



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

PATRONES DE INTERSECCIÓN DE CLASES PARALELAS:
ENUMERACIÓN DE DISEÑOS RESOLUBLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA

CARLOS BRUNO VELARDE VELÁZQUEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. LUIS BERNARDO MORALES MENDOZA

MÉXICO D. F.

MARZO, 2007



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

En memoria de Doña Mari y Mario

Agradecimientos

En primer lugar expreso mi gratitud a nuestra querida casa de estudios, la Universidad Nacional Autónoma de México, no sólo por su generosidad al haberme permitido participar en el Programa de Apoyos para la Superación del Personal Académico a fin de realizar el presente trabajo, sino porque en ella he tenido una vida feliz. Al Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas le manifiesto mi agradecimiento. Vaya mi gratitud al Programa de Posgrado en Ciencias Matemáticas y a la Facultad de Ciencias. Los recursos de cómputo provistos por los proyectos PAPIIT-UNAM IN119906 y CONACYT 41652A me fueron de gran utilidad.

Con especial afecto doy gracias a Ricardo Berlanga Zubiaga y Rodolfo San Agustín Chi por su asesoría; a Eugenia O'Reilly Regueiro, Octavio Páez Osuna, Sergio Rajsbaum Godorezky y Jorge Urrutia Galicia por la revisión y evaluación del escrito, y a Luis Bernardo Morales Mendoza por la dirección de la tesis.

Y a todos ustedes, mis seres queridos, que me han acompañado y animado en esta empresa.

Contenido

Introducción	1
1 Objetivos	2
2 Contribuciones	2
3 Situación actual	3
4 Estructura del trabajo	4
Resumen	6
1 Estructuras de incidencia y diseños	7
1.1 Estructuras de incidencia	8
1.2 Isomorfismo	9
1.3 Matrices de incidencia	12
1.4 Diseños t - (v, k, λ)	14
1.5 Diseños resolubles	16
1.6 Matrices y patrones de intersección de clases paralelas	18
2 Enumeración de objetos combinatorios	23
2.1 Algoritmos de retroceso y rechazo por isomorfismo	23
2.2 Rechazo por isomorfismo en niveles intermedios	28
2.3 Orden de las variables	31
3 Enumeración de los diseños resolubles 2-$(10, 5, 16)$ y 3-$(10, 5, 6)$	33
3.1 Patrones de intersección de clases paralelas	33
3.2 Estructuras iniciales para los diseños simples	34
3.3 Enumeración de los diseños simples	37
3.4 Los diseños no simples	39
3.5 Resultados	41
Conclusiones	44
Glosario de símbolos	45
Bibliografía	46
Índice	51

Introducción

¿Qué son los diseños combinatorios? Para contestar a esta pregunta es pertinente recordar el problema planteado por Kirkman en 1850 a los lectores de la publicación inglesa *Lady's and Gentleman's Diary* y cuya solución es precisamente un diseño combinatorio:

Quince alumnas deben salir de tres en tres durante siete días, se requiere distribuirlas para que no haya dos que caminen juntas dos días.

Un diseño combinatorio consta de un conjunto finito P y una colección finita \mathcal{B} de subconjuntos de P . Así, en el problema anterior el diseño que se busca tendrá una colección de 35 tríos de alumnas tal que no comprenda dos tríos con dos alumnas en común y que se pueda separar en siete partes tales que cada una sea partición del conjunto de quince alumnas.

De acuerdo con Biggs et ál. [7], la teoría de diseños combinatorios comienza a tomar forma en la primera mitad del siglo diecinueve. En 1835 el geómetra Plücker observó que una curva cúbica plana general tiene nueve puntos de inflexión, los que descansan en 12 líneas, cada una con tres de ellos y tales que por cualesquiera dos de los puntos pasa una de las líneas. En una nota de pie de página afirma que sólo para $v \equiv 3 \pmod{6}$ es posible un sistema $S(v)$ de v puntos acomodados en tríos de tal forma que cualesquiera dos puntos pertenezcan sólo a un trío [46, 15]; en 1839 corrige su afirmación agregando que también vale para $v \equiv 1 \pmod{6}$. En 1846 Kirkman muestra cómo construir $S(v)$ para dichos valores de v . Poco después nota que hay un sistema $S(15)$ tal que la colección de 35 tríos puede dividirse en siete conjuntos de igual tamaño y resultando cada uno partición del conjunto de 15 puntos. Entonces formuló el famoso problema arriba presentado.

En un diseño (P, \mathcal{B}) , se acostumbra llamar *puntos* y *bloques* a los elementos de P y \mathcal{B} , respectivamente. Se dice que se trata de un diseño t - (v, k, λ) , o que es un $S_\lambda(t, k, v)$, si $|P| = v$, todo bloque es de cardinalidad k y cada subconjunto de t puntos queda contenido en exactamente λ bloques. Si además existe una partición \mathcal{R} de \mathcal{B} tal que cada parte es a su vez una partición de P , entonces a \mathcal{R} se le llama *resolución* del diseño y se dice que éste es *resoluble*. Por ejemplo, cada respuesta al problema de las alumnas de Kirkman es una resolución de un $S_1(2, 3, 15)$.

¿Para qué sirven los diseños? Siendo tan general su definición, es natural que los diseños se presenten en diversas áreas de las matemáticas (de hecho, como se dijo, se originaron en relación a la geometría) y en otras ciencias. A lo largo de los años se han aplicado de diversas maneras, pasando por la matemática recreativa, la geometría finita, la inferencia estadística y el diseño de experimentos en áreas como la agricultura, la biología, la medicina y la ingeniería industrial. Estas aplicaciones influyeron fuertemente en el desarrollo de la teoría combinatoria durante el último medio siglo [5, cap. XIII]. Otras aplicaciones importantes se dan en las comunicaciones, la criptografía y el trabajo en red (“networking”), lo anterior se puede consultar en [13]. Una aplicación curiosa de los diseños resolubles para solventar disputas se encuentra en [50].

1 Objetivos

Un problema frecuente en la combinatoria es averiguar si existe algún objeto que tenga propiedades dadas, otro más amplio, pero también recurrente, es enumerar todos los objetos que tengan dichas propiedades. En este último problema, es común especificar además alguna relación de equivalencia —con frecuencia de isomorfismo definido por la acción de un grupo— y entonces lo que se busca es enumerar las clases de equivalencia de los objetos que poseen los atributos del caso. La enumeración constructiva consiste en crear una lista completa de representantes de estas clases (i. e. formada por un objeto de cada clase), su estudio y aplicación se debe a que los métodos clásicos no son aplicables a muchos objetos interesantes, tales como las gráficas fuertemente regulares, los códigos de corrección de errores y los diseños.

