



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DINÁMICA Y ENLAZAMIENTO EN UN SISTEMA
DE DOS ROTORES PATEADOS CUÁNTICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

SAÚL HERNÁNDEZ QUIROZ

DR. LUIS BENET FERNÁNDEZ

2007





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Hernández

Quiroz

Saúl

55 76 26 36

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

097284660

2. Datos del tutor

Dr

Luis

Benet

Fernández

3. Datos del sinodal 1

Dr

Octavio Héctor

Castaños

Garza

4. Datos del sinodal 2

Dr

Ramón

Peralta

Fabi

5. Datos del sinodal 3

Dr

Hugo

Hernández

Saldaña

6. Datos del sinodal 4

Dr

Thomas Henry

Seligman

Schurch

7. Datos del trabajo escrito

Dinámica y enlazamiento en un sistema de dos rotores pateados cuánticos

64 p

2007

A Mis Padres

Índice general

Índice	IV
Resumen	VI
Introducción	VII
1. El Rotor Pateado	1
1.1. Hamiltoniano del Rotor Pateado	1
1.2. Mapeo	1
1.3. Retrato Fase	3
1.4. Teorema de KAM	5
1.5. Difusión	7
1.6. Operador de Evolución Cuántico	8
1.7. Localización Dinámica	9
1.8. Resonancias Cuánticas	10
2. Dos Rotores Pateados Cuánticos Acoplados	15
2.1. El Modelo y su Hamiltoniano	15
2.2. Operador de Evolución	16
2.3. Simulación Numérica	16
2.4. Energía Cinética	17
2.5. Enlazamiento	18
2.6. Entropía y Pureza	19
3. Localización Dinámica y Resonancias Cuánticas	22
3.1. Localización Dinámica	22
3.2. Resonancias Cuánticas	31

4. Pureza, Entropía y Enlazamiento	38
4.1. Decaimiento de la Pureza	38
4.2. Crecimiento de la Entropía	44
4.3. Pureza y Entropía en el caso de Resonancias Cuánticas	49
Conclusiones	51
A. Operador de Evolución del Rotor Pateado Cuántico	53
Bibliografía	55

Resumen

En el presente trabajo se introduce un modelo que, de hecho, es una generalización de un modelo importante llamado “El Rotor Pateado”. La generalización consiste en el acoplamiento de dos rotores pateados cuánticos a través de un potencial de interacción de corta distancia, modulado por un parámetro de acoplamiento.

Se encuentra que la localización dinámica, un efecto importante en el rotor pateado cuántico, se ve suprimida por el acoplamiento entre rotores. Así mismo, se encuentra que las resonancias cuánticas, otro efecto observado en el rotor pateado cuántico, persisten aun para acoplamiento fuerte entre rotores.

Se observó un comportamiento oscilatorio en el decaimiento de la pureza y, por tanto, del grado de información que se tiene acerca del estado cuántico del sistema. Dichas oscilaciones desaparecen conforme aumentan las magnitudes de los parámetros de acoplamiento entre rotores y de la fuerza de los impulsos.

Se encontró que el enlazamiento, dentro del rango de parámetros que se estudiaron, es una función monótona creciente del acoplamiento entre rotores para tiempos grandes, es decir, a mayor acoplamiento entre rotores, mayor es el enlazamiento observado.

Introducción

El rotor pateado clásico es un sistema que, en función de la magnitud de los impulsos aplicados al rotor, se comporta caóticamente en mayor o en menor medida. Básicamente, el sistema corresponde a una partícula restringida a moverse en una trayectoria circular; a ésta se le aplican impulsos periódicos cuya magnitud depende de su posición angular. Al rotor pateado se le puede identificar con un péndulo al que se le enciende y apaga periódicamente el potencial gravitacional. Existe también el equivalente cuántico del rotor pateado clásico. El Hamiltoniano del rotor pateado cuántico se obtiene reemplazando las variables canónicas p y q del Hamiltoniano clásico por los correspondientes operadores de la mecánica cuántica.

El rotor pateado ha sido un modelo ampliamente estudiado en la física puesto que su versión clásica ha jugado un papel muy importante en el campo de la teoría de Caos Conservativo. El Mapeo Estándar o de Chirikov-Taylor, el cual se obtiene al resolver las ecuaciones de movimiento para el Hamiltoniano del rotor pateado. El mapeo apareció en 1960 en el contexto de la dinámica del electrón en microtrones. Este mapeo fue estudiado numéricamente por Taylor en 1968 y Chirikov en 1969. Así mismo, muchos de los conceptos en la teoría del Caos Cuántico fueron desarrollados en el rotor pateado cuántico desde que se estudió, en 1979, por Casati y sus colaboradores [1].

Por otra parte, el rotor pateado cuántico exhibe fenómenos sin contraparte clásica. Estos fenómenos son la localización dinámica y las resonancias cuánticas. La localización dinámica consiste en la supresión del crecimiento de la energía cinética promedio después de un cierto tiempo de evolución y es debida a efectos de interferencia. Las resonancias cuánticas se caracterizan por fomentar un crecimiento cuadrático asintótico en la energía cinética promedio y se observan bajo determinadas condiciones, las cuales se exponen en el capítulo 1. En resumen, la energía

transferida al rotor es menor (en el caso de localización dinámica) o mayor (en el caso de resonancias cuánticas) en el caso cuántico que en el clásico.

En 1935, Einstein, Podolsky y Rosen formularon un experimento pensado cuyo resultado es que la descripción de la realidad dada por la función de onda no es completa[2]. Posteriormente a este experimento pensado se le llamó “la paradoja EPR”. Por ejemplo, es posible preparar dos partículas en un único estado cuántico tal que cuando una de ellas es observada con espín hacia arriba, la otra siempre es observada con espín hacia abajo y viceversa. Como resultado, mediciones realizadas en uno de los sistemas parece influenciar instantáneamente la medición del otro sistema. A este fenómeno se le llama entanglement (en inglés). La traducción al español de la palabra entanglement está aun en discusión, algunas de las traducciones son: enlazamiento, entrelazamiento, enredamiento y enmarañamiento. En el presente trabajo se usará la palabra enlazamiento como traducción de la palabra entanglement. El estudio del enlazamiento del estado cuántico de un sistemas de partículas ha dado pie a la posibilidad del desarrollo de nuevas tecnologías como la computación cuántica y la información cuántica[3, 4].

En el presente trabajo se introduce un modelo que, de hecho, es una generalización del rotor pateado cuántico. La generalización consiste en el acoplamiento de dos rotores pateados cuánticos a través de un potencial de interacción periódico. La periodicidad de la interacción entre los rotores está modelada por un tren de deltas de Dirac. A cada rotor se le aplica por separado una serie de impulsos cuya magnitud depende tanto de un parámetro K , como de su posición angular. Para nuestros fines, la magnitud del impulso K aplicado a cada rotor es la misma. Así mismo, se ha escogido unidades en las que, tanto el periodo de aplicación de los impulsos como el periodo de la interacción entre rotores es la unidad.

Parte del presente trabajo está enfocado al estudio de la localización dinámica y de las resonancias cuánticas para el caso de dos rotores pateados cuánticos acoplados, puesto que es interesante conocer cómo se modifican estos efectos. Otra parte importante del trabajo consiste en el estudio de la evolución del enlazamiento para el modelo propuesto. Para este fin, se estudia el comportamiento de la pureza y de la entropía, puesto que estas medidas brindan información acerca del grado de enlazamiento en el que se encuentra el sistema.

Uno de los motivos del porqué utilizar el rotor pateado es que es un modelo particularmente simple de analizar puesto que, por un lado, las ecuaciones clásicas

de movimiento se pueden reducir a un mapeo discreto; mientras que en la contraparte cuántica el estado en el que se encuentra el sistema después de N impulsos está dado por N aplicaciones sucesivas del operador de evolución. Otro motivo importante es el hecho de que en la actualidad es posible realizar experimentos con el rotor pateado cuántico. El primer experimento con el rotor pateado cuántico fue hecho con una muestra diluida de átomos de sodio ultrafríos por M. G. Raizen y colaboradores en 1995[5].

En el capítulo 1 se tratan algunos aspectos importantes del rotor pateado, tanto en la parte clásica como en su contraparte cuántica, esto con el objetivo de aclarar y sentar las bases de los conceptos necesarios para el desarrollo del presente trabajo.

En el capítulo 2 se expone el modelo utilizado, su Hamiltoniano, el operador de evolución y algunos detalles técnicos relacionados con la simulación numérica. Del mismo modo se define la entropía y la pureza, cuya utilidad radica en la descripción cuantitativa del enlazamiento del sistema.

En el capítulo 3 se estudia la existencia de localización dinámica y de resonancias cuánticas para el modelo de dos rotores pateados cuánticos acoplados. También se expone para ambos casos su evolución y comportamiento como función de la interacción entre rotores y de la magnitud del impulso aplicado a cada rotor.

En el capítulo 4 se estudia el comportamiento de la pureza y la entropía y, por tanto, del enlazamiento como función de los parámetros involucrados en un sistema con dos rotores pateados cuánticos.

Capítulo 1

El Rotor Pateado

1.1. Hamiltoniano del Rotor Pateado

El rotor pateado está descrito por el Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2} + K \cos(q) \sum_n \delta(t - nT), \quad (1.1)$$

el cual describe la dinámica de una partícula de masa $m = 1$ y momento angular p restringida a moverse sobre una trayectoria circular. A la partícula se le aplican periódicamente (con periodo T) impulsos(patadas) descritos por un tren de “n” funciones delta en el tiempo. La magnitud del impulso que el rotor recibe en un instante dado depende tanto del parámetro K , como de su posición angular; puesto que el potencial al que esta sujeto el rotor depende de su posición angular.

El efecto que los impulsos imprimen en la partícula se reflejan en un cambio instantáneo en el momento angular de la partícula. Vale la pena comentar que el parámetro K determina que tan caótico es el comportamiento del rotor.

1.2. Mapeo

Del Hamiltoniano (ec.1.1) notamos que, en el intervalo de tiempo entre dos impulsos, el término de energía potencial es cero, por lo que el movimiento corresponde al de un rotor libre, es decir, la variable “ q ” evoluciona linealmente en el

tiempo. Dicho intervalo se define normalmente como la identidad ($T = 1$). Al momento del impulso, el término del potencial domina sobre el término de la energía cinética, lo cual da como resultado un cambio instantáneo en el momento angular de la partícula, aunque no así de la posición angular. Con estas observaciones podemos integrar las ecuaciones de Hamilton a lo largo de un periodo T del Hamiltoniano y obtener el mapeo de Chirikov-Taylor. La manera de proceder es aplicar primero el impulso y luego la evolución libre.

Del Hamiltoniano (ec.(1.1)), las ecuaciones de Hamilton son:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = K \sin(q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (1.2)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p.$$

Denotando como p_n y q_n al momento y posición angular del rotor al tiempo inmediatamente anterior a la aplicación del $n + 1$ impulso, las ecuaciones (1.2) se convierten en lo que se conoce como el mapeo estándar:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + K \sin(q_n), \\ q_{n+1} &= (q_n + p_{n+1}) \bmod(2\pi), \end{aligned} \quad (1.3)$$

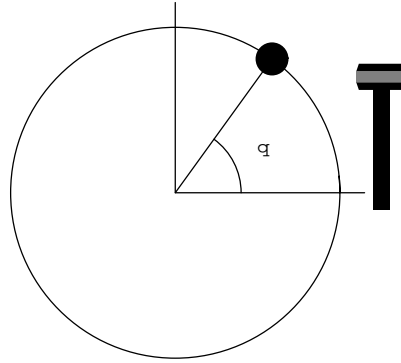


Figura 1.1: El rotor pateado consiste de una partícula restringida a moverse sobre una trayectoria circular, a la cual periódicamente se le aplican impulsos(patadas) cuya magnitud depende del parámetro K y de la posición angular del rotor.

En este punto cabe hacer algunos comentarios acerca del mapeo estándar. Con esta notación, la condición inicial (p y q al tiempo $t = 0$) está dada por p_0 y q_0 . De las condiciones de frontera impuestas por el modelo ($0 \leq q < 2\pi$) se sigue la periodicidad de la coordenada q .

1.3. Retrato Fase

En mecánica clásica el estado dinámico de un sistema está dado por el conjunto de posiciones y momentos de cada uno de los componentes del sistema, es decir, un punto en un espacio $2mN$ dimensional, en donde “ N ” es el número de partículas constituyentes del sistema y “ m ” es el número de grados de libertad de las partículas. A este espacio $2mN$ dimensional se le llama “Espacio Fase”. La evolución temporal de un punto en el espacio fase está gobernada por las ecuaciones de Hamilton.

En el caso del rotor pateado, por tratarse de un problema con un grado de libertad, el espacio fase es bidimensional. El “retrato fase” o “sección de Poincaré” es una vista estroboscópica de los estados dinámicos por los que pasa el sistema, es decir, en el retrato fase no se observan todos los estados dinámicos por los que pasa el sistema, sino que sólo se observan los estados cada intervalo de tiempo T (ver ec.1.1). Para obtener el retrato fase, se aplican las ecuaciones de movimiento a un ensamble de condiciones iniciales tomadas aleatoriamente. Dada una condición inicial, iterar el mapeo estándar es completamente equivalente a la aplicación de las ecuaciones de movimiento a dichas condiciones, por lo que los estados dinámicos estroboscópicos por los que pasa el sistema están dados por los resultados de las iteraciones consecutivas del mapeo.

El tipo de trayectoria descrita en el retrato fase depende, tanto de la condición inicial, como del parámetro perturbativo K ; de hecho, el parámetro K define el comportamiento general del sistema. Es claro de la ecuación (1.1) que para $K = 0$ el comportamiento corresponde al de una partícula libre, es decir, partículas con momento angular constante cuyas trayectorias en el retrato fase son líneas rectas perpendiculares al eje del momento angular (ver fig. (1.2 a)).

Para valores de K distintos de cero, el comportamiento es completamente diferente. Como se muestra en la figura (1.2 b) el retrato fase está dividido en dos

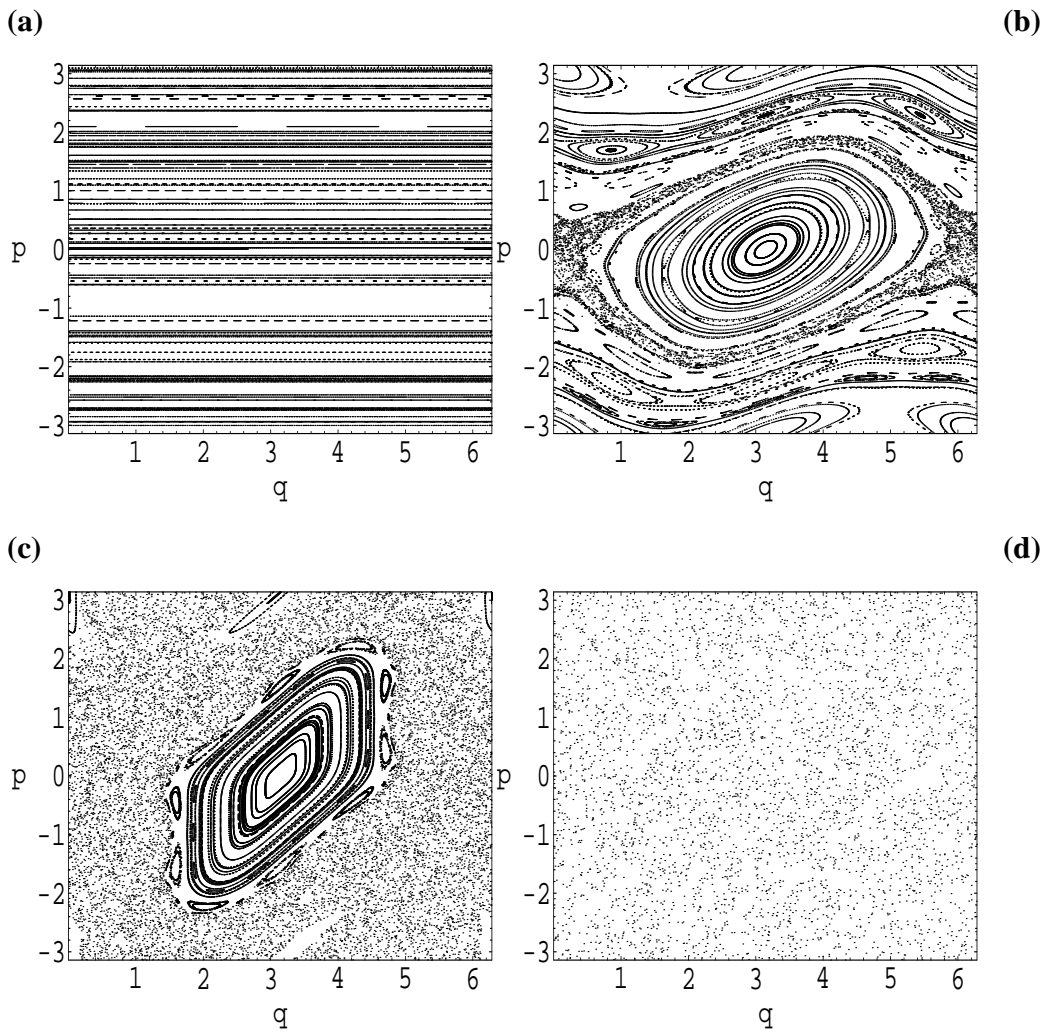


Figura 1.2: Retrato fase del rotor pateado para diferentes magnitudes de K : a) $K = 0.0$, b) $K = 0.8$, c) $K = 2.0$ y d) $K = 10.0$. Aquí podemos apreciar la transición de una dinámica completamente ordenada de partícula libre (a) a una completamente caótica (d), pasando por situaciones con dinámica mixta(b y c). Como podemos ver, el comportamiento de este sistema depende fuertemente del parámetro perturbativo K , puesto que para $K = 0$ el movimiento corresponde simplemente al de la partícula libre(a), mientras que para K muy grande, la dinámica es completamente caótica(d). La figuras se construyeron con 75 condiciones iniciales tomadas de manera aleatoria. La aparente existencia de estructura en la figura a) es debida a la simulación numérica. Esta estructura desaparece conforme se incrementa el tiempo de la simulación numérica.

regiones, una interior y otra exterior. La región interior corresponde a movimiento acotado, es decir, movimiento en el que las amplitudes de las oscilaciones del rotor son menores que 2π . La región exterior corresponde a movimiento libratorio, es decir, movimiento en el que las amplitudes de las oscilaciones del rotor son mayores que 2π . Finalmente, para valores de K mayores, el movimiento se torna cada vez más caótico (figs. (1.2 c y d)).

1.4. Teorema de KAM

En un sistema integrable con dos grados de libertad las curvas que representan los estados dinámicos por los que pasa el sistema permanecen en la superficie de un toro construido por las variables de ángulo-acción $(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2)$, cuyos radios son $\rho_i = \sqrt{J_i}$. Si las frecuencias con las que evolucionan las variables de ángulo, definidas por: $\omega_i = \frac{d\theta_i}{dt}$ son conmensurables, entonces el movimiento de este sistema será periódico (ver fig. 1.3).

Existe un teorema muy importante para el análisis de los sistemas dinámicos llamado “teorema de KAM”, llamado de esta manera en honor a Kolomogorov, quien lo propuso en 1954, y a Arnold (1963) y Moser (1962) quienes desarrollaron de manera más rigurosa las ideas de Kolmogorov. El teorema de KAM explica la existencia de curvas estables (toros de KAM) bajo perturbaciones pequeñas ($\epsilon \ll 1$) de un sistema mecánico integrable (H_0) en términos de la inconmensurabilidad de las frecuencias ω_i con las que evoluciona el sistema sobre el toro formado por las variables de ángulo acción en H_0 . El teorema de KAM explica que entre mayor sea la inconmensurabilidad de las frecuencias de la trayectoria, mayor será la probabilidad de que ese toro persista ante una perturbación[6].

Las resonancias son regiones en el espacio fase formadas por toros cuyas frecuencias ω_i son racionales. Las resonancias dan lugar a trayectorias caóticas causadas por la aparición de un número par de puntos fijos elípticos e hiperbólicos en sustitución de lo que alguna vez fue un toro resonante. Entre mayor sea la magnitud de la perturbación, mayor será la región de la resonancia. Estas regiones tienden a destruir los toros de KAM conforme crecen. Cuando los toros de KAM son destruidos por la perturbación, estos se convierten en curvas tipo Cantor (cantoros). El último toro destruido por la perturbación es llamado toro dorado y corresponde al toro con cociente de frecuencia igual a al número dorado ($\frac{\omega_1}{\omega_2} = (1 + \sqrt{5})/2$).

