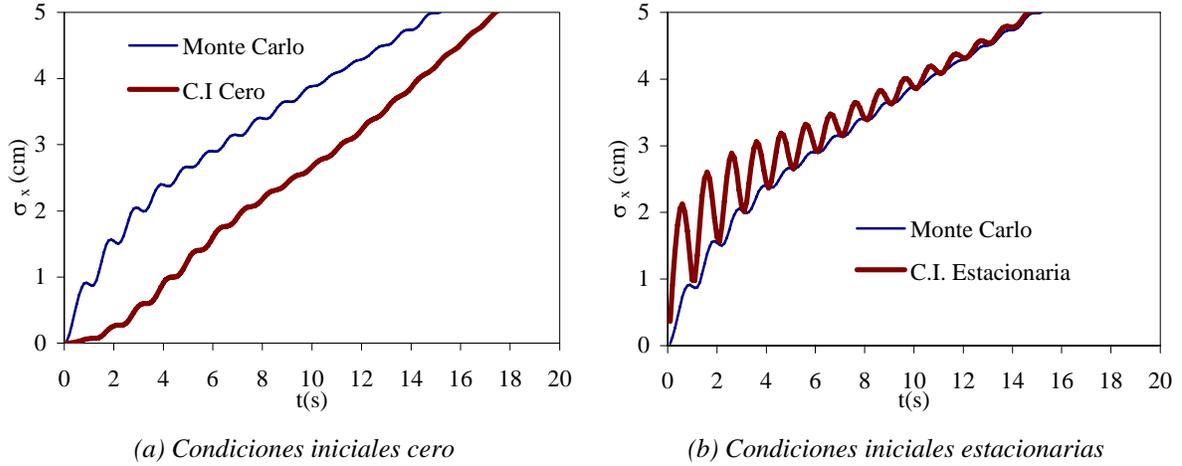


Figura IV.2 Respuesta tardía de la linealización equivalente según las condiciones iniciales.

Por otra parte, al considerar la respuesta estacionaria de los filtros como condición inicial se logra que la respuesta obtenida con Simulación de Monte Carlo y con la linealización equivalente coincidan, (Ver figura IV.2.b.).

Para encontrar las condiciones iniciales del sistema es necesario calcular el estado estacionario del filtro de Clough y Penzien (1975). En el capítulo III se mostraron las razones por las cuales el vector de respuesta debe ser aumentado e incluir los filtros. El motivo principal, es que las respuestas de los filtros están correlacionadas con la estadística de la respuesta de la estructura, sin embargo, basta con analizar la respuesta de los filtros mostrados matricialmente en el siguiente sistema:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_f \\ \dot{v}_f \\ \dot{x}_g \\ \dot{v}_g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_f^2 & -2\xi_f\omega_f & \omega_g^2 & 2\xi_g\omega_g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_g^2 & -2\xi_g\omega_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_f \\ v_f \\ x_g \\ v_g \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

Donde  $Y_F = [x_f \quad v_f \quad x_g \quad v_g]^T$  es el vector de respuesta y la matriz de propiedades  $G_F$  de los filtros es:

$$G_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_f^2 & -2\xi_f\omega_f & \omega_g^2 & 2\xi_g\omega_g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_g^2 & -2\xi_g\omega_g \end{bmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

Por tratarse de una solución estacionaria no existe modulación en el tiempo, por lo que el sistema anterior debe satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas denominado *ecuación de Liapunov reducido*:

$$G_F V_F + V_F G_F^T + P = 0 \quad (\text{IV.4})$$

Donde  $G_F$  es la matriz de propiedades,  $V_F$  es la matriz de covarianza de los filtros y  $P$  es la matriz con la amplitud del ruido blanco que a continuación se define:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\pi S_o \end{bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

Para efectos de solución algebraica, se establece una secuencia para el orden de las ecuaciones:

$$V_p = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_2 & y_5 & y_6 & y_7 \\ y_3 & y_6 & y_8 & y_9 \\ y_4 & y_7 & y_9 & y_{10} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

Con fines de simplificación se definen las siguientes constantes:

$$k_f = \omega_f^2, c_f = 2\xi_f \omega_f, k_g = \omega_g^2, c_g = 2\xi_g \omega_g \quad (\text{IV.7})$$

