



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**CONTRACCIÓN Y FLUENCIA DEL CONCRETO  
EN TRABES DE CONCRETO PRESFORZADO**

**T E S I S**  
**PARA OBTENER EL TÍTULO DE :**  
**I N G E N I E R O C I V I L**  
**P R E S E N T A :**  
**Hildebrando de la Cruz Mosso**

**Asesor: Dr. Roberto Gómez Martínez**



**México, D. F., marzo de 2007**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A la memoria de mi padre Margarito*

*A mi madre Cirenía*

*A mis hermanos Martín, Celina, Hilda, Indira y Maximino*

*A mi sobrino César Martínez*

*A mis cuñados Alejandro Flores y Pablo Martínez*

*A mi familia en general*

*A Domingo Cruz, Ricardo Solís y Rocío Tapia*

*A Noemí Díaz, David García,*

*Luis Hernández, Alfonso Herrera,*

*Iván León, Carmelo Martínez,*

*David Muñoz, Adrián Pozos,*

*Roberto Robles y Ricardo Vera*

*A mis amigos en general*

# **AGRADECIMIENTOS**

***A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO***

*Por haberme dado la oportunidad de estudiar*

***A LA FACULTAD DE INGENIERÍA***

*Por la formación recibida*

***AL INSTITUTO DE INGENIERÍA***

*En el cual realicé este trabajo*

***AL DR. ROBERTO GÓMEZ MARTÍNEZ***

*Con gran respeto, admiración y agradecimiento*

# CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>7</b>
<b>CAPÍTULO 1 CONCRETO PRESFORZADO</b>	<b>9</b>
<b>1.1 CARACTERÍSTICAS</b>	<b>9</b>
1.1.1 El concreto	
1.1.1.1 El cemento	
1.1.1.2 El agregado	
1.1.1.3 El agua	
1.1.1.4 Los aditivos	
1.1.1.5 Resistencia	
1.1.1.6 Módulo de elasticidad	
1.1.1.7 Relación de Poisson	
1.1.2 El acero	
1.1.2.1 Varillas	
1.1.2.2 Alambres	
1.1.2.3 Torones	
1.1.3 Elementos pretensados	
1.1.4 Elementos postensados	
1.1.5 Tipos de anclaje	
<b>1.2 PÉRDIDA DE LA FUERZA DE PRESFUERZO</b>	<b>28</b>
1.2.1 Pérdidas inmediatas y a largo plazo	
1.2.2 Deslizamiento del anclaje	
1.2.3 Fricción	
1.2.4 Acortamiento elástico	
1.2.5 Contracción	
1.2.6 Fluencia	
1.2.7 Relajación	
<b>CAPÍTULO 2 CONTRACCIÓN DEL CONCRETO</b>	<b>34</b>
<b>2.1 CARACTERÍSTICAS</b>	<b>34</b>
<b>2.2 FACTORES QUE INFLUYEN EN LA CONTRACCIÓN</b>	<b>37</b>
2.2.1 Características de los componentes	
2.2.2 Composición de la mezcla	
2.2.3 Propiedades del concreto endurecido	
2.2.4 Características de la estructura	
2.2.5 Condiciones de curado	
2.2.6 Condiciones de servicio	

2.3	MODELOS DE ANÁLISIS	40
2.3.1	Método de la ACI	
2.3.2	Método del CEB-FIP	
2.3.4	Método de Hilsdorf	
	<b>CAPITULO 3 FLUENCIA DEL CONCRETO</b>	<b>43</b>
3.1	CARACTERÍSTICAS	43
3.2	FACTORES QUE INFLUYEN EN LA FLUENCIA	44
3.2.1	Características de los componentes	
3.2.2	Composición de la mezcla	
3.2.3	Propiedades del concreto endurecido	
3.2.4	Características de la estructura	
3.2.5	Condiciones de curado	
3.2.6	Condiciones de servicio	
3.2.7	Historia de carga	
3.2.8	Grado de esfuerzo	
3.3	MODELOS DE ANÁLISIS	50
3.3.1	Método de la ACI	
3.3.2	Método del CEB-FIP	
3.3.3	Código de Indiana	
	<b>CAPÍTULO 4 DISEÑO DE VIGAS DE CONCRETO PRESFORZADO</b>	<b>53</b>
4.1	ESTADOS DE CARGA	53
4.2	MÉTODOS DE DISEÑO	55
4.3	ESFUERZOS ELÁSTICOS DE FLEXIÓN	56
4.4	ESFUERZOS PERMISIBLES DE FLEXIÓN	58
4.5	DISEÑO POR FLEXIÓN	60
4.6	RESISTENCIA A LA FLEXIÓN	62
4.7	RESISTENCIA AL CORTANTE	65

<b>CAPÍTULO 5 EJEMPLO DE DISEÑO DE UNA VIGA DE CONCRETO PRESFORZADO</b>	<b>70</b>
5.1 DATOS GENERALES	70
5.2 CÁLCULO DE LA CARGA MUERTA	74
5.3 CÁLCULO DE LA CARGA MÓVIL	75
5.4 CÁLCULO DEL NÚMERO Y EXCENTRICIDAD DE LOS TORONES	79
5.5 CÁLCULO DE LAS PÉRDIDAS EN LA FUERZA DE PRESFUERZO	80
5.6 ANÁLISIS POR FLEXIÓN	84
5.7 REVISIÓN POR RESISTENCIA ÚLTIMA	87
5.8 SECCIONES CERCANAS A LOS APOYOS	89
5.9 CÁLCULO DEL REFUERZO TRANSVERSAL	94
5.10 CÁLCULO DE LA DEFLEXIÓN	103
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>105</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>108</b>

## INTRODUCCIÓN

El concreto presforzado es aquél concreto al que se le aplica un esfuerzo de compresión para mejorar el comportamiento del elemento de concreto en las zonas donde se presentan esfuerzos de tensión bajo cargas de servicio.

Algunas ventajas del concreto presforzado, con respecto al concreto reforzado, son las siguientes:

- Control del agrietamiento y la deflexión ante cargas de servicio.
- Uso de materiales de alta resistencia.
- Elementos ligeros y de menores dimensiones transversales.
- Mayor longitud de los claros.
- Prefabricación en plantas con instalaciones adecuadas, mayor control de calidad y menores costos.
- Mayor rapidez de construcción en algunos casos.
- Mayor aplicación del concreto.

Algunas desventajas que se pueden presentar son:

- El transporte de elementos prefabricados.
- El diseño especial de conexiones, uniones y apoyos.
- Un proceso constructivo más cuidadoso.

En la construcción de elementos de concreto presforzado se utilizan materiales de alta resistencia debido a que si se empleara acero de refuerzo ordinario para aplicar la fuerza de presfuerzo, en vez del acero usual, las pérdidas en la fuerza de presfuerzo serían de tal magnitud que podrían llegar a anular este presfuerzo. Con el concreto de alta resistencia se obtienen elementos más esbeltos y mayor módulo de elasticidad, reduciendo la deflexión del elemento. Adicionalmente se tiene una disminución de grietas de flexión y de tensión porque el concreto de alta resistencia a compresión también tiene una mayor resistencia a tensión.

Las pérdidas en la fuerza de presfuerzo ocurren durante la construcción y el funcionamiento del elemento de concreto. Las pérdidas inmediatas en la fuerza de presfuerzo son las debidas al deslizamiento del anclaje del acero de presfuerzo, el acortamiento elástico del concreto y la fricción entre el concreto y el acero de presfuerzo. Las pérdidas dependientes del tiempo son la contracción y la fluencia del concreto, y el relajamiento del acero de presfuerzo. La suma de las pérdidas inmediatas y dependientes del tiempo, pueden llegar a ser del 20 al 30% de la fuerza aplicada por el gato.

Las causas principales de las pérdidas dependientes del tiempo son la contracción y la fluencia del concreto. Ambos fenómenos no son independientes, ya que el efecto de la contracción aumenta la magnitud de la fluencia. Las magnitudes de la contracción y fluencia son del mismo orden que la deformación elástica bajo el intervalo normal de esfuerzos, de tal manera que es necesario tomar en cuenta los diversos tipos de deformación.



La contracción en el concreto es el cambio de volumen debido al secado y a los cambios químicos que dependen del tiempo y de las condiciones de humedad, pero no de los esfuerzos.

La velocidad de contracción disminuye rápidamente con el tiempo, aproximadamente: del 14 al 34% de la contracción a 20 años, ocurre en dos semanas; del 40 al 80% de la contracción a 20 años, ocurre en 3 meses; del 66 al 85% de la contracción a 20 años, ocurre en el intervalo de un año.

Los factores que influyen en la contracción del concreto son: la composición de la mezcla; las características de los componentes y las condiciones de curado del concreto; las propiedades del concreto endurecido; las características y condiciones de servicio de la estructura.

La fluencia en el concreto es el cambio de la deformación que depende del tiempo cuando el concreto está bajo un estado de esfuerzos o carga. En los elementos de concreto presforzado, la fuerza de compresión que produce la fluencia del concreto no es constante, sino que disminuye con el paso del tiempo, debido al relajamiento del acero y a la contracción del concreto; así como también debido a los cambios en longitud asociados con la fluencia misma.

La velocidad de la fluencia disminuye rápidamente con el tiempo, aproximadamente: del 18 al 35% de la fluencia a veinte años, ocurre en dos semanas; del 40 al 70% de la fluencia a veinte años, ocurre en tres meses; del 64 al 83% de la fluencia a veinte años, ocurre en un año.

Los factores que influyen en la fluencia del concreto son: la composición de la mezcla; las características de los componentes del concreto; las propiedades del concreto endurecido; las características, condiciones de servicio, historia de carga y el nivel de esfuerzo aplicado sobre la estructura.

# CAPÍTULO 1

## CONCRETO PRESFORZADO

### 1.1 CARACTERÍSTICAS

#### 1.1.1 El concreto

Se le llama concreto presforzado al concreto que, antes de que se presenten las cargas de servicio, se le aplica un esfuerzo de compresión para mejorar el comportamiento del elemento de concreto en las zonas donde se tendrán esfuerzos de tensión bajo éstas cargas de servicio.

El concreto se produce mediante la mezcla de tres componentes, cemento, agua y agregados, a los cuales eventualmente se les agrega un cuarto componente que genéricamente se designa como aditivo. La mezcla de los componentes del concreto produce una masa plástica que puede ser moldeada, y compactada con relativa facilidad, aunque pierde esa característica después de algunas horas y se vuelve rígida y comienza a adquirir el aspecto, comportamiento y propiedades de un cuerpo sólido, para convertirse finalmente en el material mecánicamente resistente que es el concreto endurecido.

Al concreto en estado fresco, se le considera un conjunto de fragmentos de roca, definidos como agregados, dispersos en una pasta de cemento de consistencia plástica. Esto significa que en una mezcla hay muy pocos contactos entre las partículas de los agregados, característica que tiende a permanecer en el concreto ya endurecido.

El comportamiento mecánico del concreto y su durabilidad en servicio dependen de tres aspectos básicos: las características, composición y propiedades de la pasta de cemento endurecida; la calidad de los agregados; y el comportamiento de la pasta de cemento con los agregados y su capacidad para trabajar en conjunto.

##### *1.1.1.1 Cemento*

El cemento es un material con propiedades adhesivas y cohesivas las cuales le dan la capacidad de aglutinar fragmentos minerales para formar una pasta compacta. Los principales componentes del cemento son los compuestos de cal. Los cementos que se utilizan en la fabricación del concreto tienen la propiedad de fraguar y endurecer con el agua, debido a que experimentan una reacción química con ella y, por lo tanto se denominan cementos hidráulicos. Los cementos hidráulicos están compuestos principalmente por silicatos y aluminatos de cal y pueden clasificarse en general como cementos Portland, aluminoso, sobresulfatado, expansivo y natural. Las materias primas principales del cemento Portland son la arcilla y la caliza; para el aluminoso son la bauxita y la caliza; para el sobresulfatado es la escoria granulada de alto horno; para el expansivo son el clinker, la escoria, la bauxita y el yeso; mientras que para el cemento natural su materia prima principal es la caliza arcillosa.

A los cambios químicos que se producen al mezclarse el cemento y el agua para formar productos de hidratación, que con el paso del tiempo producen la pasta de cemento endurecida, se les conoce como hidratación del cemento. Los diferentes compuestos del cemento pueden reaccionar con el agua de dos modos distintos. En el primero, se produce una adición directa de algunas moléculas de agua, lo cual es una hidratación real, en el segundo el agua reacciona con los compuestos para originar otros por lo que constituye la hidrólisis. Sin embargo, se aplica el término de hidratación a todas las reacciones del cemento con agua tanto a la hidratación real como a la hidrólisis. En cualquier etapa de la hidratación, la pasta endurecida consta de hidratos de varios compuestos, denominados colectivamente como gel de cristales de hidróxido de calcio ( $\text{Ca}(\text{OH})_2$ ), algunos componentes menores, cemento deshidratado y espacios rellenos de agua en la pasta fresca. Estos huecos se denominan poros capilares, pero dentro del gel mismo existen huecos intersticiales llamados poros de gel.

El cemento Portland es un producto comercial que cuando se mezcla con agua, ya sea solo o en combinación con agregados, tiene la propiedad de combinarse lentamente con el agua hasta formar una masa endurecida. Es básicamente un clinker finamente molido que contiene cal ( $\text{CaO}$ ), sílice ( $\text{SiO}_2$ ), alúmina ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) y óxido de hierro ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) en proporciones determinadas para lograr las propiedades deseadas. Otros compuestos del cemento Portland son los óxidos de magnesio ( $\text{MgO}$ ), de manganeso ( $\text{Mn}_2\text{O}_3$ ), de sodio ( $\text{Na}_2\text{O}$ ) y de potasio ( $\text{K}_2\text{O}$ ). A los óxidos de sodio y de potasio en el cemento se les conoce como álcalis.

El cemento Portland se fabrica con un material calcáreo como la piedra caliza, greda o marga, y un material arcilloso como arcilla, pizarra y escoria de altos hornos. Las materias primas del cemento, finamente molidas y mezcladas, se calientan en hornos hasta el principio de la fusión. Al material parcialmente fundido que sale del horno se le denomina clinker. El clinker enfriado y molido a polvo muy fino es lo que constituye el cemento Portland. Durante la molienda del clinker se le agregan pequeñas cantidades de yeso ( $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ ) para controlar las propiedades del fraguado. El fraguado es el término que se utiliza para describir la rigidez de la pasta de cemento y se distingue del endurecimiento porque éste es el aumento de la resistencia de la pasta después del fraguado. La pasta que se forma cuando el cemento se mezcla con el agua permanece plástica durante un periodo corto de tiempo, durante esta etapa es posible remezclarla sin alterar la posterior cohesión, pero a medida que las reacciones entre el cemento y el agua continúan, la pasta pierde plasticidad; a este periodo inicial de endurecimiento se le llama periodo de fraguado.

Las materias primas utilizadas en la elaboración del cemento Portland, cal, sílice, alúmina y óxido de hierro, producen en el horno otros compuestos más complejos. Estos compuestos son principalmente el silicato tricálcico ( $3\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$ ), el silicato dicálcico ( $2\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$ ), el aluminato tricálcico ( $3\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3$ ) y el aluminoferrito tetracálcico ( $4\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$ ). Por conveniencia estos compuestos tienen la abreviatura  $\text{C}_3\text{S}$ ,  $\text{C}_2\text{S}$ ,  $\text{C}_3\text{A}$  y  $\text{C}_4\text{AF}$ , respectivamente. Los silicatos de calcio son los compuestos más deseables en el cemento, porque al hidratarse forman los silicatos hidratados de calcio que son los que proporcionan la resistencia mecánica y otras propiedades del concreto. Normalmente el silicato tricálcico aporta resistencia a corto y mediano plazo, y el silicato dicálcico a mediano y a largo plazo, es decir se complementan para que la adquisición de la resistencia se realice en forma sostenida. El aluminato tricálcico es el compuesto que se hidrata con mayor rapidez, provocando mayor velocidad en el fraguado y en el desarrollo de calor de hidratación en el concreto, y su presencia en el cemento

hace al concreto más susceptible de sufrir daño por efecto del ataque de los sulfatos; es por lo anterior que se tiende a limitar la cantidad de este compuesto en la medida que es compatible con el uso del cemento. El aluminoferrito tetracálcico es un compuesto que es relativamente inactivo ya que contribuye poco a la resistencia del concreto, y su presencia es más bien útil como fundente durante la calcinación del clinker y porque favorece la hidratación de los otros compuestos.

La velocidad de hidratación del cemento depende de la finura de sus partículas, por lo tanto para un desarrollo rápido de la resistencia se precisa un alto grado de finura. Un aumento en la finura del cemento eleva la cantidad de yeso requerida para un retardo adecuado del fraguado, puesto que en cementos más finos existe más aluminato tricálcico libre para hidratación temprana. Por otra parte cuanto más fino sea un cemento, se deteriorará con mayor rapidez por la exposición a la atmósfera y tendrá una reacción mayor con cierto tipo de agregado, formando una pasta que aumentará su contracción y agrietamiento; sin embargo, un cemento más fino sangra menos que uno grueso. El sangrado es una forma de segregación del concreto en estado fresco en la cual una parte del agua de la mezcla tiende a salir a la superficie de un concreto recién colocado. La segregación a su vez, se define como la separación de los constituyentes del concreto en una mezcla heterogénea de modo que su distribución deja de ser uniforme.

Una característica del cemento es su calor de hidratación y se debe a que las reacciones de los compuestos del cemento liberan calor. Como la conductividad del concreto es relativamente baja, actúa como aislante, y en el interior de una masa grande de concreto la hidratación puede producir un aumento de la temperatura; simultáneamente, la masa exterior de concreto pierde algo de calor, de modo que se produce un gradiente de temperatura y, durante el enfriamiento posterior del interior, pueden producirse agrietamientos. El calor de hidratación del cemento depende de su composición química y es aproximadamente igual a la suma de los calores de hidratación de los compuestos individuales, hidratados por separado. Debido a que durante las primeras etapas de hidratación los compuestos del cemento se hidratan a distintas velocidades, la velocidad de desarrollo del calor, al igual que el calor total, dependen de la cantidad de éstos compuestos en el cemento. La finura del cemento también influye sobre la velocidad de desarrollo del calor: un incremento en la finura acelera la reacción de hidratación y, por consiguiente, el calor liberado; sin embargo la cantidad total de calor liberado no se ve afectada por la finura del cemento.

Las propiedades del cemento Portland difieren con la cantidad de cada uno de sus componentes principales, de este modo se seleccionan mezclas de materias primas para la producción de cementos con diversas propiedades. A partir del clinker se fabrican tres principales clases de cementos Portland para la elaboración del concreto: los cementos Portland simples, que se obtienen moliendo solamente el clinker y el yeso sin componentes cementantes adicionales; los cementos Portland mezclados, que se consiguen combinando el clinker y el yeso con otro cementante, ya sea este una escoria de alto horno o una puzolana; y los cementos expansivos que se obtienen añadiendo al clinker otros componentes especiales con características de sulfatado, cálcico y aluminoso.

La escoria de alto horno está compuesta por cal, sílice y aluminio, y es un producto de desecho de la fabricación de hierro en lingotes. Por otra parte la puzolana es un material natural o artificial que contiene sílice o alúmina, que tiene poco o nulo valor cementante, pero en forma muy dividida y en presencia de humedad reacciona químicamente con la cal a temperaturas ordinarias para formar un compuesto con propiedades cementantes.

Los tipos de cemento Portland se denominan de acuerdo con la característica especial con la que se fabrican; el cemento Portland ordinario se denomina cemento tipo I; el que tenga bajo calor de hidratación y / o resistencia a los sulfatos, tipo II; el de alta resistencia con o sin rápida adquisición en la resistencia, tipo III; el de bajo calor de hidratación, tipo IV; el resistente a los sulfatos, tipo V; el de escoria de alto horno, tipo IS; y el cemento Portland puzolana; tipo IP.

### **1.1.1.2 Agregado**

En las mezclas de concreto hidráulico, los agregados suelen representar aproximadamente entre el 60 a 75% del volumen de todos los componentes, por lo que las características y propiedades de los agregados tiene gran efecto en el comportamiento del concreto. Entre las características físicas que contribuyen a definir la calidad de los agregados, destacan: tamaño, forma y textura de la partícula, granulometría, peso específico, sanidad, porosidad, permeabilidad, resistencia mecánica, resistencia a la abrasión y módulo de elasticidad.

Por el tamaño de sus partículas, los agregados se dividen en agregado fino y en agregado grueso. El agregado fino abarca nominalmente partículas entre 0.075 mm (malla No. 200) y 4.75 mm (malla No. 4), en tanto que el intervalo nominal del agregado grueso, comprende desde 4.75 mm hasta la dimensión de los fragmentos más grandes que contiene, cuya dimensión define el tamaño máximo de agregado en cada caso.

La forma y la textura superficial de las partículas que constituyen los agregados gruesos no son índice de la calidad física de los agregados, sino más bien de su comportamiento en el concreto. Las partículas de formas redondeadas y superficies lisas producen buena manejabilidad en las mezclas de concreto, pero no son propicias para lograr una buena adherencia con la pasta de cemento; por el contrario, las partículas de formas muy angulosas y superficies ásperas son inconvenientes para la elaboración de mezclas manejables, pero favorables en lo relativo a su adherencia con la pasta de cemento. De manera general, se puede decir que los agregados de formas redondeadas son preferibles para los concretos de peso normal con resistencias que no excedan de 200 o 250 kg/cm<sup>2</sup>. A medida que aumenta la resistencia requerida, es necesario considerar más la adherencia que se presenta entre la pasta de cemento y los agregados, buscando formas menos redondeadas y superficies más ásperas en éstos agregados, evitando formas demasiado irregulares y angulosas.

Una característica importante de los agregados es su peso específico, ya que éste influye directamente en el peso volumétrico del concreto. Las distintas clases de concreto, de acuerdo a su peso volumétrico, son el concreto ligero estructural con peso entre 1400 y 1900 kg/m<sup>3</sup>; el concreto de peso normal con peso entre 2200 y 2400 kg/m<sup>3</sup>, y el concreto pesado con peso entre 2600 y 3800 kg/m<sup>3</sup>.

La sanidad de los agregados se define como la capacidad de soportar las acciones ambientales a que se expone el concreto que los contiene, especialmente la que corresponde al intemperismo. La sanidad de los agregados está directamente relacionada con la durabilidad del concreto en ciertas condiciones.

Algunos agregados del concreto de peso normal son porosos en algún grado, pero algunos poseen un sistema de poros que incluyen numerosos vacíos relativamente grandes, que en su mayoría se hayan interconectados, y que los hacen permeables. De este modo algunos agregados que poseen un bajo porcentaje de porosidad, manifiestan un coeficiente de permeabilidad comparativamente alto, es decir, más que el contenido de vacíos, en la permeabilidad influye la forma, tamaño y distribución de los vacíos.

En el concreto las partículas de los agregados permanecen dispersas en la pasta de cemento y de este modo se produce poco contacto entre ellas. Es por ello que la resistencia mecánica del concreto endurecido, especialmente en compresión, depende más de la resistencia de la pasta de cemento y de su adherencia con los agregados, que de la resistencia propia de los agregados solos. Sin embargo, cuando se trata de concreto de muy alta resistencia, con resistencias superiores a los  $420 \text{ kg/cm}^2$ , o del concreto compactado con rodillo, en donde se produce mayor contacto entre las partículas de los agregados, la resistencia mecánica de los agregados adquiere mayor influencia en la resistencia del concreto. Se puede decir que las rocas comunes que constituyen los agregados son más resistentes a compresión que la pasta de cemento, pues comúnmente tienen resistencias superiores a los de  $700 \text{ kg/cm}^2$ .

Las propiedades elásticas del agregado grueso, son características importantes debido a que afectan las correspondientes del concreto endurecido, en particular el módulo de elasticidad y la relación de Poisson. Comúnmente, las rocas que constituyen los agregados son elásticas a compresión cuando son físicamente homogéneas; esto no ocurre en el concreto debido a las microfisuras y deslizamientos internos que se producen al exceder aproximadamente el 30% del esfuerzo de ruptura.

### ***1.1.1.3 Agua***

La combinación del cemento Portland con el agua en el concreto, genera un medio muy alcalino en el que se halla inmersas las partículas de roca que constituyen los agregados. En estas condiciones, algunas rocas reaccionan químicamente con el medio de contacto, para dar lugar a la formación de un gel, que al absorber agua se expande y crea presiones capaces de desintegrar el concreto. Estas reacciones químicas se denominan reacciones álcali-agregado, siendo la más común la que se produce entre los constituyentes activos de sílice de los agregados y los álcalis del cemento. Esta reacción empieza con el ataque de los hidróxidos alcalinos derivados de los óxidos de sodio y de potasio del cemento sobre los minerales silicosos de los agregados, teniendo como consecuencia la formación de un gel de álcalis y silicatos que produce una alteración de los límites de los agregados. Este gel tiene una tendencia a aumentar su volumen por el agua que incorpora, produciendo presiones internas debido a que está confinado por la pasta de cemento que pueden producir expansión, agrietamiento y ruptura de la misma pasta. La reactividad de los agregados se ve afectada por el tamaño de las partículas y su porosidad, pues ambos factores influyen sobre el área en que puede tener lugar la reacción. Como la cantidad de álcalis es resultado solamente del cemento,

su concentración en la superficie reactiva del agregado dependerá de la magnitud de ésta superficie. Otro factor que influye en el desarrollo de la reacción entre los álcalis y los agregados, es la existencia de agua no evaporable en la pasta de cemento y la permeabilidad de ésta; la humedad es necesaria y la reacción se acelera en condiciones de humedad y secado sucesivas.

El agua como componente del concreto, en términos generales, suele representar aproximadamente entre 10 y 25% del volumen del concreto recién mezclado, dependiendo del tamaño máximo de agregado que se utilice y del revenimiento que se requiera. Esto le concede una influencia importante a la calidad del agua de mezclado en el comportamiento y las propiedades del concreto, pues cualquier sustancia dañina que contenga, aún en proporciones reducidas, puede tener efectos adversos significativos en el concreto.

El agua, en relación con su empleo en el concreto, tiene dos diferentes aplicaciones: como componente en la elaboración de las mezclas y como medio de curado de las estructuras recién construidas. Aunque en estas aplicaciones las características del agua tienen efectos de diferente importancia sobre el concreto, es usual que se recomiende emplear agua de una sola calidad en ambos casos. Una práctica común consiste en utilizar agua potable para fabricar concreto sin ninguna verificación previa, suponiendo que toda el agua que es potable también es apropiada para elaborar concreto, sin embargo, hay ocasiones en que esta suposición no se cumple.

Los requisitos de calidad del agua de mezclado para concreto no tienen ninguna relación directa con el aspecto bacteriológico, como es el caso del agua potable, sino que se refieren a sus características físico-químicas y a sus efectos sobre el comportamiento y las propiedades del concreto. Con respecto a éstas características físico-químicas se establecen limitaciones a la cantidad de sustancias e impurezas cuya presencia es relativamente frecuente, como es el caso de algunas sales inorgánicas como los cloruros y sulfatos, sólidos en suspensión, materia inorgánica, bióxido de carbono disuelto, entre otras; pero no se toleran la presencia de sustancias que son claramente dañinas y que se pueden tomar como indicio de contaminación como aceites, azúcares, y ácidos, por ejemplo. Para el caso de la fabricación de elementos de concreto presforzado, hay requisitos que son más estrictos en cuanto al límite tolerable de ciertas sales que pueden afectar al concreto y al acero de presfuerzo.

Cuando el agua procede de una fuente de suministro de agua potable, se puede suponer adecuada para su uso en la elaboración del concreto, excepto en el caso de que no sea clara o que tenga sabor dulce, amargo o salobre. Los efectos indeseables que el agua de mezclado de calidad inadecuada puede producir en el concreto se relacionan con el tiempo de fraguado, con la resistencia, con el ataque de sulfatos, la reacción álcali-agregado en el concreto, y con la corrosión del acero de refuerzo o de presfuerzo.

#### ***1.1.1.4 Aditivos***

Un aditivo del concreto es un material distinto del agua, de los agregados y del cemento hidráulico, que se emplea como componente del concreto o mortero y que se agrega a la mezcla inmediatamente antes o durante el mezclado. Se excluyen de esta definición de aditivo

a los materiales cuyo empleo da como resultado un tipo especial de concreto, como son los concretos expansivo y ligero estructural.

Los aditivos para concreto se utilizan con el propósito fundamental de modificar favorablemente el comportamiento del concreto en estado fresco, de inducir propiedades o mejorar determinadas propiedades deseables en el concreto endurecido. Los aditivos pueden ser clasificados de acuerdo con sus componentes principales o por sus efectos sobre el concreto, como acelerantes, inclusores de aire, reductores de agua y reguladores de fraguado, minerales finamente divididos, y otros.

En términos generales, puede considerarse que existen dos diferentes clases de aditivos acelerantes considerando su efecto principal en el concreto: los que aceleran la adquisición de la resistencia con una reducción moderada en el tiempo de fraguado, y los que producen un fraguado muy rápido y también aceleran la obtención de resistencia. Los aditivos acelerantes de la resistencia en el concreto pueden tener como efectos indeseables una rápida pérdida de revenimiento, reducción del tiempo de fraguado, deterioro de la resistencia final, riesgo de corrosión del acero si contienen cloruros, deterioro en la resistencia a los sulfatos, incremento de la contracción por secado, etc.

Al mezclar los componentes del concreto se introduce de manera simultánea aire en forma de burbujas macroscópicas dispersas en la masa que corresponde al aire atrapado cuya proporción no excede normalmente del 2% del volumen del concreto compactado. Éstos vacíos son indeseables debido a que por su tamaño afectan la resistencia, impermeabilidad y otras propiedades del concreto endurecido. Si la mezcla contiene un aditivo que fomente la inclusión de aire, el aire toma la forma de pequeñas burbujas, casi microscópicas y esféricas, que se distribuyen uniformemente en la masa y representan una proporción que suele estar entre 3 y 8% del volumen del concreto, dependiendo del tamaño máximo del agregado. El aire incluido con el aditivo específico contribuye a incrementar la manejabilidad y reducir el sangrado de las mezclas de concreto y produce un conjunto de vacíos en el concreto endurecido que favorece su resistencia a los ciclos de congelación y deshielo. Sin embargo, este aditivo puede causar como efecto secundario una disminución en la resistencia a compresión, por lo que el volumen del aire incluido se limita a proporciones que no causen este efecto adverso.

Los aditivos llamados reductores de agua se utilizan para disminuir el contenido de agua sin cambiar el contenido de cemento ni el revenimiento, con lo cual disminuye la relación agua/cemento y aumenta la resistencia. También estos aditivos se usan para aumentar el revenimiento y mantener la misma resistencia al conservar los mismos contenidos de agua y de cemento. Otro posible empleo de los aditivos reductores de agua es para disminuir el contenido de cemento para una resistencia conservando la relación agua/cemento y el revenimiento. La propiedad básica de muchas sustancias reductoras de agua consiste en disminuir las fuerzas de atracción que existen entre las partículas de cemento mezcladas con el agua en la pasta de cemento, con lo cual ésta incrementa su fluidez. Hay otras sustancias que además de incrementar la fluidez, propician los desfavorables efectos de incluir burbujas de aire, retardo en el tiempo de fraguado o una rápida pérdida de revenimiento. El uso de algunos aditivos retardadores de fraguado tiene el efecto adverso de retrasar el fraguado más de lo necesario, con lo que también se atrasa la adquisición de la resistencia en las primeras edades



del concreto. Para compensar el efecto adverso, es común que los aditivos retardadores del fraguado tengan la función de reducir el agua de mezclado, por lo que se les designa como retardadores de fraguado y reductores de agua.

Los minerales finamente divididos usados como aditivos, están constituidos principalmente por escorias, puzolanas y polvos minerales inertes, los cuales solamente se consideran como aditivos cuando se incorporan al concreto por separado del cemento. Los materiales de este grupo que más se utilizan como aditivos son las puzolanas, entre las que se destacan las cenizas volantes y el hollín de sílice. Las cenizas volantes como aditivo del concreto pueden mejorar la manejabilidad, la cohesión de las mezclas, y reducir su segregación y sangrado, sin exhibir tendencia a incrementar la demanda de agua de mezclado, debido a que se hallan normalmente integradas en su mayoría por partículas de forma esférica y con finura del mismo orden que la del cemento Portland. Otro efecto favorable de las puzolanas es que en su reacción con la cal, genera menos calor que el cemento Portland al hidratarse. Un efecto desfavorable cuando se adiciona una puzolana, para disminuir en la misma proporción la cantidad de cemento, es que se reduce la adquisición de resistencia a compresión del concreto a corto y mediano plazo, si bien es posible que a largo plazo la resistencia sea la misma que la del mismo concreto sin este aditivo. Otro de los efectos de los aditivos minerales finamente divididos es que cuando se trata de una puzolana natural, incrementan la contracción por secado del concreto debido a que éstas puzolanas tienden a incrementar el requerimiento de agua de mezcla; sin embargo cuando se utilizan cenizas volantes, algunas de este tipo tienden a disminuir la contracción por secado, ya que permiten reducir la demanda de agua del concreto. En lo que respecta a la resistencia a los sulfatos, las reacciones álcali-agregado y la durabilidad del concreto, las puzolanas tienen efectos diversos en el concreto.