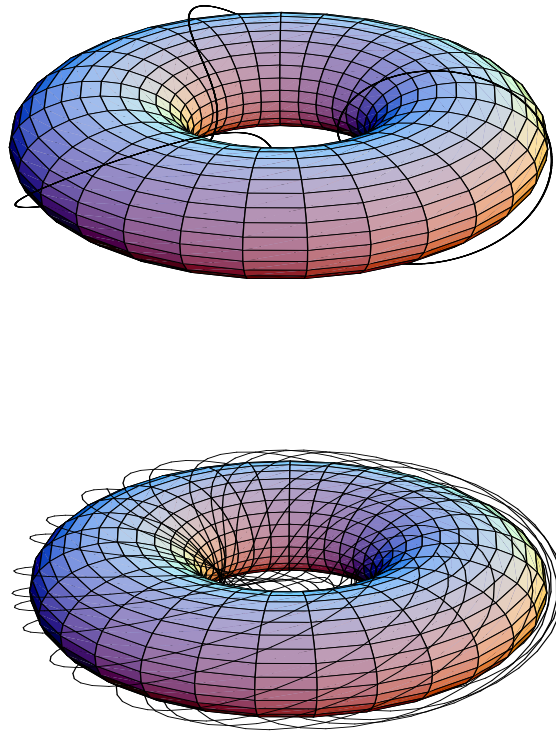


Figura 1.3: En un sistema integrable con dos grados de libertad las curvas que representan los estados dinámicos por los que pasa el sistema permanecen en la superficie de un toro construido por las variables de ángulo-acción $(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2)$, cuyos radios son $\rho_i = \sqrt{J_i}$. Si las frecuencias $\omega_i = \frac{d\theta_i}{dt}$ son conmensurables la trayectoria será periódica (arriba), en caso contrario la trayectoria nunca se cierra. En el caso de la figura inferior el cociente de las frecuencias es $\frac{\omega_1}{\omega_2} = (1 + \sqrt{5})/2$.

El teorema original requería de perturbaciones del orden de $\epsilon = 10^{-48}$. La prueba del teorema dada por Arnold requería que el potencial perturbativo fuera de clase C^∞ y la de Moser requería que el potencial fuera de clase C^{333} [7], posteriormente en la versión de la prueba de Moser se redujo a C^5 por Rüssmann [8].

En el contexto del rotor pateado, el sistema mecánico integrable H_0 corresponde a un rotor (partícula libre confinada a moverse en una trayectoria circular), y la perturbación $\epsilon V = \epsilon \cos(q)$ corresponde al tren de impulsos aplicados periódicamente al rotor, por lo que el rotor pateado es un sistema con un Hamiltoniano del tipo $H = H_0 + \epsilon V$ y, por tanto, el teorema de KAM es válido en éste sistema.

1.5. Difusión

Los toros de KAM forman barreras impenetrables para la difusión del momento en el mapeo estándar. Conforme aumenta la magnitud del parámetro perturbativo del mapeo estándar la dinámica se torna cada vez más complicada, en general, las regiones de resonancia crecen y convierten toros de KAM en cantoros. Finalmente, después de un cierto valor del parámetro perturbativo ($K \approx 0.9716354$), el último toro de KAM se convierte en un cantoro y, sólo entonces, no hay más toros que paren la difusión del momento. Las órbitas periódicas restantes tienen efecto sobre la difusión del momento en el mapeo estándar. Este efecto fue estudiado por Chirikov.

Pensemos por un momento en el caso fuertemente caótico, es decir, el parámetro perturbativo es tan grande que no hay órbitas estables presentes. Dado lo anterior, los valores consecutivos de p_n y q_n no están correlacionados con los valores de p y q anteriores. Calculando la varianza $\langle (\Delta p(t))^2 \rangle$ tenemos que:

$$\langle (p_n - p_0)^2 \rangle = K^2 \sum_{n=1}^N \langle (\sin q_n)^2 \rangle + K^2 \sum_{n \neq m} \langle \sin q_n \sin q_m \rangle.$$

Dada la no correlación entre pasos consecutivos, se cumple que:

$$\langle \sin q_n \sin q_m \rangle = \frac{1}{2} \delta_{n,m},$$

por lo que

$$\langle (p_n - p_0)^2 \rangle = \frac{K^2}{2}N,$$

en donde K es la fuerza del impulso y N es el número de impulsos aplicados.

Esto implica que el promedio de la energía cinética crece linealmente en el tiempo y proporcionalmente con el cuadrado de la fuerza del impulso.

$$\langle \frac{p^2}{2} \rangle = \frac{K^2}{4}N \quad (1.4)$$

1.6. Operador de Evolución Cuántico

Para el Hamiltoniano del rotor pateado cuántico, utilizando la ecuación de Schrödinger ($i\hbar\partial_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle$), se puede derivar a una relación entre el estado al tiempo $n + 1$ en función del estado al tiempo n vía el operador de evolución que, como sabemos, es tal que $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t - t_0)|\psi(t_0)\rangle$.

Dicha relación es:

$$|\psi_{n+1}\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{p}^2}{2}\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}K\cos(\hat{q})\right\} |\psi_n\rangle. \quad (1.5)$$

En el apéndice 1 se presenta una deducción formal del operador de evolución en términos del operador del orden del tiempo. Para obtener la ecuación (1.5), otra forma de proceder es cuantizar el mapeo clásico. Primero que nada, hay que identificar la condición inicial q_0, p_0 en el caso clásico con el estado inicial $|\psi_0\rangle$ en el caso cuántico. Similarmente se identifican las posiciones q_n, p_n con el estado $|\psi_n\rangle$. El operador de evolución, en general, se escribe como:

$$\hat{U}(T) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_t^{t+T} dt' \hat{H}(t')\right\} = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_t^{t+T} dt' \left(\frac{\hat{p}^2}{2} + K\cos(\hat{q}) \sum_n \delta(t' - nT)\right)\right\}.$$

Según el mapeo (ec. 1.3), primero se aplica un impulso al estado inicial y a esto le

sigue un periodo T de evolución libre. Esto lo escribimos en términos del operador de evolución como la aplicación de dos operadores, uno seguido de otro. Por supuesto que el primer operador que se aplica corresponde al impulso mientras que el segundo corresponde a la evolución libre.

$$\hat{U}_{impulso} = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} K \cos(\hat{q}) \right\},$$

$$\hat{U}_{libre} = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \frac{T \hat{p}^2}{2} \right\},$$

$$\hat{U}_{total} = \hat{U}_{libre} \hat{U}_{impulso}.$$

La ecuación (1.5) se recupera para el caso en el que $T = 1$ y aplicando el operador de evolución al estado al tiempo n ($|\psi_n\rangle$).

Como vemos, el operador de evolución escrito en esta forma es muy simple puesto que consiste de dos términos separados, uno de evolución libre y otro relacionado con los impulsos aplicados. Dado lo anterior, el estado del sistema después de N impulsos está dado por N aplicaciones sucesivas del operador de evolución a una distribución de condiciones iniciales.

1.7. Localización Dinámica

El rotor pateado cuántico, en promedio, gana energía conforme pasa el tiempo al igual que en el caso clásico, sin embargo, en contraste con la situación clásica el intervalo de tiempo en el que gana energía es muy corto, después del cual la difusión es suprimida [1]. A este efecto cuántico se le llama localización dinámica y consiste en la supresión de la difusión después del tiempo de Heisenberg. Lo que sabemos acerca del tiempo de Heisenberg es que es proporcional al inverso de \hbar .

A grandes rasgos sucede que, para tiempos menores al tiempo de Heisenberg, el espectro discreto no se percibe y el sistema cuántico evoluciona imitando la difusión clásica, por lo que el valor promedio de la energía cinética evoluciona de

forma similar. El estudio analítico del comportamiento de la razón de difusión para tiempos tempranos fue estudiado por Shepelyansky [10, 11] en los años ochenta y, recientemente, por Daley y Parkins [12]. Después del tiempo de Heisenberg se observa un comportamiento oscilatorio por parte del valor de la energía cinética promedio alrededor de algún valor (fig. 1.4), es decir, la energía cinética se satura. Cabe mencionar que dicho valor, al igual que el tiempo de localización, depende de los parámetros K y \hbar .

Además de la saturación de la energía cinética, se observa un decaimiento exponencial en el perfil de la distribución de la densidad de probabilidad en la representación del momento ($\rho(p) = \psi^*(p)\psi(p)$). Una manera de visualizar el perfil de dicha distribución consiste en crear un tapete cuántico. El tapete cuántico es una gráfica de la densidad de probabilidad de la función de onda en alguna de las representaciones como función del tiempo. El tapete cuántico en el caso de localización dinámica luce prácticamente constante en el tiempo, a excepción de los tiempos tempranos, en los que existe difusión (ver figura 1.5).

1.8. Resonancias Cuánticas

Otra característica especial del rotor pateado cuántico consiste en la existencia de resonancias cuánticas cuando \hbar es un múltiplo racional de 4π , es decir, si $\hbar = 4\pi\frac{a}{b}$ con a y b enteros. En dichas condiciones se observa un crecimiento cuadrático en la energía cinética promedio, tal y como puede apreciarse de la figura (1.6), en contraste con el crecimiento lineal observado en la contraparte clásica (ec. 1.4). La condición de resonancia se obtiene considerando el cociente de la frecuencia de transición entre dos niveles de energía de rotor libre $\omega_{nm} = (E_n - E_m)/\hbar$, con $E_n = \frac{1}{2}\hbar^2 n^2$, y de la frecuencia de los golpes $\omega = 2\pi$ (para $T=1$). Esto es:

$$\frac{\omega_{nm}}{\omega} = \frac{\hbar}{4\pi}(n^2 - m^2).$$

Este cociente es racional si se cumple que:

$$\hbar = 4\pi\frac{a}{b}. \quad (1.6)$$

En este caso $\rho(p)$ cambia de exponencial a gaussiano (ver figura 1.7) debido al crecimiento cuadrático de la energía cinética promedio, lo cual se refleja en el ensanchamiento del mismo conforme pasa el tiempo, tal y como se aprecia en el tapete cuántico de la figura (1.5)

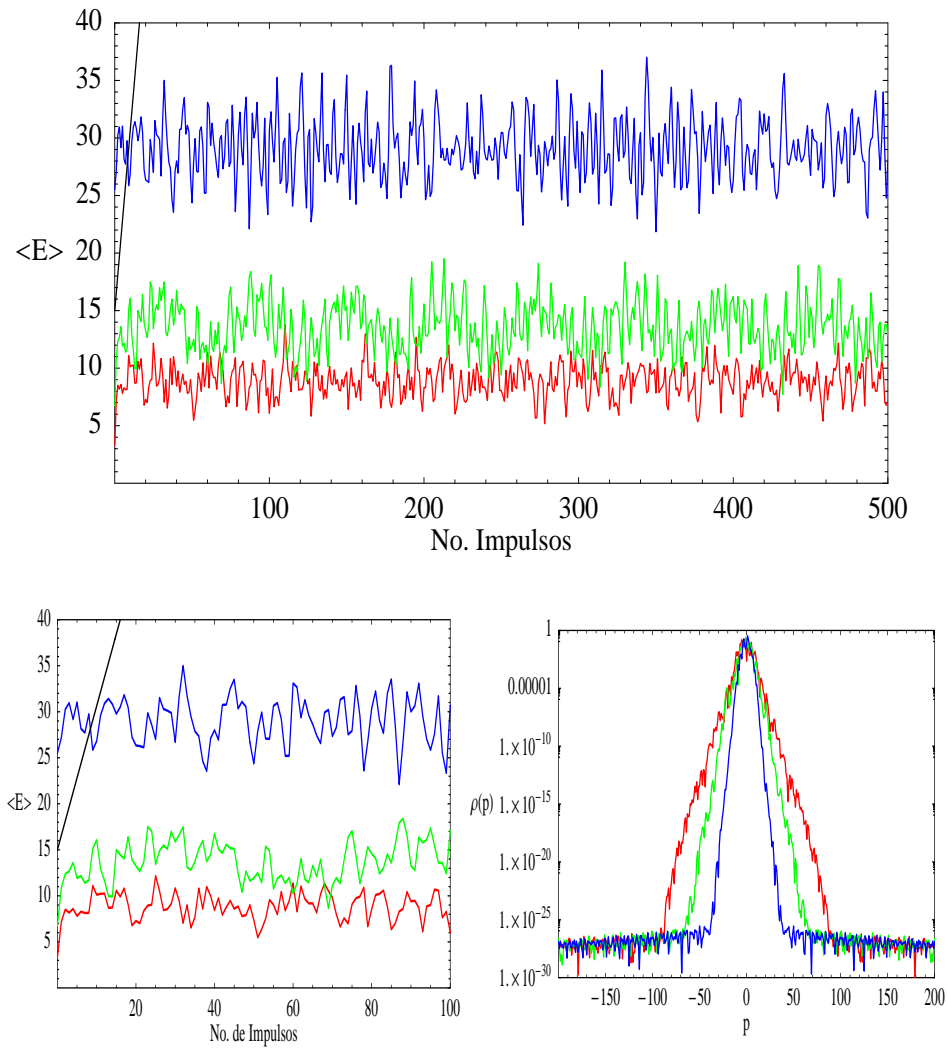


Figura 1.4: En la gráfica superior se muestra la saturación del valor esperado de la energía cinética debida a la localización dinámica para tres distintos valores de \hbar (en rojo $\hbar = 1.2$, en verde 1.6 y en azul 2.0) como función del número de impulsos. En la gráfica inferior izquierda se muestra un acercamiento a los primeras 100 impulsos, la línea recta corresponde a la difusión clásica. Finalmente en la gráfica inferior derecha se muestra el decaimiento exponencial del perfil de la distribución de probabilidad en la representación del momento ($\rho(p) = \psi^*(p)\psi(p)$) después de 2000 impulsos.

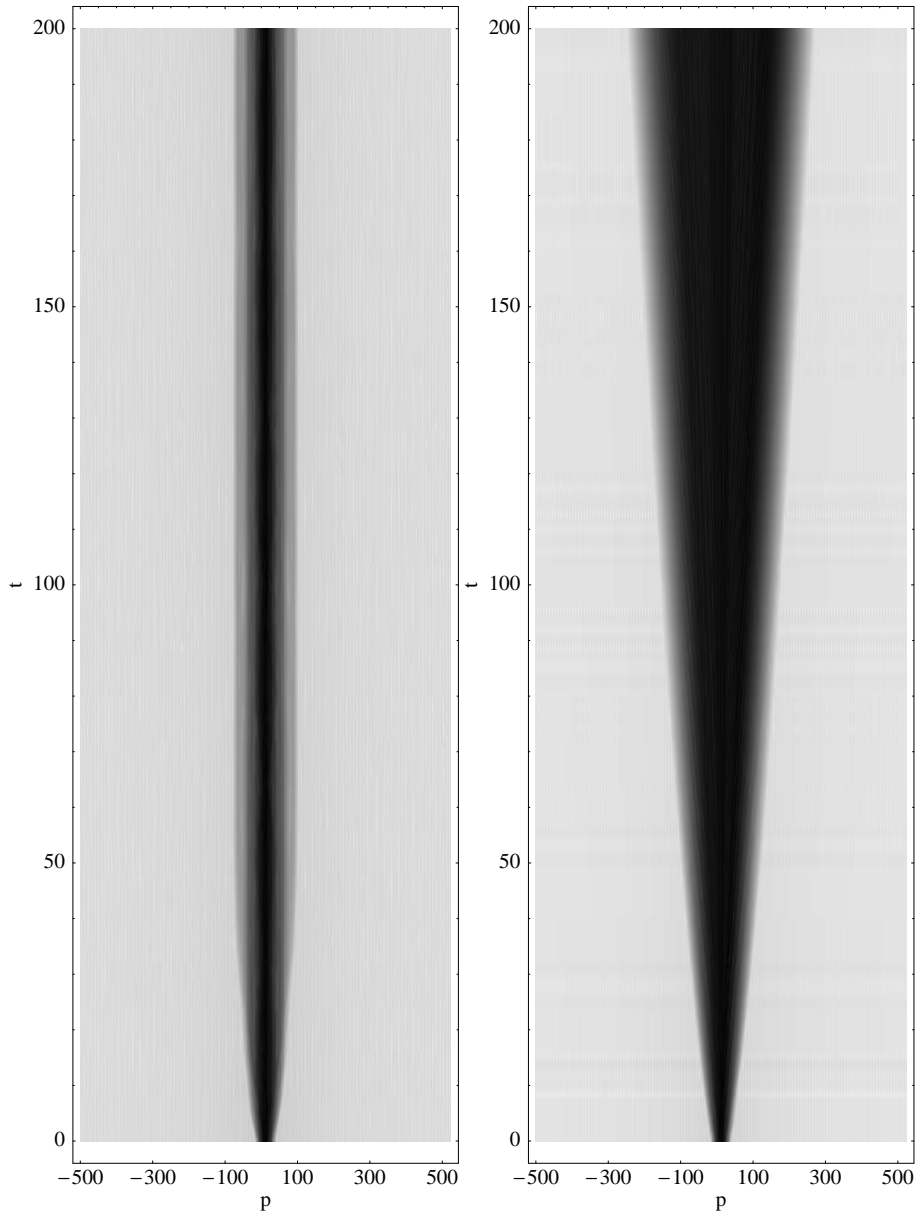


Figura 1.5: En esta gráfica se observan los tapetes cuánticos para los casos de localización dinámica (izquierda, $\hbar = 1.32$) y de resonancia cuántica (derecha, $\hbar = \frac{\pi}{2}$) para 200 impulsos y $K = 3$. En el caso de localización dinámica, el perfil de la distribución de probabilidad permanece constante después del tiempo de Heisenberg en contraste con el caso de resonancia.

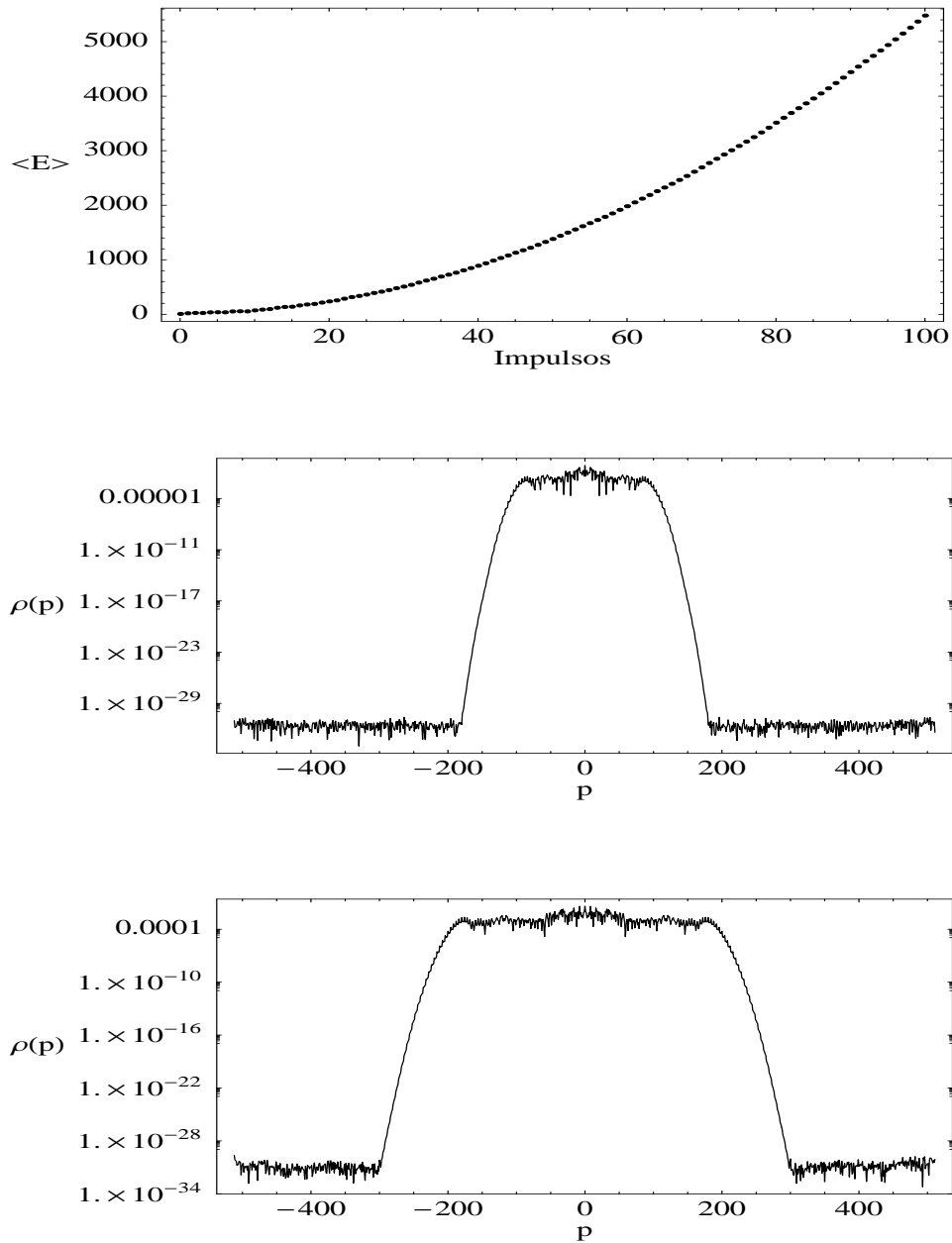


Figura 1.6: Gráficas resultado de una simulación numérica en el caso de resonancia cuántica para $\hbar = \frac{\pi}{2}$ y $K = 5$. En la gráfica superior se aprecia el crecimiento cuadrático del promedio de la energía cinética para 100 impulsos. En medio, la correspondiente distribución de probabilidades de la función de onda en la representación del momento después de 50 impulsos. Finalmente, en la gráfica inferior se encuentra la distribución de probabilidades de la función de onda en la representación del momento después de 100 impulsos.

