



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Condiciones sobre el campo
electromagnético para una frontera en
movimiento

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

Miguel ángel Mejía Rojas



TUTORA
M. en C. Mirna Villavicencio Torres

2007



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Mejia
Rojas
Miguel Angel
26 33 70 19
Universidad Nacional de Mexico
Facultad de Ciencias
Fisica
094186259

2. Datos del tutor

M en C
Mirna
Villavicencio
Torres

3. Datos del sinodal 1

Dr
Ramiro
Garcia
Garcia

4. Datos del sinodal 2

Dra
Martha
Rosete
Aguilar

5. Datos del sinodal 3

Dr
Juan Adrian
Reyes
Cervantes

6. Datos del sinodal 4

Dr
Juan Carlos
Alonso
Huitron

7. Datos del trabajo escrito

Condiciones sobre el campo electromagnetico para una frontera en movimiento
68 p
2007

Agradecimientos

A Patricia Díaz por todo su apoyo y comprensión y por estar con migo en los momentos más difíciles.

A Miguel Ángel Mejía Díaz quien su sola presencia es un aliciente para seguir adelante.

A Mirna Villavicencio, gracias maestra por su infinita ayuda y su enorme comprensión.

Indice

Introduccion

I. Las ecuaciones de Maxwell y las condiciones a la frontera para el caso de medios estaticos

Las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial

La ley de Gauss electrica

La ley de Gauss magnetica

La ley de Faraday y la ley de Ampere

Las ecuaciones de Maxwell en su forma integral

Condiciones a la frontera sobre el campo electromagnetico cuando se tienen fronteras estaticas

II. Condiciones a la frontera para el caso dinamico

La frontera en movimiento con velocidad uniforme

III. Las condiciones a la frontera desde el punto de vista de la Teoria de la Relatividad Especial

Transformacion de Lorente del campo electromagnetico

Sobre las ecuaciones constitutivas en medios materiales en movimiento

Condiciones a la frontera para el sistema de referencia S'

IV. Campo electromagnetico para una esfera dielectrica rotante

Conclusiones

Bibliografia

INTRODUCCIÓN

En muchos de los problemas de electrodinámica clásica se determina, dadas las fuentes, el campo electromagnético en el vacío para cualquier punto del espacio. Una situación más general, y real, consiste en determinar el campo electromagnético si se tiene la presencia de un medio dieléctrico y claramente, un caso mucho más interesante es el calcular este campo cuando el espacio está ocupado por más de un medio material, lo cual se presenta, por ejemplo, cuando se estudia el fenómeno de reflexión y refracción de una onda electromagnética por una superficie plana, en donde la onda electromagnética cruza la frontera entre dos medios.

En la solución de este tipo de problemas, en los que se tiene más de un medio material, se utilizan las llamadas condiciones a la frontera, las cuales determinan cómo los vectores del campo electromagnético cambian al pasar por la superficie de separación entre los dos medios, a la que suele llamarse interfase o simplemente frontera. Aunque la deducción y aplicación de las condiciones a la frontera es de gran importancia, pues permite la solución de una gran diversidad de problemas, en la mayoría de los textos [1-7] sólo se discute el caso en que la frontera entre los diferentes medios tiene una simetría simple y permanece estática. Un caso típico de esto es el cálculo, mediante el método de imágenes, del campo eléctrico generado por una partícula puntual cargada estática que se encuentra en el vacío frente a un conductor, o a un medio lineal, homogéneo e isotrópico, que también permanece en reposo [8-12]. Pero, ¿qué pasa si se tiene una situación dinámica?, es decir, ¿qué sucede cuando por ejemplo la partícula o distribución de carga que se considera ya no está estática sino que se mueve hacia la frontera entre dos medios? ó ¿cómo son las condiciones a la frontera y por ende el campo electromagnético cuando uno de los medios dieléctricos en el sistema se encuentran en movimiento con respecto a otro? También se puede hacer una pregunta más general ¿qué sucede con las ecuaciones que definen a la electrodinámica cuando se está analizando un medio material que se encuentra en movimiento?

Ahora bien, cuando una partícula viaja con velocidad constante en el interior de un medio pueden presentarse distintos efectos en los que se emite radiación

electromagnética. Quizá el fenómeno más conocido es el efecto Cherenkov, en el cual se emite radiación si la velocidad de la carga es mayor que la velocidad de fase de la luz en dicho medio. Otro efecto que puede presentarse es el de radiación de transición, en la cual, independientemente del valor de la velocidad de la partícula, si ésta cruza la frontera entre dos medios, o bien si el medio en el cual viaja es inhomogeneo, se emite radiación electromagnética. Estos dos efectos tienen una gran aplicación en la física de altas energías, en donde son utilizados en el diseño y desarrollo de detectores de partículas, y en la astronomía cuando se estudian los efectos desencadenados por el paso de rayos cósmicos a través de la atmósfera terrestre. En particular, la radiación de transición ha sido estudiada, teóricamente, utilizando diversas aproximaciones [2, 13, 14]. El hecho de que en este fenómeno la carga se mueve a velocidad constante hacia una frontera, sugiere el que pueden obtenerse los mismos resultados si se considera a la partícula estática y a la frontera moviéndose hacia la partícula con velocidad constante. Así pues, el análisis de este fenómeno así como el estudio de los campos generados cuando se tienen medios en movimiento, requieren el conocer las modificaciones que se deben hacer a las condiciones de frontera para el caso en que éstas están en movimiento. Tomando en cuenta la falta de reportes donde éste tema se discuta con suficiente claridad, se planteó este trabajo en el que se pretende lo siguiente:

En el capítulo 1, obtener y discutir de manera detallada las condiciones a la frontera para el caso en el que ésta permanece estática, haciendo énfasis en los conceptos físicos y las aproximaciones utilizadas.

Posteriormente, en el capítulo 2 se presentan las modificaciones a las condiciones a la frontera cuando ésta ya no está fija sino que se desplaza con velocidad uniforme. Las nuevas condiciones a la frontera se obtienen, haciendo énfasis en el método usado así como las consideraciones físicas y matemáticas más relevantes, de la misma manera que en el caso estático pero considerando ahora que la frontera barre en su movimiento el circuito y la superficie gaussiana elegidas para realizar el cálculo.

En el capítulo 3, se obtienen las condiciones a la frontera desde el punto de vista de la Teoría de la Relatividad Especial. Este último método muestra como a menudo el uso de las técnicas de la relatividad especial simplifican la solución de problemas de electromagnetismo. Cabe mencionar que la aplicación directa de la relatividad especial a medios materiales en movimiento lleva a resultados interesantes que no suelen ser discutidos con suficiente detalle en la bibliografía usual.

Finalmente, para mostrar la aplicación de las nuevas condiciones a la frontera

para medios dieléctricos que se encuentran en movimiento, en el capítulo 4 se presenta la solución un problema específico. Se calcula el campo electromagnético generado por una esfera dieléctrica que gira, con velocidad uniforme, dentro de otro medio dieléctrico en presencia de un campo eléctrico uniforme externo.

Los resultados obtenidos en este trabajo permiten mostrar claramente no sólo las ventajas que tiene la aplicación de la relatividad especial en problemas en los que se tiene que alguno de los componentes del sistema se mueve uniformemente y la importancia de la discusión de las modificaciones que deben hacerse a las condiciones a la frontera para el campo electromagnético cuando se tienen fronteras en movimiento. Aunque el problema de una esfera dieléctrica estática inmersa en otro medio en presencia de un campo eléctrico uniforme externo ha sido ampliamente estudiado [15-18], el análisis del problema cuando la esfera rota con velocidad uniforme permite no sólo aplicar las nuevas condiciones estudiadas sino también demostrar explícitamente que el movimiento del dieléctrico da lugar a la generación de un campo eléctrico análogo al caso estático pero acompañado de un campo magnético cuadrupolar. Los resultados obtenidos se reducen a los resultados para el caso estático en el límite en que se toma una velocidad de rotación nula.

1. LAS ECUACIONES DE MAXWELL Y LAS CONDICIONES A LA FRONTERA PARA EL CASO DE MEDIOS ESTÁTICOS

Las ecuaciones Maxwell son un sistema de ecuaciones que permiten determinar el campo eléctrico y magnético generados por distribuciones de carga o corriente. Las leyes expresadas por estas ecuaciones muestran en forma clara que la electricidad y el magnetismo no son dos manifestaciones independientes, sino que constituyen un solo fenómeno físico: el electromagnetismo.

Una de las grandes contribuciones de James Clerk Maxwell fue integrar en estas ecuaciones los resultados experimentales obtenidos por Coulomb, Gauss, Ampère, Faraday, Lenz, Henry y otros, logrando con ello precisar el concepto de campo e introduciendo el concepto de corriente de desplazamiento. Pero quizá, su mayor contribución haya sido el demostrar que de estas ecuaciones se desprende la existencia de ondas electromagnéticas que en el vacío se propagan con velocidad c , donde el valor numérico de esta cantidad coincide con el valor de la velocidad de la luz. Así pues, Maxwell identificó a la luz con una onda electromagnética, incluyendo así a la óptica en el electromagnetismo y dando origen al desarrollo de la inmensa gama de aplicaciones, teóricas y tecnológicas, que hoy tiene la llamada radiación electromagnética.

No se debe olvidar, que las ecuaciones del campo electromagnético tienen una estrecha relación con la Teoría de la Relatividad Especial. De hecho, el origen de la Teoría Especial de la Relatividad radica en el electromagnetismo.

Como se menciona, cuando se especifican las densidades de carga y de corriente, las ecuaciones de Maxwell permiten calcular el campo electromagnético que estas generan en cualquier punto del espacio. En el vacío, estos puntos son lugares en donde las propiedades eléctricas y magnéticas no cambian en las vecindades cercanas. Sin embargo, cuando se considera que la densidad de carga y la de corriente se encuentran en el interior de un medio material la situación cambia drásticamente debido a que la materia está constituida por partículas cargadas.

Si además el sistema bajo estudio está constituido por más de un tipo de medio material, se debe de poner especial cuidado en los puntos en los que estos coinciden, es decir, se debe estudiar lo que sucede en la frontera o interfase.

Es de esperar que diferentes clases de materia tengan “propiedades electromagnéticas” diferentes de tal forma que los campos eléctrico y magnético cambien abruptamente a medida que se cruza la superficie de separación entre distintos medios. Así pues, resulta fundamental conocer cuales serán estos cambios, para lo cual se utilizará lo que a menudo recibe el nombre de “condiciones a la frontera”.

En este capítulo se presentan las ecuaciones de Maxwell, tanto en su forma diferencial como la integral, haciendo énfasis en los conceptos físicos involucrados para posteriormente, a partir de ellas, obtener las condiciones a la frontera, en el caso en que ésta permanece estática.

1.1. Las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial

A lo largo de todo este trabajo se considerará el caso particular en que los medios materiales bajo estudio son isotrópicos, homogéneos y lineales, de forma que la permitividad dieléctrica ϵ y la permeabilidad magnética μ se consideran constantes. Los campos \mathbf{D} y \mathbf{H} se relacionan con \mathbf{E} y \mathbf{B} a través de las expresiones:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

conocidas como ecuaciones constitutivas.

Vale la pena mencionar que en el capítulo 3 de este trabajo se demostrará que estas expresiones se ven modificadas cuando el medio se encuentra en movimiento.

Cuando se tienen varias cargas eléctricas distribuidas homogéneamente en un volumen se define a la densidad volumétrica de carga ρ como la carga por unidad de volumen. En general, la carga eléctrica dq en un elemento de volumen dV se escribe como

$$dq = \rho(\mathbf{r}) dV,$$

donde la densidad de carga es una función de la posición, $\rho(\mathbf{r})$, ya que puede variar de un punto a otro.

Puesto que en general las partículas cargadas están en movimiento, existe un transporte de carga eléctrica. La cantidad de carga que pasa a través de un área A por unidad de tiempo se denomina corriente eléctrica y está dada por la expresión:

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{a} da,$$

donde el vector \mathbf{J} , conocido como densidad superficial de corriente, es paralelo a la velocidad media de las cargas y está dado por

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \rho \mathbf{v}.$$

En esta expresión \mathbf{v} es la velocidad media de las cargas en el volumen dV y tanto la densidad de carga $\rho(\mathbf{r})$ como la densidad de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ desempeñan el papel de fuentes del campo electromagnético, aunque se debe mencionar que a partir de las ecuaciones de Maxwell es posible demostrar que puede existir un campo electromagnético en ausencia de fuentes, las conocidas ondas electromagnéticas.

A continuación se enunciarán las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial, describiendo de manera rápida sus propiedades, para posteriormente, al escribirlas en su forma integral, hacer una descripción más detallada sobre su significado físico así como algunas de sus características más importantes.

1.1.1. La ley de Gauss eléctrica

La primera ecuación, conocida como la Ley de Gauss, es básica en el estudio de la electrostática y depende de que:

- i) La fuerza entre partículas cargadas sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de separación entre las cargas.
- ii) La fuerza entre partículas cargadas es de naturaleza central.
- iii) La interacción de una partícula cargada con un grupo de cargas es la superposición lineal de la interacción entre la partícula cargada y cada una de las otras cargas.

Debe mencionarse que la Ley de Gauss siempre es válida, mientras que la ley de Coulomb, que establece que la fuerza que ejerce una partícula con carga q sobre una partícula con carga q' es tal que (figura 1):

- 1) la línea de acción de la fuerza entre las cargas es $\hat{\mathbf{r}}$, donde \mathbf{r} es el vector que va de una carga a la otra,
- 2) es directamente proporcional a la intensidad de las cargas q y q' ,
- 3) es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de separación entre las cargas,

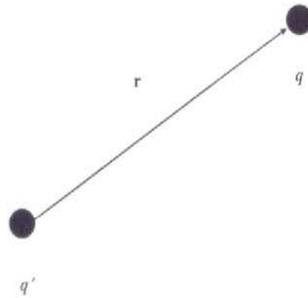


Figura 1

tiene restricciones importantes: el tamaño de las cargas debe de ser mucho menor que la distancia de separación entre ellas y las partículas cargadas deben estar en reposo.

Teniendo en mente estas restricciones la Ley de Coulomb se escribe de la siguiente manera

$$\mathbf{F} = k \frac{qq'}{r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario en la dirección de \mathbf{r} y k es una constante de proporcionalidad que en el sistema de unidades c.g.s. toma el valor $k = 1$, con lo cual

$$\mathbf{F} = \frac{qq'}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

El campo eléctrico generado por la carga puntual q , suele definirse en términos de una fuerza de “acción distancia” como:

$$\mathbf{E} \equiv \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q},$$

o bien

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Si se tiene un sistema de partículas cargadas puntuales q_i con $i = 1, 2, 3, \dots$, el campo eléctrico total en la posición \mathbf{r} es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i,$$

donde $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}$ es el vector unitario que va de la carga q_i al punto de observación. Si se tiene un gran número de cargas descritas a través de la distribución de carga $\rho(\mathbf{r}')$, el campo eléctrico generado se escribe como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\widehat{\mathbf{r}}}{r^2} d\mathbf{r}' = - \int \rho(\mathbf{r}') \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{r}'.$$

Si se calcula la divergencia de ambos lados de esta igualdad se obtiene que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = - \int_V \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{r}'.$$

Puesto que [19]

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}),$$

con $\delta(\mathbf{r})$ la función Delta de Dirac, esta última ecuación puede reescribirse como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \int \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d\mathbf{r}'$$

lo que usando las propiedades de la función Delta de Dirac [20-22] lleva directamente a que:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho(\mathbf{r}).$$

Para medios materiales la ley de Gauss se escribe como

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho(\mathbf{r}), \tag{1.1}$$

donde ahora $\rho(\mathbf{r})$ corresponde a la distribución macroscópica de carga libre que se encuentre en el medio.