Los otros aditivos comprenden una extensa variedad, algunos de ellos son de uso poco común y otros son de gran utilidad. Entre estos aditivos se encuentran los expansores por formación de gas, que utilizan para producir concreto ligero o para rellenos en condiciones de confinamiento. Los aditivos para mezclas de inyección son también de este tipo, y se utilizan cuando se requieren mezclas fluidas, sin asentamiento ni contracción, utilizando un agente reductor de agua y un expansor por formación de gas. Los aditivos productores de expansión regulada crean expansión controlada por reacciones químicas durante la hidratación del cemento para rellenos de contracción compensada, con o sin confinamiento. Los aditivos adhesivos integrales aumentan la adhesividad en el concreto fresco, al ser aplicados sobre concreto endurecido. Los aditivos repelentes de humedad permiten la reducción en la velocidad de penetración del agua por absorción capilar, en el concreto no expuesto a presión hidrostática. Los aditivos reductores de permeabilidad propician una disminución de la permeabilidad de concreto endurecido, mediante disminución de la relación agua/cemento con el uso de un reductor de agua, o por aumento de los productos de hidratación con el uso de microsilíce u otra puzolana. Los aditivos inhibidores de la reacción álcali-agregado favorecen la disminución de la expansión generada por la reacción álcali-agregado en el concreto endurecido, mediante el uso de ciertas puzolanas. Otros aditivos de gran utilidad son los inhibidores de la corrosión del acero que logran en el concreto la reducción de la permeabilidad del recubrimiento y un aumento de la capacidad de protección contra la penetración de sales que propician la corrosión mediante la disminución de la relación agua/cemento y la disminución de la porosidad del concreto.

### 1.1.1.5 Resistencia

Por lo general, el concreto tiene como propiedad más importante su resistencia a la compresión, a pesar de que en muchos casos particulares otras de sus características, como la resistencia a la flexión en pavimentos de concreto, pueden ser más significativas. El concreto puede clasificarse, considerando la resistencia a la compresión a los 28 días de cilindros de concreto de  $15 \times 30$  cm, como concretos de baja resistencia, menores a  $140 \text{ kg/cm}^2$ ; de resistencia moderada, entre  $140$  y  $250 \text{ kg/cm}^2$ ; normal, entre  $250$  y  $420 \text{ kg/cm}^2$ ; de muy alta resistencia, mayor a  $420 \text{ kg/cm}^2$ , y de alta resistencia temprana, con resistencia a uno o tres días del 80% de la correspondiente a los 28 días.

La resistencia a compresión del concreto varía con su edad, siendo el aumento de su resistencia más rápido al principio, posteriormente es más lento. Esta variación de la resistencia es especialmente importante en el diseño y fabricación de elementos de concreto presforzado, debido a las grandes cargas que produce el tensado del acero. En la práctica actual, se especifican comúnmente resistencias a la compresión del concreto a los 28 días entre  $350$  y  $500 \text{ kg/cm}^2$ , siendo el valor estándar  $350 \text{ kg/cm}^2$ . Se requiere esta resistencia para poder hacer la transferencia del presfuerzo cuando el concreto haya alcanzado una resistencia de  $280 \text{ kg/cm}^2$ .

En los elementos de concreto presforzado pueden producirse grietas debido a la tensión directa, la flexión, la combinación de esfuerzo cortante y esfuerzo de flexión. El comportamiento de los elementos de concreto cambia cuando se forman grietas de tensión. El módulo de ruptura es el esfuerzo calculado de tensión debido a la flexión, bajo el cual una viga de prueba de concreto se fractura. Para concretos de peso normal, el módulo de ruptura está generalmente entre  $1.989\sqrt{f'_c}$  y  $3.182\sqrt{f'_c}$ , mientras que para concretos de agregado ligero puede variar de  $1.326\sqrt{f'_c}$  a  $2.386\sqrt{f'_c}$ , donde  $f'_c$  está en  $\text{kg/cm}^2$ . En cada caso los valores más pequeños corresponden a los concretos de mayor resistencia.

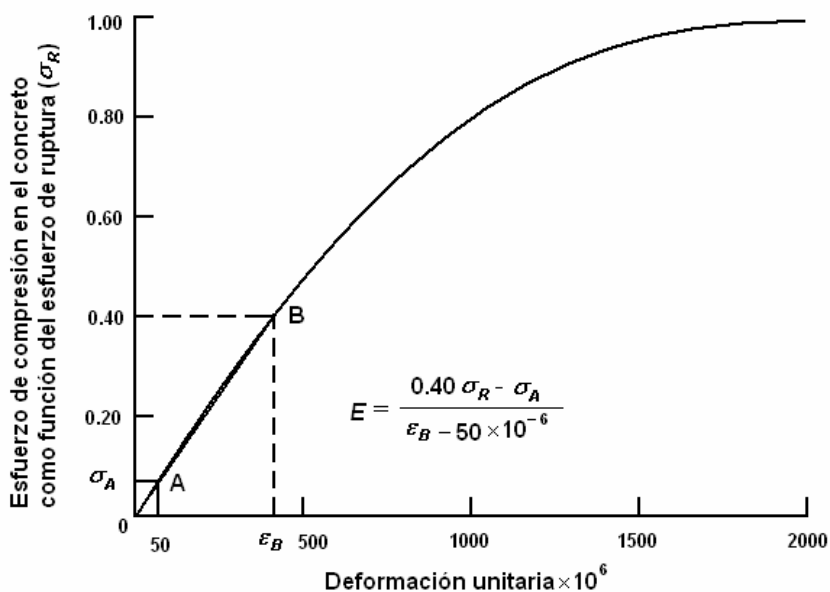
### 1.1.1.6 Módulo de elasticidad

En los materiales elásticos cuya gráfica esfuerzo deformación unitaria es una línea recta, el módulo de elasticidad define la relación de proporcionalidad que existe entre ambas variables, es decir, se identifica con la pendiente de esa recta. Debido a que en el concreto la relación esfuerzo deformación unitaria es una curva, su módulo de elasticidad se define como la recta que corta a dicha curva en dos puntos entre los cuales se puede considerar que el concreto tiene un comportamiento elástico. Esta consideración permite hacer diseños elásticos y fijar un módulo de elasticidad en función de la resistencia del concreto. Para concretos donde se conoce la curva esfuerzo deformación unitaria, las normas ASTM definen el módulo de elasticidad de este material como la pendiente de la recta que forman el punto de la curva a 40% del esfuerzo de ruptura del concreto y el punto que tiene una deformación unitaria de  $50 \times 10^{-6}$ .

En concretos donde no se conoce con exactitud la curva esfuerzo deformación unitaria, el reglamento ACI-318 recomienda considerar el módulo de elasticidad, cambiando la expresión a unidades métricas, igual a:

$$E_c = 0.1365 w_c^{1.5} \sqrt{f'_c} \quad (1.1)$$

donde el módulo de elasticidad  $E_c$  está en  $\text{kg/cm}^2$ , el peso volumétrico del concreto  $w_c$  tiene un valor entre 1500 y 2500  $\text{kg/m}^3$  y la resistencia a compresión del concreto  $f'_c$  está en  $\text{kg/cm}^2$ .



**Figura 1.1** Módulo de elasticidad para el concreto

### 1.1.1.7 Relación de Poisson

Cuando un espécimen de concreto se somete a una carga en su dirección axial, produciendo una distribución uniforme de esfuerzos de compresión en la sección transversal (al igual que ocurre con otros materiales), éste se expande en la dirección transversal a la de esfuerzo aplicado. La relación entre la deformación transversal y la longitudinal se conoce como relación de Poisson. Ésta es significativa solamente dentro del intervalo elástico, para esfuerzos menores a la mitad de la resistencia en compresión del concreto. Las Normas ASTM proporcionan el método de prueba para determinar la relación de Poisson del concreto. La relación de Poisson se calcula a la mitad de la altura del espécimen de concreto, de acuerdo a la expresión siguiente:

$$\nu = \frac{\varepsilon_{t2} - \varepsilon_{t1}}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \quad (1.2)$$

donde  $\nu$  es la relación de Poisson,  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_{t1}$ , son las deformaciones unitarias longitudinal y transversal, respectivamente, para una deformación  $\varepsilon_1$  de  $50 \times 10^{-6}$  en la curva esfuerzo deformación unitaria del concreto;  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_{t2}$ , son las deformaciones unitarias longitudinal y transversal, respectivamente, para un esfuerzo de 40% del esfuerzo de ruptura en la curva esfuerzo deformación unitaria del concreto.

La relación de Poisson del concreto tiene valores entre 0.11 y 0.27, aproximadamente. Para concretos de peso normal el intervalo de variación de esta relación puede ser de 0.15 a 0.20.

Un tipo de material de gran utilidad en elementos presforzados es el concreto ligero. Éste se produce mediante el empleo de agregados de bajo peso específico en la mezcla. Los agregados que se usan son pizarras, pizarras arcillosas, escorias o cenizas de grano grueso. El concreto que se obtiene empleando estos agregados, tiene un peso volumétrico menor, entre  $1400 \text{ kg/m}^3$  y  $1900 \text{ kg/m}^3$ , comparado con el peso volumétrico normal del concreto que tiene entre  $2200 \text{ kg/m}^3$  y  $2400 \text{ kg/m}^3$ .

### 1.1.2 El acero

Algunas características importantes del acero como el módulo de elasticidad, el límite proporcional elástico, el esfuerzo de fluencia, la resistencia, la ductilidad y las propiedades de endurecimiento por deformación se pueden observar en las curvas esfuerzo deformación de este material.

En el acero de refuerzo ordinario, con esfuerzos de fluencia de  $2800$  y  $4200 \text{ kg/cm}^2$  (grados 40 y 60, respectivamente), existe una respuesta inicial elástica hasta el punto de fluencia, más allá del cual, ocurre un incremento en la deformación sin que sea necesario un incremento en el esfuerzo. Si se incrementa la carga, esta zona de fluencia es seguida por una región de endurecimiento por deformación, durante el cual se obtiene una relación que no es lineal entre el esfuerzo y la deformación. La ruptura del material ocurrirá a una deformación adicional aproximadamente del 13% para varillas con esfuerzo de fluencia de  $4200 \text{ kg/cm}^2$  y del 20% para varillas con esfuerzo de fluencia de  $2800 \text{ kg/cm}^2$ . Todos los tipos de acero presentan un endurecimiento por deformación considerable después de haber alcanzado el esfuerzo de fluencia. La ductilidad, medida como la deformación total en el momento de falla, es menor para los aceros con resistencia mayor.

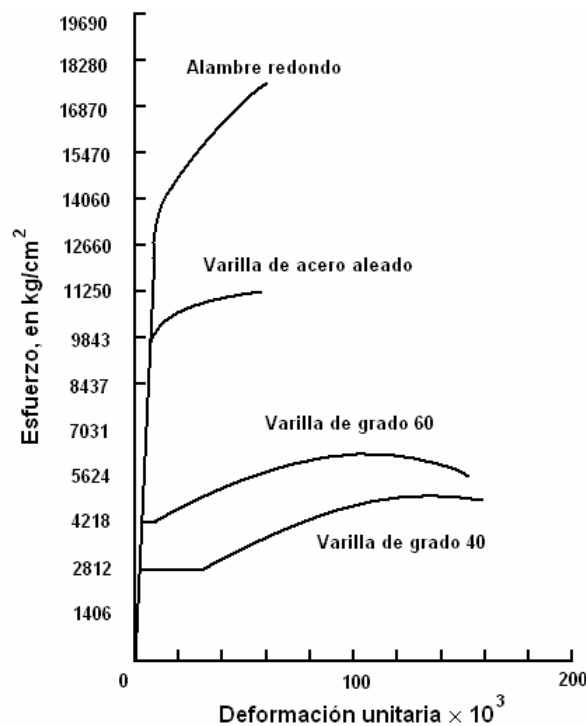
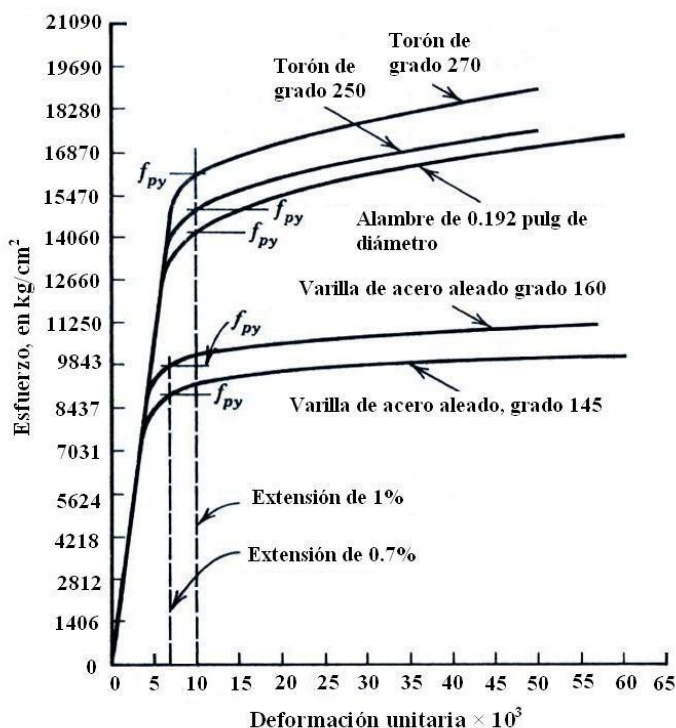


Figura 1.2 Curvas esfuerzo-deformación para aceros de refuerzo y de presfuerzo

Los aceros de presfuerzo no presentan un esfuerzo de fluencia bien definido. El límite proporcional para alambres redondos está alrededor de  $14000 \text{ kg/cm}^2$  (grado 200). Con carga adicional, los alambres muestran una fluencia gradual, aunque la curva continúa elevándose hasta la fractura del acero. Las varillas de aleación tienen características similares a aquéllas de los alambres redondos o de los torones, pero sus límites proporcionales y resistencias son de 30 a 40 por ciento menores. La fluencia para alambres y torones se define como el esfuerzo al cual corresponde una deformación de 1%. Para varillas de aleación, el esfuerzo de fluencia se toma como aquel que produce una deformación de 0.7%.



**Figura 1.3** Curvas de esfuerzo-deformación típicas para aceros de presfuerzo

### 1.1.2.1 Varillas

Las varillas de aleación de acero de alta resistencia a la tensión varían desde un diámetro de 12 mm hasta uno de 40 mm y pueden ser lisas o corrugadas. Las varillas lisas pueden laminarse con rosca o cuerda en sus extremos para que se puedan utilizar con propósitos de anclaje o para conectarse entre ellas. Las varillas corrugadas poseen costillas laminadas a todo lo largo, que actúan como rosca con fines de anclaje o conexión. Las longitudes requeridas de las varillas lisas son por lo tanto críticas, en tanto que no lo son en las varillas corrugadas. Las varillas de aleación se consiguen con resistencias últimas mínimas de  $10200 \text{ kg/cm}^2$  (grado 145) y  $11200 \text{ kg/cm}^2$  (grado 160).

**Tabla 1.1 Propiedades de las varillas de acero de aleación**

Diámetro nominal		Área nominal de la varilla		Resistencia a la ruptura		Carga mínima para una elongación de 0.7%	
pulg	mm	pulg <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>	klb	t	klb	t
<b>10200 kg/cm<sup>2</sup> (grado 145)</b>							
1/2	12.7	0.196	127	28	12.7	25	11.3
5/8	15.88	0.307	198	45	20.4	40	18.1
3/4	19.05	0.442	285	64	29.0	58	26.3
7/8	22.23	0.601	388	87	39.5	78	35.4
1	25.40	0.785	507	114	51.7	102	46.3
1 1/8	28.58	0.994	642	144	65.3	129	58.5
1 1/4	31.75	1.227	792	178	80.7	160	72.6
1 3/8	34.93	1.485	957	215	97.5	193	87.5
<b>11200 kg/cm<sup>2</sup> (grado 160)</b>							
1/2	12.7	0.196	127	31	14.1	27	12.2
5/8	15.88	0.307	198	49	22.2	43	19.5
3/4	19.05	0.442	285	71	32.2	62	28.1
7/8	22.23	0.601	388	96	43.5	84	38.1
1	25.40	0.785	507	126	57.2	110	49.9
1 1/8	28.58	0.994	642	159	72.1	139	63.1
1 1/4	31.75	1.227	792	196	88.9	172	78.0
1 3/8	34.93	1.485	958	238	108.0	208	94.3

### 1.1.2.2 Alambres

Para alambres redondos lisos, el módulo de elasticidad es más o menos el mismo que para el refuerzo ordinario, esto es, aproximadamente  $2 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>. Para el torón, el módulo de elasticidad es menor, aproximadamente de  $1.9 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>, a pesar de que el torón se fabrica con el mismo alambre. Esto se debe a que la espiral del torcido del torón tiende a enderezarse ligeramente a medida que se aplica la tensión al torón. El módulo de elasticidad para varillas es también de  $1.9 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>, esto se debe a la presencia de elementos de aleación. El módulo para tendones embebidos en concreto puede tener un valor de  $2 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>.

Los alambres individuales se fabrican laminando en caliente lingotes de acero hasta obtener alambres redondos. Después del enfriamiento, los alambres se pasan a través de troqueles para reducir su diámetro hasta el tamaño requerido. En el proceso de esta operación del estirado, se ejecuta trabajo en frío sobre el acero, lo cual modifica sus propiedades mecánicas e incrementa

su resistencia. A los alambres se les libera de esfuerzo después de estirado en frío mediante un tratamiento continuo de calentamiento hasta obtener las propiedades mecánicas especificadas.

Los alambres pueden suministrarse, ya sea en rollos con una curvatura natural provocada por el laminado que cuando se extiende el alambre no queda en forma recta, y en alambres que han sido previamente estirados mediante un proceso que comprende un tratamiento de calentamiento que mejora las propiedades elásticas y conduce a lo que se denomina como un comportamiento de relajamiento normal; o bien, un tratamiento de estiramiento en caliente, que también induce altas propiedades elásticas, pero que provoca lo que se clasifica como un comportamiento de relajamiento bajo.

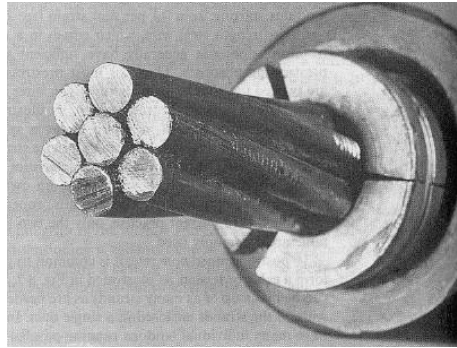
**Tabla 1.2 Propiedades de alambres sin revestimiento relevados de esfuerzo**

Diámetro nominal		Resistencia mínima de tensión		Esfuerzo mínimo para una elongación de 1%	
pulg.	mm	ksi	kg/cm <sup>2</sup>	ksi	kg/cm <sup>2</sup>
0.192	4.88	250	17600	200	14000
0.196	4.98	250	17600	200	14000
0.250	6.35	240	16900	192	13500
0.276	7.01	235	16500	182	12800

Los términos de relajamiento normal y bajo se aplican lo mismo a los alambres que a los torones. El relajamiento se define como la pérdida en el esfuerzo después de un cierto periodo de tiempo en el que un tendón de presfuerzo se tensa para una carga determinada, en condiciones de longitud y temperatura constantes. Se ha establecido que, para un acero dado, la rapidez del relajamiento es una función del esfuerzo inicial y la duración de su aplicación.

### 1.1.2.3 Torones

Existen dos tipos de torón para presfuerzo, con 7 o 19 alambres. Su elección depende principalmente del grado de flexibilidad y resistencia requeridas. El de mayor uso es el de siete alambres, el cual tiene desde 6.4 mm hasta 15.2 mm de diámetro nominal. Para formar el torón de siete alambres se enrollan helicoidalmente seis alambres alrededor de un alambre central; este enrollamiento constituye una sola capa que cubre al alambre recto mencionado o núcleo interior. Cuando no sea conveniente utilizar cables con torones de siete alambres, se usan torones de 19 alambres con un diámetro que varía desde los 18 mm hasta 32 mm. La construcción de torones con 19 alambres comprende una capa interior de nueve alambres en hélice, colocados sobre un alambre central recto y una capa exterior de nueve alambres de mayor diámetro; o bien, un torón con siete alambres y una capa exterior de doce alambres de dos diferentes diámetros.



**Figura 1.4 Torón de siete alambres con un sistema de anclaje de cuña y barril**

Se fabrican torones con resistencias últimas mínimas de 17600 kg/cm<sup>2</sup> (grado 250) y 19000 kg/cm<sup>2</sup> (grado 270).

**Tabla 1.3 Propiedades del torón de siete alambres sin revestimiento**

Diámetro nominal		Resistencia a la ruptura		Área nominal del torón		Carga mínima para una elongación de 1%	
pulg	mm	klb	t	pulg <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>	klb	t
<b>17600 kg/cm<sup>2</sup> (grado 250)</b>							
0.250	6.35	9	4.1	0.036	23.22	7.65	3.5
0.313	7.94	14.5	6.6	0.058	37.42	12.3	5.6
0.375	9.53	20	9.1	0.080	51.61	17	7.7
0.438	11.11	27	12.2	0.108	69.68	23	10.4
0.500	12.70	36	16.3	0.144	92.90	30.6	13.9
0.600	15.24	54	24.5	0.216	139.35	45.9	20.8
<b>19000 kg/cm<sup>2</sup> (grado 270)</b>							
0.375	9.53	23	10.4	0.085	54.84	19.55	8.9
0.438	11.11	31	14.1	0.115	74.19	26.55	12.0
0.500	12.7	41.3	18.7	0.153	98.71	35.1	15.9
0.600	15.24	58.6	26.6	0.217	140.00	49.8	22.6

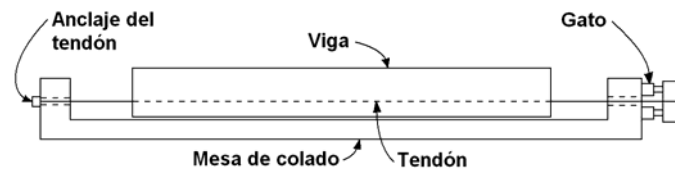
### 1.1.3 Elementos pretensados

Al elemento de concreto presforzado se le aplica un esfuerzo de compresión, antes de someterse a cargas de trabajo, en aquellas zonas donde se desarrollarán esfuerzos de tensión. Esta compresión se aplica mediante la tensión de tendones que se incorporan permanentemente al elemento. Los tendones se forman de alambre de alta resistencia, torones o varillas, que se colocan aisladamente o formando cables. Existen dos métodos básicos para usar tendones: pretensado y postensado.

Los elementos de concreto pretensado se producen tensando tendones entre anclajes externos antes de colar el concreto. Cuando el concreto alcanza la resistencia requerida, se retira la



fuerza de presfuerzo aplicada por gatos, y esa misma fuerza es transmitida por adherencia, del acero al concreto.



**Figura 1.5 Tensado de los tendones en un elemento pretensado**

El pretensado se puede usar en la obra cuando se requiera un gran número de unidades similares prefabricadas, pero normalmente se lleva a cabo en la planta donde ya han sido previamente construidas instalaciones permanentes de tensado.

Uno de los métodos de pretensado consiste en ir tensando en secuencia los tendones. Los tendones de acero se tensan entre unas placas de anclaje situadas en cada extremo de una mesa larga de tensado. Las placas de anclaje son placas gruesas de acero con agujeros por donde los alambres o torones pueden introducirse y anclarse. Dichas placas se encuentran soportadas por grandes secciones de acero ahogadas en un macizo de concreto, llamado muerto de anclaje, en cada extremo de la superficie de colado. La losa en la base puede servir como puntual entre los muertos de anclaje; sin embargo, en las mesas largas de tensado, éstos se construyen lo suficientemente voluminosos con el objeto de que sean estables. En mesas de tensado largas, a veces se tiene muertos de anclaje intermedios dentro de cavidades previamente hechas, de tal manera que se puedan insertar viguetas de acero temporales para que en caso necesario, queden mesas de tensado de menor longitud. En uno de los extremos, la placa de anclaje se apoya directamente en las viguetas de acero soportantes, denominadas apoyo fijo. En el otro extremo, el de tensado, se introducen puntuales de acero temporales entre la placa de anclaje y las viguetas de apoyo. Los extremos de cada unidad tienen un tope que se taladra de acuerdo con la colocación de los tendones requeridos y del diámetro de los alambres o torones utilizados.

Los torones o alambres, en el número proyectado, se arrastran a todo lo largo de la mesa de tensado, sujetándose en los topes y en las placas de anclaje que finalmente se detienen en el apoyo fijo. En el otro extremo de la mesa, el tensado se inicia una vez que hayan sido colocados todos los alambres. Los cables se estiran para levantarlos de la mesa y aplicar la carga. Puede tomarse la lectura de la extensión y compararse con el valor calculado; pero es la fuerza en el cable la que tiene mayor importancia. Enseguida se ancla el alambre y se descarga el gato hidráulico; esta operación se repite con todos los demás alambres. La secuencia del tensado no es muy importante en el pretensado, pero es esencial un tensado preciso.

Otro método de pretensado consiste en que los tendones se tensan simultáneamente. En este caso, los gatos se insertan entre la placa de anclaje y las viguetas de acero en lugar de los puntuales provisionales. Enseguida se accionan los gatos para tensar todos los tendones ya que los gatos se usan también para reducir los esfuerzos y normalmente constituyen parte integrante de la mesa de tensado.

En unidades grandes, donde es importante el peso propio, es conveniente incrementar la excentricidad de los tendones en la zona central del claro. La excentricidad del tendón es la distancia desde el centro del mismo al centro de gravedad de la sección.

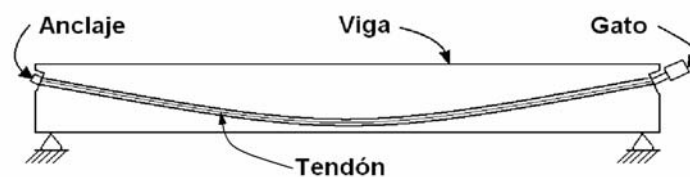
Para los elementos pretensados, la fuerza aplicada por los gatos nunca actúa en el concreto, sino únicamente en los anclajes permanentes de la cama de colado. La tensión se reduce a lo largo de la longitud del cable por la fricción que ocurre en los puntos de cambio de dirección del cable y en las cimbras extremas de la viga. Adicionalmente, la fuerza en el acero se reduce, inmediatamente después de la transferencia, por el acortamiento elástico del concreto. La fuerza aplicada por el gato será la mayor de todas las fuerzas que actuarán en el tendón de acero durante la vida normal del elemento de concreto, y la operación del tensado puede considerarse como una prueba sobre el comportamiento del tendón.

El curado de los elementos de concreto se realiza con vapor de agua cubriéndolos con lonas. Las trayectorias del presfuerzo son comúnmente rectas y en moldes adaptados es posible hacer desvíos para no provocar esfuerzos excesivos en los extremos. En aquellas secciones donde el presfuerzo resulte excesivo, como en los extremos de vigas simplemente apoyadas sin desvío de torones, se debe disminuir la fuerza de presfuerzo y encamisar, enductar o engrasar algunos de ellos.

#### 1.1.4 Elementos postensados

En el caso de los elementos de concreto postensado, se esfuerzan los tendones después de que se ha endurecido el concreto y de que ha alcanzado suficiente resistencia, aplicando la acción de los gatos contra el elemento de concreto mismo.

En el postensado, primero se coloca al concreto fresco dentro del molde y se deja endurecer previo a la aplicación del presfuerzo. El acero puede colocarse ahogado en el concreto con un determinado perfil, permitiendo una distribución efectiva del presfuerzo dentro de la sección. Para evitar la adherencia se introduce el acero dentro de una camisa metálica protectora; o bien puede dejarse ductos dentro del concreto, pasando el acero a través de ellos una vez que ha tenido lugar el endurecimiento. En cuanto se ha alcanzado la resistencia requerida del concreto, se tensa el acero contra los extremos del elemento de concreto y se ancla, quedando así el concreto en compresión.



**Figura 1.6 Tensado de los tendones en un elemento postensado**

Para elementos postensados, la fuerza del gato se aplica realmente en el concreto durante el tensado, pero sólo existe con su valor total en el extremo del elemento donde se realiza el tensado. En algún otro lugar disminuye debido a las pérdidas por fricción. Inmediatamente después de la transferencia, la fuerza de postensado se reduce por el deslizamiento del anclaje.

El aspecto más importante del equipo de postensado consiste básicamente en la mordaza temporal que retiene a los alambres o torones durante y después del tensado. El método de tensado podrá variar, pero la mordaza no, ya que está constituida por un barril y una cuña.

Generalmente la cuña consta de dos o tres piezas con un collar y una grapa de alambre que mantiene a ambos en la misma posición relativa. La cuña tiene ranuras en la superficie en contacto con el tendón, y importante que esté fija alrededor del alambre o torón y dentro del barril en una posición concéntrica, para que todos los segmentos de la cuña se introduzcan a la misma distancia dentro del barril.

### 1.1.5 Tipos de anclaje

Aun cuando también podrían elegirse otros métodos para su clasificación, es conveniente agrupar los sistemas mediante el método que se adopta para el anclaje de los tendones. Se tienen sistemas de tuerca roscada o a base de cuñas. En la primera categoría, se encuentran el BBRV, el Dywidag y el Macalloy. Todos los demás sistemas emplean cuñas: el CCL, VSL, PSC y el SCD.

El sistema BBRV está clasificado como de tuerca roscada, debido a que, en la parte media baja del rango de fuerzas disponibles, es una contratuerca la que se apoya en una placa de acero y transmite la compresión al concreto. En la parte media superior del rango de fuerzas, el esfuerzo se transmite por medio de calzas metálicas que se insertan entre el ancla de tensado y la placa de apoyo. En todos los casos, el elemento básico consiste en un cilindro de acero con un cierto número de agujeros axiales taladrados que acomodan los alambres por separado. El anclaje de cada alambre se efectúa mediante una cabeza redonda preformada. En el anclaje más pequeño, el elemento básico está roscado tanto internamente para recibir una barra de tiro para el tensado con gato, como externamente para recibir la contratuerca. En el anclaje mayor, se proporciona exteriormente una rosca, cuyo único objetivo es recibir una camisa de tiro temporal, que se fija al gato.



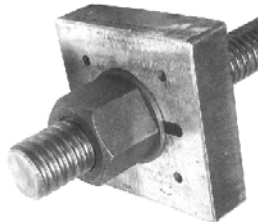
**Figura 1.7 Ancla de tensado BBRV**

El sistema Dywidag utiliza como tendón una barra de acero de aleación. Se emplean dos tipos de barras: lisa y corrugada. En la barra lisa las roscas están laminadas en frío únicamente en los extremos de la barra; y la otra, tienen corrugaciones laminadas en los lados de su longitud. La fuerza se transmite a la placa de apoyo extrema por medio de una tuerca que se atornilla a los extremos de la barra.



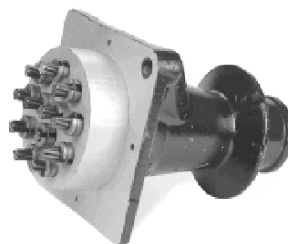
**Figura 1.8 Ancla tipo Dywidag**

El sistema de presfuerzo Macalloy consiste en un sistema de barras lisas con roscas laminadas en sus extremos. La fuerza se transmite al concreto por medio de una tuerca roscada que se comprime contra rondanas de acero colocadas sobre una placa sólida de acero que distribuye el esfuerzo, o sobre una camisa acostillada de hierro forjado, o una placa de acero taladrada, que está situada en un anclaje muerto.