El propósito de esta tesis es presentar una técnica para enumerar diseños resolubles y también describir cómo se aplicó ésta para clasificar los diseños resolubles 2 -(10, 5, 16) y los 3 -(10, 5, 6), solucionando así un problema que permanecía abierto [34, p. 30].

2 Contribuciones

La clasificación de los diseños resolubles mencionados en el párrafo anterior es la aportación más tangible, pero no menos importante es el método de investigación de los patrones de intersección de clases paralelas seguido para lograrla, mismo que también se aplicó para conseguir enumerar los diseños resolubles 2 -(12, 4, 3), 2 -(14, 7, 12), 3 -(14, 7, 5) y los diseños cuasi resolubles 2 -($2k + 1$, k , $k - 1$) para $k \leq 13$. Estos resultados dieron lugar a las siguientes publicaciones en revistas arbitradas:

L. B. Morales and C. Velarde, A complete classification of $(12,4,3)$ -RBIBDs, *J. Combin. Des.*, 9(6):385-400, 2001.

P. Kaski, L. B. Morales, D. Rosenblueth, P. R. J. Östergård and C. Velarde, Classification of Resolvable 2 - $(14,7,12)$ and 3 - $(14,7,5)$ Designs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 47:65-74, 2003.

L. B. Morales and C. Velarde, Enumeration of Resolvable 2 - $(10,5,16)$ and 3 - $(10,5,6)$ Designs, *J. Combin. Des.*, 13(2):108-119, 2005.

L. B. Morales, R. San Agustín and C. Velarde, Enumeration of all $(2k + 1, k, k - 1)$ -NRBIBDs for $k \leq 13$, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 60, February 2007.

Cabe mencionar que los artículos anteriores han sido citados más de veinte veces en la literatura científica.

Por último, como otra contribución se tiene el diseño y programación del algoritmo usado para la enumeración y del que se expondrán los aspectos principales en los capítulos segundo y tercero de la tesis.

3 Situación actual

En los últimos 35 años han sido instrumentados diversos métodos computacionales para resolver una gran variedad de problemas de búsqueda combinatoria, un panorama del uso de estas técnicas para resolver problemas en el caso de los diseños se puede consultar en [20].

La técnica de búsqueda exhaustiva se ha usado para resolver problemas de existencia y enumeración. Como ejemplos de ésto se tienen el célebre trabajo de Lam, Thiel y Swiercz [32] en donde establecen la no existencia de un plano proyectivo finito de orden 10, la enumeración de los 2 - $(7, 3, \lambda)$ diseños [45], la generación de gráficas regulares y la generación de gráficas cúbicas [10]. También se han usado técnicas especializadas para construir configuraciones grandes con estructura de grupo; por ejemplo, la generación de diseños con un grupo de automorfismos prescrito ha sido estudiada por Kramer y Mesner [28], Kreher y Radziszowski [29], Schmalz [49], Betten et ál. [6] y Laue [33].

En lo referente a la construcción de resoluciones y enumeración de diseños resolubles, en la literatura se encuentran al menos tres tendencias [25]. La primera radica en la construcción de todas las resoluciones no isomorfas de cada representante de una clase de isomorfismo, durante una búsqueda exhaustiva de los diseños de bloques (no necesariamente resolubles) del caso. Esta técnica la usó Östergård en [42, 44]. El segundo enfoque consiste en usar alguna subconfiguración combinatoria apropiada como punto de partida para la

generación, por ejemplo en Lam y Tonchev [31] y en Ito et ál. [24]. Siguiendo el tercer camino se trata de generar las resoluciones directamente, mediante una búsqueda con retroceso y rechazo por isomorfismo. Una variante consiste en construir resoluciones agregando una clase paralela en cada paso; fue seguida por Dinitz et ál. [17] para clasificar las uno-factorizaciones de K_{12} , que equivale a la clasificación de las resoluciones de los diseños 2-(12, 2, 1). Esta modalidad también la seguimos nosotros en [39, 26, 40, 38] y será explicada ampliamente en este trabajo. Otra variante es agregar punto por punto, lo que corresponde a añadir una palabra de código en cada paso, dicho en el lenguaje de la teoría de códigos [27]. La búsqueda con retroceso y rechazo por isomorfismo ha sido usada para la construcción de códigos al menos en [11, 41, 43].

4 Estructura del trabajo

El primer capítulo está dedicado a presentar las nociones matemáticas, la terminología y algunos resultados que serán usados en el resto del trabajo. Comienza con el concepto de estructura de incidencia, dentro del que caben los diseños combinatorios y otras estructuras, v. gr. las geometrías finitas. Se recuerdan algunos conceptos de la teoría de grupos, de mucha utilidad en la construcción y clasificación de los diseños. Después se relacionan las estructuras de incidencia con las gráficas, lo cual permite resolver problemas de las primeras aprovechando resultados de la teoría de gráficas. También se presentan, en sendas secciones, las matrices de incidencia, los diseños t -(v, k, λ) y los diseños resolubles. Hasta este punto, todos los resultados y demostraciones presentados se pueden encontrar en la literatura especializada. El capítulo termina con la definición de matriz de intersección de clases paralelas y su aplicación para determinar los patrones de intersección de clases paralelas.

En el segundo capítulo se plantea el problema de búsqueda para resolverlo mediante el algoritmo de retroceso y se discute un poco acerca de este método. Después se incorpora al algoritmo la operación de rechazo por isomorfismo en niveles intermedios. Finalmente se discute acerca de la influencia del orden de las variables de búsqueda en el rendimiento del algoritmo de retroceso.

En el capítulo 3 se usa el algoritmo de retroceso con rechazo por isomorfismo en niveles intermedios presentado en el capítulo segundo, previa especificación de los grupos y predicados necesarios en dicho algoritmo, para resolver el problema de clasificación. Se ve cómo construir, a partir de los patrones de intersección de clases paralelas, las estructuras iniciales que el algoritmo usará para clasificar los diseños resolubles 2-(10, 5, 16) y 3-(10, 5, 6). También se demuestra que el algoritmo es correcto, es decir, que genera ex-

haustivamente dichos diseños. Concluye el capítulo con una presentación de los resultados de la enumeración.

Finalmente, en el el último capítulo se dan unas reflexiones a manera de conclusión y se expone lo que se tiene pensado como trabajo futuro en la misma línea de investigación.