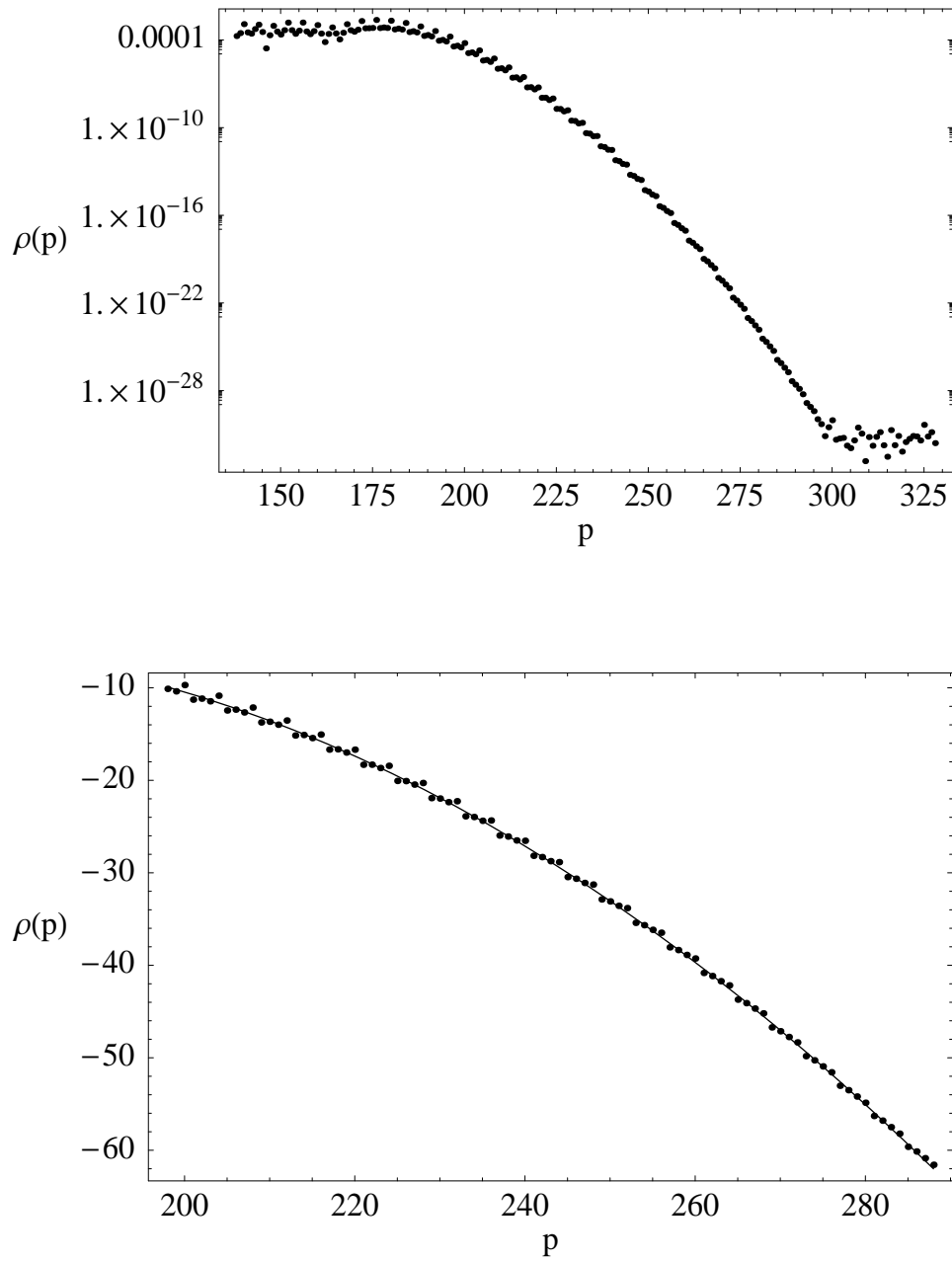


Figura 1.7: En estas gráficas se observa el ajuste hecho a una parte de la distribución de probabilidades de la función de onda en la representación del momento ($\rho(p)$) correspondiente a 100 impulsos, del cual se sigue que el decaimiento es de tipo gaussiano.

Capítulo 2

Dos Rotores Pateados Cuánticos Acoplados

2.1. El Modelo y su Hamiltoniano

El modelo estudiado consiste de dos rotoreos pateados cuánticos distinguibles acoplados a través de una interacción gaussiana de varianza pequeña. Tanto los impulsos aplicados como la interacción entre los rotoreos es periódica en el tiempo con periodo T en funciones delta. Este modelo consta de dos parámetros perturbativos; el parámetro K relacionado con la magnitud de los impulsos, y el parámetro g relacionado con la magnitud de la interacción entre los rotoreos. El Hamiltoniano de este sistema es:

$$H = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{2} + \left\{ K_1 \cos \hat{q}_1 + K_2 \cos \hat{q}_2 + g \exp\left(\frac{-(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^2}{2s^2}\right) \right\} \sum_n \delta(t - nT). \quad (2.1)$$

El estado inicial lo escogemos como el producto de dos estados con distribución gaussiana con posición q_{i_0} , momento p_{i_0} y ancho s_i , esto es:

$$|\psi(t=0)\rangle = |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle, \quad (2.2)$$

con

$$\langle q_i | \psi_i \rangle = \exp\left(\frac{-(q_i - q_{i_0})^2}{2s_i^2}\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_{i_0} q_i\right).$$

2.2. Operador de Evolución

De los Hamiltonianos (1.1) y (2.1), denotando el estado al tiempo n (después de n impulsos) como $|\psi_n\rangle = |\psi(t=n)\rangle$ y contando con el operador de evolución del rotor pateado cuántico (ec.1.5), no es difícil convencerse de que el operador de evolución para este modelo es tal que:

$$|\psi_{n+1}\rangle = \hat{U}_{\text{libre}} \hat{U}_{\text{impulso+interaccion}} |\psi_n\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{2m}\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} K(\cos(\hat{q}_1) + \cos(\hat{q}_2)) - g \frac{i}{\hbar} e^{-(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^2/2s^2}\right) |\psi_n\rangle, \quad (2.3)$$

con las mismas implicaciones, es decir, el término de evolución libre (\hat{U}_{libre}) está separado de los términos de interacción mutua e impulso ($\hat{U}_{\text{impulso+interaccion}}$)

La aplicación del operador de evolución al estado es relativamente simple. La evolución libre es fácil de aplicar en el espacio de momentos puesto que es simplemente un cambio de fase al vector de estado. De igual manera, tanto el impulso como la interacción entre los rotores son cambios de fase en el espacio de posiciones.

La expresión analítica del estado después de n impulsos está dada por n aplicaciones consecutivas del operador de evolución al estado inicial. Sin embargo, para obtener información acerca del estado del sistema es necesaria la aplicación de simplificaciones, las cuales se tornan cada vez más complicadas e inclusive difíciles de interpretar. Dado lo anterior, la forma más simple de proceder es numéricamente.

2.3. Simulación Numérica

Para pasar del espacio de posiciones al espacio de momentos (y viceversa) es necesaria la aplicación de una transformada de Fourier bidimensional, lo cual equivale a aplicar $2N$ transformadas discretas de Fourier. Existe un algoritmo eficiente basado en el aprovechamiento de las simetrías del arreglo llamado Fast Fourier Transform (Transformada Rápida de Fourier). Con este algoritmo es posible realizar transformadas discretas de Fourier con menos operaciones de las necesarias para realizar una transformada discreta de Fourier normal.

Es posible realizar el cálculo de una serie de cantidades importantes una vez que se cuenta con el vector de estado en las distintas representaciones como función del número de impulsos. Por ejemplo, la evolución del valor esperado de la energía del sistema (que en nuestro caso coincide con la energía cinética) es más fácil de calcular cuando contamos con el vector de estado en la representación del momento. La entropía y la pureza, como veremos en la sección (2.6), la podemos calcular en cualquiera de las dos representaciones gracias a que la traza es independiente de la base donde es calculada.

En resumen, el procedimiento para la realización de la simulación numérica del sistema consiste en la aplicación sucesiva del operador de evolución al estado inicial. La evolución libre se realiza en el espacio de momentos y tanto el impulso como la interacción mutua entre rotores se realizan en el espacio de posiciones. Para pasar el estado del espacio de momentos al de posiciones (y viceversa) se aplica una Transformada Rápida de Fourier bidimensional. Es posible obtener las distribuciones de probabilidad de la función de onda tanto en el espacios de posición como en el de momentos. En el espacio de momentos se calcula el valor promedio de la energía del sistema. La pureza y la entropía se pueden calcular en cualquiera de los dos espacios.

2.4. Energía Cinética

Una de las cantidades interesantes es sin duda el valor esperado de la energía del sistema, definida como:

$$E_n = \langle \psi_n | \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{2} | \psi_n \rangle, \quad (2.4)$$

puesto que, tanto la interacción entre los rotores como la acción del impulso sobre ellos está modelada por un tren de deltas de Dirac, su contribución a la energía del sistema es nula.

La importancia de la energía promedio radica en que nos ofrece un elemento comparativo con el caso del rotor pateado cuántico. Recordemos que en el caso de una partícula existen la localización dinámica y las resonancias cuánticas, ambos efectos fácilmente identificables cuando se observa la evolución del valor esperado de la energía promedio con el número de impulsos aplicados.

2.5. Enlazamiento

Existe un fenómeno cuántico en el cual los estados de dos o más objetos están correlacionados, aún si éstos están espacialmente separados. Por ejemplo, es posible preparar dos partículas en un único estado cuántico tal que cuando una de ellas es observada con espín hacia arriba, la otra siempre es observada con espín hacia abajo y viceversa. Como resultado, mediciones realizadas en uno de los sistemas parece influenciar instantáneamente la medición del otro sistema (fig. 2.1). A este fenómeno se le llama enlazamiento.

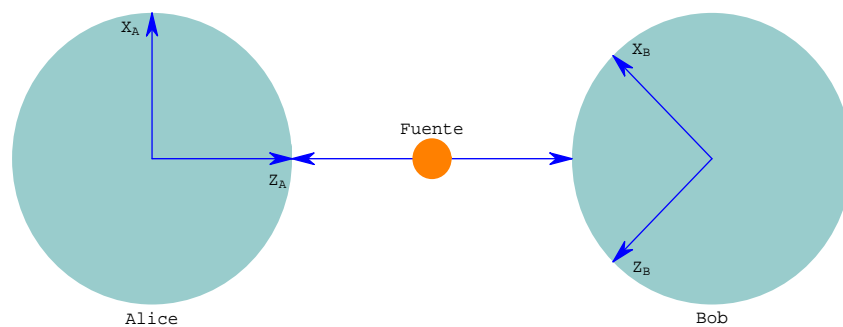


Figura 2.1: Experimento pensado de EPR hecho con electrones. Alice y Bob son dos observadores separados una distancia arbitrariamente grande. El estado cuántico del sistema es, por ejemplo, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle)$. Alice mide el espín del electrón proveniente de la fuente a lo largo del eje z . El resultado de la medición puede ser uno de dos: $+z$ o $-z$. De acuerdo con la Mecánica Cuántica, el estado cuántico del sistema se colapsa a un estado después de una medición, por lo que, si Alice mide $+z$, entonces Bob mide $-z$ con probabilidad uno.

Cuantificar el enlazamiento es importante porque nos ofrece información acerca del estado cuántico de un sistema. Para cuantificarlo se definen cantidades tales como la entropía y la pureza, mismas que estudiaremos en la siguiente sección.

2.6. Entropía y Pureza

Las definiciones de entropía y pureza utilizadas en el presente trabajo están dadas en términos de la matriz de densidad. A continuación se presenta, a manera de introducción, algunas características importantes de la matriz de densidad.

Se dice que un estado cuántico $|\psi\rangle$ es puro (separable) cuando se puede escribir como el producto de dos estados cuánticos $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle$. La matriz de densidad de un estado cuántico puro es un operador definido como:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (2.5)$$

mientras que para un estado no puro toma la forma:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (2.6)$$

en donde las p_i son las probabilidades de los estados $|\psi_i\rangle$.

La matriz de densidad es hermitiana, es decir, es tal que $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$ con eigenvalores reales entre 0 y 1. La suma de sus eigenvalores es la unidad. Dada la matriz de densidad $\hat{\rho}$, la probabilidad de medir el estado $|A\rangle$ está dado por $\langle A|\hat{\rho}|A\rangle$.

Por otra parte, la entropía representa el grado de ignorancia acerca del estado de un sistema. Dada una variable X aleatoria y discreta con distribución P_X y definiendo p_x la probabilidad de que $X = x$, la entropía de Boltzmann-Gibbs-Shannon de la distribución de probabilidad P_X se define como:

$$S(P_X) = - \sum_x p_x \ln p_x,$$

cuya propiedad importante es la extensividad, es decir, que cuando dos sistemas independientes se unen para formar un nuevo sistema, la entropía del sistema es la suma de las entropías de los sistemas por separado.

Una expresión equivalente para la entropía de un sistema cuántico en términos de su matriz de densidad $\hat{\rho}$ ha sido dada por von Neumann:

$$S = -\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}). \quad (2.7)$$

Para evaluar esta expresión, escribimos la matriz $\hat{\rho}$ en la forma $V^\dagger DV$, en donde D es la matriz diagonal de los eigenvalores (λ) de $\hat{\rho}$, y V es la matriz cuyas columnas están formadas por los correspondientes eigenvectores de $\hat{\rho}$, entonces:

$$\begin{aligned} S &= -\text{Tr}\{\hat{\rho} \ln(\hat{\rho})\} = -\text{Tr}\{(V^\dagger DV) \ln(V^\dagger DV)\} \\ &= -\text{Tr}\{V^\dagger DVV^\dagger \ln(D)V\} = -\text{Tr}\{V^\dagger(D \ln(D))V\} \\ &= -\text{Tr}\{D \ln(D)\} = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i. \end{aligned}$$

Como vemos, la entropía de von Neumann tiene la misma forma de la entropía de Shanonn puesto que los eigenvalores de $\hat{\rho}$ son las probabilidades de encontrar a una partícula en el eigenestado correspondiente.

La pureza es otra forma de medida del grado de incertidumbre que se tiene acerca de un estado cuántico y se define como:

$$P = \text{Tr}(\hat{\rho}^2) = \sum \lambda_i^2. \quad (2.8)$$

Para aclarar la diferencia entre las matrices de densidad de estados puros y de estados no puros consideremos los siguientes dos ejemplos. Tomemos un estado puro $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle$, de la ecuación (2.5) se sigue que la matriz de densidad está dada por:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \otimes |\psi_2\rangle\langle\psi_2|.$$

El estado en el que se encuentra uno de los sistemas está dado por la traza parcial sobre el otro sistema. En el contexto de los dos rotors, la matriz reducida del sistema uno, por ejemplo, es:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1 &= \text{Tr}_2\{|\psi_1\rangle\langle\psi_1| \otimes |\psi_2\rangle\langle\psi_2|\} \\ &= |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \text{Tr}_2\{|\psi_2\rangle\langle\psi_2|\} \\ &= |\psi_1\rangle\langle\psi_1|. \end{aligned}$$

Ahora consideremos el caso de un estado no puro, por ejemplo un estado enlazado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi'_1\rangle|\psi'_2\rangle$, de la ecuación (2.6) se sigue que la matriz de densidad está dada por:

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \frac{1}{2}|\psi_1\rangle\langle\psi_1| \otimes |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + \frac{1}{2}|\psi'_1\rangle\langle\psi'_1| \otimes |\psi'_2\rangle\langle\psi'_2| \\ &+ \frac{1}{2}|\psi_1\rangle\langle\psi'_1| \otimes |\psi_2\rangle\langle\psi'_2| + \frac{1}{2}|\psi'_1\rangle\langle\psi_1| \otimes |\psi'_2\rangle\langle\psi_2|,\end{aligned}$$

con lo que:

$$\hat{\rho}_1 = \text{Tr}_2\hat{\rho} = \frac{1}{2}|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \frac{1}{2}|\psi'_1\rangle\langle\psi'_1|.$$

En el contexto de los dos rotores pateados acoplados, la medición de la entropía y pureza se realiza aplicando las relaciones respectivas a la matriz de densidad reducida de una de las partículas (por ejemplo $\hat{\rho}_1$) en cada tiempo t_n .

Para un estado puro, la matriz de densidad $\hat{\rho}$ tendrá un eigenvalor igual a uno y todos los demás igual a cero. Esto implica que la entropía y la pureza tendrán valores de cero y uno respectivamente. Por otro lado, para un estado no puro la entropía y la pureza serán en general mayor que cero y menor que uno respectivamente. Es aquí en donde radica la importancia de la pureza y de la entropía como medida del enlazamiento puesto que distinguen cualitativamente entre estados puros y estados no puros.

Capítulo 3

Localización Dinámica y Resonancias Cuánticas

3.1. Localización Dinámica

El decaimiento exponencial del perfil de $\rho(p)$ y la saturación del crecimiento del valor esperado de la energía promedio del sistema son indicadores de la existencia de localización dinámica. En el caso de dos rotores pateados cuánticos acoplados se identifica también la existencia de localización dinámica con la ayuda de estos indicadores (fig. 3.1)

En general se observa que la localización dinámica se ve modificada con respecto al caso con un solo rotor tanto por el parámetro de acoplamiento entre rotores como por la magnitud de los impulsos aplicados a cada rotor. A consecuencia de esto último, la cantidad de energía promedio que llegan a ganar los rotores es mayor entre mayor es la magnitud de dichos parámetros. Esto se aprecia en la evolución de la energía cinética promedio en el tiempo y, equivalentemente, con el número de impulsos aplicados al sistema. Así mismo, se aprecian cambios en el perfil de la densidad de probabilidad de la función de onda en la representación del momento.