Desarrollando los productos de las matrices en el sistema de ecuaciones de Liapunov reducido IV.4, se obtiene un sistema algebraico matricial cuya solución para las diez variables involucradas es:

$$\begin{aligned} y_1 &= \pi S_o \frac{c_f^2 k_g c_g + c_f k_g c_g^2 + c_f k_f c_g^2 + c_f k_f k_g + c_g k_g^2 + k_f c_g^2}{k_f c_f c_g \alpha_1} & y_2 &= 0 \\ y_3 &= \pi S_o \frac{-k_g + 2c_g c_f + 2c_g^2 + k_f}{c_g \alpha_1} & y_4 &= \pi S_o \frac{c_g k_f - 2c_g k_g - c_f k_g}{c_g \alpha_1} \\ y_5 &= \pi S_o \frac{c_f k_g c_g^2 + c_g k_g^2 + k_f c_g^3 + c_f k_g^2}{c_f c_g \alpha_1} & y_6 &= \pi S_o \frac{c_f k_g + 2c_g k_g - c_g k_f}{c_g \alpha_1} \\ y_7 &= \pi S_o \frac{c_f k_g c_g + k_g k_f - k_g^2 + k_f c_g^2}{c_g \alpha_1} & y_8 &= \frac{\pi S_o}{c_g k_g} \\ & & y_{10} &= \frac{\pi S_o}{c_g} \\ y_9 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

Donde las constantes  $c_f, k_f, c_g, k_g$  están definidas previamente en (IV.7) y

$$\alpha_1 = c_f^2 k_g + c_f k_g c_g - 2k_g k_f + k_f^2 + c_f k_f c_g + k_g^2 + c_g^2 k_f \quad (\text{IV.9})$$

Con todo lo anterior, se disponen de las condiciones iniciales que proporcionan la solución estacionaria adecuada, tanto para los filtros como para la excitación de la estructura.

Finalmente, las condiciones iniciales para  $t=0$  s, se introducen en la matriz de covarianza que satisface el sistema aumentado de la estructura IV.1.

Considerando a las condiciones iniciales de la solución del sistema reducido IV.4 en el sistema aumentado IV.1, se tiene finalmente que las condiciones iniciales para la estructura son:

$$V_o|_{t=0} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & y_1 & 0 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_5 & y_6 & y_7 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 & y_6 & y_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 & y_7 & 0 & y_{10} \end{array} \right] \quad (\text{IV.10})$$

Donde  $y_1..y_{10}$  se definen en IV.8. Otra observación importante, es que se cumple la condición que las estadísticas de las respuestas de la estructura, todas valen cero para  $t=0$ .

En esta sección se definen las funciones especiales necesarias para el cálculo de los coeficientes linealizadores, para mayor detalle en el tema y en los métodos de solución se recomienda consultar dichas funciones en Abramowitz y Stegun (1972). Todas las funciones de este apéndice, se pueden obtener de Press *et al.* (1986) para las *recetas numéricas* en Fortran, cuya eficiencia y precisión han sido ampliamente probadas.

- **Función signo**

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

- **Función escalón**

También conocida como función impulso unitario o escalón de Heaviside.

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

- **Función gamma**

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (\text{V.3})$$

En ciertos casos es mejor calcular el inverso de la función gamma dado que es acotada y numéricamente más estable al evitar valores infinitos. Press *et al.* (1986) presentan un algoritmo eficiente para el logaritmo natural de la función gamma, únicamente basta calcular el exponencial de dicho valor para obtener directamente la función gamma.

- **Función beta incompleta**

Es un caso especial de la función beta, puesto que  $z$  puede adoptar valores en el intervalo de  $[0,1]$  de la función beta original:

$$B_z(x, y) = \int_0^z t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (\text{V.4})$$

Press *et al.* (1986) presentan su algoritmo como la función beta normalizada. La corrección que hay que hacer es multiplicar la subrutina original, por las funciones beta para los valores de  $x$  y  $y$  respectivamente.

