



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

---

---

POSGRADO EN CIENCIAS

**SOBRE POSIBLES RELACIONES ENTRE LA  
CURVATURA Y LA NO CONMUTATIVIDAD  
DEL ESPACIO TIEMPO**

Tesis que para obtener el grado de:  
Maestro en Ciencias (Física)

Presenta:

**Pablo Agustín Vázquez Montejo**

Director de Tesis: Dr. Chryssomalis Chryssomalakos



posgrado en ciencias físicas  
u n a m

México D.F.

Marzo 2007



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>vii</b>
<b>1. Invariancia Relativista</b>	<b>1</b>
1.1. Simetría relativista . . . . .	1
1.1.1. Formulación Hamiltoniana . . . . .	3
1.2. Invariancia Manifiesta . . . . .	10
1.2.1. Covariancia manifiesta clásica . . . . .	11
1.2.2. Covariancia manifiesta cuántica . . . . .	12
<b>2. No conmutatividad del espacio-tiempo</b>	<b>15</b>
2.1. Operadores de posición de la teoría de Dirac . . . . .	16
2.2. Centro de masa en Relatividad Especial . . . . .	17
2.2.1. Definiciones 3) y 4) del centro de masa . . . . .	19
2.2.2. Relaciones de paréntesis de Poisson . . . . .	22
2.3. No conmutación y su relación con el momento angular intrínseco . . . . .	24
<b>3. Operadores covariantes de posición</b>	<b>27</b>
3.1. Partículas sin espín . . . . .	28
3.1.1. La forma instantánea . . . . .	29
3.1.2. Operador de Posición para partículas sin espín . . . . .	30
3.2. Partículas con espín . . . . .	30
3.2.1. Operador de posición para partículas con espín . . . . .	34
3.3. Partículas y antipartículas . . . . .	35
3.3.1. Operador de posición para partículas y antipartículas . . . . .	36
<b>4. Espacio de de-Sitter</b>	<b>39</b>
4.1. Espacio de de-Sitter . . . . .	39
4.2. Partículas sin espín en el espacio de de-Sitter . . . . .	43
4.3. Partículas con espín en el espacio de de-Sitter . . . . .	44

4.3.1. Método empleando composición de reflexiones para realizar rotaciones. . . . .	47
4.3.2. Método empleando representaciones matriciales . . . . .	51
4.4. Operadores de posición . . . . .	56
<b>A. Haces Fibrados</b>	<b>59</b>
A.1. Haces fibrados . . . . .	59
A.1.1. Definiciones . . . . .	59
A.2. Haces Principales . . . . .	65
<b>B. Conexiones en haces fibrados</b>	<b>67</b>
B.1. Conexiones en Haces principales . . . . .	67
B.1.1. Propiedades de grupos y álgebras de Lie . . . . .	67
B.1.2. Definiciones . . . . .	68
B.1.3. La 1-forma de conexión . . . . .	69
B.1.4. La 1-forma de conexión local . . . . .	70
B.1.5. Levantamiento horizontal y transporte paralelo . . . . .	71
B.2. Curvatura . . . . .	75
B.2.1. Derivada covariante en haces principales . . . . .	75
B.2.2. Curvatura . . . . .	76
B.2.3. Forma local de la curvatura . . . . .	77
<b>C. Demostraciones referentes a conexiones en haces fibrados</b>	<b>79</b>
<b>D. Rotación como la composición de dos reflexiones</b>	<b>87</b>
<b>E. Programa para calcular rotaciones como composición de reflexiones</b>	<b>89</b>
<b>F. Programa empleando representaciones matriciales</b>	<b>93</b>

# Índice de figuras

3.1.	Transformación del sistema de referencia en el espacio del espín . . . .	31
4.1.	Espacios de de-Sitter y anti de-Sitter . . . . .	40
4.2.	Esfera de-Sitter . . . . .	41
4.3.	Composición de transformaciones . . . . .	46
A.1.	Representación esquemática de un haz fibrado . . . . .	60
A.2.	Relación de elementos de la fibra por medio de las funciones de transición	60
A.3.	Campo vectorial $\psi_{NS^*} \partial / \partial X_S$ sobre el ecuador en la carta $U_N$ . . . . .	63
A.4.	Campo vectorial $\sigma_{S^*}^{-1}(\partial / \partial X_S)$ sobre $S^2$ . . . . .	64
A.5.	Unión de los bordes de $T_0U_N$ y $T_0U_S$ . . . . .	64
B.1.	El subespacio horizontal $H_{ug}P$ se obtiene del subespacio $H_uP$ por medio de la acción por la derecha . . . . .	69
B.2.	Levantamiento horizontal de $\gamma(t)$ en $P(M, A(1))$ . . . . .	75
B.3.	Una curva $\gamma(t)$ en $M$ y sus levantamientos horizontales $\tilde{\gamma}(t)$ y $\tilde{\gamma}(t)g$ .	76
D.1.	Rotación de un vector como resultado de la composición de dos reflexiones . . . . .	87



# Índice de cuadros

2.1. Propiedades de las definiciones del centro de masa . . . . .	19
4.1. Ejes que determinan el plano de la rotación dependiente de la transformación $T$ . . . . .	48





# Introducción

La idea de un espacio no conmutativo en sus coordenadas, se remonta a Heisenberg [1], quien en una carta sugirió a Peierls que un principio de incertidumbre en las coordenadas espaciales podría ayudar a solucionar el problema de los infinitos ultravioleta en teoría cuántica de campos. Utilizando esta idea, Peierls encontró que para un sistema de electrones con impurezas, descritas por un potencial dependiente de las coordenadas, era posible obtener el nivel de Landau más bajo si se empleaban coordenadas que no conmutaran. Él le comentó la idea a Pauli, quien a su vez se la pasó a Oppenheimer, y este se la comunicó a Snyder <sup>1</sup>[2], quien aplicó la idea de cambiar la estructura continua del espacio tiempo por una discreta, mediante la proposición de sustituir la suposición que los operadores de posición deben tomar valores continuos, por la condición que el espectro de sus valores debe ser invariante bajo transformaciones de Lorentz y encontró que esto podía ser satisfecho por un espaciotiempo (espacio de-Sitter) con una unidad natural de longitud, por medio de la cual tenía la esperanza de poder introducir un corte efectivo en el espacio de momentos y así solucionar el problema de las divergencias, de manera que también se preservara la invariancia relativista. La aparición de esta unidad de longitud en el espaciotiempo cuantizado que introdujo, implicaba la introducción de la propiedad que sus operadores de posición no conmutaban, los operadores de momento si conmutaban, pero la relación posición momento contenía términos no lineales. El mismo año de la aparición de este artículo, Yang [3] propuso una solución en el espacio curvo de-Sitter, con una definición de los operadores de momento lineal distinta de la de Snyder, que tenían la característica que no conmutaban, al igual que los operadores de posición, pero con una relación de conmutación entre el momento y la posición de carácter lineal.

Además de aparecer debido a argumentos como el anterior, la no conmutatividad aparece de manera natural en el contexto de teoría de deformaciones de álgebras de Lie, bajo consideraciones de estabilidad estructural de las teorías físicas [4].

Con el trabajo de Snyder surgió la idea de que los problemas como el de las diver-

---

<sup>1</sup>Mismo autor junto con Oppenheimer del artículo “On continued gravitational contraction”, Phys. Rev. 56 455-459 (1939)

gencias, podrían ser debidos a una incorrecta descripción del espaciotiempo, y como la naturaleza de éste se refleja por medio de un álgebra cinemática (como se verá en el capítulo 1), se han realizado deformaciones del álgebra de Poincaré, extendido con la inclusión de los operadores de posición y de la relación de conmutación de Heisenberg, con la intención de hallar una descripción más adecuada. Este tipo de deformaciones se caracterizan porque emplean una variedad cuántica que posee una no conmutatividad intrínseca, es decir, sus coordenadas no conmutan. Ésta se construye generalizando la geometría clásica hacia un nivel no conmutativo, siguiendo dos pasos conceptuales: expresar las propiedades de la geometría del espaciotiempo clásico en términos de un álgebra conmutativa, y posteriormente generalizarla a un álgebra no conmutativa. Luego se desarrolla un cálculo diferencial apropiado, y ya que se obtiene una geometría cuántica, se introducen partículas y ondas, cuyos movimientos e interacciones se siguen en búsqueda de efectos gravitacionales. Estas deformaciones pueden ser clasificadas a grandes rasgos, en las siguientes categorías

$$\begin{array}{ll} \text{Espacio cuántico:} & x_\mu x_\nu = R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} x_\rho x_\sigma, \\ \text{Espacio tipo Lie:} & [x_\mu, x_\nu] = f_{\mu\nu}{}^\rho x_\rho, \\ \text{Canónico:} & [x_\mu, x_\nu] = \theta_{\mu\nu}. \end{array}$$

donde la matriz  $R$  y el tensor  $\theta$  son constantes y las  $f_{\mu\nu}{}^\rho$  son las constantes de estructura del álgebra de Lie. Los espacios cuánticos son una generalización del concepto de grupo clásico y forman un tipo de álgebras de Hopf con una  $R$ -matriz universal constante que es solución de la ecuación de Yang Baxter cuántica. En los espacios tipo Lie las coordenadas forman un álgebra de Lie. En el caso canónico los conmutadores de las coordenadas están dados por el tensor constante  $\theta$ . A este grupo de teorías no conmutativas pertenece también la Relatividad Doblemente Especial, que se formula principalmente en el espacio de momentos, propone la inclusión de una nueva cantidad fundamental relacionada con la longitud de Planck. Esta última, empleando estructura adicional de álgebra de Hopf, se identifica con algunas formas particulares del álgebra de Hopf  $\kappa$ -Poincaré [5].

Estas teorías basadas en la no conmutatividad intrínseca tienen la característica de que primero se desarrolla la estructura matemática y luego se introduce la parte que involucra la física. Por esta razón se propone considerar la no conmutatividad de los operadores de posición de las partículas, la cual tiene la ventaja que refleja la naturaleza experimental de la manera en la cual se conocen las propiedades del espacio tiempo por medio de la observación de las partículas. Para estudiar este tipo de no conmutatividad, en los capítulos del 1 al 3 el presente trabajo se hace una revisión bibliográfica con el siguiente esquema: En el capítulo 1 se revisan los conceptos involucrados por la noción de Invariancia Relativista. En el capítulo 2, siguiendo las referencias [14] y [15], se presentan ejemplos que exhiben este tipo de no conmutatividad y se le da una

interpretación a la relación que tienen con el momento angular intrínseco del sistema. En el capítulo 3 se revisa el procedimiento expuesto en el artículo de T. F. Jordan y N. Mukunda [16] y que esencialmente consiste en encontrar las representaciones del grupo de Poincaré para los tres casos siguientes:

1. Partículas libres de masa  $m$  sin espín y energía positiva.
2. Partículas libres de masa  $m$  con espín  $s$  y energía positiva.
3. Partículas libres de masa  $m$  con espín  $s$  y energía positiva o negativa.

Con las representaciones ya obtenidas se construyen los correspondientes operadores de posición, con el requerimiento que estos deben satisfacer ciertas relaciones de conmutación con los generadores del álgebra. Finalmente se calculan las relaciones de conmutación que satisfacen estos operadores de posición. La característica de no conmutatividad se presenta en el segundo caso, y dado que estos resultados fueron obtenidos en un espacio plano, es de interés investigar si esta propiedad tiene alguna relación con la curvatura del espacio-tiempo, por lo que en el capítulo 4, bajo la supervisión del Dr. Chryssomalis Chryssomalakos y en colaboración con Elías Okon y Héctor Henández, se propone un método consistente en extender los resultados de [16] en el espacio de-Sitter, de manera que primero se obtienen las correspondientes representaciones del álgebra de de-Sitter como las deformaciones de las representaciones del álgebra de Poincaré para cada caso, y luego se sigue el mismo procedimiento de construir los operadores de posición y calcular sus relaciones de conmutación, para averiguar si es que cambian de alguna forma y por qué. Se obtuvieron las representaciones de los generadores del álgebra de de-Sitter para los 2 primeros casos del método. Sin embargo, no ha sido posible completar este método, porque se desconoce cuál debe ser la relación correspondiente a la relación de Heisenberg para un espacio curvo.

En los dos primeros apéndices se presenta una revisión bibliográfica sobre el tema de haces fibrados, esto motivado por el hecho que la construcción de la parte de los generadores del álgebra de-Sitter dependiente del espín, puede ser visto desde el enfoque de haces fibrados. En particular la manera en la cual se asocia una rotación a cada transformación se asemeja a la forma en la cual se transforma la 1-forma de conexión local, lo que sugiere una forma de definir una conexión en el espacio de-Sitter.



# Capítulo 1

## Invariancia Relativista

En este capítulo se presentan los aspectos que involucra el concepto de invariancia relativista. Para una exposición más detallada se pueden consultar las referencias [6] - [12].

La invariancia relativista de teorías construidas para la descripción de partículas comprende dos aspectos:

1. *Simetría relativista*, implica el principio de la relatividad especial que establece que las leyes de la física deben ser invariantes bajo cambios de sistemas inerciales. Este requerimiento de simetría bajo el grupo de transformaciones relativistas se puede satisfacer mediante la construcción de cantidades que satisfagan ecuaciones de paréntesis de Lie que son propias de los generadores del grupo de Poincaré, llamado también grupo inhomogéneo de Lorentz.
2. *Invariancia manifiesta*, la cual requiere que ciertas cantidades se transformen bajo cambios de sistema de referencia de una forma particular, relacionada con las transformaciones de Lorentz de eventos del espacio-tiempo. Ésta puede ser formulada en términos de un conjunto de ecuaciones de paréntesis de Lie, porque la transformación de una variable dinámica bajo cambios de sistema de referencia está determinada por los paréntesis de Lie de esta variable con los 10 generadores del grupo de Poincaré.

### 1.1. Simetría relativista

Un sistema dinámico está descrito en términos de cierto número de cantidades algebraicas, llamadas *variables dinámicas*, cada una de las cuales está definida con

respecto a algún sistema de coordenadas inercial (SI) del espacio-tiempo, por ejemplo, las variables dinámicas de un sistema de partículas libres, puntuales y sin espín, son las coordenadas y momentos de las partículas en determinado instante. Bajo un cambio de SI, estas variables dinámicas deben cambiar de una forma particular determinada por *el principio de la relatividad*, el cual establece que toda las leyes físicas deben ser invariantes bajo las transformaciones de SI, esto es, deben ser independientes de la posición y de la velocidad del observador. Las transformaciones de SI que cumplen con este requerimiento son llamadas *transformaciones inhomogéneas de Lorentz*, las cuales preservan la invariancia de los intervalos del espacio-tiempo y resultan de componer una traslación por un vector  $A$  y una transformación homogénea de Lorentz  $B$  (transformación de Lorentz especial o rotación espacial). Bajo una transformación inhomogénea de Lorentz finita, las coordenadas  $x_\mu$  de un SI se transforman linealmente de acuerdo con las ecuaciones

$$x'^\mu = B^\mu_\nu x^\nu + A^\mu. \quad (1.1)$$

Cualquier cambio de la posición o de la velocidad de un observador es de este tipo y puede construirse a partir de transformaciones infinitesimales del SI del observador, por lo que el principio de la relatividad se satisfecerá si las leyes físicas son invariantes bajo transformaciones infinitesimales de los SI, las cuales están dadas por

$$x'^\mu = x^\mu + b^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (1.2)$$

donde  $a_\mu$  y  $b_{\mu\nu}$  son parámetros infinitesimales y con  $b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}$ .

En la mecánica cuántica, dos observadores  $A$  y  $B$ , cuyos respectivos SIs  $S_I$  y  $S_{I'}$  están relacionados por una transformación inhomogénea de Lorentz  $L$ , describiran al sistema físico que se encuentra en un estado  $\psi$ , con los vectores de estado  $\psi_I$  y  $\psi_{I'}$ , entre los cuales existe una correspondencia biunívoca. Y dado que esta correspondencia está asociada con las transformaciones de Lorentz que conectan los SI de cada observador, el espacio  $V$  de todos los vectores de estado del sistema físico, debe ser una representación del grupo de Poincaré [8]. De especial interés son las representaciones unitarias, porque corresponden a transformaciones lineales que preservan la invariancia de la probabilidad de transición en distintos SI. Esto es, si los estados  $\psi_I$  y  $\phi_I$  están relacionados con los estados  $\psi_{I'}$  y  $\phi_{I'}$  de acuerdo con

$$\psi_{I'} = U(L)\psi_I, \quad \phi_{I'} = U(L)\phi_I, \quad (1.3)$$

donde  $U(L)$  es un operador unitario lineal, entonces se satisface que

$$|\langle \psi_I, \phi_I \rangle|^2 = |\langle \psi_{I'}, \phi_{I'} \rangle|^2 \quad (1.4)$$

en donde  $|\langle \psi, \phi \rangle|^2$  es la probabilidad de transición del estado  $\psi$  al estado  $\phi$ . Como todos los SI son equivalentes para la descripción del sistema físico, si  $\psi$  es un vector de estado del sistema, entonces  $\psi_{l'}$  también será un posible vector de estado visto desde  $S_{l'}$ . Por lo tanto el espacio vectorial  $V$ , contiene junto con todas los  $\psi$ , todas sus posibles transformaciones  $U(L)\psi$ .

Al ir de  $S_l$  a  $S_{l'} = L_1 S_l$ , y luego a  $S_{l''} = L_2 S_{l'}$  se debe obtener la misma función de onda que se obtendría de ir directamente desde  $S_l$  a  $S_{l''} = L_2 L_1 S_l$ , por lo tanto, de

$$\begin{aligned}\psi_{l''} &= U(L_2)U(L_1)\psi_l, \\ \psi_{l''} &= U(L_2 L_1)\psi_l,\end{aligned}$$

se obtiene que

$$U(L_2 L_1) = U(L_2)U(L_1), \quad (1.5)$$

y por lo tanto la transformación de la descripción del sistema dinámico es invariante bajo cambios de sistemas de referencia.

Aplicando un operador unitario  $V$  al vector de estado  $\psi_{l'}$  se tiene

$$V\psi_{l'} = VU(L)\psi_l = VU(L)V^{-1}V\psi_l,$$

con lo cual se obtiene una nueva descripción

$$\psi'_{l'} = U'(L)\psi'_l,$$

donde  $\psi'_l = V\psi_l$ ,  $\psi'_{l'} = V\psi_{l'}$  y  $U'(L) = VU(L)V^{-1}$ . Las dos representaciones  $U(L)$  y  $U'(L) = VU(L)V^{-1}$  son equivalentes. Es debido a esta propiedad que es suficiente determinar las representaciones irreducibles, pues cualesquiera otras pueden ser construidas a partir de ellas. Cada representación irreducible del grupo de Poincaré, dentro de equivalencia unitaria, puede ser caracterizada por dos números: la masa  $m$ , la cual puede tomar cualquier valor positivo y el espín  $s$ , el cual puede tomar valores enteros o semienteros [9]. Las representaciones del álgebra de Poincaré pueden ser construidas empleando la formulación hamiltoniana, como se presenta en la siguiente sección.

### 1.1.1. Formulación Hamiltoniana

Al considerar una descripción expresada en forma hamiltoniana, es decir considerar como variables dinámicas las variables canónicas conjugadas, por ejemplo las posiciones  $\mathbf{q}$  y sus respectivos momentos conjugados  $\mathbf{p}$ , solo interesan las transformaciones canónicas, esto es, transformaciones que satisfacen que las nuevas variables dinámicas  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{P}$  son igualmente variables canónicas conjugadas. La función generadora  $F$  que conecta los conjuntos de variables canónicas se obtiene por medio del principio de

Hamilton. Las transformaciones canónicas tienen las propiedades de un grupo [11], esto es,

1. La transformación identidad es canónica, siendo su función generadora  $F_{id} = q_i P_i$ .
2. Si la transformación es canónica, su inversa también lo es.
3. La composición de dos transformaciones canónicas (operación correspondiente al producto del grupo) es asociativa y su resultado es una transformación canónica.

Cualquier transformación canónica puede ser construida a partir de transformaciones canónicas infinitesimales (TCI), las cuales se caracterizan porque las variables finales difieren de las iniciales por una cantidad infinitesimal,

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i + \delta q_i, \\ P_i &= p_i + \delta p_i. \end{aligned}$$

Empleando la notación  $\eta(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  y  $\zeta = (Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)$  para un sistema con  $n$  grados de libertad, una TCI puede escribirse como

$$\zeta = \eta + \delta\eta. \quad (1.6)$$

Como esta TCI difiere del mapeo identidad por una cantidad infinitesimal, su función generadora también diferirá infinitesimalmente de la del mapeo identidad

$$F = q_i P_i + \epsilon G(q, P, t), \quad (1.7)$$

donde  $\epsilon$  es el parámetro de la transformación y  $G$  es cualquier función diferenciable con respecto a sus  $2n + 1$  argumentos. Las ecuaciones para el momento en el SI inicial y para la posición en el SI final son [11]

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \\ Q_i &= \frac{\partial F}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que los respectivos cambios infinitesimales son

$$\begin{aligned} \delta q_i &= Q_i - q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}, \\ \delta p_i &= P_i - p_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \end{aligned}$$



en donde se ha empleado en la primera ecuación que a primer orden es posible reemplazar  $P_i$  por  $p_i$ . Esto se puede escribir en forma matricial como

$$\delta\eta = \epsilon \mathbf{M} \frac{\partial G}{\partial \eta}, \quad (1.8)$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de  $2n \times 2n$ , compuesta por matrices unidad y nulas de  $n \times n$ , dispuestas de la forma

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El producto del álgebra que satisface estas funciones sobre el espacio fase es conmutativo, pero se puede deformar a un producto no conmutativo por medio del paréntesis de Poisson, el cual para dos funciones  $u$  y  $v$  de las variables canónicas está definido por

$$\{u, v\}_{(q,p)} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i}, \quad (1.9)$$

o, en forma matricial,

$$\{u, v\}_\eta = \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^T \mathbf{M} \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad (1.10)$$

donde  $T$  representa la transposición. Esta operación de paréntesis de Poisson tiene la propiedad de que es invariante bajo transformaciones canónicas [11], esto es

$$\{u, v\}_\eta = \{u, v\}_\zeta,$$

para cualquier transformación canónica  $\eta \rightarrow \zeta$ . A partir de la definición (1.10) del paréntesis de Poisson, se tiene que

$$\{\eta, u\} = \mathbf{M} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad (1.11)$$

Aplicando la ecuación (1.11) a la función  $G$  y combinando el resultado con la ecuación (1.8), se obtienen las ecuaciones de transformación para una TCI

$$\delta\eta = \epsilon \{\eta, G\}. \quad (1.12)$$

Tratando las TCI como transformaciones activas, el resultado de su aplicación a un sistema dinámico que se encuentra en el estado  $A$ , correspondiente a un punto  $S_A = (q, p)$  del espacio fase, es que lo traslada al estado  $B$  que corresponde al punto  $S_B = (Q, P)$  del mismo espacio fase. Entonces, una función  $u(q, p)$  no cambia su dependencia funcional de la posición y del momento, sino más bien, cambia sus valores como resultado

de reemplazar los valores  $(q, p)$  por  $(Q, P)$ .

Entonces, el cambio infinitesimal de una variable dinámica está dado por

$$\delta u = u(\zeta) - u(\eta) = u(\eta + \delta\eta) - u(\eta). \quad (1.13)$$

Expandiendo  $u(\eta + \delta\eta)$  en serie de Taylor hasta primer orden en  $\delta\eta$  y empleando la ecuación (1.8) se tiene

$$\delta u = \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^T \delta\eta = \epsilon \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^T \mathbf{M} \frac{\partial G}{\partial \eta}, \quad (1.14)$$

y empleando la definición (1.10) se tiene finalmente

$$\delta u = \epsilon \{u, G\}, \quad (1.15)$$

y por lo tanto, cada variable dinámica  $u$  debe cambiar de acuerdo a la relación

$$u' = u + \epsilon \{u, G\}. \quad (1.16)$$

Entonces cada TCI tiene asociada una función generadora  $G$ , la cual depende solo del sistema dinámico y del cambio en el SI.

Una propiedad importante de las transformaciones canónicas, es que preservan la forma de las ecuaciones de movimiento de Hamilton. De manera similar, la invariancia bajo transformaciones canónicas de los paréntesis de Poisson implica que cualquier ecuación expresada en términos de éstos, también será invariante bajo transformaciones canónicas. Esto implica el hecho de que cuando cambia el SI respecto del cual están definidas, las variables dinámicas cambian de forma tal que sus relaciones de paréntesis de Poisson permanecen invariantes. Esta formulación de paréntesis de Poisson es especialmente útil para realizar la transición de la mecánica clásica a la mecánica cuántica por medio del *principio de correspondencia*, el cual dice que los paréntesis de Poisson se reemplazan por relaciones de conmutación apropiadas de los correspondientes operadores cuánticos<sup>1</sup> y los productos de funciones por los respectivos términos simetrizados de los operadores, esto es,  $\hat{u}\hat{v}$  por  $1/2(\hat{u}\hat{v} + \hat{v}\hat{u})$ .

Los paréntesis de Poisson poseen las mismas propiedades que un producto de Lie,

$$\begin{aligned} \{u, v\} &= -\{v, u\}, & (\text{antisimetría}) \\ \{au + bv, w\} &= a\{u, w\} + b\{v, w\}, & (\text{linealidad}) \\ \{u, \{v, w\}\} + \{v, \{w, u\}\} + \{w, \{u, v\}\} &= 0, & (\text{identidad de Jacobi}) \end{aligned} \quad (1.17)$$

---

<sup>1</sup>La correspondencia formal es

$$\{u, v\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}(\hat{u}\hat{v} - \hat{v}\hat{u}),$$

donde, en la parte izquierda  $u$  y  $v$  son funciones clásicas y en la parte derecha son operadores cuánticos.

en donde  $u$ ,  $v$  y  $w$  son funciones con segunda derivada continua y  $a$  y  $b$  son constantes. Tratando al paréntesis de Poisson como un producto entre funciones, la identidad de Jacobi corresponde a la ley asociativa de esta multiplicación, con la particularidad de que se parece a la acción de un operador diferencial (regla de Leibnitz). Esto puede verse claramente escribiendolo en la forma

$$\Pi(u, \Pi(v, w)) = \Pi(\Pi(u, v), w) + \Pi(v, \Pi(u, w)),$$

donde el producto  $\Pi(u, v)$  corresponde a  $\{u, v\}$ .

Entonces, dado que las transformaciones canónicas poseen las propiedades de un grupo y el paréntesis de Poisson tiene las de un producto de Lie, es posible trabajar en el formalismo Hamiltoniano dentro del contexto de grupos y álgebras de Lie. Teniendo en cuenta el principio de correspondencia, es posible tratar al mismo tiempo, tanto el formalismo clásico como el cuántico, empleando el término paréntesis de Lie, denotado por  $[\cdot, \cdot]$  e interpretándolo como paréntesis de Poisson o conmutadores según corresponda, de acuerdo con lo siguiente:

- En el formalismo de grupos de Lie de mecánica clásica los paréntesis de Lie son los paréntesis de Poisson y el álgebra de Lie  $L$  correspondiente está constituida por un subespacio de las funciones reales en el espacio fase, el cual es cerrado bajo la operación de paréntesis de Poisson. El grupo de Lie  $G$  asociado es el grupo de transformaciones canónicas que tiene por generadores infinitesimales los elementos de  $L$ .
- En el formalismo de grupos de Lie de mecánica cuántica estos paréntesis de Lie son conmutadores divididos por  $i\hbar$ ,  $L$  es un subespacio de dimensión finita de los operadores hermíticos, el cual es cerrado bajo la operación de conmutación y  $G$  es el grupo de transformaciones unitarias que tiene por generadores infinitesimales a los elementos de  $L$ .

Empleando la relación (1.16), hasta primer orden en  $\epsilon$  se tiene que el paréntesis de Lie de dos variables dinámicas  $u'$  y  $v'$  transformadas por medio de las función generadora  $G$ , es

$$\begin{aligned} [u', v'] &= [u + \epsilon [u, G], v + \epsilon [v, G]] \\ &= [u, v] + \epsilon ([u, [v, G]] + [[u, G], v]) \\ &= [u, v] + \epsilon [[u, v], G] = [u, v]', \end{aligned} \tag{1.18}$$

en donde en el tercer paso se han empleado la propiedad de antisimetría y la identidad de Jacobi. Entonces las transformaciones canónicas preservan la estructura del álgebra de Lie. Sean  $G_1$  y  $G_2$  las respectivas funciones generadoras y  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  los parámetros infinitesimales de dos TCIs, de tal forma que la primera cambia la variable dinámica  $u$  a  $u'$ ,

$$u' = u + \epsilon_1 [u, G_1]$$

y la segunda cambia de  $u'$  a  $u''$ ,

$$u'' = u' + \epsilon_2 [u', G_2] = u' + \epsilon_2 [u, G_2]',$$

en donde se ha empleado la propiedad (1.18). La composición de ambas transformaciones cambia  $u$  a  $u''$  de acuerdo con

$$u'' = u + \epsilon_1 [u, G_1] + \epsilon_2 [u, G_2] + \epsilon_1 \epsilon_2 [[u, G_2], G_1],$$

en donde se han considerado solo los términos de primer orden en los parámetros infinitesimales. Aplicando estas mismas transformaciones pero en el orden inverso, la composición cambia de  $u$  a  $u'''$ ,

$$u''' = u + \epsilon_2 [u, G_2] + \epsilon_1 [u, G_1] + \epsilon_2 \epsilon_1 [[u, G_1], G_2],$$

Comparando ambas composiciones se obtiene

$$\begin{aligned} u''' &= u'' - \epsilon_1 \epsilon_2 [[u, G_2], G_1] + \epsilon_2 \epsilon_1 [[u, G_1], G_2] \\ &= u'' + \epsilon_1 \epsilon_2 [u, [G_1, G_2]], \end{aligned} \quad (1.19)$$

en donde nuevamente se ha empleado la antisimetría y la identidad de Jacobi. Este resultado proporciona la transformación de las variables dinámicas asociada con el cambio del SI el cual es el conmutador de los dos cambios iniciales. A primer orden en los parámetros infinitesimales es posible sustituir  $u$  por  $u''$ , con lo que la ecuación (1.19) queda en la forma usual

$$u''' = u'' + \epsilon [u'', G], \quad (1.20)$$

en donde  $G = [G_1, G_2]$  y  $\epsilon = \epsilon_1 \epsilon_2$ . Por lo tanto las relaciones de conmutación entre las TCI corresponde a las relaciones de paréntesis de Lie entre las  $G$ s asociadas. La  $G$  asociada con la transformación (1.2) depende de los parámetros infinitesimales  $a_\mu$  y  $b_{\mu\nu}$  de la forma

$$G = -a^\mu P_\mu + \frac{1}{2} b^{\mu\nu} M_{\mu\nu}, \quad (1.21)$$

donde  $P^\mu$ ,  $M^{\mu\nu}$  son variables dinámicas finitas, independientes de la transformación de las coordenadas y con  $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ . Las 10 cantidades  $P^\mu$ ,  $M^{\mu\nu}$ , llamadas

cantidades fundamentales en el formalismo clásico y operadores infinitesimales en el cuántico, son características para cada sistema dinámico y por medio del paréntesis de Lie determinan la manera en la cual todas las variables dinámicas son afectadas por una transformación inhomogénea de Lorentz.