1.1.2. La ley de Gauss magnética

En 1819, poco tiempo después de que Oersted descubriera que la aguja de una brújula se desviaba a causa de la presencia de un hilo conductor por el que circulaba una corriente, Jean Baptiste Biot y Félix Savart observaron que un alambre conductor de corriente ejerce una fuerza sobre un imán [23]. De sus resultados experimentales, Biot y Savart fueron capaces de llegar a una expresión de la que

se obtiene el campo magnético en un punto dado del espacio en términos de la corriente que produce el campo. La ley de Biot y Savart establece que si un alambre conduce una corriente constante I y $d\mathbf{l}$ es un elemento de longitud del alambre, apuntando en la dirección del flujo de corriente, el campo magnético $d\mathbf{B}$ en un punto P está dado por la expresión:

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{c} I \frac{(d\mathbf{l} \times \mathbf{r})}{r^3},$$

donde \mathbf{r} es el vector que va del elemento $d\mathbf{l}$ al punto de observación (Figura 2) P

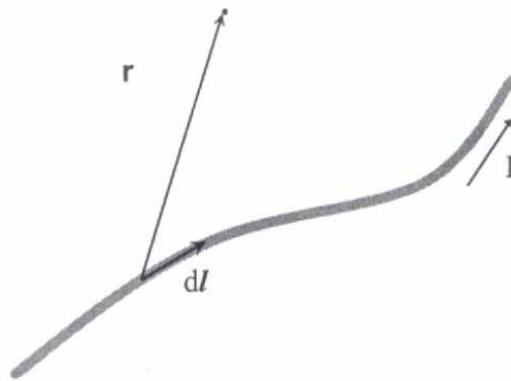


Figura 2

Obsérvese que aunque se presentan rasgos similares entre la ley de Biot y Savart y la ley de Coulomb de la electrostática (un elemento de corriente $I d\mathbf{l}$ produce un campo magnético, mientras que una carga puntual q produce un campo eléctrico y la magnitud del campo magnético es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia), el carácter vectorial es muy diferente. El campo eléctrico generado por una carga puntual es radial, mientras que el campo magnético generado por un elemento de corriente es perpendicular tanto a $d\mathbf{l}$ como a \mathbf{r} .

El campo magnético total \mathbf{B} generado por un alambre conductor, de tamaño finito, por el que circula una corriente I se obtiene sumando las contribuciones de todos los elementos de corriente $I d\mathbf{l}$ que constituyen el conductor. Esto es,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\mathbf{r}' = -\frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{r}',$$

donde la integral se evalúa sobre todo el conductor. Esta expresión debe calcularse con especial cuidado puesto que el integrando es una cantidad vectorial.

Si obtenemos la divergencia de ambos lados de la igualdad de la última ecuación y utilizamos identidades vectoriales obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{c} \nabla \cdot \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{r}' = \\ &= -\frac{1}{c} \int \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot [\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}' + \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left[\nabla \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\mathbf{r}' = 0,\end{aligned}$$

ya que \mathbf{J} depende de \mathbf{r}' y no de \mathbf{r} , y por consiguiente $\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$; y a que $\nabla \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = 0$; el rotacional del gradiente de una función es cero [24].

Así pues, se obtuvo la segunda ecuación de Maxwell que se le llamará ley de Gauss magnética, la cual establece que el flujo de la intensidad del campo magnético para cualquier superficie cerrada es cero, lo que también se interpreta como la no existencia de monopolos magnéticos:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.2)$$

Nótese que en las ecuaciones anteriores no se ha utilizado el factor tiempo. Cuando se incluye la dependencia temporal, lo que parecían dos teorías independientes, electrostática y magnetostática, dan lugar a una teoría única conocida bajo el nombre de electrodinámica clásica.

1.1.3. La Ley de Faraday y la Ley de Ampère

Las dos ecuaciones de Maxwell que faltan por enunciar se basan en tres factores empíricamente establecidos:

1. La carga eléctrica es una cantidad que se conserva y la corriente es un transporte de carga. Este hecho se plasma en la ecuación de continuidad -esto se expondrá más adelante- y, como una consecuencia, en la corriente de desplazamiento de Maxwell.

2. Una corriente genera un campo magnético.

3. Un cambio en el flujo magnético a través de un circuito cerrado inducirá una fem (fuerza electromotriz), relacionada con un campo eléctrico.

La tercera ecuación de Maxwell es la ley de inducción de Faraday-Lenz-Henry:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

mientras que la cuarta, conocida como la ley de Ampère-Maxwell se escribe como:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Las ecuaciones de Maxwell, expresiones (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4) son ecuaciones diferenciales acopladas. Si se conocen las fuentes se puede calcular el campo electromagnético que generan, o bien, si se conoce el campo electromagnético se pueden encontrar las fuentes que lo generan. Al ser ecuaciones lineales se tendrá que la suma de soluciones es también solución, lo que se conoce como principio de superposición. Por otro lado, el campo electromagnético existe como un todo único descrito por \mathbf{E} y \mathbf{B} , ya que de las ecuaciones de Maxwell se observa que la variación temporal de uno lleva a la aparición del otro.

Ahora bien, la corriente se define como

$$\mathbf{I}(t) = -\frac{dQ(t)}{dt},$$

por lo que en términos de la densidad de corriente

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int \rho dV = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Sustituyendo el Teorema de Gauss [25]

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int \nabla \cdot \mathbf{J} dV$$

en la expresión anterior se tiene

$$\int \left(\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0,$$

de donde se desprende que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (1.5)$$

conocida como la ecuación de continuidad y garantiza la conservación de la carga eléctrica.

Al describir la dinámica de partículas cargadas en presencia de un campo electromagnético externo se debe incluir a la conocida Fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (1.6)$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en su forma integral con la ayuda del teorema de Gauss y el teorema de Stokes.

Ahora bien, si se considera una región en la que no se tienen fuentes, esto es $\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$, al desacoplar las ecuaciones de Maxwell se obtienen las ecuaciones de onda

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E} = 0, \quad (1.7)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{B} = 0, \quad (1.8)$$

cuyas soluciones:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{C}_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{C}_2 e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)},$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{C}_3 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{C}_4 e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)},$$

con $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, representan lo que se conoce como ondas electromagnéticas, un campo eléctrico y uno magnético propagándose periódicamente en el espacio.

Por último, si en un punto del espacio hay campos, tanto eléctricos como magnéticos, entonces en ese punto hay energía. Esto es, el campo electromagnético contiene energía y si el campo electromagnético se propaga de un punto del espacio a otro, como en una onda electromagnética, entonces hay propagación de energía. El flujo de energía \mathbf{S} está dado por

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

donde \mathbf{S} es el vector de Poynting. La dirección de este vector es perpendicular tanto a \mathbf{E} como a \mathbf{H} , por lo que \mathbf{S} es perpendicular al plano que los contiene, es decir, la dirección de \mathbf{S} es la misma que la de propagación de la onda. A la generación de campos electromagnéticos en forma de ondas se le conoce como radiación electromagnética.

1.2. Las ecuaciones de Maxwell en su forma integral

Mediante dos teoremas del cálculo integral en varias variables, llamados Teorema de Gauss y Teorema de Stokes [26] se obtiene la forma integral de las ecuaciones de Maxwell.

El Teorema de Gauss o Teorema de la Divergencia establece que para cualquier campo vectorial \mathbf{G} bien definido, en un volumen V rodeado por una superficie

cerrada S

$$\int \nabla \cdot \mathbf{G} \, dV = \oint_S \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da,$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector normal a S .

Por su parte, el Teorema de Stokes establece que si \mathbf{G} es un campo vectorial bien definido, S es una superficie abierta arbitraria, positivamente orientada, y C una curva cerrada frontera de S

$$\int_s (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{l},$$

donde $d\mathbf{l}$ es un elemento de C y $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector normal a S .

Al integrar la ecuación (1.1) en un volumen V se tiene

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} \, dV = 4\pi \int_V \rho \, dV.$$

Aplicando el Teorema de Gauss,

$$\int \nabla \cdot \mathbf{D} \, dV = \oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da,$$

al lado derecho de esta ecuación, se obtiene que

$$\oint \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = 4\pi \int_V \rho \, dV. \quad (1.9)$$

Así pues, la ley de Gauss eléctrica establece que el flujo del vector \mathbf{D} a través de una superficie cerrada es igual a 4π veces la carga libre total contenida en el volumen limitado por dicha superficie. Esta expresión permite calcular, para problemas con simetría, el campo eléctrico generado por una distribución de carga. De ella podemos además deducir, en el vacío, que en el interior de un conductor el campo eléctrico debe anularse.

De forma similar, si se integra la ecuación (1.2) en un volumen V

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dV = 0$$

y se aplica el Teorema de Gauss,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dV = \oint \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da,$$

se tiene que

$$\oint \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = 0. \quad (1.10)$$

Esto es, el flujo de campo magnético a través de una superficie cerrada cualquiera es nulo, lo que implica la inexistencia del monopolo magnético.

Si ahora integramos la ecuación (1.4) sobre una superficie abierta denotada por S'

$$\int (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \int_{S'} \left[\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}' \, da$$

y se aplica el teorema de Stokes se obtiene

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S'} \left[\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}' \, da, \quad (1.11)$$

lo que indica que la circulación de \mathbf{H} a lo largo de un contorno cualquiera es igual a la suma de la corriente y de la corriente de desplazamiento que atraviesa la superficie limitada por dicho contorno. Observese además que de esta ecuación es posible vislumbrar que si \mathbf{D} varía temporalmente se genera un campo \mathbf{H} . O bien, en el vacío, la variación temporal del campo eléctrico \mathbf{E} genera un campo magnético \mathbf{B} .

Finalmente, si se integra la ecuación (1.3) sobre una superficie S'

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = -\frac{1}{c} \int_{S'} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}' \, da$$

y se utiliza el Teorema de Stokes,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.12)$$

se obtiene

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int_{S'} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}' \, da. \quad (1.13)$$

A la integral de un vector a lo largo de un contorno cerrado, o integral de línea, se le llama circulación del vector. A la circulación del campo eléctrico se le denomina “fuerza electromotriz”, aunque no es una fuerza y tiene unidades de diferencia de potencial, es decir energía por unidad de carga. La ley de inducción de Faraday

establece que el cambio del flujo de campo magnético a través de un circuito cerrado induce un campo eléctrico alrededor del circuito, cuya integral de línea es la fuerza electromotriz, la cual genera, de acuerdo con la ley de Ohm, la circulación de una corriente. Observemos que ahora es claro que un campo magnético que cambia con el tiempo genera un campo eléctrico.

1.3. Condiciones a la frontera sobre el campo electromagnético cuando se tienen fronteras estáticas

Las ecuaciones de Maxwell permiten calcular el campo electromagnético para cada punto del espacio cuando éste se encuentra lleno con un medio material caracterizado por las propiedades (ϵ, μ, σ) . Ahora bien, considerando que en lugar de un solo medio, el sistema bajo estudio se encuentra constituido por dos o más medios materiales con distintas propiedades electromagnéticas, se puede esperar que los campos cambien drásticamente de un punto a otro del espacio. En particular, es de gran interés saber que sucede con los campos en los puntos que se encuentran sobre la frontera o interfase entre los distintos medios, es decir las condiciones a la frontera. En la literatura [1-7] se encuentran muchos ejemplos en los que se aplican estas condiciones para calcular el campo electromagnético.

En esta sección del trabajo se mostrarán las condiciones a la frontera que habrán de satisfacerse considerando que los medios que constituyen el sistema se encuentran en reposo. Posteriormente, en el capítulo 2, se obtendrán dichas condiciones en su expresión más general cuando se considera que la frontera puede encontrarse en movimiento.

Considerando a la frontera entre dos medios homogéneos, lineales, isotrópicos, caracterizados por las constantes dieléctricas ϵ_1 y ϵ_2 respectivamente, se denotará al medio caracterizado por ϵ_1 simplemente como medio 1 y los vectores de campo en ese medio como \mathbf{E}_1 , \mathbf{B}_1 , \mathbf{D}_1 y \mathbf{H}_1 , mientras que al medio caracterizado por ϵ_2 se le denominará medio 2 y los vectores de campo en ese medio serán \mathbf{E}_2 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{D}_2 y \mathbf{H}_2 .

Si se define

$$4\pi \int_V \rho \, dV = 4\pi q,$$

con q la carga total encerrada por el volumen V , se puede escribir a la forma integral de la ley de Gauss como

$$\oint \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = 4\pi q_{libre}. \quad (1.14)$$

Para ver lo que sucede con el vector \mathbf{D} , al pasar de un lado a otro de la interfase o frontera, se considera un pequeño cilindro recto como el de la figura 3. El eje del cilindro apunta en la dirección normal a la frontera, Δl corresponde a la altura del cilindro y $\Delta a_1 = \Delta \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1$ y $\Delta a_2 = \Delta \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2$ representan el área de las tapas, respectivamente.