**Figura 1.9 Ancla Macalloy**

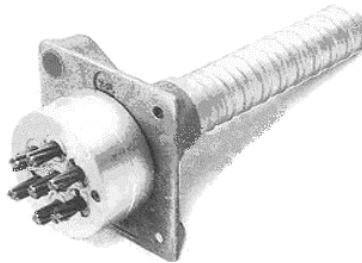
Hay tres sistemas principales CCL, en los cuales se usan torones. Cabco y Miltiforce utilizan exactamente el mismo anclaje colocando a los torones en un arreglo circular, pero en el sistema Cabco los torones se tensan aisladamente, en tanto que en el Multiforce se estiran simultáneamente. El anclaje de tensado comprende cuñas individuales con el fin de aprisionar cada una de los torones, así como una placa de apoyo para transmitir la carga de los torones a la unidad tubular que, a su vez, la transmite al concreto. El sistema Strandforce tiene los torones dispuestos linealmente en una o dos hileras de cinco, en donde cada uno se tensa separadamente. Por lo tanto, se requiere de anclajes para cinco o diez torones que pasan a través de muescas que se anclan directamente en las caras de éstos, usando barriles o cuñas en el extremo tensado, y prisioneros de compresión en el extremo muerto. El prisionero de compresión es una camisa metálica, estampada o extruída al torón.



**Figura 1.10 Ancla tipo CCL**

El sistema de presfuerzo VSL de torones múltiples dispuestos en círculo. Todos los torones se tensan simultáneamente y se anclan por medio de cuñas que se fuerzan dentro de orificios

ahusados en la cabeza de anclaje, la que transmite la fuerza al concreto a través de una placa de acero de apoyo. El gato tiene una cabeza de tensado en el extremo, lejos de la unidad. Cuando se ha logrado la fuerza requerida, se afloja la presión del gato y los torones jalan a las cuñas hacia los orificios ahusados. En el extremo muerto, el torón puede rodear en forma de lazo a una placa curva y llevarlo de nuevo al extremo de tensado o se termina con un aditamento de compresión, presionando sobre una placa de acero.



**Figura 1.11 Ancla tipo VSL**

Los sistemas PSC para tensado múltiple Monogroup y para tensado sencillo Monostrand utilizan cuñas y sus anclajes son idénticos. El anclaje de tensado consiste en una guía de hierro que se ahoga en el concreto, un macizo de anclaje a base de acero forjado y cuñas de tres piezas que anclan el torón. Los torones se colocan en arreglo circular y los orificios en los macizos de anclaje no sólo están ahusados sino taladrados con un ángulo en relación con la disposición de los tendones, de tal manera que evita el enredo de los tendones.

Hay dos sistemas básicos SCD: el circular y el rectangular. En el primero, los torones se arreglan en una disposición circular y pueden tensarse en forma individual, lo que se denomina Monogrip, o tensarse simultáneamente, lo que se conoce Multigrip. En cada caso, el torón se ancla por medio de un tambor de orificios ahusados con cuñas o collares de tres piezas. La placa de distribución y anclaje es la misma para ambos sistemas circulares. El sistema rectangular consiste en una serie de bloques triples, cada uno con tres orificios circulares ahusados que sostienen un collar estándar para anclar individualmente a los torones, los cuales, a su vez, se tensan en forma individual.

## **1.2 PÉRDIDA DE LA FUERZA DE PRESFUERZO**

### **1.2.1 Pérdidas inmediatas y a largo plazo**

Las pérdidas de la fuerza de presfuerzo se pueden agrupar en dos categorías: aquéllas que ocurren inmediatamente durante la construcción del elemento de concreto, y aquéllas que ocurren a largo plazo. Las pérdidas inmediatas en la fuerza de presfuerzo son las debidas al deslizamiento en el anclaje, el acortamiento elástico y la fricción. Como consecuencia de estas pérdidas, la fuerza aplicada por el gato hidráulico se reduce a un valor que se denomina fuerza de presfuerzo inicial.

Las causas principales de las pérdidas a largo plazo son la contracción y la fluencia del concreto bajo el esfuerzo sostenido de compresión. Ambos producen el acortamiento del

elemento de concreto, el cual provoca a su vez una reducción del esfuerzo y la deformación del acero. Adicionalmente, el acero experimenta un relajamiento gradual de esfuerzo al mantenerse bajo una deformación casi constante. La contracción y la fluencia del concreto no son fenómenos independientes, ya que el efecto de la contracción aumenta la magnitud de la fluencia. Las magnitudes de la contracción y fluencia son del mismo orden que la deformación elástica bajo el intervalo normal de esfuerzos, de tal manera que es necesario tomar en cuenta los diversos tipos de deformación. El resultado de los efectos a largo plazo, incluyendo la contracción y la fluencia del concreto, así como el relajamiento del acero, reduce gradualmente la fuerza inicial de presfuerzo a lo que se conoce como la fuerza efectiva de presfuerzo.

La suma de todas las pérdidas inmediatas y dependientes del tiempo, puede ser del orden del 20 al 30% de la fuerza original aplicada por el gato. Las pérdidas reales, las cuales pueden ser mayores o menores que las pérdidas estimadas, no afectan la resistencia última a flexión de una viga presforzada. Sin embargo, las pérdidas sí afectan las características del comportamiento bajo cargas de servicio, tales como la deflexión, la carga de agrietamiento, los espesores de grietas, así como las deformaciones durante la construcción. La sobrestimación de las pérdidas del presfuerzo, lo cual podría parecer estar del lado conservador, puede ser realmente tan perjudicial como una subestimación. La sobrestimación puede conducir al diseñador a especificar mucho preesfuerzo, lo cual resulta en una excesiva deflexión y en movimientos horizontales problemáticos en las estructuras.

### 1.2.2 Deslizamiento del anclaje

En los elementos postensados, cuando se libera la fuerza del gato, la tensión del tendón se transfiere al concreto mediante anclajes. En el momento de transferencia de la fuerza de presfuerzo a los accesorios de anclaje que sujetan el tendón, hay una reducción inmediata en la fuerza a medida en que las cuñas se acomodan dentro de los tendones y a medida en que se deforma el dispositivo de anclaje.

La magnitud de la pérdida por deslizamiento en los anclajes dependerá del sistema particular que se use en el presfuerzo o del dispositivo de anclaje, pudiendo variar de 1 a 8 mm. El fabricante debe proporcionar información acerca de sus dispositivos o se pueden realizar pruebas de laboratorio con el dispositivo seleccionado.

Conocida la característica del deslizamiento del dispositivo de anclaje, la pérdida de esfuerzo por deslizamiento en el anclaje,  $AS$ , se puede calcular con la siguiente expresión:

$$AS = \frac{\Delta l}{l} E_p \quad (1.3)$$

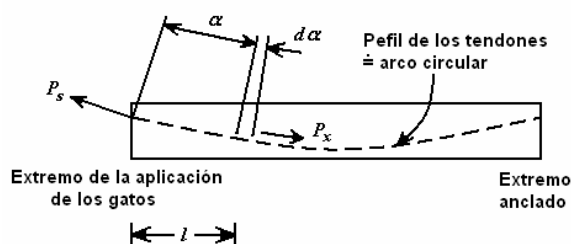
donde  $\Delta l$  es la cantidad de deslizamiento del anclaje,  $l$  es la longitud del tendón y  $E_p$  es el módulo de elasticidad del acero de presfuerzo.

En los elementos pretensados se desprecian estas pérdidas, ya que al ser pequeñas se acostumbra tensar un poco más para absorber el deslizamiento.

### 1.2.3 Fricción

Otra fuente de pérdida inmediata de la fuerza de presfuerzo, que ocurre sólo en los elementos postensados, es la fricción entre el acero de presfuerzo y el ducto por el que pasa éste. La magnitud de esta fuerza es función de la forma del tendón o alineación del ducto y de las desviaciones locales en el alineamiento.

En los elementos postensados, por lo general los tendones se anclan en un extremo y se tensan mediante gatos desde el otro; aunque también se pueden tensar por ambos lados. A medida que el acero se desliza a través del ducto, se desarrolla la fricción, por lo que la tensión en el extremo anclado es menor que la tensión en el gato. Las fuerzas de fricción se consideran función de dos efectos: la curvatura intencional del tendón y la curvatura no intencional de la trayectoria especificada del ducto.



**Figura 1.12 Curvatura de un tendón en un elemento postensado**

La pérdida de esfuerzo debida a la fricción del tendón y el ducto según las especificaciones de la AASHTO es:

$$FR = f_{pj} \left( 1 - e^{-(Kl + \mu\alpha)} \right) \quad (1.4)$$

Cuando  $(Kl + \mu\alpha) \leq 0.30$ , la siguiente ecuación puede ser usada:

$$FR = f_{pj} (Kl + \mu\alpha) \quad (1.5)$$

donde  $f_{pj}$  es el esfuerzo en el acero de presfuerzo al aplicar los gatos, en  $\text{kg/cm}^2$ ;  $K$  es un coeficiente por curvatura no intencional del tendón, en  $1/\text{m}$ ;  $l$  es la longitud del tendón, en  $\text{m}$ ;  $\mu$  es un coeficiente por curvatura, en  $1/\text{rad}$ , y  $\alpha$  es el ángulo central que forma el tendón, en radianes.

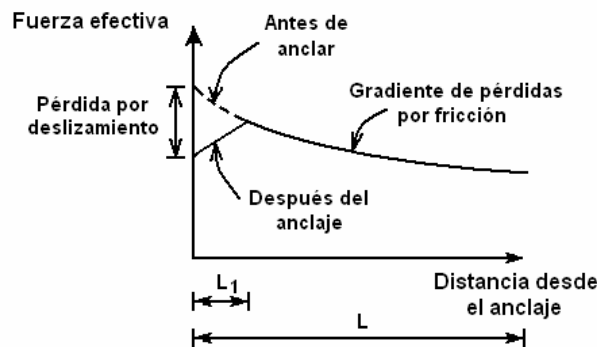
Los valores de  $K$  y  $\mu$  deben basarse en datos experimentales para los materiales especificados. En ausencia de dichos datos, pueden tomarse estimaciones como las que proporciona la AASHTO y que se presentan en la Tabla 1.4.

El tendón que se tensa en un extremo con la fuerza de gato, tendrá fricción con el ducto de tal forma que el esfuerzo en el tendón variará desde el plano del gato hasta la longitud del claro.

Se puede tensar por los dos lados, sin embargo, por lo general esto no resulta económico debido a que se incrementa el costo por el dispositivo de anclaje adicional, la mano de obra y el tiempo adicional.

**Tabla 1.4 Coeficientes de fricción para tendones postensados**

Tipo de acero	Tipo de ducto	Coefficiente por curvatura no intencional del tendón K (1/m)	Coefficiente por curvatura $\mu$ (1/rad)
Alambre o torón	Metal galvanizado rígido y semirrígido	0.0007	0.15-0.25
	Polietileno	0.0007	0.23
	Tubo de acero rígido	0.0007	0.25
Varilla de alta resistencia	Metal galvanizado	0.0007	0.15



**Figura 1.13 Pérdida debida a la fricción en el tensado de un solo extremo**

### 1.2.4 Acortamiento elástico

Cuando la fuerza de presfuerzo se transfiere a un elemento de concreto, existirá un acortamiento elástico en el concreto a medida en que se comprime. Éste puede determinarse fácilmente por la propia relación esfuerzo-deformación del concreto. La cantidad de acortamiento elástico que contribuye a las pérdidas depende del método de presfuerzo.

Para elementos pretensados, en los cuales el tendón se encuentra adherido al concreto, al momento de la transferencia, el cambio en la deformación del acero es el mismo que el de la deformación de compresión del concreto al nivel del centroide del acero. Para los elementos postensados, en los cuales se tensan al mismo tiempo a todos los tendones, la deformación elástica del concreto ocurre cuando se aplica la fuerza en el gato, y existe un acortamiento inmediato por lo que no existen pérdidas. Esto no ocurre si hay dos o más tendones que se tensan en secuencia.

La pérdida de esfuerzo debida al acortamiento elástico del elemento de concreto, de acuerdo a las especificaciones AASHTO, es para elementos pretensados:

$$ES = \frac{E_p}{E_{ci}} f_{cir} \quad (1.6)$$

En elementos postensados la pérdida por acortamiento elástico varía desde cero, si todos los tendones se tensan simultáneamente, hasta la mitad del valor calculado para el caso de pretensado, si varios pasos de tensado tienen lugar:



$$ES = 0.5 \frac{E_p}{E_{ci}} f_{cir} \quad (1.7)$$

donde  $E_p$  es el módulo de elasticidad de los torones del acero de presfuerzo,  $E_{ci}$  es el módulo de elasticidad del concreto en la transferencia del esfuerzo,  $f_{cir}$  es el esfuerzo del concreto en el centro de gravedad del acero de presfuerzo debido a la fuerza de presfuerzo y a la carga muerta de la viga inmediatamente después de la transferencia en la sección de máximo momento. Se puede suponer que  $E_p = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .

El valor de  $E_{ci}$ , en  $\text{kg/cm}^2$ , se puede obtener con:

$$E_{ci} = 0.1365 w_c^{1.5} \sqrt{f'_{ci}} \quad (1.8)$$

donde  $w_c$  es peso volumétrico del concreto en  $\text{kg/m}^3$  y  $f'_{ci}$  es la resistencia del concreto en el momento de la transferencia en  $\text{kg/cm}^2$ .

En general el valor de  $f_{cir}$  se puede calcular como:

$$f_{cir} = -\frac{P_i}{A_c} - \frac{P_i e^2}{I_c} + \frac{M_o e}{I_c} \quad (1.9)$$

donde  $P_i$  es la fuerza de pretensado inicial,  $A_c$  es el área de la sección transversal de concreto,  $e$  es la excentricidad del centro de gravedad del acero con respecto al centro de gravedad del concreto,  $M_o$  es el momento debido al peso propio del elemento de concreto,  $I_c$  es el momento de inercia de la sección de concreto.

### 1.2.5 Contracción

La pérdida de esfuerzo debida a la contracción del elemento de concreto, conforme a la AASHTO, es en elementos pretensados:

$$SH = 1190 - 10.5 H \quad (1.10)$$

En elementos postensados:

$$SH = 0.8 (1190 - 10.5 H) \quad (1.11)$$

donde  $SH$  está en  $\text{kg/cm}^2$  y  $H$  es el porcentaje de humedad relativa promedio anual del ambiente.

Por otra parte, en caso de no conocerse  $H$ , este se puede estimar con los valores proporcionados en la Tabla 1.5.

**Tabla 1.5 Estimación del porcentaje de humedad relativa según el tipo de clima**

Tipo de clima	H(%)
Muy húmedo	90
Humedad intermedia	70
Seco	40

### 1.2.6 Fluencia

La pérdida de esfuerzo debida a la fluencia del elemento de concreto, siguiendo las especificaciones de la AASHTO, es:

$$CR_c = 12f_{cir} - 7f_{cds} \quad (1.12)$$

donde  $f_{cir}$  es el esfuerzo del concreto en el centro de gravedad del acero de presfuerzo debido a la fuerza de presfuerzo y a la carga muerta de la viga inmediatamente después de la transferencia en la sección de máximo momento; y  $f_{cds}$  es el esfuerzo del concreto en el centro de gravedad del acero de presfuerzo debido a toda la carga muerta exceptuando la carga muerta presente en el momento en que es aplicada la fuerza de presfuerzo.

### 1.2.7 Relajación

La pérdida de esfuerzo debida a la relajación del tendón, establecida en la AASHTO, en elementos pretensados, con torones de 17600 kg/cm<sup>2</sup> a 19000 kg/cm<sup>2</sup> y relevados de esfuerzos, es:

$$CR_s = 1400 - 0.4 ES - 0.2 (SH + CR_c) \quad (1.13)$$

Para elementos pretensados, con torones de 17600 kg/cm<sup>2</sup> a 19000 kg/cm<sup>2</sup> y de baja relajación:

$$CR_s = 350 - 0.1 ES - 0.05 (SH + CR_c) \quad (1.14)$$

En elementos postensados, con torones de 17600 kg/cm<sup>2</sup> a 19000 kg/cm<sup>2</sup> y relevados de esfuerzos:

$$CR_s = 1400 - 0.3 FR - 0.4 ES - 0.2 (SH + CR_c) \quad (1.15)$$

En elementos postensados, con torones de 17600 kg/cm<sup>2</sup> a 19000 kg/cm<sup>2</sup> y de baja relajación:

$$CR_s = 350 - 0.07 FR - 0.1 ES - 0.05 (SH + CR_c) \quad (1.16)$$

Para alambre de 16800 kg/cm<sup>2</sup>:

$$CR_s = 1260 - 0.3 FR - 0.4 ES - 0.2 (SH + CR_c) \quad (1.17)$$

Para varillas de 10150 kg/cm<sup>2</sup> a 11200 kg/cm<sup>2</sup>:

$$CR_s = 210 \quad (1.18)$$

donde  $CR_s$ ,  $FR$ ,  $ES$ ,  $SH$  y  $CR_c$ , están en kg/cm<sup>2</sup>.

## CAPÍTULO 2

### CONTRACCIÓN DEL CONCRETO

#### 2.1 CARACTERÍSTICAS

Los cambios volumétricos del concreto pueden ocurrir como expansiones o contracciones; si el elemento de concreto no tiene restricciones para cambiar de volumen el cambio se produce sin generar esfuerzos. Sin embargo, en la práctica es común que los elementos estructurales tengan estas restricciones para expandirse o contraerse, de manera que una expansión genera esfuerzos de compresión y una contracción los produce de tensión. Debido a la poca capacidad del concreto para resistir esfuerzos de tensión, las contracciones son los cambios de volumen más desfavorables, ya que producen agrietamientos, al generar esfuerzos que sobrepasan la resistencia a tensión del concreto.

Los cambios volumétricos se manifiestan en tres dimensiones; no obstante, por conveniencia se representan como cambios lineales y se expresan en deformaciones unitarias longitudinales. En condiciones ordinarias, la magnitud de estos cambios en el concreto suelen ser de un orden tal que se aproxima su medición a millonésimas de m/m.

La contracción en el concreto es el cambio de volumen debido al secado y a los cambios químicos que dependen del tiempo y de las condiciones de humedad, pero no de los esfuerzos. La velocidad de contracción disminuye rápidamente con el tiempo: del 14 al 34% de la contracción a 20 años, ocurre en dos semanas; del 40 al 80% de la contracción a 20 años, ocurre en 3 meses; del 66 al 85% de la contracción a 20 años, ocurre en el intervalo de un año.

En la Tabla 2.1 se presentan los principales tipos de cambios volumétricos que se pueden presentar en el concreto antes, durante y después del fraguado y sujeto a las distintas condiciones de exposición al ambiente.

Al mezclarse el cemento y el agua para constituir la pasta de cemento, se inician las reacciones químicas conocidas conjuntamente como hidratación del cemento. Debido a que estas reacciones son exotérmicas, se produce una liberación de calor que puede ocasionar en los primeros minutos una ligera expansión en la pasta recién mezclada. A continuación de esta pequeña expansión suele ocurrir una contracción que es originada por la pérdida de agua ya sea por evaporación o por otras causas. Esta contracción se conoce como contracción plástica, debido a que se presenta cuando el concreto se encuentra en su fase plástica o de fraguado.

Si el concreto está en condiciones de saturación de agua, suele tener consecutivamente dos formas de expansión, una rápida y otra gradual. Una primera expansión del concreto en curso de fraguar ocurre en el término de pocas horas a partir de que concluye el sangrado, y se denomina expansión postsangrado. El origen de esta expansión se considera inherente a las acciones físicas y químicas que se producen durante la fase inicial de fraguado, y se relaciona con el crecimiento de la película de gel alrededor de los granos de cemento. Una segunda expansión que se manifiesta en el concreto ya fraguado y en proceso de endurecimiento a lo

largo del tiempo que permanece en condiciones de saturación, es motivada por el agua que es absorbida gradualmente por el gel de cemento.

**Tabla 2.1 Cambios volumétricos que se pueden presentar en el concreto**

<b>Etapas antes y durante el fraguado del concreto</b>		
Exposición	Causa	Manifestación
Al aire	Asentamiento, sangrado y pérdida inicial de agua	Contracción plástica
Sumergido	Efectos físicos y químicos de la hidratación inicial del cemento	Expansión postsangrado
	Consumo de agua por la hidratación del cemento	Contracción autógena
<b>Etapa después del fraguado del concreto</b>		
Exposición	Causa	Manifestación
Al aire	Continuación de la pérdida de agua	Contracción por secado
	Generación de calor interno por la hidratación del cemento	Expansión térmica inicial al acumularse el calor, y contracción posterior al disiparse éste
	Variaciones externas de temperatura (ambiente y otras causas)	Expansión al calentarse y contracción al enfriarse
	Acción del bióxido de carbono atmosférico	Contracción por carbonatación
Sumergido	Consumo de agua por la hidratación del cemento	Contracción autógena
	Absorción de agua por el gel de cemento	Hinchamiento por saturación

Durante y después del fraguado del concreto, cuando hay una fuente de aprovisionamiento de agua, la hidratación continua produce expansión, pero si no se permite la entrada o salida de agua de la pasta de cemento, se puede producir un cambio de volumen que se conoce como contracción autógena. La contracción autógena tiende a aumentar a grandes temperaturas con alto contenido de cemento y, posiblemente, también con cementos más finos. La contracción es relativamente pequeña y, para propósitos prácticos, no es necesario distinguirla de la contracción causada por el secado del concreto. Ésta última se conoce como contracción por secado y normalmente incluye la causada por los cambios autógenos.

El concreto posee un contenido de agua, independientemente de la absorbida por los agregados, que depende de su porosidad global, y que puede considerarse en cuatro estados de acuerdo con el grado de dificultad para ser extraída del concreto por evaporación. El primero de estos estados es el agua libre de absorción, que ocupa básicamente macroporos y discontinuidades, y que puede evaporarse con relativa facilidad en cualquier atmósfera no saturada (con humedad relativa menor de 98%). El siguiente de los estados es el agua capilar o de poro, que se ubica en los conducto capilares y poros externos al gel de cemento a distancias mayores de aproximadamente 300 nm de la superficie de gel, por lo cual se halla débilmente atraída y retenida por ésta, de manera que puede evaporarse a humedades relativas del orden del 50%. El tercer estado del agua en el concreto es el agua de gel, constituida por moléculas de agua físicamente retenidas por absorción en la superficie interna de los microporos que forman parte del gel de cemento, y que se halla firmemente adherida a tales superficies, por lo cual para evaporarse requiere condiciones de más baja humedad relativa (de menos de 40%, aproximadamente). El último de estos estados del agua considerados es el agua de hidratación, que se combina químicamente con el cemento para dar lugar a la formación de los silicatos de

calcio hidratados, que constituye el elemento sólido del gel de cemento, y la cual representa una forma de agua que no es evaporable en condiciones ambientales.

La pérdida por secado del agua libre de absorción y del agua capilar produce contracciones que suelen ser reversibles, en tanto que la remoción del agua de gel tiende a provocar contracciones permanentes en la pasta de cemento hidratada por efecto de su cambio volumétrico. Ambas formas de contracción de la pasta repercuten necesariamente en el concreto, que de este modo experimenta la llamada contracción por secado, y que corresponde a uno de los cambios más importantes en el concreto bajo condiciones de exposición ambientales que la propicien.

Además de la contracción que se produce por secado, el concreto presenta contracción por carbonatación, y muchos de los datos experimentales relacionados con la contracción por secado toman en cuenta los efectos de la carbonatación. Sin embargo, la naturaleza de la contracción por secado y de la contracción por carbonatación es muy diferente.

La carbonatación es el proceso en el cual el bióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ), que se encuentra presente en la atmósfera, reacciona en presencia de humedad con los minerales del cemento. El  $\text{CO}_2$  externo en forma de gas se combina con la humedad del concreto para convertirse a la forma de ácido carbónico y reacciona así, principalmente, con el hidróxido de calcio ( $\text{Ca}(\text{OH})_2$ ), que se forma durante la hidratación del cemento, para formar carbonato de calcio ( $\text{CaCO}_3$ ). Otros componentes del cemento también reaccionan y forman sílice hidratada, alúmina y óxido férrico.

La carbonatación es un fenómeno progresivo que responde a un proceso de difusión del  $\text{CO}_2$  a través del concreto, a partir de la superficie expuesta de la estructura. Esto es, al comenzar el proceso, el  $\text{CO}_2$  del aire que penetra en los poros superficiales del concreto reacciona rápidamente con los hidróxidos, y así este aire queda con deficiencia de  $\text{CO}_2$ . A continuación, para restablecer el equilibrio, se inicia un movimiento de moléculas de  $\text{CO}_2$  del aire exterior hacia el aire que ocupa los poros superficiales del concreto, con lo cual hay una reposición de  $\text{CO}_2$  que propicia un nuevo avance en la carbonatación, y así sucesivamente. En condiciones en que los efectos son moderados este proceso avanza con lentitud, de modo que aún al cabo de varios años su penetración en el concreto puede medirse en milímetros; sin embargo, en determinadas circunstancias puede penetrar varios centímetros, llegando a afectar todo el espesor del recubrimiento de concreto sobre el acero de refuerzo y presfuerzo.

La rapidez con que evoluciona la carbonatación, y la consiguiente contracción y disminución de alcalinidad del concreto, depende de manera sustancial del contenido de  $\text{CO}_2$  en el aire, de la permeabilidad del concreto y del grado de humedad en el ambiente y en el concreto. El contenido de  $\text{CO}_2$  en el aire atmosférico es del orden de 0.03% por volumen y puede aumentar hasta diez veces en el aire de las ciudades. La permeabilidad del concreto en general depende de su porosidad, y ésta a su vez depende de la relación agua/cemento con que se elabora; los concretos que se elaboran con altas relaciones agua/cemento resultan más porosos y permeables, y por lo tanto el aire penetra más fácilmente en ellos y tienen tendencia a sufrir los efectos de la carbonatación. El grado de humedad ambiental, que repercute directamente en el contenido de humedad del concreto, afecta el proceso de carbonatación, ya que en condiciones de baja humedad el hidróxido de calcio reacciona más lentamente con el  $\text{CO}_2$ ,

debido a que no existe en el concreto suficiente agua para que se forme ácido carbónico, y en consecuencia la carbonatación también evoluciona con más lentitud; por otra parte, en condiciones de alta humedad el proceso de carbonatación también se hace más lento, lo cual se atribuye a la presencia de agua libre en el interior de los poros del concreto, ya que la velocidad de difusión del  $\text{CO}_2$  a través del agua es menor que a través del aire.

## 2.2 FACTORES QUE INFLUYEN EN LA CONTRACCIÓN

El concreto en estado endurecido tiene cambios de forma y dimensiones a través del tiempo producidos por factores que dependen de las propiedades de este material y de los que resultan de la geometría del elemento estructural y de las condiciones ambientales de servicio. En la Tabla 2.2 se presentan éstos factores que determinan la contracción.

**Tabla 2.2 Factores que influyen en la magnitud de la contracción**

Factores	
Características de los componentes	Cemento Agregados Aditivos
Composición de la mezcla	Relación agua/cemento Proporción de la pasta Revenimiento
Propiedades del concreto endurecido	Porosidad Módulo de elasticidad Resistencia
Características de la estructura	Forma y dimensiones de los elementos estructurales
Condiciones de curado	Humedad Temperatura Duración del curado
Condiciones de servicio	Humedad relativa Temperatura

### 2.2.1 Características de los componentes

Las propiedades del cemento no influyen en gran medida en la contracción por secado del concreto, una contracción mayor de la pasta de cemento sola no significa necesariamente mayor contracción del concreto hecho con determinado cemento. La composición química del cemento no afecta la contracción por secado, excepto en el caso de cementos deficientes en yeso en los que se observa un aumento en la contracción ya que en la reacción inicial que se establece en el fraguado determina la estructura de la pasta hidratada.

La composición química del cemento afecta la magnitud de la contracción por carbonatación, por ejemplo, la contracción es relativamente pequeña para cementos ricos en silicato tricálcico, y pobre en los álcalis.

Los agregados son los que ejercen la influencia más importante, puesto que restringen la cantidad de contracción que puede ocurrir realmente. Los agregados duros y más densos de baja absorción y módulo de elasticidad alto exhibirán una contracción menor. Por lo general,

el agregado ligero produce mayor contracción, principalmente porque este agregado, que tiene un módulo de elasticidad menor, ofrece menos restricción a la contracción potencial de la pasta de cemento. El concreto que contenga caliza dura se supone que tiene una contracción menor que el que contiene granito, basalto y arenisca de igual grado, aproximadamente en ese orden.

El tamaño y la granulometría de los agregados no influyen por sí mismos en la magnitud de la contracción, pero los agregados de un tamaño mayor permiten utilizar mezclas más pobres y, por ello, presentan menor contracción.

La información sobre la influencia de los aditivos en la contracción no siempre es precisa, debido a que hay numerosos factores de variación que hacen difícil establecer condiciones totalmente comparables, y también porque el efecto de los aditivos suele ser muy sensible a los cambios de la composición del cemento, la temperatura de hidratación, el contenido de agua de la mezcla y a otras condiciones. Por lo tanto, cuando se usen aditivos en el concreto, y la contracción del concreto sea parte importante en el funcionamiento de la estructura, lo que se recomienda es determinar la contracción en especímenes fabricados con el concreto que se vaya a utilizar.

### **2.2.2 Composición de la mezcla**

La influencia de la relación agua/cemento de la pasta sobre su contracción por secado es directa, pues a medida que aumenta dicha relación también se incrementa la contracción. Sin embargo no hay una verdadera proporcionalidad entre ambas variables cuando sus efectos se trasladan al concreto, ya que en algunos casos se puede producir una disminución en la contracción como consecuencia de la disminución de la pasta de cemento en el concreto, aún al aumentar la relación agua/cemento. La proporcionalidad se manifiesta al relacionar la contracción por secado del concreto con su contenido unitario de agua de mezcla. Por lo tanto, para una contracción mínima, el contenido unitario de agua de mezcla y la proporción de la pasta de cemento deberán ser también mínimos. Por lo tanto los agregados de tamaño mayor, bien graduados, para obtener el mínimo de vacíos necesitarán una cantidad menor de pasta de cemento, y la contracción será menor.

### **2.2.3 Propiedades del concreto endurecido**

La pasta de cemento hidratada posee microporos, poros y conductos capilares; mientras que en el concreto, su porosidad puede incluir macroporos y discontinuidades debido a un exceso de asentamiento y sangrado o como resultado de una deficiente colocación y compactación. Por lo tanto, la porosidad global del concreto comprende microporos, poros, conductos capilares, macroporos y discontinuidades, cuyas dimensiones suelen abarcar un amplio intervalo del cual su límite inferior se mide en nanómetros y el límite superior en milímetros.

El contenido de agua que posee el concreto depende de su porosidad global: a mayor porosidad mayor contracción por secado. Esto es debido a que en el concreto húmedo, cuando se expone al aire, primero se evapora el agua libre de absorción en la superficie expuesta y después el agua capilar, originándose un gradiente de humedad a través del concreto que provoca el movimiento de agua desde las zonas húmedas hacia las zonas secas, conforme a un

proceso de difusión. Si la acción de secado continúa, se llega a una condición en la que las moléculas de agua absorbidas por el gel de cemento comienzan a fluir hacia la superficie expuesta, para evaporarse posteriormente. Debido a la continuidad que existe en la gradación de tamaños de los espacios que conforman la porosidad global del concreto, se establece así una pérdida continua y gradual de agua interna del concreto por efecto del secado que favorece a la contracción.

La permeabilidad del concreto depende de su porosidad, y ésta a su vez depende del contenido de agua de mezcla. Los concretos que se elaboran con altos contenidos de agua de mezcla resultan más porosos, permeables y el aire tiene mayor facilidad de introducirse en ellos, por lo que tienen mayor contracción por carbonatación.

#### **2.2.4 Características de la estructura**

Debido a que la superficie del concreto es la que se seca, la magnitud de la contracción varía considerablemente de acuerdo con el tamaño y con la forma del espécimen, y es una función de la relación superficie/volumen. Parte del efecto ejercido por el tamaño se puede deber a la pronunciada carbonatación de los especímenes pequeños. La contracción observada en especímenes de concreto disminuye al aumentar el tamaño del espécimen. La forma del elemento de concreto también se puede tomar en cuenta si se considera la contracción como función de la relación volumen/superficie del elemento. El efecto de la forma es secundario, por ejemplo, los elementos en forma de *I* muestran menos contracción que los cilindros con la misma relación volumen/superficie. Ésta diferencia en la magnitud de la contracción del espécimen, que se puede explicar en términos de la distancia media que debe recorrer el agua hacia la superficie, no es significativa para propósitos de diseño.