A partir de las relaciones de conmutación de las TCI de los SI, se obtiene que, independientemente de la naturaleza del sistema dinámico estudiado y en el caso de no tener influencia externa, los paréntesis de Lie para cualquier par de componentes de  $P^\mu$  o de  $M^{\mu\nu}$  están determinados por el álgebra de Poincaré.

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= -g_{\mu\rho}P_\nu + g_{\nu\rho}P_\mu \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\rho\nu} + g_{\nu\sigma}M_{\rho\mu}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

En estas relaciones se emplea la convención  $\hbar = c = 1$ ,  $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$  y  $g_{\mu\nu} = 0$  para  $\mu \neq \nu$ .

Usualmente se emplea la notación  $P_0 = H$ ,  $P_i$ ,  $M_{ij} = J_{ij}$  y  $M_{i0} = K_i$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , para los generadores de traslaciones temporales, traslaciones espaciales, rotaciones y transformaciones de Lorentz puras (transformación de Lorentz especiales), respectivamente. Las transformaciones de los sistemas de referencia se realizan por medio de los automorfismos pertenecientes a los grupos uniparamétricos generados por  $H$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{K}$ . En general partiendo de la descripción de alguna variable dinámica  $u$  a tiempo cero con respecto a un sistema de referencia inicial, entonces esta variable dinámica a tiempo cero con respecto al nuevo sistema será  $e^{sT}u$ . Si  $T$  es igual a  $H$ ,  $P_i$ ,  $J_i$  o  $K_i$ , entonces el nuevo sistema de referencia está trasladado por una cantidad  $s$  en la dirección temporal, desplazado por  $s$  en la dirección espacial  $i$ , rotado en el espacio alrededor del eje  $i$  o moviéndose uniformemente en la dirección  $i$  con velocidad  $\tanh(s)$  con respecto al sistema inicial. En particular, la descripción a tiempo  $t$  con respecto al sistema inercial  $S$ , obtenida medio del grupo uniparamétrico generado por  $H$ , es la misma descripción a tiempo cero con respecto a otro sistema inercial  $S'$ , el cual está trasladado temporalmente por una cantidad  $t$  con respecto a  $S$ .

En conclusión la condición necesaria y suficiente para que la teoría de un sistema dinámico posea simetría relativista es que existan generadores de traslaciones temporales y espaciales, de rotaciones y de transformación de Lorentz especiales que actúan sobre el espacio fase o de Hilbert, según corresponda, que obedezcan el álgebra de Poincaré, el cual en términos de  $H$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{K}$  es:

$$\begin{aligned} [P_i, P_j] &= 0, & [J_i, J_j] &= \epsilon_{ijk}J_k, & [K_i, H] &= P_i, \\ [P_i, H] &= 0, & [J_i, H] &= 0, & [K_i, K_j] &= -\epsilon_{ijk}J_k/c^2, \\ [J_i, P_j] &= \epsilon_{ijk}P_k, & [J_i, K_j] &= \epsilon_{ijk}K_k, & [K_i, P_j] &= \delta_{ij}H/c^2. \end{aligned} \quad (1.23)$$

En el límite de bajas velocidades,  $v \ll 1$ , el álgebra de Poincaré se transforma en el álgebra de Galileo [10], con el cual se obtienen las simetrías correspondientes bajo cambio de SI para sistemas no relativistas. En este límite, el operador de energía es  $H = M + W$  con  $M$  la masa total y  $W$  la energía cinética, del orden de  $M \sim m$  y  $W \sim mv^2$ , donde  $m$  es la masa en reposo del sistema. Las relaciones de conmutación están dadas por

$$\begin{aligned} [K_i, K_j] &= 0, & [K_i, P_j] &= \delta_{ij}M, \\ [J_i, W] &= [P_i, W] = 0, & [K_i, W] &= P_i, \\ [J_i, M] &= [P_i, M] = [K_i, M] = [W, M] = 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

**Ejemplo 3.1. Álgebra de simetrías para una partícula libre clásica de masa  $m$  sin espín en dos dimensiones.**

Tomando como variables dinámicas las coordenadas  $q_i$  de la partícula sobre el plano y sus respectivos momentos conjugados  $p_i$ , con  $i = 1, 2$ , las cuales satisfacen los paréntesis de Poisson usuales

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}, \quad [q_i, q_j] = 0 = [p_i, p_j].$$

Para el caso relativista, los generadores de las simetrías a  $t = 0$  son:

$$\begin{aligned} P_i &= p_i, & J &= q_1 p_2 - q_2 p_1, \\ H &= \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}, & K_i &= q_i H / c^2, \end{aligned} \quad (1.25)$$

en donde  $p^2 = p_1^2 + p_2^2$ .

Para el caso no relativista,  $J$  y  $P$  mantienen su forma, y  $H$  y  $K$  se reemplazan por

$$H = \frac{p^2}{2m}, \quad K_i = m q_i. \quad (1.26)$$

Al calcular los paréntesis de Poisson de los generadores en (1.25) se obtiene que satisfacen el álgebra de Poincaré (1.23). De igual manera, para el caso no relativista se obtiene que los generadores (1.26) cumplen el álgebra galileano (1.24).

## 1.2. Invariancia Manifiesta

Para que una teoría que describe el movimiento de cierto número de partículas posea invariancia relativista, esto es, que las coordenadas de los eventos del espacio determinados por la posición de la partícula como función del tiempo se transformen de

acuerdo con las transformaciones de sistemas de referencia bajo el grupo de Poincaré, es necesario que el operador  $\mathbf{X}$  de posición de la partícula cumpla las siguientes ecuaciones:

$$[P_j, X_i] = g_{ij}, \quad (1.27)$$

$$[J_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k, \quad (1.28)$$

$$[K_i, X_j] = \frac{1}{2} (X_j [H, X_i] + [H, X_i] X_j). \quad (1.29)$$

La ecuación (1.27) es relativa a que  $\mathbf{P}$  genera traslaciones en  $\mathbf{X}$ , la (1.28) garantiza que  $\mathbf{X}$  se transforma como un vector bajo rotaciones y la (1.29) implica que  $\mathbf{X}$  forma parte de un 4-vector [15] y [12], lo cual se explica con más detalle a continuación, tanto para el caso clásico como para el caso cuántico.

### 1.2.1. Covariancia manifiesta clásica

Considerando la línea-mundo de una partícula descrita por  $x^\mu(\tau)$  en el sistema  $S$ , sea el punto  $P$  correspondiente a  $\tau$  y cuya coordenada temporal es  $t$ . Considerando otro punto  $P'$ , correspondiente a  $\tau' = \tau + d\tau$ , que tiene la misma coordenada temporal  $t$  en otro sistema  $S'$ , relacionado con el primero por una transformación infinitesimal de Lorentz. Las coordenadas del punto  $P'$  en los dos sistemas, están relacionadas por

$$x^\mu(\tau') = x'^\mu(\tau') + \epsilon^\mu_\nu x'^\nu(\tau'). \quad (1.30)$$

Por otra parte, desarrollando  $x^\mu(\tau)$  en serie de Taylor alrededor de  $\tau$  hasta primer orden, se obtiene

$$x^\mu(\tau') = x^\mu(\tau) + \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau, \quad d\tau = \tau' - \tau. \quad (1.31)$$

Con (1.31) y (1.30) se obtiene cómo se relacionan a primer orden las posiciones de ambos sistemas en el mismo tiempo  $t$ ,

$$\Delta x^\mu = x'^\mu(\tau') - x^\mu(\tau) = \epsilon^0_\nu x^\nu \frac{dx^\mu}{dt} - \epsilon^\mu_\nu x^\nu. \quad (1.32)$$

Aplicando este resultado al caso particular de una traslación en la dirección  $x^i$  con velocidad  $\epsilon$  para lo cual  $\epsilon^i = \epsilon^i_0 = \epsilon^i_0$  y todos los demás igual a cero, se tiene

$$\Delta x^i(t) = \epsilon_j \left( \frac{dx^i}{dt} x^j(t) - \delta^{ij} t \right). \quad (1.33)$$

La ecuación (1.33) en forma covariante y en términos del Hamiltoniano  $H$  es

$$\Delta x_i(t) = -\epsilon^j (\delta_{ij} t + [H, x_i(t)] x_j(t)). \quad (1.34)$$

En términos del operador de transformación de Lorentz pura  $K$ , la posición de la partícula en los dos sistemas en el instante  $t$  esta relacionada por

$$x'_i(t) = x_i(t) - \epsilon^j [K_j, x_i(t)]. \quad (1.35)$$

Comparando las ecuaciones (1.34) y (1.35) se obtiene la relación

$$[K_j, x_i] = \delta_{ij} t + [H, x_i] x_j. \quad (1.36)$$

Esta relación expresa la covariancia de la variable de posición clásica. Definiendo las coordenadas del centro de energía  $N_i$  como

$$N_i = K_i + t P_i, \quad (1.37)$$

donde  $P_i$  es el momento conjugado de  $x_i$ , se tiene la relación

$$[x_i, N_j] = [x_i, H] x_j = \dot{x}_i x_j. \quad (1.38)$$

### 1.2.2. Covariancia manifiesta cuántica

En el caso cuántico la partícula localizada en  $x$  a tiempo  $t$  en el sistema  $S$  está descrita por el vector de estado

$$|\psi(t)\rangle = |x\rangle \otimes |\alpha\rangle, \quad (1.39)$$

donde  $\alpha$  representa los estados internos de la partícula. Desde otro sistema  $S'$  relacionado con  $S$  por un transformación de Lorentz especial se observa el vector de estado a tiempo  $t$

$$|\psi'(t)\rangle = (1 - i\epsilon^i \hat{K}_i) |\psi(t)\rangle. \quad (1.40)$$

Para tener covariancia se deben cumplir las relaciones para  $x_\mu$  dadas por (1.30), entonces, para que el vector de estado

$$|\psi'(t')\rangle = |x'\rangle \otimes |\alpha'\rangle \quad (1.41)$$

represente un evento en el espacio tiempo, se debe cumplir que

$$\hat{x}_i |\psi'(t')\rangle = x'_i |\psi'(t')\rangle = (x_i - \epsilon_i t) |\psi'(t')\rangle. \quad (1.42)$$

Por lo que se debe hallar la relación que debe satisfacer el operador de posición para que se cumpla lo anterior. Primero se traslada temporalmente el vector de estado  $|\psi'(t)\rangle$  hasta  $t'$  y se impone la condición (1.42). El vector de estado de la partícula en  $S'$  al tiempo  $t'$  está dado por

$$|\psi'(t')\rangle = (1 - i(t' - t)\hat{H}) |\psi'(t)\rangle. \quad (1.43)$$



Sustituyendo la condición de covariancia (1.30) para  $t'$  y la ecuación (1.40) en la (1.43), a primer orden en  $\epsilon$  se tiene

$$|\psi'(t')\rangle = (1 - i\epsilon^j(\hat{K}_j - \hat{H}\hat{x}_j) |\psi(t)\rangle, \quad (1.44)$$

donde para el último término se empleó que  $x_j\hat{H} |\psi(t)\rangle = \hat{H}\hat{x}_j |\psi(t)\rangle$ . Sustituyendo la ecuación (1.44) en la (1.42) se encuentra que

$$(\hat{x}_i\hat{K}_j - \hat{x}_i\hat{H}\hat{x}_j) |\psi(t)\rangle = (-i\delta_{ij}t + x_i\hat{K}_j - x_i\hat{H}\hat{x}_j) |\psi(t)\rangle. \quad (1.45)$$

Empleando el operador correspondiente al centro de energía definido en (1.37) se obtiene finalmente la relación requerida para el operador de posición

$$[\hat{x}_i, \hat{N}_j] = [\hat{x}_i, \hat{H}\hat{x}_j]. \quad (1.46)$$

Para que un operador que satisface la relación (1.46) sea hermítico es necesario que cumpla la relación

$$[\hat{x}_i, [\hat{x}_j, \hat{H}]] = 0, \quad (1.47)$$

y si satisface esto, entonces la relación (1.46) puede escribirse como

$$[\hat{N}_i, \hat{x}_j] = \frac{1}{2}(\hat{x}_j[\hat{H}, \hat{x}_i] + [\hat{H}, \hat{x}_i]\hat{x}_j), \quad (1.48)$$

donde  $\hat{N}_i$  está definido como

$$\hat{N}_i = \frac{1}{2}(\hat{H}\hat{x}_i + \hat{x}_i\hat{H}). \quad (1.49)$$

Con lo anterior, se demuestra que las ecuaciones (1.36), (1.38) y (1.48) reflejan el hecho de que  $\mathbf{x}$  es la intersección de una línea mundo definida de manera invariante con la sección temporal  $x_0 = t$ , de forma tal que  $x$  es un 4-vector.



# Capítulo 2

## No conmutatividad del espacio-tiempo

Es importante hacer una distinción conceptual entre dos tipos de no conmutatividad del espacio tiempo:

1. No conmutatividad intrínseca, referente al caso en el cual las coordenadas de la variedad asociada con el espacio-tiempo no conmutan.
2. No conmutatividad de los operadores de posición de la partículas que viven sobre la variedad.

Para construir una teoría del espacio-tiempo con propiedades no conmutativas, es conveniente emplear el enfoque del segundo tipo, ya que por medio de mediciones de cantidades físicas (observables) de la partículas obtenemos información sobre las propiedades del espacio-tiempo, como por ejemplo la dilatación del tiempo observada en el decaimiento de los mesones  $\mu$ .

Este tipo de no conmutatividad se presenta en teorías de distinta naturaleza, con la peculiaridad de que involucra el momento angular intrínseco de la partícula. En este capítulo se presentan dos ejemplos de operadores de posición que poseen esta propiedad:

- En el primero se revisa la parte par del operador de posición de la teoría de Dirac, utilizando el concepto de parte par de un operador definido en [13] y siguiendo el desarrollo presentado en [14].
- En el segundo se hace una revisión de los operadores de posición del centro de masa en relatividad especial siguiendo el artículo [15].

Al final del capítulo se hace una discusión de la relación de este tipo de no conmutatividad con el momento intrínseco del sistema.

## 2.1. Operadores de posición de la teoría de Dirac

Para que una teoría describa partículas con energía de un único signo, debe estar definida unicamente en términos de *operadores pares*  $\tilde{\mathbf{A}}$ , construidos de forma que preserven el signo de la energía como se desea, es decir que satisfagan

$$\tilde{\mathbf{A}}\psi^+ = \psi'^+ \quad \tilde{\mathbf{A}}\psi^- = \psi'^-,$$

donde  $\psi'^+$  y  $\psi'^-$  son vectores de estado con energías positivas y negativas respectivamente. Por otra parte, un *operador impar*  $\hat{\mathbf{A}}$  modifica el signo de la energía,

$$\hat{\mathbf{A}}\psi^+ = \psi'^- \quad \hat{\mathbf{A}}\psi^- = \psi'^+.$$

Generalmente cualquier operador  $\mathbf{A}$  puede ser separado en sus partes par e impar en la forma

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}},$$

las cuales están dadas por

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}) \quad \hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{\Lambda}\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}), \quad (2.1)$$

en donde  $\mathbf{\Lambda}$  es el operador de signo  $H/\sqrt{H^2}$ , el cual en la teoría de Dirac está dado por

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2}{c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}}. \quad (2.2)$$

El operador de posición es el operador multiplicativo

$$\mathbf{x}\psi = x\psi, \quad (2.3)$$

el cual satisface las relaciones de conmutación

$$[\mathbf{x}, \alpha] = 0 \quad [\mathbf{x}, \beta] = 0 \quad [x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad (2.4)$$

y tiene la propiedad de mezclar estados de energía positiva y negativa.

Calculando la relación de conmutación entre el operador de posición y el de signo se obtiene

$$[\mathbf{x}, \mathbf{\Lambda}] = i\frac{\hbar}{H}\mathbf{F}, \quad (2.5)$$

en donde el operador  $\mathbf{F} = c\boldsymbol{\alpha} - c^2\mathbf{p}H^{-1}$  esta definido como la diferencia entre el operador estándar de velocidad  $c\boldsymbol{\alpha}$  y el operador de velocidad clásico  $c^2\mathbf{p}H^{-1}$ <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>El operador  $H^{-1}$  es bien definido y acotado debido al hecho que el 0 no pertenece al espectro del Hamiltoniano, el cual es  $(-\infty, -m] \cup [m, \infty)$ .

Empleando la definición (2.1) de  $\hat{\mathbf{A}}$  y la relación de conmutación (2.5) se puede demostrar que la parte par de este operador de posición es

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + i \frac{\hbar}{2H} \mathbf{F}. \quad (2.6)$$

Las relaciones de conmutación entre las distintas componentes de  $\tilde{\mathbf{x}}$  son:

$$[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j] = \frac{i^2 (\hbar c)^2}{H^2} \epsilon_{ijk} \left( \frac{1}{4} (\alpha \times \alpha)_k + \frac{1}{2H} (c\alpha \times p)_k \right). \quad (2.7)$$

Como  $\mathbf{S} = -\frac{i}{4} \alpha \times \alpha$ , en términos de  $\mathbf{F}$  y de  $\mathbf{S}$  se tiene

$$[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j] = -\frac{i (\hbar c)^2}{H^2} \epsilon_{ijk} \left( S_k - \frac{i}{2H} (F \times p)_k \right). \quad (2.8)$$

Por otra parte, a partir del conmutador

$$[S_i, \Lambda] = -\frac{i}{H} (c\alpha \times p)_i, \quad (2.9)$$

se obtiene que la parte par del operador de espín es

$$\tilde{S}_i = S_i - \frac{i}{2H} (c\alpha \times p)_i, \quad (2.10)$$

o, en términos de  $F$ ,

$$\tilde{S}_i = S_i - \frac{i}{2H} (F \times p)_i. \quad (2.11)$$

Sustituyendo la ecuación (2.11) en la (2.8) se obtiene finalmente la relación

$$[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j] = -i \frac{(\hbar c)^2}{H^2} \epsilon_{ijk} \tilde{S}_k, \quad (2.12)$$

ecuación que exhibe la característica de no conmutatividad mencionada anteriormente.

## 2.2. Centro de masa en Relatividad Especial

Considerando únicamente partículas libres y despreciando la interacción con otros tipos de partículas o campos, el número total de partículas con cierto signo de energía es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Bajo estas condiciones es posible hablar de observables asociadas, tanto con las partículas individuales como con el sistema total, tales como momento lineal, angular y energía, lo cual, sin embargo no puede decirse de la posición, porque no es una cantidad extensiva como las mencionadas

anteriormente. Por ejemplo, considerando dos partículas con sus respectivas energías, momentos y posiciones, la energía y momento total del sistema compuesto será la suma de las cantidades individuales de cada sistema, pero su posición “total” no será igual a la suma de las posiciones de cada partícula, siendo la cantidad correspondiente alguna generalización relativista del centro de masa newtoniano. En mecánica relativista hay varias generalizaciones de la definición newtoniana del centro de masa, pero ninguna de estas reproduce completamente las propiedades del centro de masa newtoniano.

Según Pryce [15], para que el centro de masa esté bien definido se requiere que posea las siguientes propiedades:

- a) Sus componentes deben ser parte de un 4-vector, para que desde todos los sistemas inerciales se observe la misma línea de mundo.
- b) Debe estar en reposo en un sistema de referencia en el cual el momento total es cero.
- c) Debe seguir una trayectoria rectilínea (con velocidad constante) cuando no haya fuerzas externas que actúen sobre las partículas.
- d) Sus coordenadas en distintas direcciones conmutan.

Sin embargo, en vista de que el interés principal es estudiar la no conmutatividad, la última propiedad no será tomada en cuenta como un requerimiento.

Las cuatro principales generalizaciones de la definición newtoniana del centro de masa mencionadas en [15] son:

- 1) Se toma un SI y se definen las coordenadas del centro de masa como el promedio de las coordenadas de las partículas, pesadas por sus masas en reposo. Esta definición tiene las desventajas de que no es independiente del SI empleado, ni posee la propiedad de estar en reposo en un SI en el cual el momento total es cero. Además, si las partículas interactúan, dicho centro de masa en general no se moverá en línea recta.
- 2) Se aplica la definición 1) en un SI en el cual el momento total es cero y al centro de masa resultante se le aplica una transformación de Lorentz para llegar a un SI arbitrario, esto para que la línea mundo sea independiente del SI final. Esta definición en general tiene las desventajas de que no sigue una trayectoria rectilínea ni está en reposo en un sistema en el cual el momento total es cero.

- 3) Se definen las coordenadas del centro de masa en un SI particular como el promedio de las coordenadas de la partículas pesadas por sus energías. El centro de masa así definido estará en reposo en un sistema en el cual el momento total es cero, pero tiene la desventaja de que no es independiente del SI empleado. También, tiene la propiedad que las coordenadas del centro de masa en distintas direcciones no conmutan.
- 4) Se aplica primero la definición 3) en un SI en el cual el momento total es cero y al centro de masa resultante se le aplica una transformación de Lorentz para llevarlo a un SI arbitrario. La línea mundo del centro de masa definido de esta forma, al igual que la definición 2) es independiente del SI final y al igual que la 3) tiene la propiedad que las coordenadas del centro de masa en distintas direcciones no conmutan.

El cuadro 2.1 resume las propiedades que satisfacen estas cuatro definiciones.

definición \ propiedad	a	b	c	d
1	—	—	—	○
2	○	—	—	○
3	—	○	○	—
4	○	○	○	—

Cuadro 2.1: Propiedades de las definiciones del centro de masa

De estas definiciones, 4) es la más satisfactoria por ser relativísticamente covariante.

### 2.2.1. Definiciones 3) y 4) del centro de masa

En general es posible definir el tensor de energía-momento y emplearlo para definir el centro de masa de un conjunto de partículas. Para una única partícula clásica dicho centro de masa coincide con la posición de la partícula misma.

Considerando un sistema compuesto por  $n$  partículas libres clásicas, sean  $z_i^\mu$  la posición de la  $i$ -ésima partícula en el instante  $t$  y  $p_i^\mu$  su 4-vector de energía-momento, el vector de energía-momento total del sistema es  $P_\mu = \sum_{i=1}^n p_i^\mu$ .

Sean  $q^\mu(t)$  las coordenadas del centro de masa en el instante  $t$ , las cuales, de acuerdo con la definición 3) están dadas por

$$P^0 q^\mu(t) = \sum_{i=1}^n p_i^0 z_i^\mu(t), \tag{2.13}$$

donde se cumple que  $q^0(t) = t$ .

El tensor de energía-momento para un conjunto de partículas libres es

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = T^{\nu\mu}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \int \prod_{\rho=0}^3 \delta(x^\rho - z_i^\rho) p_i^\mu dz_i^\nu, \quad (2.14)$$

donde la integración se realiza sobre todo el espacio. En términos de este tensor, las coordenadas del centro de masa (2.13) están dadas por

$$P^0 q^\mu = \iiint x^\mu T^{00} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (2.15)$$

y el 4-vector de energía-momento total es

$$P^\mu = \iiint T^{0\mu} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (2.16)$$

La parte derecha de (2.15) no es independiente de la región de integración (la hipersuperficie correspondiente al instante  $x^0 = t$ ), y por lo tanto no es un tensor. La combinación antisimétrica

$$M^{\mu\nu} = \iiint (x^\mu T^{0\nu} - x^\nu T^{0\mu}) dx^1 dx^2 dx^3, \quad (2.17)$$

satisface una ecuación diferencial de conservación y por lo tanto es independiente de la región de integración y de  $t$  por lo que es un tensor.

Por medio de la ecuación (2.17) con  $\nu = 0$  se puede escribir la ecuación (2.15) para  $q^\mu$  como

$$q^\mu = \frac{M^{\mu 0} + t P^\mu}{P^0}. \quad (2.18)$$

Como  $P^\mu$  y  $M^{\mu\nu}$  son independientes de  $t$ , la velocidad del centro de masa es

$$\frac{dq^\mu}{dt} = \frac{P^\mu}{P^0}, \quad (2.19)$$

lo que muestra que la línea-mundo es rectilínea y paralela a  $P^\mu$  y por lo tanto su dirección es independiente del sistema en el cual está definido.

Para calcular el centro de masa de la definición 4) se aplica una transformación de Lorentz a la línea mundo del centro de masa (2.18), de manera tal que el eje temporal del SI final coincida con el vector unitario de velocidad de la partícula  $P^\mu/m$ , donde  $m$  es la masa en reposo del sistema total definida por

$$P^\mu P_\mu = m^2. \quad (2.20)$$



Las componentes del momento lineal y angular en la dirección temporal del SI final son  $P^0 = P^\rho P_\rho/m$  y  $M^{\mu 0} = M^{\mu\nu} P_\nu/m$ . Sean  $X^\mu(s)$  las coordenadas del centro de masa para la definición 4) al tiempo  $s$

$$X^\mu(s) = M^{\mu\nu} P_\nu/m^2 + sP^\mu/m \quad (2.21)$$

Para comparar las coordenadas en ambos SI, se necesita encontrar el punto de la línea mundo (2.21) cuya coordenada temporal en el sistema original es  $t$ , lo que se realiza resolviendo la ecuación  $X^0(s) = t$  para  $s$  y sustituyéndolo en la ecuación (2.21). De esta forma se obtiene

$$X^\mu = \frac{tP^\mu}{P^0} + \frac{M^{\mu\nu} P_\nu}{m^2} + \frac{M^{\nu 0} P^\mu P_\nu}{m^2 P^0}, \quad (2.22)$$

lo cual posee covariancia relativista.

Por otra parte, se define el vector  $\mathbf{N}$

$$N^i = \iiint x^i T^{00} dx^1 dx^2 dx^3, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.23)$$

el cual está relacionado con las componentes  $M^{i0}$  de acuerdo con

$$M^{i0} = N^i - tP^i. \quad (2.24)$$

$N^i/P^0$  y  $M^{i0}/P^0 = K^i/P^0$  son las coordenadas del centro de energía dependiente del tiempo y del centro de energía independiente del tiempo, respectivamente y a  $t = 0$ , esto porque, aunque  $N^i$  no contiene explícitamente al tiempo, varía con él y en  $M^{i0}$ , el tiempo aparece explícitamente pero no varía con él. Las componentes  $M^{ij} = J^{ij}$  son las componentes del momento angular del sistema completo. Sustituyendo la ecuación (2.24) en la (2.18) y escribiendo  $P^0$  como  $E$ , se obtiene la expresión para el operador de posición de la definición 3)

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{N}}{E}. \quad (2.25)$$

Sustituyendo la ecuación (2.24) en la (2.22) y simplificando se obtiene la expresión para el operador de posición de la definición 4)

$$\mathbf{X} = \frac{1}{m^2} (E\mathbf{N} + \mathbf{J} \times \mathbf{P} - \frac{(\mathbf{N} \cdot \mathbf{P})\mathbf{P}}{E}). \quad (2.26)$$

expresiones en las cuales no aparece  $t$  explícitamente como es deseado.

Se definen momentos angulares “intrínsecos” para ambas definiciones de centro de masa, restando del momento angular total  $\mathbf{J}$  los momentos angulares orbitales  $\mathbf{L} = \mathbf{q} \times \mathbf{P}$  y  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{X} \times \mathbf{P}$

$$\mathbf{S} = \mathbf{J} - \mathbf{q} \times \mathbf{P}, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{J} - \mathbf{X} \times \mathbf{P}. \quad (2.28)$$

$\mathbf{S}$  y  $\mathbf{\Sigma}$  son cantidades intrínsecas del sistema de las partículas que no dependen del sistema de referencia elegido, mientras que  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{\Lambda}$  si dependen, por ejemplo en un sistema inercial en el cual el momento total  $\mathbf{P}$  es cero se anulan, quedando únicamente  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{\Sigma}$  iguales al momento angular total, siempre que éste sea distintos de cero.