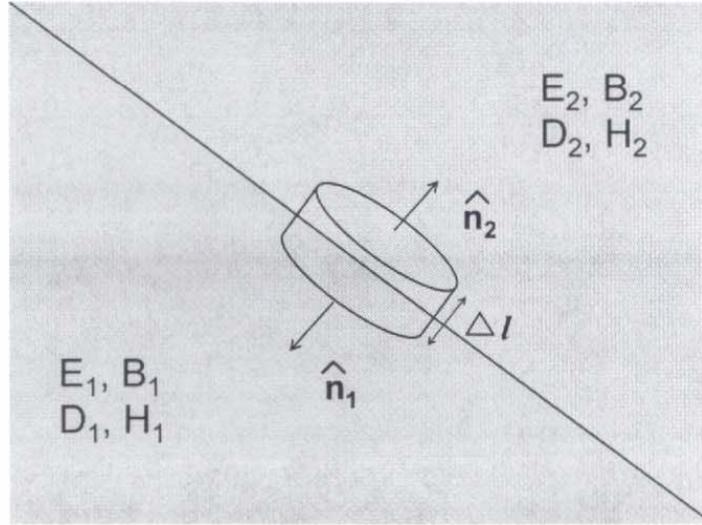


Figura 3

Considerando que este cilindro es tan pequeño que las tapas se encuentran casi pegadas a la frontera, lo cual sería equivalente a decir que $\Delta l \rightarrow 0$, el flujo a través de la superficie lateral del cilindro será casi cero, de forma que solo hay contribuciones al flujo debido a las tapas. Así que,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_{\text{tapa1}} \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 da_1 + \int_{\text{tapa2}} \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 da_2.$$

Ahora bien, ya que las tapas son muy pequeñas, se puede considerar que sobre ellas el vector \mathbf{D} es homogéneo, de forma que

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \int_{\text{tapa1}} da_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \int_{\text{tapa2}} da_2 = (\mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1) \Delta a_1 + (\mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2) \Delta a_2$$

De la figura 3, se puede escribir $\Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a$ y definir $\hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{n}}_2 = \hat{\mathbf{n}}$, con $\hat{\mathbf{n}}$ un vector normal a la frontera apuntando del medio 1 al medio 2, por lo que

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta a - \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta a,$$

es decir

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = [(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}] \Delta a$$

De acuerdo con la ecuación (1.14), esta integral debe ser proporcional a la carga libre encerrada por este pequeño cilindro. Si el cilindro tiene una altura Δl tendremos que, en términos de la densidad de carga, esta carga está dada por

$$q = \rho \Delta V = \rho \Delta l \Delta a.$$

Ahora bien, ya que se está considerando el límite $\Delta l \rightarrow 0$, se puede reemplazar al producto $\rho \Delta l$ por una densidad superficial σ de carga libre. Así que

$$q = \sigma \Delta a$$

y de la ecuación (1.14)

$$[(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}] \Delta a = 4\pi\sigma\Delta a,$$

de donde

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4\pi\sigma. \quad (1.15)$$

Esto significa que la componente normal del campo \mathbf{D} presenta una discontinuidad cuando se cruza la frontera, la cual está dada por un factor de 4π veces la densidad superficial de carga libre sobre ésta.

Análogamente se puede calcular el flujo de campo magnético a través de este pequeño cilindro haciendo uso de la ecuación (1.6)

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da &= \int_{\text{tapa1}} \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, da_1 + \int_{\text{tapa2}} \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \, da_2 = . \\ &= (\mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2) \Delta a = \\ &= [(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}] \Delta a = 0 \end{aligned}$$

o bien

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0. \quad (1.16)$$

Es decir, en la frontera la componente normal del campo magnético es continua.

Ahora bien, solo se ha mostrado lo que sucede con la componente normal de \mathbf{D} y \mathbf{B} y para definir completamente a estos vectores, también se debe decir que sucede con su componente tangencial. Para estudiar que pasa con esta componente, se considera un circuito rectangular como el que se muestra la figura 4.

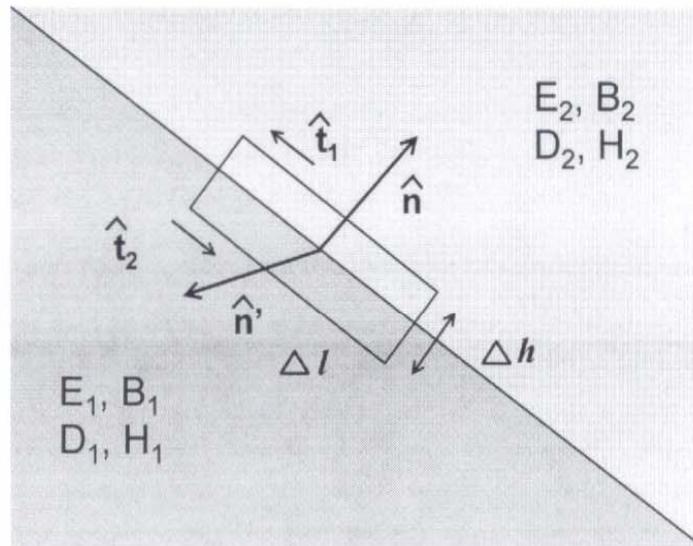


Figura 4

Considerando que los extremos del circuito, que se denotará por C , tienen una longitud Δh extremadamente pequeña de forma que se tenga $\Delta h \rightarrow 0$.

De la figura 4 se puede ver que

$$\begin{aligned}\hat{n}' &= \hat{n} \times \hat{t}, \\ \hat{t} &= \hat{n}' \times \hat{n}, \\ \hat{n} &= \hat{t} \times \hat{n}', \\ \hat{t}_2 &= \hat{t} \quad \text{y} \quad \hat{t}_1 = -\hat{t},\end{aligned}$$

donde \hat{n} denota el vector normal a la frontera que apunta del medio 1 al medio 2; \hat{n}' denota al vector normal al circuito C , \hat{t}_1 y \hat{t}_2 corresponden a los vectores de trayectoria a lo largo de los lados superiores del circuito y \hat{t} al vector tangente a la superficie.

En el límite $\Delta h \rightarrow 0$, se tiene que

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\text{lado1}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\text{lado2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Ya que el circuito C es muy pequeño se puede considerar que aunque el campo puede tener una dependencia espacial, a lo largo de ese pequeño circuito el campo eléctrico es homogéneo por lo que

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E}_1 \cdot \int_{\text{lado1}} d\mathbf{l} + \mathbf{E}_2 \cdot \int_{\text{lado2}} d\mathbf{l} =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}}_1 \Delta l + \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}}_2 \Delta l = \\
&= (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{t}} \Delta l.
\end{aligned}$$

Sustituyendo a $\hat{\mathbf{t}}$ por $\hat{\mathbf{n}}' \times \hat{\mathbf{n}}$ se tiene

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (\hat{\mathbf{n}}' \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \Delta l,$$

lo cual puede reescribirse como

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{n}}' \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] \Delta l, \quad (1.17)$$

al utilizar la identidad vectorial

$$(\hat{\mathbf{n}}' \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \hat{\mathbf{n}}' \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)].$$

Por otro lado, para el segundo miembro de la ecuación que describe a la Ley de Faraday, el flujo de $(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})$ a través de la superficie S encerrada por el circuito C está dado por

$$\int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}' da = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}}' \Delta h \Delta l. \quad (1.18)$$

Sustituyendo las expresiones (1.17) y (1.18) en la ecuación (1.13) se tiene

$$\hat{\mathbf{n}}' \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] \Delta l = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}}' \Delta h \Delta l$$

es decir:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \Delta h.$$

Dado que la frontera está estática, se puede decir que la variación del campo magnético con respecto al tiempo en la pequeña zona en la que colocamos nuestro circuito infinitesimal es finita. Y como además el circuito es tal que $\Delta h \rightarrow 0$, es válido tomar el lado derecho de esta última igualdad tendiendo a cero, por lo que

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (1.19)$$

lo que significa que en la frontera, la componente tangencial del vector de campo eléctrico \mathbf{E} es continua.

Para ver el comportamiento de las componentes tangenciales de \mathbf{H} al cruzar la frontera, se usará la expresión integral de la ley de Ampère,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}' da \quad (1.20)$$

utilizando el mismo circuito C de la figura 4.

El lado izquierdo de esta expresión se calcula análogamente que como se hizo para el campo eléctrico, obteniéndose como resultado

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{n}}' \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] \Delta l. \quad (1.21)$$

Mientras que, dado que el circuito es infinitesimalmente pequeño

$$\int_S \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}' da = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}' \Delta h \Delta l.$$

por lo que de la ecuación (1.20) se tiene

$$\hat{\mathbf{n}}' \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] \Delta l = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}' \Delta h \Delta l$$

o bien

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \right) \Delta h.$$

De nuevo, ya que el circuito es muy pequeño y la frontera está fija, el cambio $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ es finito y al considerar que $\Delta h \rightarrow 0$, se puede aproximar

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Delta h \rightarrow 0.$$

Ahora bien, el término $\mathbf{J} \Delta h$ puede escribirse en términos de una densidad superficial de corriente \mathbf{K} , que fluye sobre la superficie de la frontera entre los dos medios con lo cual

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \Delta h$$

es decir,

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K} \quad (1.22)$$

donde se ha tomado en cuenta que la densidad de superficial de corriente K tiene solo componentes paralelas a la superficie. Nótese que en la frontera, las componentes tangenciales de \mathbf{H} experimentan una discontinuidad que es proporcional a la densidad superficial de corriente.

Las ecuaciones (1.15), (1.16), (1.19) y (1.22) son el conjunto de condiciones de frontera y son utilizadas para obtener el cambio en el campo electromagnético cuando se tiene un sistema constituido por más de un medio material. Ejemplos de la aplicación de estas condiciones pueden encontrarse en la literatura usual de los cursos de electromagnetismo, en donde se hace énfasis por ejemplo en su aplicación en el estudio de la reflexión y refracción de ondas electromagnéticas que viajando en un medio material inciden sobre la frontera que les conducirá a otro medio con distintas características.

Debe notarse que en la mayoría de estos ejemplos solo se analiza el caso en el que la frontera está fija.

2. CONDICIONES A LA FRONTERA PARA EL CASO DINÁMICO

Como ya se ha indicado, al obtener el campo electromagnético para todo punto del espacio, para un sistema constituido por diferentes medios materiales, caracterizados por ε y μ , se debe considerar lo que sucede en los puntos que se encuentran en la frontera. Las ecuaciones (1.15), (1.16), (1.19) y (1.22), determinan el comportamiento del campo electromagnético al cruzar esta interfase. Nótese que en la deducción de estas ecuaciones, realizada en el capítulo 1, se consideró que la frontera entre los medios se mantiene fija como función del tiempo. Sin embargo, existen casos en los que la frontera se mueve dando origen a problemas que anteriormente no se presentaban, por ejemplo ¿cómo se construyen al circuito C y a la superficie Gaussiana de forma que sean infinitesimales y que al mismo tiempo contengan a los puntos de la interfase, que ahora se mueve?

A continuación se presentan las condiciones a la frontera para el caso particular en que ésta se mueva con velocidad uniforme $\mathbf{v} = \beta c$. Estas nuevas ecuaciones se obtendrán esencialmente de la misma manera a lo realizado para el caso estático.

2.1. La frontera en movimiento con velocidad uniforme

Para determinar las condiciones a la frontera para un sistema constituido por dos medios lineales, homogéneos e isotrópicos, cuya frontera se está desplazando en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ con una velocidad uniforme \mathbf{v} , se utilizan un circuito C y una superficie gaussiana cilíndrica S infinitesimales que se encuentran fijos con respecto al sistema de referencia del laboratorio. En cierto instante de tiempo la interfase pasa por C y S para después continuar su camino (figuras 5a y 5b)

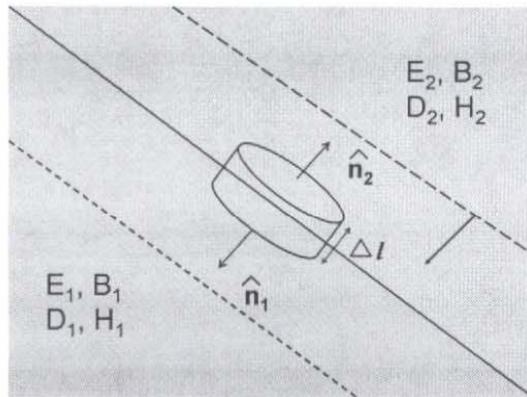


Figura 5a

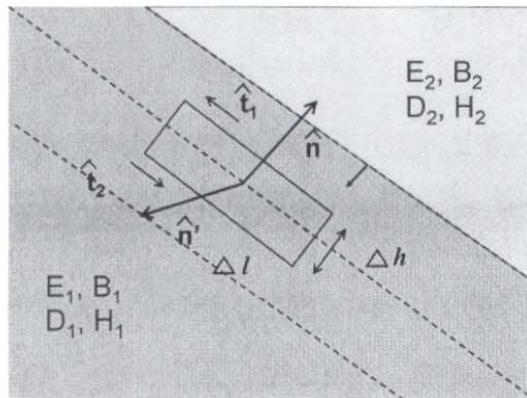


Figura 5b

Al calcular las condiciones a la frontera para la componente normal de \mathbf{D} y la de \mathbf{B} , ecuaciones (1.15) y (1.16), el lado derecho estas expresiones, en el cual aparece la densidad superficial de carga libre sobre la frontera, no debe modificarse si la frontera se encuentra en movimiento puesto que la carga es un invariante. Así pues, si la frontera se encuentra en movimiento, las condiciones (1.15) y (1.16) conservan su forma.

Ahora bien, las condiciones a la frontera para la componente normal de \mathbf{E} y la de \mathbf{H} , ecuaciones (1.13) y (1.22), deben de sufrir cambios. Esto se debe a que la derivada temporal que se encuentra del lado derecho de ambas ecuaciones ya no podrá aproximarse a cero puesto que la interfase, en su movimiento, barre el circuito C , fijo en el sistema de laboratorio.

Por ejemplo, para el caso de la frontera estacionaria, $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ se aproxima a cero ya que al tomar $\Delta l \rightarrow 0$ se considera que el campo \mathbf{D} sobre la superficie de ese circuito tenía la misma magnitud y no había cambio explícito en el tiempo. Para

la frontera en movimiento, es de esperarse que para puntos muy cercanos a ella, el campo tenga variaciones con respecto al tiempo. Recuérdesse que lo que permanece fijo con respecto al laboratorio es el circuito C con el que se está llevando a cabo el cálculo.