Resumen

En esta tesis se expone un método para enumerar los diseños resolubles $2-(10, 5, 16)$. Este método se basa en un análisis combinatorio de los patrones que deben seguir las intersecciones de dos bloques tomados de clases paralelas distintas. Dicho análisis lleva a la construcción de una serie de configuraciones que sirven tanto de entrada a un algoritmo de retroceso encargado de la enumeración como para restringir notablemente el tamaño del espacio de búsqueda del mismo. El algoritmo de retroceso incluye la operación de rechazo por isomorfismo en niveles intermedios y agrega una clase paralela en cada paso. Adicionalmente, se define un orden conveniente para añadir las clases paralelas. Para determinar las configuraciones iniciales aprovechamos el hecho de que los diseños resolubles $2-(10, 5, 16)$ son equivalentes a los diseños resolubles $3-(10, 5, 6)$. Obtuvimos 27,121,734 diseños, a los que corresponden grupos de automorfismos de órdenes entre 1 y 1,440. De estos diseños 2,006,690 son simples.

Abstract

We present a method for enumerating the resolvable $2-(10, 5, 16)$ designs. Our method is based on the combinatorial analysis of possible intersection patterns between parallel classes. This analysis leads to the construction of some configurations serving both as input to an enumeration backtracking algorithm, and for remarkably restricting the size of the search space. The backtracking algorithm performs isomorph rejection at intermediate levels and adds a parallel class at each step. We also define a convenient order to add parallel classes. To construct the initial configurations, we use the fact that the resolvable $2-(10, 5, 16)$ designs are equivalent to the resolvable $3-(10, 5, 6)$ designs. We obtained 27,121,734 such designs, having automorphism groups whose order ranges from 1 to 1,440. Of these designs 2,006,690 are simple.

1 Estructuras de incidencia y diseños

Este capítulo comienza con una introducción breve a la teoría de diseños combinatorios, donde el objeto de estudio más general es conocido como estructura de incidencia. En la primera sección se define este concepto, se ilustra con algunos ejemplos y para finalizar se recuerdan algunos rudimentos de la teoría de grupos que serán útiles en el resto de la tesis. En la sección 2 se dan las nociones de isomorfismo entre estructuras de incidencia y de grupo de automorfismos de una estructura. Después se ve cómo interpretar una estructura de incidencia como gráfica bipartita, de tal suerte que ambas tienen el mismo grupo de automorfismos y el problema de determinar si dos estructuras son isomorfas resulta equivalente a decidir si las respectivas gráficas lo son. Esto da una vía para resolver problemas de isomorfismo entre estructuras de incidencia, haciendo uso de sistemas computacionales desarrollados para resolver problemas de isomorfismo entre gráficas.

Una estructura de incidencia se puede representar mediante una matriz de incidencia. Este concepto se presenta en la tercera sección y es especialmente útil porque se presta a la aplicación del álgebra lineal y de la computación. En la sección 4 se da la definición de diseño con parámetros t , v , k y λ y también se muestran algunas propiedades generales de estos diseños. Los diseños resolubles forman una clase importante de los diseños anteriores y constituyen el objeto principal de estudio en este trabajo; se definen en la sección 5, donde también se dan algunas de sus propiedades. Un concepto importante usado en esta tesis para enumerar diseños resolubles es el de matriz de intersección de clases paralelas y sobre este tema trata la sección 6. Usando estas matrices se encuentran patrones de intersección entre clases paralelas, los que permiten estudiar y comprender mejor la estructura de los diseños resolubles. Más adelante, en el capítulo 3, se verá cómo se integran estos patrones a un algoritmo de retroceso para lograr la enumeración de algunos diseños resolubles.

1.1 Estructuras de incidencia

La teoría de diseños empezó a desarrollarse en la primera mitad del siglo XIX, dentro de la geometría, a partir de la observación y estudio de ciertas configuraciones de puntos y líneas, por lo que no es extraño que en ella se utilicen conceptos y términos geométricos, como es el caso en la siguiente definición, inspirada en la relación entre puntos y rectas propia de la geometría euclidiana.

1.1.1 Definición Una *estructura de incidencia* es una tripleta $\mathbf{D} = (P, \mathcal{B}, \mathbf{I})$, en que P y \mathcal{B} son dos conjuntos mutuamente ajenos cualesquiera e $\mathbf{I} \subseteq P \times \mathcal{B}$. Se llama *puntos* a los elementos de P , *bloques* a los de \mathcal{B} y *relación de incidencia* a \mathbf{I} . En lugar de $(p, B) \in \mathbf{I}$ también se escribe $p \mathbf{I} B$ y se usan expresiones como “el punto p está en el bloque B ” o “ B pasa por p ”. \square

Al conjunto de puntos por los que pasa un bloque B se le llama *traza* de B y se simboliza mediante (B) , es decir, $(B) := \{p \in P : p \mathbf{I} B\}$. En forma análoga, (\mathcal{B}) representa al conjunto $\{(B) : B \in \mathcal{B}\}$ de trazas de los bloques de la estructura de incidencia.

Una estructura de incidencia puede tener bloques distintos B y B' que tengan la misma traza, o sea que $(B) = (B')$; de ser así, se dice que tiene bloques *repetidos*, en caso contrario se dice que es *simple*.

1.1.2 Ejemplo Con $P = \{q, r, s, t\}$, $\mathcal{B} = \{A, B, C\}$ e $\mathbf{I} = \{(s, A), (t, A), (q, B), (r, B), (t, B), (s, C), (t, C)\}$, la estructura de incidencia $(P, \mathcal{B}, \mathbf{I})$ no es simple porque A y C tienen la misma traza $\{s, t\}$. \square

1.1.3 Ejemplo Se dice que una estructura de incidencia $\mathbf{D} = (P, \mathcal{B}, \mathbf{I})$ es un *plano proyectivo* si satisface los siguientes axiomas (en los que se usa el término “línea” en lugar de “bloque”):

1. Por cualesquiera dos puntos distintos pasa una y sólo una línea.
2. Cualquiera dos líneas distintas tienen en común un y sólo un punto.
3. Hay un *cuadrángulo* (cuatro puntos de los cuales no hay tres que estén en una misma línea).

Con $P = \{0, 1, \dots, 6\}$, $\mathcal{B} = \{\{0, 1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 0\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 0, 2\}\}$ e $\mathbf{I} = \in$ se satisfacen los axiomas anteriores. A esta estructura se le conoce como *plano de Fano* —en honor al geómetra italiano Gino Fano, quien a finales del siglo XIX trabajó en la cimentación de las geometrías finitas— y suele representarse como se muestra en la figura 1.1.

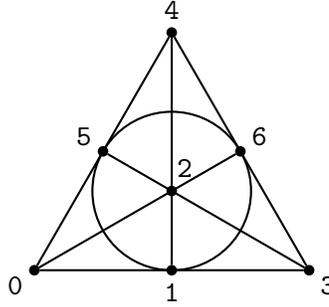


Figura 1.1: Plano de Fano.