Haciendo el producto vectorial de  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{\Sigma}$  por  $\mathbf{P}$  se tiene

$$\mathbf{S} \times \mathbf{P} = m^2(\mathbf{X} - \mathbf{q}), \quad \mathbf{\Sigma} \times \mathbf{P} = E^2(\mathbf{X} - \mathbf{q}), \quad (2.29)$$

de donde se obtiene que la distancia entre  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{q}$  es

$$\mathbf{X} - \mathbf{q} = \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{P}}{m^2} = \frac{\mathbf{\Sigma} \times \mathbf{P}}{E^2}. \quad (2.30)$$

De esta ecuación se observa que en general  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{q}$  no coinciden, pero viajan paralelamente en línea recta con separación constante. La diferencia de  $\mathbf{\Sigma}$  y  $\mathbf{S}$  es

$$\mathbf{\Sigma} - \mathbf{S} = \mathbf{P} \times (\mathbf{X} - \mathbf{q}), \quad (2.31)$$

sustituyendo las ecuaciones (2.30) en la (2.31) se obtienen las ecuaciones que relacionan  $\mathbf{\Sigma}$  y  $\mathbf{S}$

$$m^2\mathbf{\Sigma} = E^2\mathbf{S} - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{P})\mathbf{P} \quad (2.32)$$

$$E^2\mathbf{S} = m^2\mathbf{\Sigma} + (\mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{P})\mathbf{P} \quad (2.33)$$

de las definiciones de  $\mathbf{\Sigma}$  y  $\mathbf{S}$  se obtiene la relación

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{P} \quad (2.34)$$

### 2.2.2. Relaciones de paréntesis de Poisson

Las relaciones de paréntesis de Poisson de  $P_\mu, M_{\mu\nu}$  ( $E, \mathbf{P}, \mathbf{J}$  y  $\mathbf{N}$ ) están dadas por el álgebra de Poincaré (1.23), el cual recordando es:

$$\begin{aligned} [P_i, P_j] &= 0, & [J_i, J_j] &= \epsilon_{ijk} J_k, & [N_i, E] &= P_i, \\ [P_i, E] &= 0, & [J_i, E] &= 0, & [N_i, N_j] &= -\epsilon_{ijk} J_k, \\ [J_i, P_j] &= \epsilon_{ijk} P_k, & [J_i, N_j] &= \epsilon_{ijk} N_k, & [N_i, P_j] &= \delta_{ij} E. \end{aligned} \quad (2.35)$$

$K^i$  satisface las mismas relaciones de paréntesis de Poisson que  $N^i$ . Como  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{S}$  y  $\Sigma$  están definidos completamente en términos de  $E$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{J}$  o  $\mathbf{N}$ , sus relaciones de paréntesis de Poisson pueden ser obtenidas usando (2.35)

$$[P_i, q_j] = g_{ij} = [P_i, X_j], \quad (2.36)$$

$$[S_i, P_j] = 0 = [\Sigma_i, P_j]. \quad (2.37)$$

La primera relación expresa el hecho que  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{X}$  son vectores de posición y la segunda relación expresa que las cantidades  $\mathbf{S}$  y  $\Sigma$  son vectores independientes de la elección del origen.

Los paréntesis de Poisson con  $E$  proporcionan las derivadas temporales

$$[q_i, E] = \frac{P_i}{E} = [X_i, E], \quad [S_i, E] = 0 = [\Sigma_i, E]. \quad (2.38)$$

Las relaciones con  $\mathbf{J}$  expresan el hecho que  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{S}$  y  $\Sigma$  se transforman como vectores bajo rotaciones

$$\begin{aligned} [J_i, q_j] &= \epsilon_{ijk} q_k & [J_i, S_j] &= \epsilon_{ijk} S_k \\ [J_i, X_j] &= \epsilon_{ijk} X_k & [J_i, \Sigma_j] &= \epsilon_{ijk} \Sigma_k \end{aligned} \quad (2.39)$$

Las relaciones de Poisson que involucran unicamente componentes de  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{S}$  son

$$[q_i, q_j] = -\epsilon_{ijk} \frac{S_k}{E^2} \quad (2.40)$$

$$[S_i, q_j] = g_{ij} \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{P}}{E^2} + \frac{S_i P_j}{E^2} \quad (2.41)$$

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} (S_k - \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{P}}{E^2} P_k) = \epsilon_{ijk} m^2 \frac{\Sigma_k}{E^2} \quad (2.42)$$

Las relaciones análogas para  $\mathbf{X}$  y  $\Sigma$  son

$$[X_i, X_j] = \epsilon_{ijk} \frac{S_k}{m^2} \quad (2.43)$$

$$[\Sigma_i, X_j] = -g_{ij} \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{P}}{m^2} - \frac{S_i P_j}{m^2} \quad (2.44)$$

$$[\Sigma_i, \Sigma_j] = \epsilon_{ijk} (\Sigma_k - \frac{\Sigma \cdot \mathbf{P}}{m^2} P_k) = \epsilon_{ijk} E^2 \frac{S_k}{m^2} \quad (2.45)$$

En los paréntesis de Poisson (2.40) y (2.43) se observa la propiedad de no conmutatividad proporcional al momento angular intrínseco (comparar con la ecuación (2.12)).

Los paréntesis de Poisson de  $\mathbf{X}$  con  $\mathbf{N}$  son características de las coordenadas de una línea mundo definida de manera invariante

$$[X_i, N_j] = \frac{P_i}{E} X_j = \dot{X}_i X_j, \quad (2.46)$$

relación que coincide con la ecuación (1.38).

Las respectivas relaciones de  $\mathbf{q}$  con  $\mathbf{N}$  no son de esta forma de acuerdo con el hecho que la línea-mundo definida por  $\mathbf{q}$  no es independiente del sistema de coordenadas con respecto al cual se define

$$[q_i, N_j] = \frac{P_i}{E} q_j - \epsilon_{ijk} \frac{S_k}{E} = \dot{q}_i q_j - \epsilon_{ijk} \frac{S_k}{E}. \quad (2.47)$$

Para que (2.47) sea igual a (2.46) se requiere que  $\mathbf{S}$  sea cero con lo cual  $\mathbf{q}$  sería igual a  $\mathbf{X}$ .

### 2.3. No conmutación y su relación con el momento angular intrínseco

En las ecuaciones (2.12), (2.41) y (2.44) de los ejemplos presentados anteriormente aparece de manera natural la propiedad de no conmutatividad dependiente del momento angular intrínseco, la cual salvo constantes relativas a la hermiticidad y elección de unidades, tiene la forma general

$$[x_i, x_j] = -\epsilon_{ijk} \frac{1}{H^2} S_k. \quad (2.48)$$

La dependencia del momento angular intrínseco asegura que esta no conmutatividad es independiente del SI con respecto al cual están definidos los operadores de posición. De esta relación general se observa que, excepto para partículas con espín cero, no se puede definir la noción de posición que satisfaga los requerimientos de la teoría relativista de manera análoga a la contraparte newtoniana, esto, porque no es posible obtener una definición del centro de masa que sea covariantemente relativista y que posea la propiedad que sus componentes en distintas direcciones conmuten. Este hecho tiene una implicación no deseable en la definición del centro de masa, debido al hecho que inicialmente se considera un conjunto de partículas simples cuyos operadores de posición conmutan, pero al considerar el sistema compuesto por este conjunto de partículas, las componentes del operador de posición del centro de masa

dejan de conmutar, lo que indica que es necesario conocer por anticipado si el sistema dinámico considerado es simple o compuesto para saber que álgebra de Lie satisfacen sus componentes.

Los paréntesis de Poisson (2.40) y (2.43), sugieren que al pasar al caso cuántico por medio del principio de correspondencia, los conmutadores de los operadores de posición correspondientes serán también distintos de cero. El hecho de que las componentes de los operadores de posición no conmuten conduce a una incertidumbre de orden  $\hbar/mc$  en su medición simultánea, por lo que ya no puede hablarse de puntos de la variedad 4-dimensional asociada con el espacio-tiempo, ya que éstos se vuelven difusos.

Esta no conmutación no es debida a efectos de gravedad cuántica ya que fueron obtenidos en el espacio de Minkowski. En principio podría pensarse que está relacionada con el hecho de que para tener un estado localizado es necesario confinar las partículas dentro de una región finita, lo cual conduce a una incertidumbre en la energía cinética de las partículas, ya que esto requiere una barrera de potencial infinita y por lo tanto una gran cantidad de energía, lo cual ocasiona la creación de pares. Pero esta relación no es tan directa debido a que para el caso sin espín las componentes del centro de masa si conmutan, siendo posible tener una localización exacta, por lo que la creación de pares a causa del confinamiento parece no influir.

Esta no conmutatividad parece reflejar el hecho que el sistema dinámico considerado no es puntual, sino más bien extendido en el espacio. Por ejemplo, considerando un sistema dinámico con momento angular  $S_z \neq 0$ , las relaciones de conmutación del tipo (2.48), indican que no puede ser localizado exactamente en el plano  $x - y$ , sino en una vecindad finita del mismo.

En los sistemas clásicos newtonianos, aún los sistemas extendidos tienen la propiedad que las coordenadas de sus centros de masa conmutan, lo cual es debido a que poseen la propiedad que todo el sistema actúa exactamente como si estuviese localizado en el centro de masa, propiedad que no comparten los sistemas relativistas. Esto parece indicar que la incertidumbre en la localización del centro de masa refleja la ausencia de una posición promedio con localización exacta, y es por lo tanto es un efecto puramente relativista.

La relevancia de este hecho en aspectos de gravedad cuántica reside en el hecho de intentar definir un análogo cuántico de las geodésicas que siguen las partículas puntuales en el caso relativista clásico. Debido a que en general una partícula cuántica está dispersa en el espacio, es deseable asignarle alguna posición promedio con la esperanza de que siga una "geodésica" apropiadamente definida. Teniendo en cuenta la ausencia de una posición promedio totalmente definida como consecuencia de la ecuación (2.48), en el caso cuántico a lo más que se puede aspirar, es a tener un

posición promedio con una extensión en el espacio en una región del orden de (2.48). Como se mencionó anteriormente, esta relación de no conmutatividad no involucra efectos gravitacionales, por lo que está presente la cuestión que si esta propiedad se mantiene aun para el caso de espacios con curvatura y si es así de qué manera se ve afectada. Una manera de estudiar si existe o no esta relación se presenta en los dos siguientes capítulos.

# Capítulo 3

## Operadores covariantes de posición

Empleando el método de la forma instantánea definida en el artículo de Dirac [7] y siguiendo el procedimiento expuesto en el artículo de Jordan y Mukunda [16], en este capítulo se obtienen las representaciones unitarias irreducibles del grupo de Poincaré y los operadores de posición correspondientes. El procedimiento consiste en:

1. Empleando el álgebra de Poincaré se construyen sus generadores en términos de las variables  $q_i$  y  $p_j$  para el caso de partículas sin espín.
2. Se considera el caso de una partícula con espín, y se representan los generadores en términos de  $q_i$ ,  $p_j$  y  $S_k$ , donde los  $S_k$  satisfacen el álgebra de rotaciones.
3. Se consideran también antipartículas introduciendo las variables  $\rho$  y se construyen nuevamente los generadores que involucran  $q_i$ ,  $p_j$ ,  $S_k$  y  $\rho_l$ .
4. Se construyen los operadores de posición correspondientes para cada caso a partir de las relaciones de conmutación que debe satisfacer el operador de posición con los generadores del álgebra de Poincaré.
5. Se calculan las relaciones de conmutación de los operadores de posición obtenidos.

Como se verá en las siguientes secciones, los operadores de posición para el caso de partículas con espín poseen la propiedad de no conmutatividad, por lo que el objetivo de esta construcción de los generadores del álgebra de Poincaré y operadores de posición, es extender estos resultados para el caso de espacio de de-Sitter, el cual posee curvatura constante, y con base en esta generalización estudiar si los nuevos operadores de posición poseen esta propiedad, o si ésta se ve modificada de alguna forma por la curvatura del espacio.

### 3.1. Partículas sin espín

Considerando primero el caso de partículas con masa positiva  $m$  y espín cero, de acuerdo a lo expuesto en el capítulo 3, se necesitan operadores hermíticos  $H$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{K}$  que cumplan el álgebra de Poincaré (1.23):

$$\begin{aligned} [P_i, P_j] &= 0, & [J_i, J_j] &= \epsilon_{ijk} J_k, & [K_i, H] &= P_i, \\ [P_i, H] &= 0, & [J_i, H] &= 0, & [K_i, K_j] &= -\epsilon_{ijk} J_k, \\ [J_i, P_j] &= \epsilon_{ijk} P_k, & [J_i, K_j] &= \epsilon_{ijk} K_k, & [K_i, P_j] &= \delta_{ij} H. \end{aligned}$$

Sean  $q_\mu$  las cuatro coordenadas de un punto en la línea mundo de una partícula y  $p_\mu$  sus momentos conjugados, tales que

$$[q_\mu, q_\nu] = 0, \quad [p_\mu, p_\nu] = 0, \quad [p_\mu, q_\nu] = g_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Las coordenadas  $q_\mu$  cambian bajo transformaciones infinitesimales del sistema inercial de la manera dada en la ecuación (1.2)

$$q'_\mu = q_\mu + a_\mu + b_\mu{}^\nu q_\nu.$$

Con base en esto se construyen los operadores.

De acuerdo con (1.21) la función generadora para traslaciones es  $G_P = -a^\nu P_\nu$ , entonces para  $\mathbf{P}$  se tiene que

$$q'_\mu = (1 - a^\nu P_\nu) \triangleright q_\mu.$$

Comparando con la relación (1.2)

$$q'_\mu = q_\mu + g_{\mu\nu} a^\nu,$$

se obtiene que

$$P_\mu = -\frac{\partial}{\partial q_\mu} = p_\mu, \quad (3.2)$$

entonces

$$H = p_0, \quad P_i = p_i. \quad (3.3)$$

Para  $M$ ,  $G_M = \frac{1}{2} b^{\mu\nu} M_{\mu\nu}$ , entonces

$$q'_\rho = (1 + \frac{1}{2} b^{\mu\nu} M_{\mu\nu}) \triangleright q_\rho,$$

y de (1.2)

$$q'_\rho = q_\rho + b_\rho{}^\mu q_\mu = q_\rho - g_{\rho\nu} b^{\mu\nu} q_\mu,$$

y del hecho que  $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$  se tiene finalmente que

$$M_{\mu\nu} = q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu. \quad (3.4)$$

Entonces

$$J_{ij} = q_i p_j - q_j p_i, \quad K_i = q_i p_0 - q_0 p_i. \quad (3.5)$$



### 3.1.1. La forma instantánea

Generalmente en dinámica se trabaja con variables dinámicas referidas a condiciones físicas en cierto instante del tiempo, por ejemplo, las coordenadas y el momento en determinado instante. En el contexto relativista 4-dimensional un instante es la superficie  $q_0 = t$ . El instante más simple referido al sistema de coordenadas  $q$  está dado por la ecuación

$$q_0 = 0. \quad (3.6)$$

La consecuencia de trabajar con variables dinámicas que se refieran a condiciones físicas en este instante es que serán más simples las cantidades fundamentales asociadas con transformaciones de las coordenadas que dejan invariante el instante, esto es,  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{J}$ . Las restantes que involucran transformaciones de  $q_0$ , es decir,  $H$  y  $\mathbf{K}$ , en general no serán tan simples. De esta manera se obtiene una forma asociada con el subgrupo del grupo de Poincaré que deja invariante el instante, llamada *forma instantánea* [7]. Dado que  $q_0$  ha sido fijado es necesario modificar las expresiones para las diez cantidades fundamentales de tal forma que se elimine  $p_0$  en ellas y que sigan cumpliendo el álgebra de Poincaré. Esto se puede lograr sumándole a los generadores múltiples del casimir del álgebra,  $p^\sigma p_\sigma - m^2$ , donde  $m$  es una constante

$$\begin{aligned} P_\mu &= p_\mu + \lambda_\mu (p^\sigma p_\sigma - m^2), \\ M_{\mu\nu} &= q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu + \lambda_{\mu\nu} (p^\sigma p_\sigma - m^2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

con  $\lambda_{\mu\nu} = \lambda_{\nu\mu}$ . Los coeficientes  $\lambda_\mu$  y  $\lambda_{\mu\nu}$  son funciones de los  $q_\mu$  y los  $p_\mu$  que son bien comportadas cuando  $p^\sigma p_\sigma = m^2$  con  $p_0 > 0$ . La conmutación de casimir con  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{M}$ , asegura que las expresiones modificadas (3.7) seguirán satisfaciendo el algebra de Poincaré, salvo algunos múltiplos de  $p^\sigma p_\sigma - m^2$  independientes de  $p_0$ , los cuales con una elección apropiada de los  $\lambda_\mu$  y  $\lambda_{\mu\nu}$  deberán anularse para tener una solución aceptable.

Como  $P_i$  y  $M_{ij}$  no involucran  $p_0$ , se tiene que  $\lambda_i = 0$  y  $\lambda_{ij} = 0$ , entonces únicamente se deben modificar

$$\begin{aligned} P_0 &= p_0 + \lambda_0 (p_0^2 - (p_i^2 + m^2)), \\ M_{i0} &= q_i p_0 + \lambda_{i0} (p_0^2 - (p_i^2 + m^2)). \end{aligned}$$

Factorizando  $(p_0^2 - (p_i^2 + m^2))$  como  $(p_0 - (p_i^2 + m^2)^{1/2}) (p_0 + (p_i^2 + m^2)^{1/2})$  se ve que los  $\lambda$ s adecuados para eliminar  $p_0$  en ambas expresiones son

$$\lambda_0 = -\frac{1}{p_0 + \sqrt{p_0^2 + m^2}}, \quad \lambda_{i0} = -\frac{q_i}{p_0 + \sqrt{p_i^2 + m^2}}.$$

Con esta elección de los  $\lambda_\mu$  y  $\lambda_{\mu\nu}$  la nueva forma de las cantidades fundamentales es

$$\begin{aligned} P_0 &= \sqrt{p_i^2 + m^2}, & M_{i0} &= q_i \sqrt{p_i^2 + m^2}, \\ P_i &= p_i, & M_{ij} &= q_i p_j - q_j p_i. \end{aligned}$$

Para el caso cuántico, la forma canónica de los operadores correspondientes a estas cantidades fundamentales es:

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, & \mathbf{K} &= \frac{1}{2}(H\mathbf{q} + \mathbf{q}H), \\ \mathbf{P} &= \mathbf{p}, & \mathbf{J} &= \mathbf{q} \times \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{p}$  son un conjunto irreducible de operadores hermíticos que satisfacen las relaciones de conmutación (3.1). Salvo equivalencias unitarias, los operadores (3.8) son la única representación unitaria irreducible del grupo de Poincaré con masa positiva  $m$ , espín cero y energía positiva, por lo que siempre es posible transformar cualquier otra representación de  $H$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{K}$  por medio de una transformación unitaria, de manera que sean iguales a los generadores (3.8).

### 3.1.2. Operador de Posición para partículas sin espín

Si los operadores  $H$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{K}$  tienen la forma canónica (3.8), salvo equivalencias unitarias, la única solución para el operador  $\mathbf{x}$  de las ecuaciones (1.23) es la coordenada canónica  $\mathbf{q}$  [16], esto es,

$$\mathbf{x} = \mathbf{q}. \quad (3.9)$$

Por lo que el operador de posición para este caso tiene la propiedad que sus componentes conmutan

$$[x_i, x_j] = 0. \quad (3.10)$$

## 3.2. Partículas con espín

Considerando una partícula simple de masa positiva  $m$  y espín entero o semientero  $s$ , en este caso hay que encontrar los operadores hermíticos  $H$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{K}$  que generan la representación unitaria irreducible del grupo de Poincaré caracterizado por tener masa  $m$ , espín  $s$  y energía positiva.

El operador de rotaciones espaciales  $J$  involucra tanto momento angular  $\mathbf{L}$  en el espacio físico, como momento angular  $\mathbf{S}$  en el espacio interno, por lo que el momento angular total será

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{S}.$$

En forma canónica

$$\mathbf{J} = \mathbf{q} \times \mathbf{p} + \mathbf{S}. \quad (3.11)$$

donde las relaciones de conmutación de las componentes de  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{S}$  son las siguientes

$$\begin{aligned} [q_i, q_j] &= 0 = [p_i, p_j] \\ [q_i, S_j] &= 0 = [p_i, S_j] \\ [p_i, q_j] &= g_{ij} \\ [S_i, S_j] &= \epsilon_{ijk} S_k \end{aligned} \quad (3.12)$$

Debido a que las traslaciones conmutan los operadores de traslaciones espaciales  $\mathbf{P}$  y temporales  $H$  mantienen la misma forma que para el caso sin espín

$$H = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}. \quad (3.13)$$

Para obtener el operador de transformación de Lorentz especial  $\mathbf{K}$  es necesario considerar el hecho de que la medición del espín se realiza mediante su proyección en los ejes de un sistema inercial y por lo tanto depende del sistema desde el cual se mide. Para calcular la parte  $\mathbf{K}_s$  del operador  $\mathbf{K}$  que se debe a la descripción del espín, se sigue un procedimiento cuya forma general se presentará en el capítulo siguiente. Se consideran dos sistemas inerciales  $S_1$  y  $S_2$ , los cuales difieren por un transformación de Lorentz especial infinitesimal en la dirección  $\hat{n}$  por un parámetro  $\eta^1$  y desde los cuales se observa una partícula con rapidez  $\eta_1$  en la dirección  $\hat{n}_1$  y  $\eta_2$  en la dirección  $\hat{n}_2$  respectivamente, como se muestra en la figura 3.1.

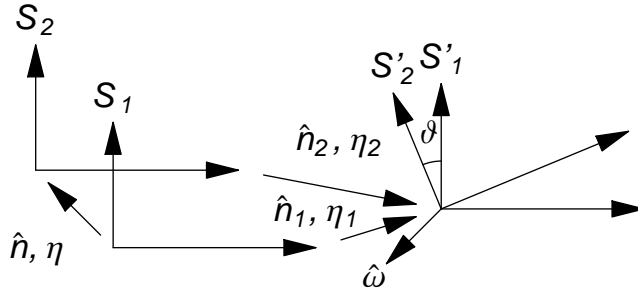


Figura 3.1: Transformación del sistema de referencia en el espacio del espín

El resultado de realizar un transformación de Lorentz especial a  $S_1$  en la dirección  $\hat{n}_1$  por un parámetro  $\eta_1$  para llevarlo a  $S'_1$  en el cual la partícula está en reposo, seguido

<sup>1</sup>Se emplea la convención que el parámetro de la transformación  $\eta$  contiene implícitamente el factor  $i$ , esto es,  $i\eta \rightarrow \eta$  con lo que  $e^{i\eta_i \hat{n}_i \cdot \frac{\sigma}{2}} \rightarrow e^{\eta_i \hat{n}_i \cdot \frac{\sigma}{2}}$ .

de una rotación espacial alrededor de la dirección  $\hat{\omega}$  por un parámetro  $\vartheta$  para ir de  $S'_1$  a  $S'_2$  y finalmente otro transformación de Lorentz especial en la dirección  $\hat{n}_2$  por un parametro  $-\eta_2$  para regresar de  $S'_2$  a  $S_2$ , debe ser igual a realizar un transformación de Lorentz especial en la dirección  $\hat{n}$  por un parámetro  $\eta$  para ir directamente de  $S_1$  a  $S_2$ . En esta composición no es necesario incluir traslaciones para llevar a la partícula a que coincida con el origen de cada sistema inercial porque las traslaciones conmutan y esto se puede hacer libremente. Entonces la composición completa en el espacio interno del espín es

$$e^{-\eta_2 \hat{n}_2 \cdot \frac{\hat{\sigma}}{2}} e^{\vartheta \hat{\omega} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{2}} e^{\eta_1 \hat{n}_1 \cdot \frac{\hat{\sigma}}{2}} = e^{\eta \hat{n} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{2}}.$$

A cada transformación  $e^{\frac{\eta_i \hat{n}_i \cdot \sigma}{2}}$  se le asocia un vector que tiene por magnitud la tangente hiperbólica de un medio de la rapidez y por dirección la del vector unitario correspondiente, esto es

$$\vec{n}_i = \tanh\left(\frac{\eta_i}{2}\right) \hat{n}_i.$$

Con esta asociación se encuentra que la composición de 2 transformaciones en las direcciones  $\vec{n}_i$  y  $\vec{n}_j$  esta dada por

$$\vec{n}_i \circ \vec{n}_j = \frac{\vec{n}_i + \vec{n}_j + i \vec{n}_i \times \vec{n}_j}{1 + \vec{n}_i \cdot \vec{n}_j}.$$

$\vec{n}_2$  difiere infinitesimalmente de  $\vec{n}_1$  por un vector  $\vec{u}$ , esto es,  $\vec{n}_2 = \vec{n}_1 + \epsilon \vec{u}$ , con  $\epsilon$  una cantidad infinitesimal. También  $\vartheta$  es de orden  $\epsilon$ , esto es,  $\vartheta = i \epsilon \omega$ . Entonces el vector asociado con la rotación es

$$\vec{\Omega} = \tanh\left(i\epsilon \frac{\omega}{2}\right) \hat{\omega} \simeq i\epsilon \vec{\omega},$$

donde  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \omega \hat{\omega}$ . Tomando en cuenta lo anterior, a primer orden en  $\epsilon$  se obtiene

$$\vec{n}_2 \circ (\vec{\Omega} \circ \vec{n}_1) = \epsilon \left( \frac{2 \vec{n}_1 \times \vec{\omega} - \vec{u}}{1 - \vec{n}_1^2} + i \frac{-2 (\vec{\omega} \cdot \vec{n}_1) \vec{n}_1 + \vec{\omega} (1 + \vec{n}_1^2) - \vec{u} \times \vec{n}_1}{1 - \vec{n}_1^2} \right).$$

La parte imaginaria de esta composición debe ser cero, condición con la cual se obtiene que

$$2 (\vec{\omega} \cdot \vec{n}_1) \vec{n}_1 - \vec{\omega} (1 + \vec{n}_1^2) = \vec{n}_1 \times \vec{u}.$$

La parte real debe ser igual a la transformación directa para ir de  $S_1$  a  $S_2$ . Teniendo en cuenta que  $\eta$  es infinitesimal, a primer orden en  $\epsilon$

$$\tanh\left(\frac{\eta}{2}\right) \approx \frac{\eta}{2} = \frac{\epsilon a}{2}.$$

Igualando esto a la parte real se tiene

$$2 \vec{n}_1 \times \vec{\omega} - \vec{u} = (1 - \vec{n}_1^2) \frac{\vec{a}}{2}.$$

Multiplicando por  $\vec{n}_1$  se tiene

$$2\vec{n}_1 \times (\vec{n}_1 \times \vec{\omega}) - \vec{n}_1 \times \vec{u} = (1 - \vec{n}_1^2)(\vec{n}_1 \times \frac{\vec{a}}{2}).$$

Empleando la identidad  $\vec{n}_1 \times (\vec{n}_1 \times \vec{\omega}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{n}_1)\vec{n}_1 - \vec{n}_1^2 \vec{\omega}$  y sustituyendo el resultado de la parte imaginaria finalmente se tiene

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{n}_1 \times \vec{a}}{2}.$$

Este es el parámetro de la rotación por la cual difieren  $S'_1$  y  $S'_2$ . La rotación total está dada por  $\vec{\omega} \cdot \mathbf{J}$  y la parte correspondiente al espacio interno es

$$(S'_2) = (1 + \epsilon \vec{n}_1 \times \vec{a} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{2})(S'_1).$$

Usando la ciclicidad del triple producto escalar  $\vec{n}_1 \times \vec{a} \cdot \mathbf{S}$  se puede escribir como  $-\vec{a} \cdot \vec{n}_1 \times \mathbf{S}$  donde  $\mathbf{S} = \frac{\hat{\sigma}}{2}$ .

La transformación generada por el operador  $\mathbf{K}_s$  por un parametro  $\epsilon a$  debe ser igual a la generada por  $\vec{\omega}$  con el mismo parámetro  $\epsilon a$

$$1 - \epsilon \vec{a} \cdot \mathbf{K}_s = 1 - \epsilon \vec{a} \cdot \vec{n}_1 \times \mathbf{S}.$$

Por lo tanto

$$\mathbf{K}_s = \vec{n}_1 \times \mathbf{S}.$$

De la relaciones  $p = m \sinh(\eta_1)$ ,  $E = m \cosh(\eta_1)$ , se tiene que

$$\tanh\left(\frac{\eta_1}{2}\right) = \frac{\sinh(\eta_1)}{\cosh(\eta_1) + 1} = \frac{p}{E + m},$$

por lo que

$$\vec{n}_1 = \frac{p}{E + m} \hat{n}_1,$$

reemplazando  $E$  por  $H$ ,  $\mathbf{K}_s$  queda como

$$\mathbf{K}_s = \frac{1}{H + m} \mathbf{p} \times \mathbf{S}. \quad (3.14)$$

Con este resultado, la forma canónica de los generadores de la representación del grupo de Poincaré es

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, & \mathbf{K} &= \frac{1}{2}(H\mathbf{q} + \mathbf{q}H) + \frac{1}{H + m} \mathbf{p} \times \mathbf{S}, \\ \mathbf{P} &= \mathbf{p}, & \mathbf{J} &= \mathbf{q} \times \mathbf{p} + \mathbf{S}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Estos generadores están definidos en un espacio de Hilbert que es el producto directo de las funciones de onda en el espacio de momentos en el cual  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{p}$  son irreducibles, y de vectores de  $2s+1$  componentes en el espacio del espín sobre los cuales  $\mathbf{S}$  genera una representación irreducible del grupo de rotaciones, por lo que la función de onda de la partícula es de la forma

$$\psi = \psi_{q,p} \otimes \psi_S$$

Esta representación está caracterizada por el número

$$s(s+1) = S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2.$$

Salvo equivalencias unitarias, los generadores (3.15) son la única representación irreducible del grupo de Poincaré con masa positiva  $m$ , espín entero o semientero  $s$  y energía positiva, debido a esto siempre es posible transformar cualquier otra representación de  $H$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{K}$  para que tenga la forma canónica (3.15).

### 3.2.1. Operador de posición para partículas con espín

Si  $H$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{K}$  tienen la forma canónica (3.15) la solución más general para las ecuaciones (1.29) para operadores hermíticos  $\mathbf{x}$  que incluyen a lo más términos de primer orden del operador  $\mathbf{S}$ , es [16]

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} - a \frac{1}{H(H+m)} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}) \mathbf{p} + a \mathbf{S} - \frac{1}{m(H+m)} (\mathbf{p} \times \mathbf{S}), \quad (3.16)$$

donde  $a$  es un número real. Para cualquier valor de  $a$  los operadores  $\mathbf{x}$  satisfacen las ecuaciones (1.29) independientemente del valor de  $\mathbf{s}$ . Para que este operador tenga la paridad correcta, es decir, que se transforme correctamente bajo inversión espacial, se requiere que  $a = 0$ . Las relaciones de conmutación de las distintas componentes de este operador son

$$[x_i, x_j] = i \frac{(1 + a^2 m^2)}{Hm} \epsilon_{ijk} \left( S_k + \frac{1}{m(H+m)} \mathbf{p} \cdot \mathbf{S} p_k \right), \quad (3.17)$$

en donde se observa que para valores positivos de  $\mathbf{s}$  no existe valor real de  $a$  para el cual sus componentes conmutan, entonces

$$[x_i, x_j] \neq 0 \quad \forall \mathbf{s}.$$

Entonces para partículas con espín distinto de cero y con la representación canónica (3.15) no existe solución para las ecuaciones (1.29) para operadores  $\mathbf{x}$  que tengan a lo más términos lineales de  $S$ , tal que sus componentes conmuten.