En la figura (3.1) se muestra la evolución de la energía promedio y la correspondiente gráfica de densidad de probabilidad en la representación del momento para un caso en el que se observa localización dinámica. Con la finalidad de apreciar con más detalle la influencia de los parámetros involucrados en el modelo sobre

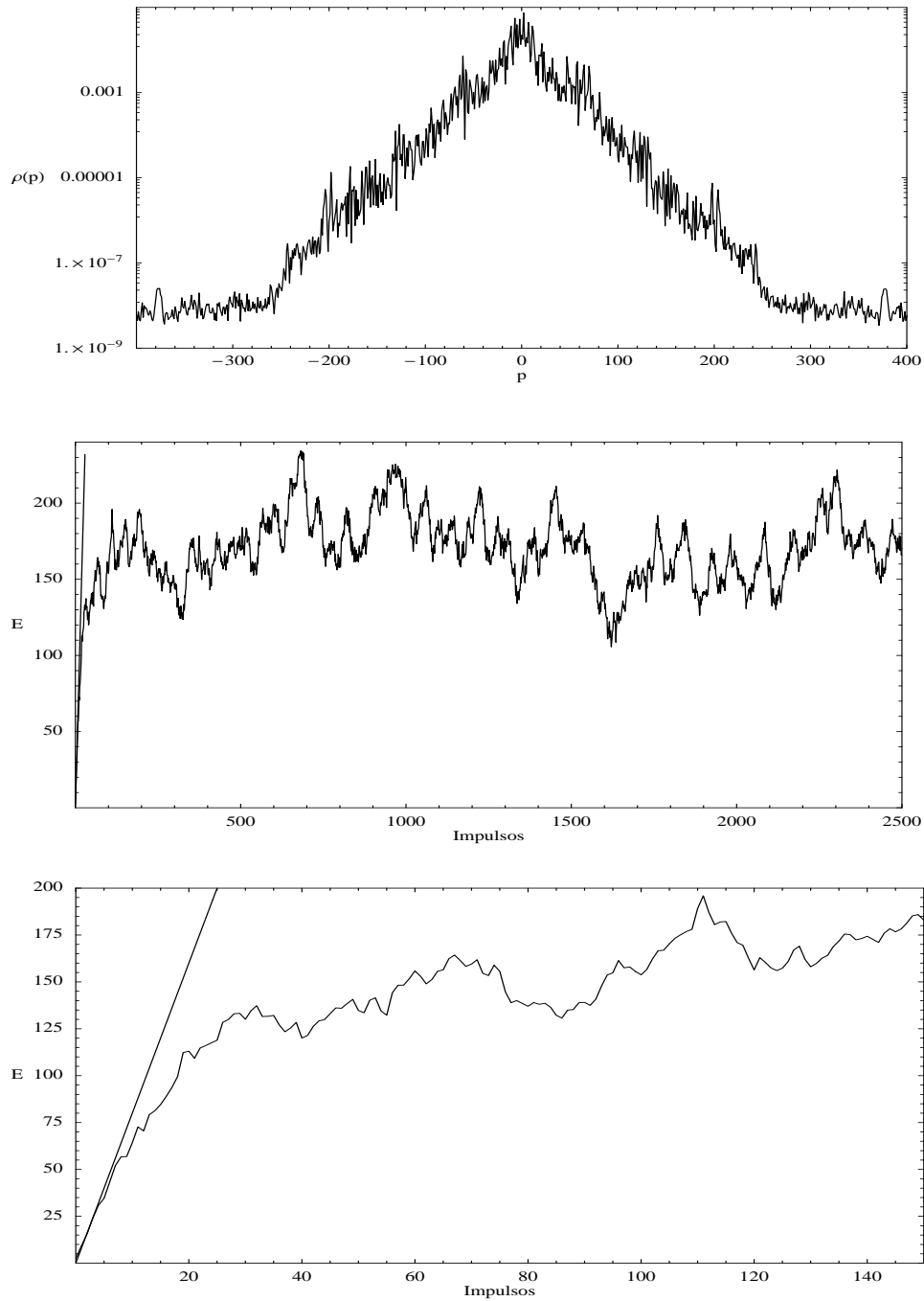


Figura 3.1: Decaimiento exponencial de la función de onda en la representación del momento (arriba), evolución de la energía promedio del sistema (en medio) y un acercamiento a la evolución de la energía para los primeros 150 impulsos (abajo). La línea recta en las gráficas de la energía corresponde al crecimiento lineal correspondiente de la energía en el rotor pateado clásico. Las gráficas corresponden a $\hbar = 0.5$, $K = 4.0$ y $g = 0.01$ después de 2500 patadas.

la localización dinámica, observemos las gráficas de la figura (3.2) en las cuales se observa la evolución de la energía promedio con el número de impulsos fijando el parámetro K . Similarmente, en las gráficas de la figura (3.5) se muestra la evolución energía promedio con el número de patadas fijando el parámetro g . En las figuras (3.3) y (3.6) se muestran acercamientos de la energía promedio para tiempos tempranos de la evolución del sistema (50 impulsos). Finalmente, se muestran las densidades de probabilidad $\rho(p)$ (fig. (3.7)) y dos tapetes cuánticos (fig. (3.8)) en los cuales se observa cómo cambia el perfil de la densidad de probabilidad en la representación del momento en función de los parámetros involucrados.

En la figura (3.2) se muestran tres gráficas en las que se observa la influencia del parámetro de interacción en la evolución temporal de la energía promedio para distintos valores de K . En color negro se encuentran graficados los datos cuyo parámetro de interacción corresponde a $g = 0.01$, mientras que en azul corresponde a $g = 0.04$. En las gráficas se observa que, cuando el parámetro de interacción es pequeño, para valores de K menores que 4 (al menos) existe saturación del valor promedio de la energía en forma similar a la que existe en el rotor pateado cuántico de un solo rotor. Sin embargo, para valores tanto de K como de g grandes no se observa saturación en el valor promedio de la energía, pues su evolución temporal presenta un crecimiento lineal en el tiempo.

En resumen, la diferencia entre el caso con un solo rotor y el caso con dos rotores radica en que, la energía promedio en el caso de dos rotores acoplados continua creciendo linealmente, aunque a una razón menor que al inicio de la evolución. Este tipo de crecimiento de la energía promedio se observa también para valores de g pequeños y de K grandes.

En la figura (3.3) se muestra un acercamiento al comportamiento de la energía promedio para los primeros 50 impulsos para el caso de los dos rotores acoplados. En esta figura se observa que la energía promedio exhibe un comportamiento similar al observado en el caso del rotor pateado cuántico de un rotor, ya que la energía promedio se separa de la línea recta correspondiente al crecimiento lineal de la energía en el rotor pateado clásico.

Cabe anotar que el efecto del parámetro de interacción sobre la energía promedio se hace más evidente entre más impulsos se le aplican al sistema, de hecho, fijando la fuerza de los impulsos y variando el parámetro de interacción es posible observar que las diferencias son mínimas para tiempos tempranos de la evolución

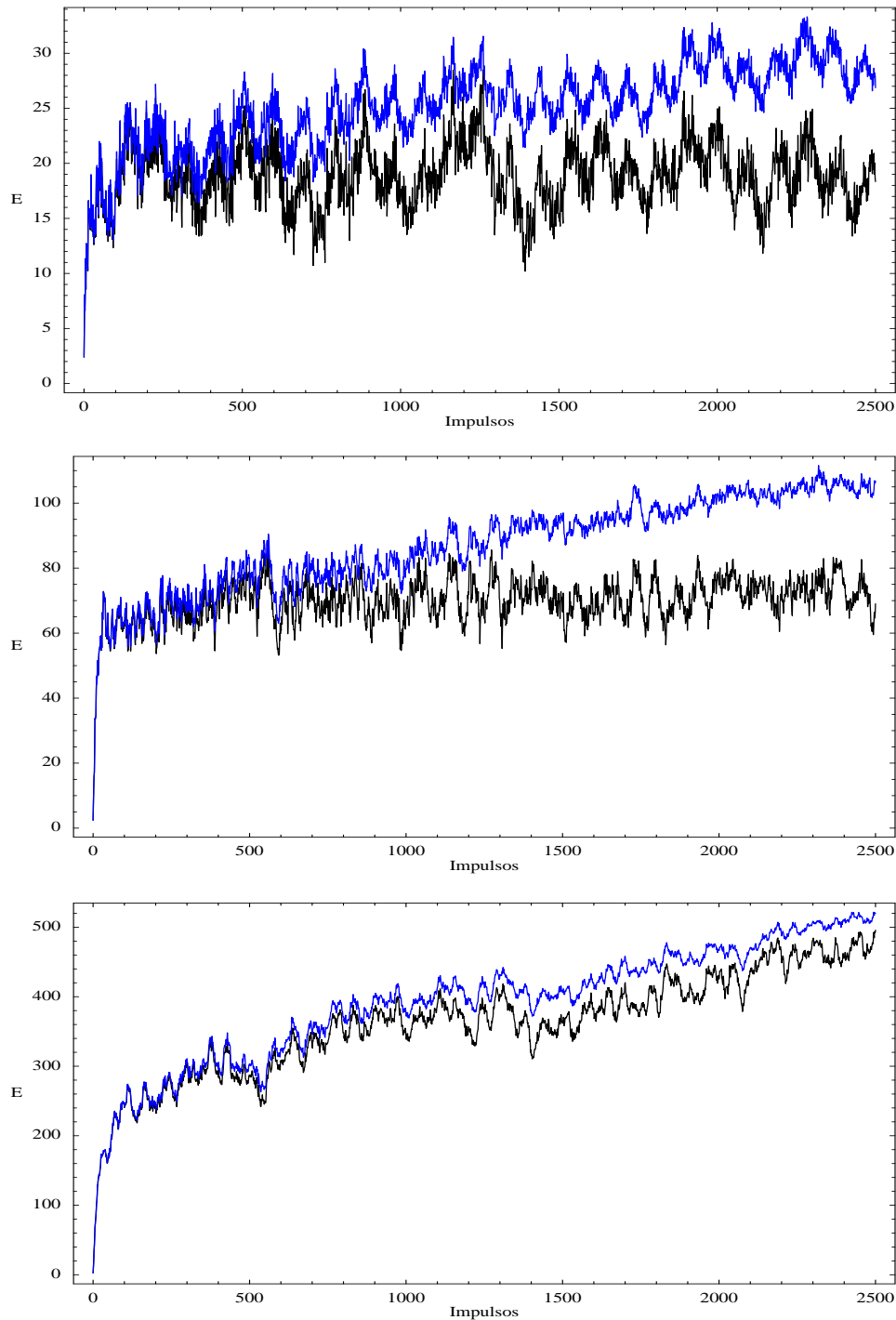


Figura 3.2: Evolución de la energía promedio con el número de impulsos aplicados. Las curvas en la gráfica superior corresponden a $K = 2.5$, mientras que en la gráfica de en medio corresponden a $K = 3.5$ y en la inferior a $K = 4.5$. Los colores de las curvas corresponden a $g = 0.01$ (en negro) y $g = 0.04$ (en azul). En todos los casos $\hbar = 0.5$

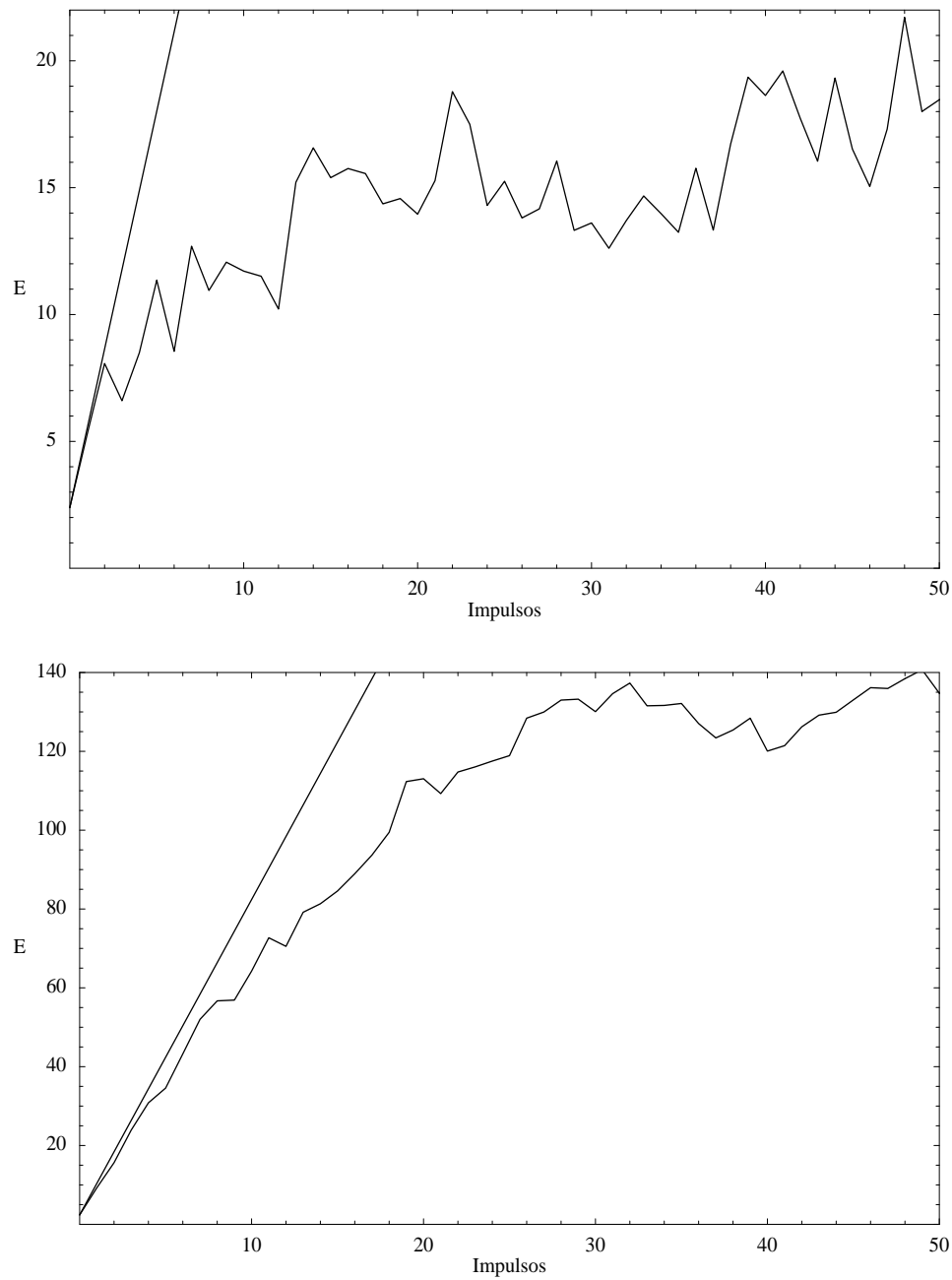


Figura 3.3: Energía promedio para los primeros 50 impulsos de la evolución. La curva de la gráfica superior corresponde a $K = 2.5$ mientras que la de la gráfica inferior corresponde a $K = 4.0$. Las líneas rectas corresponden al crecimiento lineal de la energía en el rotor pateado clásico.

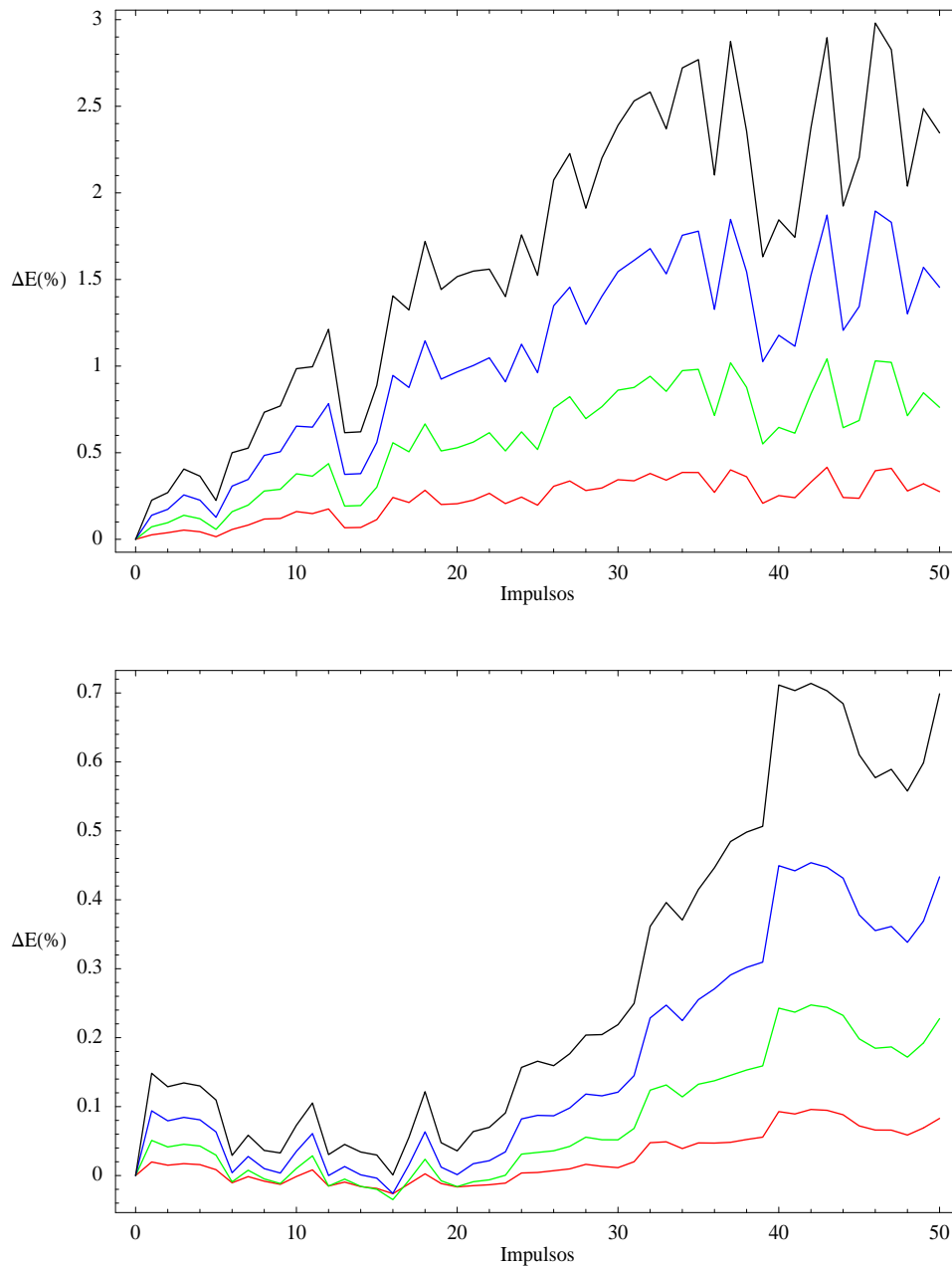


Figura 3.4: Diferencia porcentual en la evolución de la energía promedio para los primeros 50 impulsos a K constante y variando el parámetro de interacción. Las diferencias fueron hechas con respecto a la curva con parámetro $g = 0,01$ y varían como sigue: $g = 0,02$ en rojo, $g = 0,03$ en verde, $g = 0,04$ en azul y $g = 0,05$ en negro. Las curvas de la gráfica superior corresponden a $K = 2.5$ mientras que las de la gráfica inferior corresponden a $K = 4.0$

(ver fig. (3.4)).

En la figura (3.5) se muestra la evolución temporal de la energía promedio para: $g = 0.01$ (fig. (3.5) superior), $g = 0.03$ (fig. (3.5) en medio), $g = 0.05$ (fig. (3.5) inferior). La magnitud del impulso varía entre las curvas como sigue: rojo $K = 2.5$, verde $K = 3.0$, azul $K = 3.5$ y violeta $K = 4.0$. En estas figuras se aprecia la existencia de localización dinámica para parámetros de interacción pequeños, así mismo se aprecia cómo la localización dinámica se ve afectada por la interacción entre rotores.

Un resultado importante que se rescata de las gráficas de la figura (3.5) es el hecho de que la influencia del acoplamiento entre los rotores sobre la localización dinámica se ve reforzada por la magnitud de los impulsos (K), por ejemplo, en las curvas de la figura (3.5 inferior) se observa mayor crecimiento de la energía promedio en el tiempo conforme aumenta la magnitud de K . Una posible explicación para esta situación es la siguiente: A mayor magnitud de K mayor es el tiempo de Heisenberg y, por tanto, es mayor la energía que en promedio ganan los rotores, como consecuencia de esto último es más grande la probabilidad de choque entre ellos, lo cual lleva a una influencia más notable por parte del parámetro de interacción.

En la figura (3.6) se muestra un acercamiento al crecimiento de la energía cinética promedio para los primeros 100 impulsos. En la gráfica, cada color corresponde a un valor distinto de la magnitud de los impulsos aplicados a los rotores. Nótese que, para los primeros impulsos, pareciera existir localización dinámica.

En la figura (3.7) se muestra los perfiles de las distribuciones de densidad de probabilidad en la representación del momento después de 2500 impulsos. Básicamente se observa algo similar a lo que se observa en el caso del rotor pateado cuántico, es decir, la pendiente del perfil de distribución disminuye en tanto se incrementa la magnitud de K o, equivalentemente, el ancho de la distribución aumenta con K .