Para obtener la contribución debida al movimiento de la frontera, se considera un circuito cerrado C' , idéntico en forma y tamaño a C , que se mueve junto con la frontera. Desde el laboratorio, este circuito C' se mueve como una velocidad constante \mathbf{v} e instantáneamente coincide con el circuito original C . Sobre este circuito, se calculará la integral

$$I = \frac{1}{c} \int_{\text{superficie de } C'} \frac{d\mathbf{D}}{dt} (\mathbf{x}(t), t) \cdot \hat{\mathbf{n}}' da,$$

donde se ha escrito explícitamente $\mathbf{x}(t)$ para enfatizar que la integración se está realizando sobre una superficie en movimiento. Ahora si, al igual que en el caso estático, cuando el área de C' se hace muy pequeña tendremos que $I \rightarrow 0$, esto es

$$0 = \frac{1}{c} \int_{\text{superficie de } C'} \frac{d\mathbf{D}}{dt} (\mathbf{x}(t), t) \cdot \hat{\mathbf{n}}' da. \quad (2.1)$$

Ahora bien, la derivada total de \mathbf{D} con respecto al tiempo, se puede expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{D}}{dt} (x(t), y(t), z(t), t) &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \\ &= (v_x, v_y, v_z) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{D} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{D}}{dt} (\mathbf{x}(t), t) = \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \nabla \right) \mathbf{D} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (2.1) y definiendo $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{n}}' da &= \\ \int [(\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla) \mathbf{D}] \cdot \hat{\mathbf{n}}' da + \int \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}}' da &= 0, \end{aligned}$$

por lo que

$$\int \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}}' da = - \int [(\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla) \mathbf{D}] \cdot \hat{\mathbf{n}}' da. \quad (2.2)$$

Con la ayuda de la identidad vectorial

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad (2.3)$$

se puede escribir

$$\nabla \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D}) = \boldsymbol{\beta} (\nabla \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{D} (\nabla \cdot \boldsymbol{\beta}) + (\mathbf{D} \cdot \nabla) \boldsymbol{\beta} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla) \mathbf{D}.$$

Ya que $\boldsymbol{\beta}$ es un vector constante, puesto que la frontera se mueve uniformemente, se tiene que la identidad queda

$$\nabla \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D}) = \boldsymbol{\beta} (\nabla \cdot \mathbf{D}) - (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla) \mathbf{D},$$

es decir

$$(\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla) \mathbf{D} = \boldsymbol{\beta} (\nabla \cdot \mathbf{D}) - \nabla \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D}).$$

Sustituyendo este último resultado en la ecuación (2.2) se tiene:

$$\frac{1}{c} \int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}}' da = \int [\nabla \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D}) - \boldsymbol{\beta} (\nabla \cdot \mathbf{D})] \cdot \hat{\mathbf{n}}' da.$$

Ahora bien, aplicando el Teorema de Stokes [26], al primer término del lado derecho de la ecuación (1.12)

$$\int_S [\nabla \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D})] \cdot \hat{\mathbf{n}}' da = \oint_{C'} (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{l},$$

se tiene que

$$\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}}' da = \oint_{C'} (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{l} - \int_S [\boldsymbol{\beta} (\nabla \cdot \mathbf{D})] \cdot \hat{\mathbf{n}}' da.$$

Lo cual representa la contribución del movimiento de la frontera al cálculo de las condiciones a la frontera. Para calcular lo que sucede cuando se aplica éste resultado en la ley de Ampère, considerando al circuito C que cruza la frontera, hay que sustituir esta última expresión en la ecuación (1.13)

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}' da =$$

$$= \oint_{C'} (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{l} + \int_S \left(\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} - \boldsymbol{\beta} (\nabla \cdot \mathbf{D}) \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}' da,$$

lo que puede escribirse como

$$\oint_{C'} [\mathbf{H} - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D})] \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} - \boldsymbol{\beta} (\nabla \cdot \mathbf{D}) \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}' da. \quad (2.4)$$

Sustituyendo la ley de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

y la definición $c\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}$, se tiene

$$\oint_{C'} [\mathbf{H} - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D})] \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{J} - \mathbf{v}\rho) \cdot \hat{\mathbf{n}}' da,$$

lo que puede reescribirse como

$$\oint_{C'} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} - \oint_{C'} (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{J} - \mathbf{v}\rho) \cdot \hat{\mathbf{n}}' da. \quad (2.5)$$

La integral de línea de \mathbf{H} es independiente de $\boldsymbol{\beta}$ y se calcula como en la ecuación (1.21),

$$\oint_{C'} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{n}}' \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] \Delta l'.$$

Ya que $\boldsymbol{\beta}$ es un vector constante la segunda integral, también se calcula de manera análoga a (1.21) para obtener

$$\oint_{C'} (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{n}}' \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times [\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)]) \Delta l'.$$

Por otro lado, el lado derecho de la ecuación (2.4) se puede expresar como

$$\frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{J} - \mathbf{v}\rho) \cdot \hat{\mathbf{n}}' da = \frac{4\pi}{c} [(\mathbf{J} - \mathbf{v}\rho)] \cdot \hat{\mathbf{n}}' \Delta h' \Delta l'.$$

Así pues, la ecuación (2.5) queda

$$\hat{\mathbf{n}}' \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] \Delta l' - \hat{\mathbf{n}}' \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times [\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)]) \Delta l' =$$

$$= \frac{4\pi}{c} [(\mathbf{J} - \mathbf{v}\rho)] \cdot \hat{\mathbf{n}}' \Delta h' \Delta l'.$$

Expresión que, al simplificarse conduce a que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times [(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) - [\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)]] &= \\ &= \frac{4\pi}{c} (\mathbf{J} - \mathbf{v}\rho) \Delta h'. \end{aligned}$$

Debido a que el circuito C' es tan pequeño que casi está pegado a la frontera, se puede aproximar $\mathbf{J}\Delta h' \rightarrow \mathbf{K}$ y $\rho\Delta h' \rightarrow \sigma$, con \mathbf{K} la densidad superficial de corriente libre sobre la frontera y σ la densidad superficial de carga libre sobre ésta. Así pues,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times [(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) - [\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)]] &= \\ &= \frac{4\pi}{c} (\mathbf{K} - \mathbf{v}\sigma). \end{aligned}$$

Ahora bien, haciendo uso de la identidad vectorial

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (2.6)$$

el segundo término de la ecuación anterior queda

$$\hat{\mathbf{n}} \times [\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)] = \boldsymbol{\beta} [\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)] - (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}).$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) - \boldsymbol{\beta} [\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)] + (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) &= \\ &= \frac{4\pi}{c} (\mathbf{K} - \mathbf{v}\sigma). \end{aligned}$$

El término $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)$, es la diferencia en las componentes normales de \mathbf{D}_2 y \mathbf{D}_1 . Como se mencionó al inicio de este capítulo, aún para el caso de la frontera en movimiento, la discontinuidad en estas componentes conserva la forma de la ecuación (1.15),

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4\pi\sigma$$

y al sustituir esta expresión en la anterior

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) - 4\pi\sigma\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) &= \\ &= \frac{4\pi}{c} (\mathbf{K} - \mathbf{v}\sigma), \end{aligned}$$

simplificando queda finalmente

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) + (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) &= \\ &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Esta última expresión permite calcular, para una frontera en movimiento, la discontinuidad en las componentes tangenciales del vector \mathbf{H} en esa frontera. Es importante señalar que esta discontinuidad depende de la densidad superficial de corriente libre en la frontera así como del comportamiento del vector \mathbf{D} y del movimiento de la frontera.

Ahora, de manera similar, se procede a encontrar la nueva condición a la frontera, en movimiento, para el campo eléctrico.

Aplicando la ley de Faraday al circuito C' ,

$$\oint_{C'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}' = -\frac{1}{c} \int_{S'} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}' da.$$

Nuevamente, como en el caso anterior, la derivada parcial del campo magnético con respecto al tiempo no puede aproximarse a cero. Cambiando \mathbf{D} por \mathbf{B} en el cálculo que se acaba de mostrar, se tendrá

$$\frac{1}{c} \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}}' da = \int [\nabla \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \boldsymbol{\beta} (\nabla \cdot \mathbf{B})] \cdot \hat{\mathbf{n}}' da,$$

la cual se reduce a

$$\frac{1}{c} \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}}' da = \int [\nabla \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})] \cdot \hat{\mathbf{n}}' da,$$

ya que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Aplicando el Teorema de Stokes [26] podemos escribir simplemente

$$\frac{1}{c} \int_{S'} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}' da = \oint_{C'} (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}'.$$

Entonces, sustituyendo este resultado en la ley de Faraday se tiene que

$$\oint_{C'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_{C'} (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}',$$

o bien

$$\oint_{C'} (\mathbf{E} + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})) \cdot d\mathbf{l}' = 0.$$

Nuevamente, la integral se resuelve como en (1.21) y debido a que en la integral anterior $\boldsymbol{\beta}$ es un vector constante se obtiene que

$$\begin{aligned} \oint_{C'} (\mathbf{E} + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})) \cdot d\mathbf{l}' &= \hat{\mathbf{n}}' \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] \Delta l' + \\ &+ \hat{\mathbf{n}}' \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times [\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)]] \Delta l' = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, después de suprimir a $\hat{\mathbf{n}}'$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) + \hat{\mathbf{n}} \times [\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)] = 0.$$

Con la ayuda de la identidad vectorial (2.6) se obtiene simplemente

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0,$$

la cual es la expresión que permite calcular la discontinuidad de las componentes normales del campo eléctrico \mathbf{E} , cuando se cruza la frontera en movimiento entre dos medios. Nótese que ahora esta discontinuidad depende de lo que suceda con el campo magnético y el movimiento de la frontera.

Así pues, para el caso en el que la frontera entre dos medios se encuentra en movimiento con una velocidad constante $\boldsymbol{\beta}$, las condiciones a la frontera toman la forma:

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4\pi\sigma, \quad (2.8)$$

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) + (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) &= \\ &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0. \quad (2.11)$$

Se han calculado de manera análoga al caso estático, las nuevas condiciones a la frontera para cuando esta se encuentra en movimiento uniforme haciendo uso de un circuito que se encuentra en reposo con respecto a la frontera. Este es un problema que puede ser analizado con la Teoría de la Relatividad Especial por lo que se

espera poder encontrar estas mismas condiciones si se aplican a las condiciones a la frontera las Transformaciones de Lorentz para el campo electromagnético. Este método será discutido en el siguiente capítulo, demostrando con ello que muchas veces el uso de la Teoría Especial de la Relatividad permite simplificar el cálculo; sobre todo en problemas en los que parte del sistema se encuentra en movimiento uniforme.

A manera de resumen, las condiciones a la frontera son:

Caso estático	Caso dinámico
$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4\pi\sigma$	$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4\pi\sigma$
$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$	$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$
$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$	$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$
$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{K}$	$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) + (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{K}$
	(2.12)

las cuales en el caso de que no se tenga una densidad superficial de carga libre ni una corriente superficial sobre la frontera se reducen a las expresiones:

Caso estático	Caso dinámico
$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$	$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$
$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$	$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$
$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$	$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$
$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0$	$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) + (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) = 0$

3. LAS CONDICIONES A LA FRONTERA DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL.

A finales del siglo XIX y principios del XX, la física se enfrentaba a un problema: aunque la mecánica clásica de Newton permanecía invariante ante las transformaciones de Galileo, estas mismas transformaciones modificaban las ecuaciones de Maxwell cuando se pasaba de un sistema de referencia inercial a otro. Algo estaba mal y para corregirlo se pensó que había tres opciones: *i)* se debían modificar las transformaciones de Galileo y con ello las ecuaciones de Newton, *ii)* modificar las ecuaciones de Maxwell ó *iii)* proponer la existencia de un sistema absoluto para el electromagnetismo (el éter).

La necesidad de encontrar transformaciones ante las cuales las ecuaciones de Maxwell no se modificaran y que al mismo tiempo fueran congruentes con la segunda ley de Newton, llevó a que en 1904, Lorentz demostrara que existe una transformación matemática –lo que posteriormente fue llamado transformaciones de Lorentz- que deja invariante la forma de las ecuaciones de Maxwell siempre y cuando no sólo se cambie la posición de un punto, al pasar de un sistema de referencia a otro, sino también el tiempo. Sin embargo, Lorentz solo había propuesto estas ecuaciones, utilizando una gran cantidad de hipótesis, con el fin de conseguir la invariancia de las ecuaciones de Maxwell en el vacío.

En 1905 Einstein propuso la Teoría de la Relatividad Especial, cuyo primer postulado, según el cual las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas inerciales, garantiza que las ecuaciones de Maxwell deben de tener la misma forma en cualquier sistema de referencia inercial y que, por lo tanto, es imposible distinguir, a partir de experimentos electromagnéticos, un sistema de referencia inercial de otro; esto es conocido como el primer postulado. Así pues, para que este principio de relatividad se cumpla, es necesario que las transformaciones de Lorentz sean físicamente válidas; en consecuencia, el tiempo medido entre dos sucesos depende del movimiento de quien lo mide. Einstein propuso además un segundo

postulado en el que se establece que la velocidad de la luz en el espacio libre tiene el mismo valor para todos los observadores, independientemente de su estado de movimiento.

En este capítulo se obtendrán nuevamente las condiciones a la frontera para medios dieléctricos en movimiento pero ahora desde el punto de vista de la Teoría Especial de la Relatividad por lo que se hará uso de las transformaciones de Lorentz.

3.1. Transformaciones de Lorentz para el campo electromagnético

Antes de entrar de lleno a la obtención de las condiciones a la frontera para un observador en el sistema de referencia del laboratorio S , se hará un paréntesis en el cual se obtendrán las transformaciones de los campos eléctrico y magnético utilizando las transformaciones de Lorentz. Debe mencionarse que primero se estudiará el caso en el cual se trabaja en el vacío y por tanto solo se analizará el comportamiento de los vectores \mathbf{E} y \mathbf{B} ante el cambio de sistema de referencia y posteriormente se hará el análisis del caso en el cual se tienen medios materiales.

Las transformaciones de Lorentz que relacionan las mediciones de un observador en un sistema de referencia inercial S' con las realizadas por un observador en un sistema de referencia inercial S , con respecto al cual se mueve con una velocidad constante \mathbf{v} , están dadas por las expresiones

$$x' = \gamma (x - vt),$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = \gamma (t - vx/c^2),$$

con

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

y

$$\beta = v/c.$$

Mientras que para el caso de las velocidades, las transformaciones de Lorentz son

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - v \frac{v_x}{c^2}},$$

$$v'_y = \gamma^{-1} \frac{v_y}{1 - v \frac{v_x}{c^2}},$$

$$v'_z = \gamma^{-1} \frac{v_z}{1 - v \frac{v_x}{c^2}}.$$

En el vacío, un elemento de carga dq puede escribirse en términos de la densidad de carga ρ como

$$dq = \rho dV.$$

Uno de los hechos bien conocidos es que la carga dq es invariante ante las transformaciones de Lorentz, aunque la densidad de carga ρ y el elemento de volumen dV no lo sean por separado. Así pues, ρdV es un escalar pero el producto

$$\rho dV dx^\kappa$$

es un cuadrivector ya que

$$x^\kappa = (-ct, x, y, z) = (-ct, \mathbf{x}),$$

es el cuadrivector de posición. En la notación corta, se establece que los índices griegos toman valores del 0 al 3, es decir $\kappa = 0, 1, 2, 3$; los índices romanos toman valores de 1 a 3, índices repetidos indican suma y se define $x^0 = -ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ y $x^3 = z$.

Esta expresión puede reescribirse como

$$\rho c (dV) dx^\kappa = \rho (dV) c \frac{dx^\kappa}{dt} dt, \quad (3.1)$$

pero como

$$(dV) c dt = (dx dy dz) c dt$$

es el elemento de volumen en el espacio de 4 dimensiones, el cual es además un escalar puesto que cada uno de sus componentes lo es, entonces el lado izquierdo de la ecuación (3.1) es un cuadrivector y por tanto $\rho dx^\kappa / dt$ también es un cuadrivector cuyas componentes son [27]

$$(c\rho, \rho \mathbf{v}) = (c\rho, \mathbf{J}),$$

o bien,

$$J^\kappa = (c\rho, \mathbf{J}).$$

Así pues, la densidad de carga y la densidad de corriente corresponden a las componentes de un cuadvivector.