#### **2.2.5 Condiciones de curado**

El curado prolongado en agua retarda la contracción y su influencia sobre la magnitud de la contracción es pequeña. En lo que se refiere a la pasta de cemento pura, mientras mayor sea la cantidad de cemento hidratado, menor será el número de granos de cemento no hidratados que restrinjan la contracción; por lo cual un curado prolongado da como resultado mayor contracción; sin embargo la pasta de cemento se vuelve más resistente con la edad y puede obtener más fricción dentro de su tendencia a contraerse sin agrietarse por ello. Si llega a haber agrietamiento en torno a las partículas de agregado, aparentemente disminuye la contracción medida en un espécimen de concreto. El concreto bien curado se contrae con más rapidez y, por lo tanto, es menor la liberación de esfuerzos de contracción causados por la fluencia; también sucede que, ya que el concreto es más resistente, tiene menor fluencia.

#### **2.2.6 Condiciones de servicio**

La humedad y la temperatura ambiental influyen en la contracción por secado del concreto, siendo más importante el efecto que produce la humedad porque es determinante en la magnitud de la contracción, en tanto que el efecto de la temperatura modifica la velocidad con que se contrae el concreto por secado en sus primeras edades. La magnitud de la contracción disminuye conforme aumenta la humedad relativa del medio, hasta llegar a la condición de humedad de saturación en la cual el concreto no se contrae sino que se expande.



## 2.3 MODELOS DE ANÁLISIS DE LA CONTRACCIÓN

### 2.3.1 Método de la ACI-209 R-82

El desarrollo de la contracción por secado en el tiempo bajo carga  $t$ , en días, para concreto con curado húmedo es expresado como:

$$\varepsilon_{sh t} = \frac{t}{35 + t} \varepsilon_{sh u} \quad (2.1)$$

Para concreto curado con vapor:

$$\varepsilon_{sh t} = \frac{t}{55 + t} \varepsilon_{sh u} \quad (2.2)$$

La deformación unitaria final por contracción  $\varepsilon_{sh u}$  puede ser estimada como:

$$\varepsilon_{sh u} = 780 \times 10^{-6} \gamma_{cp} \gamma_H \gamma_d \gamma_S \gamma_F \gamma_{ce} \gamma_{ac} \quad (2.3)$$

$\gamma_{cp}$  es el factor de corrección para periodos de curado diferentes de siete días, véase la Tabla 2.3.

**Tabla 2.3 Factor de corrección para el periodo de curado inicial**

<b>Días:</b>	1	3	7	14	28	90
$\gamma_{cp}$ :	1.2	1.1	1.0	0.93	0.86	0.75

$\gamma_H$  es el factor de corrección que estima la contribución de la humedad relativa  $H$ , en porcentaje:

$$\gamma_H = 1.40 - 0.01 H \quad 40 \leq H \leq 80 \quad (2.4)$$

$$\gamma_H = 3.0 - 0.03 H \quad 80 \leq H \leq 100 \quad (2.5)$$

$\gamma_d$  es el factor de corrección para el espesor promedio  $d$  del espécimen de concreto. Para  $50 \leq d \leq 150$  mm, véase la Tabla 2.4:

**Tabla 2.4 Factor de corrección para el espesor del espécimen de concreto**

<b><math>D</math> (mm):</b>	50	75	100	125	150
$\gamma_d$	1.35	1.25	1.17	1.08	1.0

Cuando  $150 \leq d \leq 380$  mm:

$$\gamma_d = 1.23 - 0.00015 d \quad \text{para } t \leq 365 \text{ días} \quad (2.6)$$

$$\gamma_d = 1.17 - 0.00114 d \quad \text{para } t > 365 \text{ días} \quad (2.7)$$

Si se considera la relación volumen/superficie expuesta al secado del elemento estructural  $V/S$ , en mm, en vez del espesor del espécimen de concreto:

$$\gamma_d = 1.2 e^{-0.00472 V/S} \quad (2.8)$$

$\gamma_s$  es el factor de corrección para la consistencia  $S$ , en mm, del concreto fresco:

$$\gamma_s = 0.89 + 0.00161 S \quad (2.9)$$

$\gamma_F$  es el factor de corrección para el porcentaje  $F$  de la relación en peso del contenido de partículas finas y el agregado total:

$$\gamma_F = 0.30 + 0.014 F \quad F \leq 50\% \quad (2.10)$$

$$\gamma_F = 0.9 + 0.002 F \quad F > 50\% \quad (2.11)$$

$\gamma_{ce}$  es el factor de corrección que toma en cuenta el contenido de cemento  $CE$ , en  $\text{kg/m}^3$ , del concreto:

$$\gamma_{ce} = 0.75 + 0.00061 CE \quad (2.12)$$

$\gamma_{ac}$  es el factor de corrección para el porcentaje  $AC$  del contenido de aire en el volumen del concreto:

$$\gamma_{ac} = 0.95 + 0.008 AC \quad \geq 1.0 \quad (2.13)$$

### 2.3.2 Método del CEB-FIP

Este código propone la predicción de la contracción con la siguiente ecuación:

$$\varepsilon_{sh\infty} = \beta_H \beta_F \beta_d \beta_\rho \beta_{td} \quad (2.14)$$

$\beta_H$  es el factor de corrección para la humedad relativa  $H$ , véase la Tabla 2.5:

**Tabla 2.5 Factor de corrección para la humedad relativa**

$H$ :	40	50	60	70	80	90	100
$\beta_H \times 10^6$	410	380	320	270	199	100	0

$\beta_F$  es el factor de corrección para la composición del concreto, véase la Tabla 2.6:

**Tabla 2.6 Factor de corrección para la composición del concreto**

Relación agua/cemento	Contenido de cemento ( $\text{kg/m}^3$ )			
	500	400	300	200
0.4	1.0	0.80	—	—
0.5	1.43	1.20	0.90	—
0.6	—	1.60	1.19	0.70
0.7	—	—	1.45	1.0
0.8	—	—	1.80	1.25

$\beta_d$  es el factor de corrección basado en el espesor  $d$ , en cm, del elemento estructural, véase la Tabla 2.7:

**Tabla 2.7 Factor de corrección para el espesor del elemento**

$d$ (cm):	100	200	300	400	500
$\beta_d$ :	1.10	0.80	0.65	0.55	0.45

$\beta_\rho$  es el factor de corrección basado en el porcentaje  $\rho$  de acero de refuerzo longitudinal, véase la Tabla 2.8:

**Tabla 2.8 Factor de corrección para el porcentaje del acero de refuerzo longitudinal**

$\rho$ :	0	1	2	3	4	5
$\beta_\rho$ :	1.0	0.85	0.70	0.62	0.3	—

$\beta_{td}$  es el factor de corrección basado en el espesor del espécimen  $d$  y la edad de carga  $t_{la}$  del concreto, véase la Tabla 2.9:

**Tabla 2.9 Factor de corrección para el espesor del espécimen y la edad de carga del concreto**

$d$ (mm)	Edad de carga (días)				
	1	10	100	1000	10000
50	0.17	0.4	0.80	0.90	—
100	—	0.26	0.66	0.88	—
200	—	0.10	0.43	0.85	—
400	—	—	0.27	0.78	—
800	—	—	0.08	0.50	0.87

### 2.3.3 Modelo de Hilsdorf

El método de Hilsdorf supone que los incrementos en la relación agua/cemento y en la humedad relativa son los que aumentan la contracción. Ésta relación puede ser expresada como:

$$\varepsilon_{sh\infty} = \beta_1 p \sqrt{\frac{100 - H}{100}} \quad (2.15)$$

donde  $\varepsilon_{sh\infty}$  es la contracción final del concreto,  $\beta_1$  es un coeficiente de proporcionalidad,  $p$  es la porosidad total y  $H$  es el porcentaje de humedad relativa.

## CAPÍTULO 3

### FLUENCIA DEL CONCRETO

#### 3.1 CARACTERÍSTICAS

La fluencia es la propiedad que tienen muchos materiales de continuar deformándose a través de lapsos considerables de tiempo bajo un estado constante de esfuerzo o carga. La velocidad del incremento de la deformación es grande al principio, pero disminuye con el tiempo, hasta que después de muchos meses alcanza un valor prácticamente constante. En los elementos de concreto presforzado, la fuerza de compresión que produce la fluencia del concreto no es constante, sino que disminuye con el paso del tiempo, debido al relajamiento del acero y a la contracción del concreto, así como también debido a los cambios en longitud asociados con la fluencia misma.

En condiciones normales de carga, la deformación instantánea registrada depende de la velocidad de aplicación de la carga y, en consecuencia, no sólo incluye la deformación elástica, sino también cierta fluencia. Es difícil distinguir con exactitud entre la deformación elástica inmediata y la fluencia temprana, pero esto no es de importancia práctica puesto que lo que importa es la deformación total inducida por la aplicación de la carga. La fluencia se toma sencillamente como un aumento de deformación superior a la deformación elástica inicial. Se puede considerar que la fluencia consta de una fluencia básica, que es producida en el concreto sometido a condiciones en que no hay movimiento de humedad de entrada o salida hacia el ambiente, y una fluencia de secado.

Para obtener una idea de la magnitud de la fluencia, se suele medir los cambios de deformación que ocurren al pasar el tiempo en especímenes sujetos a esfuerzo constante y almacenados en determinadas condiciones. La velocidad de fluencia del concreto disminuye rápidamente con el tiempo: del 18 al 35% de la fluencia a veinte años, ocurre en dos semanas; del 40 al 70% de la fluencia a veinte años, ocurre en tres meses; del 64 al 83% de la fluencia a veinte años, ocurre en un año.

La fluencia afecta las deformaciones y deflexiones, y con frecuencia también la distribución de esfuerzos, pero sus efectos varían de acuerdo con el tipo de estructura. La fluencia tiene el efecto favorable de aliviar las concentraciones de esfuerzos en el concreto.

En el concreto masivo, la fluencia misma puede ser la causa del agrietamiento, cuando la masa de concreto pasa por los ciclos de cambio de temperatura producidos por el desarrollo del calor de hidratación y el subsiguiente enfriamiento.

Otro ejemplo de los efectos adversos de la fluencia es su influencia en la estabilidad de la estructura, debido al aumento de la deformación. Aunque la fluencia no afecta la resistencia final de la estructura, sus efectos pueden ser graves en lo que se refiere al comportamiento de la estructura.

## 3.2 FACTORES QUE INFLUYEN EN LA FLUENCIA

El concreto endurecido sufre cambios de forma y dimensiones originados por factores que dependen de la naturaleza de este material y de factores que resultan de la geometría del elemento estructural y de las condiciones ambientales. En la Tabla 3.1 se presentan los factores que influyen en la magnitud de la fluencia.

**Tabla 3.1 Factores que influyen en la magnitud de la fluencia**

Factores	
Características de los componentes	Cemento Agregados Aditivos
Composición de la mezcla	Relación agua/cemento Proporción de la pasta Revenimiento
Propiedades del concreto endurecido	Porosidad Módulo de elasticidad Resistencia
Características de la estructura	Forma y dimensiones de los elementos estructurales
Condiciones de curado	Humedad Temperatura Duración del curado
Condiciones de servicio	Humedad relativa Temperatura
Historia de carga	Edad de carga Duración de la carga sostenida
Grado de esfuerzo	Nivel del esfuerzo aplicado

### 3.2.1 Características de los componentes

Para analizar el comportamiento mecánico del concreto endurecido, se le considera integrado por la pasta de cemento y los agregados. En las deformaciones del concreto bajo carga sostenida existe una diferencia entre el comportamiento de la pasta de cemento y los agregados.

El tipo de cemento afecta la fluencia ya que influye en la resistencia de concreto en el momento de aplicar la carga. Por esta razón, cualquier comparación que se haga para determinar la fluencia de concretos elaborados con diferentes cementos, deberá tomar en cuenta la influencia del tipo de cemento en la resistencia temprana del concreto. Sujeto a condiciones de secado, el cemento Portland de alto horno produce una fluencia básica después del secado mayor que los cementos Portland normales, pero a edades posteriores y bajo carga la diferencia puede desaparecer. Para la misma resistencia, el concreto con cemento Portland puzolánico puede mostrar menos fluencia, ya que, al principio, hay menos cantidad de cemento; sin embargo, a edades más avanzadas el comportamiento resulta afectado por el aumento de resistencia y el contenido de pasta de cemento.

Para la misma relación esfuerzo/resistencia en el momento de aplicación de la carga, la fluencia es menor cuanto mayor es el aumento relativo en la resistencia después del tiempo de aplicación de la carga. La fluencia aumenta en el siguiente orden: cementos de bajo calor de hidratación, normales y de fraguado rápido.

La finura del cemento influye en el desarrollo de resistencia a edades tempranas y, por lo tanto, afecta la fluencia; sin embargo, no parece que la finura por sí misma sea un factor para la fluencia y esto se puede deber a la influencia indirecta del yeso. Mientras más fino sea el cemento, más yeso requerirá, de tal manera que se produce un cemento que muestra alta fluencia.

Hay ciertas propiedades físicas de los agregados que influyen en la fluencia del concreto, posiblemente el factor más importante sea su módulo de elasticidad. Conforme sea mayor el módulo de elasticidad, mayor restricción ofrecerá el agregado contra la fluencia potencial de la pasta de cemento. Debe notarse que es la pasta de cemento la que realmente sufre la fluencia, y que la función del agregado en el concreto es, primordialmente, la restricción.

La granulometría, el tamaño máximo y la forma del agregado no son factores directos que causan la fluencia, sino que influyen en el contenido total del agregado en el concreto.

La fluencia de concretos de calidad estructural hechos con agregado ligero es más o menos igual a la de los fabricados con agregado normal. Como la deformación elástica del concreto ligero suele ser mayor que la del concreto normal, la relación entre la fluencia y la deformación elástica es también menor en los concretos fabricados con agregado de peso ligero.

Las deformaciones por fluencia de concretos fabricados con diferentes tipos de agregado, en orden decreciente, son: basalto, cuarzo, mármol, granito y arenisca.

En lo que se refiere a la importancia de los aditivos en la fluencia, la información no siempre es precisa, debido a que hay numerosos factores de variación que hacen difícil establecer condiciones totalmente comparables, y también porque el efecto de los aditivos suele ser muy sensible a los cambios de la composición del cemento, la temperatura de hidratación, el contenido de agua de la mezcla y a otras condiciones. Por lo tanto, cuando se usen aditivos en el concreto, y la fluencia del concreto sea parte importante en el funcionamiento de la estructura, lo que se recomienda es determinar la fluencia experimentalmente en el concreto que se va a usar.

### **3.2.2 Composición de la mezcla**

La oposición que ofrece la pasta de cemento endurecida a la fluencia depende de su resistencia. Esta resistencia está afectada por la cantidad de productos de hidratación generados y por la proporción de espacio disponible, originalmente lleno de agua, que ha sido ocupado por dichos productos de hidratación. El grado de ocupación del espacio disponible por los productos de hidratación, no sólo depende de la cantidad de gel sino también del tamaño del espacio originalmente disponible para su acomodo, que a su vez es determinado por la cantidad proporcional de agua de mezcla. Por lo tanto, a medida que se incrementa la

proporción de agua en la pasta, mayor es el espacio disponible y menor el grado de ocupación de este espacio por el gel de cemento, con lo cual aumenta la porosidad de la pasta de cemento. Se ha usado la relación agua cemento como medio de enlace entre la porosidad y la resistencia de la pasta de cemento hidratada. De tal forma que, si la resistencia de los agregados y la adherencia pasta-agregado son buenas, la resistencia del concreto endurecido pasa a depender sustancialmente de la resistencia de la pasta, la que a su vez es regulada mediante ajuste el de su relación agua/cemento.

Dentro del intervalo de esfuerzos a los que normalmente trabaja el concreto, los agregados que proceden de rocas densas y resistentes, tienen un comportamiento prácticamente elástico, por lo que las deformaciones inelásticas del concreto son atribuibles a la pasta de cemento. La proporción relativa en que participan los agregados en la composición del concreto, puede tener un efecto en dos sentidos: al aumentar el contenido de agregados, se reduce el contenido de pasta y esto tiene el efecto de disminuir la deformación del concreto; pero al mismo tiempo, dicho aumento en el contenido de agregados significa mayor número de microfisuras interfaciales entre la pasta y el agregado, con el consiguiente efecto de propiciar mayor deformación en el concreto.

Para una relación agua/cemento fija, la proporción de pasta que se requiere en una mezcla de concreto, depende fundamentalmente de la granulometría y tamaño máximo de los agregados y de la consistencia de la mezcla. Si las características de los agregados permanecen constantes, el volumen unitario de pasta de cemento debe incrementarse a medida que se necesite la mezcla más fluida; esto significa que, bajo todas las demás condiciones iguales, el aumento de revenimiento de la mezcla es un factor que tiende a propiciar una mayor fluencia en las estructuras de concreto.

### **3.2.3 Propiedades del concreto endurecido**

Una propiedad importante del concreto endurecido es su resistencia, la cual se relaciona inversamente con su porosidad. El concreto presenta una porosidad que es función de la relación agua/cemento y otra que es originada por los vacíos que permanecen después del vibrado. Si los vacíos pueden reducirse a un mínimo y sólo se considera la porosidad dependiente de la relación agua/cemento, se puede distinguir una porosidad potencial y otra real que, además de depender de la relación agua/cemento, también es afectada por la edad, temperatura y humedad de la pasta de cemento. Existe relación directa entre la porosidad del concreto y su fluencia, es decir, el concreto tiene menor deformación bajo carga a medida que es menos poroso, y por lo tanto es más resistente.

Cuando se trata de deformaciones elásticas, dependientes del módulo de elasticidad del concreto, la relación es sencilla porque en el corto lapso que dura la aplicación de la carga no hay cambio en la resistencia del concreto. No ocurre lo mismo con la fluencia que se debe a la aplicación de cargas de larga duración, pues simultáneamente con la duración de la carga, se produce un incremento gradual de la resistencia del concreto que hace menos sencilla la relación entre la resistencia y la fluencia.

Para evaluar comparativamente la fluencia en dos concretos que se cargan a la misma edad, después de permanecer en iguales condiciones de curado previo, y cuya diferencia es la

resistencia a compresión como consecuencia del uso de diferentes relaciones agua/cemento, se puede aplicar la misma carga para producir igual magnitud de esfuerzo en ambos concretos, obteniendo que el concreto con menor relación agua/cemento tendrá menos fluencia debido a que se le somete a un nivel de esfuerzo más bajo. Cuando se le aplica diferente carga a los dos concretos de manera tal que se produzca el mismo nivel de esfuerzo, en función de la resistencia al momento de la carga de cada concreto, la fluencia resultante dependerá de la evolución que siga el incremento de la resistencia en cada concreto durante el tiempo que permanece aplicada la carga; sin embargo, al cabo de un lapso grande de carga, posiblemente la fluencia total sea aproximadamente la misma en ambos concretos, independiente de su resistencia.

### **3.2.4 Características de la estructura**

La fluencia que manifiesta un espécimen de concreto tiene como componentes la fluencia básica y la fluencia por secado. Si se eliminan las condiciones que permiten el secado, sellando superficialmente el espécimen, solamente se produce la fluencia básica. En una estructura de concreto en etapa de servicio, se espera que las condiciones de exposición al ambiente produzca una cierta pérdida de humedad a través de las superficies expuestas, lo que representa que exista una fluencia por secado, cuya magnitud dependerá del grado en que el secado afecte al concreto, que a su vez está influido por las características de forma y dimensiones del elemento estructural. Para estimar la magnitud de la fluencia por secado se utilizan factores de corrección basados en la relación entre el volumen y la superficie expuesta de un elemento estructural.

### **3.2.5 Condiciones de curado**

El curado del concreto consiste en procurarle condiciones de humedad y temperatura que sean favorables para la hidratación del cemento, particularmente en la primera etapa en que el proceso es más activo. Por lo tanto, para que el concreto en la estructura alcance, cuando se le somete a carga, la resistencia requerida, es indispensable que tenga un curado inicial adecuado. La falta de lo anterior tiene como resultado de que al aplicarle carga a la estructura, el concreto no posea a esa edad la resistencia debida, aunque los resultados obtenidos en especímenes representativos curados en condiciones estándar de laboratorio hagan suponer lo contrario. Además, el nivel de esfuerzo aplicado resultaría mayor del supuesto, y la fluencia también podría sobrepasar lo estimado. Por otra parte, si el tiempo disponible lo permite, puede ser útil para disminuir la fluencia de la estructura, retrasar la aplicación de la carga de servicio para una edad mayor que la especificada para la obtención de la resistencia de proyecto del concreto. Esto con el propósito de lograr un incremento adicional de resistencia que reduzca el nivel de esfuerzo aplicado, y para dar oportunidad al concreto para que pierda más humedad con el ambiente y experimente la mayor parte de su contracción por secado en estado descargado.

### **3.2.6 Condiciones de servicio**

La magnitud de la fluencia de un elemento de concreto es afectada por las condiciones del ambiente en que presta servicio la estructura, es decir, la humedad y la temperatura del medio externo. El grado de influencia de estas variables es muy importante, ya que cuando se



requiere efectuar pruebas comparativas de laboratorio es indispensable mantenerlas constantes. En la práctica, un elemento estructural de concreto puede prestar servicio en diversas condiciones representadas por combinaciones de humedad y temperatura.

El concreto en un estado completamente saturado de humedad experimenta menos fluencia que el mismo tipo de concreto expuesto a condiciones de secado, debido a que en el primer caso no se produce la componente por secado de la fluencia. Cuando hay condiciones de carga sostenida y pérdida de humedad interna del concreto, la fluencia aumenta porque se combinan las deformaciones debidas a la carga y a la contracción por secado. Si por el contrario, el concreto pierde humedad interna mientras permanece sin carga, solo experimenta contracción por secado, y por lo tanto, al ser cargado posteriormente, la fluencia por secado resulta menor y la fluencia total debe disminuir.

De manera general se puede decir que, para determinado concreto, la fluencia es mayor cuanto menor humedad relativa haya. El concreto que muestra una alta contracción, también tiene, en términos generales, una mayor fluencia. Esto no quiere decir que ambos fenómenos se deban a la misma causa, sino que se relacionan con las características de la estructura de la pasta de cemento hidratada.

El efecto de la temperatura sobre la fluencia del concreto no es sencillo de predecir porque no sólo depende de la magnitud de la temperatura sino también del estado del concreto cuando se expone al cambio de temperatura, ya sea que se encuentre húmedo o seco, o que el cambio ocurra antes o durante la aplicación y permanencia de la carga. Sin embargo, el efecto de la temperatura sobre la fluencia puede simplificarse considerando el caso usual en que la estructura se cura bajo condiciones normales de humedad y temperatura.

La importancia de la temperatura ambiental como factor de variación de la fluencia no es menos importante que la humedad relativa en estructuras que tienen un intervalo de variación de la temperatura mas amplio que el común, ya que en ciertas estructuras que trabajan a mayor temperatura que la usual, presentan una fluencia varias veces mayor que lo normal.

La velocidad de fluencia aumenta con la temperatura hasta 70°C cuando, para una mezcla con relación cemento/agregado de 1:7 y con relación agua/cemento de 0.6, es aproximadamente 3.5 veces mayor que a 21°C. Entre 70 y 96°C la velocidad disminuye hasta 1.7 veces la de los 21°C. Dichas diferencias persisten por lo menos hasta 15 meses bajo carga. Se cree que el comportamiento que ejerce la temperatura en la fluencia se debe a la absorción de agua de la superficie del gel, de tal manera que ésta se va convirtiendo gradualmente en la única fase sujeta a difusión molecular y flujo de cortante; en consecuencia, la velocidad de fluencia disminuye.

### **3.2.7 Historia de carga**

La historia de carga de un elemento de concreto cuya fluencia se requiere evaluar, corresponde a dos lapsos variables: el tiempo previo a la aplicación de la carga y el tiempo que ha permanecido aplicada la carga hasta el momento en que se requiere hacer la evaluación. La duración de ambos lapsos tiene importancia en la magnitud de la fluencia y en la deformación total del concreto bajo carga sostenida.

El concreto que adquiere mayor edad antes de cargarlo tiene menos fluencia debido a que al incrementar su resistencia con la edad, y si la carga prevista no se modifica, se le hace trabajar a un nivel de esfuerzo más bajo desde el principio. La reducción de la fluencia también es debido a que el concreto experimenta una mayor proporción de su contracción por secado sin estar sujeto a carga, obteniendo que la fluencia por secado disminuya.

La fluencia en el concreto continúa por mucho tiempo, si no indefinidamente; la determinación más duradera de que haya un pequeño aumento en la fluencia es de 30 años. La velocidad de fluencia disminuye a velocidad constante y, por lo general, se supone que tiende a alcanzar valores limitados después de haber pasado un tiempo indefinido bajo carga.

### **3.2.8 Grado de esfuerzo**

La resistencia del concreto tiene considerable efecto en la fluencia. En un intervalo muy amplio del grado de esfuerzo aplicado, la fluencia es inversamente proporcional a la resistencia del concreto en el momento de la aplicación de la carga. Por lo tanto es posible expresar la fluencia como una función lineal de la relación esfuerzo/resistencia.

La relación esfuerzo/resistencia es más conveniente que las consideraciones sobre el tipo de cemento, la relación agua/cemento y la edad. Cuando se indica esta importancia de la relación agua/cemento, es por el hecho de que, para la misma relación esfuerzo/resistencia, la fluencia es sensiblemente independiente de la relación agua/cemento. Así mismo se ignora la edad del concreto, ya que su efecto principal es aumentar la resistencia.

Existe una proporcionalidad directa entre la fluencia y el esfuerzo aplicado. Lo que no está bien establecido es el límite superior de la relación; el límite inferior es prácticamente de cero esfuerzo, porque el concreto muestra fluencia incluso a bajos esfuerzos. Se ha propuesto un límite superior del orden de 0.3 a 0.6 en términos de la relación esfuerzo/resistencia. Se ha observado que el microagrietamiento ocurre en un espécimen de concreto a compresión dentro de una relación esfuerzo/resistencia de 0.4 a 0.6 y es posible que, una vez iniciado el agrietamiento, cambie también el comportamiento de la fluencia. Se puede decir que dentro del intervalo de esfuerzos de trabajo, la proporcionalidad entre la fluencia y el esfuerzo de trabajo es válida. Más allá del límite de proporcionalidad, la fluencia aumenta al incrementarse el esfuerzo a una velocidad creciente, y hay una relación esfuerzo/resistencia en la que la fluencia causa una falla de tiempo. Esta relación esfuerzo/resistencia se encuentra en la región de 0.8 a 0.9 de la resistencia estática a corto plazo. La fluencia aumenta la deformación total hasta que llega al valor límite que corresponde a la deformación final de determinado concreto.

### 3.3 MODELOS DE ANÁLISIS

#### 3.3.1 Método de la ACI

El método de la ACI 209 es un método está basado principalmente en el método propuesto por Branson.

La función  $\nu_t$  estima el coeficiente de fluencia al tiempo bajo carga  $t$ , en días, como:

$$\nu_t = \frac{t^{0.6}}{10 + t^{0.6}} \nu_u \quad (3.1)$$

donde  $\nu_t$  es la relación entre la fluencia y la deformación elástica inicial

El coeficiente de fluencia última  $\nu_u$ , está dado por:

$$\nu_u = 2.35 \gamma_{la} \gamma_H \gamma_d \gamma_S \gamma_F \gamma_{ac} \quad (3.2)$$

$\gamma_{la}$  es el factor de corrección para la edad de carga  $t_{la}$ , mayor o igual a siete días.

Para  $t_{la} > 7$  días, concreto curado con humedad:

$$\gamma_{la} = 1.25 t_{la}^{-0.118} \quad (3.3)$$

Para  $t_{la} > 3$  días, concreto curado con vapor:

$$\gamma_{la} = 1.13 t_{la}^{-0.094} \quad (3.4)$$

$\gamma_H$  es el factor de corrección para la humedad relativa  $H$ .

$$\gamma_H = 1.27 - 0.0067H \quad \text{para } H \geq 40\% \quad (3.5)$$

$\gamma_d$  es el factor de corrección para el espesor promedio  $d$  del espécimen de concreto. Para  $50 \leq d \leq 150$  mm, véase la Tabla 3.2.

**Tabla 3.2 Factor de corrección para el espesor  $d$  del espécimen**

$d$ (mm):	50	75	100	125	150
$\gamma_d$ :	1.3	1.17	1.11	1.04	1.0

Para  $150 \leq d \leq 380$  mm:

$$\gamma_d = 1.14 - 0.00092d \quad t \leq 365 \text{ días} \quad (3.6)$$

$$\gamma_d = 1.10 - 0.00067d \quad t > 365 \text{ días} \quad (3.7)$$

Considerando la relación volumen / superficie expuesta a secado del elemento estructural  $v/s$ , en mm, en vez del espesor del espécimen de concreto:

$$\gamma_d = \frac{2}{3} \left( 1 + 1.13 e^{-0.0213 v/s} \right) \quad (3.8)$$

$\gamma_S$  es el factor de corrección para la consistencia  $S$ , en mm, del concreto fresco:

$$\gamma_S = 0.82 + 0.00264 S \quad (3.9)$$

$\gamma_F$  es el factor de corrección para el porcentaje  $F$  de la relación en peso del contenido de partículas finas y el agregado total:

$$\gamma_F = 0.88 + 0.0024F \quad (3.10)$$

$\gamma_{ac}$  es el factor de corrección para el porcentaje  $AC$  del contenido de aire en el volumen del concreto.

$$\gamma_{ac} = 0.46 + 0.09AC \geq 1.0 \quad (3.11)$$

### 3.3.2 Método del CEB-FIP

Este método sugiere seguir la función de fluencia para la aplicación inicial de la carga a 28 días:

$$\phi(t, t_{la}) = \frac{1}{E_c(t_{la})} + \frac{\alpha_{28}(t, t_{la})}{E_c(t_{28})} \quad (3.12)$$

Donde  $\alpha_{28}(t, t_{la})$  está dada por:

$$\alpha_{28}(t, t_{la}) = \beta_H \beta_{la} \beta_F \beta_d \beta_{td} \quad (3.13)$$

$\beta_H$  es el factor de corrección que es función de la humedad relativa, véase la Tabla 3.3.

**Tabla 3.3 Factor de corrección para la humedad relativa  $H$**

<b><math>H</math> (%):</b>	30	40	50	60	70	80	90	100
<b><math>\beta_H</math>:</b>	3.25	3.15	2.90	2.70	2.35	1.90	1.5	1.0

$\beta_{la}$  es el factor de corrección para la edad de carga en el cemento normal, véase la Tabla 3.4.

**Tabla 3.4 Factor de corrección para la edad de carga  $t_{la}$**

<b><math>t_{la}</math> (días):</b>	1	3	7	14	28	90	180	360
<b><math>\beta_{la}</math>:</b>	1.8	1.6	1.4	1.2	1.0	0.75	0.65	0.3

$\beta_F$  es el factor de corrección para la composición del concreto, véase la Tabla 3.5.

**Tabla 3.5 Factor de corrección para la composición del concreto**

Relación agua/cemento	Contenido de cemento (kg/m <sup>3</sup> )			
	500	400	300	200
0.4	1.0	0.8	0.45	—
0.5	1.4	1.2	0.9	—
0.6	—	1.6	1.19	0.75
0.7	—	—	1.5	1.0
0.8	—	—	—	1.3

$\beta_d$  es el factor de corrección basado en la dimensión de la sección transversal de la estructura, véase la Tabla 3.6.

**Tabla 3.6 Factor de corrección para el espesor  $d$  de la estructura**

$d$ (cm):	100	200	300	400	500
$\beta_d$ :	1.0	0.85	0.75	0.71	0.7

$\beta_{td}$  es el factor de corrección basado en el espesor teórico contra la edad carga del concreto, véase la Tabla 3.7.

**Tabla 3.7 Factor de corrección para el espesor del espécimen**

$D$ (mm)	$t_{la}$ (días)				
	1	10	100	1000	10000
50	0.15	0.38	0.8	0.99	—
100	—	0.21	0.65	0.95	—
200	—	0.1	0.43	0.90	—
400	—	—	0.24	0.78	—
800	—	—	0.1	0.5	0.85

### 3.3.3 Código de Indiana

La deformación unitaria última por fluencia  $\varepsilon_r^u$  es calculada como

$$\varepsilon_r^u = 17.5 \left( \frac{1.25 - H}{0.25} \right) \left( \frac{400}{f_{cu}} \right) \left( \frac{f_{cu}}{f_{cl}} \right) \times 10^{-6} \quad (3.14)$$

donde  $H$  es la humedad promedio del ambiente (0.2-0.5 seco; 0.75-0.9 húmedo; 1.0 promedio),  $f_{cu}$  es la resistencia de cubos de concreto a los 28 días y  $f_{cl}$  es la resistencia de cubos de concreto en la transferencia.