### 3.3. Partículas y antipartículas

Para el caso de partículas y antipartículas de masa  $m$  y espín  $s$ , donde  $s$  tiene valores enteros o semienteros, una representación del álgebra de Poincaré, consiste en operadores hermíticos  $H$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{K}$  que generan una suma directa de dos representaciones unitarias irreducibles del grupo de Poincaré, ambas con masa  $m$  y espín  $s$ , pero una con energía positiva y otra con energía negativa. La forma canónica de estos operadores es:

$$H = \rho_3 \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \rho_3 h, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{q} \times \mathbf{p} + \mathbf{S}, \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{1}{2}(H\mathbf{q} + \mathbf{q}H) + \rho_3 \frac{1}{\rho_3 H + m} \mathbf{p} \times \mathbf{S}, \quad (3.21) \\ &= \frac{1}{2}\rho_3(h\mathbf{q} + \mathbf{q}h) + \rho_3 \frac{1}{h + m} \mathbf{p} \times \mathbf{S}, \end{aligned}$$

donde  $h = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  y  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{S}$  y  $\rho$  son un conjunto irreducible de operadores hermíticos que satisfacen las relaciones de conmutación y anticonmutación

$$\begin{aligned} [q_i, q_j] = 0 &= [p_i, p_j], & [p_i, q_j] &= g_{ij}, \\ [q_i, S_j] = 0 &= [p_i, S_j], & [S_i, S_j] &= \epsilon_{ijk} S_k, \\ [q_i, \rho_j] = 0 &= [p_i, \rho_j], & [S_i, \rho_j] &= 0, \\ [\rho_i, \rho_j] &= 2\epsilon_{ijk} \rho_k, & \{\rho_i, \rho_j\} &= 2\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Estos operadores están definidos en un espacio de Hilbert el cual es el producto directo de las funciones de onda en el espacio de momentos en el cual  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{p}$  son irreducibles, del espacio interno del espín constituido por vectores de espín de  $2s + 1$  componentes en los cuales  $\mathbf{S}$  genera una representación irreducible del grupo de rotación caracterizado por el número  $s(s+1) = \mathbf{S}^2$  y del espacio interno de partículas-antipartículas constituido por vectores de dos componentes en los cuales  $\rho$  son el conjunto irreducible de matrices de Pauli en el cual  $\rho_3$  es diagonal:

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

entonces la función de onda tiene la forma

$$\psi = \psi_{q,p} \otimes \psi_s \otimes \psi_\rho. \quad (3.22)$$

En este caso la función de onda tiene la característica que tiene el doble del numero de componentes para permitir estados de energía negativa.

El hecho de que dentro de equivalencia unitaria solo existe una representación unitaria irreducible del grupo de Poincaré para masa  $m$ , espín  $s$  y energía positiva (negativa) implica que las formas (3.18)-(3.21) para  $H$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{K}$  son únicas como función de  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{S}$ . La dependencia de los operadores  $\rho$  solo se manifiesta mediante la introducción de un signo menos como factor en  $H$  y en  $\mathbf{K}$  para los estados de antipartículas.

### 3.3.1. Operador de posición para partículas y antipartículas

A diferencia del caso sin antipartículas, cuando se incluyen éstas, existe un conjunto de operadores de posición cuyas componentes conmutan.

Dicho conjunto de operadores es:

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \rho_2 A p + \rho_2 \frac{1}{h} \mathbf{S} - \rho_2 \frac{1}{h^2(h+m)} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}) \mathbf{p} + \frac{1}{h(h+m)} \mathbf{p} \times \mathbf{S}, \quad (3.23)$$

donde  $A$  es una función arbitraria de  $\mathbf{p}^2$ . Con las formas canónicas (3.18)-(3.21), los operadores  $\mathbf{x}$  dados por (3.23) son la solución más general de las ecuaciones (1.29) para todos los valores de  $s$ . Para el caso  $A = 0$  este operador de posición resulta ser el correspondiente de la ecuación de Dirac con  $\alpha = 2\rho_1 \mathbf{S}$  y  $\beta = \rho_3$ . De manera más específica es la representación Foldy-Wouthuysen del operador  $\mathbf{x}$  de la ecuación de Dirac de acuerdo con las formas canónicas (3.18)-(3.21) y es el único que se reduce a la coordenada canónica  $\mathbf{x} = \mathbf{q}$  cuando  $\mathbf{S} = 0$ . Para ver claramente que (3.23) con  $A = 0$  es el operador de posición de la ecuación Dirac, es necesario aplicarle la transformación inversa de Foldy-Wouthuysen, la cual es una transformación unitaria que lleva el operador (3.23) a ser la coordenada canónica  $\mathbf{x} = \mathbf{q}$ , mientras que no cambia las formas canónicas de  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{J}$  dadas por (3.19)-(3.20) respectivamente. Dicho operador unitario es  $e^{iV}$  donde el operador  $V$  es

$$V = -\rho_2 p^{-1} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}) \tan^{-1}(p/m),$$

y cumple

$$\begin{aligned} e^{iV} \mathbf{x} e^{-iV} &= \mathbf{q}, \\ e^{iV} \mathbf{p} e^{-iV} &= \mathbf{p}, \\ e^{iV} (\mathbf{q} \times \mathbf{p} + \mathbf{S}) e^{-iV} &= \mathbf{q} \times \mathbf{p} + \mathbf{S}, \end{aligned}$$

demostrando efectivamente que (3.23) es equivalente al operador de la ecuación de Dirac cuando  $A = 0$ .

Entonces para partículas sin espín, el único operador de posición que satisface las ecuaciones (1.29) es  $\mathbf{x} = \mathbf{q}$  y tiene la propiedad que sus componentes conmutan.



---

Cuando se considera el caso de partículas con espín existe un conjunto de operadores de posición, pero a excepción del caso para  $S = 0$ , estos operadores carecen de la propiedad que sus componentes conmuten, lo cual es acorde a lo expuesto en el capítulo 4. Al incluir en la teoría estados de energía negativa, se obtiene un conjunto de operadores de posición cuyas componentes conmutan, que para el caso de espín  $1/2$  resulta ser el operador de posición de la ecuación de Dirac, pero de acuerdo a lo visto en la sección 4.1, si se requiere un operador que no mezcle los subespacios de energías positivas y negativas, se puede emplear la parte par del operador antes mencionado, el cual presenta también la propiedad de no conmutatividad. En el siguiente capítulo se extienden estos resultados para cada caso en el espacio de de-Sitter con el fin de estudiar si existe alguna posible influencia de la curvatura sobre estos.



# Capítulo 4

## Espacio de de-Sitter

Con base en lo expuesto en el capítulo 2, referente al hecho de que las relaciones de no conmutación fueron obtenidas en el espacio de Minkowski y por lo tanto no están relacionadas con efectos gravitacionales, es de interés investigar si la curvatura del espacio tiene algún efecto sobre estas relaciones, lo cual se puede hacer mediante la generalización de los resultados presentados en el capítulo anterior para el espacio de de-Sitter, el cual posee curvatura constante.

Esta generalización se realiza siguiendo el mismo procedimiento del capítulo anterior, esto es, a partir del álgebra de de-Sitter, se obtienen las representaciones de los generadores para cada uno de los tres casos, las cuales bajo las condiciones apropiadas deben reducirse a los generadores del álgebra de Poincaré.

Se imponen las relaciones que debe cumplir el operador de posición con los generadores del álgebra de de-Sitter. Este paso no es sencillo, porque los momentos en el espacio de de-Sitter no conmutan, y por este motivo no es obvio cuál debe ser la relación correspondiente a la relación de Heisenberg. Finalmente se calculan las representaciones de los operadores de posición correspondientes para cada caso y se obtienen las relaciones de conmutación que éstos satisfacen.

### 4.1. Espacio de de-Sitter

El espacio de-Sitter puede ser visualizado como el hiperboloide encajado en un espacio de cinco dimensiones [17], descrito por las cinco coordenadas,  $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4$ , relacionadas por la ecuación

$$-q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = R^2, \quad (4.1)$$

donde  $R$  se llama el radio de-Sitter. También a veces se emplea la notación  $t = q^0$ ,  $x = q^1$ ,  $y = q^2$ ,  $z = q^3$  y  $w = q^4$ . Este espacio se ilustra en la figura 4.1, en ésta, la

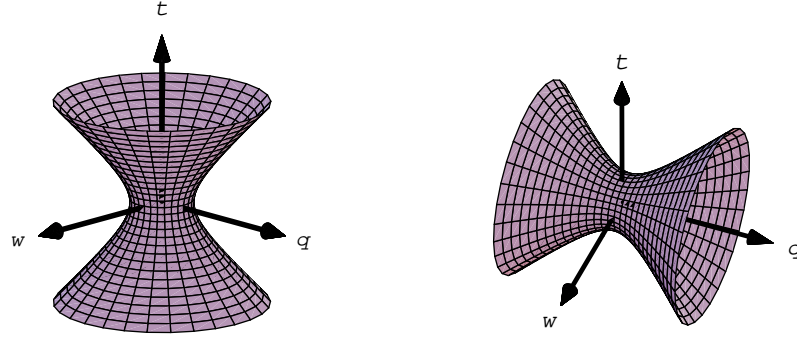


Figura 4.1: Espacios de de-Sitter y anti de-Sitter

dirección  $q$  representa las direcciones  $x, y, z$

La métrica del espacio plano 5-dimensional en el cual esta encajada es

$$ds^2 = dq_0^2 - dq_1^2 - dq_2^2 - dq_3^2 - dq_4^2. \quad (4.2)$$

Empleando notación tensorial, los índices son subidos y bajados mediante el tensor métrico

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1 \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu, \quad (4.3)$$

y su inverso  $g^{\mu\nu}$ . Para el caso del espacio de de-Sitter las letras griegas representan índices en el rango de 0 a 4 y las letras latinas en el rango de 1 a 4.

Para ver la conexión del espacio de de-Sitter con el espacio-tiempo usual de la relatividad especial es necesario considerar la pequeña región del polo alrededor del eje  $q_4$  de forma tal que  $q_0, q_1, q_2$  y  $q_3$  sean pequeños en comparación con  $R$  y  $q_4$  a primer orden es igual a  $R$ . En el límite cuando  $R$  tiende a infinito las coordenadas  $q_0, q_1, q_2$  y  $q_3$  se convierten en  $t, x, y$  y  $z$  del espacio-tiempo ordinario, siempre y cuando nos mantengamos en la pequeña región antes mencionada.

Se puede obtener un espacio similar llamado espacio de anti de-Sitter, si las coordenadas satisfacen

$$-q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 = -R^2. \quad (4.4)$$

La principal diferencia es que, mientras (4.1) representa un espacio que es infinito en la dirección temporal y finito en las direcciones espaciales, (4.4) representa un espacio que es finito en la dirección temporal e infinito en las espaciales. Es posible trabajar con ambos espacios si se trabaja con cinco coordenadas que satisfagan la ecuación simétrica

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = R^2, \quad (4.5)$$

lo cual es simplemente trabajar con una  $S^4$  (ver figura 4.2). En este caso la métrica es euclidiana. Para obtener el espacio (4.1) basta hacer que  $q_0$  sea imaginario puro y de la misma manera para el espacio (4.4) hacer que  $q_0$  y  $q_4$  sean imaginarios. Cualquiera

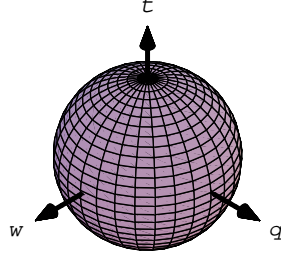


Figura 4.2: Esfera de-Sitter

conjunto de valores de las  $q_\mu$  que no satisfacen (4.5) determinan un punto fuera del espacio de de-Sitter, lo cual significa un punto fuera del espacio con significado físico. Por lo tanto cualquier función física dependiente de la posición tal como la función de onda de la teoría cuántica, será una función de las  $q_\mu$  que satisfacen (4.5). Debido a esto, en general no tendrá sentido diferenciar una función física con respecto a alguna de las  $q_\mu$ . El único proceso de diferenciación que tiene sentido aplicar a una función física es en la dirección a lo largo del espacio de de-Sitter. Los operadores que expresan tal diferenciación son de la forma

$$a_\mu \frac{\partial}{\partial q_\mu}, \quad (4.6)$$

donde las  $a_\mu$  son funciones de las coordenadas  $q_\mu$ , del punto en el cual se realiza la diferenciación, y que satisfacen

$$a_\mu q_\mu = 0. \quad (4.7)$$

Estos operadores se caracterizan por la propiedad que conmutan con el lado izquierdo de (4.5). Los más simples son

$$q_\mu \frac{\partial}{\partial q_\nu} - q_\nu \frac{\partial}{\partial q_\mu}, \quad (4.8)$$

que corresponden a rotaciones infinitesimales en el espacio de de-Sitter.

Un vector  $A_\mu$  en el espacio de de-Sitter tiene cinco componentes. La condición para que este vector represente alguna cantidad física es que su dirección esté en el espacio tangente al espacio de de-Sitter y por lo tanto

$$q_\mu A_\mu = 0, \quad (4.9)$$

donde  $q_\mu$  es el punto sobre el cual está localizado. De esta manera el número de componentes independientes del vector se reducen a cuatro, de manera que coincide con el número de componentes de un vector físico ordinario. Si las coordenadas  $q_\mu$  son  $(0, 0, 0, 0, R)$  entonces  $A_4 = 0$  y  $A_0, A_1, A_2, A_3$  son las componentes en el espacio-tiempo ordinario.

Cualquier ecuación tensorial del espacio-tiempo ordinario debe corresponder a una ecuación tensorial en el espacio de de-Sitter con respecto a los índices  $\mu$ . La condición para que la ecuación original sea invariante bajo el grupo de Poincaré (rotaciones y traslaciones en el espacio tiempo) corresponde a la condición que la nueva ecuación debe ser invariante bajo todas las rotaciones aplicadas a las cinco coordenadas  $q_\mu$ .

En la teoría cuántica del espacio de de-Sitter el momento y la energía de una partícula se expresan en forma de operador diferencial para ser aplicado sobre la función de onda como

$$p_\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_\mu}, \quad (4.10)$$

que representa un 5-vector que determina el momento y la energía de la partícula.

A partir del 5-vector de energía-momento (4.10) se puede definir el momento angular

$$M_{\mu\nu} = q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu, \quad (4.11)$$

donde  $q_i$  y  $p_j$  satisfacen las relaciones de conmutación

$$[q_\mu, q_\nu] = 0 = [p_\mu, p_\nu] \quad [p_\mu, q_\nu] = i\hbar g_{\mu\nu}. \quad (4.12)$$

Sus componentes son múltiplos de los operadores (4.8) y no involucran diferenciación en dirección fuera del espacio de de-Sitter. Por lo tanto el momento angular (4.11) es más fundamental que el momento lineal (4.10).

En la aproximación en la cual la coordenada  $q_4$  es a primer orden igual a  $R$  y las otras cuatro son mucho menores que ésta, es decir, en la vecindad del punto  $(0, 0, 0, 0, R)$ , es posible considerar dentro de las componentes del tensor de momento angular (4.11) a las componentes del momento lineal y de esta manera obtener un análogo del momento lineal en el espacio de de-Sitter más satisfactorio que el proporcionado en (4.10). En esta vecindad las componentes  $M_{4i}$ , salvo un factor  $R$ , son las componentes del 5-vector de energía-momento, las  $M_{ij}$  y  $M_{i0}$ , esto es,  $M_{4\mu} = RP_\mu$  con  $i, j = 1, 2, 3$ , son las componentes del momento angular ordinario y del centro de energía independiente del tiempo, respectivamente. Con esta consideración, la traslación en la dirección  $\mu$  es proporcional a una rotación en el plano que forman los ejes  $\hat{q}_\mu$  y  $\hat{q}_4$ , siendo la constante de proporcionalidad el inverso de del radio de de-Sitter  $R$ , esto es  $P_\mu = 1/R M_{4\mu}$ . Los generadores con  $\lambda = 1/R$  son

$$\begin{aligned} H &= \lambda M_{40} = \lambda(q_4 p_0 - q_0 p_4), & P_i &= \lambda M_{4i} = \lambda(q_4 p_i - q_i p_4), \\ K_i &= M_{i0} = q_i p_0 - q_0 p_i, & J_{ij} &= M_{ij} = q_i p_j - q_j p_i. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Siendo las traslaciones consideradas como rotaciones en el espacio de de-Sitter, estas ya no conmutan, satisfaciendo ahora el álgebra de de-Sitter, el cual en términos de  $H$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{K}$  esta dada por

$$\begin{aligned} [P_i, P_j] &= \epsilon_{ijk} \lambda^2 J_k, & [P_i, H] &= \lambda^2 K_i, & [J_i, H] &= 0, \\ [J_i, J_j] &= \epsilon_{ijk} J_k, & [J_i, P_j] &= \epsilon_{ijk} P_k, & [J_i, K_j] &= \epsilon_{ijk} K_k, \\ [K_i, H] &= P_i, & [K_i, K_j] &= -\epsilon_{ijk} J_k, & [K_i, P_j] &= \delta_{ij} H. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Cuando  $\lambda = 0$ , o equivalentemente, cuando  $R$  tiende a infinito, este álgebra se transforma en el álgebra de Poincaré.

Un invariante del álgebra de de-Sitter que se empleará para obtener las representaciones de los generadores es [18]

$$Q = 1/2 M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \quad (4.15)$$

## 4.2. Partículas sin espín en el espacio de de-Sitter

Para hallar un conjunto de operadores hermíticos que generan una representación irreducible del grupo de de-Sitter se procede de manera similar a la empleada en la sección 5.1.1 relativa a la forma instantánea.

Se elige  $q_0 = 0$  para trabajar con el instante más simple referido al sistema de coordenadas  $q$ . Con esta elección,  $p_0$  carece de significado físico por lo que es necesario eliminar en los generadores en los cuales interviene, es decir  $H$  y  $\mathbf{K}$ . Además es posible eliminar  $q_4$  de los generadores dados en (4.13) por medio de la ecuación (4.1), de la cual se tiene que

$$q_4 = \sqrt{R^2 - q^2},$$

donde  $q^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ . Sea  $f = \sqrt{1 - \lambda^2 q^2}$ , entonces

$$q_4 = \frac{f}{\lambda}. \quad (4.16)$$

Al eliminar  $q_4$  es necesario también eliminar  $p_4$ , lo cual es posible realizar proyectando la esfera  $S^4$  en el hiperplano formado por  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$ , con lo cual  $p_4 = -\frac{\partial}{\partial q_4} = 0$ , usando esto y sustituyendo (4.16) en la expresión para  $P_\mu$  de (4.13) se tiene que

$$H = f p_0, \quad P_i = f p_i. \quad (4.17)$$

De (4.13) se observa que la representación del generador de rotaciones espaciales  $\mathbf{J}$  sigue siendo  $J_i = (q \times p)_i$ .

Por otra parte, el casimir (4.15) puede ser escrito de la forma

$$\lambda^2 Q = H^2 - \mathbf{P}^2 + \lambda^2(\mathbf{K}^2 - \mathbf{J}^2). \quad (4.18)$$

Como  $\lambda^2 Q$  conmuta con cualquier generador, tiene eigenfunciones comunes con los demas generadores. Estas eigenfunciones son degeneradas y se caracterizan por el eigenvalor  $\mu^2$  resultante de aplicarles  $Q$ . Al aplicar  $Q$  a estas eigenfunciones nos mantenemos dentro del mismo conjunto de eigenfunciones con el mismo eigenvalor  $\mu$ . Despejando  $H$  del casimir se tiene que

$$H = \sqrt{\mathbf{P}^2 + \mu^2 + \lambda^2(\mathbf{K}^2 - \mathbf{J}^2)}. \quad (4.19)$$

Es importante hacer notar que  $\mu^2$  tiene una parte de orden  $\lambda^2$  por lo que se puede escribir como  $\mu^2 = m^2 + \lambda^2 \mu_1^2$

Sustituyendo la ecuación (4.17) en la (4.19) y empleando la identidad  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$ , se halla la relación para  $p_0$  en términos de las  $q_i$  y  $p_i$

$$p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \mu^2 - \lambda^2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})^2}. \quad (4.20)$$

Con esto se tiene el conjunto completo de los generadores

$$\begin{aligned} P_i &= f p_i, & H &= f p_0, \\ J_i &= (q \times p)_i, & K_i &= q_i p_0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

En el caso cuántico, los operadores que generan la representación unitaria del álgebra de de-Sitter son

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{1}{2}(f \mathbf{p} + \mathbf{p} f), & H &= \frac{1}{2}(f p_0 + p_0 f), \\ \mathbf{J} &= \mathbf{q} \times \mathbf{p}, & \mathbf{K} &= \frac{1}{2}(\mathbf{q} p_0 + p_0 \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Para el caso en el cual  $\lambda = 0$ , se obtiene,  $f = 1$  y  $p_0 = \sqrt{p^2 + m^2}$  con lo que se recupera el resultado obtenido en la sección 3.1.

### 4.3. Partículas con espín en el espacio de-Sitter

Para encontrar la representación de los operadores hermíticos  $H$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{K}$  en el caso en el que se considera el espín de las partículas en el espacio de-Sitter, se procede de



manera similar a la sección 3.2.

La descripción del espín depende del sistema de referencia (SR) con respecto al cual se le mide, porque esta medición se realiza mediante la proyección del momento angular sobre algún eje de dicho SR, por lo tanto es necesario especificar cuál SR se emplea para realizar dicha medición. Para esto se proporciona la secuencia de transformaciones que se deben aplicar al SR inicial, desde el cual la partícula tiene una posición y momento dados, para llevarlo a un sistema de referencia final, el cual tenga la característica de que la partícula esté en reposo y en el origen. De esta manera se establece cómo medir el espín de una partícula en un SR arbitrario. Existen muchos SR en los cuales la partícula está en reposo y en el origen y todos difieren por una rotación espacial. Por esta razón se elige definir al generador de momento angular espacial con su forma canónica y construir los demás generadores del grupo de de-Sitter con base en esta elección,

$$\mathbf{J} = \mathbf{q} \times \mathbf{p} + \mathbf{S}. \quad (4.23)$$

Al actuar este generador de rotaciones espaciales sobre el estado de la partícula, el primer término actúa sobre los grados de libertad del espacio físico y el segundo sobre los grados de libertad del espacio interno del espín.

Para construir la representación del resto de los generadores, se debe considerar que la medición del espín de una partícula depende del SR con respecto al cual se realiza. Para esto se consideran dos SR,  $S_1$  y  $S_2$ , los cuales difieren por una transformación infinitesimal de la forma  $1 + \epsilon(\vec{\xi} \cdot \mathbf{T})$ , donde  $\mathbf{T}$  es algún generador que conecta la descripción en ambos sistemas a tiempo cero y cuya forma queremos determinar,  $\vec{\xi}$  es el parámetro de la transformación y  $\epsilon$  es una cantidad infinitesimal. A partir de estos dos SR iniciales,  $S_1$  y  $S_2$ , con la característica antes mencionada, se construyen dos SR finales,  $S_1''$  y  $S_2''$ , los cuales diferirán por una rotación infinitesimal puramente espacial generada por  $J$  por un parámetro  $\epsilon\vec{\omega}$ . La descripción del espín de la partícula en  $S_1$  se hace con respecto al eje  $z$  de  $S_1''$  y la de  $S_2$  se hace con respecto al eje  $z$  de  $S_2''$ . El operador  $\mathbf{T}$  se puede descomponer en dos partes, cada una de las cuales actúa sobre los dos espacios de la partícula, esto es,  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_f + \mathbf{T}_s$ , donde  $\mathbf{T}_f$  es la parte de los generadores que opera únicamente en el espacio físico y es la misma que se encontró en la sección anterior para partículas sin espín, y la parte  $\mathbf{T}_s$  genera transformaciones en el espacio del espín. Con esta construcción, la diferencia en la descripción del espín desde ambos sistemas está dada por la rotación para ir desde  $S_1''$  hacia  $S_2''$ . Por otra parte esta diferencia en la descripción debe ser la misma debida a la transformación generada por  $\mathbf{T}$ , por lo que se debe cumplir que

$$\vec{\xi} \cdot \mathbf{T}_s = \vec{\omega} \cdot \mathbf{S}, \quad (4.24)$$

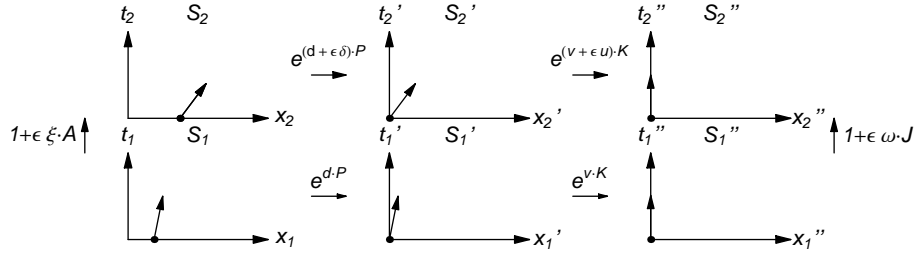


Figura 4.3: Composición de transformaciones

ecuación a partir de la cual lo que se puede obtener  $\mathbf{T}_s$ .

La secuencia general de transformaciones para construir los sistema finales a partir de los iniciales, ilustrada en la figura (4.3), es la siguiente:

1. Empezando con un sistema arbitrario  $S_1$  en el cual la partícula tiene posición  $q_1$  y velocidad  $v_1$  al tiempo  $t$ , primero se le aplica una traslación temporal mediante el generador  $H$  con un parámetro  $t$ , para ir a un SR  $S'_1$  en el cual la partícula esté a  $t'_1 = 0$ .
2. Al SR  $S'_1$  se le aplica una traslación espacial con un parámetro  $\vec{d}$  para llegar a  $S''_1$  en el cual la partícula está en el origen.
3. Finalmente al SR  $S''_1$  se le aplica una transformación de Lorentz especial con un parámetro  $\vec{u}$  para llegar al sistema  $S'''_1$  en el cual la partícula está en el origen y en reposo.

Similarmente se construye  $S'''_2$ , con la diferencia que los parámetros de las transformaciones diferirán de los empleados para el primer sistema,  $t$ ,  $\vec{d}$  y  $\vec{u}$ , por unas cantidades infinitesimales  $\epsilon\tau$ ,  $\epsilon\vec{d}$  y  $\epsilon\vec{u}$ .

Para realizar esta secuencia de transformaciones se emplearon dos métodos, el primero consiste en emplear composición de reflexiones para generar rotaciones en la esfera de-Sitter y el segundo consiste en emplear la representación matricial de los generadores de transformaciones infinitesimales del álgebra de-Sitter, para calcular la representación de los grupos uniparamétricos correspondientes, de manera similar a la empleada en la sección 5.2.

### 4.3.1. Método empleando composición de reflexiones para realizar rotaciones.

Para simplificar el análisis, trabajaremos con una signatura euclidiana, esto es, con  $S^4$  encajada en  $E^5$ , los resultados para otras signaturas se pueden obtener fácilmente por continuación analítica. Debido a la simetría de  $S^4$ , cualquier transformación es una rotación, y cualquier rotación que lleva un vector  $\vec{a}$  a coincidir con otro vector  $\vec{b}$ , denotado por  $R(\vec{a}, \vec{b})$  se puede realizar con la composición de dos reflexiones, método explicado en el apéndice B y que se emplea para calcular la composición sucesiva de rotaciones.

Siguiendo el procedimiento descrito anteriormente, se consideran los dos sistemas iniciales  $S_1$  y  $S_2$  que difieren por una transformación infinitesimal  $1 + \epsilon(\vec{\xi} \cdot \mathbf{T})$ . Los ejes de  $S_1$  son  $(t, x, y, z, w)$ , y se elige que la partícula en este SR esté a  $t = 0$ , haciendo innecesaria la transformación del paso 1. Con esta elección y empleando la relación (4.16), el 5-vector de posición normalizado de la partícula medido desde este SR es

$$\hat{q}_1 = (0, \lambda \mathbf{q}, f)$$

y el 5-vector de velocidad (sin normalizar) con respecto al tiempo  $t = 0$  es

$$v_1 = (1, \mathbf{v}, v_4),$$

donde  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{v}$  son los vectores tridimensionales usuales, es decir, de la forma  $(0, a_1, a_2, a_3, 0)$ . La condición para que  $v_1$  esté sobre el espacio de de-Sitter según la ecuación (6.11) es  $q_1 \cdot v_1 = 0$ , lo que implica que

$$v_4 = -\lambda \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}}{f}.$$

Entonces el factor de normalización de  $v_1$  es

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2 - \frac{\lambda^2 (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})^2}{f^2}}}, \quad (4.25)$$

por lo que el 5-vector de velocidad normalizado es

$$\hat{v}_1 = \gamma \left( 1, \mathbf{v}, -\lambda \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}}{f} \right).$$

Para la traslación del paso 2, la cual lleva de  $S_1$  a  $S_1''$  directamente (debido a la elección  $t = 0$ ), es necesario rotar el vector de posición  $q_1$  de la partícula hasta coincidir con el eje  $\hat{w}$ , de tal forma que el nuevo vector de posición normalizado será

$$\hat{q}_1'' = (0, \mathbf{0}, 1).$$

La rotación que realiza esta transformación es

$$P_{S_1, S_1''} = R(\hat{q}_1, \hat{w}), \quad (4.26)$$

con esto el vector de velocidad en  $S_1''$  será

$$\hat{v}_1'' = R(\hat{q}_1, \hat{w})v_1. \quad (4.27)$$

Para realizar la transformación de Lorentz especial del paso 3 para ir de  $S_1''$  a  $S_1'''$ , se rota el vector  $\hat{v}_1''$  hasta coincidir con el eje  $\hat{t}''$  por medio de

$$K_{S_1'', S_1'''} = R(\hat{v}_1'', \hat{t}''), \quad (4.28)$$

de tal forma que el vector de velocidad en  $S_1'''$  es

$$\hat{v}_1''' = (1, \mathbf{0}, 0). \quad (4.29)$$

Por otra parte para ir directamente de  $S_1$  a  $S_2$  la rotación correspondiente a la transformación  $T$  es

$$T_{S_1, S_2} = R(\hat{\chi}_T + \epsilon \vec{\xi}_T, \hat{\chi}_T), \quad (4.30)$$

donde  $\hat{\chi}_T$  y  $\hat{\xi}_T$  determinan el plano de la rotación dependiendo de la transformación  $T$ , de acuerdo al cuadro 4.1.