Definiendo el cuadvivector de potencial

$$A^\kappa = (\phi, \mathbf{A}),$$

cuyas componentes son ϕ , el potencial escalar, y \mathbf{A} , el potencial vectorial, en términos de las cuales los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} se escriben como

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi,$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

las ecuaciones de onda, expresiones (1.7) y (1.8), pueden escribirse de forma muy compacta [27]

$$\square \mathbf{A}^\kappa = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^\kappa,$$

donde \square es el operador D'Alembertiano definido como

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.$$

La condición de Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

se reescribirá en esta nueva notación como

$$\partial_\kappa A^\kappa = 0.$$

Se define al tensor antisimétrico de rango 2, llamado tensor de intensidad de campo electromagnético [28]

$$F_{\kappa\lambda} = \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial A_\kappa}{\partial x^\lambda} = \partial^\lambda A_\kappa - \partial^\kappa A_\lambda,$$

cuyas componentes son explícitamente

$$F_{\kappa\kappa} = \frac{\partial A_\kappa}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial A_\kappa}{\partial x^\kappa} = \partial^\kappa A_\kappa - \partial^\kappa A_\kappa = 0$$

$$F_{\kappa\lambda} = -F_{\lambda\kappa}$$

$$\begin{aligned}
F_{01} &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\partial^1 A_0 - \partial^0 A_1 = E_x, \\
F_{02} &= -\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} = -\partial^2 A_0 - \partial^0 A_2 = E_y, \\
F_{03} &= -\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} = -\partial^3 A_0 - \partial^0 A_3 = E_z, \\
F_{12} &= \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial x} = \partial^2 A_1 - \partial^1 A_2 = -B_z, \\
F_{23} &= \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial y} = \partial^3 A_2 - \partial^2 A_3 = -B_x, \\
F_{31} &= \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial z} = \partial^2 A_3 - \partial^1 A_1 = -B_y,
\end{aligned}$$

es decir, en notación matricial

$$F_{\kappa\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Para obtener el tensor contravariante $F^{\kappa\lambda}$ solamente hay que cambiar $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}$ por lo que

$$F^{\kappa\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Estos campos \mathbf{E} y \mathbf{B} son elementos del tensor de segundo rango $F^{\kappa\lambda}$ y corresponden a los campos eléctrico y magnético medidos desde el sistema de referencia S , el cual se encuentra en reposo con respecto al laboratorio. Si ahora se considera un sistema de referencia inercial S' , que se mueve con velocidad constante, con respecto al sistema S , los valores del campo electromagnético en este nuevo sistema pueden expresarse en términos de los valores medidos en S de acuerdo con la expresión [29]

$$F'^{\kappa\lambda} = \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\varsigma}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\delta}} F^{\varsigma\delta},$$

que en notación matricial puede escribirse como [29]

$$F' = LF\tilde{L},$$

con L la matriz de transformación de Lorentz definida como [30]

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_y & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_y^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_z & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

y \tilde{L} la matriz transpuesta de L .

Si, como caso particular, se considera que el sistema S' se desplaza a lo largo del eje x , con una velocidad $c\beta$, con respecto al sistema de referencia S se tendrá: $\beta_x = \frac{v}{c}$, $\beta_y = 0$, $\beta_z = 0$, y por tanto

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\left(\frac{v}{c}\right) & 0 & 0 \\ -\gamma\left(\frac{v}{c}\right) & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\left(\frac{v}{c}\right) & 0 & 0 \\ -\gamma\left(\frac{v}{c}\right) & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así pues, en el sistema S'

$$\begin{aligned} & F'^{\kappa\lambda} = \\ & = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\left(\frac{v}{c}\right) & 0 & 0 \\ -\gamma\left(\frac{v}{c}\right) & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\left(\frac{v}{c}\right) & 0 & 0 \\ -\gamma\left(\frac{v}{c}\right) & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^2 E_x \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) & -\gamma \left(E_y - \left(\frac{v}{c}\right) B_z\right) & -\gamma \left(E_z + \left(\frac{v}{c}\right) B_y\right) \\ \gamma^2 E_x \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) & \gamma^2 \left(\frac{v}{c}\right) (E_x - E_y) & \gamma \left(\left(\frac{v}{c}\right) E_y - B_z\right) & \gamma \left(\left(\frac{v}{c}\right) E_z + B_y\right) \\ \gamma \left(E_y - \left(\frac{v}{c}\right) B_z\right) & -\gamma \left(E_y \left(\frac{v}{c}\right) + B_z\right) & 0 & -B_x \\ \gamma \left(E_z + \left(\frac{v}{c}\right) B_y\right) & -\gamma \left(E_z \left(\frac{v}{c}\right) + B_y\right) & B_x & 0 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 0 & E'_x & E'_y & E'_z \\ -E'_x & 0 & -B'_z & B'_y \\ -E'_y & B'_z & 0 & -B'_x \\ -E'_z & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Igualando término a término y asumiendo que $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ y $\beta = \frac{v}{c}$, se encuentra la expresión explícita para la transformación de Lorentz para el campo electromagnético como:

$$E_x = E'_x, \quad (3.4)$$

$$E_y = \gamma (E'_y + \beta B'_z), \quad (3.5)$$

$$E_z = \gamma (E'_z + \beta B'_y), \quad (3.6)$$

$$B_x = B'_x, \quad (3.7)$$

$$B_y = \gamma (B'_y + \beta E'_z), \quad (3.8)$$

$$B_z = \gamma (B'_z + \beta E'_y). \quad (3.9)$$

De manera análoga pueden encontrarse las transformaciones de los campos para los casos en que el sistema primado se mueva hacia el sistema S a lo largo de la dirección y , o la z , o cualquier dirección arbitraria, solo hay que considerar la matriz L adecuada.

Si el sistema S' se mueve con respecto al sistema S con una velocidad arbitraria \mathbf{v} , la transformación de los campos eléctrico y magnético en el sistema primado, pueden escribirse como [29]

$$\mathbf{E}' = \gamma (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}), \quad (3.10)$$

$$\mathbf{B}' = \gamma (\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}). \quad (3.11)$$

Estas últimas transformaciones muestran que \mathbf{E} y \mathbf{B} no existen de manera independiente, por lo que se hablará del campo electromagnético y no de dos campos distintos, el eléctrico y el magnético.

Un campo eléctrico, o un campo magnético, en un sistema de referencia aparecerá como una, mezcla de campo eléctrico y magnético en otro sistema de referencia. Aunque que existen ciertas restricciones como que por ejemplo, un campo puramente electrostático en un sistema de referencia, no puede transformarse en un campo puramente magnetostático en otro.

Observemos que las transformaciones inversas

$$\mathbf{E} = \gamma (\mathbf{E}' - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}') - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}'),$$

$$\mathbf{B} = \gamma(\mathbf{B}' + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}') - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}'),$$

indican directamente que si en el sistema de referencia S' no existe campo magnético, esto es $\mathbf{B}' = 0$, en el sistema S ocurre que

$$\mathbf{E} = \gamma \mathbf{E}' - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}'),$$

$$\mathbf{B} = \gamma \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}'.$$

En la literatura usual [5, 11, 14, 15, 31] se suele aplicar las transformaciones de Lorentz a la solución de problemas en los que el sistema bajo estudio se encuentra en movimiento uniforme. Esta técnica muchas veces es más sencilla de aplicar que si se tratara de resolver las ecuaciones de Maxwell directamente. Un ejemplo de esto lo constituye el cálculo del campo electromagnético generado por una partícula puntual cargada que se mueve con velocidad constante con respecto al sistema de laboratorio. En este problema se considera un segundo sistema de referencia S' , moviéndose con la misma velocidad de la partícula con respecto del sistema en reposo y desde el cual ésta se encuentra en reposo. Así pues, en este sistema, propio de la partícula, el campo electromagnético se reduce al campo electrostático generado por una partícula puntual. El campo generado por la partícula puntual en movimiento se obtiene al aplicar a éste las correspondientes transformaciones de Lorentz.

3.2. Sobre las ecuaciones constitutivas en medios materiales en movimiento

De las transformaciones de Lorentz se ha visto que el movimiento de un medio implica la existencia del campo electromagnético. A diferencia del vacío, en donde sólo hace falta conocer el comportamiento de \mathbf{E} y \mathbf{B} , cuando se trabaja con medios dieléctricos es necesario especificar otros vectores. Además definir a \mathbf{D} y \mathbf{H} también hay que relacionar a estas dos cantidades con las anteriores.

En un medio material, sin cargas libres, las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

y

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

pueden escribirse de la forma

$$\frac{\partial F_{\eta\kappa}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\kappa\lambda}}{\partial x^\eta} + \frac{\partial F_{\lambda\eta}}{\partial x^\kappa} = 0,$$

lo cual muestra su invariancia relativista. Esto quiere decir que estas ecuaciones se pueden aplicar directamente aún a medios dieléctricos que se encuentran en movimiento.

Ahora bien, se puede mostrar que las dos ecuaciones de Maxwell restantes,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

y

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

mantienen su forma en los medios en movimiento [31] aunque las ecuaciones constitutiva, es decir las ecuaciones que relacionan a \mathbf{D} con \mathbf{E} y \mathbf{H} con \mathbf{B} ya no son las mismas que en medios estáticos.

Para garantizar la invariancia de estas dos ecuaciones de Maxwell es necesario que las componentes de los vectores \mathbf{D} y \mathbf{H} se transformen como las componentes de un cuadritensor equivalente a $F_{\kappa\lambda}$, que se denota por $H_{\kappa\lambda}$ y está dado de la forma:

$$H_{\kappa\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & -H_z & H_y \\ -D_y & H_z & 0 & -H_x \\ -D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$H^{\kappa\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Nótese que el tensor $H_{\kappa\lambda}$ tiene una estructura similar a $F_{\kappa\lambda}$ solo que ahora en lugar de \mathbf{E} se utiliza \mathbf{D} y en vez de tener \mathbf{B} se tiene ahora \mathbf{H} . Así pues, de forma completamente similar se puede demostrar que la transformación de Lorentz para los campos \mathbf{D} y \mathbf{H} debe de tener la forma

$$\mathbf{D}' = \gamma (\mathbf{D} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{D}), \quad (3.12)$$

$$\mathbf{H}' = \gamma (\mathbf{H} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{H}). \quad (3.13)$$

En términos de este tensor la ley de Gauss y la ley de Faraday pueden escribirse como

$$\frac{\partial H^{\kappa\lambda}}{\partial x^\lambda} = 0.$$

Ahora bien, si cuando el medio se encuentra estático las ecuaciones constitutivas se escriben como

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

¿cómo se verán ahora desde el sistema de laboratorio las relaciones constitutivas para un medio material en movimiento? ¿serán las mismas que para el caso estático o se verán modificadas debido al movimiento?

Consideremos el cuadvivector de velocidad del sistema de referencia S' , visto desde el sistema de laboratorio como

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Construyendo las siguientes cantidades

$$\begin{aligned} F^{\kappa\lambda} u_\lambda &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} (1, -\beta_x, -\beta_y, -\beta_z) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (0, -\beta_x E_x, -\beta_y E_y, -\beta_z E_z) = \\ &= \frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) = \frac{\gamma}{c} (0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} H^{\kappa\lambda} u_\lambda &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} (1, -\beta_x, -\beta_y, -\beta_z) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (0, -\beta_x D_x, -\beta_y D_y, -\beta_z D_z) = \\
&= \frac{\gamma}{c} (0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{D})
\end{aligned}$$

obsérvese que la relación

$$H^{\kappa\lambda} u_\lambda = \varepsilon F^{\kappa\lambda} u_\lambda \quad (3.14)$$

conduce directamente a que

$$\frac{\gamma}{c} (0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{D}) = \frac{\gamma}{c} \varepsilon (0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}),$$

es decir

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (3.15)$$

con lo que puede decirse que la expresión (3.14) es la representación cuádrimen-sional de la relación constitutiva (3.15).

De forma similar se demuestra que la ecuación

$$F_{\kappa\lambda} u_\zeta + F_{\lambda\zeta} u_\kappa + F_{\zeta\kappa} u_\lambda = \mu (H_{\kappa\lambda} u_\zeta + H_{\lambda\zeta} u_\kappa + H_{\zeta\kappa} u_\lambda) \quad (3.16)$$

representa la generalización cuádridimensional de la ecuación

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.17)$$

De (3.14) y (3.16) se pueden obtener en notación vectorial las nuevas relaciones constitutivas, que relacionan a \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} y \mathbf{H} , para medios materiales en movimiento [32]

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}/c &= \varepsilon (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c), \\
\mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{v}/c &= \mu (\mathbf{H} + \mathbf{D} \times \mathbf{v}/c).
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones son conocidas como las ecuaciones de Minkowski, quien las de-dujo en 1908. Debe notarse que ahora estas relaciones son más complicadas que las que se tienen cuando el medio se encuentra en reposo.

Si la velocidad con la que se mueve el medio es pequeña comparada con la velocidad de la luz, es decir si $v/c \ll 1$, se puede escribir, a primer orden, a las ecuaciones de Minkowski como

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + (\varepsilon \mu - 1) \mathbf{v} \times \mathbf{H}/c \quad (3.18)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + (\varepsilon \mu - 1) \mathbf{E} \times \mathbf{v}/c \quad (3.19)$$

Estas ecuaciones, junto con las ecuaciones de Maxwell, constituyen la base de la electrodinámica de medios materiales en movimiento uniforme.

3.3. Condiciones a la frontera para el sistema de referencia S'

A continuación se calcularán las condiciones a la frontera para la interfase entre dos medios dieléctricos, homogéneos, lineales, isotrópicos y no dispersivos, tales que el movimiento de uno de los medios hace que se vea que la frontera se encuentra en movimiento uniforme como se muestra en la figura 6.

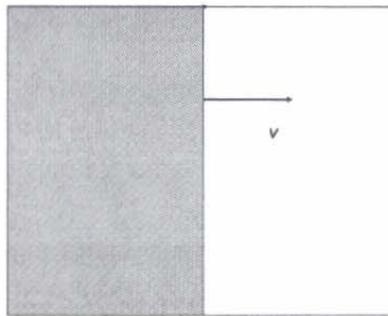


Figura 6

Se considerará que la frontera se mueve con una velocidad $\mathbf{v} = \beta c$, con respecto al sistema de referencia del laboratorio, al cual se denota como sistema S . El sistema de referencia inercial S' es tal que se mueve con respecto a S con una velocidad $\mathbf{v} = \beta c$ igual que la frontera. Un observador situado en S' verá que la frontera se encuentra estática (figura 7). El problema ahora es calcular las condiciones a la frontera haciendo uso de la Teoría Especial de la Relatividad y de las condiciones a la frontera para medios que se encuentran en reposo.

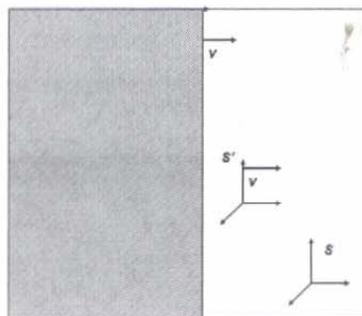


Figura 7

Para un observador en S' que se está moviendo junto con el medio, verá a la frontera estática por lo que las condiciones a la frontera en S' serán las mismas que las encontradas en las ecuaciones (1.15), (1.16), (1.19) y (1.22). Es decir, desde el sistema S' se tendrá que:

$$(\mathbf{D}'_2 - \mathbf{D}'_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}' = 4\pi\sigma', \quad (3.20)$$

$$(\mathbf{B}'_2 - \mathbf{B}'_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}' = 0, \quad (3.21)$$

$$\hat{\mathbf{n}}' \times (\mathbf{E}'_2 - \mathbf{E}'_1) = 0, \quad (3.22)$$

$$\hat{\mathbf{n}}' \times (\mathbf{H}'_2 - \mathbf{H}'_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}', \quad (3.23)$$

donde \mathbf{D}' , \mathbf{E}' , \mathbf{B}' y \mathbf{H}' , son los campos medidos desde este sistema de referencia S' y $\hat{\mathbf{n}}'$ es el vector normal a la frontera vista desde S' .