Una diferencia notable con el caso del rotor pateado cuántico de un solo rotor consiste en la existencia de no una sino dos pendientes en el perfil de densidad de probabilidad de la función de onda en la representación del momento, las cuales se hacen notar más conforme crece el acoplamiento entre rotores. Estas pendientes en la escala logarítmica indican dos tipos de decaimiento exponencial del perfil de

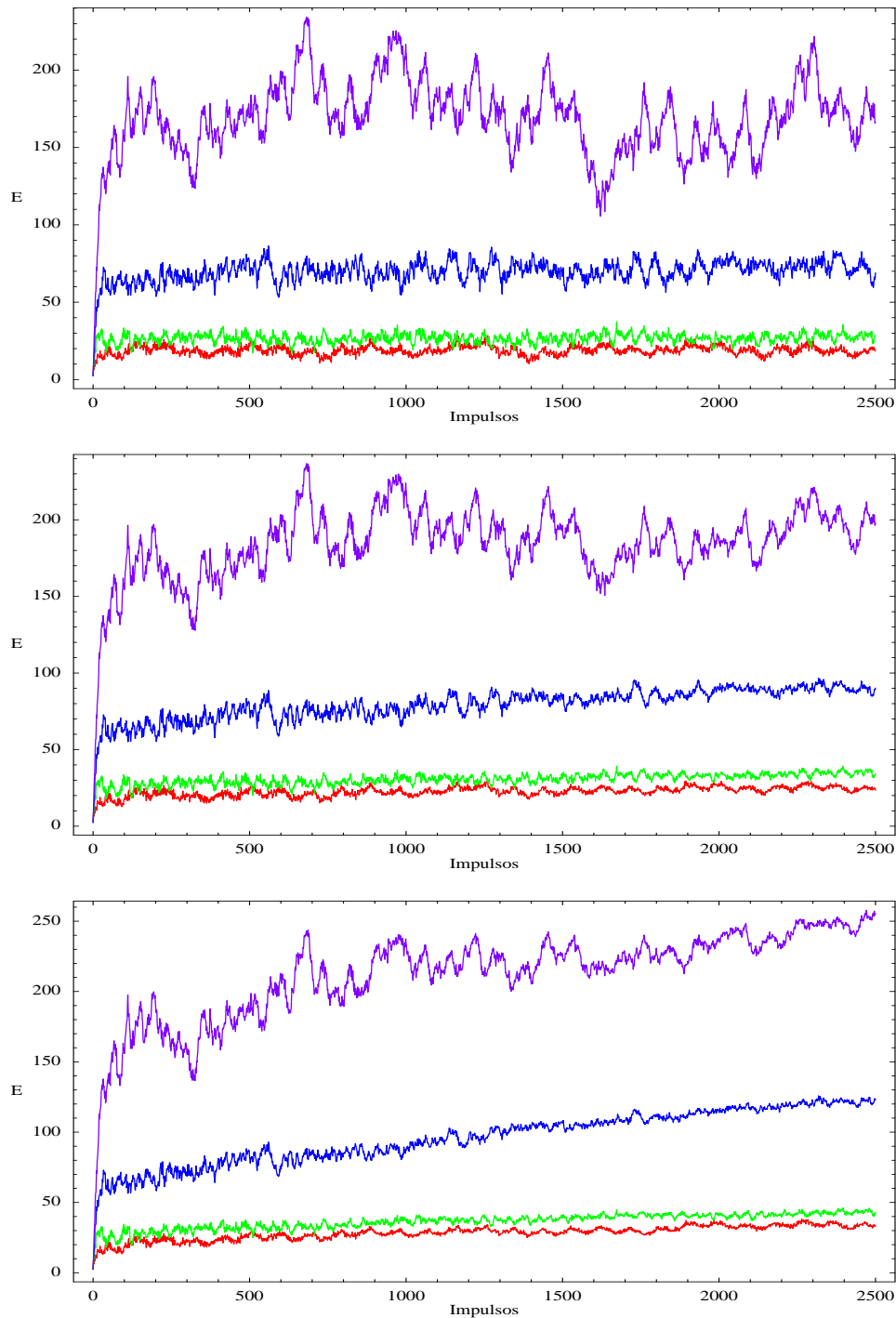


Figura 3.5: Evolución de la energía promedio con el número de impulsos aplicados. En la gráfica de arriba todas las curvas corresponden a $g = 0.01$, en las de en medio corresponden a $g = 0.03$ y en las de abajo corresponden a $g = 0.05$. La magnitud del impulso varía entre las curvas como sigue: rojo $K = 2.5$, verde $K = 3.0$, azul $K = 3.5$ y violeta $K = 4.0$. En todos los casos $\hbar = 0.5$

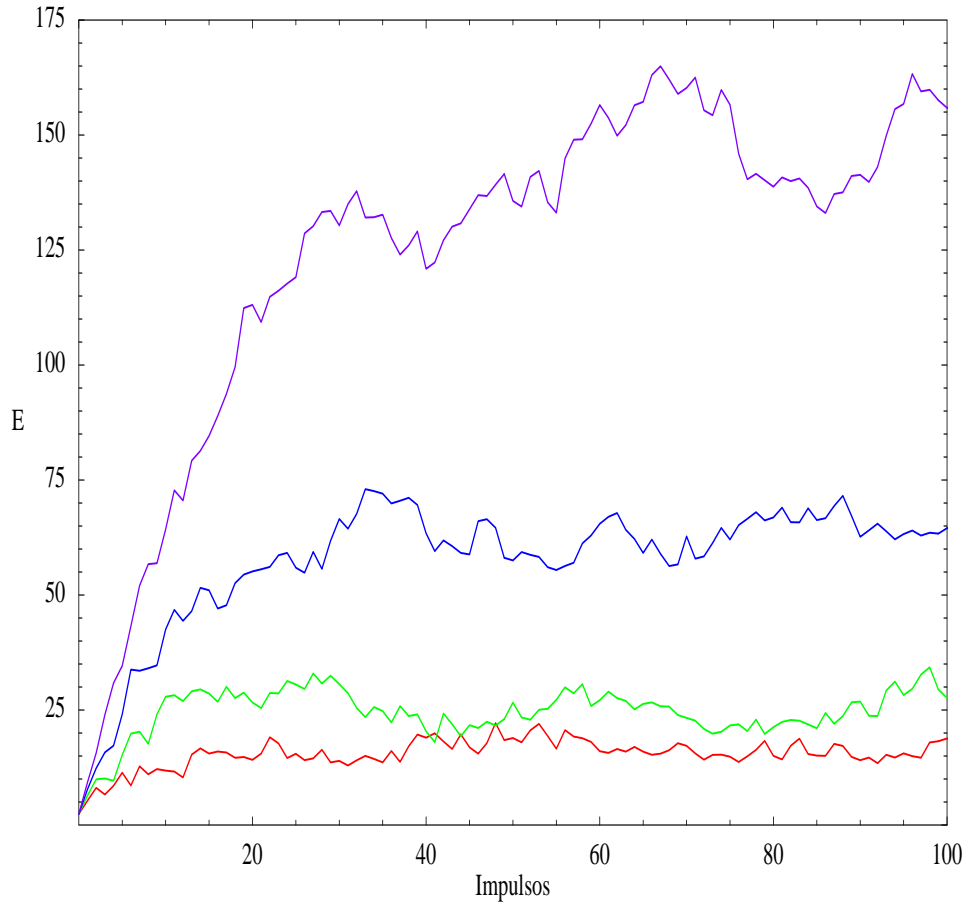


Figura 3.6: Primeros 100 impulsos de la evolución de la energía promedio para $\hbar = 0.5$ y $g = 0.05$, que corresponde a los primeros 100 impulsos de la figura ((3.5) inferior). La magnitud del impulso varía entre las curvas como sigue: rojo $K = 2.5$, verde $K = 3.0$, azul $K = 3.5$ y violeta $K = 4.0$. Nótese que, para los primeros impulsos, pareciera existir localización dinámica.

dicha distribución. Esto podría ser indicador de la existencia de dos tiempos de localización, es decir, que la energía promedio del sistema llegue en algún momento a un punto de saturación. En la figura (3.8) se muestran dos tapetes cuánticos, en los que se aprecia la evolución temporal del perfil de $\rho(p)$. Como puede verse, en contraste con el caso del rotor pateado cuántico de un rotor, se aprecia crecimiento del ancho de la distribución.

En resumen, la influencia del parámetro de acoplamiento consiste aparentemente en destruir el efecto de la localización dinámica, también se observa que la influencia del acoplamiento se ve reforzada por la magnitud de los impulsos aplicados. Es posible también la existencia de un segundo tiempo de localización debido al parámetro de acoplamiento (g), efecto que podría verse modificado por la magnitud de los impulsos aplicados (K). Esta pregunta por ahora es difícil de responder puesto que se requiere la realización de cálculos numéricos en los que se incluyan tiempos posteriores a los que se abarcaron en el presente trabajo.

3.2. Resonancias Cuánticas

El crecimiento cuadrático del valor esperado de la energía promedio y el crecimiento del perfil de densidad de probabilidad de la función de onda en la representación del momento indican, al igual que el caso de un solo rotor, la presencia de resonancias cuánticas (fig. (3.9)). En el caso de los rotores acoplados se encuentra la presencia de resonancias cuánticas en las mismas condiciones que las necesarias para su existencia en el caso de un solo rotor, es decir, cuando \hbar es un múltiplo racional de π (ec. (1.6))

Primero que nada hay que comentar que, como lo discutí previamente, debido al crecimiento de la energía promedio del sistema el ancho de $\rho(p)$ también crece. Esto hace la simulación numérica difícil puesto que, para poder confiar en los resultados, es necesario que el arreglo con el que se describe a la función de onda en la representación del momento sea suficientemente grande para que la mayoría de la función permanezca dentro del arreglo. Lo que sucede en el caso de resonancias cuánticas es que el ancho de $\rho(p)$ crece en poco tiempo lo suficiente como para salir de las dimensiones del arreglo, por lo que la descripción de la función de onda automáticamente es incorrecta. Una forma de solucionar este problema es aumentar el tamaño del arreglo, sin embargo, el tiempo de computo también se multiplica. Por ejemplo, si se duplica el tamaño del arreglo, el tiempo de computo

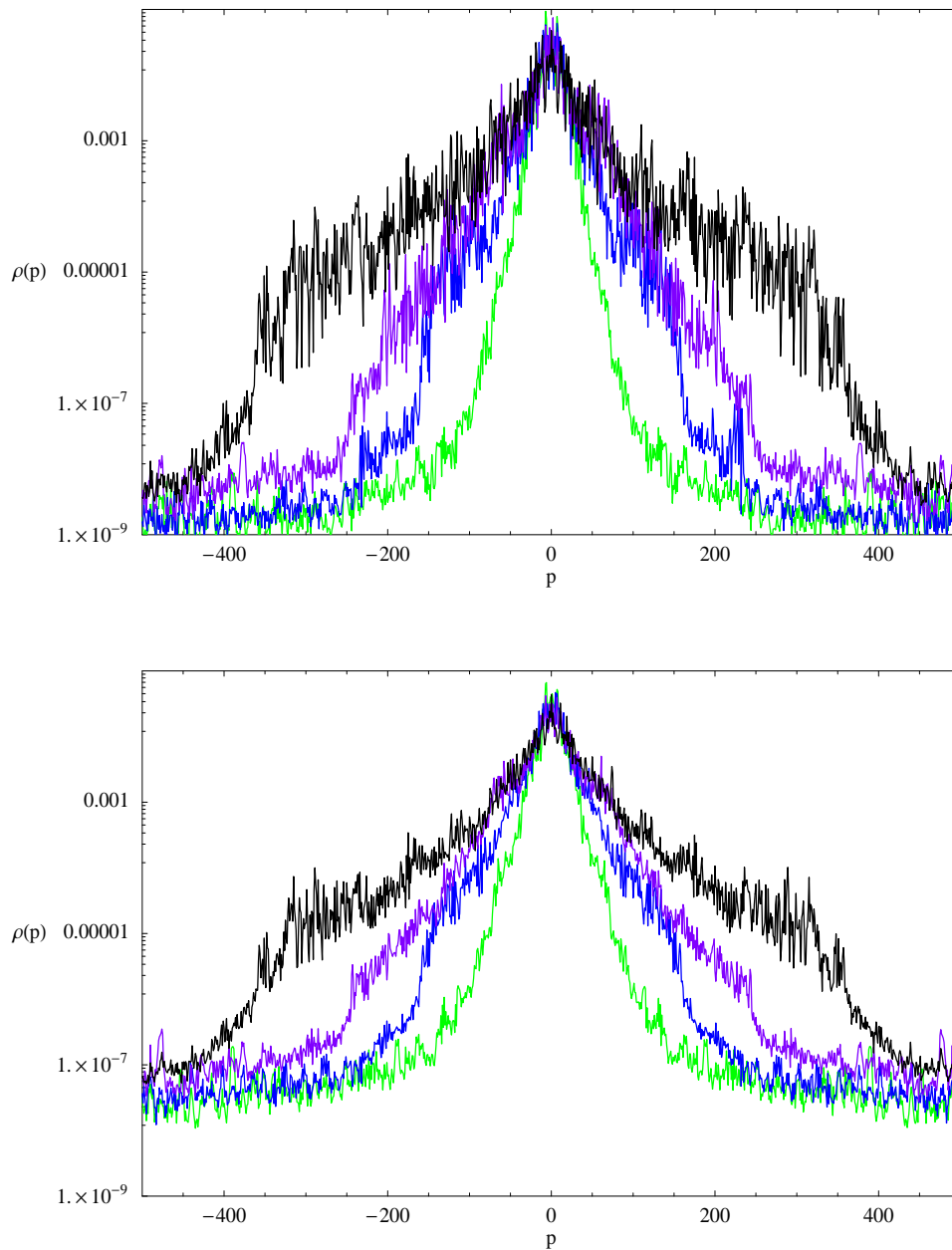


Figura 3.7: Densidad de probabilidad en la representación del momento después de 2500 impulsos para $g = 0.01$ (arriba) y $g = 0.04$ (abajo). Los valores del parámetro K varía en las curvas como sigue: verde 3.0, azul 3.5, violeta 4.0 y negro 4.5 . Nótese la existencia de dos pendientes en el decaimiento de los perfiles, las cuales se hacen más notorias conforme crece el acoplamiento entre rotors.

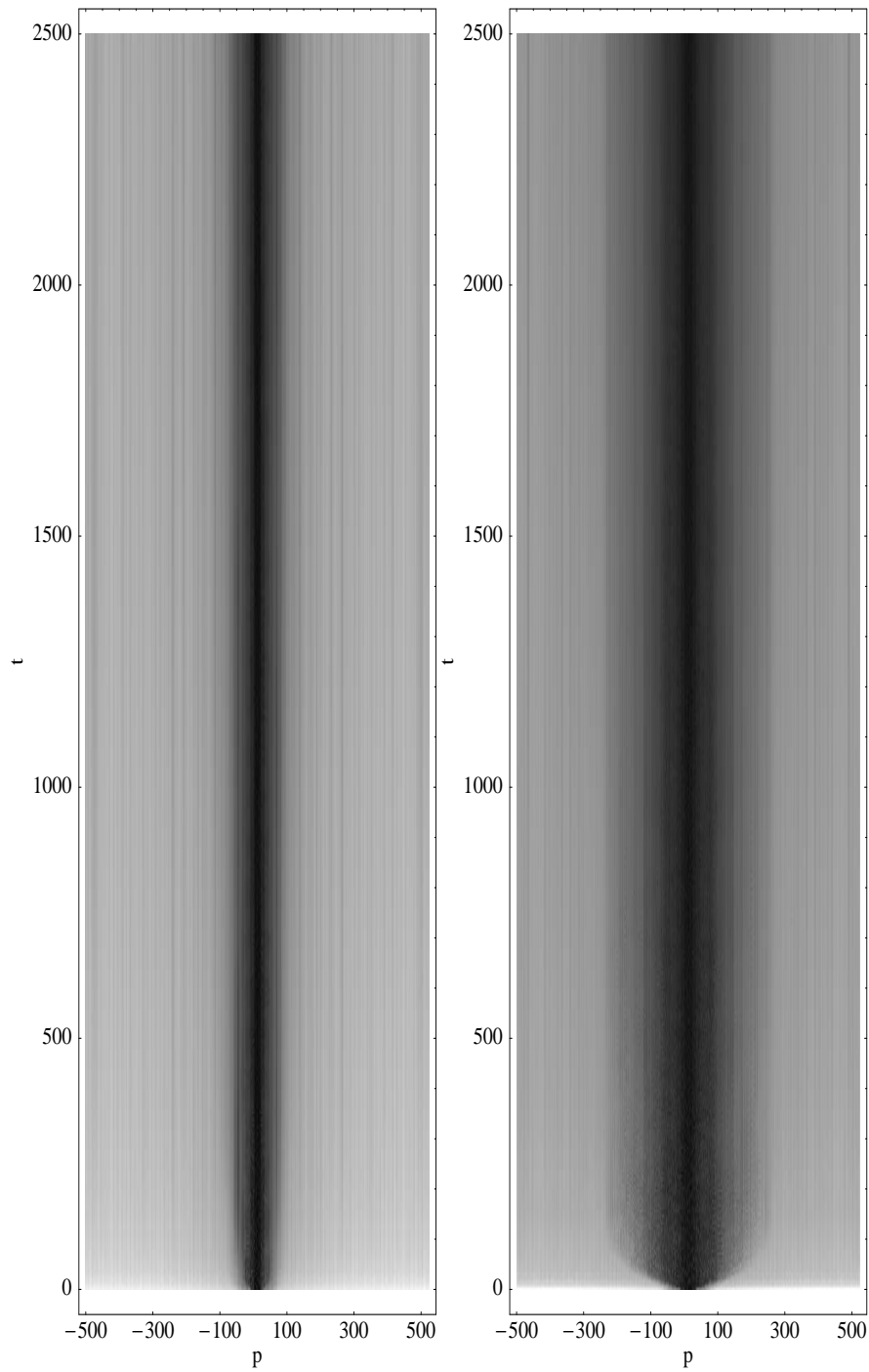


Figura 3.8: Evolución del perfil de la densidad de probabilidad de la función de onda en la representación del momento para $g = 0.05$. A la izquierda $K = 2.5$ y a la derecha $K = 4.0$. Se observa crecimiento gradual del ancho del perfil de la distribución $\rho(p)$.

se multiplica por seis. Otra forma de proceder es disminuir los tiempos de observación, es decir, observar el fenómeno durante un corto periodo en la evolución temporal del sistema. En el presente trabajo he optado por esta segunda opción puesto que los tiempos de computo de la primera opción llegan a ser inadmisibles.

En la figura (3.10) se muestra el crecimiento cuadrático de la energía promedio para $K = 1.0$. La magnitud de g varía entre las curvas como sigue: rojo $g = 0.1$, verde $g = 0.3$, azul $g = 0.5$. Algo importante que hay que destacar es el hecho de que el acoplamiento entre rotores no destruye el crecimiento cuadrático de la energía promedio aun para acoplamientos mayores que la magnitud de los impulsos aplicados a los rotores, lo cual contrasta con la situación en la localización dinámica. Otro punto importante que se rescata de la figura (3.10) es el hecho de que el crecimiento del valor promedio de la energía no es solamente cuadrático en el tiempo, sino que además crece con una proporción mayor a la observada en el rotor pateado cuántico.

En la figura (3.11) se muestran dos tapetes cuánticos en los que se aprecia el crecimiento del ancho de $\rho(p)$ en el tiempo. En éstas gráficas se aprecia que la razón con la que crece el ancho de la distribución de probabilidades es mayor entre mayor es la magnitud del acoplamiento (g).