$T$	$\hat{\chi}_T$	$\vec{\xi}_T$
$\mathbf{P}$	$\hat{w}$	$\mathbf{q}$
$\mathbf{K}$	$\hat{t}$	$\mathbf{q}$

Cuadro 4.1: Ejes que determinan el plano de la rotación dependiente de la transformación  $T$

Entonces el vector de posición medido desde  $S_2$  es

$$\hat{q}_2 = R(\hat{\chi}_T + \epsilon \vec{\xi}_T, \hat{\chi}_T)\hat{q}_1, \quad (4.31)$$

y el vector de velocidad de la partícula en  $S_2$  es

$$\hat{v}_2 = R(\hat{\chi}_T + \epsilon \vec{\xi}_T, \hat{\chi}_T)\hat{v}_1.$$

Aunque se eligió  $t = 0$  para  $S_1$ , aún podría ser necesario realizar la traslación temporal del paso 1, por un parámetro  $\epsilon\tau$ , para llegar  $S_2'$  donde  $t' = 0$ , la rotación correspondiente a esta transformación es:

$$H_{S_2, S_2'} = R(\hat{w} + \epsilon\tau\hat{t}, \hat{w}), \quad (4.32)$$

entonces los vectores de posición y velocidad en el nuevo sistema serán

$$\hat{q}_2 = R(\hat{w} + \epsilon\tau\hat{t}, \hat{w})\hat{q}_2, \quad (4.33)$$

$$\hat{v}'_2 = R(\hat{w} + \epsilon\tau\hat{t}, \hat{w})\hat{v}_2. \quad (4.34)$$

La rotación que realiza la traslación espacial para ir de  $S'_2$  a  $S''_2$  es

$$P_{S'_2, S''_2} = R(\hat{q}'_2, \hat{w}'). \quad (4.35)$$

El vector de posición en  $S''_2$  será

$$\hat{q}''_2 = (0, \mathbf{0}, 1) \quad (4.36)$$

y el de velocidad

$$\hat{v}''_2 = R(\hat{q}'_2, \hat{w}')\hat{v}'_2. \quad (4.37)$$

La transformación de Lorentz especial para ir de  $S''_2$  a  $S'''_2$  es

$$K_{S''_2, S'''_2} = R(\hat{v}''_2, \hat{t}'') \quad (4.38)$$

y el vector de velocidad en  $S'''_2$  será

$$\hat{v}'''_2 = (1, \mathbf{0}, 0). \quad (4.39)$$

$S''_1$  y  $S''_2$  difieren por una rotación espacial  $\Omega$

$$J_{S''_1, S''_2} = \Omega.$$

La composición completa de las rotaciones para ir desde  $S_1$  hasta  $S'''_2$  mediante la secuencia de transformaciones que involucra  $\Omega$  es

$$R_{S_1, \Omega, S'''_2} = \Omega K_{S''_1, S'''_2} P_{S_1, S''_1}, \quad (4.40)$$

y la respectiva para la secuencia de transformaciones que involucra la transformación  $\mathbf{T}$  es

$$R_{S_1, A, S'''_2} = K_{S''_2, S'''_2} P_{S'_2, S''_2} H_{S_2, S'_2} T_{S_1, S_2}. \quad (4.41)$$

Ambas composiciones deben dar la misma descripción, por lo que se puede obtener  $\Omega$  de estas dos ecuaciones, igualándolas y despejando  $\Omega$  se tiene

$$\Omega = K_{S''_2, S'''_2} P_{S'_2, S''_2} H_{S_2, S'_2} T_{S_1, S_2} P_{S''_1, S_1} K_{S''_1, S''_2}, \quad (4.42)$$

o, en términos de las rotaciones,

$$\Omega = R(\hat{v}''_2, \hat{t}'') R(\hat{q}'_2, \hat{w}') R(\hat{w} + \epsilon\tau\hat{t}, \hat{w}) R(\hat{\chi}_T + \epsilon\hat{\xi}_T, \hat{\chi}_T) R(\hat{w}, \hat{q}_1) R(\hat{t}'', \hat{v}''_1). \quad (4.43)$$

$\Omega$  es una transformación infinitesimal generada por  $\mathbf{J}$  por un parámetro infinitesimal  $\epsilon\vec{\omega}$ , por lo que

$$\frac{d\Omega}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = \vec{\omega} \cdot \mathbf{J}, \quad (4.44)$$

y por lo tanto

$$\vec{\omega} \cdot \mathbf{J} = \frac{d}{d\epsilon} \left( K_{S_2'', S_2'''} P_{S_2', S_2''} H_{S_2, S_2'} T_{S_1, S_2} P_{S_1'', S_1} K_{S_1''', S_1''} \right) \Big|_{\epsilon=0}.$$

Lo cual, considerando que  $dR(\hat{\chi}_T + \epsilon \hat{\xi}_T, \hat{\chi}_T)/d\epsilon|_{\epsilon=0} = T$ ,

$$\vec{\omega} \cdot \mathbf{J} = R_{S_1''', S_1}^{-1} (\xi \cdot \mathbf{T}) R_{S_1''', S_1} + \left( \frac{d}{d\epsilon} R_{S_2''', S_2}^{-1} \right) R_{S_1''', S_1} \Big|_{\epsilon=0}, \quad (4.45)$$

donde  $R_{S_1''', S_1} = H_{S_1', S_1} P_{S_1'', S_1'} K_{S_1''', S_1''}$ , que se reduce a  $R_{S_1''', S_1} = P_{S_1'', S_1} K_{S_1''', S_1''}$  cuando se elige  $t_1 = 0$ . En forma explícita el segundo término es

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{d\epsilon} R_{S_2''', S_2}^{-1} \right) R_{S_1''', S_1} \Big|_{\epsilon=0} &= \frac{d}{d\epsilon} R(\hat{v}_2'', \hat{t}'') R(\hat{t}'', \hat{v}_1''), \\ &+ R(\hat{v}_1'', \hat{t}'') \frac{d}{d\epsilon} R(\hat{q}_2', \hat{w}') R(\hat{w}', \hat{q}_1) R(\hat{t}'', \hat{v}_1''), \\ &+ R(\hat{v}_1'', \hat{t}'') R(\hat{q}_1, \hat{w}') \frac{d}{d\epsilon} R(\hat{w}' + \epsilon \tau \hat{t}', \hat{w}') R(\hat{w}', \hat{q}_1) R(\hat{t}'', \hat{v}_1''). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Para calcular estos términos, así como la composición total para obtener las componentes del parámetro de la rotación  $\omega$ , se empleó el programa en Mathematica presentado en el Apéndice E. Los resultados para cada generador se presentan a continuación.

## Generador de Traslaciones Espaciales

Para el caso  $\mathbf{T} = \mathbf{P}$ , el parámetro de la rotación es

$$\vec{\omega}_P = \lambda^2 \frac{\vec{\xi} \times \mathbf{q}}{1 + f}, \quad (4.47)$$

entonces la parte del momento angular total correspondiente al espacio del espín es

$$\vec{\omega} \cdot \mathbf{S} = \lambda^2 \frac{\vec{\xi} \times \mathbf{q} \cdot \mathbf{S}}{1 + f}.$$

Usando la ciclicidad del triple producto escalar,  $\vec{\xi} \times \mathbf{q} \cdot \mathbf{S}$  se puede escribir como  $\vec{\xi} \cdot \mathbf{q} \times \mathbf{S}$ , por lo que de acuerdo a la ecuación (4.24) el generador de traslaciones en el espacio interno es

$$\mathbf{P}_S = \lambda^2 \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{S}}{1 + f}$$

y el generador de traslaciones en el espacio total es

$$\mathbf{P} = f\mathbf{p} + \lambda^2 \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{S}}{1+f}. \quad (4.48)$$

### Generador de Transformaciones de Lorentz especiales

Para el caso,  $\mathbf{T} = \mathbf{K}$ , el parámetro de la rotación es

$$\vec{\omega}_K = \frac{\vec{\xi} \times \gamma\mathbf{v}}{1+\gamma} + \lambda^2 \frac{(\vec{\xi} \cdot \mathbf{q})\mathbf{q} \times \gamma\mathbf{v} - (\mathbf{q} \cdot \gamma\mathbf{v})\mathbf{q} \times \vec{\xi}}{f(1+f)(1+\gamma)}. \quad (4.49)$$

La parte del momento angular en el espacio interno es

$$\vec{\omega}_K \cdot \mathbf{S} = \frac{\vec{\xi} \times \gamma\mathbf{v} \cdot \mathbf{S}}{1+\gamma} + \lambda^2 \frac{(\vec{\xi} \cdot \mathbf{q})\mathbf{q} \times \gamma\mathbf{v} \cdot \mathbf{S} - (\mathbf{q} \cdot \gamma\mathbf{v})\mathbf{q} \times \vec{\xi} \cdot \mathbf{S}}{f(1+f)(1+\gamma)}.$$

Usando la ciclicidad del triple producto escalar y la ecuación (4.24) se encuentra que el generador de transformaciones de Lorentz especiales en el espacio interno del spin es

$$\mathbf{K}_S = \frac{\gamma\mathbf{v} \times \mathbf{S}}{1+\gamma} + \lambda^2 \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{q} \times \gamma\mathbf{v})\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \gamma\mathbf{v})\mathbf{S} \times \mathbf{q}}{f(1+f)(1+\gamma)}.$$

Reescribiendo este resultado en términos de  $\mathbf{P}_S$  se tiene

$$\mathbf{K}_S = \frac{\gamma\mathbf{v} \times \mathbf{S}}{1+\gamma} + \frac{(\gamma\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})\mathbf{P}_S - (\gamma\mathbf{v} \cdot \mathbf{P}_S)\mathbf{q}}{f(1+\gamma)}.$$

Empleando la relación  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ , se tiene que la expresión para el generador de transformaciones de Lorentz especiales en el espacio del espín es

$$\mathbf{K}_S = \frac{\gamma\mathbf{v}}{1+\gamma} \times (\mathbf{S} + \mathbf{P}_S \times \frac{\mathbf{q}}{f}).$$

Entonces el generador completo de Boost es

$$\mathbf{K} = \mathbf{q}p_0 + \frac{\gamma\mathbf{v}}{1+\gamma} \times (\mathbf{S} + \mathbf{P}_S \times \frac{\mathbf{q}}{f}). \quad (4.50)$$

#### 4.3.2. Método empleando representaciones matriciales

En este método se emplean los automorfismos pertenecientes a los grupos uniparamétricos generados por  $H$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{K}$  para realizar las transformaciones. La secuencia general de transformaciones descrita anteriormente está dada por

$$e^{(\vec{u} + \epsilon \vec{v}) \cdot \mathbf{K}} e^{(\vec{d} + \epsilon \vec{\delta}) \cdot \mathbf{P}} e^{(t + \epsilon \tau) H} e^{\epsilon \vec{\xi} \cdot \mathbf{T}} e^{-t H} e^{-\vec{d} \cdot \mathbf{P}} e^{-\vec{u} \cdot \mathbf{K}} = e^{\epsilon \vec{\omega} \cdot \mathbf{J}}, \quad (4.51)$$

donde no se conocen las cantidades  $\delta$ ,  $v$  y  $\tau$  correspondientes para cada transformación  $T$ , necesarias para que la composición total sea igual a una rotación espacial. Al utilizar la forma instantánea, esto es, elegir el instante  $t = 0$ , esta composición se simplifica, quedando como

$$e^{(\vec{u}+\epsilon\vec{v})\cdot\mathbf{K}}e^{(\vec{d}+\epsilon\vec{\delta})\cdot\mathbf{P}}e^{\epsilon\tau H}e^{\epsilon\xi\cdot T}e^{-\vec{d}\cdot\mathbf{P}}e^{-\vec{u}\cdot\mathbf{K}} = e^{\epsilon\vec{\omega}\cdot\mathbf{J}}. \quad (4.52)$$

De igual manera que en el procedimiento anterior, derivando con respecto a  $\epsilon$  y evaluando en  $\epsilon = 0$  se obtiene la ecuación:

$$\vec{\omega}\cdot\mathbf{J} = e^{\vec{d}\cdot\mathbf{P}}e^{\vec{u}\cdot\mathbf{K}}(\xi\cdot T)e^{-\vec{d}\cdot\mathbf{P}}e^{-\vec{u}\cdot\mathbf{K}} + \left(\frac{d}{d\epsilon}e^{(\vec{u}+\epsilon\vec{v})\cdot\mathbf{K}}e^{(\vec{d}+\epsilon\vec{\delta})\cdot\mathbf{P}}e^{\epsilon\tau H}\right)|_{\epsilon=0}e^{\vec{d}\cdot\mathbf{P}}e^{\vec{u}\cdot\mathbf{K}}. \quad (4.53)$$

Para calcular esta composición se emplea la representación  $\rho$  de los generadores del álgebra de de-Sitter,

$$\begin{aligned} t\rho(H) &= \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \vec{d}\cdot\rho(\mathbf{P}) &= \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 \\ 0 & -d_1 & -d_2 & -d_3 & 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{u}\cdot\rho(\mathbf{K}) &= \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \vec{\omega}\cdot\rho(\mathbf{J}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 & 0 \\ 0 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 & 0 \\ 0 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matriz  $M$  resultante de calcular el lado derecho de la ecuación (4.53) en general no será una matriz correspondiente a una rotación. A partir de este hecho se obtienen los parámetros desconocidos  $\vec{\delta}$ ,  $\vec{v}$  y  $\tau$ , esto es, mediante el requerimiento de que los elementos pertenecientes a la fila  $M_{1i}$  y a la columna  $M_{i5}$  fuera de la diagonal principal deben ser cero. Con estas condiciones se obtienen 10 ecuaciones para determinar las 7 componentes de los parámetros desconocidos, así como las 3 componentes del parámetro de la rotación,  $\vec{\omega}$ . Una vez que se ha obtenido  $\vec{\omega}$  se resuelve la ecuación (4.24) y se obtiene la representación del generador  $\mathbf{T}$ . El programa empleado para realizar estos cálculos se presenta en el apéndice F.

La representación obtenida está en términos de las coordenadas normales  $d_i$  y  $u_i$ , para expresarlo en términos de las coordenadas  $q_i$  del espacio de-Sitter, así como de las velocidades  $\dot{q}_i$  es necesario encontrar las relaciones entre estas variables. Para esto se definen la coordenadas normales de la siguiente manera:



Al aplicar la transformación  $\rho(e^{\vec{a}\cdot\mathbf{P}})$  al vector  $\hat{q}'_1 = \hat{w}$  se obtiene el vector  $\hat{q}_1 = (0, \lambda\mathbf{q}, f)$ <sup>1</sup>, esto es,

$$\begin{aligned} \rho(e^{\vec{a}\cdot\mathbf{P}})\hat{q}'_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\cos(a\lambda)-1)a_1^2}{a^2} + 1 & \frac{a_1 a_2 (\cos(a\lambda)-1)}{a^2} & \frac{a_1 a_3 (\cos(a\lambda)-1)}{a^2} & \frac{a_1 \sin(a\lambda)}{a} \\ 0 & \frac{a_1 a_2 (\cos(a\lambda)-1)}{a^2} & \frac{(\cos(a\lambda)-1)a_2^2}{a^2} + 1 & \frac{a_2 a_3 (\cos(a\lambda)-1)}{a^2} & \frac{a_2 \sin(a\lambda)}{a} \\ 0 & \frac{a_1 a_3 (\cos(a\lambda)-1)}{a^2} & \frac{a_2 a_3 (\cos(a\lambda)-1)}{a^2} & \frac{(\cos(a\lambda)-1)a_3^2}{a^2} + 1 & \frac{a_3 \sin(a\lambda)}{a} \\ 0 & -\frac{a_1 \sin(a\lambda)}{a} & -\frac{a_2 \sin(a\lambda)}{a} & -\frac{a_3 \sin(a\lambda)}{a} & \cos(a\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda q_1 \\ \lambda q_2 \\ \lambda q_3 \\ f \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Al resolver estas ecuaciones se obtiene que:

$$q_i = a_i \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda a}, \quad f = \cos(\lambda a), \quad (4.55)$$

donde  $a \equiv ||a||$ . Similarmente al aplicar la transformación  $\rho(e^{\vec{b}\cdot\mathbf{K}})$  al vector  $\hat{v}''_1 = \hat{t}$  se obtiene el vector  $\hat{v}'_1 = (\gamma', \gamma'\mathbf{v}', 0)$ , esto es,

$$\begin{aligned} \rho(e^{\vec{b}\cdot\mathbf{K}})v''_1 &= \begin{pmatrix} \cosh(b) & \frac{b_1 \sinh(b)}{b} & \frac{b_2 \sinh(b)}{b} & \frac{b_3 \sinh(b)}{b} & 0 \\ \frac{b_1 \sinh(b)}{b} & \frac{(\cosh(b)-1)b_1^2}{b^2} + 1 & \frac{b_1 b_2 (\cosh(b)-1)}{b^2} & \frac{b_1 b_3 (\cosh(b)-1)}{b^2} & 0 \\ \frac{b_2 \sinh(b)}{b} & \frac{b_1 b_2 (\cosh(b)-1)}{b^2} & \frac{(\cosh(b)-1)b_2^2}{b^2} + 1 & \frac{b_2 b_3 (\cosh(b)-1)}{b^2} & 0 \\ \frac{b_3 \sinh(b)}{b} & \frac{b_1 b_3 (\cosh(b)-1)}{b^2} & \frac{b_2 b_3 (\cosh(b)-1)}{b^2} & \frac{(\cosh(b)-1)b_3^2}{b^2} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \gamma' \begin{pmatrix} 1 \\ v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

de donde se obtienen las relaciones correspondientes,

$$\gamma' = \cosh(b), \quad \gamma' v'_i = b_i \frac{\sinh(b)}{b}, \quad (4.57)$$

<sup>1</sup>Esta transformación es equivalente a la transformación  $\hat{q}_1 = R(\hat{w}, \hat{q}_1)\hat{q}'_1$  del método anterior

con  $b \equiv ||b||$ . Por otra parte, estas coordenadas en el sistema  $S_1'$  resultan de trasladar las coordenadas del sistema  $S_1$  por medio de la transformación  $\rho(e^{-a \cdot P})$ , esto es  $\hat{v}'_1 = \rho(e^{-\vec{a} \cdot \mathbf{P}}(\hat{v}_1))$ , de donde se obtiene que

$$\gamma' = \gamma, \quad (4.58)$$

$$\gamma' v'_i = \gamma v_i + a_i \left( -\frac{\sin(\lambda a)}{a} \gamma v_4 - (1 - \cos(\lambda a)) \frac{\vec{a} \cdot \gamma \mathbf{v}}{\vec{a}^2} \right), \quad (4.59)$$

$$\gamma' v'_4 = \frac{\sin(\lambda a)}{a} \vec{a} \cdot \gamma \mathbf{v} + \cos(\lambda a) \gamma v_4. \quad (4.60)$$

De la ecuación (4.56) se tiene que  $\gamma' v'_4 = 0$ , por lo que usando la ecuaciones (4.55) en la (4.60), se tiene que

$$v_4 = -\lambda \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}}{f}, \quad (4.61)$$

lo cual es consistente con el requerimiento para que  $\hat{v}'_1$  esté en el espacio de de-Sitter. Empleando las ecuaciones (4.58) y (4.61) en la (4.59) se obtiene

$$\gamma' v'_i = \gamma v_i + \lambda^2 \frac{\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{f(1+f)} q_i. \quad (4.62)$$

Con las relaciones entre las coordenadas normales y las del espacio de de-Sitter encontradas, es posible calcular las representaciones de los generadores del álgebra de de-Sitter.

## Generador de traslaciones espaciales P

Los parámetros correspondientes a esta transformación son

$$\delta_i = \frac{(1 - \lambda d \cot(\lambda d)) \vec{d} \cdot \vec{\xi}}{d^2} d_i + \lambda d \cot(\lambda d) \xi_i, \quad (4.63)$$

$$v_i = \frac{\lambda \tan\left(\frac{1}{2} \lambda d\right) (\vec{u} \cdot \vec{\xi} d_i - \vec{d} \cdot \vec{u} \xi_i)}{d}, \quad (4.64)$$

$$\tau = 0. \quad (4.65)$$

El parámetro de la rotación correspondiente para esta transformación es

$$\vec{\omega}_P = \lambda^2 \vec{\xi} \times \vec{d} \tan\left(\frac{1}{2} \lambda d\right), \quad (4.66)$$

empleando las relaciones (4.55), se tiene que en términos de las coordenadas  $q_i$  es

$$\vec{\omega}_P = \lambda^2 \frac{\vec{\xi} \times \mathbf{q}}{1+f}, \quad (4.67)$$

lo cual coincide con el resultado obtenido por medio del método anterior y que conduce a obtener que la parte del generador de traslaciones espaciales debido a la inclusión de espín es

$$\mathbf{P}_s = \lambda^2 \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{S}}{1+f}. \quad (4.68)$$

## Generador de transformaciones de Lorentz especiales

Los parámetros correspondientes a esta transformación son

$$\delta_i = 0, \quad (4.69)$$

$$v_i = \frac{\left( \vec{u} \cdot \vec{\xi} d^2 + \vec{d} \cdot \vec{u} \vec{d} \cdot \vec{\xi} (\sec(\lambda d) - 1) \right) (1 - u \coth(u))}{d^2 u^2} u_i \quad (4.70)$$

$$+ \frac{u \coth(u) \vec{d} \cdot \vec{\xi} (\sec(\lambda d) - 1)}{d^2} d_i + u \coth(u) \xi_i, \quad (4.71)$$

$$\tau = \frac{\vec{d} \cdot \vec{\xi} \tan(\lambda d)}{\lambda d}. \quad (4.72)$$

El parámetro de la rotación asociada es

$$\vec{\omega}_K = \left( (\vec{\xi} \times \vec{u}) + \frac{(-1 + \sec(\lambda d)) \vec{d} \cdot \vec{\xi} (\vec{d} \times \vec{u})}{d^2} \right) \frac{\tanh\left(\frac{1}{2}u\right)}{u}, \quad (4.73)$$

que en términos de las  $q_i$  y  $v'_i$  es

$$\vec{\omega}_K = \frac{\gamma'}{1+\gamma'} \left( \vec{\xi} \times \mathbf{v}' + \lambda^2 \frac{\mathbf{q} \cdot \vec{\xi} (\mathbf{q} \times \mathbf{v}')}{f(1+f)} \right). \quad (4.74)$$

La parte correspondiente de la rotación en el espacio del espín es

$$\vec{\omega}_K \cdot \mathbf{S} = \frac{\gamma'}{1+\gamma'} \left( \vec{\xi} \times \mathbf{v}' \cdot \mathbf{S} + \lambda^2 \frac{\mathbf{q} \cdot \vec{\xi} (\mathbf{q} \times \mathbf{v}' \cdot \mathbf{S})}{f(1+f)} \right). \quad (4.75)$$

Como  $\vec{\omega}_K \cdot \mathbf{S} = \vec{\xi} \cdot \mathbf{K}_S$ , la parte correspondiente del generador de transformaciones de Lorentz especiales es

$$\mathbf{K}_S = \frac{\gamma'}{1+\gamma'} \left( \mathbf{v}' \times \mathbf{S} + \lambda^2 \frac{(\mathbf{q} \times \mathbf{v}' \cdot \mathbf{S})}{f(1+f)} \mathbf{q} \right). \quad (4.76)$$

Empleando la relación (4.62) para expresar  $\mathbf{K}_S$  en términos de las velocidades en  $S_1$ , se obtiene el mismo resultado obtenido con el método anterior

$$\mathbf{K}_S = \frac{\gamma \mathbf{v}}{1+\gamma} \times \left( \mathbf{S} + \mathbf{P}_S \times \frac{\mathbf{q}}{f} \right).$$

El generador de transformacion de Lorentz especiales completo se puede escribir como

$$\mathbf{K} = \mathbf{q}p_0 + \frac{\gamma\mathbf{v}}{1+\gamma} \times \frac{1}{f}(\mathbf{S} - \lambda^2 \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{S}}{1+f} \mathbf{q}).$$

### Generador de Traslaciones Temporales

Ya obtenidos los generadores  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{K}$  el generador de traslaciones en el espacio total se calcula empleando el casimir (4.15) y hasta orden  $\lambda^2$  está dado por

$$H = fh + \lambda^2 \frac{1}{fh} \left( \frac{2\mathbf{J} \cdot \mathbf{S}}{1+f} - 2\frac{h}{f} \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{q} \times \gamma\mathbf{v}}{1+\gamma} - \frac{1}{f^2} \frac{(\gamma\mathbf{v} \times \mathbf{S})^2}{(1+\gamma)^2} \right). \quad (4.77)$$

## 4.4. Operadores de posición

Debido a que en el espacio de de-Sitter los generadores de traslaciones en distintas direcciones no conmutan, no es posible emplear como coordenadas los parámetros  $a_\mu$  de las curvas integrales de los  $P_\mu$ . Esto se debe a que estos  $P_\mu$  generan traslaciones de los  $X_\mu$  por los parámetros  $a_\mu$  y como sus curvas integrales no cierran al completar un ciclo y regresar al mismo punto debido a la no conmutatividad, estas  $a_\mu$  no pueden ser empleadas como coordenadas. Por este motivo, en el espacio de de-Sitter,  $[X_\mu, P_\nu] \neq \delta_{\mu\nu}$ , y no es obvio cual debe ser la relación correspondiente a la relación de Heisenberg. Debido a que no se conoce la relación de Heisenberg correspondiente para este espacio, no es posible definir totalmente los operadores de posición. Los  $X_\mu$  no tienen las características apropiadas para ser considerados como generadores de un álgebra de Lie [19], esto es esencialmente por no ser primitivos (en el sentido de no ser extensivos), y por este motivo, podría suceder que no sea posible expresarlos en términos de los generadores del álgebra de-Sitter y serían más bien, elementos pertenecientes al universal enveloping algebra, por lo que en general, los elementos resultantes de calcular su relación de conmutación también lo serían

# Conclusiones y trabajo futuro

- Se propuso hacer una distinción conceptual entre dos tipos de descripciones del espaciotiempo. Por una parte, una en la cual la geometría del espaciotiempo es debida a la presencia de materia y que existe de manera independiente, y por otra parte, la descripción de un espaciotiempo que no tiene una geometría por sí mismo, pero en la cual, diferentes partículas ven distintas geometrías.
- La no conmutatividad de los operadores de posición aparece de manera natural para algunos sistemas que involucran algún tipo de momento angular intrínseco. Este fenómeno parece ser debido a que el sistema considerado es extendido en el espacio más bien que puntual. Esta causa es de carácter relativista, porque para sistemas en este régimen y con esa característica, no es posible definir un centro de masa con una localización exacta, sino más bien distribuido en una región finita.
- Las componentes del operador de posición para partículas sin espín conmutan, partículas con espín no conmutan debido al punto anterior y al incluir antipartículas vuelven a conmutar, pero esto es debido a que mezclan subespacios de energías positivas con negativas, por lo que si se requiere considerar partículas con energía de un mismo signo, se tiene nuevamente la propiedad de no conmutatividad.
- Se obtuvieron las representaciones del álgebra de de-Sitter para el caso de partículas libres de masa  $m$  sin espín, al igual que para el caso de partículas libres de masa  $m$  con espín  $s$ . Pero debido a que los generadores de traslaciones ya no conmutan, es necesario considerar cuál debe ser la generalización correspondiente a la relación de Heisenberg en el espacio de de-Sitter, esto, por el motivo de que dicha relación, es necesaria para construir los operadores de posición y con esto conocer sus relaciones de conmutación.
- El método general empleado en la construcción de la parte dependiente del espín de los generadores del álgebra de-Sitter, puede ser estudiado desde el punto de vista de haces fibrados. A cada transformación del sistema de referencia se le

asocia una rotación espacial, y la manera en que se realiza esta asociación se asemeja a la manera en la cual se transforma la conexión local de un haz fibrado, lo cual sugiere una manera de definir una conexión en este espacio.

# Apéndice A

## Haces Fibrados

En este capítulo se hace una revisión de los conceptos relacionados con haces fibrados, esto, con el propósito de aplicarlos en la construcción de un haz principal en el espacio de-Sitter. Para una revisión más detallada se pueden consultar las referencias [20] y [21].

### A.1. Haces fibrados

En términos generales un haz fibrado es un espacio topológico que localmente parece el producto directo de dos espacios topológicos, pero que en general, globalmente no lo es. A continuación se definen los elementos que constituyen un haz fibrado, algunos de los cuales están representados en la figura A.1.

#### A.1.1. Definiciones

**Definición A.1.1** *Un haz fibrado diferenciable  $(E, \pi, M, F, G)$  está definido por los siguientes elementos:*

1. Una variedad diferenciable  $E$  llamada **Espacio total**.
2. Una variedad diferenciable  $M$  llamada **Espacio base**.
3. Una variedad diferenciable  $F$  llamada **Fibra**.
4. Un mapeo  $\pi : E \rightarrow M$  llamado **Proyección**. La imagen inversa  $\pi^{-1}(p) \equiv F_p \cong F$  es la fibra en  $p$ .
5. Un grupo de Lie  $G$  llamado **grupo de estructura** que actúa sobre la fibra  $F$  por la izquierda.