Se demuestra que para cada plano proyectivo finito existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|P| = |\mathcal{B}| = n^2 + n + 1$, por cada punto pasan exactamente $n + 1$ líneas y cada línea pasa por exactamente $n + 1$ puntos [5, I.2.2]. A n se le llama *orden* de \mathbf{D} . En 1989, Lam, Thiel y Swiercz establecieron que no hay planos proyectivos de orden 10 [32]. \square

Para finalizar esta sección, es conveniente presentar algunas nociones básicas de la teoría de grupos que servirán en distintos lugares de este trabajo. Sean X un conjunto y G un grupo. Una *acción (izquierda)* de G en X es una función de $G \times X$ en X —cuyo valor en (g, x) es denotado por la yuxtaposición gx — tal que $1x = x$ y $g(hx) = (gh)x$, para toda $x \in X$ y $g, h \in G$; se le llama acción *inducida* si, cuando $G \leq \text{Sim}(X)$, se trata de la aplicación, i. e. $gx = g(x)$, en que $\text{Sim}(X)$ es el *grupo simétrico en X* (formado por las permutaciones de X y la composición de funciones). La acción inducida de G en X se extiende de manera natural a 2^X , $\binom{X}{k}$, X^n , etc. Si G actúa en Y , la *órbita* de y bajo G es el conjunto $Gy := \{gy : g \in G\} \subseteq Y$ y el *estabilizador* de y en G es el subgrupo $G_y := \{g \in G : gy = y\} \leq G$. Se demuestra que el conjunto de órbitas es una partición de Y y que (con Y y G finitos) $|Gy| = |G|/|G_y|$.

Para una introducción general a la teoría de grupos, ver [48]. En [5, III.3] se encuentran aplicaciones de dicha teoría a la construcción y análisis de estructuras de incidencia.

1.2 Isomorfismo

En los problemas de clasificación y enumeración de estructuras de incidencia no importa la naturaleza de los puntos o de los bloques, sino la conexión entre ellos, plasmada en la relación de incidencia. Dos estructuras de este tipo se consideran equivalentes si tienen la misma forma, de acuerdo a la siguiente definición.

1.2.1 Definición Sean $\mathbf{D} = (P, \mathcal{B}, \mathbf{I})$ y $\mathbf{D}' = (P', \mathcal{B}', \mathbf{I}')$ estructuras de incidencia. Se dice que son *isomorfas* si hay una función biyectiva $\pi : P \cup \mathcal{B} \rightarrow P' \cup \mathcal{B}'$ tal que $\pi P = P'$, $\pi \mathcal{B} = \mathcal{B}'$ y $\forall_{(p,B) \in P \times \mathcal{B}} (p \mathbf{I} B \Leftrightarrow \pi p \mathbf{I}' \pi B)$. En tal caso se escribe $\mathbf{D} \cong \mathbf{D}'$ y a π se le llama *isomorfismo* o también, si las estructuras son iguales, *automorfismo*. Mediante $\text{Aut}(\mathbf{D})$ se denota al grupo formado por todos los automorfismos de \mathbf{D} . \square

Dada una estructura de incidencia $\mathbf{D} = (P, \mathcal{B}, \mathbf{I})$, a $(\mathbf{D}) := (P, (\mathcal{B}), \in)$ se le llama la estructura *reducida* de \mathbf{D} [5, III.2.12].

1.2.2 Proposición Sea $\mathbf{D} = (P, \mathcal{B}, \mathbf{I})$ una estructura de incidencia simple. Entonces $\mathbf{D} \cong (\mathbf{D})$.

Demostración. Por ser \mathbf{D} estructura simple, \mathcal{B} y (\mathcal{B}) tienen igual número de elementos. Directamente de la definición de traza se sigue que $p \mathbf{I} B$ si y sólo si $p \in (B)$. Como isomorfismo sirve la función que deja fijo a cada punto p y a cada bloque B lo transforma en (B) . \square

1.2.3 Observación La proposición anterior justifica que en una estructura de incidencia simple $\mathbf{D} = (P, \mathcal{B}, \mathbf{I})$ se pueda considerar a los bloques como subconjuntos de P , con relación de incidencia \in . En este caso se acostumbra la notación simplificada $\mathbf{D} = (P, \mathcal{B})$, se puede demostrar que cada automorfismo $\varphi \in \text{Aut}(\mathbf{D})$ queda determinado por su comportamiento en los puntos —es decir, cada bloque satisface la igualdad $\varphi B = \{\alpha x : x \in B\}$, con $\alpha := \varphi|_P$ — por lo que $\text{Aut}(\mathbf{D})$ es considerado como un subgrupo de $\text{Sim}(P)$ [5, III.2.11].

De hecho, si \mathbf{D} no es simple también se le representa en la forma (P, \mathcal{B}) , pero entonces, para permitir la repetición de bloques característica de estas estructuras, \mathcal{B} denota una colección de subconjuntos de P (y se abusa de la notación, por ejemplo al escribir $\mathcal{B} = \{\{s, t\}, \{q, r, t\}, \{s, t\}\}$ en el caso de la colección de bloques del ejemplo 1.1.2). Ahora α no determina a φ (m copias de B deben ser transformadas en m copias de αB y esto se puede hacer de $m!$ maneras). Sin embargo, al igual que en el caso de las estructuras simples, se cumple la igualdad (de colecciones) $\alpha \mathcal{B} = \mathcal{B}$ y como grupo de automorfismos también se toma el de las permutaciones de P que satisfacen esta condición [35, I.1.11], es decir, $\text{Aut}(\mathbf{D}) := \{\alpha \in \text{Sim}(P) : \alpha \mathcal{B} = \mathcal{B}\}$.

También, con las estructuras vistas así, la definición 1.2.1 se simplifica a: $(P, \mathcal{B}) \cong (P', \mathcal{B}')$ si existe una biyección $\beta : P \rightarrow P'$ tal que $\beta \mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

Con $P = \{0, 1, \dots, n\}$ fija, la relación de isomorfismo se puede expresar en términos de la acción de $G = \text{Sim}(P)$ en algún conjunto apropiado; por ejemplo, si \mathcal{B} y \mathcal{B}' pertenecen al conjunto de todas las colecciones finitas de

subconjuntos de P , $(P, \mathcal{B}) \cong (P, \mathcal{B}')$ si y sólo si $G\mathcal{B} = G\mathcal{B}'$ (i. e., \mathcal{B} y \mathcal{B}' pertenecen a la misma órbita), en este caso también se escribe $\mathcal{B} \cong_G \mathcal{B}'$. El subíndice en \cong_G es útil porque a veces conviene considerar la acción de un subgrupo $H \leq G$, lo que origina una restricción en la relación de isomorfismo; es evidente que $\mathcal{B} \cong_H \mathcal{B}' \Rightarrow \mathcal{B} \cong_G \mathcal{B}'$. \square

La teoría de gráficas es una de las que más se ha desarrollado en los últimos dos siglos, tal vez porque muchos problemas combinatorios que se presentan (no sólo en matemáticas sino en una diversidad de disciplinas) se pueden reformular en términos de dicha teoría, donde es frecuente que ya se tengan maneras de resolverlos. A continuación se verá cómo el problema de decidir si dos estructuras de incidencia son isomorfas se puede trasladar al terreno de las gráficas. Los detalles acerca de gráficas se pueden consultar en [16, 9, 21, 2], aquí sólo se incluyen algunas generalidades con el propósito de dar continuidad a la presentación. Una *gráfica simple* $G = (V, E)$ consiste de un conjunto finito V de *vértices* (o *nodos*) y un conjunto E de *aristas* (o *lados*), en que cada arista es un par $\{x, y\} \subseteq V$.