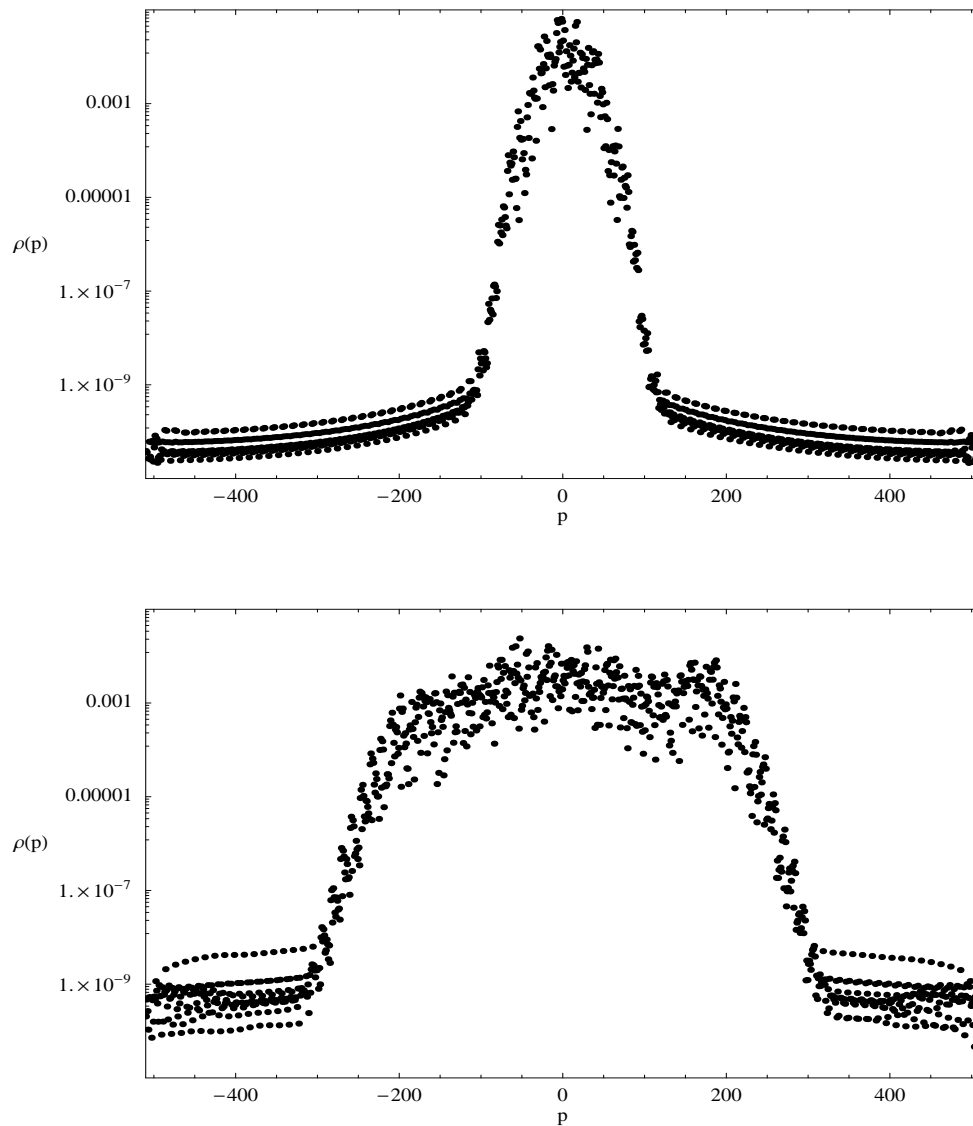


Figura 3.9: Perfil de la densidad de probabilidad de la función de onda en la representación del momento después de 40 (arriba) y 200 (abajo) impulsos. En ellas se aprecia el crecimiento del ancho de $\rho(p)$ en el tiempo. La curva inferior muestra el crecimiento cuadrático del promedio de la energía, el cual indica la existencia del efecto de resonancias cuánticas. Todos los casos corresponden a $\hbar = \pi/2$, $K = 1,0$ y $g = 2,5$

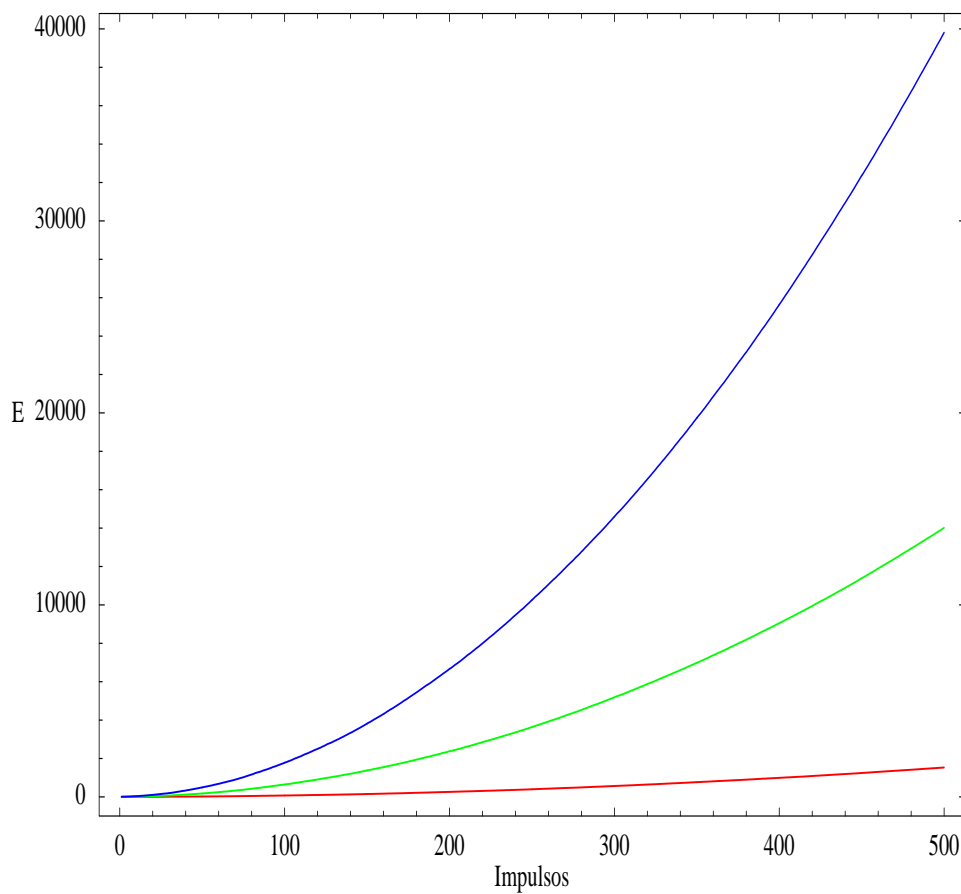


Figura 3.10: Valor promedio de la energía en el tiempo para: $K = 1.0$ y $\hbar = \frac{\pi}{6}$. En las curvas, g varía como sigue: rojo $g = 0.1$, verde $g = 0.3$, azul $g = 0.5$

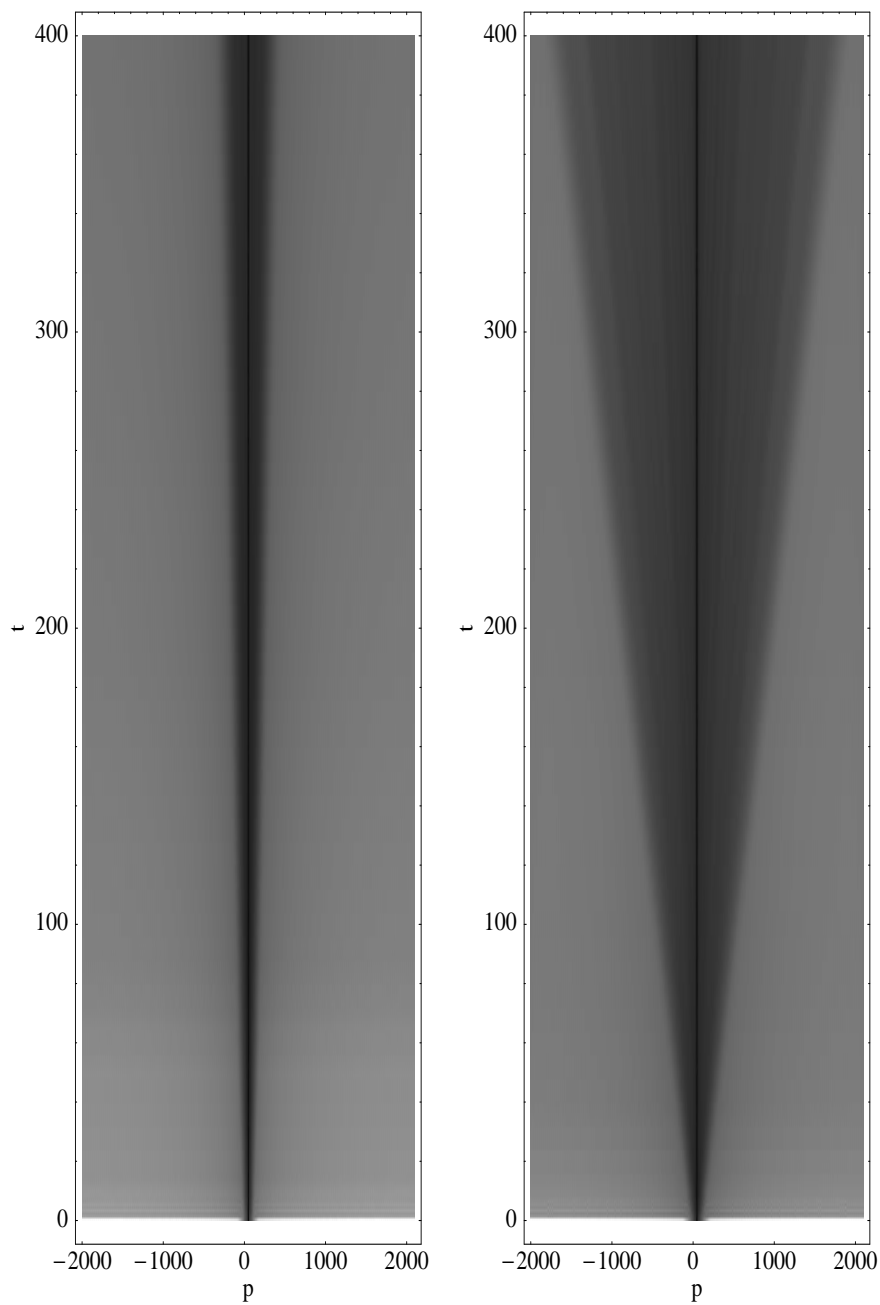


Figura 3.11: Evolución del perfil de la densidad de probabilidad de la función de onda en la representación del momento para $\hbar = \pi/6$ y $K = 1.0$. A la izquierda $g = 0.1$ y a la derecha $g = 0.5$. Aquí se aprecia que la razón con la que crece el ancho de $\rho(p)$ es mayor entre mayor es la magnitud del acoplamiento (g)

Capítulo 4

Pureza, Entropía y Enlazamiento

4.1. Decaimiento de la Pureza

La importancia de la pureza radica en que, como se mencionó en el capítulo 2, es una medida del grado de enlazamiento entre, por ejemplo, un sistema y el resto del universo. El objetivo aquí es estudiar bajo qué condiciones se obtiene mayor o menor decaimiento de la pureza y, por tanto, menor o mayor grado de enlazamiento entre los rotos de un sistema formado por dos rotos pateados cuánticos acoplados. La pureza se calculó aplicando la ecuación (2.8) a la matriz de densidad reducida de uno de los rotos. En esta sección se muestra el decaimiento de la pureza en el tiempo para el caso en que $\hbar = 0.5$, el caso con resonancias cuánticas (\hbar múltiplo racional de π) se trata en la sección (4.3).

En las figuras (4.1) y (4.2) se observa el decaimiento de la pureza como función del tiempo fijando el parámetro de interacción. El valor de K varía entre las curvas como sigue: $K = 2.5$ en rojo, $K = 3.0$ en verde, $K = 3.5$ en azul, $K = 4.0$ en violeta y $K = 4.5$ en negro. En estas curvas se advierten oscilaciones en el decaimiento de la pureza, las cuales desaparecen conforme aumenta tanto la magnitud de los impulsos (K) como la interacción entre rotos, g .

En las figuras (4.1) y (4.2) se aprecia una similitud entre gráficas con distinto parámetro de acoplamiento, lo cual sugiere que el parámetro de acoplamiento juega el papel de escala de tiempo, lo cual no es muy extraño pues, si pensamos de manera semiclassical, el parámetro de acoplamiento regula la influencia de los choques entre rotos sobre el estado cuántico del sistema.

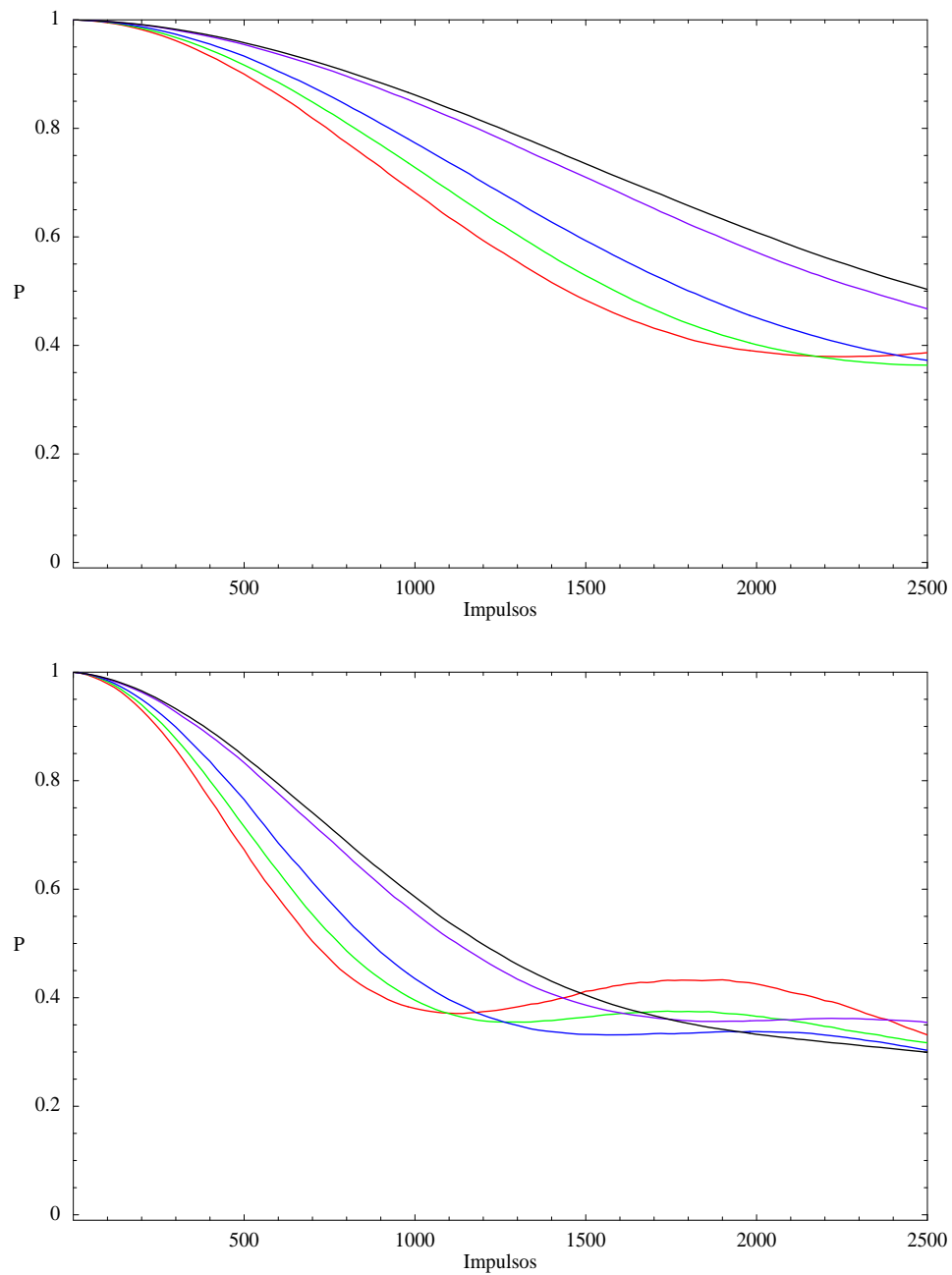


Figura 4.1: Decaimiento de la pureza en el tiempo para $\hbar = 0.5$, $g = 0.01$ (arriba) y $g = 0.02$ (abajo). K varía entre las curvas como sigue: $K = 2.5$ rojo, $K = 3.0$ verde, $K = 3.5$ azul, $K = 4.0$ violeta y $K = 4.5$ negro. Aquí se aprecia que la pureza no decae uniformemente en el tiempo, sino que exhibe oscilaciones.

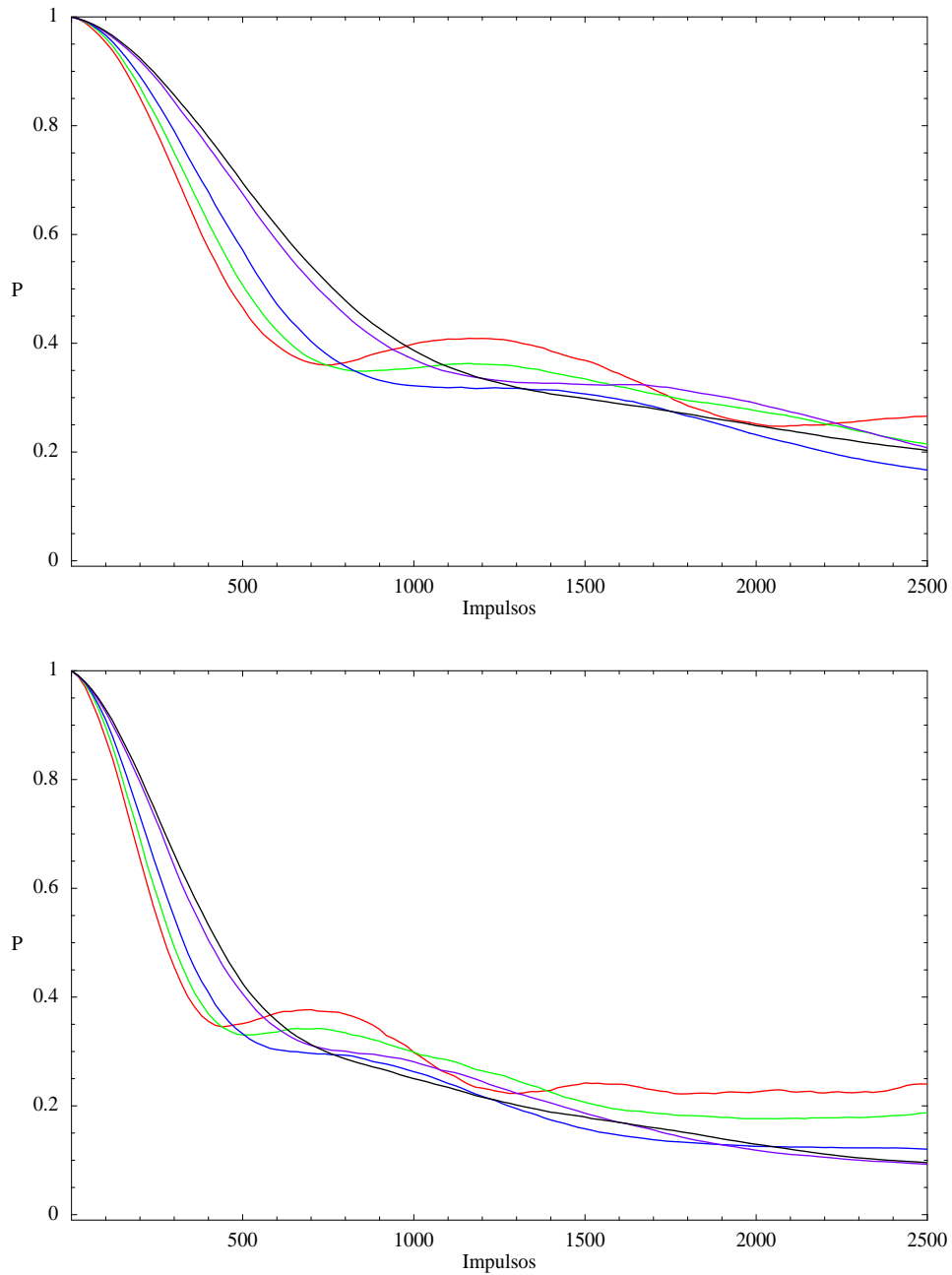


Figura 4.2: Decaimiento de la pureza en el tiempo para $\hbar = 0.5$, $g = 0.03$ (arriba) y $g = 0.05$ (abajo). K varía entre las curvas como sigue: $K = 2.5$ rojo, $K = 3.0$ verde, $K = 3.5$ azul, $K = 4.0$ violeta y $K = 4.5$ negro. Aquí se observa que las oscilaciones observadas en el decaimiento de la pureza se amortiguan conforme pasa el tiempo y conforme crece la magnitud de los parámetros K y g .

En las figuras (4.3) y (4.4) se observa el decaimiento de la pureza en el tiempo para K constante. El valor de g varía entre las curvas como sigue: $g = 0.01$ en rojo, $g = 0.02$ en verde, $g = 0.03$ en azul, $g = 0.04$ en violeta y $g = 0.05$ en negro. En estas gráficas se aprecia claramente que la razón de decaimiento de la pureza es mayor a mayor g . También pueden observarse oscilaciones en el decaimiento de la pureza, se aprecia además la manera en la que las oscilaciones desaparecen conforme crece la magnitud de los parámetros K y g .

En general se observa que la pureza, dentro del rango de parámetros que se estudiaron, es una función monótona decreciente del acoplamiento entre rotores para tiempos grandes (tiempos en los que las oscilaciones han desaparecido), es decir, mayor acoplamiento entre rotores implica también menor pureza.