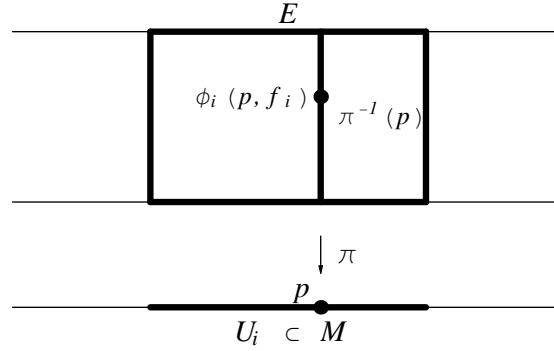


Figura A.1: Representación esquemática de un haz fibrado

6. Un conjunto de cartas abiertas  $\{U_i\}$  que cubren  $M$  con un difeomorfismo  $\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$  tal que  $\pi\phi_i(p, f) = p$ . El mapeo  $\phi_i$  se llama la **trivialización local** dado que  $\phi_i^{-1}$  mapea  $\pi^{-1}(U_i)$  al producto directo  $U_i \times F$  de manera biyectiva.
7. **Funciones de transición**  $\{t_{ij}\}$ , las cuales cumplen que para un punto  $p \in U_i \cap U_j$  con  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ,  $t_{ij}(p) \equiv \phi_{i,p}^{-1}\phi_{j,p} : F \rightarrow F$  es un elemento de  $G$ , donde el mapeo  $\phi_i(p, f) \equiv \phi_{i,p} : F \rightarrow F_p$  es un difeomorfismo. Entonces  $\phi_i$  y  $\phi_j$  están relacionados por el mapeo suave  $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  como (ver figura A.2)

$$\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p)(f)). \tag{A.1}$$

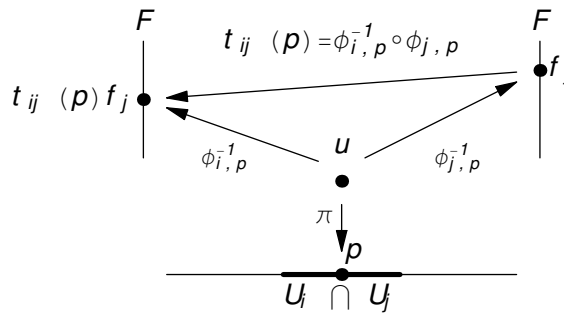


Figura A.2: Relación de elementos de la fibra por medio de las funciones de transición

Por simplicidad se utiliza la notación  $E \xrightarrow{\pi} M$  o simplemente  $E$  para denotar el haz fibrado  $(E, \pi, M, F, G)$



Con base en la definición de los elementos anteriores se define el haz coordinado  $(E, \pi, M, F, G, \{U_i\}, \{\phi_i\})$  el cual es equivalente a otro haz coordinado  $(E, \pi, M, F, G, \{V_i\}, \{\psi_i\})$  si  $(E, \pi, M, F, G, \{U_i \cup V_i\}, \{\phi_i \cup \psi_i\})$  es también un haz coordinado. La definición de un haz fibrado debe ser independiente del conjunto de cartas abiertas  $\{U_i\}$  que cubren el espacio base  $M$  por lo que se define como la clase de equivalencia de los haces coordinados.

Para una carta  $U_i$  del espacio base  $M$ ,  $\pi^{-1}(U_i)$  es un producto directo que es difeomórfico a  $U_i \times F$ , siendo el difeomorfismo  $\phi^{-1} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$

Para dos cartas que se traslapan, esto es,  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , se tienen dos mapeos  $\phi_i$  y  $\phi_j$  en la intersección  $U_i \cap U_j$ , para un punto  $u \in E$  tal que  $\pi(u) = p \in U_i \cap U_j$  se le asignan dos elementos en  $F$ , uno por medio de  $\phi_i^{-1}$  y otro por  $\phi_j^{-1}$  como se muestra en la figura A.2.

$$\phi_i^{-1}(u) = (p, f_i) \quad \phi_j^{-1}(u) = (p, f_j). \quad (\text{A.2})$$

Existe un mapeo  $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  el cual relaciona  $f_i$  y  $f_j$  como  $f_i = t_{ij}(p)f_j$ . Esto es equivalente a la ecuación (A.1). Para que fibras pertenecientes a la zona de intersección de varias cartas puedan ser identificadas consistentemente se requiere que estas funciones de transición satisfagan las condiciones de consistencia siguientes:

$$\begin{aligned} t_{ii}(p) &= id & (p \in U_i), \\ t_{ij}(p) &= t_{ji}(p)^{-1} & (p \in U_i \cap U_j), \\ t_{ij}(p)t_{jk}(p) &= t_{ik}(p) & (p \in U_i \cap U_j \cap U_k). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Al haz fibrado en el cual todas las funciones de transición son mapeos identidad se le conoce como **haz trivial** y es un producto directo  $M \times F$ .

Dado un haz fibrado  $E \xrightarrow{\pi} M$ , el conjunto de funciones de transición no es único. Sea  $\{U_i\}$  una cobertura de  $M$ ,  $\{\phi_i\}$  y  $\{\tilde{\phi}_i\}$  dos conjuntos de trivializaciones locales que producen el mismo haz fibrado. Las funciones de transición de la respectivas trivializaciones locales son

$$\begin{aligned} t_{ij}(p) &= \phi_{i,p}^{-1} \phi_{j,p}, \\ \tilde{t}_{ij}(p) &= \tilde{\phi}_{i,p}^{-1} \tilde{\phi}_{j,p}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Se define un mapeo  $g_i(p) : F \rightarrow F$  en cada punto  $p \in M$  por

$$g_i(p) \equiv \phi_{i,p}^{-1} \tilde{\phi}_{i,p}. \quad (\text{A.5})$$

Para que  $\{\phi_i\}$  y  $\{\tilde{\phi}_i\}$  describan el mismo haz fibrado se requiere que el mapeo  $g_i(p)$  sea un homeomorfismo perteneciente  $G$ . De la ecuaciones (A.4) y (A.5) se obtiene que

$$\tilde{t}_{ij} = g_i(p)^{-1} t_{ij}(p) g_j(p). \quad (\text{A.6})$$

Si el haz es trivial, es posible fijar que todas las funciones de transición sean el mapeo identidad. Entonces la forma más general de las funciones de transición es

$$t_{ij} = g_i(p)^{-1}g_j(p). \quad (\text{A.7})$$

Se define una **sección** de  $E$  como un mapeo diferenciable  $s : M \rightarrow E$ , el cual satisface que  $\pi s = id_M$ .  $s(p)$  es un elemento de  $F_p = \pi^{-1}(p)$ . El conjunto de secciones en  $M$  se denota con  $\Gamma(M, E)$ . De igual forma para una carta  $U \subset M$  se puede establecer una **sección local** definida unicamente en  $U$  y el conjunto de secciones locales sobre  $U$  se denota por  $\Gamma(U, E)$ . No todas los haces fibrados admiten secciones globales. Esto puede verse en el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 1.1 Haz tangente unitario a la esfera $S^2$

Considerando la esfera  $S^2$  encajada en  $\mathbb{R}^3$  como  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , las coordenadas estereográficas para los hemisferios unitarios norte y sur se obtienen por medio de los mapeos

$$\begin{aligned} \sigma_N : (X_N, Y_N) &= \left( \frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right), \\ \sigma_S : (X_S, Y_S) &= \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right). \end{aligned}$$

Los respectivos mapeos inversos son

$$\begin{aligned} \sigma_N^{-1} : (x, y, z) &= \frac{1}{1+R_N^2} (2X_N, 2Y_N, 1-R_N^2), \\ \sigma_S^{-1} : (x, y, z) &= \frac{1}{1+R_S^2} (2X_S, 2Y_S, R_S^2-1). \end{aligned}$$

donde  $R_N^2 = X_N^2 + Y_N^2$  y  $R_S^2 = X_S^2 + Y_S^2$

Entonces la función de transición  $\psi_{NS} = \sigma_N \circ \sigma_S^{-1}$  en la región de intersección correspondiente a una franja extendida ligeramente alrededor del ecuador es

$$\psi_{NS} : (X_N, Y_N) = \left( \frac{X_S}{R_S^2}, \frac{Y_S}{R_S^2} \right).$$

El haz unitario tangente  $T_0S^2$  sobre una carta  $U$  de la esfera  $S^2$ , localmente es  $U \times S^1$ , donde  $S^1$  es el espacio de direcciones, esto es, de vectores unitarios tangentes.

Para asignar coordenadas a  $S^1$ , primero se escoge como referencia el campo vectorial

$\partial/\partial X_S$  en la carta  $U_S$  y se mide en sentido antihorario el ángulo  $\theta_S$  que forma con respecto a cualquier otro vector. De esta manera, el campo vectorial  $\partial/\partial X_S$  será la superficie  $(X_S, Y_S, \theta_S = 0)$  en  $T_0U_S$ .

Similarmente para asignar coordenadas a  $T_0U_N$ , en la carta  $U_N$  se mide el ángulo  $\theta_N$  que forma algún vector con respecto al campo vectorial  $-\partial/\partial X_N$  en el sentido horario. Con estas convenciones, el pushforward del vector  $\partial/\partial X_S$  en la carta  $U_N$  es

$$\psi_{NS*}\partial/\partial X_S = \frac{Y_S^2 - X_S^2}{R_S^4} \frac{\partial}{\partial X_N} - \frac{2X_S Y_S}{R_S^4} \frac{\partial}{\partial Y_N},$$

o, en términos de las coordenadas de  $U_N$

$$\psi_{NS*}\partial/\partial X_S = (Y_N^2 - X_N^2) \frac{\partial}{\partial X_N} - 2X_N Y_N \frac{\partial}{\partial Y_N}.$$

Esto también puede ser escrito en función de  $\theta_N$ , empleando la parametrización  $X_N = \cos(\theta_N + \pi)$  y  $Y_N = \sin(\theta_N + \pi)$ <sup>1</sup> se tiene

$$\psi_{NS*}\partial/\partial X_S = -\cos(2\theta_N) \frac{\partial}{\partial X_N} - \sin(2\theta_N) \frac{\partial}{\partial Y_N}. \quad (\text{A.8})$$

La gráfica de este campo vectorial está en la figura A.3 (también se muestra el campo vectorial  $\partial/\partial X_S$ ), en ésta se observa que el índice de Kronecker de este campo vectorial es 2.

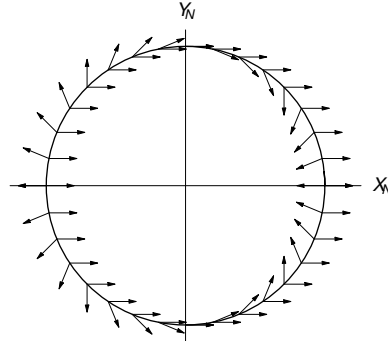


Figura A.3: Campo vectorial  $\psi_{NS*}\partial/\partial X_S$  sobre el ecuador en la carta  $U_N$

Otra aproximación sería calcular la imagen del campo vectorial  $\partial/\partial X_S$  sobre  $S^2$ , la cual es

$$\sigma_{S*}^{-1}(\partial/\partial X_S) = (1 - z - x)\partial/\partial x - xy\partial/\partial y + (1 - z)\partial/\partial z. \quad (\text{A.9})$$

<sup>1</sup> $\theta_N$  se mide en sentido horario desde  $-\partial/\partial X_N$

La gráfica de este campo vectorial sobre  $S^2$  se ilustra en la figura A.4. Como  $\psi_{NS*} = (\sigma_N \circ \sigma_S^{-1})_* = (\sigma_{N_*} \circ \sigma_{S_*}^{-1})$ , su proyección estereográfica en el hemisferio norte es el campo vectorial de la ecuación (A.8).

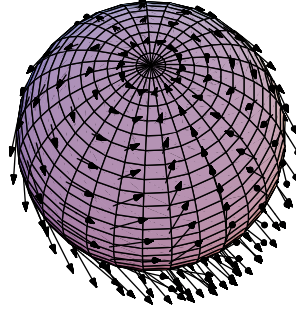


Figura A.4: Campo vectorial  $\sigma_{S_*}^{-1}(\partial/\partial X_S)$  sobre  $S^2$

$T_0S^2$  se obtiene uniendo los bordes de  $T_0U_N$  y  $T_0U_S$  a lo largo del ecuador. Cada borde es homeomórfico a un toro, porque en cada punto del ecuador se tiene una copia de  $S^1$ , esto es,  $S^1 \times S^1 = T^2$ . Entonces para unir los bordes de  $T_0U_N$  y  $T_0U_S$  es necesario identificar los toros correspondientes a cada hemisferio, una forma de realizar esto es identificar el vector  $\partial/\partial X_S$  con su imagen en  $T_0U_N$ , lo cual corresponde a la unión de los bordes para  $\theta_S = 0$ . De acuerdo a la figura A.3, esta identificación consiste en rotar la imagen por un ángulo  $\theta_S = 2\phi - \pi$ , donde  $\phi$  es el ángulo medido en sentido antihorario sobre el plano ecuatorial. La gráfica de la unión para  $\theta_S = 0$  se muestra en la figura A.5. Por lo tanto, al unir consistentemente el campo vectorial

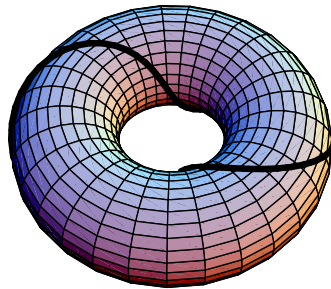


Figura A.5: Unión de los bordes de  $T_0U_N$  y  $T_0U_S$

$\partial/\partial X_S$  con su imagen en el hemisferio Norte, ésta completa dos vueltas al recorrer una vez el ecuador. De igual manera, es posible identificar los toros de forma que la

imagen en el hemisferio opuesto complete  $n$  vueltas al recorrer el ecuador. Cada una de estas identificaciones se caracteriza por su correspondiente  $n$  y debido a que estas identificaciones implican giros, no es posible establecer una sección global, por lo que el haz es no trivial.  $\diamond$

## A.2. Haces Principales

**Definición A.2.1** *Un haz fibrado principal es un haz cuya fibra  $F$  es idéntica (difeomorfa) al grupo de estructura  $G$ .*

Un haz principal  $P \xrightarrow{\pi} M$  se denota como  $P(M, G)$  y también se le llama un haz  $G$  sobre  $M$ .

Las funciones de transición actúan en la fibra por la izquierda y por ser  $F \cong G$ , la acción de  $G$  sobre  $F$  es por multiplicación por la derecha. Sea  $\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$  la trivialización local dada por  $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$  donde  $u \in \pi^{-1}(U_i)$ ,  $g_i \in G$  y  $p = \pi(u)$ . La acción por la derecha de  $G$  sobre  $\pi^{-1}(U_i)$  se define por  $\phi_i^{-1}(ua) = (p, g_i a)$ , esto es  $ua = \phi_i(p, g_i a)$  para cualquier  $a \in G$  y  $u \in \pi^{-1}(p)$ . Dado que la acción por la derecha conmuta con la acción por la izquierda, la definición anterior es independiente de la trivialización local empleada. Para un punto  $p \in U_i \cap U_j$ , empleando las funciones de transición para pasar de una carta a otra se tiene que,

$$(ua) = \phi_j(p, g_j a) = \phi_j(p, t_{ji} g_i a) = \phi_i(p, g_i a),$$

de donde se ve que la multiplicación por la derecha se define independientemente de las trivializaciones locales empleadas. Esto se denota por  $P \times G \rightarrow P$  o como  $(u, a) \rightarrow ua$ . La multiplicación por la derecha mueve los elementos del espacio total sobre su propia fibra, por lo que  $\pi(ua) = \pi(u)$ .

La acción por la derecha de  $G$  sobre  $\pi^{-1}(p)$  posee dos propiedades:

Es *transitiva* porque  $F_p = \pi^{-1}(p)$  es difeomórfico a  $G$  y  $G$  actúa sobre  $G$  transitivamente por la derecha. Por lo que para cualesquiera  $u_1, u_2 \in \pi^{-1}(p)$  existe un elemento  $a$  del grupo  $G$  tal que  $u_1 = u_2 a$ . Entonces si  $\pi(u) = p$ , es posible construir la fibra completa como

$$\pi^{-1}(p) = \{ua \mid a \in G\}.$$

Es *libre*, si  $ua = u$  para una cierta  $u \in P$ , entonces  $a$  debe ser el elemento unidad  $e$  de  $G$ . Esto es porque si  $u = \phi_i(p, g_i)$ , entonces

$$\phi_i(p, g_i a) = \phi_i(p, g_i) a = ua = u = \phi_i(p, g_i)$$

y dado que  $\phi_i$  es biyectiva, se debe cumplir que  $g_i a = g_i$ , lo cual implica que  $a = e$ .

Dada una sección  $s_i(p)$  sobre  $U_i$ , se puede definir una trivialización local  $\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$  de la siguiente manera: Para  $u \in \pi^{-1}(p)$ ,  $p \in U_i$  existe un único elemento  $g_u \in G$  tal que  $u = s_i(p)g_u$ , entonces  $\phi_i$  se define por  $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_u)$ . En esta trivialización local, la sección  $s_i(p)$  se expresa como:

$$s_i(p) = \phi_i(p, e).$$

A esta trivialización local se le denomina **trivialización local canónica**. Por definición  $\phi_i(p, g) = \phi(p, e)g = s_i(p)g$ . Si  $p \in U_i \cap U_j$ , las dos secciones correspondientes  $s_i(p)$  y  $s_j(p)$  están relacionadas por las funciones de transición  $t_{ij}(p)$  de la siguiente forma:

$$s_i(p) = \phi_i(p, e) = \phi_j(p, t_{ji}(p)e) = \phi_j(p, t_{ji}(p)) = \phi_j(p, e)t_{ji}(p) = s_j(p)t_{ji}(p).$$

# Apéndice B

## Conexiones en haces fibrados

En este capítulo se define el concepto conexión en haces fibrados de una manera abstracta pero geométrica, esto, con el motivo de aplicarlo en la definición de una conexión en el haz principal cuyo espacio base es el espacio de-Sitter y con esto obtener el concepto asociado de transporte paralelo. Las demostraciones relativas a este capítulo se encuentran en el apéndice A. Para información más detallada sobre este tema se pueden consultar las referencias [20] y [21].

### B.1. Conexiones en Haces principales

La definición de conexión en un haz principal esta basada en la separación del espacio tangente en un punto  $u \in P$ ,  $T_u P$ , en subespacios “vertical” y “horizontal”. Por otra parte, las conexiones también se definen como 1-formas con valores en el algebra de Lie, pero es posible demostrar que ambas definiciones son equivalentes.

#### B.1.1. Propiedades de grupos y álgebras de Lie

Sea  $G$  un grupo de Lie, la acción por la izquierda  $L_g$  y la acción por la derecha  $R_g$  están definidas respectivamente por  $L_g h = gh$  y  $R_g h = hg$  para  $g, h \in G$ .  $L_g$  induce un mapeo  $L_{g*} : T_h(G) \rightarrow T_{gh}(G)$ . Un campo vectorial invariante por la izquierda  $X$ , satisface que  $L_{g*} X_h = X_{gh}$ . Los campos vectoriales invariantes por la izquierda conforman un álgebra de Lie de  $G$ , denotado por  $\mathfrak{g}$ . Dado que  $X \in \mathfrak{g}$  se especifica por su valor en el elemento unidad  $e$ , y vice versa, entonces existe un isomorfismo  $\mathfrak{g} \simeq T_e(G)$  en el espacio vectorial. El álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es cerrado bajo el bracket de Lie,  $[T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma$ , donde  $\{T_\alpha\}$  es una base de  $\mathfrak{g}$  y las  $f_{\alpha\beta}^\gamma$  son las constantes de estructura. La acción adjunta  $Ad : G \rightarrow G$  se define por  $Ad_g h \equiv L_g R_{g^{-1}} h = ghg^{-1}$ . Al mapeo tangente de  $Ad_g$  se le llama mapeo adjunto y se denota por  $ad_g : T_h(G) \rightarrow$

$T_{ghg^{-1}}(G)$ . Si se restringe a  $T_e(G) \simeq \mathfrak{g}$ , entonces  $ad_g$  mapea  $\mathfrak{g}$  a si mismo, esto es,  $ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  si  $A \rightarrow gAg^{-1}$ , con  $A \in \mathfrak{g}$ .

### B.1.2. Definiciones

Sea  $u$  un elemento del haz principal  $P(M, G)$  y sea  $G_p$  la fibra en  $p = \pi(u)$ .

**Definición B.1** *El subespacio vertical  $V_uP$  es el subespacio de  $T_uP$  el cual es tangente a  $G_p$  en  $u$ .*

$V_uP$  se construye de la siguiente forma:

Sea  $A$  un elemento de  $\mathfrak{g}$  y  $a_t = \exp(tA)$  el grupo uniparamétrico generado por  $A$ , por medio de la acción por la derecha

$$R_{a_t} = ua_t \quad (\text{B.1})$$

se define en  $P$  una curva que pasa por  $u$  en  $t = 0$ . Como  $\pi(u) = \pi(ua_t) = p$ , esta curva está sobre  $G_p$ . Se define el **vector fundamental**  $A^\# \in T_uP$  por

$$A^\# f(u) = \left. \frac{d}{dt} f(ua_t) \right|_{t=0} \quad (\text{B.2})$$

donde  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  es cualquier función arbitraria diferenciable.  $A^\# \in T_uG_p \subset T_uP$ , por lo tanto  $A^\# \in V_uP$ . De esta forma se define un vector  $A^\#$  para cada punto de  $P$  y se construye el campo vectorial  $A^\#$  llamado **campo vectorial fundamental** generado por  $A$ . Por lo anterior existe un isomorfismo entre espacios vectoriales  $\# : \mathfrak{g} \rightarrow V_uP$  dado por  $A \rightarrow A^\#$ . Para  $X \in V_uP$  se cumple que  $\pi_*X = 0$  (ver demostración C.1). El isomorfismo  $\#$  preserva la estructura del álgebra de Lie (ver demostración C.2)

$$[A^\#, B^\#] = [A, B]^\#. \quad (\text{B.3})$$

El **subespacio horizontal**  $H_uP$  se define como el complemento del subespacio  $V_uP$  en  $T_uP$  y está especificado unívocamente una vez que se define una conexión en  $P$ , de acuerdo con lo siguiente:

**Definición B.2** *Sea  $P(M, G)$  un haz principal. Una **conexión** en  $P$  es una separación única del espacio tangente  $T_uP$  en el subespacio vertical  $V_uP$  y el subespacio horizontal  $H_uP$  tal que*

1 *El espacio tangente de  $P$  es la suma de los subespacios horizontal y vertical*

$$T_uP = H_uP \oplus V_uP.$$



2 Un campo vectorial suave  $X$  sobre  $P$  está separado en campos vectoriales suaves  $X^H \in H_uP$  y  $X^V \in V_uP$ , esto es  $X = X^H + X^V$

3  $H_{ug}P = R_{g*}H_uP$  para cualquier  $u \in P$  y  $g \in G$ .

La condición 3 establece que los subespacios horizontales  $H_uP$  y  $H_{ug}P$  en la misma fibra están relacionados por el mapeo lineal  $R_{g*}$  inducido por la acción por la derecha (ver figura B.1). Debido a esto, el subespacio en  $H_uP$  en  $u$  genera todos los demás subespacios dentro de la misma fibra. Esta condición asegura que si un punto  $u$  es transportado paralelamente, entonces cualquier múltiplo constante  $ug$  con  $g \in G$ , será transportado de la misma manera (como se verá en la sección B.1.5).

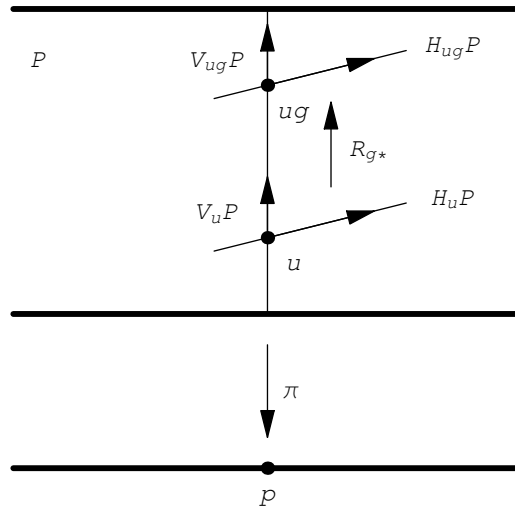


Figura B.1: El subespacio horizontal  $H_{ug}P$  se obtiene del subespacio  $H_uP$  por medio de la acción por la derecha

### B.1.3. La 1-forma de conexión

Para separar  $T_uP$  en los subespacios vertical  $V_uP$  y horizontal  $H_uP$  de manera sistemática se define una 1-forma valuada en el álgebra de Lie  $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*P$  llamada **1-forma de conexión**.

**Definición B.3** La 1-forma de conexión  $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*P$  es una ley que realiza la proyección de  $T_uP$  sobre su componente vertical  $V_uP \simeq \mathfrak{g}$ . Las propiedades de esta proyección son las siguientes:

1. La 1-forma de conexión proyecta cualquier campo vectorial fundamental  $A^\#$  en el espacio total  $P$  al vector  $A$  del álgebra de Lie, que lo genera.

$$\omega(A^\#) = A \quad A \in \mathfrak{g} \quad (\text{B.4})$$

2. Satisface (ver demostración C.3)

$$(R_g^* \omega_{ug})(X_u) = \omega_{ug}(R_{g*} X_u) = (ad_{g^{-1}} \omega_u)(X_u). \quad (\text{B.5})$$

Se define el subespacio horizontal  $H_u P$  como el kernel de  $\omega$

$$H_u P \equiv \{X \in T_u P \mid \omega(X) = 0\}. \quad (\text{B.6})$$

Esta definición es consistente con la definición B.2, dado que  $\omega$  realiza la separación de  $T_u P$  en los subespacios  $H_u P$  y  $V_u P$  y cumple el último axioma (ver proposición C.1).

#### B.1.4. La 1-forma de conexión local

Sea  $\{U_i\}$  una cobertura abierta del espacio base  $M$  y sea  $\sigma_i$  una sección local definida en la carta  $U_i$ . Se define sobre  $U_i$  una 1-forma  $\mathcal{A}_i$  con valores en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , como el pullback por  $\sigma_i$  de la 1-forma de conexión  $\omega$

$$\mathcal{A}_i \equiv \sigma_i^* \omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_i) \quad (\text{B.7})$$

Inversamente, dada una 1-forma  $\mathcal{A}_i$  con valores en  $\mathfrak{g}$  en  $U_i$ , es posible reconstruir una 1-forma  $\omega$  cuyo pullback por  $\sigma_i^*$  sea  $\mathcal{A}_i$  (ver demostración C.4)

**Teorema B.4** *Dado una 1-forma con valores en  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathcal{A}_i$  sobre  $U_i$  y una sección local  $\sigma_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ , entonces existe una 1-forma de conexión  $\omega$  tal que  $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$  en  $U_i$*

Esta 1-forma  $\omega$  se define por

$$\omega_i \equiv g_i^{-1} \pi^* \mathcal{A}_i g_i + g_i^{-1} d_P g_i. \quad (\text{B.8})$$

La 1-forma de conexión  $\omega$  definida de esta manera satisface tanto la ecuación (B.7), como los axiomas de la definición B.3, (ver demostración C.5). Para que  $\omega$  este definida unívocamente sobre  $P$ , esto es que la separación de  $T_u P = H_u P \oplus V_u P$  sea única, se debe cumplir que  $\omega_i = \omega_j$  en  $U_i \cap U_j$ . Para cumplir esta condición las formas locales  $\mathcal{A}_i$  y  $\mathcal{A}_j$  deben estar relacionadas de manera particular por alguna función de transición, la cual se encuentra empleando el siguiente lema

**Lema B.5** Sea  $P(M, G)$  un haz principal,  $\sigma_i$  y  $\sigma_j$  secciones locales sobre  $U_i$  y  $U_j$  tal que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ .

Para  $X \in T_p M$  y  $p \in U_i \cap U_j$ ,  $\sigma_{i*} X$  y  $\sigma_{j*} X$  satisfacen

$$\sigma_{j*} X = R_{t_{ij}*}(\sigma_{i*} X) + (t_{ij}^{-1} dt_{ij}(X))^{\#} \quad (\text{B.9})$$

donde  $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  es la función de transición.

La condición de compatibilidad se obtiene aplicando la relación (B.9) a la 1-forma  $\omega$ , con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \sigma_{j*} \omega(X) &= R_{t_{ij}*} \omega(\sigma_{i*} X) + t_{ij}^{-1} dt_{ij}(X) \\ &= t_{ij}^{-1} \omega(\sigma_{i*} X) t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}(X). \end{aligned}$$

Como lo anterior es válido para cualquier  $X \in T_p M$ , empleando los axiomas de la definición B.3, la ecuación anterior se reduce a

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}. \quad (\text{B.10})$$

que es la condición de compatibilidad entre  $\mathcal{A}_j$  y  $\mathcal{A}_i$ . Inversamente, dadas una cobertura abierta  $\{U_i\}$ , las secciones locales  $\{\sigma_i\}$  y las formas locales  $\{\mathcal{A}_i\}$  que cumplan la ecuación (B.10) es posible construir la 1-forma  $\omega$  con valores en  $\mathfrak{g}$  sobre  $P$ . Dado que en un haz principal no trivial no es posible tener una sección global, el pullback  $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$  existe localmente pero no necesariamente de manera global.

### B.1.5. Levantamiento horizontal y transporte paralelo

El transporte paralelo de un elemento de un haz principal a lo largo de una curva en el espacio base  $M$  está dado por el levantamiento horizontal de la curva al espacio total  $P$ .

**Definición B.6** Sea  $P(M, G)$  un haz principal y sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  una curva sobre  $M$ . Una curva  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$  es el **levantamiento horizontal** de la curva  $\gamma$  si su proyección es esta misma curva  $\gamma$ , esto es  $\pi \tilde{\gamma} = \gamma$  y si los vectores tangentes a  $\tilde{\gamma}(t)$  pertenecen a  $H_{\tilde{\gamma}(t)} P$ .

Sea  $\tilde{X}$  un vector tangente a  $\tilde{\gamma}(t)$ , entonces satisface que  $\omega(\tilde{X}) = 0$  por definición, esta condición es una ecuación diferencial ordinaria (EDO) y el teorema fundamental de las EDO garantiza la existencia local y unicidad del levantamiento horizontal.

**Teorema B.7** Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  una curva en  $M$  y  $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ . Entonces existe un único levantamiento horizontal  $\tilde{\gamma}(t)$  en  $P$  tal que  $\tilde{\gamma}(0) = u_0$ .