1.2.4 Definición Las gráficas $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son *isomorfas* si hay una función biyectiva $\pi : V \rightarrow V'$ tal que $\forall_{x, y \in V} (\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{\pi x, \pi y\} \in E')$. En tal caso se escribe $G \cong G'$ y a π se le llama *isomorfismo* o bien, si las gráficas coinciden, *automorfismo*. \square

Ahora se establecerá una conexión muy útil entre estructuras de incidencia y ciertas gráficas (llamadas *bipartitas*). Primero una definición que se puede ver como una reformulación de 1.1.1 en lenguaje de gráficas:

1.2.5 Definición Sea $D = (P, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ una estructura de incidencia. La gráfica de D , \mathcal{G}_D , es aquella de vértices $V = P \cup \mathcal{B}$ y aristas $E = \{\{p, B\} : p \mathcal{I} B\}$. \square

Para continuar con esta especie de traducción y llevar 1.2.1 a términos gráficos, es necesario restringir un poco el isomorfismo entre gráficas de la manera siguiente:

1.2.6 Definición Sean \mathcal{G}_D y $\mathcal{G}_{D'}$ las gráficas de las estructuras de incidencia $(P, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ y $(P', \mathcal{B}', \mathcal{I}')$, respectivamente. Se dice que son isomorfas (como gráficas de estructuras de incidencia) si hay un isomorfismo $\pi : V \rightarrow V'$ (en el sentido de la definición 1.2.4) tal que $\pi P = P'$ y $\pi \mathcal{B} = \mathcal{B}'$. Para indicar esto se usará la notación $\mathcal{G}_D \cong \mathcal{G}_{D'}$. \square

De las definiciones 1.2.1 y 1.2.6 sin dificultad se sigue que los isomorfismos

entre \mathbf{D} y \mathbf{D}' son los mismos que aquellos entre $\mathcal{G}_{\mathbf{D}}$ y $\mathcal{G}_{\mathbf{D}'}$, de aquí resulta evidente el siguiente teorema.

1.2.7 Teorema Sean \mathbf{D} y \mathbf{D}' estructuras de incidencia. Entonces

$$\mathbf{D} \cong \mathbf{D}' \Leftrightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{D}} \cong \mathcal{G}_{\mathbf{D}'} \quad y \quad \text{Aut}(\mathbf{D}) = \text{Aut}(\mathcal{G}_{\mathbf{D}}). \quad \square$$

1.2.8 Observación De acuerdo a la observación 1.2.3, cuando \mathcal{B} es una colección de subconjuntos de puntos, como grupo de automorfismos de $\mathbf{D} = (P, \mathcal{B})$ se toma $\text{Aut}(\mathbf{D}) := \{\alpha \in \text{Sim}(P) : \alpha\mathcal{B} = \mathcal{B}\}$ y entonces en el teorema anterior la igualdad debe reemplazarse por $\text{Aut}(\mathbf{D}) \cong \text{Aut}(\mathcal{G}_{\mathbf{D}})$ en caso de que \mathbf{D} sea simple o bien, en caso contrario, por $\text{Aut}(\mathbf{D}) \cong \text{Aut}(\mathcal{G}_{\mathbf{D}})/N$, en que $N = \{\pi \in \text{Aut}(\mathcal{G}_{\mathbf{D}}) : \forall_{p \in P} \pi p = p\}$ [5, III.2.13]. \square

Gracias al teorema 1.2.7, para decidir si dos estructuras de incidencia son isomorfas o para construir el grupo de automorfismos de una estructura, se puede recurrir al uso de sistemas de programación para gráficas —por ejemplo *nauty* de McKay [37]— que permiten resolver esos problemas formulándolos en términos de gráficas. En este trabajo, para resolver el problema de isomorfismo se usó *nauty* de la siguiente manera. Dada una estructura \mathbf{D} , a *nauty* se le da la gráfica $\mathcal{G}_{\mathbf{D}}$, codificada apropiadamente, para que la transforme en la gráfica *representante canónica* $c(\mathcal{G}_{\mathbf{D}}) \cong \mathcal{G}_{\mathbf{D}}$, que es la misma para toda gráfica de la clase de isomorfismo de $\mathcal{G}_{\mathbf{D}}$, i. e. $\mathcal{G}_{\mathbf{D}} \cong \mathcal{G}_{\mathbf{D}'}$ si y sólo si $c(\mathcal{G}_{\mathbf{D}}) = c(\mathcal{G}_{\mathbf{D}'})$. Entonces, para decidir si dos estructuras de incidencia son isomorfas basta revisar si son iguales sus respectivas gráficas representantes canónicas. El programa *nauty* también computa un conjunto de generadores de $\text{Aut}(\mathcal{G}_{\mathbf{D}})$ y el tamaño de este grupo.

1.3 Matrices de incidencia

A veces conviene representar las estructuras de incidencia por medio de matrices numéricas, de ceros y unos, con lo que se abre una puerta hacia un campo tan fructífero e importante como es el álgebra lineal.

1.3.1 Definición Sean $\mathbf{D} = (P, \mathcal{B}, \mathbf{I})$ una estructura de incidencia finita, con sus puntos representados por p_1, \dots, p_v y sus bloques por B_1, \dots, B_b . La matriz $M = (m_{i,j})$, con $i = 1, \dots, v$ y $j = 1, \dots, b$, definida por

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } p_i \mathbf{I} B_j \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

es llamada una *matriz de incidencia* para \mathbf{D} . \square

Es claro que M depende del orden en que aparecen los puntos y los bloques como respectivas etiquetas de renglones y columnas. Sin embargo, si M' es otra matriz de incidencia para \mathbf{D} , mediante permutaciones de renglones o columnas se puede convertir en M , dicho de otra manera, existen matrices de permutación P y Q [48, p. 18], tales que $M = PM'Q$. De aquí en adelante, cuando dos matrices cualesquiera M y M' satisfagan esta última condición existencial, se dirá que son *equivalentes*, lo que se simboliza en la forma $M \equiv M'$. Sin dificultad se prueba que dos estructuras de incidencia son isomorfas si y sólo si sus respectivas matrices de incidencia son equivalentes.