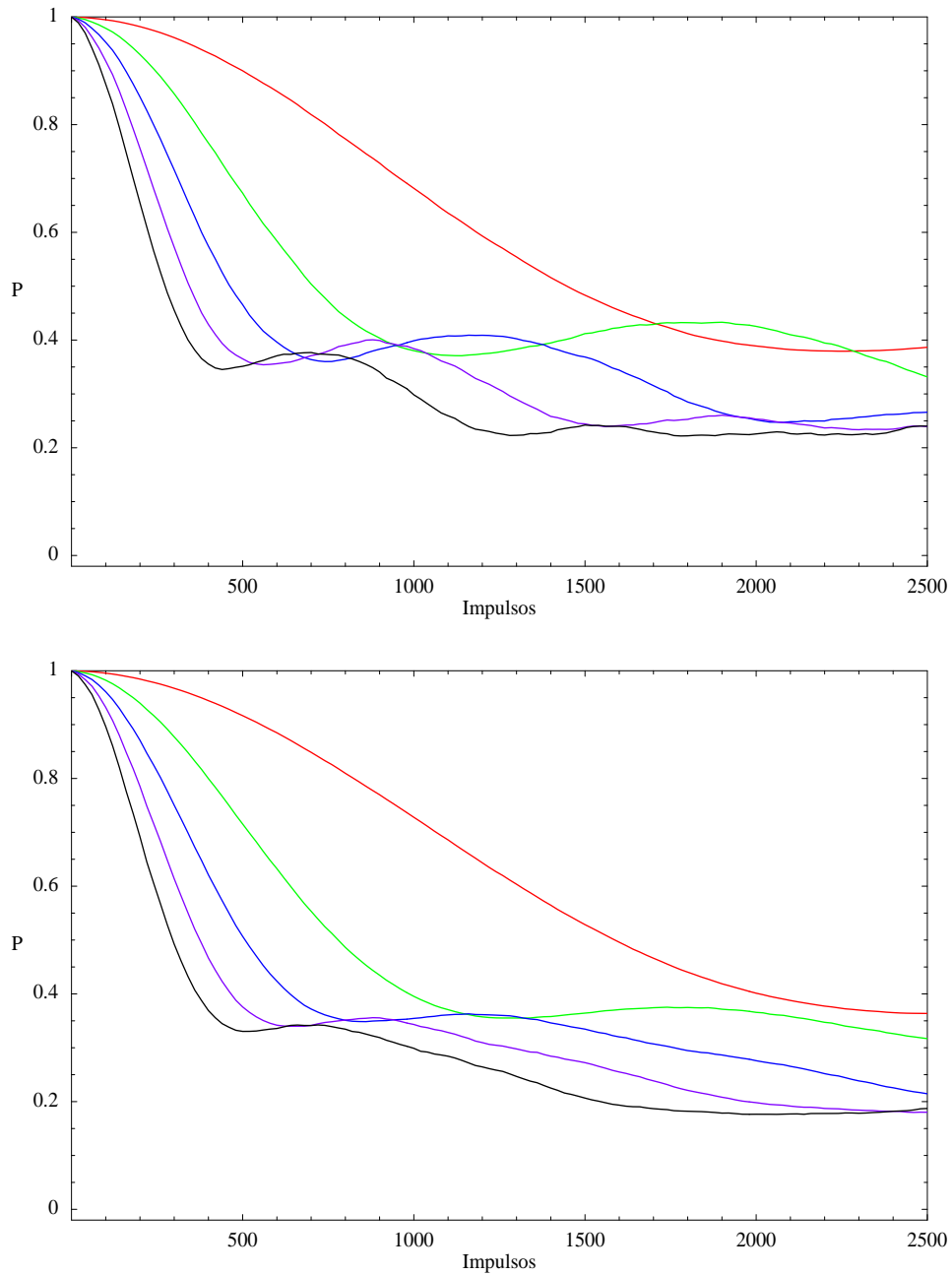


Figura 4.3: Decaimiento de la pureza en el tiempo para $\hbar = 0.5$, $K = 2.5$ (arriba) y $K = 3.0$ (abajo). g varía entre las curvas como sigue: $g = 0.01$ rojo, $g = 0.02$ verde, $g = 0.03$ azul, $g = 0.04$ violeta y $g = 0.05$ negro. En esta gráfica se aprecia la influencia del parámetro de acoplamiento g en las oscilaciones del decaimiento de la pureza. Se aprecia que las oscilaciones se presentan en tiempos menores entre mayor es g .

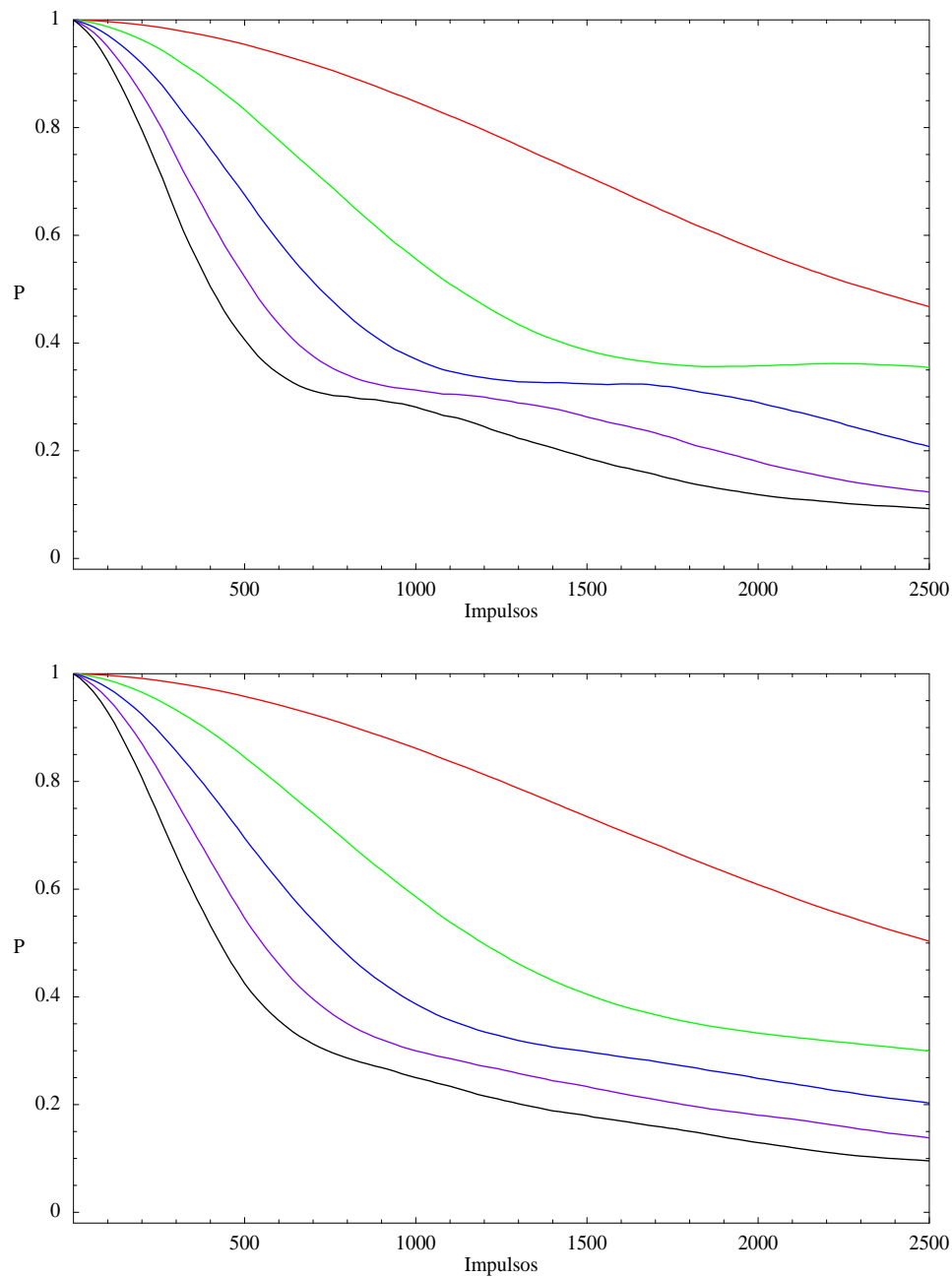


Figura 4.4: Decaimiento de la pureza en el tiempo para $\hbar = 0.5$, $K = 4.0$ (arriba) y $K = 4.5$ (abajo). g varía entre las curvas como sigue: $g = 0.01$ rojo, $g = 0.02$ verde, $g = 0.03$ azul, $g = 0.04$ violeta y $g = 0.05$ negro. En estas figuras se observa que las oscilaciones desaparecen conforme crece la magnitud de los parámetros K y g .

4.2. Crecimiento de la Entropía

La entropía, al igual que la pureza, es importante porque es una medida del grado de enlazamiento de un sistema cuántico. El objetivo aquí, al igual que en la sección anterior, es estudiar el comportamiento del enlazamiento entre los rotos de un sistema formado por dos rotos pateados cuánticos acoplados. Como veremos, la información acerca del enlazamiento del sistema que podemos obtener de la entropía es similar a la que se obtiene en el caso de la pureza, aunque desde otro punto de vista. En esta sección se muestra el crecimiento de la entropía en el tiempo para el caso en que $\hbar = 0.5$, el caso con resonancias cuánticas se trata en la sección (4.3). La entropía se calculó aplicando la ecuación (2.7) a la matriz de densidad reducida de uno de los rotos.

En las figuras (4.5) y (4.6) se muestra el crecimiento de la entropía en el tiempo fijando el parámetro de interacción. El valor de K varía entre las curvas como sigue: $K = 2.5$ en rojo, $K = 3.0$ en verde, $K = 3.5$ en azul, $K = 4.0$ en violeta y $K = 4.5$ en negro. En las gráficas se advierten oscilaciones en el crecimiento de la entropía. Para valores de K y g grandes y tiempos largos podemos notar un poco mejor que con la pureza que el enlazamiento relacionado con un estado es mayor entre mayor es la magnitud de los impulsos aplicados (ver figs. (4.2) y (4.6) inferiores). Adicionalmente se aprecia una aparente saturación en la entropía para tiempos largos y magnitudes de K no muy grandes (ver fig. (4.7)). Esto es importante pues esto daría pie a la posibilidad de crear a demanda estados con enlazamiento fijo, por ejemplo, sería posible regular el grado de enlazamiento máximo que se quiere observar en el sistema variando la magnitud de los parámetros K y g .

En las figuras (4.7) y (4.8) se encuentran las gráficas del crecimiento de la entropía en el tiempo para K constante. El valor de g varía entre las curvas como sigue: $g = 0.01$ en rojo, $g = 0.02$ en verde, $g = 0.03$ en azul, $g = 0.04$ en violeta y $g = 0.05$ en negro. En estas gráficas apreciamos con más claridad con respecto a las gráficas (4.3) y (4.4) que la razón con la que crece la entropía es mayor conforme crece la magnitud de los parámetros g y K .

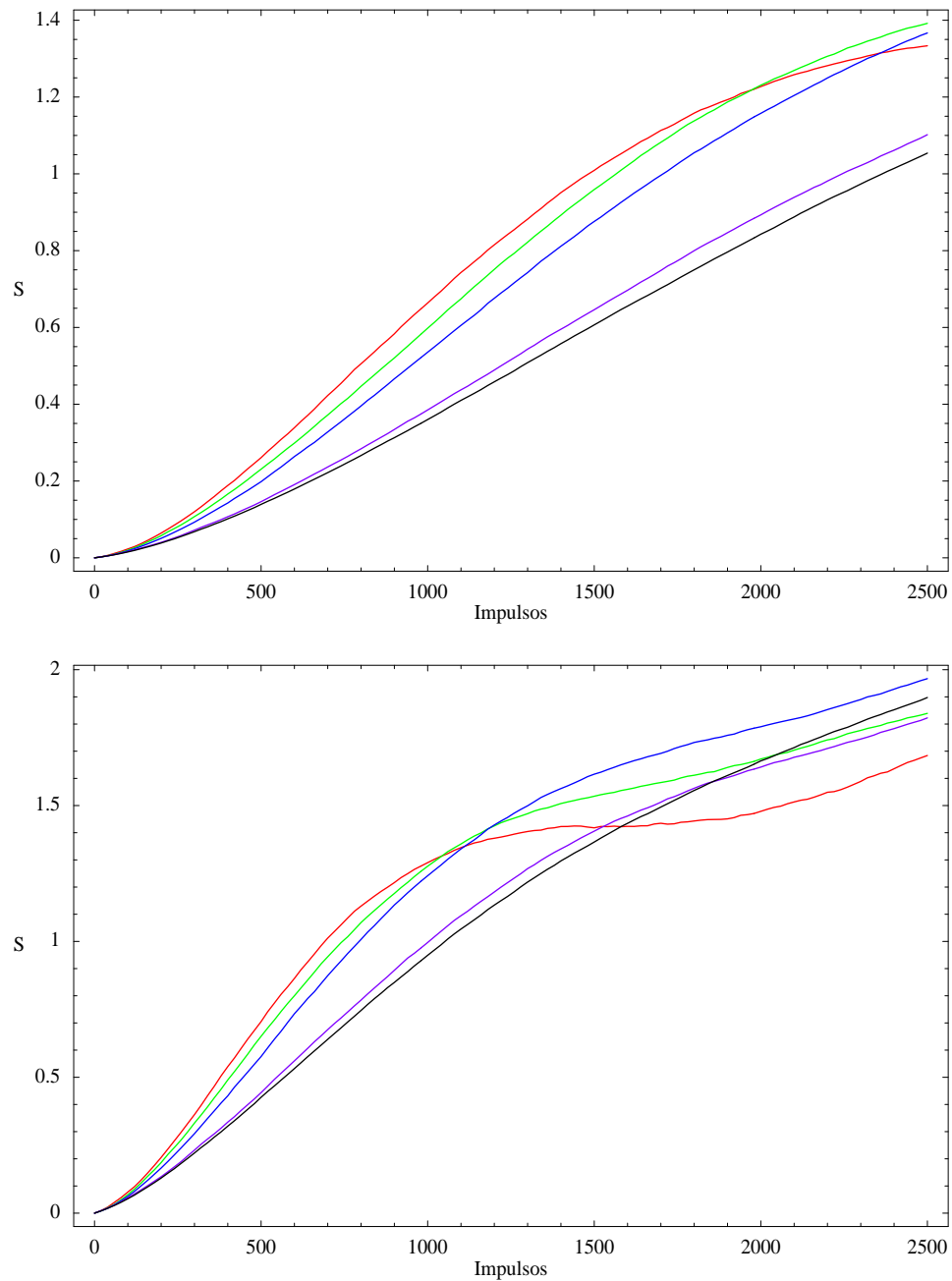


Figura 4.5: Crecimiento de la entropía en el tiempo para $\hbar = 0.5$, $g = 0.01$ (arriba) y $g = 0.02$ (abajo). K varía entre las curvas como sigue: $K = 2.5$ rojo, $K = 3.0$ verde, $K = 3.5$ azul, $K = 4.0$ violeta y $K = 4.5$ negro. Al igual que en el caso de la pureza, se observan oscilaciones.

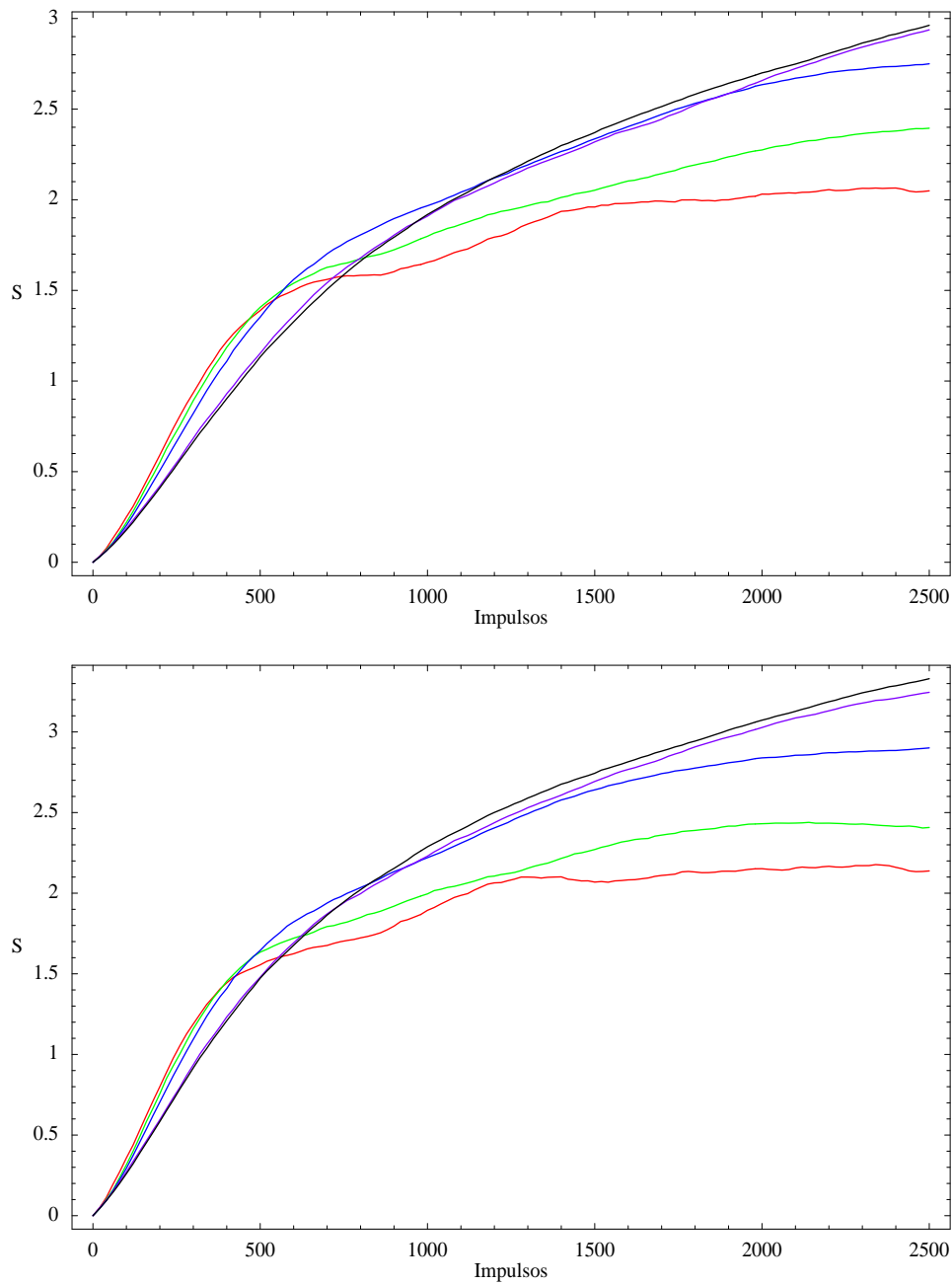


Figura 4.6: Crecimiento de la entropía en el tiempo para $\hbar = 0.5$, $g = 0.04$ (arriba) y $g = 0.05$ (abajo). K varía entre las curvas como sigue: $K = 2.5$ rojo, $K = 3.0$ verde, $K = 3.5$ azul, $K = 4.0$ violeta y $K = 4.5$ negro. Las oscilaciones de la entropía se amortiguan conforme pasa evoluciona el sistema y conforme se incrementa la magnitud de los parámetros K y g .