## CAPÍTULO 4

### DISEÑO DE VIGAS DE CONCRETO PRESFORZADO

#### 4.1 ESTADOS DE CARGA

El comportamiento de una viga de concreto presforzado se puede ver al graficar su curva carga-deflexión para sus distintas etapas de carga. Para el diseño, o el análisis, de las vigas presforzadas, se considera que estarán bajo los siguientes estados de carga:

1. Presfuerzo inicial
2. Presfuerzo inicial más peso propio de la viga
3. Presfuerzo efectivo más carga muerta total
4. Presfuerzo efectivo más carga de servicio
5. Carga última

Cuando se aplica la fuerza de presfuerzo inicial, existirá inmediatamente una contraflecha debida al momento flexionante producido por la excentricidad del presfuerzo; estando la viga apoyada en sus extremos, el peso propio comienza a actuar inmediatamente con una deflexión opuesta a la contraflecha. A este estado donde sólo el presfuerzo y el peso propio están actuando sobre la viga se le conoce como estado descargado.

Cuando se presenta la totalidad de la carga muerta, la deflexión se incrementa hacia abajo; obteniéndose generalmente una deflexión neta hacia arriba. Con una parte de la carga viva actuando, se puede alcanzar un estado de carga balanceada, tal que la carga equivalente hacia arriba proveniente del presfuerzo, es exactamente igual a las carga exterior hacia abajo. El resultado es un esfuerzo de compresión uniforme en el elemento de concreto presforzado con deflexión nula.

Con una posterior adición de carga viva se alcanza un estado de descompresión, en el cual el esfuerzo en el concreto en la cara inferior de la viga es cero. La respuesta de la viga es lineal en este estado, en donde los esfuerzos de tensión en el concreto igualan al módulo de ruptura. El intervalo usual de la carga de servicio, que consiste en la carga muerta total más la carga viva esperada, está entre el estado de descompresión y el estado parcial de agrietamiento.

En la medida que las cargas se siguen incrementando, comenzará a fluir el acero o el concreto alcanzará su deformación de aplastamiento, a lo que se denominará el estado de sobrecarga. Cerca de la falla, la respuesta de la viga es inelástica.

Una forma de construcción frecuentemente empleada consiste en usar una viga de sección *I* precolada pretensada con una losa de concreto reforzado colada en sitio, para formar un elemento compuesto de sección *T*. La losa colada en sitio cumple con los requisitos funcionales de proporcionar una superficie lisa y útil, además de rigidizar y reforzar a la unidad precolada. En casi todos los casos, la calidad del concreto precolado es superior a la del concreto de la parte colada en sitio de la viga compuesta.

Las vigas de sección  $I$  han sido ampliamente usadas en puentes carreteros de claros cortos a medianos (de 15 a 35 m). Las dimensiones para las secciones  $I$  precoladas han sido estandarizadas en seis tamaños por la AASHTO, variando el peralte desde 71 cm hasta 183 cm. Las vigas con sección tipo AASHTO se emplean en combinación con una losa de rodamiento colada en sitio, creando una losa nervada  $T$  con el centroide de la sección compuesta cercano al lado inferior de la losa. En este tipo de construcción de puentes, las vigas compuestas pueden incluir diafragmas intermedios, comúnmente presforzados lateralmente para asegurar que el sistema en conjunto actúe correctamente.

Un requisito esencial para que la sección  $I$  compuesta funcione como una sección  $T$  es una buena adherencia entre el concreto precolado y el colado en sitio. El cortante por flexión produce la tendencia al deslizamiento horizontal a lo largo del plano que separa a las dos partes. Una gran parte de la resistencia al deslizamiento es proporcionada por la adhesión y fricción naturales entre el concreto colado en sitio y el precolado.

En vigas compuestas de concreto presforzado, donde se considera que la losa actúa integralmente con la viga prefabricada, el ancho efectivo del patín  $b$  de la sección  $T$  que se forma, para el diseño de una viga, de acuerdo a las especificaciones de la AASHTO, debe ser el menor de:

- 1)  $L/4$ , donde  $L$  es la longitud de la viga.
- 2)  $12t + b_v$ , donde  $t$  es el espesor de la losa y  $b_v$  es el ancho del patín superior de la viga.
- 3)  $s$ , donde  $s$  es la separación entre las traveses de eje a eje.

En vigas compuestas con dos calidades de concreto, en el cálculo del momento de inercia y en las ecuaciones de análisis o diseño, se debe utilizar la sección homogénea transformada equivalente. Por ejemplo, si se considera una viga compuesta por una viga precolada, con módulo de elasticidad  $E_{cp}$ , y una losa colada en sitio, con módulo de elasticidad  $E_c$  y con resistencia a la compresión del concreto menor que la correspondiente resistencia de la viga precolada, entonces el ancho efectivo del patín  $b$  de la sección  $T$  que se forma se debe sustituir por un ancho reducido de patín  $b_r = n_c b$  donde  $n_c$  es la relación modular de los concretos que se define como  $n_c = E_c / E_{cp}$ .

Otra forma de expresar la relación modular es con  $n_c = \sqrt{f'_c / f'_{cp}}$ , ya que los módulos de elasticidad del concreto de la losa y la viga precolada se pueden obtener, respectivamente, como  $E_c = 0.1365 w_c^{1.5} \sqrt{f'_c}$  y  $E_{cp} = 0.1365 w_c^{1.5} \sqrt{f'_{cp}}$ , donde  $E_c$  y  $E_{cp}$  están en  $\text{kg/cm}^2$ ; donde  $w_c$  es el peso volumétrico del concreto en  $\text{kg/m}^3$ , y  $f'_c$  y  $f'_{cp}$  son las resistencias a compresión del concreto de la losa y de la viga precolada en  $\text{kg/cm}^2$ .

La construcción compuesta tiene las ventajas del precolado, incluyendo la prefabricación en planta de secciones estandarizadas, el tensado de cables en línea larga, y un excelente control de calidad. En el lugar de la obra, se eliminan en gran parte los trabajos de cimbrado, permitiendo una rápida colocación de la estructura en campo, con poca interferencia del trabajo o del tráfico que se tenga por debajo de la estructura.

Un elemento compuesto debe tener un comportamiento satisfactorio bajo cualquier carga o combinación de cargas que puedan actuar durante su vida útil. El diseño de secciones compuestas puede requerir la consideración de varios estados de carga: en la sección de la viga precolada y en la sección compuesta por la viga precolada y la losa colada en sitio.

Para la sección de la viga precolada los estados de carga son:

1. Presfuerzo inicial.
2. Presfuerzo inicial más peso propio de la viga.
3. Presfuerzo efectivo más el peso propio de la viga.
4. Presfuerzo efectivo más la carga muerta total incluyendo el peso del concreto en estado fresco de la losa de la sección compuesta.

Para la sección compuesta los siguientes estados de carga son:

5. Presfuerzo efectivo más las carga de servicio.
6. Carga última.

## 4.2 MÉTODOS DE DISEÑO

Una forma de dimensionar un elemento presforzado es eligiendo la sección de la viga de tal manera de que los esfuerzos en el concreto permanezcan dentro de los límites que especifican las normas de diseño que se utilicen, a medida que el elemento pasa del estado descargado hasta el estado de carga de servicio. Las vigas que son dimensionadas sobre la base de esfuerzos permisibles, también deben satisfacer otros requerimientos. Las deflexiones bajo la carga de servicio total o bajo carga parcial, son consideraciones de diseño importantes que deben revisarse. Para vigas parcialmente presforzadas, puede requerirse una revisión explícita del ancho de las grietas, pero más comúnmente el agrietamiento del concreto se controla indirectamente limitando el esfuerzo nominal de tensión en el concreto. La resistencia del elemento debe siempre calcularse para asegurar un adecuado margen de seguridad contra el colapso.

También, las dimensiones de los elementos se pueden seleccionar proporcionando exactamente la resistencia requerida, pero incrementando las cargas previstas mediante un factor de carga especificado. En este caso, la fuerza de presfuerzo puede seleccionarse de tal forma que proporcione las características de deflexión esperadas o para controlar las grietas. Se deben investigar los esfuerzos tanto para el estado descargado, como para la carga de servicio, aún cuando inicialmente esté basado en la resistencia.

Otra forma de dimensionar consiste en seleccionar la sección del elemento, la fuerza de presfuerzo y la configuración del acero basándose en el balance de cargas para el control de las deflexiones. También, con esta base de diseño se deberán investigar otros estados de carga. Los esfuerzos en la viga cuando ésta se encuentre descargada o sujeta a la carga de servicio total se deben encontrar dentro de los límites aceptables, y se deberá proporcionar la resistencia adecuada.



### 4.3 ESFUERZOS ELÁSTICOS DE FLEXIÓN

Si una viga bajo carga se mantiene sin agrietarse y los esfuerzos tanto en el concreto como en el acero se mantienen dentro del intervalo elástico, los esfuerzos en el concreto pueden obtenerse usando las ecuaciones de la mecánica basadas en el comportamiento elástico de los materiales. Por lo general estas condiciones se cumplen hasta el nivel de las carga de servicio. Los esfuerzos se pueden encontrar usando los métodos elásticos lineales, aún cuando la tensión nominal sea ligeramente mayor que el valor probable del módulo de ruptura. Esto, debido a que debe proporcionarse una cierta cantidad de refuerzo, ya sea presforzado o no, en las zonas de tensión. Este refuerzo sirve tanto para controlar las grietas como la deflexión y permite al elemento presforzado responder prácticamente como si no tuviera grietas.

Cuando en una viga compuesta, la viga precolada se sujeta únicamente a la fuerza de presfuerzo inicial  $P_i$ , el esfuerzo en el concreto  $f_1$  en la cara superior de la viga y  $f_2$  en la cara inferior, pueden hallarse mediante la superposición de los efectos axial y de flexión:

$$f_1 = -\frac{P_i}{A_{cp}} + \frac{P_i e}{S_{1p}} \quad (4.1)$$

$$f_2 = -\frac{P_i}{A_{cp}} - \frac{P_i e}{S_{2p}} \quad (4.2)$$

donde  $A_{cp}$  es el área de la sección transversal del concreto;  $e$  es la excentricidad del tendón medida hacia abajo desde el centroide del concreto de la viga precolada;  $S_{1p}$  y  $S_{2p}$  son los módulos de sección con respecto a las superficies superior e inferior, es decir,  $S_{1p} = I_{cp} / c_{1p}$  y  $S_{2p} = I_{cp} / c_{2p}$ ;  $I_{cp}$  es el momento de inercia de la sección transversal del concreto;  $c_{1p}$  y  $c_{2p}$  son las distancias del centroide del concreto a las superficies superior e inferior, respectivamente.

Para el estado de carga, fuerza de presfuerzo inicial y peso propio de la viga precolada, los esfuerzos en el concreto en las superficies superior e inferior son:

$$f_1 = -\frac{P_i}{A_{cp}} + \frac{P_i e}{S_{1p}} - \frac{M_o}{S_{1p}} \quad (4.3)$$

$$f_2 = -\frac{P_i}{A_{cp}} - \frac{P_i e}{S_{2p}} + \frac{M_o}{S_{2p}} \quad (4.4)$$

donde  $M_o$  es el momento flexionante del peso propio de la viga precolada.

Para el estado de carga fuerza de presfuerzo efectivo,  $P_e$ , y peso propio de la viga precolada, los esfuerzos en la sección transversal de concreto son:

$$f_1 = -\frac{P_e}{A_{cp}} + \frac{P_e e}{S_{1p}} - \frac{M_o}{S_{1p}} \quad (4.5)$$

$$f_2 = -\frac{P_e}{A_{cp}} - \frac{P_e e}{S_{2p}} + \frac{M_o}{S_{2p}} \quad (4.6)$$

Para el estado de carga de fuerza de presfuerzo efectiva y carga muerta total, incluyendo el peso de la losa en estado fresco, los esfuerzos en la sección transversal de la viga precolada son:

$$f_1 = -\frac{P_e}{A_{cp}} + \frac{P_e e}{S_{1p}} - \frac{M_o + M_{dp}}{S_{1p}} \quad (4.7)$$

$$f_2 = -\frac{P_e}{A_{cp}} - \frac{P_e e}{S_{2p}} + \frac{M_o + M_{dp}}{S_{2p}} \quad (4.8)$$

donde  $M_{dp}$  el momento flexionante debido a la carga muerta aplicada sobre la viga precolada, sin contar el peso propio de ésta viga e incluyendo el peso del concreto de la losa en estado húmedo.

Para el estado de carga de fuerza de presfuerzo efectivo y carga de servicio, considerando que la viga compuesta tiene un comportamiento no agrietado, los esfuerzos en la sección transversal de ésta viga son:

$$f_1 = -\frac{P_e}{A_{cp}} + \frac{P_e e}{S_{1p}} - \frac{M_o + M_{dp}}{S_{1p}} - \frac{M_{dc} + M_l}{S_{1c}} \quad (4.9)$$

$$f_2 = -\frac{P_e}{A_{cp}} - \frac{P_e e}{S_{2p}} + \frac{M_o + M_{dp}}{S_{2p}} + \frac{M_{dc} + M_l}{S_{2c}} \quad (4.10)$$

$$f_3 = -\frac{M_{dc} + M_l}{S_{3c}} n_c \quad (4.11)$$

$$f_4 = -\frac{M_{dc} + M_l}{S_{1c}} n_c \quad (4.12)$$

donde  $f_1, f_2, f_3$  y  $f_4$  son los esfuerzos en las caras superior e inferior de la viga precolada y de la losa en una sección compuesta, respectivamente;  $M_{dc}$  es el momento flexionante producido por la carga muerta que se aplica después de que la viga precolada y la losa colada en sitio tengan un comportamiento correspondiente a una viga compuesta;  $M_l$  es el momento flexionante debido a la carga viva;  $S_{1c}, S_{2c}$  y  $S_{3c}$  son los módulos de sección de las caras superior e inferior de la viga precolada y de la losa en una sección compuesta, respectivamente;  $n_c = E_c / E_{cp}$  es la relación de módulos de elasticidad del concreto de la losa y de la viga precolada.

De la definición de módulo de sección, en una viga compuesta se tiene que  $S_{1c} = I_{cc} / c_{1c}$ ,  $S_{2c} = I_{cc} / c_{2c}$ ,  $S_{3c} = I_{cc} / c_{3c}$  donde  $I_{cc}$  es el momento de inercia de la sección compuesta;  $c_{1c}$ ,  $c_{2c}$  y  $c_{3c}$  son las distancias del centroide del concreto de la sección compuesta a las superficies superior e inferior de la viga precolada y de la losa, respectivamente.

#### 4.4 ESFUERZOS PERMISIBLES DE FLEXIÓN

La mayoría de las especificaciones para la construcción de concreto presforzado fijan ciertas limitaciones a los esfuerzos en el concreto y en el acero para diferentes condiciones, tales como aquéllas que se establecen para que se cumplan durante el tensado del acero, inmediatamente después de la transferencia de la fuerza de presfuerzo al concreto, y para cuando actúa la totalidad de la carga de servicio. Estas limitaciones en el esfuerzo tratan de evitar daños al miembro durante la construcción y asegurar buenas condiciones de servicio mediante la limitación indirecta del ancho de las grietas y la deflexión. En la práctica actual, las especificaciones que limitan el esfuerzo proporcionan frecuentemente el punto de partida para la selección de las dimensiones de los miembros de concreto presforzado.

Las especificaciones de la AASHTO en su sección 9.15, establecen que el diseño de elementos precolados y presforzados se base normalmente en el valor de  $f'_c$  de 350 kg/cm<sup>2</sup>, permitiendo el aumento a 420 kg/cm<sup>2</sup>, a juicio del ingeniero. Los límites en los esfuerzos en el concreto que fijan esta norma son los que se presentan en las Tablas 4.1 y 4.2; donde  $f'_c$  es la resistencia a compresión del concreto a los 28 días;  $f'_{ci}$  es la resistencia a compresión del concreto al momento de la transferencia del presfuerzo;  $f_{ci}$  es el esfuerzo de compresión permisible en el concreto, inmediatamente después de la transferencia;  $f_{ti}$  es el esfuerzo de tensión permisible en el concreto, inmediatamente después de la transferencia;  $f_{cs}$  es el esfuerzo de compresión permisible en el concreto, bajo la carga de servicio después de todas las pérdidas; y  $f_{ts}$  es el esfuerzo de tensión permisible en el concreto, bajo la carga de servicio después de todas las pérdidas.

**Tabla 4.1 Esfuerzos permisibles en el concreto anteriores a las pérdidas de presfuerzo debidas a la fluencia y contracción**

<b>Compresión</b>	$f_{ci}, \text{kg/cm}^2$
Elementos pretensados	$0.60 f'_{ci}$
Elementos postensados	$0.55 f'_{ci}$
<b>Tensión</b>	$f_{ti}, \text{kg/cm}^2$
Zona sometida a tensión, con la aplicación de una fuerza de compresión previa	No se especifican los esfuerzos temporales admisibles.
<b>Otras áreas</b>	$f_{ti}, \text{kg/cm}^2$
En áreas a tensión sin refuerzo adherido <sup>1</sup>	$14.1 \text{ o } 0.8\sqrt{f'_{ci}}$
El esfuerzo de tensión máximo no debe exceder de	$2\sqrt{f'_{ci}}$

<sup>1</sup>Cuando el esfuerzo a tensión calculado excede este valor, se proporcionará un refuerzo adherido para resistir la fuerza total a tensión calculada en el concreto, suponiendo que se trata de una sección no agrietada.

Las mismas especificaciones de la AASHTO, en la sección 9.15, establecen los esfuerzos permisibles de tensión para el acero de presfuerzo. Estos límites se presentan en la Tabla 4.3, donde  $f_{pu}$  es la resistencia última a tensión del acero de presfuerzo,  $f_{py}$  es la resistencia a la fluencia del acero de presfuerzo,  $f_{pi}$  es el esfuerzo temporal en el acero de presfuerzo al momento de la transferencia o presfuerzo inicial y  $f_{pe}$  es el esfuerzo en el acero de presfuerzo debido a la fuerza efectiva de presfuerzo, representado por  $P_e$ , después de todas las pérdidas.

**Tabla 4.2 Esfuerzo permisibles de presfuerzo en el concreto bajo carga de servicio, una vez que se han presentado las pérdidas**

<b>Compresión</b>	<b><math>f_{cs}</math>, kg/cm<sup>2</sup></b>
Los esfuerzos de compresión bajo todas las combinaciones de carga, excepto en los estados abajo mencionados, no debe exceder de	$0.60 f'_c$
Los esfuerzos de compresión debido a el presfuerzo efectivo mas carga muerta permanente no debe exceder de	$0.40 f'_c$
Los esfuerzos de compresión debido a la carga viva mas una mitad de la suma de los esfuerzos debidos al presfuerzo y a la carga muerta permanente no debe exceder de	$0.40 f'_c$
<b>Tensión con la aplicación de una fuerza de compresión previa en el área a tensión<sup>1</sup></b>	<b><math>f_{ts}</math>, kg/cm<sup>2</sup></b>
Para elementos con refuerzo adherido	$1.6\sqrt{f'_c}$
Para lugares donde los elementos están expuestos a la acción corrosiva	$0.8\sqrt{f'_c}$
Para elementos sin refuerzo adherido	0

<sup>1</sup>La tensión en otras áreas está restringida por los esfuerzos temporales admisibles, especificados en la Tabla 4.1.

**Tabla 4.3 Esfuerzos permisibles en el acero de presfuerzo**

<b>Esfuerzos posteriores a la transferencia en elementos pretensados</b>	<b><math>f_{pi}</math>, kg/cm<sup>2</sup></b>
Torón de baja relajación	$0.75 f_{pu}$
Torón relevado de esfuerzos	$0.70 f_{pu}$
<b>Esfuerzos posteriores al asentamiento del anclaje en elementos postensados<sup>1</sup></b>	<b><math>f_{pi}</math>, kg/cm<sup>2</sup></b>
En el anclaje	$0.70 f_{pu}$
En el extremo de la zona del asentamiento del anclaje	$0.83 f_{py}$
<b>Esfuerzo bajo la carga de servicio, después de las pérdidas</b>	<b><math>f_{pe}</math>, kg/cm<sup>2</sup></b>
Elementos pretensados o postensados	$0.80 f_{py}$

<sup>1</sup>Se permite un esfuerzo en el acero en la zona del anclaje de hasta  $0.90 f_{py}$  durante períodos cortos para compensar el asentamiento del anclaje o la pérdida por fricción, siempre que se cumpla con lo abajo señalado.

Para el módulo de ruptura, la AASHTO fija los límites cuando no se disponen de los resultados de la prueba estándar que determina este módulo de ruptura en laboratorio; estos límites se pueden ver en la Tabla 4.4.

**Tabla 4.4 Módulo de ruptura  $f_r$  del concreto**

<b>Tipo de concreto</b>	<b><math>f_r</math>, kg/cm<sup>2</sup></b>
De peso normal	$1.989\sqrt{f'_c}$
Con arena ligera	$1.671\sqrt{f'_c}$
Ligero	$1.459\sqrt{f'_c}$

## 4.5 DISEÑO POR FLEXIÓN

El diseño por flexión de las vigas de concreto presforzado basado en esfuerzos permisibles es de uso común, ya que uno de los objetivos más importantes del presfuerzo es mejorar el comportamiento bajo cargas de servicio. Un procedimiento para obtener en el diseño la sección transversal, la magnitud necesaria de la fuerza de presfuerzo y el perfil del tendón es obteniendo los esfuerzos lo más cercanos posible de los esfuerzos límites, bajo los estados de carga que dominan en el diseño.

En una viga presforzada, el esfuerzo de tensión que se produce en la superficie superior, para la sección de máximo momento bajo el estado de carga presfuerzo inicial más peso propio de la viga, no debe exceder el esfuerzo permisible  $f_{ti}$ ; de igual manera, para la misma sección de máximo momento el esfuerzo de compresión en la superficie inferior no debe exceder de  $f_{ci}$ . Para el estado de carga de presfuerzo efectivo más cargas de servicio, los esfuerzos compresión y de tensión en las superficies superior e inferior en la sección de máximo momento no deben de exceder, respectivamente, de  $f_{cs}$  y  $f_{ts}$ .

Si en el diseño de una viga presforzada se usan secciones estandarizadas con tendones con excentricidad constante, sólo queda por determinar la fuerza de presfuerzo y la excentricidad del tendón que cumpla con la sección estándar propuesta.

Los requerimientos para los módulos de sección  $S_{1p}$  y  $S_{2p}$  en el diseño de una viga son:

$$S_{1p} \geq \frac{M_d + M_l}{f_{1r}} \quad (4.13)$$

$$S_{2p} \geq \frac{M_d + M_l}{f_{2r}} \quad (4.14)$$

donde  $f_{1r}$  y  $f_{2r}$  son esfuerzos disponibles para las superficies superior e inferior de la sección transversal de una viga;  $M_d$  y  $M_l$  son los momentos debidos a la carga muerta, sin incluir el peso propio, y a la carga viva, respectivamente.

Los esfuerzos  $f_{1r}$  y  $f_{2r}$  se pueden obtener considerando los esfuerzos permisibles para el concreto  $f_{ti}$ ,  $f_{ci}$ ,  $f_{cs}$  y  $f_{ts}$ ; así como las pérdidas en el esfuerzo  $\Delta f_1$  y  $\Delta f_2$  en las superficies superior e inferior de las secciones de los apoyos para vigas con tendones con excentricidad constante, o en la sección de máximo momento para vigas con tendones con excentricidad variable. Las pérdidas en el esfuerzo  $\Delta f_1$  y  $\Delta f_2$  son las que corresponden a las pérdidas dependientes del tiempo de la fuerza de presfuerzo. Es decir:

$$f_{1r} = f_{ti} - f_{cs} - \Delta f_1 \quad (4.15)$$

$$f_{2r} = f_{ts} - f_{ci} - \Delta f_2 \quad (4.16)$$

donde  $f_{ti}$ ,  $f_{ci}$ ,  $f_{cs}$  y  $f_{ts}$  se consideran en la ecuación anterior con el signo respectivo, positivo para esfuerzos de tensión y negativo para esfuerzos de compresión, y  $\Delta f_1$  y  $\Delta f_2$  se consideran en valor absoluto.

Para obtener  $\Delta f_1$  y  $\Delta f_2$  se utilizan las siguientes expresiones:

$$\Delta f_1 = (1 - R) \left( f_{ti} + \frac{M_o}{S_{1p}} \right) \quad (4.17)$$

$$\Delta f_2 = (1 - R) \left( -f_{ci} + \frac{M_o}{S_{2p}} \right) \quad (4.18)$$

donde la relación de efectividad de la fuerza de presfuerzo es  $R = P_e / P_i$ , siendo  $P_e$  y  $P_i$  las fuerzas de presfuerzo efectiva e inicial, respectivamente.

Para una viga con tendones con excentricidad constante, el momento debido al peso propio del elemento en la sección de los apoyos es nulo; por lo tanto para  $\Delta f_1$  y  $\Delta f_2$ :

$$\Delta f_1 = (1 - R) f_{ti} \quad (4.19)$$

$$\Delta f_2 = -(1 - R) f_{ci} \quad (4.20)$$

Por lo anterior, para obtener los módulos de sección que se van a proponer en el diseño, se utilizan las siguientes expresiones:

$$S_{1p} \geq \frac{M_o + M_d + M_l}{R f_{ti} - f_{cs}} \quad (4.21)$$

$$S_{2p} \geq \frac{M_o + M_d + M_l}{f_{ts} - R f_{ci}} \quad (4.22)$$

donde el valor de  $R$  se tiene que suponer y  $M_o$  se tiene que calcular estimando inicialmente el peso propio por unidad de longitud  $w_o$ .

Con la sección transversal que cumpla con los módulos de sección  $S_{1p}$  y  $S_{2p}$  requeridos, se tiene el valor del peralte  $h$  y el valor de la distancia del centroide del concreto a la superficie superior  $c_{1p}$ .

El valor del esfuerzo en el centroide del concreto  $f_{cci}$  sujeto al estado de carga fuerza de presfuerzo inicial más peso propio de la viga, está dado por:

$$f_{cci} = f_{ti} - \frac{c_{1p}}{h} (f_{ti} - f_{ci}) \quad (4.23)$$

La fuerza de presfuerzo inicial se obtiene multiplicando el valor del esfuerzo en el centroide del concreto por el área de la sección transversal  $A_{cp}$  del concreto:

$$P_i = A_{cp} f_{cci} \quad (4.24)$$

La excentricidad constante  $e$  de la viga se puede calcular considerando las secciones de los apoyos para el estado de carga fuerza de presfuerzo inicial más peso propio:

$$e = (f_{ti} - f_{cci}) \frac{S_{1p}}{P_i} \quad (4.25)$$

Si en el diseño de un puente carretero se usan vigas de concreto presforzado con sección  $I$  tipo AASHTO, una forma de proponer la sección estándar es usando la relación de claro a peralte total, que para vigas de un solo claro típicas varían de 16 a 22, dependiendo de las condiciones de carga y del criterio de diseño.

#### 4.6 RESISTENCIA A LA FLEXIÓN

La relación entre la profundidad,  $a$ , del bloque de esfuerzos rectangular equivalente y la real  $c$  en las secciones transversales en el concreto está dada por:

$$a = \beta_1 c \quad (4.26)$$

El valor de  $\beta_1$  se ha establecido experimentalmente como:

$$\beta_1 = 0.85 - 0.05 \frac{(f'_c - 281)}{70.3} \quad (4.27)$$

donde  $\beta_1$  es un factor para la resistencia del concreto y no debe ser menor de 0.65 ni mayor de 0.85.

La profundidad del bloque de esfuerzos equivalente  $a$  es determinada por la condición de equilibrio que establece que la resultante de las fuerzas de compresión es igual a la resultante de las fuerzas de tensión. El momento resistente nominal  $M_n$  es determinado como el producto de la fuerza de tensión por el brazo del par interno.

Para secciones rectangulares o para secciones que tengan una zona de compresión de ancho constante  $b$ , la profundidad del bloque de esfuerzos y la resistencia nominal de la viga se determinan como:

$$a = \frac{\rho_p f_{ps} d}{0.85 f'_c} \quad (4.28)$$

$$M_n = A_p f_{ps} d \left( 1 - 0.6 \frac{\rho_p f_{ps}}{f'_c} \right) \quad (4.29)$$

donde  $f_{ps}$  es el esfuerzo en el acero bajo carga última,  $d$  es el peralte efectivo de la sección, que es la profundidad desde la cara en compresión del miembro hasta el centroide del acero del presfuerzo, y  $\rho_p = A_p / bd$  es el porcentaje del acero de presfuerzo.

Para que la sección rectangular a compresión sea subreforzada se debe cumplir con la condición siguiente:

$$\rho_p \frac{f_{ps}}{f'_c} \leq 0.36 \beta_1 \quad (4.30)$$

Para secciones con patines en las cuales la profundidad del bloque de esfuerzos a compresión es mayor que el espesor del patín, es decir  $a > h_f$ , el área total del acero  $A_p$  se considera formado por dos partes, las áreas  $A_{pf}$  y  $A_{pw}$  requeridas para desarrollar las resistencias a compresión en

la parte sobresaliente del patín y del alma, respectivamente. Estas áreas de acero se calculan con las siguientes expresiones:

$$A_{pf} = 0.85 \frac{f'_c}{f_{ps}} (b - b_w) h_f \quad (4.31)$$

$$A_{pw} = A_p - A_{pf} \quad (4.32)$$

donde  $b_w$  es el espesor del alma de la viga.

Para sección con patines donde  $a > h_f$ , el momento resistente nominal se determina con la siguiente expresión:

$$M_n = A_{pw} f_{ps} d \left( 1 - 0.6 \frac{A_{pw} f_{ps}}{b_w d f'_c} \right) + 0.85 f'_c (b - b_w) h_f (d - 0.5 h_f) \quad (4.33)$$

Para que la sección con patines se considere subreforzada debe cumplir con la siguiente condición:

$$\frac{A_{pw} f_{ps}}{b_w d f'_c} \leq 0.36 \beta_1 \quad (4.34)$$

Para fines de diseño, conforme a las especificaciones de la AASHTO, la resistencia nominal debe multiplicarse por un factor de reducción de resistencia para obtener  $\phi M_n$  y deberá ser por lo menos igual al momento último de diseño  $M_u$ , es decir:

$$\phi M_n \geq M_u \quad (4.35)$$

donde  $\phi = 1.0$  para elementos prefabricados en planta.

Las especificaciones de la AASHTO establecen usar la siguiente ecuación para el cálculo del momento último:

$$M_u = 1.3 \left( M_d + \frac{5}{3} M_{I+I} \right) \quad (4.36)$$

donde  $M_{I+I}$  es el momento producido por la carga viva mas un momento que toma en cuenta el efecto del impacto de la carga viva sobre la estructura.

Para calcular el esfuerzo  $f_{ps}$  en el acero bajo carga última, se puede utilizar el método de la compatibilidad de deformaciones o el método aproximado de las especificaciones de la AASHTO.

En vigas presforzadas con tendones adheridos y considerando la relación que existe entre el esfuerzo del acero de presfuerzo y la carga, la relación característica entre el esfuerzo del acero y su deformación, y la deformación de las secciones de la viga bajo los estados de carga, se puede obtener el esfuerzo  $f_{ps}$  en el acero bajo carga última mediante aproximaciones con el método de compatibilidad de deformaciones.



En el método de compatibilidad de deformaciones se consideran el estado de carga fuerza de presfuerzo efectiva, el estado de carga que produce una descompresión al nivel del centroide del acero, y el estado de carga última.

Para el estado de carga de fuerza de presfuerzo efectiva, el esfuerzo en el acero  $f_{pe}$  y la deformación que produce  $\varepsilon_{pe}$  son, respectivamente:

$$f_{pe} = \frac{P_e}{A_p} \quad (4.37)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{f_{pe}}{E_p} \quad (4.38)$$

donde  $E_p$  es el módulo de elasticidad del acero de presfuerzo.

Para el estado de carga que produce la descompresión al nivel del centroide del acero, y suponiendo una completa adherencia entre el concreto y el acero, el incremento de la deformación en el acero es el mismo que la disminución en la deformación del concreto al nivel del centroide del acero, es decir:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_c} \left( \frac{P_e}{A_{cp}} + \frac{P_e e^2}{I_{cp}} \right) \quad (4.39)$$

Cuando el miembro se sobrecarga hasta el nivel de falla, el eje neutro está a la distancia  $c$  por debajo de la parte superior de la viga; el incremento en la deformación es:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{cu} \left( \frac{d-c}{c} \right) \quad (4.40)$$

donde  $\varepsilon_{cu}$  es la deformación del concreto en la falla, que se establece como 0.003.