Ahora bien, el vector normal a la frontera, $\hat{\mathbf{n}}'$, apunta en la misma dirección que el vector $\boldsymbol{\beta}$ que describe la velocidad del sistema S' con respecto al sistema de laboratorio. El vector normal a la superficie visto desde el sistema de laboratorio lo denotaremos por $\hat{\mathbf{n}}$ y, debido a la contracción de las longitudes, está relacionado con $\hat{\mathbf{n}}'$ a través de la expresión

$$\hat{\mathbf{n}}' = \frac{\hat{\mathbf{n}}}{\gamma}$$

De la expresión (3.12) para las transformación de Lorentz para el vector \mathbf{D} , se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{D}' \cdot \hat{\mathbf{n}}' &= \gamma (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}' + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}}') - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}') (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{D}) = \\ &= (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \frac{\gamma}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{D}) = \\ &= (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} + (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{H}) - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \beta^2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}) \end{aligned}$$

y como $\hat{\mathbf{n}} \parallel \boldsymbol{\beta}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{D}' \cdot \hat{\mathbf{n}}' &= \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \beta^2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}) = \left[1 - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \beta^2 \right] \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \left[\frac{\gamma + 1 - \gamma \beta^2}{\gamma + 1} \right] \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\gamma(1 - \beta^2) + 1}{\gamma + 1} \right] \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\
&= \frac{1}{\gamma} (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}). \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Es decir, la componente normal de \mathbf{D} se ve contraída por efecto del movimiento. De forma similar para el campo magnético, de la expresión (3.11) se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}' \cdot \hat{\mathbf{n}}' &= \gamma (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}' - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}}') - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}') (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) = \\
&= (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \frac{\gamma}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) = \\
&= (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} - (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{E}) - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \beta^2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B})
\end{aligned}$$

pero $\hat{\mathbf{n}} \parallel \boldsymbol{\beta}$, entonces

$$\mathbf{B}' \cdot \hat{\mathbf{n}}' = \frac{1}{\gamma} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \tag{3.25}$$

Vale la pena mencionar que esto último parece contradecir uno de los resultados anteriormente discutidos y que es el hecho de que las componentes del campo electromagnético paralelas al vector de velocidad no cambian cuando se hace un cambio de sistema de referencia. Sin embargo, se debe notar que en este caso se trabaja con una frontera y que lo que se está calculando es la componente normal a ella. Este efecto de contracción proviene de la contracción en la longitud del vector normal a la superficie, de lo contrario si $\hat{\mathbf{n}}$ fuese exactamente igual a $\hat{\mathbf{n}}'$ se tendría que las componentes a lo largo de la dirección de movimiento permanecen invariantes.

Por otro lado, debido al movimiento relativo de los sistemas S y S' se tiene que la densidad superficial de carga deberá tener la forma

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\gamma}.$$

Por lo que al sustituir estos resultados en la ecuación (3.20) y usando (3.24) se tendrá

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4\pi\sigma, \tag{3.26}$$

mientras que de la ecuación (3.21) y tomando en cuenta (3.25)

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \tag{3.27}$$

Así pues, tanto para el sistema S' como para el sistema S , la condición a la frontera para las componentes normales del campo magnético \mathbf{B} y de \mathbf{D} conserva su misma estructura.

A continuación se estudiará que pasa con las condiciones a la frontera para las componentes tangenciales del campo electromagnético.

Para el campo eléctrico, se parte de la ecuación (3.23)

$$\hat{\mathbf{n}}' \times (\mathbf{E}'_2 - \mathbf{E}'_1) = 0$$

Si se sustituyen las transformaciones de Lorentz para \mathbf{E} ,

$$\mathbf{E}' = \gamma (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}),$$

y la contracción para el vector $\hat{\mathbf{n}}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}' \times (\mathbf{E}'_2 - \mathbf{E}'_1) &= \frac{\hat{\mathbf{n}}}{\gamma} \times \left[\gamma (\mathbf{E}_2 + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_2) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}_2) \right] - \\ &\quad - \frac{\hat{\mathbf{n}}}{\gamma} \times \left[\gamma (\mathbf{E}_1 + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_1) + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}_1) \right] = 0 \end{aligned}$$

lo que puede reducirse a

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times \left[(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) + \boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)) \right] &= \\ &= \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) + \hat{\mathbf{n}} \times [\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)] - \\ &\quad - \frac{\gamma}{\gamma + 1} (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta}) (\boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)) = 0 \end{aligned}$$

Obsérvese que dado que el sistema de referencia elegido es tal que el vector normal a la frontera y el vector de velocidad son paralelos, el tercer término de esta ecuación se cancela dando lugar a que

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) + \hat{\mathbf{n}} \times [\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)] = 0.$$

Desarrollando el triple producto vectorial del lado izquierdo de esta igualdad se tendrá

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) + \boldsymbol{\beta} (\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)) - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0.$$

Pero ya que la componente normal del campo magnético es continua, $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$, finalmente se puede decir que la condición a la frontera para las componentes tangenciales del campo eléctrico son

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \quad (3.28)$$

Si ahora se utilizan las transformaciones de Lorentz para los campos magnéticos se puede escribir

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}' \times (\mathbf{H}'_2 - \mathbf{H}'_1) &= \\ &= \frac{\hat{\mathbf{n}}}{\gamma} \times \left[\gamma (\mathbf{H}_2 - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D}_2) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{H}_2) - \right. \\ &\quad \left. - \gamma (\mathbf{H}_1 - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D}_1) + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{H}_1) \right] \\ &= \hat{\mathbf{n}} \times \left[(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) - \boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) - \frac{\gamma}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)) \right] = \\ &= \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) - \hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta}) [\boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)], \end{aligned}$$

pero $\hat{\mathbf{n}}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son paralelos por lo que el último término del lado derecho de esta ecuación desaparece quedando

$$\hat{\mathbf{n}}' \times (\mathbf{H}'_2 - \mathbf{H}'_1) = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) - \hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}'.$$

Si se desarrolla el triple producto vectorial se tiene que

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) - \boldsymbol{\beta} [\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)] + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}'$$

donde el término $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)$ es igual a $4\pi\sigma$ según la ecuación (3.26), por lo que al sustituir se obtiene

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{K} + \sigma \mathbf{v}).$$

Observese que se ha hecho la sustitución $\mathbf{K} = \mathbf{K}'$ debido a que \mathbf{K} representa a la densidad de corriente libre sobre la superficie de la frontera, la cual en este caso circulará en una dirección perpendicular a la dirección de movimiento por lo cual no se deberán observar cambios. Esta última expresión es la condición a la frontera anteriormente obtenida para las componentes tangenciales.

Se ha mostrado que el cambio en las condiciones a la frontera para un medio dieléctrico moviéndose uniformemente puede ser obtenido aplicando las transformaciones de Lorentz. Esto muestra que como en muchos otros problemas de la electrodinámica clásica en las que intervienen objetos moviéndose uniformemente, el uso de la Teoría Especial de la Relatividad puede simplificar los cálculos.

Nótese que si en la condición

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

se sustituye, $\mathbf{v} = 0$ (o $\boldsymbol{\beta} = 0$ pues $\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}$), ésta se reduce a

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

que es la condición a la frontera para el caso estático, veáse cuadro (2.12). Análogamente, la condición

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{K} + \sigma \mathbf{v})$$

se reduce en el caso en que $\mathbf{v} = 0$ a la condición estática

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}$$

que aparece en el cuadro (2.12).

4. CAMPO ELECTROMAGNÉTICO PARA UNA ESFERA DIELECTRICA ROTANTE

Con el fin de ilustrar la aplicación de las condiciones a la frontera para un medio dieléctrico que se encuentra en movimiento, se resolverá en este capítulo un ejemplo particular. Cabe mencionar que aunque en la literatura [31, 33] se pueden encontrar algunos ejercicios resueltos, este problema específico no aparece entre ellos ni tampoco se propone como ejercicio de final de capítulo.

Se considerará una esfera dieléctrica de radio a , caracterizada por una función dieléctrica ε , que rota con velocidad angular constante Ω en el interior de un material dieléctrico de constante dieléctrica ε_1 , donde además se tiene la presencia de un campo eléctrico uniforme externo \mathbf{E}_0 apuntando en la misma dirección que Ω

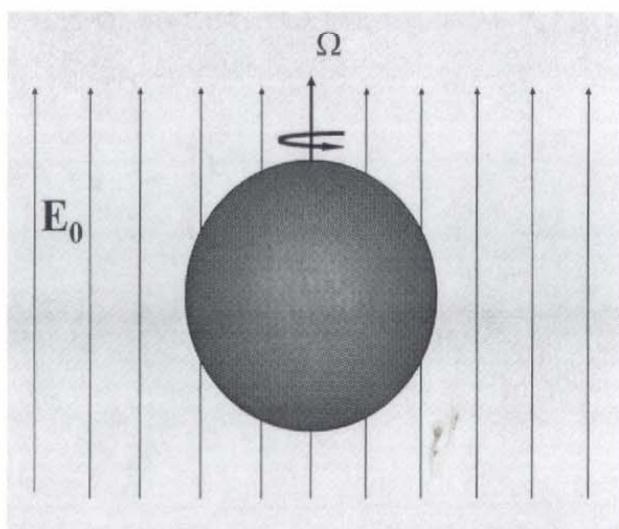


Figura 8

Se supondrá que tanto la esfera dieléctrica como el material en el que ésta se encuentra inmersa son medios homogéneos, lineales, isotrópicos y no magnéticos, de forma que para ambos la permeabilidad magnética puede considerarse como la unidad $\mu = 1$ y sus funciones dieléctricas como constantes. Para simplificar un poco

más este problema, se considerará que $\varepsilon_1 \simeq 1$ y que el campo eléctrico externo uniforme \mathbf{E}_0 apunta en la dirección z , es decir $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\mathbf{z}}$

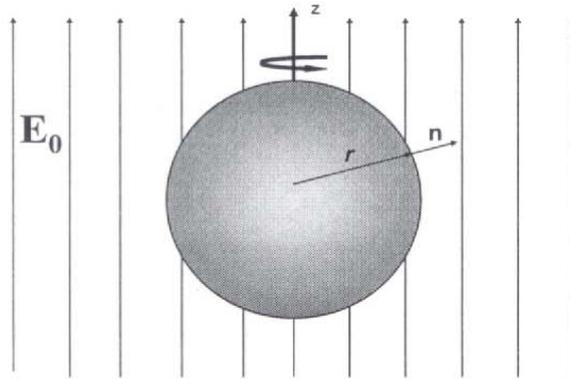


Figura 9

Se pretende calcular, aplicando las condiciones a la frontera, el campo electromagnético para todo punto del espacio, lo que quiere decir que deberá calcularse el campo tanto en el interior como en el exterior de la esfera.

Ya que se ha considerado que no hay cargas libres, dentro, fuera o sobre la superficie de la esfera, y que la rotación de la esfera sobre su eje se realiza con velocidad angular constante, se puede suponer que las ecuaciones de Maxwell que deben resolverse para todo punto del espacio son las ecuaciones estacionarias:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0.$$

Las dos últimas ecuaciones permiten escribir, para todo punto del espacio, al campo eléctrico y al vector \mathbf{H} en términos de potenciales escalares de forma que

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi^{elec}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi^{mag}. \quad (4.2)$$

Para el sistema del laboratorio, la esfera está rotando mientras que el medio en el que está inmersa permanece en reposo, se tendrá que las ecuaciones constitutivas que se deben considerarse para relacionar a los vectores \mathbf{E}_1 , \mathbf{D}_1 , \mathbf{B}_1 , \mathbf{H}_1 , \mathbf{E}_2 , \mathbf{D}_2 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{H}_2 son las siguientes:

Para $r < a$

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon \mathbf{E}_1, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{H}_1 + (\varepsilon - 1) \mathbf{E}_1 \times \mathbf{v}/c. \quad (4.4)$$

Para $r > a$

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{E}_2, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{H}_2. \quad (4.6)$$

Si se compara la ecuación (4.3) con la expresión general, ecuación (3.18), se observará que se ha despreciado el término asociado con \mathbf{H} . Esto se debe a que frecuentemente los términos que contienen a \mathbf{H} son mucho menores que términos que contienen al campo eléctrico [33]. Esto sucede cuando por ejemplo cuerpos con $\mu = 1$ se mueven en el interior de un campo eléctrico; el campo magnético aparece como un campo “inducido” por el movimiento del cuerpo y, como efecto secundario, es relativamente pequeño.

Así pues, para $r < a$:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_1 = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = -\varepsilon \nabla^2 \phi_1^{elec} = 0,$$

lo que implica que la función escalar ϕ_1^{elec} satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi_1^{elec} = 0. \quad (4.7)$$

Por otro lado, de la ecuación (4.4) se tiene que si se utiliza la ley de Gauss magnética, $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{H}_1 &= \nabla \cdot \mathbf{B}_1 + (\varepsilon - 1) \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_1) / c = \\ &= (\varepsilon - 1) \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_1) / c. \end{aligned} \quad (4.8)$$

La \mathbf{v} que aparece en esta expresión es la velocidad con la que se mueve el medio material con respecto al laboratorio, la cual en este caso corresponde a la velocidad tangencial de la esfera. Aunque la esfera gira con una velocidad angular Ω constante, la velocidad tangencial depende de la posición sobre la superficie de ésta y ambas están relacionadas a través de la expresión

$$\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r},$$

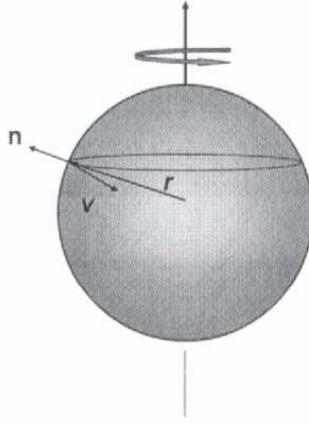


Figura 10

de forma que

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_1) = \mathbf{E}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_1) = \mathbf{E}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$$

y por tanto

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_1 = \frac{(\varepsilon - 1)}{c} \mathbf{E}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{v}).$$

Ya que

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\Omega}$$

se tiene finalmente

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_1 = \frac{2}{c} (\varepsilon - 1) \mathbf{E}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (4.9)$$

Sustituyendo a \mathbf{H}_1 en términos del potencial escalar ϕ_1^{mag} , ecuación (4.2), se tiene:

$$\nabla^2 \phi_1^{mag} = -\frac{2}{c} (\varepsilon - 1) \mathbf{E}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (4.10)$$

Es decir, ϕ_1^{mag} satisface una ecuación de Poisson.