- **Función error**

Se define en su forma integral como:

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (\text{V.5})$$

- **Operador de Pochhammer**

Este operador es necesario para calcular la función hipergeométrica confluyente mediante series. Su definición clásica para valores enteros de  $n$  es:

$$(x)_n = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) \quad (\text{V.6})$$

Para el cálculo del subíndice  $n$  real, se expresa en término de la función gamma:

$$(x)_n = \Gamma(x+n)/\Gamma(x) \quad (\text{V.7})$$

- **Función hipergeométrica confluyente**

En términos de series se define como:

$$M(a, b, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i}{(b)_i} \frac{x^i}{i!} \quad (\text{V.8})$$

Donde  $(a)_i$  es el operador de Pochhammer. Esta función es importante ya que muchas funciones especiales como la gamma, error, Hankel, Bessel, integral seno, coseno, polinomios de Hermite y Laguerre entre otras son casos especiales de la hipergeométrica confluyente.

La función integral de la hipergeométrica es:

$$M(a, b, x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(a)} \int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt \quad (\text{V.9})$$

Para valores de  $b > a > 0$ . La expresión en series es fácilmente programable, no obstante, una buena referencia es Spanos (1980b) donde propone reducir los cálculos de las hipergeométricas con un algoritmo más eficiente.

## REFERENCIAS

- 1).- Abramowitz M. and Stegun I. (1972); "*Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tools*", Dover, New York. 1046 pp.
- 2).- Atalik T.S. and Utku S. (1976); "*Stochastic linearization of multi-degree of freedom non-linear systems*", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, **4**, 441-420.
- 3).- Baber T. T. (1984); "*Nonzero mean random vibration of hysteretic systems*", Journal of Engineering Mechanics ASCE, **110**(7), 1036-1049.
- 4).- Baber T. T. and Wen Y.K. (1979); "*Equivalent linearization for hysteretic structures*", Proceedings of the ASCE, Specialty Conference on probabilistic mechanics and Structural Reliability, Tucson AZ, 25-29.
- 5).- Baber T. T. and Wen Y.K. (1981); "*Random vibration of hysteretic, degrading systems*", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, **107**(EM6), 1069-1087.
- 6).- Base Mexicana de Sismos Fuertes (1997), Disco Compacto **1**, Ed. Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica. México D.F.
- 7).- Bolotin V.V.(1969) "*Statistical methods in structural dynamics*", Holden Day, San Francisco.
- 8).- Bouc R. (1971); "*Modele Mathematique d'Hysteresis*", Acústica, **24**, 16-25.
- 9).- Casciati F. y Faravelli L. (1991); "*Fragility Analysis of complex structural systems*", Ed. Research Studies Press Ltd. London, John Wiley and Sons. 413 pp.
- 10).- Chopra (2001); "*Dynamics of structures*"; Ed. Prentice Hall. 729 pp.
- 11).- Clough y Penzien (1975), "*Dynamics of structures*", Ed. Mc Graw Hill. 700 pp.
- 12).- Dobson S., Noori M., Hou Z., Dimentberg M. and Baber T. (1997); "*Modeling and random vibration analysis of SDOF systems with asymmetric hysteresis*", International Journal of Non-linear Mechanics. **32** (4), 669-680.
- 13).- Einstein A. (1905); "*On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat*", Annalen Physhik (en alemán) **17**, 549-596
- 14).- Fehlberg E. (1969); "*Low order classical Runge-Kutta formulas with step size control*", NASA Technical Report R-315.
- 15).- Grigoriu M., Ruiz S.E. and Rosenblueth E., (1988); "*Nonstationary models of seismic ground acceleration*", Earthquake Spectra, **4**(3), 551-568.
- 16).- Hampl N.C. and Schüeller G.I. (1989); "*Probability densities of the response of nonlinear structures under stochastic dynamic excitation*"; Probabilistic Engineering Mechanics **4**(1), 2-9