La deformación total del acero en la falla  $\varepsilon_{ps}$  y el esfuerzo  $f_{ps}$  que la produce son, respectivamente:

$$\varepsilon_{ps} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (4.41)$$

$$f_{ps} = E_p \varepsilon_{ps} \quad (4.42)$$

Para calcular el esfuerzo  $f_{ps}$  en el acero bajo carga última con el método de la compatibilidad de deformaciones se debe suponer inicialmente un valor para este esfuerzo, y de la correspondiente curva esfuerzo-deformación del acero obtener la deformación  $\varepsilon_{ps}$ . Posteriormente se calcula la profundidad  $c$  del eje neutro usando las ecuaciones (4.26) y (4.28), obteniéndose la profundidad  $a$  del bloque equivalente de esfuerzos con el valor supuesto de  $f_{ps}$ . Con el valor de  $c$ , se calcula la deformación  $\varepsilon_3$  con la ecuación (4.40) y se suma esta deformación a las deformaciones  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  calculadas con las ecuaciones (4.38) y (4.39), para obtener otro valor de  $\varepsilon_{ps}$  de acuerdo a la ecuación (4.41). Finalmente, si el valor de la deformación del acero en la falla  $\varepsilon_{ps}$  obtenido con la curva esfuerzo-deformación es muy diferente al valor calculado con las ecuaciones, entonces se debe proponer otro valor de  $f_{ps}$ .

Las especificaciones de la AASHTO proporcionan ecuaciones aproximadas para obtener el esfuerzo  $f_{ps}$  en el acero bajo carga última, que son aplicables cuando  $f_{pe} \geq 0.5f_{pu}$ . Para tendones adheridos, la ecuación que se usa es la siguiente:

$$f_{ps} = f_{pu} \left( 1 - \left( \frac{\gamma_p}{\beta_1} \right) \left( \frac{\rho_p f_{pu}}{f'_c} \right) \right) \quad (4.43)$$

donde  $\gamma_p$  es un factor que toma en cuenta el tipo de acero de presfuerzo: 0.28 para acero de baja relajación, 0.40 para acero relevado de esfuerzos y 0.55 para varillas.

Para torones relevados de esfuerzo y para resistencias del concreto a compresión de 250 kg/cm<sup>2</sup>, la ecuación (4.43) se simplifica a:

$$f_{ps} = f_{pu} \left( 1 - 0.47 \rho_p \frac{f_{pu}}{f'_c} \right) \quad (4.44)$$

donde el valor de  $f_{ps}$  no debe ser menor de  $0.85f_{pu}$  ni mayor de  $f_{pu}$ .

El límite inferior  $f_{ps}=0.85f_{pu}$  de la ecuación (4.44) se obtiene para un valor de  $\rho_p = 0.30 f'_c / f_{pu}$ , y el límite superior  $f_{ps}=f_{pu}$  para  $\rho_p = 0$ .

Los procedimientos para calcular la resistencia a flexión de las vigas no compuestas, también se pueden aplicar para vigas compuestas, pero será necesario incluir el efecto de las diferentes resistencias del concreto, tanto para la losa como para la viga precolada. Tal efecto no se produce, cuando el eje neutro cae dentro de la losa, lo cual es muy frecuente. En la mayoría de los casos prácticos, los cálculos de la resistencia se deben basar en una sección homogénea constituida por el concreto colado en sitio que es por lo general el que tiene menos resistencia. Para grandes deformaciones de compresión la diferencia entre los módulos de elasticidad del concreto colado en sitio y el precolado, que conduce al empleo del ancho efectivo del patín a compresión transformado en los cálculos elásticos, no tiene significado y, por lo tanto, los cálculos deben basarse en la totalidad del ancho efectivo del patín.

## 4.7 RESISTENCIA AL CORTANTE

En el análisis del cortante en vigas de concreto presforzado, los esfuerzos cortantes producidos por flexión y torsión están generalmente por debajo de la resistencia al cortante directo del concreto; siendo de mayor importancia los esfuerzos de tensión diagonal producidos por el esfuerzo cortante, actuando ya sea solo o en combinación con los esfuerzos normales longitudinales.

Si una viga de concreto presforzado está bajo cargas relativamente bajas, no se agrietará, y la respuesta del concreto será prácticamente elástica. Por lo tanto, los esfuerzos cortantes, los debidos a la flexión, y los esfuerzos principales que resultan de su acción combinada se pueden hallar basándose en las ecuaciones de la mecánica. El esfuerzo cortante en el concreto para cualquier ubicación está dada por:

$$v = \frac{VQ}{I_c b_w} \quad (4.45)$$

donde  $V$  es la fuerza cortante neta en la sección transversal debida a las cargas aplicadas y al presfuerzo,  $Q$  es el momento estático del área alrededor del eje neutro de la parte de la sección transversal que se encuentra hacia fuera del plano de corte considerado,  $I_c$  es el momento de inercia y  $b_w$  es el ancho de la sección transversal a la altura del plano considerado.

El presfuerzo por lo general introduce una fuerza cortante actuando en sentido contrario al cortante inducido por las cargas, como resultado de la inclinación del tendón. Por lo tanto los esfuerzos cortantes netos en una viga sin agrietar son aquéllos correspondientes a la suma del esfuerzo producido por las cargas y del esfuerzo producido por el presfuerzo. Sin embargo en la mayoría de los casos, en la parte del claro en que es más probable el agrietamiento por flexión-cortante, la inclinación del tendón es muy pequeña, por lo que se desprecia en el análisis la fuerza de cortante producida por la inclinación del tendón.

Para vigas con secciones rectangulares, la variación del esfuerzo cortante según la profundidad del elemento considerado es parabólica, siendo el cero el valor del esfuerzo cortante en las caras superior e inferior y alcanzando un máximo en el punto medio de la profundidad. Para vigas de sección  $I$ , comúnmente usadas en elementos presforzados, los esfuerzos cortantes aumentan bruscamente en la transición del patín al alma, debido a la reducción del ancho de la sección. La distribución del esfuerzo se caracteriza por tener un valor casi constante del esfuerzo cortante en toda la profundidad del alma.

Para vigas  $I$ , la máxima tensión principal no se encontrará en el eje neutro, en donde el esfuerzo cortante es máximo, sino que estará cerca de la unión del alma con el patín inferior, en donde el esfuerzo cortante es alto también, pero en donde la compresión longitudinal se reduce por el efecto de las cargas aplicadas.

La ubicación crítica para la tensión diagonal no es generalmente adyacente a los apoyos, aún cuando el cortante exterior neto tiene un valor más alto aquí, debido a que la compresión longitudinal del presfuerzo es apenas reducida desde su valor total mediante los pequeños momentos exteriores actuantes. Una considerable compresión longitudinal reduce el esfuerzo de tensión principal cerca de los apoyos. Adicionalmente, los esfuerzos de compresión verticales provenientes de las reacciones de la viga evitan el agrietamiento diagonal cerca de los apoyos. Por lo tanto, el agrietamiento por tensión diagonal en vigas  $I$  de concreto presforzado, simplemente apoyadas y uniformemente cargadas, es propenso a ocurrir en los alrededores de las secciones ubicadas a un cuarto del claro desde los apoyos.

En vigas de concreto presforzado pueden ocurrir dos tipos de grietas diagonales: grietas por flexión-cortante y grietas por cortante en el alma. Las grietas por flexión-cortante se presentan después de que han ocurrido las grietas por flexión. Las grietas por flexión se extienden más o menos verticalmente dentro de la viga desde la cara de tensión. Cuando se desarrolla una combinación crítica de esfuerzos de flexión y cortante en la cabeza de una grieta por flexión, la grieta se extiende en una dirección inclinada, con una proyección horizontal por lo menos igual a la magnitud del peralte efectivo. Adicionalmente se forma una segunda grieta por flexión a una distancia de aproximadamente la mitad del peralte efectivo de la primera grieta. Si no se proporciona refuerzo en el alma, la grieta puede producir una falla por compresión cortante, en la cual el área de compresión del concreto cerca de la parte superior de la viga,

reducida por la grieta diagonal, es insuficiente para resistir las fuerzas provenientes de la flexión.

Mientras que el agrietamiento por flexión-cortante es el tipo más común, las grietas por cortante en el alma pueden ocurrir cerca de los apoyos de vigas altamente presforzadas con almas relativamente delgadas. Este tipo de grietas se inicia en el alma, sin previo agrietamiento por flexión, cuando la tensión principal en el concreto iguala a la resistencia de tensión del concreto. Este tipo de grietas cuando se presentan, se extiende rápidamente en forma inclinada, y si no encuentra refuerzo en el alma, conducirá a la falla de la viga.

De acuerdo a las especificaciones de la AASHTO, el diseño de los elementos de concreto presforzado bajo la acción de fuerza cortante debe cumplir con la relación:

$$V_u \leq \phi(V_c + V_s) \quad (4.46)$$

donde  $V_u$  es la fuerza cortante última;  $V_c$  es la resistencia nominal al cortante proporcionada por el concreto;  $V_s$  es la resistencia nominal al cortante proporcionada por el acero de refuerzo para cortante, y  $\phi$  es un factor de reducción de resistencia, que para cortante se toma igual a 0.9.

Las mismas especificaciones de la AASHTO establecen usar la siguiente ecuación para el cálculo de la fuerza cortante última:

$$V_u = 1.3 \left( V_d + \frac{5}{3} V_{I+I} \right) \quad (4.47)$$

donde  $V_{I+I}$  es la fuerza cortante producida por la carga viva más una fuerza cortante que toma en cuenta el efecto del impacto de la carga viva sobre la estructura.

La resistencia nominal a la fuerza cortante proporcionada por el concreto  $V_c$  debe ser el menor de los valores de  $V_{ci}$  y  $V_{cw}$ , donde  $V_{ci}$  es la resistencia nominal a la fuerza cortante proporcionada por el concreto cuando se presentan grietas de flexión-cortante, y  $V_{cw}$  es la correspondiente resistencia cuando se presentan grietas por cortante en el alma.

El valor de la resistencia del concreto a la fuerza cortante  $V_{ci}$ , puede ser calculado con la siguiente expresión:

$$V_{ci} = 0.16 \sqrt{f'_c} b_w d + V_o + \frac{V_i M_{cr}}{M_{\max}} \quad (4.48)$$

donde  $V_{ci}$  no puede ser menor que  $0.45 \sqrt{f'_c} b_w d$ , y el peralte efectivo  $d$  no debe considerarse menor a  $0.8 h$ .

El cortante  $V_i$  y el momento flexionante  $M_{\max}$  son los debidos a las cargas muerta y viva considerando factores de carga, pero sin incluir el peso propio del elemento. El cortante  $V_o$  es el debido al peso propio del elemento sin considerar factores de carga.

Para una viga compuesta, el momento  $M_{cr}$  que produce el agrietamiento puede ser calculado utilizando la siguiente expresión:

$$M_{cr} = \frac{I_{cc}}{c_{2c}} \left( 1.6\sqrt{f'_c} + f_{2p} - f_o \right) \quad (4.49)$$

donde  $f_o$  es el esfuerzo de flexión en el concreto en la cara inferior de la trabe debido al peso propio de la viga precolada, calculado sin factor de carga;  $c_{2c}$  es la distancia desde el centroide del concreto a la cara inferior de la viga compuesta;  $I_{cc}$  es el momento de inercia de la sección transversal de concreto de la viga compuesta,  $f_{2p}$  es el esfuerzo de compresión del concreto en la cara inferior debido a la fuerza efectiva de presfuerzo.

La resistencia nominal al cortante debido al agrietamiento por cortante en el alma se calcula con la siguiente ecuación:

$$V_{cw} = \left( 0.93\sqrt{f'_c} + 0.3f_{cc} \right) b_w d + V_p \quad (4.50)$$

donde  $f_{cc}$  es el esfuerzo de compresión en el centroide del concreto debido a la fuerza de presfuerzo;  $V_p$  es la componente vertical de la fuerza efectiva de presfuerzo, es decir,  $V_p = P_e \text{sen } \theta$ , donde  $\theta$  es la inclinación del centroide del tendón.

Para calcular la resistencia a la fuerza cortante  $V_s$  proporcionado por el refuerzo perpendicular al eje del elemento, se utiliza la siguiente ecuación:

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} \quad (4.51)$$

donde  $V_s$  no considerarse mayor a  $2.12\sqrt{f'_c} b_w d$ ,  $A_v$  es el área de refuerzo para cortante dentro de una distancia  $s$ ,  $f_y$  es el esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo que no debe exceder de  $4200 \text{ kg/cm}^2$ , y  $d$  es el peralte efectivo de la viga que no debe tomarse menor a 0.8 del peralte total.

Para asegurar que cualquier potencial grieta diagonal será atravesada por lo menos una mínima cantidad del acero del alma, el espaciamiento máximo del refuerzo del alma no debe exceder del menor de los siguientes valores:  $0.75h$  o  $61 \text{ cm}$ . Si el valor de  $V_s$  sobrepasa de  $1.06\sqrt{f'_c} b_w d$ , estos máximos espaciamientos pueden reducirse a la mitad.

Para el diseño del refuerzo del alma, cuando las reacciones a las cargas aplicadas introducen compresión en la región de los apoyos del elemento presforzado, las especificaciones de la AASHTO indican que las secciones localizadas a una distancia menor que la mitad del peralte, pueden diseñarse para la misma fuerza cortante  $V_u$  que la calculada a una distancia  $h/2$ .

Siguiendo éstas mismas especificaciones, el refuerzo del alma requerido en los puntos cuartos del claro, se debe utilizar en la totalidad de los cuartos extremos. También recomienda que se verifique el cortante en el centro del claro.

En una viga compuesta por una viga precolada de concreto presforzado y una losa de concreto colado en sitio, existe la tendencia de que la losa se deslice horizontalmente sobre la viga precolada cuando están sujetas a esfuerzos de flexión. Si no se evita este deslizamiento, estos dos elementos de concreto actuarán separadamente, resistiendo cada uno de ellos una parte de la carga independientemente, mediante flexión alrededor de sus propios ejes centroidales.

La resistencia al cortante horizontal a lo largo de la superficie de contacto se puede proporcionar mediante la adhesión natural y la fricción entre el concreto colado en sitio y el prefabricado. De ser necesario se prolongan los estribos dentro de la losa o se proporcionan llaves de corte desde la parte superior de la viga precolada hasta dentro de la losa, aún cuando estas ligaduras no son efectivas sino hasta la ocurrencia de algún deslizamiento. Las ligaduras para el cortante horizontal pueden consistir en simples varillas o estribos con piernas múltiples con un adecuado anclaje.

De acuerdo a las especificaciones de la AASHTO, el diseño por cortante horizontal en miembros de concreto presforzado sujetos a flexión debe estar basado en la ecuación:

$$V_u \leq \phi V_{nh} \quad (4.52)$$

donde  $V_u$  es la fuerza cortante última;  $V_{nh}$  es la resistencia nominal al cortante horizontal, y  $\phi$  es un factor de reducción de resistencia, que para cortante se toma igual a 0.9.

Los valores que debe tomar  $V_{nh}$  en la ecuación 4.52, son los siguientes:

- 1) Cuando no se proporcionan ligaduras, pero las superficies de contacto se encuentran limpias, libres de lechada, e intencionalmente rugosas  $V_{nh}$  no debe ser mayor que  $5.6 b_v d$ ; donde  $V_{nh}$  está en  $\text{kg}_f$ , el ancho del patín superior de la viga precolada  $b_v$  y el peralte efectivo de la sección compuesta  $d$  están en cm.
- 2) Cuando se cumple con los requerimientos mínimos de ligaduras, las superficies de contacto se encuentran limpias y libres de lechada, pero no intencionalmente rugosas  $V_{nh}$  no debe ser mayor que  $5.6 b_v d$ .
- 3) Cuando se cumple con los requerimientos mínimos de ligaduras, y las superficies de contacto se encuentran limpias, libres de lechada, e intencionalmente rugosas  $V_{nh}$  no debe ser mayor que  $24.6 b_v d$ .
- 4) Por cada porcentaje en exceso del mínimo requerido de ligaduras que cruza la superficie de contacto, la resistencia a cortante horizontal puede ser incrementada en  $\frac{11.2 f_y}{2800} b_v d$ , donde  $f_y$  es el esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo ordinario, en  $\text{kg}/\text{cm}^2$ .

El requerimiento mínimo de ligaduras está dado por la ecuación:

$$A_v = \frac{3.52 b_v s}{f_y} \quad (4.53)$$

donde el área transversal de las ligaduras  $A_v$  está en  $\text{cm}^2$  y el espaciamiento  $s$  de las ligaduras está en cm.

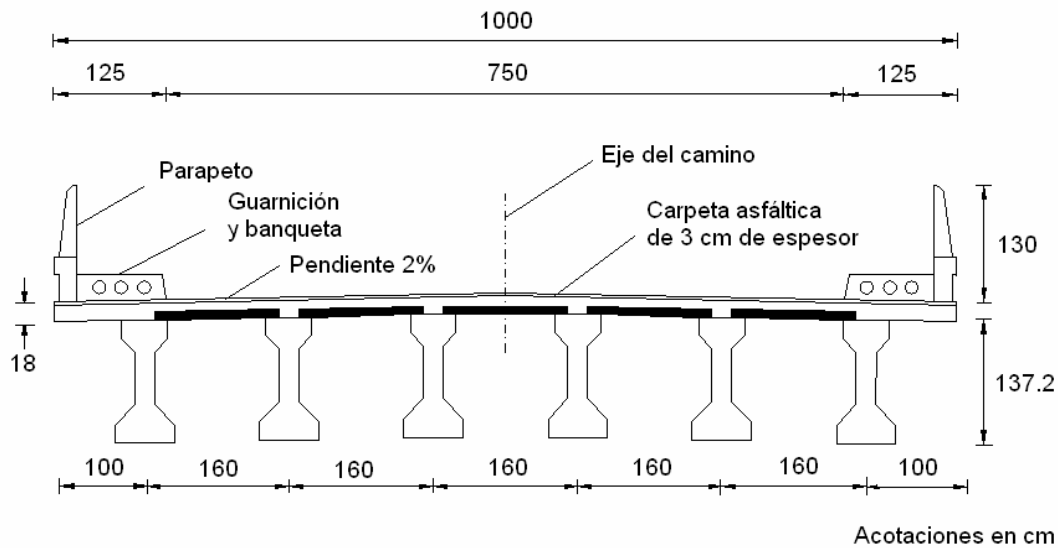
El espaciamiento de las ligaduras no debe ser mayor que cuatro veces la menor dimensión del elemento soportado (por ejemplo, el espesor de la losa) ni que 60 cm.

## CAPÍTULO 5

### EJEMPLO DE DISEÑO DE UNA TRABE DE CONCRETO PRESFORZADO

#### 5.1 DATOS GENERALES

Longitud del claro, en m:	$L := 27$
Ancho de la calzada, en m:	$A_{calz} := 7.5$
Número de traves:	$n := 6$
Separación entre traves, en cm:	$st = 160$
Carga móvil:	HS-20
Resistencia última a tensión del acero de presfuerzo, en kg/cm <sup>2</sup> :	$f_{pu} := 19000$
Módulo de elasticidad del acero de presfuerzo, en kg/cm <sup>2</sup> :	$E_p := 1.9 \cdot 10^6$
Esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo ordinario, en kg/cm <sup>2</sup> :	$f_y := 4000$
Área transversal de los estribos de refuerzo, en cm <sup>2</sup> :	$A_v := 1.42$
Espesor de la losa, en cm:	$h_f := 18$
Resistencia del concreto de la viga precolada, en kg/cm <sup>2</sup> :	$f_c := 350$
Resistencia del concreto en la transferencia del presfuerzo, en kg/cm <sup>2</sup> :	$f_{ci} := 250$
Resistencia del concreto de la losa, en kg/cm <sup>2</sup> :	$f_{cs} := 250$
Módulo de elasticidad del concreto presforzado, en kg/cm <sup>2</sup> :	$E_c := 15000 \cdot \sqrt{f_c}$
Módulo de elasticidad del concreto presforzado en la transferencia, en kg/cm <sup>2</sup> :	$E_{ci} := 15000 \cdot \sqrt{f_{ci}}$
Relación de módulos del acero y del concreto presforzado:	$n_p := \frac{E_p}{E_c}$
Relación de módulos del concreto de la losa y de la viga:	$n_c := \sqrt{\frac{f_{cs}}{f_c}}$
Peso volumétrico del concreto, en kg/m <sup>3</sup> :	$w_c := 2400$
Especificaciones:	AASHTO



**Figura 5.1** Sección transversal de la superestructura

Datos de secciones prefabricadas:

**Tabla 5.1** Características de las secciones tipo AASHTO y NU

Tabla\_5\_1 :=

"Tipo"	"Sección"	"D1"
1	"AASHTO Tipo I"	71.1
2	"AASHTO Tipo II"	91.4
3	"AASHTO Tipo III"	114.3
4	"AASHTO Tipo IV"	137.2
5	"AASHTO Tipo V"	160
6	"AASHTO Tipo VI"	182.9
7	"NU1110"	110
8	"NU2400"	240

Se recomienda que se use secciones tipo AASHTO para claros entre 15 a 35 metros.

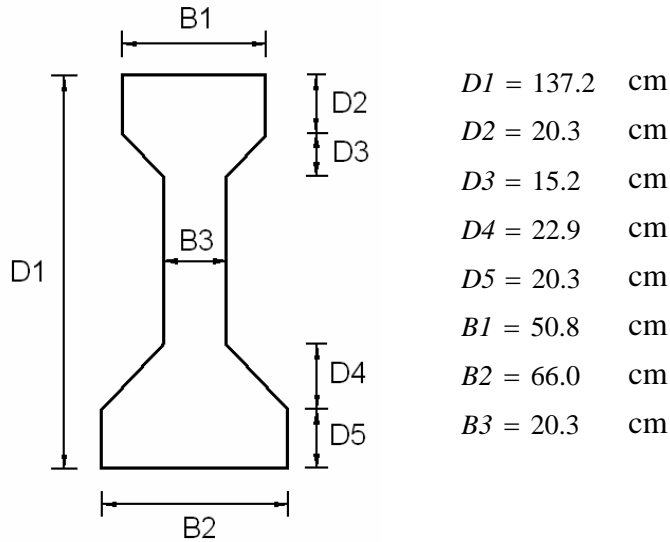
También se recomienda que para estas secciones, la relación longitud a peralte de la viga sea de 16 a 22; es decir, que el peralte esté entre:

$$\frac{L}{22} = 122.7 \quad \text{cm} \quad \text{a} \quad \frac{L}{16} = 168.8 \quad \text{cm}$$



La sección a usar es la Tipo := 4

Sección = "AASHTO Tipo IV"



**Figura 5.2 Sección transversal de una trabe I**

Datos de la sección no compuesta:

Área de la viga, en  $\text{cm}^2$ :

$$A_{cp} = 5071.0$$

Momento de inercia de la sección transversal, en  $\text{cm}^4$ :

$$I_{cp} = 1.085 \times 10^7$$

Distancias desde las fibras superior e inferior de la trabe al centro de gravedad de la sección, en cm:

$$c_{1p} = 74.5$$

$$c_{2p} = 62.7$$

Ancho del patín superior, en cm:

$$b_v = 50.8$$

Espesor del alma, en cm:

$$b_w = 20.3$$

Peralte total de la viga, en cm:

$$h = 137.2$$

Módulo de sección de la fibra superior de la viga, en  $\text{cm}^3$ :

$$S_{1p} = 145638$$

Módulo de sección de la fibra inferior de la viga, en  $\text{cm}^3$ :

$$S_{2p} = 173046$$

Datos de la sección compuesta:

Ancho efectivo del patín:

$$\frac{L}{4} = 675.0 \quad \text{cm}$$

$$12 \cdot h_f + b_v = 266.8 \quad \text{cm}$$

$$st = 160.0 \quad \text{cm}$$

$$b := \min\left(\frac{L}{4}, 12 \cdot h_f + b_v, st\right)$$

$$b = 160.0 \quad \text{cm}$$

Área:

$$A_{cc} := A_{cp} + n_c \cdot b \cdot h_f$$

$$n_c = 0.85$$

$$A_{cc} = 7505 \quad \text{cm}^2$$

Distancias desde las fibras inferior y superior de la viga y superior de la losa al centro de gravedad de la sección:

$$c_{2c} := \frac{A_{cp} \cdot c_{2p} + n_c \cdot b \cdot h_f \cdot \left(h + \frac{h_f}{2}\right)}{A_{cc}} \quad c_{2c} = 89.8 \quad \text{cm}$$

$$c_{1c} := h - c_{2c} \quad c_{1c} = 47.4 \quad \text{cm}$$

$$c_{3c} := c_{1c} + h_f \quad c_{3c} = 65.4 \quad \text{cm}$$

Momento de inercia:

$$I_{cc} := I_{cp} + A_{cp} \cdot (c_{2c} - c_{2p})^2 + \frac{n_c \cdot b \cdot h_f^3}{12} + n_c \cdot b \cdot h_f \cdot \left(h + \frac{h_f}{2} - c_{2c}\right)^2$$

$$I_{cc} = 2.238 \times 10^7 \quad \text{cm}^4$$

Módulos de sección de las fibras superior e inferior de la viga y superior de la losa:

$$S_{1c} := \frac{I_{cc}}{c_{1c}} \quad S_{1c} = 472014 \quad \text{cm}^3$$

$$S_{2c} := \frac{I_{cc}}{c_{2c}} \quad S_{2c} = 249302 \quad \text{cm}^3$$

$$S_{3c} := \frac{I_{cc}}{c_{3c}} \quad S_{3c} = 342140 \quad \text{cm}^3$$

Datos del acero de presfuerzo, para torones relevados de esfuerzos:

**Tabla 5.2 Diámetro y área transversal de los torones**

Tabla\_5\_2 :=

"Tipo"	"Descripción"	"Diámetro"	"Área"
1	"6/10-270k"	1.53	1.4
2	"9/16-270k"	1.43	1.239
3	"1/2-270k"	1.27	0.987
4	"7/16-270k"	1.11	0.742
5	"3/8-270k"	0.95	0.548

El torón que se usará es el  $Tipo := 3$

Torón = "1/2-270k"

Diámetro, en cm:

$$D_p = 1.27$$

Área, en cm<sup>2</sup>:

$$a_{ps} = 0.987$$

## 5.2 CÁLCULO DE LA CARGA MUERTA

Peso propio de las vigas:

$$w_o := w_c \cdot A_{cp} \quad w_o = 1.217 \quad \text{t/m}$$

Peso de la losa:

$$w_{dp} := w_c \cdot st \cdot h_f \quad w_{dp} = 0.691 \quad \text{t/m}$$

Peso de la banqueta:

$$w_{banq} := 0.696 \quad \text{t/m}$$

Peso del parapeto:

$$w_{parap} := 0.033 \quad \text{t/m}$$

Peso de la carpeta asfáltica:

$$w_{carp} := \frac{0.10 \cdot (2.2) \cdot (A_{calz})}{n} \quad w_{carp} = 0.275 \quad \text{t/m}$$

Peso de la banqueta, parapeto y carpeta asfáltica:

$$w_{dc} := w_{banq} + w_{parap} + w_{carp} \quad w_{dc} = 1.004 \quad \text{t/m}$$

Para el peso propio de la trabe prefabricada:

$$M_o(x) := \frac{w_o}{2} \cdot (L \cdot x - x^2)$$

$$V_o(x) := \frac{w_o}{2} \cdot (L - 2 \cdot x)$$

Para el peso debido a la losa colada en sitio:

$$M_{dp}(x) := \frac{w_{dp}}{2} \cdot (L \cdot x - x^2)$$

$$V_{dp}(x) := \frac{w_{dp}}{2} \cdot (L - 2 \cdot x)$$

Para el peso debido a la banqueta, parapeto y carpeta asfáltica:

$$M_{dc}(x) := \frac{w_{dc}}{2} \cdot (L \cdot x - x^2)$$

$$V_{dc}(x) := \frac{w_{dc}}{2} \cdot (L - 2 \cdot x)$$

Para la carga muerta total:

$$M_{dt}(x) := M_o(x) + M_{dp}(x) + M_{dc}(x)$$

donde las longitudes están en m, la carga por unidad de longitud en t/m, la fuerza cortante en toneladas y los momentos en t m.