1.3.2 Ejemplo La matriz de incidencia de la estructura del ejemplo 1.1.2 es:

$$M = \begin{array}{c} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \\ \mathbf{t} \end{array} \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Con objeto de facilitar la interpretación de los elementos de la matriz, los renglones y columnas aparecen etiquetados con los respectivos puntos y bloques. A veces es cómodo usar éstos directamente como índices, v. g. $m_{\mathbf{s},\mathbf{A}} = 1$, o en expresiones como “el renglón \mathbf{s} ”. \square

Es de notar que el producto escalar de los renglones (asociados a) p y q es igual al número de bloques que pasan por p y q . En forma dual, el producto escalar de las columnas (asociadas a) A y B es igual al número de puntos por los que pasan A y B , o sea la intersección de las trazas (A) y (B) (o bien $A \cap B$, si los bloques son conjuntos). A esto deben su importancia las matrices MM^T y M^TM .

1.3.3 Ejemplo Con la matriz del ejemplo 1.3.2 se obtienen las siguientes:

$$MM^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \\ \mathbf{t} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$M^TM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

De estas matrices se puede leer, por ejemplo, que por s y t pasan dos bloques y que A y B pasan en común por un punto. \square

1.4 Diseños t - (v, k, λ)

1.4.1 Definición Sean $t, v, k, \lambda \in \mathbb{N}$, $v \geq k \geq t \geq 0$ y $\lambda > 0$. Un *diseño* (con parámetros) t - (v, k, λ) es una estructura de incidencia (P, \mathcal{B}) tal que $|P| = v$, $|B| = k$ para todo $B \in \mathcal{B}$ y cada subconjunto de t puntos está contenido en exactamente λ bloques. (Este último requisito se conoce como *condición de balanceo*). \square

1.4.2 Ejemplo De lo dicho al final del ejemplo 1.1.3 se sigue que cada plano proyectivo de orden n es un diseño 2 - $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$.

En casos como este, en que $t = 2$ y $k < v$, a la estructura también se le llama *diseño de bloques incompletos balanceado* (BIBD, por sus siglas en inglés) con parámetros (v, k, λ) . \square

1.4.3 Teorema Sea (P, \mathcal{B}) un diseño t - (v, k, λ) , $S \subset P$ un conjunto de cardinalidad $s < t$ y b_s el número de bloques que contienen a S . Entonces

$$b_s \binom{k-s}{t-s} = \lambda \binom{v-s}{t-s} \quad (1.1)$$

y (P, \mathcal{B}) también es un diseño s - (v, k, b_s) .

Demostración. Basta contar de dos maneras los elementos de la colección $\{(T, B) : S \subseteq T \subseteq B, |T| = t, B \in \mathcal{B}\}$: Cada bloque B que contiene a S , aporta $\binom{k-s}{t-s}$ parejas (T, B) a la colección anterior, por lo que al multiplicar este número por b_s se obtiene el miembro izquierdo de (1.1), el miembro derecho se debe a que S es parte de $\binom{v-s}{t-s}$ subconjuntos T de t puntos de P y a que cada uno de estos subconjuntos, por la condición de balanceo, contribuye con λ parejas (T, B) .

Despejando b_s en (1.1) resulta evidente que es el mismo para todo subconjunto de cardinalidad s , lo que implica la última afirmación del teorema. \square

Observar que, en el resultado anterior, b_0 da el número de bloques y b_1 es el número de bloques que pasan por un punto dado, Por su importancia estos hechos se enuncian en el siguiente teorema.

1.4.4 Teorema Sean (P, \mathcal{B}) un diseño t - (v, k, λ) , $b = |\mathcal{B}|$ y r el número de bloques que pasan por un punto dado. Entonces,

$$b = \lambda \binom{v}{t} / \binom{k}{t}, \quad (1.2)$$

$$r = \lambda \binom{v-1}{t-1} / \binom{k-1}{t-1}. \quad (1.3)$$

□

En el caso más conocido y estudiado, $t = 2$, se acostumbra escribir las fórmulas para r y b así (conviene escribir primero la de r):

$$r = \frac{\lambda(v-1)}{(k-1)}, \quad (1.4)$$

$$b = \frac{\lambda v(v-1)}{k(k-1)} = \frac{vr}{k}. \quad (1.5)$$

También como consecuencia inmediata del teorema 1.4.3 se obtiene que, en términos de la notación ahí presentada, $(P - S, \{B - S : S \subseteq B \in \mathcal{B}\})$ es un diseño $(t-s)$ - $(v-s, k-s, \lambda)$, conocido como *diseño derivado de (P, \mathcal{B}) con respecto a S* .

1.4.5 Teorema (desigualdad de Fisher) Para cada BIBD (v, k, λ) ,

$$b \geq v.$$

Demostración. Sea M la matriz de incidencia del diseño, se probará que es de rango v . Al multiplicarla por su transpuesta se obtiene la matriz cuadrada tal que los v elementos de la diagonal son iguales a r y los demás elementos son iguales a λ , afirmación que es equivalente a la igualdad

$$MM^T = \lambda J + (r - \lambda)I.$$

Notemos ahora que λJ , de rango 1, tiene a λv como su único valor propio distinto de cero y, como $r - \lambda \neq 0$ debido a la hipótesis $v > k$ y a (1.4), $(r - \lambda)I$ tiene a $r - \lambda$ como valor propio de multiplicidad v . Entonces los valores propios de $\lambda J + (r - \lambda)I$ son $\lambda v + (r - \lambda) = rk$ y $r - \lambda$, este último con multiplicidad $v - 1$.^{*} Entonces el determinante es igual a $rk(r - \lambda)^{v-1}$, que es distinto de cero; por lo tanto M es de rango v . □

^{*}Respectivos vectores propios son $(1, 1, \dots, 1)$, $(1, -1, 0, \dots, 0)$, \dots , $(1, 0, \dots, 0, -1)$.