Para $r > a$, el exterior de la esfera, las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones constitutivas (4.5) y (4.6), conducen directamente a que los potenciales escalares en esa zona satisfacen ecuaciones del tipo de Laplace:

$$\nabla^2 \phi_2^{elec} = 0, \quad (4.11)$$

$$\nabla^2 \phi_2^{mag} = 0. \quad (4.12)$$

Al trabajar con potenciales escalares, se deberán escribir a las condiciones a la frontera

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0, \\(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0, \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) + (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \left(\frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}, \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) - \left(\frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0,\end{aligned}$$

en términos de ellos. Para el caso particular del sistema bajo estudio, la velocidad de movimiento del sistema, \mathbf{v} , siempre apunta en la dirección tangencial a la superficie por lo que es perpendicular al vector $\hat{\mathbf{n}}$, el cual siempre es normal a la frontera. Así pues, en este caso las condiciones a la frontera se reducen a

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0, \\(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0, \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= 0, \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0.\end{aligned}$$

Dada la simetría del problema lo mejor es trabajar en coordenadas esféricas, en función de las cuales, las condiciones a la frontera para los campos \mathbf{E} y \mathbf{D} pueden escribirse en términos de los potenciales escalares como

$$\varepsilon \frac{\partial \phi_1^{elec}}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\partial \phi_2^{elec}}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1^{elec}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2^{elec}}{\partial \theta} \Big|_{r=a}, \quad (4.14)$$

en donde además se han utilizado las relaciones constitutivas (4.3) y (4.5).

Se puede proponer al potencial escalar eléctrico como solución a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

$$\phi_1^{elec} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} F_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)$$

para $r < a$, mientras que para $r > a$ se tiene

$$\phi_2^{elec} = \sum_{l=0}^{\infty} [B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta).$$

Ya que en el interior de la esfera el campo eléctrico debe de ser finito, se debe considerar que

$$F_l = 0 \quad \forall l.$$

Por otro lado, en puntos muy lejanos en el exterior de la esfera el campo eléctrico debe de corresponder al campo eléctrico homogéneo externo \mathbf{E}_0 , esto es, en el límite $r \rightarrow \infty$, deberá tenerse que

$$\phi_2^{elec} \rightarrow -E_0 z = -E_0 r \cos \theta,$$

además de que el campo eléctrico debe de ser finito. Así pues, si se escribe

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^l P_l(\cos \theta) &= \\ &= B_1 r \cos \theta + \sum_{l \neq 1}^{\infty} B_l r^l P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

es inmediato ver que debe cumplirse que

$$B_1 = -E_0$$

y

$$B_l = 0 \quad \forall l \neq 1.$$

Así pues, para $r < a$

$$\phi_1^{elec} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta),$$

mientras que para $r > a$

$$\phi_2^{elec} = -E_0 r P_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta).$$

Ahora deberán aplicarse las condiciones a la frontera para la parte eléctrica. Si se aplica la condición (4.13) para la discontinuidad de la componente normal del campo eléctrico se tendrá

$$\varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} A_l l a^{l-1} P_l(\cos \theta) = -E_0 P_1(\cos \theta) - \sum_{l=0}^{\infty} C_l (l+1) a^{-(l+2)} P_l(\cos \theta),$$

lo que separando términos puede escribirse como

$$\begin{aligned} \varepsilon A_1 P_1(\cos \theta) + \varepsilon \sum_{l \neq 1}^{\infty} A_l l a^{l-1} P_l(\cos \theta) = \\ -E_0 P_1(\cos \theta) - C_1 2a^{-3} P_1(\cos \theta) - \sum_{l \neq 1}^{\infty} C_l (l+1) a^{-(l+2)} P_l(\cos \theta). \end{aligned}$$

Y después de factorizar se tiene

$$[\varepsilon A_1 + E_0 + C_1 2a^{-3}] P_1(\cos \theta) + \sum_{l \neq 1}^{\infty} [\varepsilon A_l l a^{l-1} + C_l (l+1) a^{-(l+2)}] P_l(\cos \theta) = 0.$$

Ya que los polinomios de Legendre constituyen una base completa se deberá tomar en cuenta que al ser ésta una ecuación lineal homogénea, los coeficientes que acompañan a cada uno de los polinomios deben anularse por separado. Así pues,

$$\varepsilon A_1 + E_0 + C_1 2a^{-3} = 0 \quad (4.15)$$

y

$$[\varepsilon A_l l a^{l-1} + C_l (l+1) a^{-(l+2)}] = 0 \quad \forall l \neq 1.$$

De esta última ecuación pueden despejarse a los coeficientes A_l

$$A_l = -(l+1) \frac{C_l}{\varepsilon l a^{2l+1}} \quad (4.16)$$

Si ahora se aplican las condiciones a la frontera para las componentes tangenciales, expresión (4.14), se debe satisfacer que

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) =$$

$$= -E_0 a \frac{\partial}{\partial \theta} P_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} C_l a^{-(l+1)} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta).$$

Al separar el término correspondiente a $l = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} A_1 a \frac{\partial}{\partial \theta} P_1(\cos \theta) + \sum_{l \neq 1}^{\infty} A_l a^l \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) = \\ = -E_0 a \frac{\partial}{\partial \theta} P_1(\cos \theta) + C_1 a^{-2} \frac{\partial}{\partial \theta} P_1(\cos \theta) + \sum_{l \neq 1}^{\infty} C_l a^{-(l+1)} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta). \end{aligned}$$

Factorizando puede escribirse:

$$[A_1 a + E_0 a - C_1 a^{-2}] \frac{\partial}{\partial \theta} P_1(\cos \theta) + \sum_{l \neq 1}^{\infty} [A_l a^l - C_l a^{-(l+1)}] \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) = 0,$$

de donde:

$$\begin{aligned} A_1 a + E_0 a - C_1 a^{-2} &= 0, \\ [A_l a^l - C_l a^{-(l+1)}] &= 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

es decir,

$$A_l = C_l a^{-(2l+1)} \quad (4.18)$$

Comparando esta última ecuación con la obtenida en (4.16), es claro que debe satisfacerse que

$$A_l = C_l = 0 \quad \forall l \neq 1.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (4.15) y (4.17), se obtiene finalmente que

$$A_1 = -\frac{3}{\varepsilon + 2} E_0$$

y

$$C_1 = a^3 \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right) E_0.$$

Así pues, los potenciales escalares para la parte eléctrica estarán dados por

$$\begin{aligned} \phi_1^{elec} &= -\frac{3}{\varepsilon + 2} E_0 r \cos \theta \\ \phi_2^{elec} &= -E_0 r \cos \theta + \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right) E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta. \end{aligned}$$

Obteniendo el gradiente de estas dos últimas expresiones, se obtiene el valor para el campo eléctrico.

Para $r < a$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{3}{\varepsilon + 2} E_0 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \frac{3}{\varepsilon + 2} E_0 \text{sen} \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.19)$$

o bien

$$\mathbf{E}_1 = \frac{3}{\varepsilon + 2} E_0 \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.20)$$

Obsérvese en el interior de la esfera el campo eléctrico que se obtuvo es exactamente el mismo que el que se tiene cuando se trabaja con una esfera dieléctrica estática inmersa en un campo eléctrico homogéneo. Este resultado coincide con el obtenido por Landau [34] en otro contexto.

Para $r > a$

$$\mathbf{E}_2 = E_0 \hat{\mathbf{z}} + \left[\frac{2a^3}{r^3} E_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cos \theta \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{a^3}{r^3} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \text{sen} \theta \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.21)$$

Este campo tiene la estructura característica de un campo eléctrico dipolar. Por otro lado, si utilizamos las relaciones constitutivas se obtiene que las expresiones para el vector \mathbf{D} son en cada una de las zonas

$$\mathbf{D}_1 = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon + 2} E_0 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon + 2} E_0 \text{sen} \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon + 2} E_0 \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.22)$$

$$\mathbf{D}_2 = E_0 \hat{\mathbf{z}} + \left[\frac{2a^3}{r^3} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0 \cos \theta \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{a^3}{r^3} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \text{sen} \theta \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (4.23)$$

Falta por analizar lo que sucede con la parte magnética. De la ecuación (4.10) se observa que es necesario primero calcular la parte eléctrica ya que la parte magnética depende explícitamente de esta. Ya que para $r < a$

$$\nabla^2 \phi_1^{mag} = -\frac{2}{c} (\varepsilon - 1) \mathbf{E}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega},$$

al sustituir la expresión (4.20) para el campo eléctrico se tiene

$$\nabla^2 \phi_{1mag} = -\frac{6}{c} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right) E_0 \Omega, \quad (4.24)$$

mientras que para $r > a$,

$$\nabla^2 \phi_2^{mag} = 0.$$

La ecuación (4.24) se puede describir como

$$\nabla \cdot \nabla \phi_1^{mag} = -\frac{6}{c} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right) E_0 \Omega.$$

integrando sobre una esfera de radio $r < a$, concéntrica a la esfera dieléctrica se tendrá

$$\int_V \nabla \cdot \nabla \phi_1^{mag} d^3r = -\frac{6}{c} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right) E_0 \Omega \int_V d^3r.$$

Utilizando el Teorema de Gauss esta expresión puede escribirse como

$$\oint_S \nabla \phi_1^{mag} \cdot \hat{\mathbf{r}} da = -\frac{6}{c} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right) E_0 \Omega \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right).$$

Y ya que $\mathbf{H}_1 = -\nabla \phi_1^{mag}$ se tiene

$$\oint_S \mathbf{H}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}} da = \frac{6}{c} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right) E_0 \Omega \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right).$$

Dada la simetría del problema H_{1r} debe de ser constante sobre toda la superficie de integración, por lo que se llega a que

$$H_{1r} = \frac{2}{c} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right) E_0 \Omega r. \quad (4.25)$$

Ahora bien, en el interior de la esfera se satisface la ecuación constitutiva

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{H}_1 - \frac{(\varepsilon - 1)}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_1$$

y como

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_1 &= (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{E}_1 = \\ &= -r E_{1r} \boldsymbol{\Omega} + \Omega E_{1z} \mathbf{r} = \\ &= \frac{3E_0}{\varepsilon + 2} r \Omega \sin \theta \left[\sin \theta \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right], \end{aligned}$$

donde se ha sustituido el valor de \mathbf{E}_1 obtenido en la ecuación (4.19), se tiene que

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{H}_1 - \frac{3E_0 (\varepsilon - 1)}{c(\varepsilon + 2)} r \Omega \sin \theta \left[\sin \theta \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right]$$

y por tanto

$$B_{1r} = H_{1r} - \frac{3E_0(\varepsilon - 1)}{c(\varepsilon + 2)} r \Omega \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Sustituyendo el valor de H_{1r} , ecuación (4.25) se tiene

$$B_{1r} = \frac{2E_0(\varepsilon - 1)}{c(\varepsilon + 2)} r \Omega - \frac{3E_0(\varepsilon - 1)}{c(\varepsilon + 2)} r \Omega \operatorname{sen}^2 \theta,$$

expresión que puede reescribirse como

$$B_{1r} = \frac{2(\varepsilon - 1)E_0\Omega r}{c(\varepsilon + 2)} \frac{1}{2} [3 \cos^2 \theta - 1]. \quad (4.26)$$

Dado que para el exterior de la esfera, $r > a$, se tiene que el potencial escalar satisface una ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 \phi_2^{mag} = 0,$$

y puesto que hay simetría esférica, se propone como solución general

$$\phi_2^{mag} = \sum_{l=0}^{\infty} [B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta).$$

Puesto que el potencial debe ser finito para todo punto del espacio, incluyendo $r \rightarrow \infty$, se debe de satisfacer que $B_l = 0$ para toda $l = 0, 1, 2, 3, \dots$. Así pues, el potencial se reduce a

$$\phi_2^{mag} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta).$$

El vector \mathbf{H}_2 se obtiene de derivar esta ecuación

$$\mathbf{H}_2 = -\hat{\mathbf{r}} \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^{-(l+2)} (l+1) P_l(\cos \theta) - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^{-(l+2)} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta)$$

y como en el exterior de la esfera las ecuaciones constitutivas dicen que

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{B}_2,$$

el campo magnético fuera de la esfera también está dado por la expresión

$$\mathbf{B}_2 = -\hat{\mathbf{r}} \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^{-(l+2)} (l+1) P_l(\cos \theta) - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^{-(l+2)} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta),$$

de donde es inmediato que

$$B_{2r} = - \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^{-(l+2)} (l+1) P_l(\cos \theta) \quad (4.27)$$

Las condiciones a la frontera imponen la continuidad en la frontera de la componente normal del campo magnético, ya que esta componente coincide con la componente radial se tiene que

$$B_{1r}|_{r=a} = B_{2r}|_{r=a}$$

y si se sustituyen las expresiones (4.26) y (4.27) se llega a que

$$\frac{2(\varepsilon - 1)E_0\Omega a}{c(\varepsilon + 2)} \frac{1}{2} [3 \cos^2 \theta - 1] = - \sum_{l=0}^{\infty} C_l a^{-(l+2)} (l+1) P_l(\cos \theta),$$

que puede reescribirse como

$$\frac{2(\varepsilon - 1)E_0\Omega a}{c(\varepsilon + 2)} P_2(\cos \theta) = - \sum_{l=0}^{\infty} C_l a^{-(l+2)} (l+1) P_l(\cos \theta).$$

De esta última expresión puede verse que el único término C_l distinto de cero debe de ser

$$C_2 = -\frac{2(\varepsilon - 1)E_0\Omega a^5}{3 c(\varepsilon + 2)}$$

con lo cual:

$$\phi_2^{mag} = -\frac{2(\varepsilon - 1)E_0\Omega a^5}{3 c(\varepsilon + 2)} \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} [3 \cos^2 \theta - 1]. \quad (4.28)$$

Finalmente, como $\mathbf{H}_2 = -\nabla \phi_2^{mag}$, se tiene que al obtener el gradiente en coordenadas esféricas se llega a que

$$\mathbf{H}_2 = \left[\frac{(1 - \varepsilon)E_0\Omega a^5}{c(\varepsilon + 2)} \frac{1}{r^4} [3 \cos^2 \theta - 1] \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{2(1 - \varepsilon)E_0\Omega a^5}{c(\varepsilon + 2)} \frac{1}{r^4} \cos \theta \operatorname{sen} \theta \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.29)$$

y que

$$\mathbf{B}_2 = \left[\frac{(1-\varepsilon)E_0\Omega a^5}{c(\varepsilon+2)} \frac{1}{r^4} [3\cos^2\theta - 1] \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{2(1-\varepsilon)E_0\Omega a^5}{c(\varepsilon+2)} \frac{1}{r^4} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (4.30)$$

Recapitulando, cuando se tiene una esfera dieléctrica rotando en el interior de otro medio, con una velocidad angular constante, en presencia de un campo eléctrico homogéneo externo, el campo electromagnético está dado de la siguiente manera:

Para $r < a$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{3}{\varepsilon+2} E_0 \hat{\mathbf{z}}, \\ \mathbf{D}_1 &= \frac{3\varepsilon}{\varepsilon+2} E_0 \cos\theta \hat{\mathbf{r}} - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon+2} E_0 \operatorname{sen}\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon+2} E_0 \hat{\mathbf{z}}, \\ B_{1r} &= \frac{2(\varepsilon-1)E_0\Omega r}{c(\varepsilon+2)} \frac{1}{2} [3\cos^2\theta - 1], \\ H_{1r} &= \frac{2\varepsilon-1}{c\varepsilon+2} E_0\Omega r. \end{aligned}$$

Para $r > a$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= E_0 \hat{\mathbf{z}} + \left[\frac{2a^3}{r^3} E_0 \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} \cos\theta \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{a^3}{r^3} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} \operatorname{sen}\theta \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}, \\ \mathbf{D}_2 &= E_0 \hat{\mathbf{z}} + \left[\frac{2a^3}{r^3} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} E_0 \cos\theta \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{a^3}{r^3} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} \operatorname{sen}\theta \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}, \\ \mathbf{H}_2 &= \left[\frac{(1-\varepsilon)E_0\Omega a^5}{c(\varepsilon+2)} \frac{1}{r^4} [3\cos^2\theta - 1] \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{2(1-\varepsilon)E_0\Omega a^5}{c(\varepsilon+2)} \frac{1}{r^4} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}, \\ \mathbf{B}_2 &= \left[\frac{(1-\varepsilon)E_0\Omega a^5}{c(\varepsilon+2)} \frac{1}{r^4} [3\cos^2\theta - 1] \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{2(1-\varepsilon)E_0\Omega a^5}{c(\varepsilon+2)} \frac{1}{r^4} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned}$$

Obsérvese que el campo eléctrico en el interior de la esfera es paralelo al campo eléctrico externo \mathbf{E}_0 pero su magnitud es menor por un factor $\frac{3}{\varepsilon+2}$. Este mismo resultado se obtiene cuando se calcula el campo eléctrico en el interior de una esfera dieléctrica estática inmersa en un campo eléctrico uniforme. Se puede decir que en este caso el efecto del movimiento de la esfera, con una velocidad angular uniforme, no es apreciable en la parte eléctrica.