### 5.3 CÁLCULO DE LA CARGA MÓVIL

Para el cálculo del factor de concentración con el método de Engesser-Courbon, se utilizará la siguiente figura:

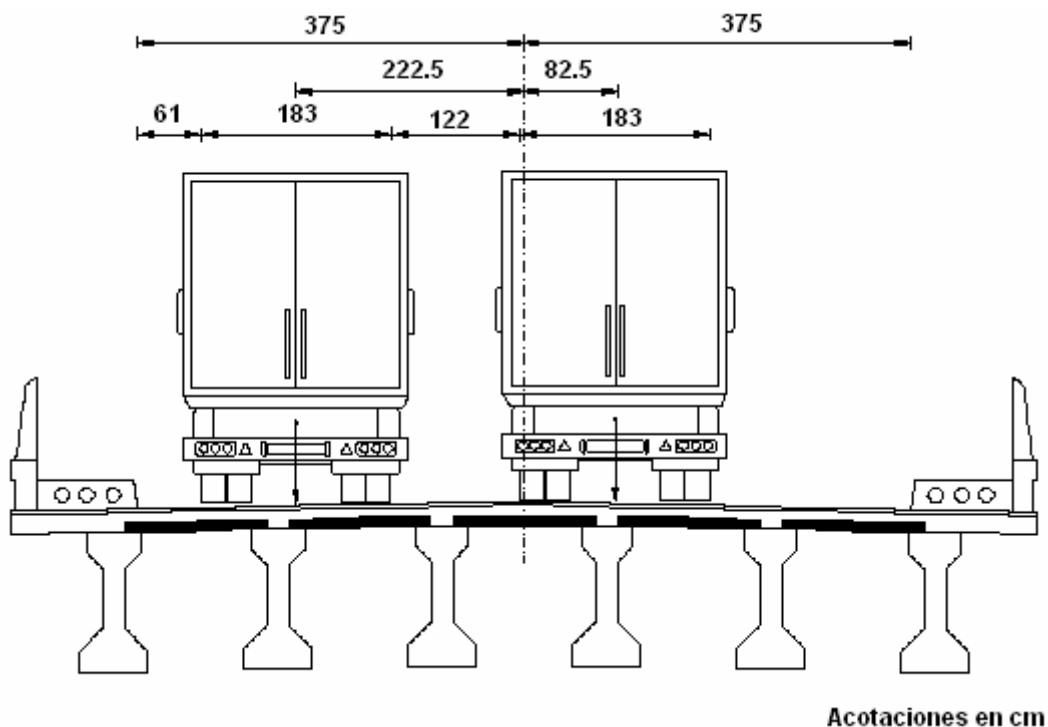


Figura 5.3 Posición de la carga móvil para el cálculo del factor de concentración

Factores de concentración:

Número de apoyos:  $n := 6$   
 Longitud total entre apoyos, en cm:  $l := (n - 1) \cdot st$   
 Número de apoyo en turno:  $i := 1 .. n$   
 Peso de las dos cargas (se suponen unitarias):  $P := 2$   
 Excentricidad de las dos cargas, en cm:  $e := \frac{222.5 - 82.5}{2}$

$$R_i := \frac{P}{n} \cdot \left[ 1 - 6 \frac{2 \cdot i - (n + 1)}{n + 1} \cdot \left( \frac{e}{l} \right) \right]$$

$i =$	$R_i =$
1	0.458
2	0.408
3	0.358
4	0.308
5	0.258
6	0.208

Máximo factor de concentración:

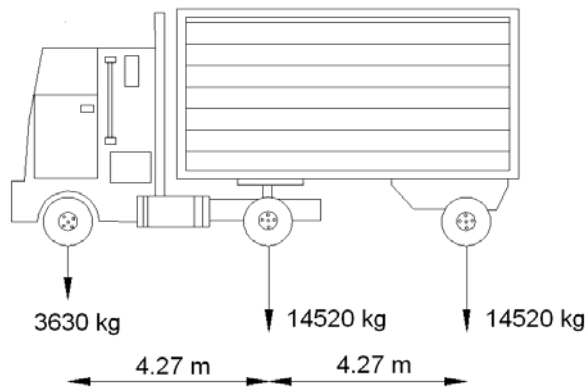
$$R_1 = 0.458$$

Fracción de la carga móvil que se incrementa a ésta para considerar el impacto (no debe ser mayor a 0.3):

$$I := \frac{15.24}{L + 38.10}$$

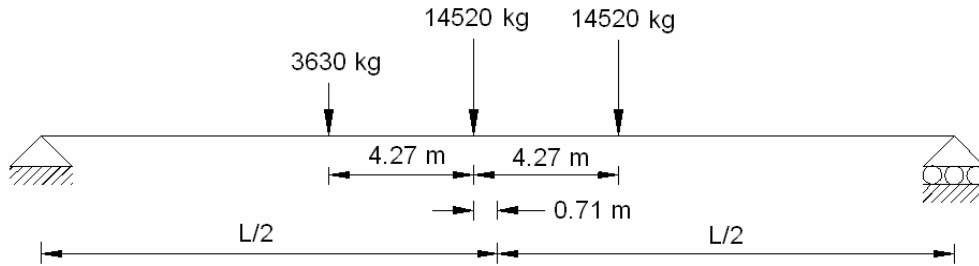
$$I = 0.23$$

Momento máximo para una carga móvil tipo HS-20:

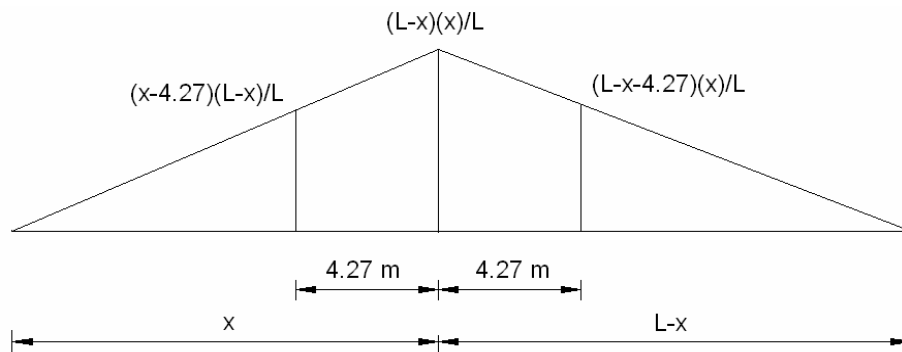


**Figura 5.4** Carga móvil tipo HS-20

Considerando que el momento máximo para una carga móvil HS-20 se presenta cuando el tren de cargas se sitúa de tal manera que la rueda central y la resultante de las cargas equidistan del centro del claro:



**Figura 5.5** Posición de la carga móvil HS-20 que produce el momento máximo



**Figura 5.6** Línea de influencia de una carga móvil unitaria en el momento flexionante para una sección  $x$  cercana al centro del claro

$$x := \frac{L}{2} - 0.71$$

$$M := \frac{1}{L} \cdot [3.63 \cdot (x - 4.27) \cdot (L - x) + 14.52 \cdot (2 \cdot L - 2 \cdot x - 4.27) \cdot (x)]$$

$$M = 182.4 \quad \text{t m / carril}$$

Momento flexionante por carga móvil:

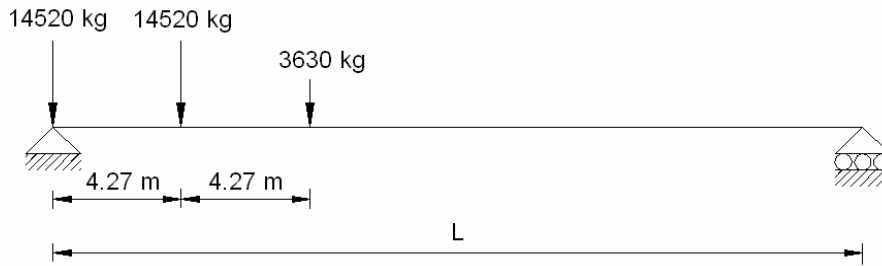
Suponiendo variación parabólica de la carga viva desde un máximo al centro del claro a cero en los extremos:

$$x := \frac{L}{2}$$

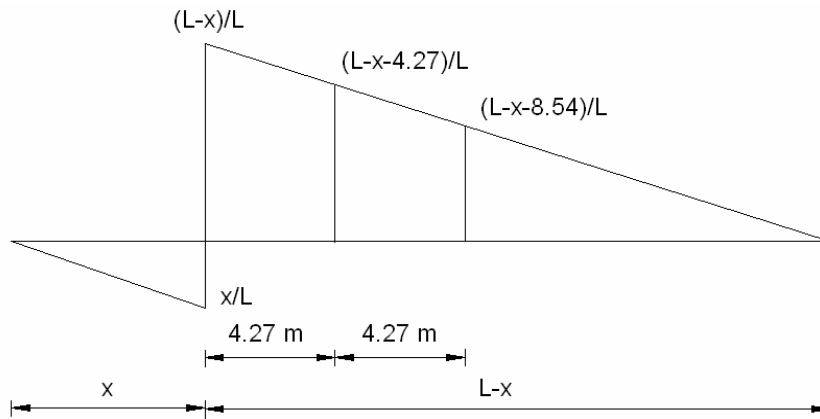
$$M_I(x) := R_1 \cdot (I + I) \cdot \left[ I - \left( \frac{L - 2 \cdot x}{L} \right)^2 \right] \cdot M$$

$$M_I(x) = 103.2 \quad \text{t m / trabe}$$

Cortante máximo para una carga móvil tipo HS-20:



**Figura 5.7** Posición de la carga móvil HS-20 que produce la máxima fuerza cortante



**Figura 5.8** Línea de influencia de una carga móvil unitaria en la fuerza cortante para una sección  $x$  menor o igual que la mitad de la longitud del claro

$$x := 0$$

$$V := \frac{1}{L} \cdot [14.52 \cdot (2 \cdot L - 2 \cdot x - 4.27) + 3.63 \cdot [L - x - 2 \cdot (4.27)]]$$

$$V = 29.2 \quad \text{t / carril}$$

Fuerza cortante por carga móvil:

$$V_I := R_1 \cdot (1 + D) \cdot V$$

$$V_I = 16.5 \quad \text{t / trabe}$$

## 5.4 CÁLCULO DEL NÚMERO Y LA EXCENTRICIDAD DE LOS TORONES

El esfuerzo permisible en la fibra inferior de una trabe debido a la fuerza de presfuerzo efectiva y carga de servicio:

$$f_{ts} := 1.6 \cdot \sqrt{f'_c}$$

$$f_{ts} = 29.9 \quad \text{kg/cm}^2$$

Suponiendo la ordenada del centroide del área de acero:

$$y_{ps} := 10 \quad \text{cm}$$

Excentricidad de los tendones:

$$e := c_{2p} - y_{ps}$$

$$e = 52.7 \quad \text{cm}$$

Fuerza de presfuerzo efectiva requerida para la sección de máximo momento:

$$x := \frac{L}{2}$$

$$P_e := \frac{1}{\frac{1}{A_{cp}} + \frac{e}{S_{2p}}} \cdot \left( \frac{M_o(x) + M_{dp}(x)}{S_{2p}} \cdot 10^5 + \frac{M_{dc}(x) + M_l(x)}{S_{2c}} \cdot 10^5 - f_{ts} \right)$$

$$P_e = 296232 \quad \text{kg}$$

Suponiendo pérdidas finales de la fuerza de presfuerzo, debidas a la contracción y fluencia del concreto, y a la relajación del acero, del 20%:

$$P_i := \frac{P_e}{0.8}$$

$$P_i = 370290 \quad \text{kg}$$

Esfuerzo temporal en el acero de presfuerzo al momento de la transferencia para torones relevados de esfuerzos:

$$f_{pi} := 0.7 \cdot f_{pu}$$

$$f_{pi} = 13300 \quad \text{kg/cm}^2$$

Área del acero de presfuerzo requerido:

$$A_{ps} := \frac{P_i}{f_{pi}}$$

$$A_{ps} = 27.8 \quad \text{cm}^2$$



Número de torones requeridos:

$$\frac{A_{ps}}{a_{ps}} = 28.2$$

Número de torones a usar:

$$n_{ps} := 29$$

Área del acero de presfuerzo requerido:

$$A_{ps} := n_{ps} \cdot a_{ps}$$

$$A_{ps} = 28.6 \quad \text{cm}^2$$

Ordenada del centroide del área de acero:

$$y_{ps} := \frac{11 \cdot (5) + 9 \cdot (10) + 9 \cdot (15)}{29} \quad \text{cm}$$

$$y_{ps} = 9.7 \quad \text{cm}$$

éste último valor debe ser aproximadamente igual a la  $y_{ps}$  supuesta.

La excentricidad de los tendones:

$$e := c_{2p} - y_{ps}$$

$$e = 53.0 \quad \text{cm}$$

Fuerza inicial de presfuerzo:

$$P_i := A_{ps} \cdot f_{pi}$$

$$P_i = 380686 \quad \text{kg}$$

## 5.5 CÁLCULO DE LAS PÉRDIDAS EN LA FUERZA DE PRESFUERZO

Por ser un elemento pretensado no existen pérdidas por deslizamiento del anclaje y fricción del acero, por lo que las pérdidas inmediatas se reducen al acortamiento elástico del concreto y la relajación instantánea del acero.

Esfuerzo del concreto en el centro de gravedad del acero de presfuerzo, debido a la fuerza de presfuerzo y a la carga muerta de la viga precolada inmediatamente después de la transferencia en la sección de máximo momento:

$$f_{cir} := -\frac{P_i}{A_{cp}} - \frac{P_i \cdot e^2}{I_{cp}} + \frac{M_o(x) \cdot e}{I_{cp}} \cdot 10^5$$

$$f_{cir} = -119.6 \quad \text{kg/cm}^2$$

Acortamiento elástico del concreto:

$$ES := \frac{E_p}{E_{ci}} \cdot f_{cir}$$

$$E_c = 2.81 \times 10^5 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$\frac{E_p}{E_{ci}} = 8.0$$

$$E_{ci} = 2.37 \times 10^5 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$ES = 957.9 \quad \text{kg/cm}^2$$

Porcentaje de humedad relativa del ambiente  $H$  (90% para tipo de clima muy húmedo, 70% para clima con humedad intermedia y 40% para clima seco):

$$H := 40$$

Contracción del concreto:

$$SH := 1190 - 10.5 \cdot H$$

$$SH = 770.0 \quad \text{kg/cm}^2$$

Esfuerzo del concreto en el centro de gravedad del acero de presfuerzo debido a toda la carga muerta exceptuando la carga muerta presente en el momento de la transferencia de la fuerza de presfuerzo:

$$f_{c ds} := \left[ \frac{M_{dp}(x) \cdot e}{I_{cp}} + \frac{M_{dc}(x) \cdot (c_{2c} - y_{ps})}{I_{cc}} \right] \cdot 10^5$$

$$f_{c ds} = 63.5 \quad \text{kg/cm}^2$$

Fluencia del concreto:

$$CR_c := 12 \cdot f_{cir} - 7 \cdot f_{c ds}$$

$$CR_c = 990.1 \quad \text{kg/cm}^2$$

Relajación del acero:

$$CR_s := 1400 - 0.4 \cdot ES - 0.2 \cdot (SH + CR_c)$$

$$CR_s = 664.8 \quad \text{kg/cm}^2$$

Pérdidas a largo plazo:

$$SH + CR_c + CR_s = 2424.9 \quad \text{kg/cm}^2$$

Fuerza de presfuerzo efectiva:

$$P_e := A_{ps} \cdot [f_{pi} - (SH + CR_c + CR_s)]$$

$$P_e = 311278 \quad \text{kg}$$

Esfuerzo en el acero de presfuerzo debido a la fuerza efectiva de presfuerzo:

$$f_{pe} := \frac{P_e}{A_{ps}}$$

$$f_{pe} = 10875 \quad \text{kg/cm}^2$$

Porcentaje de las pérdidas a largo plazo de la fuerza de presfuerzo inicial:

$$\left(1 - \frac{P_e}{P_i}\right) \cdot 100 = 18.2$$

este porcentaje de pérdidas debe ser aproximadamente igual a la supuesta (20%).

Pérdidas de la fuerza de presfuerzo inicial:

$$\Delta f_s := SH + ES + CR_c + CR_s$$

$$\Delta f_s = 3382.8 \quad \text{kg/cm}^2$$

Comparando con la estimación de estas pérdidas propuesta por la AASHTO para elementos pretensados de diseño común y con resistencias a compresión del concreto de 350 kg/cm<sup>2</sup>:  
3160 kg/cm<sup>2</sup>

Fuerza de presfuerzo del gato:

$$P_j := P_e + A_{ps} \cdot \Delta f_s$$

$$P_j = 408105 \quad \text{kg}$$

Esfuerzo en el acero debido a la fuerza de presfuerzo del gato:

$$f_{pj} := \frac{P_j}{A_{ps}}$$

$$f_{pj} = 14258 \quad \text{kg/cm}^2$$

Comparando  $f_{pj}$  con el sobreesfuerzo permisible durante periodos cortos debido a la fuerza del gato sobre el tendón:

$$0.8 \cdot f_{pu} = 15200 \quad \text{kg/cm}^2$$

Porcentaje de las pérdidas inmediatas de la fuerza de presfuerzo:

$$\left(1 - \frac{P_i}{P_j}\right) \cdot 100 = 6.7$$

Porcentaje de las pérdidas totales de la fuerza de presfuerzo:

$$\left(1 - \frac{P_e}{P_j}\right) \cdot 100 = 23.7$$

Para fines de comparación, se calculará la pérdida de la fuerza de presfuerzo debida a la contracción y la fluencia del concreto siguiendo el código del ACI-209.

Considerando los siguientes datos para la viga prefabricada:

Edad de carga del concreto:	$t_{la} := 60$	días
Tiempo de curado a vapor del concreto:	$t_{cp} := 3$	días
Humedad relativa ambiental:	$H = 40$	%
Relación volumen superficie:	$VS = 12.0$	cm
Consistencia del concreto en estado fresco:	$S := 6.5$	cm
Porcentaje de finos del agregado del concreto:	$F := 60$	%
Contenido de cemento del concreto:	$CE := 446$	kg/m <sup>3</sup>
Contenido de aire del concreto:	$AC := 7$	%
Para la contracción del concreto:		
De la tabla 2.3:	$\gamma_{cp} := 1.10$	
De la ecuación 2.4:	$\gamma_H := 1.40 - 0.01 \cdot H$	$\gamma_H = 1.00$
De la ecuación 2.8:	$\gamma_d := 1.2 \cdot \exp(-0.0472 \cdot VS)$	$\gamma_d = 0.68$
De la ecuación 2.9:	$\gamma_S := 0.89 + 0.0161 \cdot S$	$\gamma_S = 0.99$
De la ecuación 2.11:	$\gamma_F := 0.9 + 0.002 \cdot F$	$\gamma_F = 1.02$
De la ecuación 2.12:	$\gamma_{ce} := 0.75 + 0.00061 \cdot CE$	$\gamma_{ce} = 1.02$
De la ecuación 2.13:	$\gamma_{ac} := 0.89 + 0.0161 \cdot AC$	$\gamma_{ac} = 1.00$
	$\gamma_{sh} := \gamma_{cp} \cdot \gamma_H \cdot \gamma_d \cdot \gamma_S \cdot \gamma_F \cdot \gamma_{ce} \cdot \gamma_{ac}$	$\gamma_{sh} = 0.78$
De la ecuación 2.3:	$\epsilon_{shu} := 780 \cdot 10^{-6} \cdot \gamma_{sh}$	$\epsilon_{shu} = 607.7 \times 10^{-6}$

Si se considera que la transferencia de la fuerza de presfuerzo al concreto ocurre a los 28 días de haberse colado el concreto, se tiene que en este tiempo ocurre una contracción, en concretos curados a vapor, del 35% de la contracción última que no afecta a la fuerza de presfuerzo. Por lo tanto, la pérdida de la fuerza de presfuerzo debida a la contracción es:

$$0.65 \cdot E_p \cdot \varepsilon_{shu} = 750.5 \quad \text{kg/cm}^2$$

Comparando con:  $SH = 770.0 \quad \text{kg/cm}^2$

Para la fluencia del concreto:

De la ecuación 3.4:  $\gamma_{la} := 1.13 \cdot t_{la}^{-0.094} \quad \gamma_{la} = 0.77$

De la ecuación 3.5:  $\gamma_H := 1.27 - 0.0067 \cdot H \quad \gamma_H = 1.00$

De la ecuación 3.8:  $\gamma_d := \frac{2}{3} \cdot (1 + 1.13 \cdot \exp(-0.213 \cdot VS)) \quad \gamma_d = 0.73$

De la ecuación 3.9:  $\gamma_S := 0.82 + 0.0264 \cdot S \quad \gamma_S = 0.99$

De la ecuación 3.10:  $\gamma_F := 0.88 + 0.0024 \cdot F \quad \gamma_F = 1.02$

De la ecuación 3.11:  $\gamma_{ac} := 0.46 + 0.09 \cdot AC \quad \gamma_{ac} = 1.09$

$$\gamma_{cr} := \gamma_{la} \cdot \gamma_H \cdot \gamma_d \cdot \gamma_S \cdot \gamma_F \cdot \gamma_{ac} \quad \gamma_{cr} = 0.62$$

De la ecuación 3.2:  $v_u := 2.35 \cdot \gamma_{cr} \quad v_u = 1.45$

De manera aproximada, para tomar en cuenta la reducción gradual de la fuerza de presfuerzo a medida en que ocurren la fluencia y la contracción del concreto, y la relajación del acero; se recomienda disminuir en 10% la fuerza de presfuerzo inicial en los cálculos de la fluencia del concreto:

$$n_p = 6.8$$

$$v_u \cdot n_p \cdot (0.9 \cdot f_{cir}) = 1059.0 \quad \text{kg/cm}^2$$

Comparando con:  $CR_c = 990.1 \quad \text{kg/cm}^2$

## 5.6 ANÁLISIS POR FLEXIÓN

Estado de carga I. Esfuerzos iniciales en la viga debidos al presfuerzo:

$$f_1 := -\frac{P_i}{A_{cp}} + \frac{P_i \cdot e}{S_{1p}} \quad f_1 = 63.6 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$f_2 := -\frac{P_i}{A_{cp}} - \frac{P_i \cdot e}{S_{2p}} \quad f_2 = -191.8 \quad \text{kg/cm}^2$$

Estado de carga II. Esfuerzos en la etapa de transferencia, considerando el presfuerzo inicial y el peso propio de la viga precolada:

$$f_1 := -\frac{P_i}{A_{cp}} + \frac{P_i \cdot e}{S_{1p}} - \frac{M_o(x)}{S_{1p}} \cdot 10^5 \quad f_1 = -12.6 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$f_2 := -\frac{P_i}{A_{cp}} - \frac{P_i \cdot e}{S_{2p}} + \frac{M_o(x)}{S_{2p}} \cdot 10^5 \quad f_2 = -127.7 \quad \text{kg/cm}^2$$

Comparando los esfuerzos anteriores con los permisibles en el concreto antes de las pérdidas a largo plazo:

En compresión:  $f_{ci} := -0.6 \cdot f'_{ci} \quad f_{ci} = -150.0 \quad \text{kg/cm}^2$

En tensión:  $f_{ti} := 0.8 \sqrt{f'_{ci}} \quad \text{o} \quad 14.1 \quad \text{kg/cm}^2$

$$f_{ti} = 12.6 \quad \text{kg/cm}^2$$

Estado de carga III. Esfuerzos debidos a la fuerza de presfuerzo efectiva y peso propio de la viga precolada:

$$f_1 := -\frac{P_e}{A_{cp}} + \frac{P_e \cdot e}{S_{1p}} - \frac{M_o(x)}{S_{1p}} \cdot 10^5 \quad f_1 = -24.2 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$f_2 := -\frac{P_e}{A_{cp}} - \frac{P_e \cdot e}{S_{2p}} + \frac{M_o(x)}{S_{2p}} \cdot 10^5 \quad f_2 = -92.7 \quad \text{kg/cm}^2$$

Estado de carga IV. Esfuerzos debidos a la fuerza de presfuerzo efectiva y carga muerta:

$$f_1 := -\frac{P_e}{A_{cp}} + \frac{P_e \cdot e}{S_{1p}} - \frac{M_o(x) + M_{dp}(x)}{S_{1p}} \cdot 10^5 \quad f_1 = -67.4 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$f_2 := -\frac{P_e}{A_{cp}} - \frac{P_e \cdot e}{S_{2p}} + \frac{M_o(x) + M_{dp}(x)}{S_{2p}} \cdot 10^5 \quad f_2 = -56.3 \quad \text{kg/cm}^2$$

Estado de carga V. Esfuerzos debidos a la fuerza de presfuerzo efectiva y carga de servicio:

$$f_1 := -\frac{P_e}{A_{cp}} + \frac{P_e \cdot e}{S_{1p}} - \frac{M_o(x) + M_{dp}(x)}{S_{1p}} \cdot 10^5 - \frac{M_{dc}(x) + M_l(x)}{S_{1c}} \cdot 10^5$$

$$f_1 = -108.6 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$f_2 := -\frac{P_e}{A_{cp}} - \frac{P_e \cdot e}{S_{2p}} + \frac{M_o(x) + M_{dp}(x)}{S_{2p}} \cdot 10^5 + \frac{M_{dc}(x) + M_l(x)}{S_{2c}} \cdot 10^5$$

$$f_2 = 21.8 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$f_3 := -n_c \cdot \frac{M_{dc}(x) + M_l(x)}{S_{3c}} \cdot 10^5 \quad f_3 = -48.1 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$f_4 := -n_c \cdot \frac{M_{dc}(x) + M_l(x)}{S_{1c}} \cdot 10^5 \quad f_4 = -34.9 \quad \text{kg/cm}^2$$

Comparando con los esfuerzos permisibles en el concreto bajo cargas de servicio después de las pérdidas:

En compresión para la viga:

$$f_{cs} := -0.4 \cdot f'_c$$

$$f_{cs} = -140.0 \quad \text{kg/cm}^2$$

En tensión:

$$f_{ts} = 29.9 \quad \text{kg/cm}^2$$

En compresión para la losa:

$$-0.4 \cdot f'_{cs} = -100.0 \quad \text{kg/cm}^2$$

Esfuerzo en el concreto bajo cargas de servicio al nivel del acero de presfuerzo:

$$f_c := -\frac{P_e}{A_{cp}} - \frac{P_e \cdot e^2}{I_{cp}} + \left[ \frac{(M_o(x) + M_{dp}(x)) \cdot e}{I_{cp}} + \frac{(M_{dc}(x) + M_l(x)) \cdot (e_{2c} - y_{ps})}{I_{cc}} \right] \cdot 10^5$$

$$f_c = 12.6 \quad \text{kg/cm}^2$$

Esfuerzo en el acero de presfuerzo bajo cargas de servicio:

$$f_s := n_p \cdot f_c$$

$$f_s = 85.2 \quad \text{kg/cm}^2$$

Comparando con esfuerzo permisible en el acero bajo cargas de servicio después de las pérdidas:

$$0.80 \cdot (0.85 \cdot f_{pu}) = 12920 \quad \text{kg/cm}^2$$

Datos para el diseño del refuerzo en el alma en esta sección:

Esfuerzo de compresión del concreto en la cara de inferior debido a la fuerza de presfuerzo efectiva:

$$f_{2p} := -\frac{P_e}{A_{cp}} - \frac{P_e \cdot e}{S_{2p}}$$

$$f_{2p} = -156.8 \quad \text{kg/cm}^2$$

Esfuerzo de compresión en el centroide del concreto debido a la fuerza de presfuerzo efectiva:

$$f_{cc} := \frac{P_e}{A_{cp}}$$

$$f_{cc} = 61.4 \quad \text{kg}$$

## 5.7 REVISIÓN POR RESISTENCIA ÚLTIMA

Peralte efectivo de la sección:

$$d := h_f + c_{Ip} + e$$

$$d = 145.5 \quad \text{cm}$$

Porcentaje de acero de presfuerzo:

$$\rho_p := \frac{A_{ps}}{b \cdot d}$$

$$\rho_p = 1.229 \times 10^{-3}$$

Esfuerzo medio en el acero de presfuerzo en la carga última  $f_{ps}$ , si  $f_{pe}/f_{pu} > 0.5$ :

$$\frac{f_{pe}}{f_{pu}} = 0.57$$

$$f_{ps} := f_{pu} \cdot \left( 1 - 0.5 \cdot \frac{\rho_p \cdot f_{pu}}{f_{cs}} \right)$$

$$f_{ps} = 18113 \quad \text{kg/cm}^2$$

Comparando  $f_{ps}$  con los límites inferior y superior, respectivamente:

$$0.85 \cdot f_{pu} = 16150 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$f_{pu} = 19000 \quad \text{kg/cm}^2$$



Espesor crítico del patín superior:

$$a := \frac{\rho_p \cdot f_{ps} \cdot d}{0.85 \cdot f'_{cs}}$$

$$a = 15.2 \quad \text{cm}$$

Comparando con espesor del patín superior de la sección compuesta:

$$h_f = 18.0 \quad \text{cm}$$

La condición que se debe cumplir para que una viga sea subreforzada es que la siguiente expresión sea menor a 0.30:

$$\frac{A_{ps} \cdot f_{ps}}{n_c \cdot b \cdot d \cdot f'_{cs}} = 0.11$$

Si  $a < h_f$  y se trata de una trabe subreforzada, el momento resistente nominal se calcula como:

$$M_n := A_{ps} \cdot f_{ps} \cdot \left( d - \frac{a}{2} \right) \cdot 10^{-5}$$

$$M_n = 715 \quad \text{t m}$$

donde se debe cumplir con  $M_n > M_u$

Factor de reducción de resistencia para el momento flexionante en elementos prefabricados en planta:

$$\phi := 1$$

Momento último de diseño:

$$M_u := \frac{1.3}{\phi} \cdot \left( M_{dt}(x) + \frac{5}{3} \cdot M_l(x) \right)$$

$$M_u = 568.5 \quad \text{t m}$$

Módulo de ruptura:

$$f_r := 1.989 \sqrt{f'_c} \quad \text{kg/cm}^2$$

$$f_r = 37.2$$

Momento de agrietamiento:

$$M_{cr} := \left( \frac{P_e \cdot S_{2c}}{A_{cp}} + \frac{P_e \cdot e \cdot S_{2c}}{S_{2p}} + f_r \cdot S_{2c} \right) \cdot 10^{-5}$$

$$M_{cr} = 483.7 \quad \text{t m}$$

Factor de seguridad contra el agrietamiento:

$$FS := \frac{M_{cr} - M_{dt}(x)}{M_l(x)}$$

$$FS = 2.1$$

La condición que se debe cumplir contra el agrietamiento es que la siguiente expresión sea mayor a 1.2:

$$\frac{\phi \cdot M_n}{M_{cr}} = 1.5$$

## 5.8 SECCIONES CERCANAS A LOS APOYOS

En las secciones cercanas a los apoyos, cuando se utilizan tendones envueltos, la fuerza de presfuerzo no se transmite totalmente; y para la revisión de éstas secciones como aproximación se considerará que se tienen pérdidas en la fuerza de presfuerzo inicial del 10%.

Para tendones con envueltos cerca de los extremos del claro, las especificaciones de la AASHTO indican que la longitud de desarrollo se duplique:

Longitud de desarrollo del presfuerzo:

$$l_d := 2 \cdot (0.0142) \cdot \left( f_{ps} - \frac{2}{3} \cdot f_{pe} \right) \cdot D_p$$

$$l_d = 3.92 \text{ m}$$

Suponiendo que a través de la longitud de la trabe algunos torones no son efectivos por haberse envuelto.

Sección de los apoyos:

$$x := 0$$

Proponiendo que se envuelvan los siguientes torones desde ésta sección:

$$n'_{ps} := 22$$

Torones efectivos en la sección:

$$n_{ps} - n'_{ps} = 7$$

Área del acero efectivo de presfuerzo:

$$A'_{ps} := (n_{ps} - n'_{ps}) \cdot a_{ps}$$

$$A'_{ps} = 6.9 \text{ cm}^2$$

Ordenada del centroide del área de acero:

$$y'_{ps} := \frac{0 \cdot (5) + 0 \cdot (10) + 7 \cdot (15)}{7}$$

$$y'_{ps} = 15.0 \text{ cm}$$

Excentricidad de los tendones efectivos:

$$e' := c_{2p} - y'_{ps}$$

$$e' = 47.7 \text{ cm}$$

Fuerza inicial de presfuerzo en la sección:

$$P'_i := A'_{ps} \cdot f_{pi}$$

$$P'_i = 91890 \quad \text{kg}$$

$$P'_e := 0.9 \cdot P'_i$$

$$P'_e = 82701 \quad \text{kg}$$

Esfuerzos en la etapa de transferencia, considerando el presfuerzo inicial y el peso propio de la viga precolada:

$$f_1 := -\frac{P'_i}{A_{cp}} + \frac{P'_i \cdot e'}{S_{1p}} \quad f_1 = 12.0 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$f_2 := -\frac{P'_i}{A_{cp}} - \frac{P'_i \cdot e'}{S_{2p}} \quad f_2 = -43.4 \quad \text{kg/cm}^2$$

Comparando los esfuerzos anteriores con los permisibles en el concreto antes de las pérdidas a largo plazo:

En compresión:  $f_{ci} = -150.0 \quad \text{kg/cm}^2$

En tensión:  $f_{ti} = 12.6 \quad \text{kg/cm}^2$

Esfuerzos debidos a la fuerza de presfuerzo efectiva y carga de servicio:

$$f_1 := -\frac{P'_e}{A_{cp}} + \frac{P'_e \cdot e'}{S_{1p}} \quad f_1 = 10.8 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$f_2 := -\frac{P'_e}{A_{cp}} - \frac{P'_e \cdot e'}{S_{2p}} \quad f_2 = -39.1 \quad \text{kg/cm}^2$$

Comparando con los esfuerzos permisibles en el concreto bajo cargas de servicio después de las pérdidas:

En compresión para la viga:  $f_{cs} = -140.0 \quad \text{kg/cm}^2$

En tensión para la viga:  $f_{ts} = 29.9 \quad \text{kg/cm}^2$

Datos para el diseño del refuerzo en el alma en esta sección:

Esfuerzo de compresión en el centroide del concreto debido a la fuerza de presfuerzo efectiva:

$$f_{cc1} := \frac{P'_e}{A_{cp}}$$

Peralte efectivo:  $f_{cc1} = 16.3 \quad \text{kg}$

$$d_1 := h_f + c_{1p} + e'$$

$$d_1 = 140.2 \quad \text{cm}$$

Para la sección:

$$x := l_d$$

$$x = 3.92 \quad \text{m}$$

Proponiendo que se envuelvan los siguientes torones desde ésta sección:

$$n'_{ps} := 8$$

Torones efectivos en la sección:

$$n_{ps} - n'_{ps} = 21$$

Área del acero efectivo de presfuerzo:

$$A'_{ps} = 20.7 \quad \text{cm}^2$$

Ordenada del centroide del área de acero:

$$y'_{ps} := \frac{7 \cdot (5) + 7 \cdot (10) + 7 \cdot (15)}{21}$$

$$y'_{ps} = 10.0 \quad \text{cm}$$

Excentricidad de los tendones efectivos:

$$e' = 52.7 \quad \text{cm}$$

Fuerza inicial de presfuerzo en la sección:

$$P'_i = 275669 \quad \text{kg}$$

$$P'_e = 248102 \quad \text{kg}$$

Esfuerzos en la sección en la etapa de transferencia, considerando el presfuerzo inicial y el peso propio de la viga precolada:

$$f_1 := -\frac{P'_i}{A_{cp}} + \frac{P'_i \cdot e'}{S_{1p}} - \frac{M_o(x)}{S_{1p}} \cdot 10^5 \quad f_1 = 7.6 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$f_2 := -\frac{P'_i}{A_{cp}} - \frac{P'_i \cdot e'}{S_{2p}} + \frac{M_o(x)}{S_{2p}} \cdot 10^5 \quad f_2 = -106.5 \quad \text{kg/cm}^2$$

Comparando los esfuerzos anteriores con los permisibles en el concreto antes de las pérdidas a largo plazo:

En compresión:  $f_{ci} = -150.0 \quad \text{kg/cm}^2$

En tensión:  $f_{ti} = 12.6 \quad \text{kg/cm}^2$

Esfuerzos en la sección debidos a la fuerza de presfuerzo efectiva y carga de servicio:

$$f_1 := -\frac{P'_e}{A_{cp}} + \frac{P'_e \cdot e'}{S_{1p}} - \frac{M_o(x) + M_{dp}(x)}{S_{1p}} \cdot 10^5 - \frac{M_{dc}(x) + M_l(x)}{S_{1c}} \cdot 10^5$$

$$f_1 = -38.9 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$f_2 := -\frac{P'_e}{A_{cp}} - \frac{P'_e \cdot e'}{S_{2p}} + \frac{M_o(x) + M_{dp}(x)}{S_{2p}} \cdot 10^5 + \frac{M_{dc}(x) + M_l(x)}{S_{2c}} \cdot 10^5$$

$$f_2 = -35.9 \quad \text{kg/cm}^2$$

Comparando con los esfuerzos permisibles en el concreto bajo cargas de servicio después de las pérdidas:

En compresión para la viga:  $f_{cs} = -140.0 \quad \text{kg/cm}^2$

En tensión para la viga:  $f_{ts} = 29.9 \quad \text{kg/cm}^2$

Datos para el diseño del refuerzo en el alma en esta sección:

Esfuerzo de compresión del concreto en la cara de inferior debido a la fuerza de presfuerzo efectiva:

$$f_{2p'} := -\frac{P'_e}{A_{cp}} - \frac{P'_e \cdot e'}{S_{2p}}$$

$$f_{2p'} = -124.5 \quad \text{kg/cm}^2$$

Esfuerzo de compresión en el centroide del concreto debido a la fuerza de presfuerzo efectiva:

$$f_{cc2} := \frac{P'_e}{A_{cp}}$$

$$f_{cc2} = 48.9 \quad \text{kg}$$

Peralte efectivo:

$$d_2 := h_f + c_{1p} + e'$$

$$d_2 = 145.2 \quad \text{cm}$$

Para la sección:

$$x := 2 \cdot l_d$$

$$x = 7.84 \quad \text{m}$$

que debe ser menor a  $L/2$  donde se requiere que la totalidad los torones sean efectivos:

$$\frac{L}{2} = 13.5 \quad \text{m}$$

Proponiendo que se envuelvan los siguientes torones desde ésta sección:

$$n'_{ps} := 0$$

Torones efectivos en la sección:

$$n_{ps} - n'_{ps} = 29$$

Área del acero efectivo de presfuerzo:

$$A'_{ps} = 28.6 \quad \text{cm}^2$$

Ordenada del centroide del área de acero:

$$y'_{ps} := \frac{11 \cdot (5) + 9 \cdot (10) + 9 \cdot (15)}{29}$$

$$y'_{ps} = 9.7 \quad \text{cm}$$

Excentricidad de los tendones efectivos:

$$e' = 53 \quad \text{cm}$$

Fuerza inicial de presfuerzo en la sección:

$$P'_i = 380686 \quad \text{kg}$$

$$P'_e = 342617 \quad \text{kg}$$

Esfuerzos en la sección en la etapa de transferencia, considerando el presfuerzo inicial y el peso propio de la viga precolada:

$$f_1 := -\frac{P'_i}{A_{cp}} + \frac{P'_i \cdot e'}{S_{1p}} - \frac{M_o(x)}{S_{1p}} \cdot 10^5 \quad f_1 = 0.84 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$f_2 := -\frac{P'_i}{A_{cp}} - \frac{P'_i \cdot e'}{S_{2p}} + \frac{M_o(x)}{S_{2p}} \cdot 10^5 \quad f_2 = -139 \quad \text{kg/cm}^2$$

Comparando los esfuerzos anteriores con los permisibles en el concreto antes de las pérdidas a largo plazo:

En compresión:  $f_{ci} = -150.0 \quad \text{kg/cm}^2$

En tensión:  $f_{ti} = 12.6 \quad \text{kg/cm}^2$

Esfuerzos en la sección debidos a la fuerza de presfuerzo efectiva y carga de servicio:

$$f_1 := -\frac{P'e}{A_{cp}} + \frac{P'e \cdot e'}{S_{1p}} - \frac{M_o(x) + M_{dp}(x)}{S_{1p}} \cdot 10^5 - \frac{M_{dc}(x) + M_l(x)}{S_{1c}} \cdot 10^5$$

$$f_1 = -75.1 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$f_2 := -\frac{P'e}{A_{cp}} - \frac{P'e \cdot e'}{S_{2p}} + \frac{M_o(x) + M_{dp}(x)}{S_{2p}} \cdot 10^5 + \frac{M_{dc}(x) + M_l(x)}{S_{2c}} \cdot 10^5$$

$$f_2 = -25.5 \quad \text{kg/cm}^2$$

Comparando con los esfuerzos permisibles en el concreto bajo cargas de servicio después de las pérdidas:

En compresión para la viga:  $f_{cs} = -140.0 \quad \text{kg/cm}^2$

En tensión para la viga:  $f_{ts} = 29.9 \quad \text{kg/cm}^2$

## 5.9 CÁLCULO DEL REFUERZO TRANSVERSAL

Para el diseño del refuerzo del alma por fuerza cortante vertical, en los elementos simplemente apoyados que soportan cargas móviles, las especificaciones de la AASHTO indican que las secciones de la trabe situadas a una distancia menor de la mitad del peralte, desde la cara de los apoyos, pueden diseñarse para el mismo cortante que el calculado a ésta distancia. La fuerza cortante nominal proporcionada por el concreto en ésta sección es la resistencia que opone el concreto a las grietas por cortante en el alma.