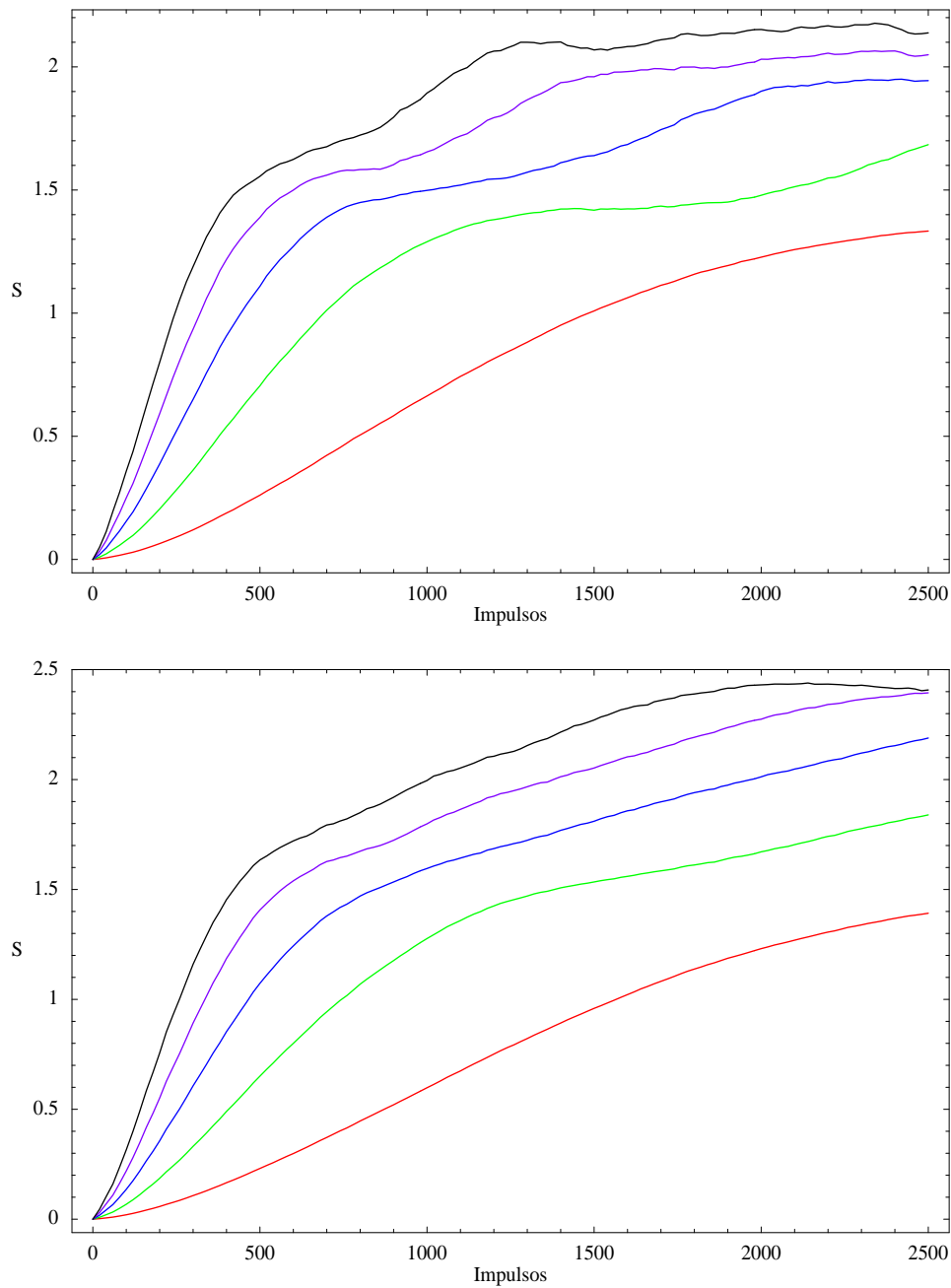


Figura 4.7: Crecimiento de la entropía en el tiempo para $\hbar = 0.5$, $K = 2.5$ (arriba) y $K = 3.0$ (abajo). g varía entre las curvas como sigue: $g = 0.01$ rojo, $g = 0.02$ verde, $g = 0.03$ azul, $g = 0.04$ violeta y $g = 0.05$ negro. En las gráficas se aprecia que, para tiempos cortos, la entropía crece más rápido entre mayor es la magnitud de g

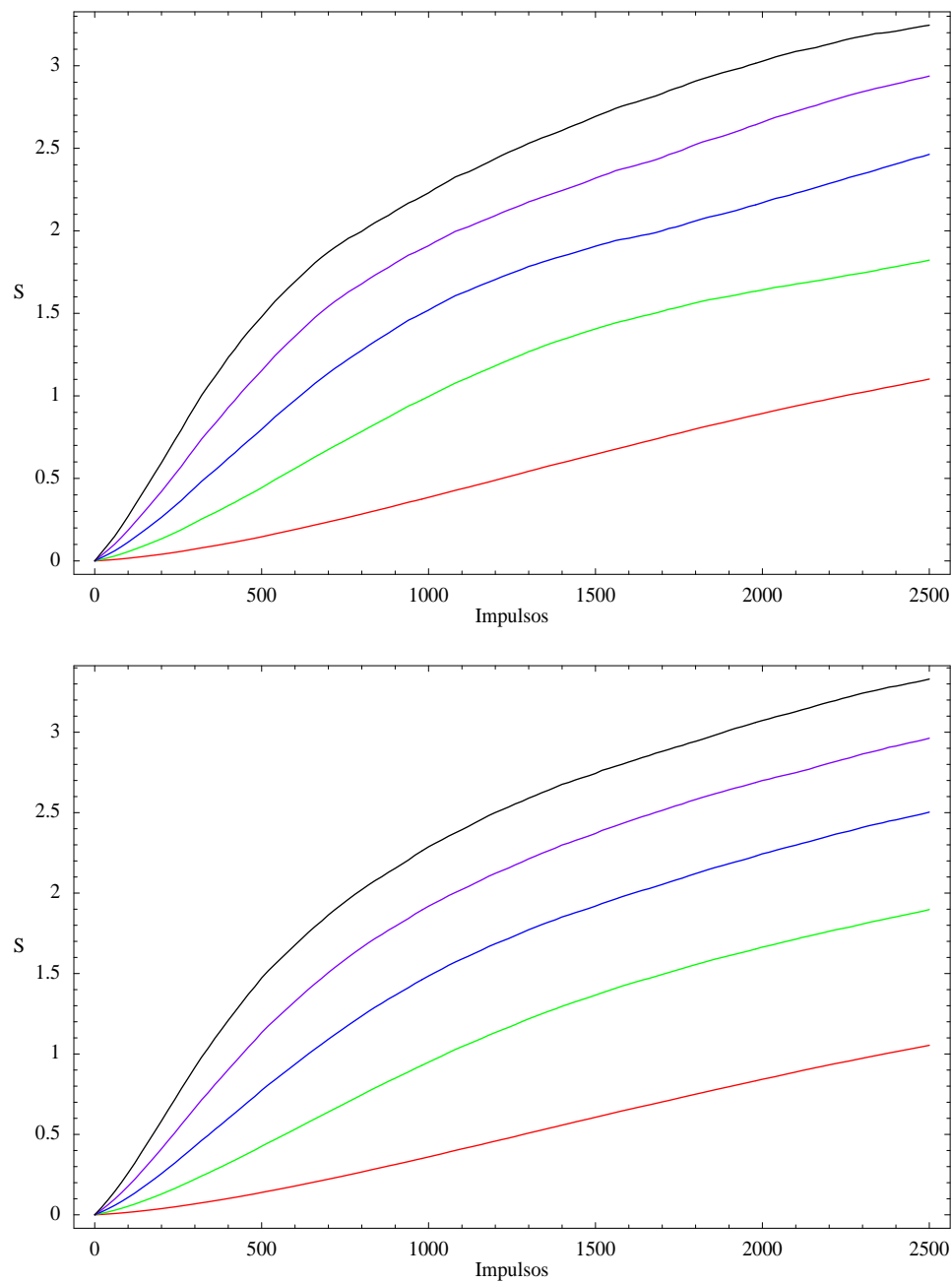


Figura 4.8: Crecimiento de la entropía en el tiempo para $\hbar = 0.5$, $K = 4.0$ (arriba) y $K = 4.5$ (abajo). g varía entre las curvas como sigue: $g = 0.01$ rojo, $g = 0.02$ verde, $g = 0.03$ azul, $g = 0.04$ violeta y $g = 0.05$ negro. Aquí se aprecia que las oscilaciones desaparecen conforme crece la magnitud de los parámetros K y g .

4.3. Pureza y Entropía en el caso de Resonancias Cuánticas

Como se mostró en la sección (3.2), el acoplamiento entre rotorees no destruye los efectos de la localización dinámica, es decir, al igual que en el caso con un solo rotor, la energía promedio crece cuadráticamente en el tiempo, crece el ancho de la densidad de probabilidad ($\rho(p)$), etc. El decaimiento de la pureza y el crecimiento de la entropía de las gráficas que se muestran a continuación, muestran que los efectos de las resonancias cuánticas destruyen de maneras más notable el grado de información que se tiene acerca del estado cuántico de los rotorees. Ello, se concluye, debido a que la pureza decae más rápido en el caso con resonancias cuánticas. De manera similar, la entropía crece más rápido en el caso con resonancias cuánticas.

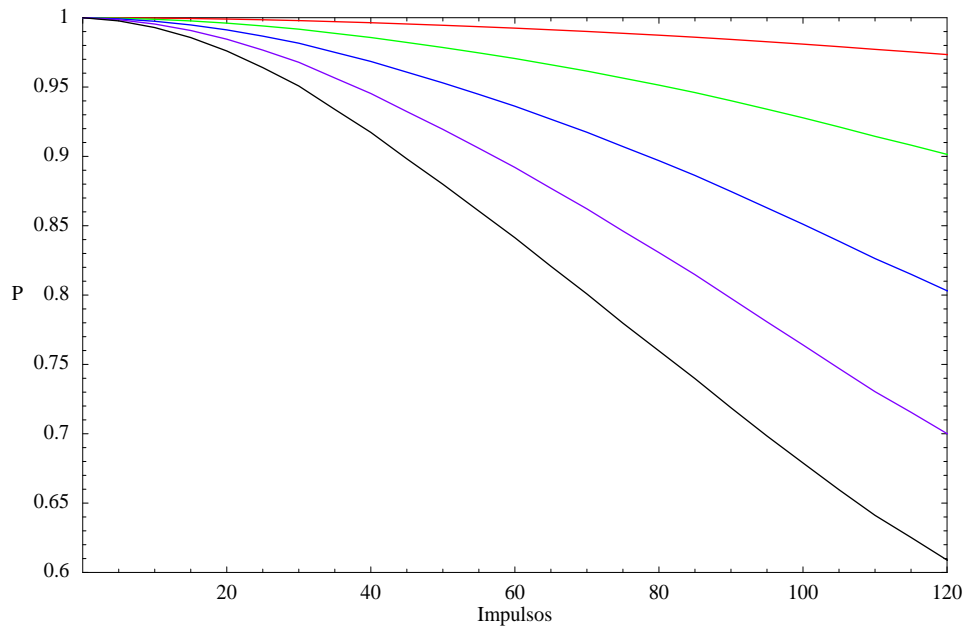


Figura 4.9: Decaimiento de la pureza en un caso con resonancias cuánticas ($\hbar = \frac{\hbar}{6}$, $K = 2.5$). Nótese que el tiempo observado son 120 impulsos y en uno de los casos se observa una pureza cercana a 0.6 . El parámetro g varía entre las curvas de manera usual.

En la figura (4.9) se muestra el decaimiento de la pureza para los casos con $\hbar = 0.5$ y $\hbar = \frac{\pi}{6}$. En la figura (4.10) se muestra el crecimiento de la entropía para los casos con $\hbar = 0.5$ y $\hbar = \frac{\pi}{6}$. Los parámetros de las curvas son: $K = 2.5$, $g = 0.01$ rojo, $g = 0.02$ verde, $g = 0.03$ azul, $g = 0.04$ violeta y $g = 0.05$ negro.

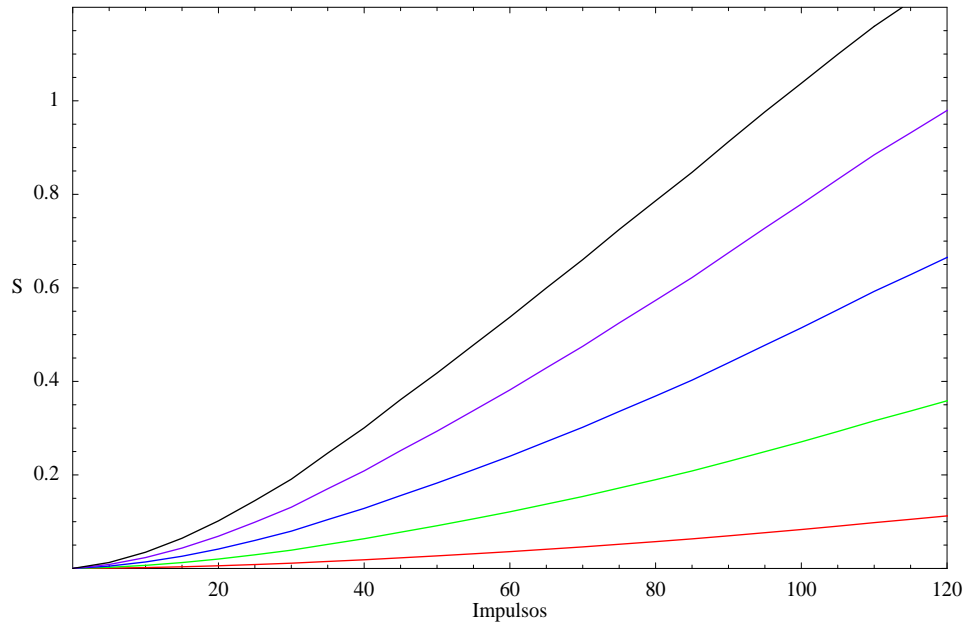


Figura 4.10: Crecimiento de la entropía en un caso con resonancias cuánticas ($\hbar = \frac{\hbar}{6}$, $K = 2.5$). Al igual que en la figura (4.9) el tiempo observado son 120 impulsos. El parámetro g varía entre las curvas de manera usual.

Conclusiones

Para el caso de dos rotores pateados cuánticos acoplados, se ha encontrado un efecto similar a la localización dinámica en cuanto a que, para parámetros de acoplamiento pequeños e impulsos de magnitud pequeña, existe saturación en la energía promedio del sistema. Para parámetros de acoplamiento e impulso grandes, se observa un fenómeno relacionado a la localización dinámica en el cual la energía promedio del sistema crece linealmente en el tiempo, aunque con una proporción menor a la observada en los tiempos tempranos de la evolución.

La densidad de probabilidad también es diferente con respecto al caso con un solo rotor puesto que, para parámetros de acoplamiento e impulso grandes, se observan dos pendientes en escala logarítmica, las cuales corresponden a dos tipos de decaimiento exponencial en el perfil de la distribución $\rho(p)$. Esto podría ser indicador de la existencia de dos tiempos de localización, lo cual podría implicar que la energía promedio del sistema llegue en algún momento a un punto de equilibrio.

Otro fenómeno importante en el caso de los dos rotores acoplados consiste en que las resonancias cuánticas sobreviven al efecto del acoplamiento entre rotores.

Se observó un comportamiento oscilatorio en el decaimiento de la pureza y, por tanto, del grado de información acerca del estado cuántico del sistema. Dichas oscilaciones desaparecen conforme aumentan las magnitudes de los parámetros de acoplamiento entre rotores y de la fuerza de los impulsos. Se encontró que el enlazamiento, dentro del rango de parámetros que se estudiaron, es una función monótona creciente del acoplamiento entre rotores para tiempos grandes, es decir, a mayor acoplamiento entre rotores, mayor es el enlazamiento observado.

También se ha encontrado una aparente saturación en la entropía para tiempos largos y magnitudes de K no muy grandes ($K = 2.5$). Una posible aplicación para

este fenómeno consiste en la posibilidad de crear a demanda estados con grado de enlazamiento fijo, por ejemplo, sería posible regular el máximo grado de enlazamiento que se quiere observar en el sistema variando la magnitud de los parámetros K y g .

Finalmente, cabe comentar que se ha encontrado que, en general, el enlazamiento en el sistema de dos rotores pateados cuánticos crece más rápido en el caso con resonancias cuánticas.

Para un trabajo a futuro es posible mejorar el modelo incluyendo ya sea la interacción entre rotores constante, o aumentando la frecuencia con la que ésta actúa. También es posible mejorar las simulaciones numéricas abarcando un rango más amplio del parámetro de interacción. Así mismo, el estudio del correspondiente mapeo clásico sería de gran utilidad para un estudio más detallado en situaciones con dinámica mixta.

Apéndice A

Operador de Evolución del Rotor Pateado Cuántico

La deducción del operador de evolución del rotor pateado cuántico que se presenta a continuación esta dada en términos del operador del orden del tiempo, que se define como sigue:

$$\overleftarrow{T}A(t)B(t) = \begin{cases} A(t)B(t) & \text{si } t < t' \\ B(t)A(t) & \text{si } t' < t \end{cases}$$

El operador de Evolución, en general se escribe como,

$$\begin{aligned} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t')\right\} &= \sum_n \frac{1}{n!} \left\{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t')\right\}^n \\ &= \sum_n \frac{(-i)^n}{\hbar^n n!} \left\{ \int_{t_0}^t dt_n \hat{H}(t_n) \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \hat{H}(t_{n-1}) \dots \int_{t_0}^{t_1} dt_1 \hat{H}(t_1) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Para apreciar con detalle la forma en la que actúa el operador del orden del tiempo \overleftarrow{T} , veamos lo que pasa cuando se aplica al segundo término de la expansión (denotado aquí por Ω_2),

$$\Omega_2 = \overleftarrow{T} \left\{ \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1) \right\},$$

separando la integración sobre t_1 en los dominios $t_2 > t_1$ y $t_1 > t_2$,

$$\Omega_2 = \overleftarrow{T} \left\{ \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1) \right\} + \overleftarrow{T} \left\{ \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1) \right\}.$$

En el primer sumando tenemos que $\overleftarrow{T}\hat{H}(t_2)\hat{H}(t_1) = \hat{H}(t_2)\hat{H}(t_1)$, en el segundo tenemos que $\overleftarrow{T}\hat{H}(t_2)\hat{H}(t_1) = \hat{H}(t_1)\hat{H}(t_2)$, con esto,

$$\Omega_2 = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}(t_2)\hat{H}(t_1) + \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 \hat{H}(t_1)\hat{H}(t_2).$$

Usando la formula,

$$\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2,$$

y haciendo los cambios de variable $t_1 \rightarrow t_2$ y $t_2 \rightarrow t_1$, se llega a que,

$$\Omega_2 = 2 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}(t_2)\hat{H}(t_1).$$

Con un procedimiento similar se llega a que,

$$\Omega_n = n! \int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}(t_n)\hat{H}(t_{n-1}) \dots \hat{H}(t_1). \quad (\text{A.2})$$

El Hamiltoniano del rotor pateado cuántico es de la forma $\hat{T} + \delta(t')\tilde{V}$. Expandiendo el operador de evolución (ec. A.1) en series y aplicándole el operador del orden del tiempo por medio de la ecuación (A.2), y tomando el intervalo $t - t_0 = 1$:

$$\begin{aligned} \overleftarrow{T} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int dt' (\hat{T} + \delta(t')\tilde{V}) \right\} &= \\ &= \overleftarrow{T} \sum_n \frac{(-i)^n}{\hbar^n n!} \left\{ \int_{t_0}^t dt_n \hat{H}(t_n) \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \hat{H}(t_{n-1}) \dots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}(t_1) \right\} \\ &= \sum_n \frac{(-i)^n}{\hbar^n n!} n! \int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}(t_n)\hat{H}(t_{n-1}) \dots \hat{H}(t_1) \\ &= \hat{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 (\hat{T} + \delta(t_1)\tilde{V}) - \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 (\hat{T} + \delta(t_2)\tilde{V})(\hat{T} + \delta(t_1)\tilde{V}) + \dots \\ &= \hat{1} - \frac{i}{\hbar} (\hat{T} + \hat{V}(t_1)) - \frac{1}{\hbar^2} (\hat{T}^2 + \hat{T}\hat{V}(t_1) + \hat{T}\hat{V}(t_1) + \hat{V}(t_2)\hat{V}(t_1)) + \dots \\ &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{(-i)^{\mu} (-i)^{\nu}}{\hbar^{\mu} \mu! \hbar^{\nu} \nu!} T^{\mu} V^{\nu} \\ &= \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{T} \right\} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{V} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Por lo que el operador de evolución del rotor pateado cuántico se puede escribir como el producto de dos operadores que actúan por separado, uno correspondiente a la evolución libre del rotor y el otro a la acción de los impulsos.

Bibliografía

- [1] G. Casati, B.V. Chirikov, F.M. Izrailev and J. Ford, Lect. Notes Phys. **93**, 334 (1979).
- [2] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Phis. Rev. **47**, 777–780 (1935).
- [3] M. A. Nielsen, I.L. Chuang, Quantum computation and quantum information, Cambridge University Press, 2000.
- [4] Richard P. Feynman, Quantum-Mechanical Computers, Princeton University Press, 1988
- [5] M.G. Raizen, M.G et al. Phis. Rev. Lett. **75**, 4598-4601 (1995).
- [6] Linda E. Reichl, The Transition to Chaos, Springer, 2004.
- [7] J. Moser, On invariant curves of area preserving mappings of an annulus, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl., 1962.
- [8] H. Rüssmann, Über invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisringes, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl., 1970.
- [9] J.M. Anderson, Phis. Rev. E **33**, 17–31 (1984).
- [10] D.L. Shepelyansky, Theor. Math. Phys. **49**, 925 (1982).
- [11] D.L. Shepelyansky, Physica D **28**, 103 (1987).
- [12] A.J. Daley and A. S. Parkins, Phys. Rev. E **66**, 056210 (2002).