1.5 Diseños resolubles

1.5.1 Definición Sea (P, \mathcal{B}) un diseño t - (v, k, λ) . Una *clase paralela* es una partición de P en bloques de \mathcal{B} (para lo cual k debe dividir a v). Una *resolución* es una partición de \mathcal{B} en clases paralelas. Si \mathcal{B} tiene alguna resolución se dice que el diseño es *resoluble*. Dos resoluciones \mathcal{R} y \mathcal{R}' son *isomorfas* si existe una biyección $\beta : P \rightarrow P'$ tal que $\beta\mathcal{R} = \mathcal{R}'$. \square

1.5.2 Ejemplo Las soluciones al problema de las escolares de Kirkman, presentado en la Introducción, son resoluciones de diseños 2 - $(15, 3, 1)$. De éstos hay 80 mutuamente no isomorfos, cuatro de los cuales son resolubles. Uno de estos últimos sólo tiene una resolución y los otros tienen dos resoluciones, lo que da un total de siete resoluciones mutuamente no isomorfas [12] A continuación aparecen las dos resoluciones de uno de los diseños mencionados, $P = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o\}$ simboliza al conjunto de alumnas y cada renglón representa una clase paralela, escrita sin llaves ni comas, v. g. $\{\{a, b, c\}, \{d, j, n\}, \{e, h, m\}, \{f, i, o\}, \{g, k, l\}\}$ se da en el primer renglón.

\mathcal{R}_1					\mathcal{R}_2				
abc	djn	ehm	fio	gkl	abc	djn	ehm	fio	gkl
ahi	beg	cmn	dko	fjl	ahi	beg	cmn	dko	fjl
ajk	bmo	cef	dhl	gin	ajk	bmo	cef	dhl	gin
ade	bln	cij	fk m	gho	ade	bik	clo	fhn	gjm
afg	bhj	clo	dim	ekn	afg	bln	chk	dim	ejo
alm	bik	cdg	ejo	fhn	alm	bdf	cij	ekn	gho
aon	bdf	chk	eil	gjm	aon	bhj	cdg	eil	fk m

A los diseños 2 - $(v, 3, 1)$ también se les conoce como *sistemas de tríos de Steiner de orden v* y se usa la notación $STS(v)$ para referirse a ellos; de igual manera, a las resoluciones de dichos diseños se les llama *sistemas de tríos de Kirkman de orden v* o $KTS(v)$ [12, 14, 1]. En 1971 Ray-Chaudhuri y Wilson [47] probaron que hay diseños $KTS(v)$ si y sólo si $v \equiv 3 \pmod{6}$. \square

1.5.3 Teorema *Todo diseño t - $(2k, k, \lambda)$ tiene a lo más una resolución.*

Demostración. Si el diseño es resoluble, cada clase paralela consta de dos bloques mutuamente complementarios. \square

El siguiente teorema es similar al de la desigualdad de Fisher, pero para el caso en que el BIBD es resoluble.

1.5.4 Teorema (desigualdad de Bose) *Para cada BIBD (v, k, λ) resoluble,*

$$b \geq v + r - 1.$$

Demostración. Sea M la matriz de incidencia del diseño y sea \mathbf{B} una clase paralela de una resolución \mathcal{R} . La suma de las columnas de M correspondientes a los bloques de \mathbf{B} es igual a $(1, 1, \dots, 1)^T$; lo mismo pasa con cualquiera otra clase paralela \mathbf{B}' , por lo que las sumas asociadas a \mathbf{B} y \mathbf{B}' se pueden igualar y entonces despejar una columna B' de las correspondientes a \mathbf{B}' para mostrar que B' es linealmente dependiente de las otras columnas del caso. Como \mathbf{B}' se puede tomar de $r-1$ maneras, se tendrá que las respectivas $r-1$ columnas (que juegan el papel B') son combinaciones lineales de las otras $b - (r-1)$ columnas de M , por lo que el espacio generado por estas últimas es el mismo que el generado por las b columnas de M y que es de dimensión v (ver demostración del teorema 1.4.5). Por lo tanto $b - (r-1) \geq v$. \square

El teorema siguiente, debido a Alltop [4, Th. A₁], relaciona dos clases de diseños. La demostración es adaptación de la presentada en [5, II.7.6].

1.5.5 Teorema *Sea \mathbf{D} un diseño resoluble t - $(2k, k, \lambda)$ con t par. Entonces también es diseño resoluble $(t+1)$ - $(2k, k, \lambda')$ con $\lambda' = \lambda(k-t)/(2k-t)$.*

Demostración. Sean T un conjunto de $t+1$ puntos de \mathbf{D} , \mathcal{B}_T la clase de bloques que contienen a T y \mathcal{B}^T la clase de bloques ajenos a T . Si \mathcal{B}_x denota la clase de bloques que pasan por x , se obtiene que $\bigcup_{x \in T} \mathcal{B}_x$ —la clase de bloques que pasan por al menos un punto de T — es de cardinalidad $b_0 - |\mathcal{B}^T|$. Entonces

$$\begin{aligned} b_0 - |\mathcal{B}^T| &= \left| \bigcup_{x \in T} \mathcal{B}_x \right| = \sum_{i=1}^{t+1} (-1)^{i+1} \sum_{S \in \binom{T}{i}} \left| \bigcap_{x \in S} \mathcal{B}_x \right| \\ &= \sum_{i=1}^t (-1)^{i+1} \binom{t+1}{i} b_i + |\mathcal{B}_T|, \end{aligned}$$

de donde, tomando en cuenta que $|\mathcal{B}_T| = |\mathcal{B}^T|$ porque cada clase paralela consta de dos bloques mutuamente complementarios (cf. teorema 1.5.3),

$$|\mathcal{B}^T| = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^t (-1)^i \binom{t+1}{i} b_i.$$

Esta igualdad muestra que $|\mathcal{B}^T|$ no depende de T . Entonces, haciendo $\lambda' = |\mathcal{B}^T|$, \mathbf{D} resulta ser un diseño \mathbf{D}' con parámetros $(t+1)$ - $(2k, k, \lambda')$. Aplicando

(1.1) para obtener b_0 de dos maneras, una para \mathbf{D} y la otra para \mathbf{D}' , se obtiene

$$\lambda \binom{v}{t} / \binom{k}{t} = \lambda' \binom{v}{t+1} / \binom{k}{t+1},$$

de donde se sigue que $\lambda' = \lambda(k-t)/(2k-t)$. \square

1.6 Matrices y patrones de intersección de clases paralelas

1.6.1 Definición Sean \mathcal{R} una resolución de un diseño t -(v, k, λ), $q = v/k$, y $\mathbf{R} = \{B_1, B_2, \dots, B_q\}$ y $\mathbf{R}' = \{B'_1, B'_2, \dots, B'_q\}$ dos clases paralelas de \mathcal{R} . A la matriz

$$M(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = (|B_i \cap B'_j|)_{q \times q}$$

se la llamará *matriz de intersección* de \mathbf{R} y \mathbf{R}' (como abreviación de “matriz de cardinalidades de las intersecciones de cada bloque de \mathbf{R} con cada bloque de \mathbf{R}' ”). \square

1.6.2 Ejemplo Si las clases paralelas son

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \{ \{a, b, c\}, \{d, j, n\}, \{e, h, m\}, \{f, i, o\}, \{g, k, l\} \} \text{ y} \\ \mathbf{R}' &= \{ \{a, h, i\}, \{b, e, g\}, \{c, m, n\}, \{d, k, o\}, \{f, j, l\} \}, \end{aligned}$$

entonces

$$M(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

\square

De manera similar al caso de las matrices de incidencia, un cambio en el orden de los bloques de \mathbf{R} y \mathbf{R}' corresponde a una transformación de la matriz de intersección en una matriz equivalente $PM(\mathbf{R}, \mathbf{R}')Q$, en que P y Q son matrices de permutación. Si una matriz de intersección pertenece a la clase de equivalencia \mathcal{T} , se dirá que es de *tipo* \mathcal{T} .