- 17).-Hurtado J.E. (1998); "*Stochastic dynamics of hysteretic structures*", Monograph series in Earthquake Engineering. Ed. A.H. Barbat, ICNME. Barcelona.
- 18).-Iwan W.D. y Mason A.B. Jr., (1980); "*Equivalent Linearization for systems subjected to non-stationary random excitation*", International Journal of non-linear mechanics, **15**, 71-82.
- 19).-Kanai K. (1957); "*Semi empirical formula for the seismic characteristics of the ground*". Univ. Kyoto Bull. Earthq. Res. Inst. **35**, 309-325.
- 20).-Kasakov I.E. (1965); "*Statistical analysis of systems with multi-dimensional nonlinearities*", Automation and Remote Control **26**, 458-464.
- 21).-Kasakov I.E., (1965b); "*Generalization of the method of statistical linearization to multi-dimensional systems*", Automation and Remote Control **26**, 1201-1206.
- 22).-Lubliner J. (1998); "*Plasticity Theory*", Mac Millan Publishing Co. 495 pp.
- 23).-Noori M., Choi J.D., and Davoodi H., (1986); "*Zero and non zero mean random vibration analysis of a new general hysteresis model*", Probabilistic Engineering Mechanics, **1**(4), 192-201.
- 24).-Press W, Teukolsky S.A., Vetterling W.T, Flannery B.P. (1986); "*Numerical recipes in Fortran 77*", 2<sup>nd</sup> Ed. Cambridge University Press. London. 886 pp
- 25).-Papoulis A. (1965); "*Probability, random variables and stochastic process*". 2<sup>nd</sup> Ed., Mac Graw Hill, New York. 576 pp
- 26).-Rayleigh J.W.S. (1877); "*The theory of sound*". Reprinted by Dover, New York. 1945
- 27).-Roberts J.B. and Spanos P.D., (1990); "*Random vibration and statistical linearization*", John Wiley Ltd. London. 407 pp.
- 28).-Ruiz S. E. (1991); "*Influence of intensity of motion on seismic response of structures with asymmetric force-deformation curves*", Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, **20**, 1-9.
- 29).-Schüeller G.I., Pradlwarter M., Vasta M., and Harnpornchai N. (1997); "*Benchmark study on non-linear stochastic structural dynamics*", Proceedings of the 7<sup>th</sup> International conference on structural safety and reliability, Kyoto, Japan.
- 30).-Silva F. L. (1998); "*Calibración del método de linealización estocástica gaussiana para sistemas histeréticos simples*", Tesis de Maestría, DEPMI-UNAM. 133 pp.
- 31).-Silva F.L. (2002); "*Respuesta estocástica de estructuras histeréticas sujetas a sismos*", Tesis doctoral, DEPMI-UNAM. 173 pp.
- 32).-Sivaselvan M.V. and Reinhorn A.M; (2000). "*Hysteretic models for deteriorating inelastic structures*", Journal of Engineering Mechanics **126**(6), 633-640.
- 33).-Spanos P.D. (1980); "*Formulation of stochastic linearization for symmetric and asymmetric MDOF nonlinear systems*", Journal of Applied Mechanics, ASME, **47**(1), 209-211.

- 
- 34).- Spanos P.D. (1980b); "*On the computation of the confluent hypergeometric function at densely spaced points*", Journal of Applied Mechanics ASME, **47**(1), 683-685.
- 35).- Spanos P.D. (1981); "*Monte Carlo simulations of responses of non-symmetric dynamic system to random excitations*", Computer and Structures, **13**, 371-376.
- 36).- Spanos P.D. y Vargas Loli L.M. (1985); "*A statistical approach to generation of design spectrum compatible earthquake time histories*", Soil Dynamics and Earthquake Engineering, ASME, **4**(1) 1-8.
- 37).- Suzuki Y. and Minai R. (1987); "*Application of stochastic differential equations to seismic reliability analysis of hysteretic structures*. In Y. K. Lin and R. Minai (Eds), Lecture notes in engineering **32**. Springer Berlin.
- 38).- Tajimi H. (1960); "*A statistical method of determining the maximum response of a building structure during an earthquake*", Proc. 2<sup>nd</sup>. World Conf. Earthq. Eng. Tokyo **II**, 781-798
- 39).- Terán A., Juárez H. y Frausto M. (2000); "*On the dynamic response of regular structures exhibiting tilt*", Earthquake Engineering and Structural Dynamics **29**, 1343-1374.
- 40).- Wen Y.K. (1980); "*Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation*", Journal of Applied Mechanics ASME, **47**, 150-154
- 41).- Yeh C.H. and Wen Y.K. (1989); "*Modeling of nonstationary ground motion and analysis of inelastic structural response*", Euromech 250 colloquium on nonlinear structural systems under random conditions, Como, Italy.