Fuera de la esfera el campo eléctrico no es uniforme, ahora es el equivalente a tener un campo eléctrico externo uniforme \mathbf{E}_0 más el campo eléctrico generado por un dipolo eléctrico de momento dipolar

$$p = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 E_0$$

colocado en el origen y orientado en la dirección del campo eléctrico externo.

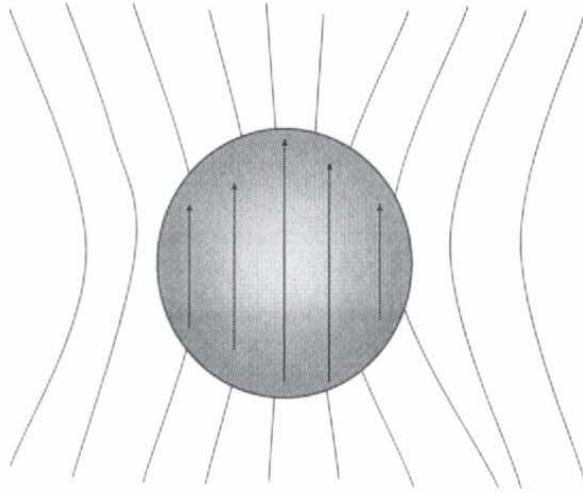


Figura 11

Este último campo se debe a la polarización del dieléctrico, la cual a su vez ha sido inducida por el campo eléctrico externo. Ya que la polarización en el interior de la esfera está dada por la expresión [35]

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}_1$$

se tendrá que

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{3}{4\pi} \mathbf{E}_0,$$

la cual es uniforme en todo el volumen de la esfera. La densidad superficial de polarización estará dada por [35]

$$\sigma_{pol} = \frac{(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})}{r},$$

por lo que

$$\sigma_{pol} = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right) E_0 \cos \theta.$$

Se puede pensar que esta densidad de carga superficial es la que induce un campo interno uniforme que se opone al campo externo uniforme de forma que en el interior de la esfera este disminuye su valor.

El efecto del movimiento de la esfera dieléctrica ha sido la causa de la generación de un campo magnético tanto en el interior como en el exterior de ésta. El campo magnético en el interior tiene una dependencia lineal con la distancia, mientras que el campo magnético en el exterior corresponde al de un momento magnético cuadrupolar de magnitud

$$D_{zz} = \frac{2(\varepsilon - 1)E_0\Omega a^5}{3c(\varepsilon + 2)}.$$

Obsérvese que a pesar de que el campo eléctrico externo genera una densidad superficial de carga, el campo magnético que se obtiene, tanto para la región interior de la esfera como para la exterior, no coincide con el campo magnético que se calcula cuando un cascarón esférico de radio R , que lleva una carga superficial σ rota con una velocidad angular Ω [36]. El tener a la esfera constituida por un medio dieléctrico y la presencia del campo eléctrico externo modifican los resultados ya que en este caso el campo magnético en el interior de la esfera no es un campo homogéneo y además en el exterior se tiene un campo cuadrupolar y no uno dipolar.

Nótese que al hacer $\Omega = 0$, es decir caso de la esfera estática, los resultados anteriores se reducen a los resultados bien conocidos [35], es decir

Para $r < a$

Caso esfera rotando

Caso esfera estática

$$\mathbf{E}_1 = \frac{3}{\varepsilon+2}E_0\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{3}{\varepsilon+2}E_0\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{D}_1 = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon+2}E_0 \cos\theta\hat{\mathbf{r}} - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon+2}E_0 \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon+2}E_0\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{D}_1 = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon+2}E_0\hat{\mathbf{z}}$$

$$B_{1r} = \frac{2(\varepsilon-1)E_0\Omega r}{c(\varepsilon+2)} \frac{1}{2} [3\cos^2\theta - 1]$$

$$B_{1r} = 0$$

$$H_{1r} = \frac{2\varepsilon-1}{c\varepsilon+2}E_0\Omega r$$

$$H_{1r} = 0$$

Para $r > a$

Caso esfera rotando

$$\mathbf{E}_2 = E_0\hat{\mathbf{z}} + \left[\frac{2a^3}{r^3} E_0 \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} \cos\theta \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{a^3}{r^3} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} \sin\theta \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{D}_2 = E_0\hat{\mathbf{z}} + \left[\frac{2a^3}{r^3} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} E_0 \cos\theta \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{a^3}{r^3} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} \sin\theta \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{H}_2 = \left[\frac{(1-\varepsilon)E_0\Omega a^5}{c(\varepsilon+2)} \frac{1}{r^4} [3\cos^2\theta - 1] \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{2(1-\varepsilon)E_0\Omega a^5}{c(\varepsilon+2)} \frac{1}{r^4} \cos\theta \sin\theta \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{B}_2 = \left[\frac{(1-\varepsilon)E_0\Omega a^5}{c(\varepsilon+2)} \frac{1}{r^4} [3\cos^2\theta - 1] \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{2(1-\varepsilon)E_0\Omega a^5}{c(\varepsilon+2)} \frac{1}{r^4} \cos\theta \sin\theta \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Caso esfera estática

$$\mathbf{E}_2 = E_0 \hat{\mathbf{z}} + \left[\frac{2a^3}{r^3} E_0 \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} \cos \theta \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{a^3}{r^3} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} \text{sen} \theta \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{D}_2 = E_0 \hat{\mathbf{z}} + \left[\frac{2a^3}{r^3} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} E_0 \cos \theta \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{a^3}{r^3} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} \text{sen} \theta \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{H}_2 = 0$$

$$\mathbf{B}_2 = 0$$

y también $D_{zz} = \frac{2}{3} \frac{(\varepsilon-1)E_0 \Omega a^5}{c(\varepsilon+2)} \rightarrow D_{zz} = 0$

5. CONCLUSIONES

Es común que en los cursos de electromagnetismo que se imparten en el nivel licenciatura se analice el comportamiento del campo electromagnético cuando en el sistema bajo estudio se tiene que el espacio está ocupado por un medio material. De hecho, se calculan, utilizando las condiciones a la frontera, los campos aún y cuando el sistema bajo estudio se encuentra constituido por dos o más medios materiales. Sin embargo, todos los problemas que se estudian involucran medios que se encuentran en reposo. En este trabajo se analizaron las modificaciones tanto a las ecuaciones constitutivas que relacionan a \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{H} y \mathbf{B} como a las condiciones a la frontera cuando en el sistema bajo estudio se tiene un medio material en movimiento uniforme.

Para obtener la generalización de las condiciones a la frontera a medios en movimiento se aplicaron dos métodos distintos. En el primero se realizó un análisis análogo al que se utiliza en el caso estático mientras que en el segundo se aplicó la Teoría de la Relatividad Especial al hacer uso de las transformaciones de Lorentz para el campo electromagnético. Este último método tiene la ventaja de presentar explícitamente las bondades de la relatividad especial en la solución de problemas de electrodinámica clásica, cuando se tiene que el sistema bajo estudio involucra movimiento uniforme, ya que sin muchos cálculos es posible encontrar directamente los resultados.

Finalmente, el estudio de un problema específico, el cálculo del campo electromagnético generado por una esfera dieléctrica que gira con velocidad uniforme inmersas en un medio dieléctrico, caracterizado por una función dieléctrica diferente, en presencia de un campo eléctrico uniforme externo, nos permite ver que el movimiento de medios dieléctricos da como resultado la interacción entre campos magnéticos y campos eléctricos. El campo eléctrico en el interior de la esfera es paralelo al campo eléctrico externo pero, al igual que en el caso estático su magnitud es menor. Así pues, se puede decir que en este caso el efecto del movimiento de la esfera, con una velocidad angular uniforme, no es apreciable en la parte eléctrica.

Fuera de la esfera el campo eléctrico no es uniforme, ahora es el equivalente a tener al campo eléctrico externo uniforme más el campo eléctrico generado por un dipolo eléctrico colocado en el origen y orientado en la dirección del campo eléctrico externo. Por otro lado, el efecto del movimiento de la esfera dieléctrica genera un campo magnético tanto en el interior como en el exterior de ésta. El campo magnético en el interior tiene una dependencia lineal con la distancia, mientras que el campo magnético en el exterior corresponde al de un momento magnético cuadrupolar

Una vez que se discutió la forma de trabajar con medios materiales en movimiento se puede ahora trabajar en la solución de problemas, utilizando relatividad especial y las nuevas condiciones a la frontera, en los que se involucran partículas moviéndose uniformemente en el interior de medios dieléctricos como son el efecto Cherenkov y el problema de radiación de transición. Una aplicación específica de lo visto en el análisis realizado a lo largo de este trabajo sería comprobar que los resultados obtenidos en el problema de radiación de transición pueden reproducirse cuando ahora se considera el caso de una partícula estática hacia la cual un medio material se mueve uniformemente.

6. BIBLIOGRAFÍA

1. Eyges, L. *The Classical Electromagnetic Field*, Dover, New York (1972)
2. Ginzburg V. L. *Applications of Electrodynamics in Theoretical Physics and Astrophysics*, Gordon and Breach Science Publishers, New York (1989)
3. Hayt W. *Teoría Electromagnética*, McGraw Hill, México (1992). Hartemann F. V., *High Field Electrodynamics*, CRC Press, Livermore, (2002)
4. Lorrain P. and Corson D. R., *Electromagnetism. Principles and Applications*. Freeman and Co., San Francisco (1979)
5. Panofsky Wolfgang K. H. and Phillips M., *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, Massachusetts (1962)
6. Purcell E. M., *Electricidad y Magnetismo, Segunda edición*, Reverté, Barcelona (2001)
7. Reitz J. R. and Milford J., *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*, UTEHA, Barcelona (1981)
8. Eyges, L. *The Classical Electromagnetic Field*, Dover, New York (1972), p. 55
9. Hayt W. *Teoría Electromagnética*, McGraw Hill, México (1992) Hartemann F. V., *High Field Electrodynamics*, CRC Press, Livermore, (2002), p. 143
10. Lorrain P. and Corson D. R., *Electromagnetism. Principles and Applications*. Freeman and Co., San Francisco (1979) p. 79
11. Panofsky Wolfgang K. H. and Phillips M., *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, Massachusetts (1962) p. 49
12. Reitz J. R. and Milford J., *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*, UTEHA, Barcelona (1981) p. 60
13. Ginzburg V. L. and Tsytovich V. N. *Transition Radiation and Transition Scattering*. Moscú (1984)
14. Jackson J. D., *Classical Electrodynamics..* Second Edition, Wiley, (1975)
15. Griffiths D. J., *Introduction to electrodynamics*. Prentice Hall, New Jersey (1989) p. 180
16. Jackson J. D., *Classical Electrodynamics..* Second Edition, Wiley, (1975)

p.147

17. Panofsky Wolfgang K. H. and Phillips M., *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, Massachusetts (1962) p. 85

18. Purcell E. M., *Electricidad y Magnetismo, Segunda edición*, Reverté, Barcelona (2001). p. 364

19. Jackson J. D., *Classical Electrodynamics..* Second Edition, Wiley, (1975) pp. 40

20. Jackson J. D., *Classical Electrodynamics..* Second Edition, Wiley, (1975) pp. 30

21. Afken G., *Mathematical Methods for Physicists*. Third edition, Academic Press, London (1985) p. 481-485

22. Butkov E., *Mathematical Physics*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts (1968) pp. 223-226.

23. Jackson J. D., *Classical Electrodynamics..* Second Edition, Wiley, (1975) p.171

24. Afken G., *Mathematical Methods for Physicists*. Third edition, Academic Press, London (1985) p. 48

25. Afken G., *Mathematical Methods for Physicists*. Third edition, Academic Press, London (1985) p. 57

26. Afken G., *Mathematical Methods for Physicists*. Third edition, Academic Press, London (1985) p.p. 57-63

27. Jackson J. D., *Classical Electrodynamics..* Second Edition, Wiley, (1975) p.549

28. Jackson J. D., *Classical Electrodynamics..* Second Edition, Wiley, (1975) p.550.

29. Jackson J. D., *Classical Electrodynamics..* Second Edition, Wiley, (1975) p.552

30. Jackson J. D., *Classical Electrodynamics..* Second Edition, Wiley, (1975) p.541

31. Landau L. D., Lifshitz E. M. and Pitaevskii L. P., *Electrodynamics of Continuous Media. Second Edition*, Pergamon Press, Oxford, (1984).

32. Landau L. D., Lifshitz E. M. and Pitaevskii L. P., *Electrodynamics of Continuous Media. Second Edition*, Pergamon Press, Oxford, (1984). p. 262

33. Jefimenko O. D., *Electricity and Magnetism: An introduction to the theory of electric and magnetic fields*. Appleton-Century-Crofts, New York (1966)

34. Landau L. D., Lifshitz E. M. and Pitaevskii L. P., *Electrodynamics of Continuous Media. Second Edition*, Pergamon Press, Oxford, 1984. p. 263-264

35. Jackson J. D., *Classical Electrodynamics*.. Second Edition, Wiley, (1975)
p.151
36. Griffiths D. J., *Introduction to electrodynamics*. Prentice Hall, New Jersey
(1989) p. 229
37. Noerdinger P. D., *American Journal Physics*, vol. 39. Pag 191. (1971)