La curva  $\tilde{\gamma}(t)$  se construye de la siguiente forma. Sea una carta  $U_i$  que contiene a  $\gamma$  y sea  $\sigma_i$  una sección sobre  $U_i$ . El levantamiento horizontal  $\tilde{\gamma}$ , éste puede expresarse como  $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(t)$ , donde  $g_i(t) = g_i\gamma(t) \in G$ . Sin pérdida de generalidad, se puede tomar una sección tal que  $\sigma_i(\gamma(0)) = \tilde{\gamma}(0)$ , esto es  $g_i(0) = e$ . Sea  $X$  un vector tangente a  $\gamma(t)$  en  $\gamma(0)$ . Entonces  $\tilde{X} = \tilde{\gamma}_*(X)$  es tangente a  $\tilde{\gamma}$  en  $u_0 = \tilde{\gamma}(0)$ , como el vector  $\tilde{X}$  es horizontal, entonces  $\omega(\tilde{X}) = 0$ . De acuerdo con el lema (B.5) se tiene que

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= \tilde{\gamma}_*X = R_{g_i^*}(\sigma_{i*}X) + (g_i^{-1}(t)dg_i(X))^\# \\ &= g_i^{-1}(t)(\sigma_{i*}X)g_i(t) + (g_i^{-1}(t)dg_i(X))^\#.\end{aligned}$$

Aplicando  $\omega$  a esta ecuación se tiene

$$0 = \omega(\tilde{X}) = g_i^{-1}(t)\omega(\sigma_{i*}X)g_i(t) + g_i^{-1}(t)\frac{dg_i(t)}{dt}.$$

Multiplicando por la izquierda por  $g_i$  se tiene

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -\omega(\sigma_{i*}X)g_i(t). \quad (\text{B.11})$$

El teorema fundamental de las EDO garantiza la existencia y unicidad de la solución de la ecuación (B.11).

**Corolario B.8** *Sea  $\tilde{\gamma}'$  otro levantamiento horizontal de  $\gamma$  tal que  $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}(0)g$ , entonces  $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t)g$  para todo  $t \in [0, 1]$ .*

*Demostración:* El subespacio horizontal es invariante por la derecha, esto es,  $R_{g*}H_uP = H_{ug}P$ . Sea  $\tilde{\gamma}$  el levantamiento horizontal de  $\gamma$ , entonces  $\tilde{\gamma}_g : t \rightarrow \tilde{\gamma}(t)g$  es también levantamiento horizontal de  $\gamma(t)$  dado que sus vectores tangentes pertenecen a  $H_{ug}P$ , y por el teorema (B.7) se tiene que  $\tilde{\gamma}'$  es el único levantamiento horizontal que empieza en  $\tilde{\gamma}(0)g$ .

**Ejemplo 2.1 Levantamiento horizontal de una curva en el haz principal  $P(\mathbb{R}^2, A(1))$**

Se considera como el haz principal  $P(\mathbb{R}^2, A(1)) \cong \mathbb{R}^2 \times A(1)$ , donde el espacio base es  $M = \mathbb{R}^2$  y el grupo de estructura  $G$  es el grupo afín  $A(1)$ . La representación de un elemento de este grupo es:

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} e^c & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad g \in A(1). \quad (\text{B.12})$$

El elemento unidad de este grupo corresponde a  $(c = 0, b = 0)$

Los generadores del álgebra de Lie  $\mathfrak{a}(1)$  tienen como representación

$$\rho(\mathbf{T}_b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(\mathbf{T}_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

Se elige la 1-forma de conexión local como  $\mathcal{A} = T_b \otimes dX + T_c \otimes dY$ , cuya representación es

$$\rho(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} dY & dX \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

Se escoge como sección local  $\sigma : (x = X, y = Y, b = X, c = Y)$ . Con esta elección cualquier elemento  $u$  de la fibra queda definido por  $u = \sigma g_u$ , donde

$$g_u = \begin{pmatrix} e^{-y+c} & e^{-y}(b-x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.15})$$

$g_u^{-1}$  y  $dg_u$  están dados por:

$$\begin{aligned} g_u^{-1} &= \begin{pmatrix} e^{y-c} & -e^{-c}(b-x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ dg_u &= \begin{pmatrix} e^{y-c}(-dy + dc) & e^{-y}(-dy(b-x) + db - dx) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se calcula la 1-forma  $\omega$  que define el espacio horizontal, definida por

$$\omega = g_u^{-1} \pi^*(A) g_u + g_u^{-1} dg_u.$$

Sustituyendo los resultado anteriores se obtiene

$$\omega = \begin{pmatrix} dc & e^{-c}((e^y - 1)dx + db) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

Lo cual se puede escribir en terminos de los generadores  $T_b$  y  $T_c$  como:

$$\omega = T_c \otimes dc + e^{-c} T_b \otimes db + e^{-c}(e^y - 1) T_b \otimes dx. \quad (\text{B.17})$$

Se elige como curva  $\gamma(t)$  en el espacio base  $M$ , el circulo unitario cuya parametrización está dada por

$$\gamma(t) = (\cos(t), \text{sen}(t)).$$

El levantamiento horizontal de esta curva en el espacio total  $P$  será la curva  $\tilde{\gamma}(t)$  parametrizada por

$$\tilde{\gamma}(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), b(t), c(t)). \quad (\text{B.18})$$

Los vectores tangentes a  $\tilde{\gamma}(t)$  que se desean transportar paralelamente son:

$$\tilde{X}(t) = \frac{d}{dt}\tilde{\gamma}(t) = (-\text{sen}(t), \cos(t), \dot{b}(t), \dot{c}(t))$$

Para que un elemento tangente al grupo sea transportado paralelamente en el espacio total  $P$  se debe cumplir que pertenezca al kernel de la 1-forma  $\omega$ , por lo que para una curva  $\tilde{\gamma}(t)$  que pasa por  $u$  en  $t = 0$  se tiene que:

$$\omega(\tilde{\gamma}(t)) = 0, \quad (\text{B.19})$$

de esta condición de transporte paralelo se tiene:

$$\omega(\tilde{X}(t)) = -e^{-c(t)} \text{sen}(t)(e^{\text{sen}(t)} - 1)T_b + e^{-c(t)}\dot{b}(t)T_b + \dot{c}(t)T_c = 0.$$

Como  $T_b$  y  $T_c$  son linealmente independientes se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= 0, \\ \dot{b}(t) &= e^{-c(t)} \text{sen}(t)(e^{\text{sen}(t)} - 1). \end{aligned}$$

De la primera ecuación diferencial se tiene que  $c = cte$ , y si ahora se elige que  $\tilde{\gamma}(t)$  empiece desde la unidad de  $A(1)$ , entonces  $c(0) = 0$  y  $b(0) = 0$  y por lo tanto  $c(t) = 0$ . De la segunda ecuación, del resultado para  $c(t)$  y de la condición inicial para  $b(t)$  se sigue que

$$b(t) = \int_0^t \text{sen}(\tau)(e^{\text{sen}(\tau)} - 1)d\tau. \quad (\text{B.20})$$

Finalmente la curva  $\tilde{\gamma}(t)$  que satisface que sus vectores tangentes son transportados paralelamente en  $T_{\tilde{\gamma}(t)}P$  es

$$\tilde{\gamma}(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), \int_0^t \text{sen}(\tau)(e^{\text{sen}(\tau)} - 1)d\tau, 0). \quad (\text{B.21})$$

La gráfica de esta curva en el espacio x-y-b se muestra en la figura B.2, en ésta se observa que al completar  $\gamma(t)$  un período, su levantamiento horizontal  $\tilde{\gamma}(t)$  tiene una holonomía en la dirección  $b$ .  $\diamond$

Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  una curva, para un punto  $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ , existe un único levantamiento horizontal  $\tilde{\gamma}(t)$  de  $\gamma(t)$  a través de  $u_0$  y por lo tanto un único punto  $u_1 = \tilde{\gamma}(1) \in \pi^{-1}(\gamma(1))$ , ver figura (B.3).  $u_1$  es el **transporte paralelo** de  $u_0$  por encima de  $\gamma$ . Esto define un mapeo  $\Gamma(\gamma) : \pi^{-1}(\gamma(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\gamma(1))$  tal que  $u_0 \rightarrow u_1$ .

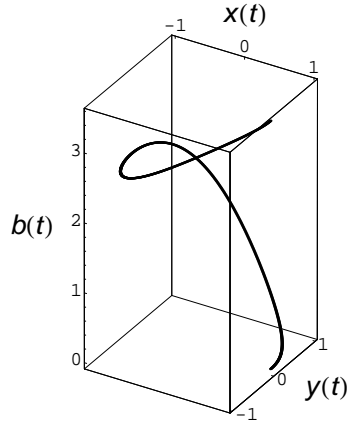


Figura B.2: Levantamiento horizontal de  $\gamma(t)$  en  $P(M, A(1))$

El corolario (B.8) asegura que  $\Gamma(\tilde{\gamma})$  conmuta con la acción por la derecha  $R_{g*}$ . Esto se debe a que  $\tilde{\gamma}(t)g$  es el levantamiento horizontal a través de  $u_0g$  y  $u_1g$  y de la unicidad del levantamiento horizontal a través de  $u_0g$  se tiene que

$$u_1g = \Gamma(\tilde{\gamma})(u_0g).$$

Por otra parte se tiene que  $R_g\Gamma(\tilde{\gamma})(u_0) = u_1g$  y  $\Gamma(\tilde{\gamma})R_g(u_0) = \Gamma(\tilde{\gamma})(u_0g)$ , por lo tanto  $R_g\Gamma(\tilde{\gamma})(u_0) = \Gamma(\tilde{\gamma})R_g(u_0)$  y dado que esto es válido para toda  $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ , se tiene que

$$R_g\Gamma(\tilde{\gamma}) = \Gamma(\tilde{\gamma})R_g. \quad (\text{B.22})$$

## B.2. Curvatura

### B.2.1. Derivada covariante en haces principales

La conexión  $\omega$  de un haz principal  $P(M, G)$  separa  $T_uP$  en  $H_uP \oplus V_uP$  y de acuerdo con esto es posible descomponer un vector  $X \in T_uP$  como  $X = X^H + X^V$ , donde  $X^H \in H_uP$  y  $X^V \in V_uP$ .

**Definición B.9** Sea  $\phi \in \Omega^r(P) \otimes V$  y  $X_1, \dots, X_{r+1} \in T_uP$ , la **derivada covariante** de  $\phi$  se define por

$$D\phi(X_1, \dots, X_{r+1}) \equiv d_P\phi(X_1^H, \dots, X_{r+1}^H) \quad (\text{B.23})$$

donde  $d_P\phi \equiv e_\alpha \otimes d_P\phi^\alpha$

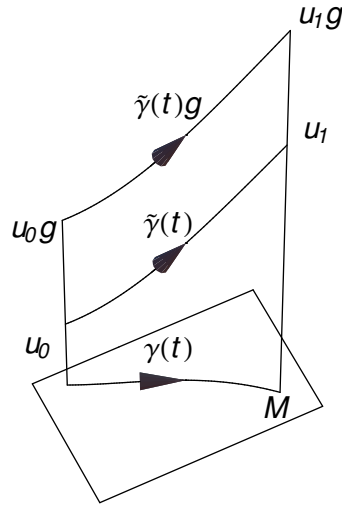


Figura B.3: Una curva  $\gamma(t)$  en  $M$  y sus levantamientos horizontales  $\tilde{\gamma}(t)$  y  $\tilde{\gamma}(t)g$

### B.2.2. Curvatura

**Definición B.10** La **2-forma de curvatura**  $\Omega$  es la derivada covariante de la 1-forma de conexión  $\omega$

$$\Omega \equiv D\omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^2(P). \quad (\text{B.24})$$

La 2-forma de curvatura satisface que (ver demostración C.7)

$$R_a^* \Omega = Ad_{a^{-1}} \Omega \quad a \in G. \quad (\text{B.25})$$

Sean  $\zeta = T_\alpha \otimes \zeta^\alpha$  una  $p$ -forma y  $\eta = T_\alpha \otimes \eta^\alpha$  una  $q$ -forma, ambas con valores en  $\mathfrak{g}$ , donde  $\zeta^\alpha \in \Omega^p(M)$ ,  $\eta^\alpha \in \Omega^q(M)$  y  $\{T_\alpha\}$  es una base de  $\mathfrak{g}$ . Se define el conmutador de  $\zeta$  y  $\eta$  por

$$\begin{aligned} [\zeta, \eta] &\equiv \zeta \wedge \eta - (-1)^{pq} \eta \wedge \zeta \\ &= T_\alpha T_\beta \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta - (-1)^{pq} T_\beta T_\alpha \eta^\beta \wedge \zeta^\alpha \\ &= [T_\alpha, T_\beta] \otimes \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta = f_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma \otimes \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Si  $\eta = \zeta$ , de la ecuación anterior se tiene

$$[\zeta, \zeta] = 2\zeta \wedge \zeta = f_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma \otimes \zeta^\alpha \wedge \zeta^\beta. \quad (\text{B.27})$$

**Teorema B.11** Sean  $X, Y \in T_u P$ , entonces  $\Omega$  y  $\omega$  satisfacen la ecuación de estructura de Cartan

$$\Omega(X, Y) = d_P \omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] \quad (\text{B.28})$$



Escribiendo la 1-forma de conexión como  $\omega = T_\alpha \otimes \omega^\alpha$  y empleando la ecuación (B.26)

$$\begin{aligned} [\omega, \omega](X, Y) &= [T_\alpha, T_\beta] \otimes \omega^\alpha \wedge \omega^\beta(X, Y) \\ &= [T_\alpha, T_\beta] \otimes (\omega^\alpha(X)\omega^\beta(Y) - \omega^\beta(X)\omega^\alpha(Y)) \\ &= [\omega(X), \omega(Y)] - [\omega(Y), \omega(X)] = 2[\omega(X), \omega(Y)] \end{aligned}$$

por lo que la ecuación (B.28) queda como

$$\Omega = d_P \omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

y por medio de la ecuación (B.27)  $\Omega$  también puede escribirse como

$$\Omega = d_P \omega + \omega \wedge \omega. \quad (\text{B.29})$$

Se puede demostrar que la definición B.10 y el teorema B.11 son equivalentes (ver demostración C.7).

### B.2.3. Forma local de la curvatura

La forma local de la curvatura  $\Omega$  se define como

$$\mathcal{F} \equiv \sigma^* \Omega \quad (\text{B.30})$$

donde  $\sigma$  es la sección local definida en una carta  $U$  de  $M$ .  $\mathcal{F}$  se expresa en términos de la forma de conexión local  $\mathcal{A}$  como

$$\mathcal{F} = d_M \mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \quad (\text{B.31})$$

donde  $d_M$  es la derivada exterior en el espacio base  $M$ . La evaluación de  $\mathcal{F}$  sobre vectores de  $TM$  está dada por

$$\mathcal{F}(X, Y) = d_M \mathcal{A}(X, Y) + [\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)]. \quad (\text{B.32})$$

**Teorema B.12** Sean  $U_i$  y  $U_j$  cartas traslapadas de  $M$  y sean  $\mathcal{F}_i$  y  $\mathcal{F}_j$  las formas locales de las curvaturas en las respectivas cartas, en la zona de intersección  $U_i \cap U_j$ , éstas satisfacen la condición de compatibilidad

$$\mathcal{F}_j = Ad_{t_{ij}^{-1}} \mathcal{F}_i = t_{ij}^{-1} \mathcal{F}_i t_{ij} \quad (\text{B.33})$$

donde  $t_{ij}$  son las funciones de transición en la región  $U_i \cap U_j$  (ver demostración C.8).



# Apéndice C

## Demostraciones referentes a conexiones en haces fibrados

**Demostración C.1** Para  $X \in V_u P$ , existe un  $A \in \mathfrak{g}$  tal que  $X = A^\#_u$ , entonces

$$\begin{aligned}\pi_* X &= \pi_* A^\#_u = \pi_* \frac{d}{dt} (u a_t) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (\pi(u a_t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\pi(u)) = \frac{d}{dt} (p) = 0 \quad \blacksquare\end{aligned}\tag{C.1}$$

**Demostración C.2** Sean  $A$  y  $B \in T_e G$  y  $A^\#$  y  $B^\#$  sus vectores fundamentales asociados en  $P$ . El conmutador de dos vectores  $[X, Y]$  es la derivada de Lie del vector  $Y$  a lo largo de  $X$ , por lo que

$$[A^\#, B^\#] = \mathcal{L}_{A^\#} B^\# = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( B^\# \Big|_e - (R_{a_t})_* B^\# \Big|_{R_{a_t}(e)} \right)$$

donde  $a_t = \exp(tA)$ . Como  $(R_{a_t})_* = (ad_{a_t})(L_{a_t})_*$ , entonces

$$[A^\#, B^\#] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( B^\# \Big|_e - (ad_{\exp(-tA)}) B^\# \Big|_e \right)$$

por otra parte

$$\begin{aligned}ad_g B^\# \Big|_e &= ad_g \frac{d}{dt} \exp(tB) = \frac{d}{dt} (g \exp(tB) g^{-1}) \\ &= \frac{d}{dt} \exp(g t B g^{-1}) = \frac{d}{dt} \exp(t ad_g B) = (ad_g B)^\# \Big|_e\end{aligned}$$

además, el mapeo  $\#$  es lineal debido a que es un isomorfismo entre espacios vectoriales, y por lo tanto

$$[A^\#, B^\#] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (B|_e - (ad_{\exp(-tA)})B|_e)^\#$$

dado que  $T_e G$  es un espacio vectorial de dimensión finita, el mapeo lineal  $\# : A \rightarrow A^\#$  es continuo y por lo tanto el proceso de límite puede ser realizado antes que  $\#$ .

$$[A^\#, B^\#] = \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((B|_e - ad_{\exp(tA)})B|_e) \right)^\#$$

procediendo similarmente a los pasos anteriores pero en sentido inverso se tiene

$$[A^\#, B^\#] = \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((B|_e - (R_{\exp(tA)})_* B|_{R_{a-t}(e)}) \right)^\#$$

que es la derivada de Lie del vector  $B$  a lo largo del vector  $A$ , con lo cual finalmente se obtiene

$$[A^\#, B^\#] = [A, B]^\# \quad \blacksquare \quad (C.2)$$

**Demostración C.3** Dado que cualquier campo vectorial  $X \in T_u P$  puede descomponerse en un campo vectorial horizontal y en un campo vectorial vertical es suficiente verificar esta condición para los dos siguiente casos

i)  $X$  es horizontal, es decir  $X \in H_u P$ , entonces por el punto 3 la definición B.2, también será horizontal, o sea  $R_{g*} X_u \in H_{ug} P$  para todo  $g \in G$  y por lo tanto, ambos,  $\omega_{ug}(R_{g*} X_u)$  y  $Ad_{g^{-1}} \omega_u(X_u)$  se anulan.

ii)  $X$  es vertical, suponiendo que  $X \in V_u P$  es el campo vectorial fundamental  $A^\#$  generado por el vector  $A$ . Entonces  $A^\#$  es inducido por el grupo de uniparamétrico  $R_{a_t}$ , y por lo tanto  $A^\#|_{u \in V_u P}$  es tangente a una curva  $\gamma(t) = R_{a_t} u$  que pasa por  $u \in G$  en  $t = 0$ , es decir  $u = \gamma(0)$ . De esto se sigue que el vector

$$(R_{g*} A^\#)|_{ug} = R_{g*} (A^\#|_u) \in V_{ug} P$$

es tangente a una curva  $\tilde{\gamma}(t) = R_g R_{a_t}(u) = R_g R_{a_t} R_{g^{-1}} u g$ , esto último porque  $u = R_{g^{-1}} u g$ . Con esto se tiene que el campo vectorial  $R_{g*} A^\#|_u$  es inducido por el grupo uniparamétrico de transformaciones  $R_g R_{a_t} R_{g^{-1}} = R_{g^{-1} a_t g}$ .

Como  $g^{-1} a_t g$  es el grupo uniparamétrico generado por  $(ad_{g^{-1}})A \in \mathfrak{g}$ , entonces para todo  $g \in G$ ,  $R_{g*}(A^\#)$  es el campo vectorial fundamental correspondiente a  $(ad_{g^{-1}})A \in \mathfrak{g}$ . Entonces se tiene que

$$(R_{g*} \omega)_u(A^\#) = \omega_{ug}(R_{g*} A^\#) = (ad_{g^{-1}})A = (ad_{g^{-1}})(\omega_u(X))$$

Con ambos casos verificados se comprueba que esta 1-forma satisface el requerimiento (B.6). ■

**Proposición C.1** *Los subespacios horizontales satisfacen que*

$$R_{g^*}H_uP = H_{ug}P \quad (\text{C.3})$$

*Demostración:* Se fija un punto  $u \in P$  y se define  $H_uP$  por (B.6). Se toma un vector  $X \in H_uP$  y con éste se construye  $R_{g^*}X \in T_{ug}P$  y con esto se encuentra que

$$\omega(R_{g^*}X) = R_g^*\omega(X) = \text{ad}_{g^{-1}}\omega(X) = g^{-1}\omega(X)g = 0$$

porque  $\omega(X) = 0$  y de acuerdo con esto  $R_{g^*}X \in H_{ug}P$ . Con base en lo anterior se ve que  $R_{g^*}$  es un mapeo lineal invertible y por lo tanto cualquier vector del espacio horizontal  $Y \in H_uP$  se puede expresar como el pushforward de otro vector  $X$ , esto es  $Y = R_{g^*}X$  para algún  $X \in H_uP$ . Con esto se demuestra que la definición con la 1-forma de conexión  $\omega$  es equivalente a la que emplea la conexión, dado que  $\omega$  separa  $T_uP$  en  $H_uP \oplus V_uP$  en concordancia con los axiomas de la definición B.2. ■

**Demostración C.4** *Se define una 1-forma sobre  $P$  con valores en  $\mathfrak{g}$  como*

$$\omega_i \equiv g_i^{-1}\pi^*\mathcal{A}_i g_i + g_i^{-1}d_p g_i \quad (\text{C.4})$$

donde  $d_p$  es la derivada exterior en  $P$  y  $g_i$  es la trivialización local canónica definida por  $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$  para  $u = \sigma_i(p)g_i$ . Primero es necesario demostrar que  $\sigma_i^*\omega_i = \mathcal{A}_i$ . Para  $X \in T_pM$  se tiene

$$\sigma_i^*\omega_i(X) = \omega_i(\sigma_{i*}X) = \pi^*\mathcal{A}_i(\sigma_{i*}X) + d_p g_i(\sigma_{i*}X) = \mathcal{A}_i(\pi_*\sigma_{i*}X) + d_p g_i(\sigma_{i*}X)$$

donde se ha empleado que  $\sigma_{i*}X \in T_{\sigma_i}P$  y por lo tanto  $g_i = e$  dado que está en  $\sigma_i$ . Además el pushforward de la proyección de la sección local es el mapeo identidad en el espacio tangente de  $P$  en  $\sigma_i$ , esto es  $\pi_*\sigma_{i*} = \text{id}_{T_p(M)}$ , así como también  $d_p g_i(\sigma_{i*}X) = 0$  dado que  $g_i = e$  en  $\sigma_{i*}X$ . Con todo esto finalmente se tiene  $\sigma_i^*\omega_i(X) = \mathcal{A}_i(X)$ . ■

**Demostración C.5**  $\omega$  *satisface los axiomas de la definición (B.3)*

1. Sea  $X = A^\# \in V_uP$  para algún  $A \in \mathfrak{g}$ , evaluando  $X$  en  $\omega$  se tiene

$$\omega_i(A^\#) = g_i^{-1}\pi^*\mathcal{A}_i(A^\#)g_i + g_i^{-1}d_p g_i(A^\#)$$

en el primer término se tiene  $g_i^{-1}\pi^*\mathcal{A}_i(A^\#)g_i = g_i^{-1}\mathcal{A}_i(\pi_*A^\#)g_i$  y del resultado C.1 se tiene que  $\pi_*(A^\#) = 0$ , por lo que solo queda el segundo término

$$\begin{aligned} \omega_i(A^\#) &= g_i^{-1}d_p g_i(A^\#) = g_i(u)^{-1} \frac{dg_i(u \exp(tA))}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= g_i(u)^{-1} g_i(u) \frac{d \exp(tA)}{dt} \Big|_{t=0} = A \end{aligned}$$

por lo que sí cumple que cualquier campo vectorial fundamental lo proyecta a su vector generador.

2. Sea  $X \in T_u P$ , y  $h \in G$ , el pullback de  $\omega$  por  $h$

$$R_h^* \omega_i(X) = \omega_i(R_{h*} X) = g_{iu}^{-1} \mathcal{A}_i(\pi_* R_{h*} X) g_{iuh} + g_{iu}^{-1} d_p g_{iuh}(R_{h*} X)$$

$\pi R_h = \pi$ , por lo tanto  $\pi_* R_{h*} X = \pi_* X$ , además  $g_{iuh} = g_{iu} h$ , por lo que

$$R_h^* \omega_i(X) = h^{-1} g_{iu}^{-1} \mathcal{A}_i(\pi_* R_{h*} X) g_{iu} h + h^{-1} g_{iu}^{-1} d_p g_{iuh}(R_{h*} X)$$

en el segundo término se tiene que para una curva  $\gamma(t)$  que pasa por  $u = \gamma(0)$  y cuyo vector tangente en  $u$  es  $X$

$$d_p g_{iuh}(R_{h*} X) = \frac{d}{dt} g_{i\gamma(t)h} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} g_{i\gamma(t)} \Big|_{t=0} h = d_p g_{iu}(X) h$$

con lo que finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} R_h^* \omega_i(X) &= h^{-1} g_{iu}^{-1} \mathcal{A}_i(\pi_* R_{h*} X) g_{iu} h + h^{-1} g_{iu}^{-1} d_p g_{iu}(X) h \\ &= h^{-1} \omega_i X h \end{aligned}$$

por lo que satisface el requerimiento  $R_h^* \omega_i = Ad_{h^{-1}} \omega_i$

Entonces la 1-forma  $\omega$  con valores en el álgebra de Lie definida por (B.8) satisface ambos, la condición  $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega_i$  y los axiomas de la 1-forma de conexión. ■

**Demostración C.6**  $(R_{a*} X)^H = R_{a*}(X^H)$  porque  $R_{a*}$  preserva subespacios horizontales (inciso 3 de la definición B.2) y además conmuta con  $d_P$ , esto es,  $d_P R_a^* = R_a^* d_P$ . Aplicando  $R_a^*$  a la definición B.10 y empleando las definiciones B.9 y B.3 se tiene

$$\begin{aligned} R_a^* \Omega(X, Y) &= \Omega(R_{a*} X, R_{a*} Y) = d_P \omega((R_{a*} X)^H, (R_{a*} Y)^H) \\ &= d_P \omega(R_{a*} X^H, R_{a*} Y^H) = R_a^* d_P \omega(X^H, Y^H) \\ &= d_P R_a^* \omega(X^H, Y^H) = d_P (a^{-1} \omega a)(X^H, Y^H) \\ &= a^{-1} d_P \omega(X^H, Y^H) a = a^{-1} \Omega a \end{aligned}$$

donde se uso que  $a$  es un elemento constante y por lo tanto  $d_P a = 0$ . ■

**Demostración C.7** Se comprueban ambas definiciones para los siguientes casos

$$\begin{array}{ll} \text{Los dos vectores son horizontales} & \{X \in H_u P, Y \in H_u P\} \\ \text{Un vector es horizontal y el otro vertical} & \{X \in H_u P, Y \in V_u P\} \\ \text{Los dos vectores son verticales} & \{X \in V_u P, Y \in V_u P\} \end{array}$$

Es suficiente comprobar estos tres casos porque  $\omega$  es lineal y antisimétrico y por lo tanto son válidos para cualesquiera vectores  $X$  y  $Y$ .

De la definición B.10

$$\Omega^1(X, Y) \equiv d_P \omega(X^H, Y^H) \quad (\text{C.5})$$

Del teorema B.11

$$\Omega^2(X, Y) = d_P \omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] = (d_P \omega + \omega \wedge \omega)(X, Y) \quad (\text{C.6})$$

Caso (1) Sean  $X, Y \in H_u P$ , entonces por la definición de  $\omega$ ,  $\omega(X)=0$  y  $\omega(Y) = 0$ , de la segunda definición se tiene  $\Omega^2(X, Y) = d_P \omega(X, Y)$ . Por otra parte dado que  $X = X^H$  y  $Y = Y^H$ , en la primera definición  $\Omega^1 = d_P \omega(X^H, Y^H) = d_P \omega(X, Y)$ , entonces  $\Omega^1 = \Omega^2$ .

Caso (2) Sean  $X \in H_u P, Y \in V_u P$ , de la forma

$$\begin{aligned} X &= X^i H_i + X^\alpha V_\alpha \\ Y &= Y^i H_i + Y^\alpha V_\alpha \end{aligned}$$

Tales que en un punto  $u \in P$ ,  $X^\alpha|_u = 0$  y  $Y^i|_u = 0$  y donde  $\{H_i\}$  y  $\{V_\alpha\}$  son los vectores en una determinada base de los espacios Horizontal y Vertical respectivamente.

Como  $Y^H|_u = 0$ , entonces por la linealidad de las formas,  $\Omega^1(X, Y) = 0$  según la primera definición.

Por otra parte, debido a que la evaluación de una  $p$ -forma depende únicamente del punto en el cual se evalúa y como  $\omega(X_u) = 0$ , entonces  $[\omega(X), \omega(Y)]|_u = 0$ , por lo que la evaluación de estos vectores en la segunda definición es

$$\Omega^2(X, Y) = d_P \omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$$

Como los vectores  $X$  y  $Y$  actúan como operadores diferenciales, es necesario conocer cómo se comportan en una vecindad alrededor de  $u$  las funciones que resultan de evaluar la 1-forma en los vectores, posteriormente aplicar los vectores y finalmente evaluar en el punto  $u$

De la definición de la 1-forma de conexión se tiene que  $\omega(H_i) = 0$  y por lo tanto la evaluación de la forma da

$$\begin{aligned} d_P \omega(X, Y) &= (X^i H_i + X^\alpha V_\alpha) \triangleright Y^\alpha \omega(V_\alpha) - (Y^i H_i + Y^\alpha V_\alpha) \triangleright X^\alpha \omega(V_\alpha) \\ &\quad - \omega([X^i H_i + X^\alpha V_\alpha, Y^i H_i + Y^\alpha V_\alpha]) \end{aligned}$$

De los dos primeros términos queda

$$\left( X^i (H_i \triangleright Y^\alpha) + X^\alpha (V_\alpha \triangleright Y^\alpha) - Y^i (H_i \triangleright X^\alpha) - Y^\alpha (V_\alpha \triangleright X^\alpha) \right) \omega(V_\alpha)$$

Expandiendo el tercer término queda

$$\begin{aligned} & -\omega \left( \left( X^i (H_i \triangleright Y^i) + X^\alpha (V_\alpha \triangleright Y^i) \right) H_i + \left( X^i (H_i \triangleright Y^\alpha) + X^\alpha (V_\alpha \triangleright Y^\alpha) \right) V_\alpha \right) \\ & +\omega \left( \left( Y^i (H_i \triangleright X^i) + Y^\alpha (V_\alpha \triangleright X^i) \right) H_i + \left( Y^i (H_i \triangleright X^\alpha) + Y^\alpha (V_\alpha \triangleright X^\alpha) \right) V_\alpha \right) \end{aligned}$$

despues de eliminar los elementos con  $H_i$  y factorizar  $\omega(V_\alpha)$ , para este último término queda

$$- \left( X^i (H_i \triangleright Y^\alpha) + X^\alpha (V_\alpha \triangleright Y^\alpha) - Y^i (H_i \triangleright X^\alpha) - Y^\alpha (V_\alpha \triangleright X^\alpha) \right) \omega(V_\alpha)$$

lo cual se anula al sumarlo al resultado de los dos primeros términos. Con este resultado finalmente se tiene que

$$\Omega^2(X, Y) = 0$$

Por lo que ambas definiciones de la 2-forma de curvatura son equivalentes para este caso.