Siguiendo éstas mismas especificaciones, el refuerzo del alma requerido en los puntos cuartos del claro, se debe utilizar en la totalidad de los cuartos extremos. También recomienda que se verifique el cortante en el centro del claro.

Refuerzo del alma en las secciones cercanas a los apoyos:

Suponiendo el ancho de los apoyo de la trabe:

$$B := 60 \quad \text{cm}$$

Distancia del eje del apoyo a la sección por diseñar por cortante:

$$x := \frac{B}{2} + \frac{h + h_f}{2}$$

$$x = 1.08 \quad \text{m}$$

Fuerza de cortante por carga muerta total en la sección:

$$V_{dt} := V_o(x) + V_{dp}(x) + V_{dc}(x)$$

$$V_{dt} = 36.2 \quad \text{toneladas}$$

Fuerza de cortante por carga móvil en la sección:

$$V := \frac{1}{L} \cdot [14.52 \cdot (2 \cdot L - 2 \cdot x - 4.27) + 3.63 \cdot [L - x - 2 \cdot (4.27)]]$$

$$V = 27.9 \quad \text{t / carril}$$

$$V_l := R_1 \cdot (1 + I) \cdot V$$

$$V_l = 15.8 \quad \text{t / trabe}$$

Fuerza cortante última en la sección:

$$V_u := 1.3 \cdot \left( V_{dt} + \frac{5}{3} \cdot V_l \right)$$

$$V_u = 81.3 \quad \text{toneladas}$$

Componente vertical de la fuerza efectiva de presfuerzo para tendones horizontales:

$$V_p := 0$$

En el cálculo de la fuerza nominal por cortante el peralte efectivo no debe tomarse menor que 0.8 del peralte:

$$d_I = 140.2 \quad \text{m}$$

$$0.8 \cdot (h + h_f) = 124.2 \quad \text{m}$$

La fuerza cortante proporcionada por el concreto a las grietas por cortante en el alma:

$$V_{cw} := (0.93 \cdot \sqrt{f'_c} + 0.3 \cdot f_{ccI}) \cdot b_w \cdot d_I + V_p$$

$$V_{cw} = 63442.3 \quad \text{kg}$$

Factor de reducción de resistencia para cortante:

$$\phi := 0.9$$

Separación de los estribos de refuerzo del alma en la sección:

$$s := \min \left[ \frac{\phi \cdot A_v \cdot f_y \cdot d_I}{V_u - \phi \cdot V_{cw}}, \frac{A_v \cdot f_y}{3.52 \cdot b_w}, 0.75 \cdot (h + h_f), 60 \right]$$

$$s = 29.7 \quad \text{cm}$$



Resistencia al cortante proporcionada por el acero de refuerzo:

$$V_s := \frac{A_v \cdot f_y \cdot d_I}{s}$$

$$V_s = 26844 \quad \text{kg}$$

donde el valor de  $V_s$  está limitado a no ser mayor de:

$$2.12 \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d_I = 112879 \quad \text{kg}$$

Cuando  $V_s$  excede de la mitad del siguiente valor límite, se reducen a la mitad las condiciones  $0.75(h+h_f)$  y 60 cm en el cálculo de la separación del acero:

$$1.06 \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d_I = 56440 \quad \text{kg}$$

Transferencia del cortante horizontal en las secciones cercanas a los apoyos:

La resistencia a la fuerza cortante horizontal a lo largo de la superficie de contacto se puede proporcionar mediante la adhesión natural y la fricción entre el concreto de la losa colada in situ y el precolado de la viga; prolongando hacia arriba los estribos verticales colocados en el alma de la viga y anclándolos en la losa. Una resistencia adicional se obtiene al colocar llaves de corte desde la parte superior del alma hasta arriba dentro de la losa.

En el diseño de la sección transversal sujeta a cortante horizontal se debe cumplir que el cortante último factorizado  $V_u$  debe ser menor o igual a la resistencia nominal al cortante multiplicado por el factor de reducción de resistencia  $\phi V_{nh}$ .

Fuerza cortante horizontal última en la sección:

$$V_u = 81257 \quad \text{kg}$$

Fuerza cortante horizontal nominal en la sección cuando no se proporcionan ligaduras (llaves de corte o estribos) en las superficies de contacto, pero estas superficies se encuentran limpias, libres de lechada, e intencionalmente rugosas:

$$\phi = 0.9$$

$$V_{nh} := 5.6 \cdot b_v \cdot d_I$$

$$V_{nh} = 39884 \quad \text{kg}$$

$$\phi \cdot V_{nh} = 35896 \quad \text{kg}$$

Fuerza cortante horizontal nominal en la sección cuando se cumplen con los requerimientos mínimos de ligaduras en las superficies de contacto y estas superficies se encuentran limpias, libres de lechada, e intencionalmente rugosas:

$$V_{nh} := 24.6 \cdot b_v \cdot d_I$$

$$V_{nh} = 175205 \quad \text{kg}$$

$$\phi \cdot V_{nh} = 157685 \quad \text{kg}$$

Separación máxima de ligaduras en las superficies de contacto en la sección:

$$s' := \min \left( \frac{A_v \cdot f_y}{3.52 \cdot b_v}, 4 \cdot h_f, 4 \cdot b_w, 60 \right)$$

$$s' = 31.8 \quad \text{cm}$$

Comparando con la separación de los estribos de refuerzo del alma:

$$s = 29.7 \quad \text{cm}$$

Refuerzo del alma en las secciones a un cuarto del claro:

Distancia del eje del apoyo a la sección por diseñar por cortante:

$$x := \frac{L}{4}$$

$$x = 6.75 \quad \text{m}$$

Fuerza de cortante por carga móvil en la sección:

$$V := \frac{1}{L} \cdot [14.52 \cdot (2 \cdot L - 2 \cdot x - 4.27) + 3.63 \cdot [L - x - 2 \cdot (4.27)]]$$

$$V = 21.1 \quad \text{t / carril}$$

$$V_l := R_1 \cdot (1 + I) \cdot V$$

$$V_l = 11.9 \quad \text{t / trabe}$$

Fuerza de cortante por carga muerta total en la sección:

$$V_{dt} := V_o(x) + V_{dp}(x) + V_{dc}(x)$$

$$V_{dt} = 19.7 \quad \text{toneladas}$$

Fuerza cortante última en la sección:

$$V_u := 1.3 \cdot \left( V_{dt} + \frac{5}{3} \cdot V_l \right)$$

$$V_u = 51.4 \quad \text{toneladas}$$

Fuerza de cortante por cargas muerta y móvil sobrepuestas al peso propio en la sección:

$$V_i := V_{dp}(x) + V_{dc}(x) + V_l$$

$$V_i = 23354 \quad \text{kg}$$

Fuerza de cortante por peso propio de la viga precolada en la sección:

$$V_o(x) = 8.2 \quad \text{toneladas}$$

Momento flexionante por cargas muertas y móviles sobrepuestas al peso propio en la sección:

$$M_{max} := M_{dp}(x) + M_{de}(x) + M_l(x)$$

$$M_{max} = 193.2 \quad \text{t m}$$

Momento flexionante debido al peso propio de la trabe precolada:

$$M_o(x) = 83.2 \quad \text{t m}$$

Esfuerzo de flexión en el concreto en la cara inferior de la trabe debido al peso propio:

$$f_o := \frac{M_o(x) \cdot c_{2p}}{I_{cp}} \cdot 10^5$$

$$f_o = 48.1 \quad \text{kg/cm}^2$$

Momento que causa el agrietamiento por flexión debido a las cargas muerta y móvil sobrepuestas al peso propio:

$$f_{2p'} = 124.5 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$M_{cr} := \frac{I_{cp}}{c_{2p}} \cdot (1.59 \sqrt{f'_c} + f_{2p'} - f_o)$$

$$M_{cr} = 183.7 \quad \text{t m}$$

En el cálculo de la fuerza nominal por cortante el peralte efectivo no debe tomarse menor que 0.8 del peralte:

$$d_2 = 145.2 \quad \text{cm}$$

$$0.8 \cdot (h + h_f) = 124.2 \quad \text{cm}$$

Fuerza cortante proporcionada por el concreto a las grietas por cortante en el alma:

$$V_{cw} := (0.93 \cdot \sqrt{f'_c} + 0.3 \cdot f_{cc2}) \cdot b_w \cdot d_2 + V_p$$

$$V_{cw} = 94547 \quad \text{kg}$$

Fuerza cortante proporcionada por el concreto a las grietas por flexión - cortante:

$$V_{ci} := 0.159 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d_2 + V_o(x) \cdot 10^3 + V_i \cdot \frac{M_{cr}}{M_{max}}$$

$$V_{ci} = 39186 \quad \text{kg}$$

$V_{ci}$  no necesita ser considerado menor a:

$$0.45 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d_2 = 24815 \quad \text{kg}$$

$$V_{ci} = 39186 \quad \text{kg}$$

Fuerza cortante proporcionada por el concreto:

$$V_c := \min(V_{cw}, V_{ci})$$

$$V_c = 39186 \quad \text{kg}$$

Separación de los estribos de refuerzo del alma en la sección:

$$s := \min \left[ \frac{\phi \cdot A_v \cdot f_y \cdot d_2}{V_u - \phi \cdot V_c}, \frac{A_v \cdot f_y}{3.52 \cdot b_w}, 0.75 \cdot (h + h_f), 60 \right]$$

$$s = 46.1 \quad \text{cm}$$

Resistencia al cortante proporcionada por el acero de refuerzo:

$$V_s := \frac{A_v \cdot f_y \cdot d_2}{s}$$

$$V_s = 17883 \quad \text{kg}$$

donde el valor de  $V_s$  está limitado a no ser mayor de:

$$2.12 \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d_2 = 116905 \quad \text{kg}$$

Cuando  $V_s$  excede de la mitad de este valor límite, se reducen a la mitad las condiciones  $0.75(h+h_f)$  y 60 cm en el cálculo de la separación del acero:

$$1.06 \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d_2 = 58452 \quad \text{kg}$$

Transferencia del cortante horizontal en las secciones a un cuarto del claro:

Fuerza cortante horizontal última en la sección:

$$V_u = 51362 \quad \text{kg}$$

Fuerza cortante horizontal nominal en la sección cuando no se proporcionan ligaduras en las superficies de contacto, pero éstas superficies se encuentran limpias, libres de lechada, e intencionalmente rugosas:

$$V_{nh} := 5.6 \cdot b_v \cdot d_2$$

$$V_{nh} = 41306 \quad \text{kg}$$

$$\phi \cdot V_{nh} = 37176 \quad \text{kg}$$

Fuerza cortante horizontal nominal en la sección cuando se cumplen con los requerimientos mínimos de ligaduras en las superficies de contacto y éstas superficies se encuentran limpias, libres de lechada, e intencionalmente rugosas:

$$V_{nh} := 24.6 \cdot b_v \cdot d_2$$

$$V_{nh} = 181454 \quad \text{kg}$$

$$\phi \cdot V_{nh} = 163308 \quad \text{kg}$$

Separación máxima de ligaduras en las superficies de contacto en la sección:

$$s' = 31.8 \quad \text{cm}$$

Comparando con la separación de los estribos de refuerzo del alma:

$$s = 46.1 \quad \text{cm}$$

Refuerzo del alma en la sección del centro del claro:

Distancia del eje del apoyo a la sección por diseñar por cortante:

$$x := \frac{L}{2}$$

$$x = 13.50 \quad \text{m}$$

Fuerza de cortante por carga móvil en la sección:

$$V := \frac{1}{L} \cdot [14.52 \cdot (2 \cdot L - 2 \cdot x - 4.27) + 3.63 \cdot [L - x - 2 \cdot (4.27)]]$$

$$V = 12.9 \quad \text{t / carril}$$

$$V_l := R_1 \cdot (1 + I) \cdot V$$

$$V_l = 7.3 \quad \text{t / trabe}$$

Fuerza de cortante por carga muerta total en la sección:

$$V_{dt} := V_o(x) + V_{dp}(x) + V_{dc}(x)$$

$$V_{dt} = 0 \quad \text{toneladas}$$

Fuerza cortante última en la sección:

$$V_u := 1.3 \cdot \left( V_{dt} + \frac{5}{3} \cdot V_l \right)$$

$$V_u = 15.8 \quad \text{toneladas}$$

Fuerza de cortante por carga muerta y móvil sobrepuestas al peso propio en la sección:

$$V_i := V_{dp}(x) + V_{dc}(x) + V_l$$

$$V_i = 7291 \quad \text{kg}$$

Fuerza de cortante por peso propio de la viga precolada en la sección:

$$V_o(x) = 0 \quad \text{toneladas}$$

Momento flexionante por cargas muertas y móviles sobrepuestas al peso propio en la sección:

$$M_{max} := M_{dp}(x) + M_{dc}(x) + M_l(x)$$

$$M_{max} = 257.6 \quad \text{t m}$$

Momento flexionante debido al peso propio de la trabe precolada:

$$M_o(x) = 110.9 \quad \text{t m}$$

Esfuerzo de flexión en el concreto en la cara inferior de la trabe debido al peso propio:

$$f_o := \frac{M_o(x) \cdot c_{2p}}{I_{cp}} \cdot 10^5$$

$$f_o = 64.1 \quad \text{kg/cm}^2$$

Momento que causa el agrietamiento por flexión debido a las cargas muerta y móvil sobrepuestas al peso propio:

$$f_{2p} = 156.8 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$M_{cr} := \frac{I_{cp}}{c_{2p}} \cdot (1.59 \sqrt{f'_c} + f_{2p} - f_o)$$

$$M_{cr} = 211.9 \quad \text{t m}$$

En el cálculo de la fuerza nominal por cortante el peralte efectivo no debe tomarse menor que 0.8 del peralte:

$$d = 145.5 \quad \text{cm}$$

$$0.8 \cdot (h + h_f) = 124.2 \quad \text{cm}$$

Fuerza cortante proporcionada por el concreto a las grietas por cortante en el alma:

$$V_{cw} := (0.93 \cdot \sqrt{f'_c} + 0.3 \cdot f_{cc}) \cdot b_w \cdot d + V_p$$

$$V_{cw} = 105814 \quad \text{kg}$$

Fuerza cortante proporcionada por el concreto a las grietas por flexión - cortante:

$$V_{ci} := 0.159 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d + V_o(x) \cdot 10^3 + V_i \cdot \frac{M_{cr}}{M_{max}}$$

$$V_{ci} = 14786 \quad \text{kg}$$

$V_{ci}$  no necesita ser considerado menor a:

$$0.45 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d = 24874 \quad \text{kg}$$

$$V_{ci} = 24874 \quad \text{kg}$$

Fuerza cortante proporcionada por el concreto:

$$V_c := \min(V_{cw}, V_{ci})$$

$$V_c = 24874 \quad \text{kg}$$

Separación de los estribos de refuerzo del alma en la sección, si  $V_u$  es menor o igual a  $\phi V_c$ , sólo se requiere obtener la máxima separación permisible:

$$V_u = 15798 \quad \text{kg}$$

$$\phi \cdot V_c = 22386 \quad \text{kg}$$

$$s := \min \left[ \frac{A_v \cdot f_y}{3.52 \cdot b_w}, 0.75 \cdot (h + h_f), 60 \right]$$

$$s = 60.0 \quad \text{cm}$$

Resistencia al cortante proporcionada por el acero de refuerzo:

$$V_s := \frac{A_v \cdot f_y \cdot d_2}{s}$$

$$V_s = 13746 \quad \text{kg}$$

donde el valor de  $V_s$  está limitado a no ser mayor de:

$$2.12 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d_2 = 116905 \quad \text{kg}$$

Cuando  $V_s$  excede de la mitad de este valor límite, se reducen a la mitad las condiciones  $0.75 (h+h_f)$  y  $60$  cm en el cálculo de la separación del acero:

$$1.06 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d_2 = 58452 \quad \text{kg}$$

Transferencia del cortante horizontal en la sección del centro del claro:

Fuerza cortante horizontal última en la sección:

$$V_u = 15798 \quad \text{kg}$$

Fuerza cortante horizontal nominal en la sección cuando no se proporcionan ligaduras en las superficies de contacto, pero éstas superficies se encuentran limpias, libres de lechada, e intencionalmente rugosas:

$$V_{nh} := 5.6 \cdot b_v \cdot d$$

$$V_{nh} = 41405 \quad \text{kg}$$

$$\phi \cdot V_{nh} = 37264 \quad \text{kg}$$

Fuerza cortante horizontal nominal en la sección cuando se cumplen con los requerimientos mínimos de ligaduras en las superficies de contacto y éstas superficies se encuentran limpias, libres de lechada, e intencionalmente rugosas:

$$V_{nh} := 24.6 \cdot b_v \cdot d$$

$$V_{nh} = 181884 \quad \text{kg}$$

$$\phi \cdot V_{nh} = 163696 \quad \text{kg}$$

Separación máxima de ligaduras en las superficies de contacto en la sección:

$$s' = 31.8 \quad \text{cm}$$

Comparando con la separación de los estribos de refuerzo del alma:

$$s = 60.0 \quad \text{cm}$$

## 5.9 CÁLCULO DE LA DEFLEXIÓN

Deflexión debida al presfuerzo inicial :

$$\Delta_{Pi} := -\frac{1}{8} \cdot \frac{P_i \cdot e \cdot L^2}{E_{ci} \cdot I_{cp}} \quad \Delta_{Pi} = -7.15 \quad \text{cm}$$

Deflexión debida al presfuerzo efectivo :

$$\Delta_{Pe} := \frac{P_e}{P_i} \cdot \Delta_{Pi} \quad \Delta_{Pe} = -5.85 \quad \text{cm}$$

Deflexión de la viga precolada debida al peso propio y a la losa:

$$w := w_o + w_{dp} \quad w = 1.9 \quad \text{t/m}$$

$$\Delta_{dp} := \frac{5}{384} \cdot \frac{w \cdot L^4}{E_{ci} \cdot I_{cp}} \quad \Delta_{dp} = 5.1 \quad \text{cm}$$

Deflexión de la viga compuesta debida a la banqueta, parapeto y carpeta asfáltica:

$$w := w_{dc} \quad w = 1.0 \quad \text{t/m}$$

$$\Delta_{dc} := \frac{5}{384} \cdot \frac{w \cdot L^4}{E_c \cdot I_{cc}} \quad \Delta_{dc} = 1.1 \quad \text{cm}$$

Deflexión debida a la carga muerta total :

$$\Delta_d := \Delta_{dp} + \Delta_{dc} \quad \Delta_d = 6.24 \quad \text{cm}$$

Deflexión debida al presfuerzo efectivo y a la carga muerta total :

$$\Delta := \Delta_{Pe} + \Delta_d \quad \Delta = 0.39 \quad \text{cm}$$

Deflexión máxima debida a la carga móvil :

$$P := R_1 \cdot (1 + I) \cdot (32670) \quad P = 18479 \quad \text{kg}$$

$$\Delta_l := \frac{1}{48} \cdot \frac{P \cdot L^3}{E_c \cdot I_{cc}} \quad \Delta_l = 1.2 \quad \text{cm}$$

Deflexión aproximada máxima de servicio :

$$\Delta := \Delta_{Pe} + \frac{\Delta_{Pi} + \Delta_{Pe}}{2} \cdot \nu_u + \Delta_d \cdot (1 + \nu_u) + \Delta_l$$

$$\Delta = 1.2 \quad \text{cm}$$



Deflexión permisible :

$$\Delta_{perm} := \frac{L}{800} \qquad \Delta_{perm} = 3.4 \quad \text{cm}$$

Si la trabe forma parte de un puente en áreas urbanas con paso de peatones, la deflexión preferentemente no debe exceder de :

$$\Delta_{perm} := \frac{L}{1000} \qquad \Delta_{perm} = 2.7 \quad \text{cm}$$

## CONCLUSIONES

Las pérdidas inmediatas en la fuerza de presfuerzo (deslizamiento del anclaje, acortamiento elástico del concreto y fricción entre el concreto y el acero de presfuerzo), junto con las pérdidas dependientes del tiempo (contracción y fluencia del concreto, y relajación del acero de presfuerzo) son de magnitud considerable ya que llegan a ser del 20 al 30% de la fuerza aplicada por el gato.

En el caso del ejemplo de diseño de una trabe de concreto presforzado del Capítulo 5, utilizando una trabe pretensada de sección transversal AASHTO tipo IV con longitud de 27 m, con resistencia a compresión del concreto a los 28 días de  $350 \text{ kg/cm}^2$ , con 29 torones relevados de esfuerzos de diámetro de 1.27 cm y con resistencia última a tensión de  $19000 \text{ kg/cm}^2$ , se tienen pérdidas totales en la fuerza aplicada por el gato del 23.7%.

Las pérdidas por acortamiento elástico, contracción, fluencia del concreto y relajación del acero de presfuerzo (no se tienen pérdidas por deslizamiento del anclaje y fricción en elementos pretensados), son del mismo orden de magnitud en trabes de concreto presforzado; en el caso del ejemplo del Capítulo 5, se tienen pérdidas por acortamiento elástico, contracción, fluencia del concreto y relajación del acero de 6.7, 5.4, 6.9 y 4.7% de la fuerza aplicada por el gato, respectivamente.

La contracción en el concreto es el cambio de volumen debido al secado y a los cambios químicos que dependen del tiempo y de las condiciones de humedad, pero no de los esfuerzos; es por eso que uno de los factores más importantes que se toman en cuenta en la contracción es la humedad relativa ambiental a la que está sujeto el elemento presforzado en condiciones de servicio; como puede inferirse de la ecuación 1.11, que es la usada por la AASHTO para considerar éste tipo de pérdida en la fuerza de presfuerzo.

Otro de los factores que influyen notablemente en la contracción son las características geométricas del elemento presforzado. Como la superficie del concreto es la que se seca, la relación superficie/volumen es la apropiada para considerar este efecto en el concreto; como se puede ver en la ecuación 2.8, que es un factor de corrección para la ecuación 2.3, que a su vez estima la contracción última del concreto de acuerdo al código ACI.

La influencia que tiene el agregado en la contracción es la de restringir la contracción de la pasta de cemento, por lo que en agregados más duros y más densos con baja absorción y módulos elasticidad alto se tendrá una contracción menor. Asimismo, el contenido de cemento presente en el concreto disminuye la contracción en la medida de que disminuye la relación agua/cemento, para concretos con la misma proporción de pasta de cemento; obteniéndose mayor resistencia y menor porosidad del concreto, y por lo tanto una mayor oposición a la contracción.

El código ACI considera una contracción última de  $780 \times 10^{-6}$  que se debe afectar por los factores de corrección para el tiempo de curado, la humedad relativa de la estructura en condiciones de servicio, la superficie expuesta a secado, la consistencia del concreto en estado

fresco, el porcentaje de finos del agregado, el contenido de cemento y el contenido de aire en la mezcla.

Para concreto presforzado con tiempo de curado húmedo de 7 días o curado a vapor de 3 días, humedad relativa ambiental del 40%, consistencia del concreto en estado fresco menor a 13 cm, porcentaje de finos del agregado entre 40 y 60%, contenido de cemento entre 280 y 450 kg/m<sup>3</sup>, contenido de aire en la mezcla menor a 8%, los respectivos factores de corrección se pueden considerar igual a 1.0.

Comparando la pérdida de la fuerza de presfuerzo debida a la contracción obtenida en la sección 5.5, utilizando las ecuaciones 1.10 y 2.3, que son las propuestas por las especificaciones de la AASHTO y el código de la ACI, respectivamente, se observa que son aproximadamente iguales: 770 y 750 kg/cm<sup>2</sup>.

La fluencia es la propiedad que tiene algunos materiales de continuar deformándose a través del tiempo cuando están bajo un estado de esfuerzo a carga sostenida. En el concreto presforzado, la fuerza de compresión que produce la fluencia no es constante, si no que disminuye al paso del tiempo debido a la contracción del concreto y a la relajación del acero.

El concreto en estado endurecido tiene cambios de forma y dimensiones originados por la fluencia del concreto; algunos de los factores que intervienen en la magnitud de la fluencia dependen de la naturaleza propia del concreto, de la geometría del elemento estructural y de las condiciones ambientales de servicio.

Uno de los factores que interviene significativamente en la fluencia es la edad de carga del elemento estructural. Si adquiere mayor edad antes de cargarlo se tiene menos fluencia debido a que al incrementarse la resistencia con la edad, el elemento estructural trabaja a un nivel de esfuerzo más bajo. La reducción de la fluencia también es debido a que el concreto experimenta una mayor proporción de contracción por secado sin estar sujeto a carga, obteniendo que la fluencia disminuya al ser dependientes la fluencia y la contracción.

Otro de los factores que influye notablemente es el tipo de cemento ya que los diferentes tipos cemento tienen también diferente velocidad de adquisición de resistencia del concreto. Por ejemplo, de acuerdo a la bibliografía, el cemento Pórtland de Alto Horno produce una fluencia básica después del secado mayor que los cementos Pórtland normales, pero a edades posteriores y bajo carga, la diferencia puede desaparecer. Para la misma resistencia, el concreto con cemento Pórtland Puzolánico puede mostrar menos fluencia, ya que inicialmente hay menos cantidad de cemento; sin embargo, a edades más avanzadas, el comportamiento resulta afectado por el aumento de la resistencia y el contenido de la pasta de cemento.

La influencia que tiene el agregado en la fluencia, al igual que en la contracción, es la de limitar la fluencia de la pasta de cemento, por lo que en agregados con mayor módulo elasticidad se tendrá una menor fluencia del concreto.

Se puede decir que para determinado concreto, la fluencia es mayor cuanto menor humedad relativa ambiental de servicio haya. El concreto que muestra una alta contracción, también

tiene, en términos generales, una mayor fluencia; esto no se debe a que estos fenómenos tengan la misma naturaleza sino a que se relacionan con las características de la estructura de la pasta de cemento hidratada.

El código ACI considera un coeficiente de fluencia último de 2.35 que se debe afectar por los factores de corrección para la edad de carga, la humedad relativa de la estructura en condiciones de servicio, la superficie expuesta a secado, la consistencia del concreto en estado fresco, el porcentaje de finos del agregado y el contenido de aire en la mezcla.

Para concreto presforzado con humedad relativa ambiental del 40%, consistencia del concreto en estado fresco menor a 13 cm, porcentaje de finos del agregado entre 40 y 60%, contenido de aire en la mezcla menor a 8%, los respectivos factores de corrección se pueden considerar igual a 1.0.

Comparando la pérdida en la fuerza de presfuerzo debida a la fluencia del concreto obtenida en la sección 5.5, utilizando las ecuaciones 1.12 y 3.2, que son las propuestas por las especificaciones de la AASHTO y el código de la ACI, respectivamente, se observa que son aproximadamente iguales: 990 y 1059 kg/cm<sup>2</sup>.

## BIBLIOGRAFÍA

AASHTO, *Standard Specifications for Highway Bridges*, American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington 2002.

ACI Committee 209, *Prediction of Creep, Shrinkage, and Temperature Effects in Concrete Structures*, ACI-209R-82, American Concrete Institute, Michigan 1982.

ACI Committee 212, *Aditivos para el Concreto*, Traducción de *Admixtures for Concrete and Guide for Use of Admixtures in Concrete*, Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, México 1983.

Allen, A. H., *Introducción al Concreto Presforzado*, Limusa, México 1990.

Bangash, M. Y. H., *Concrete and Concrete Structures*, Elsevier, New York 1989.

Branson, D. E., *Diseño de Vigas de Concreto Presforzado*, Limusa, México 1990.

Branson, D. E., *Deflexiones de Estructuras de Concreto Reforzado y Presforzado*, Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, México 1978.

CFE, *Manual de Tecnología del Concreto. Sección 3*, Limusa, Comisión Federal de Electricidad, México 1994.

Lin, T. Y., *Diseño de Estructuras de Concreto Presforzado*, CECSA, México 1969.

Neville, A. M., *Tecnología del Concreto*, Vol. I y II, Limusa, México 1980.

Nilson, A. H., *Diseño de Estructuras de Concreto Presforzado*, Limusa, México 1990.

Nilson, A. H., *Diseño de Estructuras de Concreto*, McGraw Hill, Bogotá 1999.