Caso (3) Sean  $X, Y \in V_u P$ , entonces al igual que en el caso anterior  $\Omega^1(X, Y) = 0$

Por otra parte, de la segunda definición

$$\Omega^2(X, Y) = d_P \omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)]$$

$$d_P \omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$$

si se construyen campos vectoriales  $A$  y  $B$  tales que sus campos fundamentales sea  $X$  y  $Y$ , esto es que  $X = A^\#$  y  $Y = B^\#$ , entonces  $\omega(X) = A$  y  $\omega(Y) = B$  son constantes por los que los operadores diferenciales  $X$  y  $Y$  los anulan, quedando

$$\Omega^2(X, Y) = -\omega([X, Y]) + [\omega(X), \omega(Y)]$$

Como  $X$  y  $Y$  son cerrados bajo el bracket de Lie, entonces  $[X, Y] \in V_u P$  y por lo tanto existe un elemento  $C \in \mathfrak{g}$  tal que

$$\omega[X, Y] = C$$



donde  $C^\# = [X, Y]$ . Empleando la ecuación (B.3) se tiene que  $[A, B]^\# = [A^\#, B^\#] = C^\#$ , entonces  $[\omega(X), \omega(Y)] = \omega([X, Y])$  y por lo tanto

$$\Omega^2(X, Y) = 0$$

por lo que también para este caso son equivalentes ambas definiciones.

Ya probados estos tres casos queda demostrada la equivalencia para cualquier par de vectores pertenecientes a cualquier subespacio. ■

**Demostración C.8** Se sustituye la forma local de conexión  $\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}dt_{ij}$  en la forma local de curvatura  $\mathcal{F}_j = d_M \mathcal{A}_j + \mathcal{A}_j \wedge \mathcal{A}_j$ , con lo cual queda

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_j &= d(t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}dt_{ij}) + (t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}dt_{ij}) \wedge (t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}dt_{ij}) \\ &= dt_{ij}^{-1} \wedge \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}(d\mathcal{A}_i)t_{ij} - t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i \wedge dt_{ij} + dt_{ij}^{-1} \wedge dt_{ij} \\ &\quad + t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i \wedge dt_{ij} + t_{ij}^{-1}dt_{ij} \wedge t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}dt_{ij} \wedge t_{ij}^{-1}dt_{ij} \end{aligned}$$

como  $t_{ij}t_{ij}^{-1} = 1$ , entonces  $(dt_{ij})t_{ij}^{-1} + t_{ij}(dt_{ij}^{-1}) = 0$  y por lo tanto  $dt_{ij}^{-1} = -t_{ij}^{-1}(dt_{ij})t_{ij}^{-1}$ , sustituyendo esto y simplificando se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_j &= t_{ij}^{-1}(d\mathcal{A}_i)t_{ij} + t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i t_{ij} = t_{ij}^{-1}(d\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i)t_{ij} \\ \mathcal{F}_j &= t_{ij}^{-1}(\mathcal{F}_i)t_{ij} = Ad_{t_{ij}^{-1}}\mathcal{F}_i \quad \blacksquare \end{aligned}$$



# Apéndice D

## Rotación como la composición de dos reflexiones

Para realizar la rotación de un vector  $\vec{a}$  en un plano formado por los ejes  $\chi_i$  y  $\chi_j$  que se intersectan con un ángulo  $\theta/2$ , se refleja este vector  $\vec{a}$ , primero con respecto al eje  $\chi_i$  produciendo el vector  $r$ , luego éste se refleja con respecto al eje  $\chi_j$  y el vector  $\vec{b}$  resultante será de la misma magnitud pero rotado por un ángulo  $\theta$  alrededor del eje perpendicular al plano que contiene a  $\chi_i$  y  $\chi_j$ , tal como se ilustra en la figura (6.1).

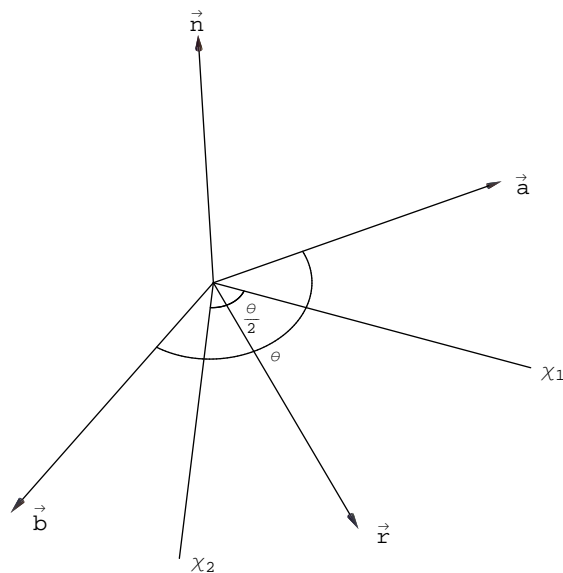


Figura D.1: Rotación de un vector como resultado de la composición de dos reflexiones

Esta rotación que lleva el vector  $\vec{a}$  al vector  $\vec{b}$  se denota como  $R(\vec{a}, \vec{b})$  y es dependiente únicamente del plano sobre el cual están los ejes con respecto a los cuales se refleja así como del ángulo entre ellos, es decir una vez elegido el plano de la rotación y el ángulo por el cual se rotará se pueden utilizar cualesquiera dos líneas que estén sobre el plano y que formen el ángulo requerido. La reflexión  $\rho$  con respecto a un eje  $\chi_i$  está dada por

$$\rho(\chi_i) = 1 - 2|\vec{n}_{\chi_i}\rangle\langle\vec{n}_{\chi_i}| \quad (\text{D.1})$$

donde  $|\vec{n}_{\chi_i}\rangle$  es el vector normal al eje y el cual también pertenece al plano sobre el cual se efectúa la rotación. Debido a la independencia de los vectores con respecto a los cuales se realizan las reflexiones, es posible seleccionar como ejes de las reflexiones al eje que coincide con la dirección del vector inicial  $\vec{a}$  y al eje que se encuentra a la mitad del ángulo comprendido entre el vector inicial y el vector final, es decir el eje que coincide con la dirección del vector  $(\vec{a} + \vec{b})/2$ . Por lo tanto, si se emplean vectores normalizados que tengan por dirección la de los ejes correspondientes con respecto a los cuales se harán las reflexiones,  $R(\vec{a}, \vec{b})$  está dado por

$$R(\vec{a}, \vec{b}) = \rho\left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{\sqrt{2 + 2g(\vec{a}, \vec{b})}}\right)\rho(\vec{a}) \quad (\text{D.2})$$

donde  $g(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ . Este método tiene la ventaja que la rotación inversa consiste únicamente en intercambiar el orden de los argumentos, esto es

$$R(\vec{a}, \vec{b})^{-1} = R(\vec{b}, \vec{a})$$

# Apéndice E

## Programa para calcular rotaciones como composición de reflexiones

Off[General::spell, General::spell1]

Definición del producto m entre bras y kets. g[x,y] es la métrica.

```
m[x_, m[y_], z_] := m[x, y, z];  
m[x_, (a_ /; FreeQ[a, k[_]] && FreeQ[a, b[_]] || Head[a] === g), z_] := am[x, z];  
m[x_, (a_ /; FreeQ[a, k[_]] && FreeQ[a, b[_]] || Head[a] === g) y_, z_] :=  
am[x, y, z];  
m[z_, Plus[x_, y_], w_] := Plus@@(m[z, #, w] & /@ List[x, y]);  
m[x_, b[y_], k[z_], w_] := g[k[y], k[z]] m[x, w];  
m[b[x_]] := b[x];  
m[k[x_]] := k[x];  
m[] = 1;
```

Definición de las propiedades de g.

```
g[y_, x_] /; Order[y, x] == -1 := g[x, y];  
g[(a_ /; Head[a] != k) y_, z_] := ag[y, z];  
g[z_, (a_ /; Head[a] != k) y_] := ag[z, y];  
g[Plus[x_, y_], z_] := Plus@@(g[#, z] & /@ List[x, y]);  
g[z_, Plus[x_, y_]] := Plus@@(g[z, #] & /@ List[x, y]);
```

Definición de productos internos empleando una métrica euclideana. Los resultados para otras métricas se pueden obtener por medio de continuación analítica.

```
g[k[w], k[w]] = 1;  
g[k[v1], k[w]] =  $\gamma n$ ;
```

```

g[k[q1], k[w]] = f;
g[k[q1], k[v1]] = 0;
g[k[q1], k[q1]] = 1;
g[k[ξ], k[ξ]] = 1;
g[k[w], k[ξ]] = 0;
g[k[q1], k[ξ]] = r;
g[k[v1], k[ξ]] = u;
g[k[v1], k[v1]] = 1;
g[k[q1], k[t]] = 0;
g[k[t], k[w]] = 0;
g[k[t], k[v1]] = γ;
g[k[t], k[ξ]] = 0;
g[k[t], k[t]] = 1;

```

Definición de la transposición.

```

star[b[x_]]:=k[x];
star[k[x_]]:=b[x];
star[Plus[x_, y_]]:=Plus@@(star[#]&/@List[x, y]);
star[(a_/;FreeQ[a, k[_]]&&FreeQ[a, b[_]]||Head[a]==g)y_]:=astar[y];
star[a_/;FreeQ[a, k[_]]&&FreeQ[a, b[_]]||Head[a]==g]:=a;
star[] = 1;

```

Definición de la reflexión  $\Pi$ , y de las rotaciones  $R_2$  y  $R$ , con argumentos normalizados.

$R[a,b]$  rota a hasta b (para métrica euclidea).

```

Π[x_]:=1 - 2m[x, star[x]];
R2[x_, y_]:=m[Π[y], Π[x]];
R[x_, y_]:= (Series[R2[x, (x + y)]/Sqrt[2 + 2g[x, y]], {ε, 0, 1}]/Normal)//Simplify;

```

Definición de la lista de todos los proyectores.

```

mList = Flatten[Outer[m[#1, #2]&, {k[w], k[q1], k[v1], k[ξ], k[t]},
{b[w], b[q1], b[v1], b[ξ], b[t]}]];

```

El vector de velocidad  $v_1$  trasladado paralelamente hasta el eje  $\hat{w}$

```

k[v1p] = (m[R[k[q1], k[w]], k[v1]]//Simplify)

```

$q_2$  difiere de  $q_1$  por una rotación por un parámetro  $\xi$

Para  $\mathbf{P}$

```

k[q2] = Series[m[R[k[w] + εk[ξ], k[w]], k[q1]]//Simplify, {ε, 0, 1}]/Normal

```

Para **K**

$$k[q2] = \text{Series}[m[R[k[t] + \epsilon k[\xi], k[t]], k[q1]] // \text{Simplify}, \{\epsilon, 0, 1\}] // \text{Normal}$$

Para el caso de **K**, el parámetro por el cual es necesario rotar para eliminar la componente temporal adquirida debido de boost es  $\epsilon r/f \hat{t}$

$$k[q2t0] = \text{Series}[m \left[ R \left[ k[w] + \epsilon \frac{r}{f} k[t], k[w] \right], k[q2] \right] // \text{Simplify}, \{\epsilon, 0, 1\}] // \text{Normal}$$

El vector de velocidad en  $S_2$  se calcula de manera análoga

Para **P**

$$k[v2t0] = \text{Series}[(m[R[k[w] + \epsilon k[\xi], k[w]], k[v1]] // \text{Simplify}), \{\epsilon, 0, 1\}] // \text{Normal}$$

Para **K**

$$k[v2] = \text{Series}[(m[R[k[t] + \epsilon k[\xi], k[t]], k[v1]] // \text{Simplify}), \{\epsilon, 0, 1\}] // \text{Normal}$$

Eliminando la parte temporal se tiene

$$k[v2t0] = \text{Series}\left(\left(m \left[ R \left[ k[w] + \epsilon \frac{r}{f} k[t], k[w] \right], k[v2] \right] // \text{Simplify} \right), \{\epsilon, 0, 1\}\right) // \text{Normal}$$

Traslandandolo paralelamente  $v2t0$  hasta el eje  $\hat{w}$

$$k[v2p] = \text{Series}[(m[R[k[q1], k[w]], k[v2t0]] // \text{Simplify}), \{\epsilon, 0, 1\}] // \text{Simplify} // \text{Normal},$$

Cálculo de los términos que componen la composición total de rotaciones

$$\text{Rq1w} = \text{Collect}[R[k[q1], k[w]], \text{mList}, \text{Simplify}];$$

$$\text{Rwq1} = \text{Collect}[R[k[w], k[q1]], \text{mList}, \text{Simplify}];$$

$$\text{Rv1pt} = \text{Collect}[R[k[v1p], k[t]], \text{mList}, \text{Simplify}];$$

$$\text{Rtv1p} = \text{Collect}[R[k[t], k[v1p]], \text{mList}, \text{Simplify}];$$

$$d\epsilon \text{Rv2pt} = D[R[k[v2p], k[t]], \epsilon] / .\epsilon \rightarrow 0;$$

$$d\epsilon \text{Rq2w} = D[R[k[q20], k[w]], \epsilon] / .\epsilon \rightarrow 0;$$

$$d\epsilon \text{R}\tau\text{w} = D \left[ R \left[ k[w] + \frac{r}{f} \epsilon k[t], k[w] \right], \epsilon \right] / .\epsilon \rightarrow 0$$

$$d\epsilon \text{RT} = D[R[k[t] + \epsilon k[\xi], k[t]], \epsilon] / .\epsilon \rightarrow 0$$

El término correspondiente al primer orden en  $\epsilon$  es

$$\omega_j = \text{Collect}[m[d\epsilon \text{Rv2pt}, \text{Rtv1p}]$$

$$+ m[\text{Rv1pt}, d\epsilon \text{Rq2w}, \text{Rwq1}, \text{Rtv1p}]$$

$$+ m[\text{Rv1pt}, \text{Rq1w}, d\epsilon \text{R}\tau\text{w} + d\epsilon \text{RT}, \text{Rwq1}, \text{Rtv1p}], \text{mList}, \text{Simplify}]$$

Descomposición  $0+(1,2,3)+4$  para simplificar el resultado anterior (para métrica euclídeana).

```
decSubs = {k[q1] → λk[q] + fk[w],
k[v1] → γk[v] + γnk[w] + γk[t],
b[q1] → λb[q] + fb[w],
b[v1] → γb[v] + γnb[w] + γb[t]};
```

El resultado final se obtiene con

```
ωJ = Collect[ωj/.decSubs, {n, r}, FullSimplify]
```



# Apéndice F

## Programa empleando representaciones matriciales

Definición de las representaciones de los generadores

$$\begin{aligned} H[\tau_-] &:= \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ P[d_-] &:= \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d[[1]] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d[[2]] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d[[3]] \\ 0 & -d[[1]] & -d[[2]] & -d[[3]] & 0 \end{pmatrix}; \\ J[\omega_-] &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega[[3]] & \omega[[2]] & 0 \\ 0 & \omega[[3]] & 0 & -\omega[[1]] & 0 \\ 0 & -\omega[[2]] & \omega[[1]] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ K[u_-] &:= \begin{pmatrix} 0 & u[[1]] & u[[2]] & u[[3]] & 0 \\ u[[1]] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u[[2]] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u[[3]] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Definición de los parámetros de cada generador

$$\begin{aligned} di &= \{d[1], d[2], d[3]\}; \\ ui &= \{u[1], u[2], u[3]\}; \\ \xi i &= \{\xi[1], \xi[2], \xi[3]\}; \\ \delta i &= \{\delta[1], \delta[2], \delta[3]\}; \\ vi &= \{v[1], v[2], v[3]\}; \end{aligned}$$

Definición de las sustituciones para las simplificaciones

$$\begin{aligned} \text{nrm2} &= C_{-x}[1]^2 + C_{-x}[2]^2 + C_{-x}[3]^2 \rightarrow Cx^2; \\ \text{dp} &= C_{-x}[1]y_{-}[1] + C_{-x}[2]y_{-}[2] + C_{-x}[3]y_{-}[3] \rightarrow Cx.y; \\ \text{umcos} &= x_{-}[i]^2 + x_{-}[j]^2 + y_{-}[k]^2 \rightarrow x^2 + x[k]^2(-1 + y); \\ \text{cuadsub} &= \{ \\ &C_{-x}[1]^2 + C_{-x}[2]^2 \rightarrow C(x^2 - x[3]^2), \\ &C_{-x}[2]^2 + C_{-x}[3]^2 \rightarrow C(x^2 - x[1]^2), \\ &C_{-x}[3]^2 + C_{-x}[1]^2 \rightarrow C(x^2 - x[2]^2)\}; \\ \text{pcmxiyi} &= \{ \\ &C_{-x}[2]y_{-}[2] + C_{-x}[3]y_{-}[3] \rightarrow C(x.y - x[1]y[1]), \\ &C_{-x}[1]y_{-}[1] + C_{-x}[3]y_{-}[3] \rightarrow C(x.y - x[2]y[2]), \\ &C_{-x}[1]y_{-}[1] + C_{-x}[2]y_{-}[2] \rightarrow C(x.y - x[3]y[3])\}; \\ \text{subs} &= \text{Flatten}\{\text{nrm2}, \text{dp}, \text{umcos}, \text{cuadsub}, \text{pcmxiyi}\}; \\ \text{dp}\delta &= \{d.\delta \rightarrow di.\delta i, u.\delta \rightarrow ui.\delta i\}; \\ \text{dp}v &= \{d.v \rightarrow di.vi, u.v \rightarrow ui.vi\}; \\ \text{Cond} &= \{d > 0, u > 0, \xi > 0\}; \\ \text{crndsub} &= \left\{ \frac{x_{-}[i]\text{Sin}[x_{-}\lambda]}{x_{-}} \rightarrow \lambda q[i], \text{Cos}[x_{-}\lambda] \rightarrow f, \text{Cosh}[x_{-}] \rightarrow \gamma, \right. \\ &\frac{(-1 + \text{Cos}[x_{-}\lambda])x_{-}[i]^2}{x_{-}^2} \rightarrow -\lambda^2 \frac{q[i]^2}{1+f}, \frac{(-1 + \text{Cos}[x_{-}\lambda])x_{-}[i]x_{-}[j]}{x_{-}^2} \rightarrow -\lambda^2 \frac{q[i]q[j]}{1+f}, \\ &\frac{\text{Sinh}[x_{-}]x_{-}[i]}{x_{-}} \rightarrow v[i], \frac{(-1 + \text{Cosh}[x_{-}])x_{-}[i]x_{-}[j]}{x_{-}^2} \rightarrow \frac{\gamma^2 v[i]v[j]}{1+\gamma}, \\ &\left. \frac{(-1 + \text{Cosh}[x_{-}])x_{-}[i]^2}{x_{-}^2} \rightarrow \frac{\gamma^2 v[i]^2}{1+\gamma} \right\}; \end{aligned}$$

Cálculo de los términos que intervienen en la composición completa

$$\begin{aligned} \text{Pd} &= \text{FullSimplify}[\text{MatrixExp}[P[di]]//.\text{subs}]; \\ \text{Ku} &= \text{FullSimplify}[\text{MatrixExp}[K[ui]]//.\text{subs}]; \\ \text{Pmd} &= \text{FullSimplify}[\text{MatrixExp}[P[-di]]//.\text{subs}]; \\ \text{Kmu} &= \text{FullSimplify}[\text{MatrixExp}[K[-ui]]//.\text{subs}]; \\ \text{P}\xi &= P[\xi i]; \\ \text{K}\xi &= K[\xi i]; \\ \text{Hm}\tau &= H[-\tau]; \\ \text{Hs} &= H[s]; \\ \text{Pmd}\delta &= D[\text{FullSimplify}[\text{MatrixExp}[P[-(di + \epsilon\delta i)]]//.\text{subs}], \epsilon] /. \epsilon \rightarrow 0; \\ \text{Kmu}v &= D[\text{FullSimplify}[\text{MatrixExp}[K[-(ui + \epsilon vi)]]//.\text{subs}], \epsilon] /. \epsilon \rightarrow 0; \end{aligned}$$

```

Mmu $\nu$ u =
Collect[Collect[FullSimplify[Kmu $\nu$ .Ku]//.subs, vi, FullSimplify]//.subs,
u, Simplify]//.subs;
Mmd $\delta$ d =
Collect[Collect[FullSimplify[Pmd $\delta$ .Pd]//.subs,  $\delta$ i, Simplify]//.subs,
d, Simplify]//.subs;
Mmumd $\delta$ du =
Collect[
FullSimplify[Collect[FullSimplify[Kmu.Mmd $\delta$ d.Ku]//.subs,  $\delta$ i, Simplify]//.
subs]//.subs, u, Simplify];

```

Término de la composición total dependiente del generador cuya representación se desea encontrar

Para P

```
Mmdm $\tau$  $\xi$ d = FullSimplify[FullSimplify[Pmd.(Hm $\tau$  + P $\xi$ ).Pd]//.subs];
```

Para K

```
Mmdm $\tau$  $\xi$ d = FullSimplify[FullSimplify[Pmd.(Hm $\tau$  + K $\xi$ ).Pd]//.subs];
```

Mmumd $m\tau\xi$ du =

```
Collect[Collect[(Kmu.MPmdm $\tau\xi$ d.Ku), di, FullSimplify]//.subs, u, FullSimplify]//.
subs;
```

La composición total es

```
M = Mmu $\nu$ u + Mmumd $\delta$ du + Mmumd $m\tau\xi$ du;
```

Resolviendo para  $\tau$  y  $\delta$

```

M15 = Simplify[M[[1, 5]]];
solK $\tau$  = Simplify[Solve[M15 == 0,  $\tau$ ]//Flatten]
M25 $\tau$ sb = Simplify[Simplify[M[[2, 5]]/.sol $\tau$ ]
M35 $\tau$ sb = Simplify[Simplify[M[[3, 5]]/.sol $\tau$ ]
M45 $\tau$ sb = Simplify[Simplify[M[[4, 5]]/.sol $\tau$ ]
Mi5dpui = Simplify[Simplify[M25 $\tau$ sbu[1] + M35 $\tau$ sbu[2] + M45 $\tau$ sbu[3]]//.subs]
udp $\delta$ sub = Simplify[Solve[Mi5dpui == 0, u. $\delta$ ]//Flatten]
 $\tau$ sub = Solve[Simplify[M15//.udp $\delta$ sub] == 0,  $\tau$ ]//Flatten
M25 $\tau$ sub = Simplify[(M[[2, 5]]//. $\tau$ sub)//.udp $\delta$ sub]/.dp $\delta$ 
M35 $\tau$ sub = Simplify[(M[[3, 5]]//. $\tau$ sub)//.udp $\delta$ sub]/.dp $\delta$ 
M45 $\tau$ sub = Simplify[(M[[4, 5]]//. $\tau$ sub)//.udp $\delta$ sub]/.dp $\delta$ 

```

```
 $\delta_{\text{sub}} = \text{Solve}\{\text{M25}\tau_{\text{sub}} == 0, \text{M35}\tau_{\text{sub}} == 0, \text{M45}\tau_{\text{sub}} == 0\}, \delta_{\text{i}}\} // \text{Flatten}$ 
```

Los valores de  $\tau$  y  $\delta$  son

```
 $\tau\delta_{\text{sub}} = \text{Flatten}\{\tau_{\text{sub}}, \delta_{\text{sub}}\};$ 
```

Resolviendo para  $v$

```
 $\text{M12}\tau\delta_{\text{sb}} = \text{Simplify}[(\text{M}[[1, 2]] /. \text{dp}\delta) // .\tau\delta_{\text{sub}}]$ 
```

```
 $\text{M13}\tau\delta_{\text{sb}} = \text{Simplify}[(\text{M}[[1, 3]] /. \text{dp}\delta) // .\tau\delta_{\text{sub}}]$ 
```

```
 $\text{M14}\tau\delta_{\text{sb}} = \text{Simplify}[(\text{M}[[1, 4]] /. \text{dp}\delta) // .\tau\delta_{\text{sub}}]$ 
```

```
 $\text{M1idpui} =$ 
```

```
 $\text{Simplify}[\text{Simplify}[\text{M12}\tau\delta_{\text{sbu}}[1] + \text{M13}\tau\delta_{\text{sbu}}[2] + \text{M14}\tau\delta_{\text{sbu}}[3]] // .\text{subs}]$ 
```

```
 $\text{udp}\nu_{\text{sub}} = \text{Solve}[\text{M1idpui} == 0, u.v] // \text{Flatten}$ 
```

```
 $\text{M12} = \text{Simplify}[\text{M12}\tau\delta_{\text{sb}} /. \text{udp}\nu_{\text{sub}}]$ 
```

```
 $\text{M13} = \text{Simplify}[\text{M13}\tau\delta_{\text{sb}} /. \text{udp}\nu_{\text{sub}}]$ 
```

```
 $\text{M14} = \text{Simplify}[\text{M14}\tau\delta_{\text{sb}} /. \text{udp}\nu_{\text{sub}}]$ 
```

```
 $\nu_{\text{sub}} = \text{Simplify}[\text{Solve}\{\text{M12} == 0, \text{M13} == 0, \text{M14} == 0\}, v_{\text{i}}] // \text{Flatten} // .\text{subs}$ 
```

Los valores de  $\tau$ ,  $\delta$  y  $v$  son

```
 $\tau\delta\nu_{\text{subs}} = \text{Flatten}\{\tau\delta_{\text{sub}}, \nu_{\text{sub}}\}$ 
```

Finalmente los parámetros de la rotación son

```
 $\omega_1 = \text{Simplify}[\text{M}[[4, 3]] /. \tau\delta\nu_{\text{subs}}]$ 
```

```
 $\omega_2 = \text{Simplify}[\text{M}[[2, 4]] /. \tau\delta\nu_{\text{subs}}]$ 
```

```
 $\omega_3 = \text{Simplify}[\text{M}[[3, 2]] /. \tau\delta\nu_{\text{subs}}]$ 
```

# Bibliografía

- [1] Jackiw *Physical Instances of Noncommuting Coordinates*.  
(2001) hep-th/0110057
- [2] Snyder H. *Quantized Space-Time*.  
Physical Review, Vol. **71**, 38-41, (1947)
- [3] Yang C. N. *On Quantized Space-Time*.  
Physical Review, Vol. **72**, 874, (1947)
- [4] Vilela Mendez R. *Deformations, stable theories and fundamental constants*.  
J. Phys. Math. Gen **27**, 8091-8104, (1994)
- [5] Kowalski-Glikman J. Nowak S. *Non commutative space-time of doubly especial relativity theories* hep-th/0204245 (2002)
- [6] Currie D. G., Jordan T. F., Sudarshan E. C. G., *Relativistic Invariance and Hamiltonian Theories of Interacting Particles*.  
Reviews of Modern Physics, Vol. **35**, No. **2**, 350-375, (1963)
- [7] Dirac P. A. M. *Forms of Relativistic Dynamics*.  
Reviews of Modern Physics, Vol. **21**, No. **3**, 392-399, (1949)
- [8] Foldy L *Relativistic Particle Systems with Interaction*.  
Physical Review, Vol. **122**, No. **1**, 275-288, (1961)
- [9] Wigner E., Bargmann V. *Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations*.  
Proc. Natl. Acad. Sci. Vol. **34**, 211-223, (1948)
- [10] Weinberg S. *The Quantum Theory of fields*, Vol. **1**  
Cambridge University Press, (1995)
- [11] Goldstein H., Poole C. y Saftko J. *Classical Mechanics*.  
3era. Edición, Ed. Addison Wesley (2002)

- 
- [12] Mourad J. *Space-Time Events and Relativistic Particle Localization*.  
gr-qc/9310018, (1993)
- [13] Greiner W. *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations*.  
Springer Verlag 3. Ed. (2000)
- [14] Thaller V. *The Dirac Equation*.  
Springer Verlag p. 25 (1992)
- [15] Pryce M. H. L. *The Mass-centre in the restricted Theory of Relativity and Its  
Connexion with Quantum Theory of Elementary Particles*.  
Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Vol. **195**, No. **1040**, 62-81,  
(1948)
- [16] Jordan T. F., Mukunda N. *Lorentz-Covariant Position Operators for Spinning  
Particles*.  
Physical Review, Vol. **132**, No. **4**, 1842-1848, (1963)
- [17] Dirac P. A. M. *The Electron Wave Equation in De-Sitter Space*.  
The Annals of Mathematics, Vol. **36**, No. **3**, 657-669, (1935)
- [18] Barut A. O. and Böhm. A. *Dynamical Groups and Mass Formula*.  
Physical Review, Vol. **139**, No. **4B**, B1107-B1112, (1965)
- [19] Chryssomalakos C. y Okon E. *Generalized Quantum Relativistic Mechanics: a  
stability point of view*.  
International Journal of Modern Physics D Vol. 13 pp. 2003-2034 (2004)
- [20] Nakahara M. *Geometry, Topology and Physics*  
Institute of Physics Publishing, London, (1990)
- [21] Kobayashi S. Nomizu K. *Foundations of differential geometry*  
New York, Interscience, (1969)