Si M es la matriz de incidencia de un diseño resoluble, es fácil ver que la matriz de intersección de dos clases paralelas cualesquiera es submatriz de $M^T M$ (cf. ejemplo 1.3.3 y párrafo que lo precede). A continuación se establecerán otras propiedades básicas de estas matrices, fundamentales para la tesis.

1.6.3 Lema Sea $A = (a_{i,j})_{q \times q}$ la matriz de intersección de las clases paralelas \mathbf{R} y \mathbf{R}' de un diseño resoluble t - (v, k, λ) . Entonces, $\forall i, j \in \{1, \dots, q\}$,

$$0 \leq a_{i,j} \leq k \quad \wedge \quad \sum_{j=1}^q a_{i,j} = k = \sum_{i=1}^q a_{i,j}. \quad (1.6)$$

Demostración. Las desigualdades se deben a que la cardinalidad de cada bloque es k . Para las ecuaciones, téngase presente que una clase paralela es partición del conjunto de puntos P . La primera igualdad se obtiene así:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q a_{i,j} &= \sum_{j=1}^q |B_i \cap B'_j| \\ &= \left| \bigcup_{j=1}^q (B_i \cap B'_j) \right| \\ &= \left| B_i \cap \bigcup_{j=1}^q B'_j \right| \\ &= |B_i \cap P| = k. \end{aligned}$$

La otra igualdad se obtiene en forma análoga. \square

Una *partición* de un número entero positivo m es una representación de éste como suma de enteros positivos, sin importar el orden de los sumandos [30, §3.1]. También es conveniente referirse a una partición $a_1 + \dots + a_n$ listando la colección de sumandos o *partes*: $[a_1, \dots, a_n]$. Sea $f(m, n)$ el número de particiones de m en n partes. La fórmula (1.6) se puede enunciar diciendo que en cada renglón o columna de la matriz de intersección los elementos distintos de cero constituyen una partición de k en a lo mucho q partes. Particiones de este tipo hay

$$h = \sum_{j=1}^{\min(k,q)} f(k, j) \quad (1.7)$$

y en [30] aparecen algunos algoritmos para generarlas.

1.6.4 Ejemplo

(a) Para los diseños resolubles 2-(10, 5, 16), se tiene $q = 2$ y las particiones de $k = 5$ en $\min(k, q) = 2$ ó menos partes son:

$$A_1 = [5], \quad A_2 = [4, 1] \quad \text{y} \quad A_3 = [3, 2].$$

- (b) Para los diseños resolubles 2-(12, 4, 3), $\min(k, q) = \min(4, 3) = 3$ y las particiones de 4 en a lo mucho tres partes son:

$$A_1 = [4], \quad A_2 = [3, 1], \quad A_3 = [2, 2] \quad \text{y} \quad A_4 = [2, 1, 1]. \quad \square$$

Ahora se verá de qué manera la condición de balanceo de un diseño resoluble t -(v, k, λ) limita el número de tipos de matrices de intersección que se pueden presentar y restringe la composición de la colección de $r - 1$ matrices de intersección que una clase paralela forma con las demás clases.

Sean \mathcal{R} una resolución de un diseño t -(v, k, λ), $\mathbf{R} \in \mathcal{R}$, $\mathbf{R}' \in \mathcal{R} - \{\mathbf{R}\}$ y $R \in \mathbf{R}$. Además, sean A_1, \dots, A_h las h particiones contadas en (1.7). Si z_ℓ ($\ell = 1, \dots, h$) denota el número de clases paralelas $\mathbf{R}' \in \mathcal{R} - \{\mathbf{R}\}$ tales que $M(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ tiene a los elementos de A_ℓ en el renglón de índice R , entonces se cumplen las siguientes ecuaciones, en que la primera es obvia y la segunda se obtiene de contar de dos maneras los subconjuntos de R de tamaño t que aparecen en $\mathcal{R} - \{\mathbf{R}\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^h z_\ell &= r - 1 \\ \sum_{\ell=1}^h \left[\sum_{a \in A_\ell} \binom{a}{t} \right] z_\ell &= (\lambda - 1) \binom{k}{t}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

1.6.5 Ejemplo (Continuación del ejemplo 1.6.4)

- (a) Para los diseños resolubles 2-(10, 5, 16), el sistema de ecuaciones (1.8) se reduce a

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= 35 \\ 10z_1 + 6z_2 + 4z_3 &= 150, \end{aligned}$$

y tiene dos soluciones en $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{N}^3$: $(0, 5, 30)$ y $(1, 2, 32)$. Ya que cada z_ℓ ($\ell = 1, 2, 3$) es distinta de cero en al menos una solución, ninguna A_ℓ queda descartada para formar renglones o columnas de las matrices de intersección. Teniendo esto en mente, es fácil ver que cualquiera de estas matrices tiene que ser equivalente a alguna de las siguientes tres:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) En el caso de los diseños resolubles 2-(12, 4, 3) el sistema (1.8) queda así:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 &= 10 \\ 6z_1 + 3z_2 + 2z_3 + z_4 &= 12, \end{aligned}$$

y tiene dos soluciones $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{N}^4$: $(0, 0, 2, 8)$ y $(0, 1, 0, 9)$. Como $z_1 = 0$ en ambas soluciones, ninguna matriz de intersección puede tener renglones, ni columnas, correspondientes a la partición A_1 , lo que implica que todo diseño de los considerados debe ser simple. Las posibles matrices de intersección se pueden construir a mano, como en el inciso anterior, pero aquí ya no es tan fácil. Es mejor programar un algoritmo para generarlas, que dé una matriz representante de cada tipo posible, y así se obtuvieron las siguientes seis:

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, & M_2 &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, & M_3 &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \\ M_4 &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, & M_5 &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, & M_6 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Para continuar el estudio de la resolución \mathcal{R} , sea $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ la colección de $r-1$ matrices de intersección $M(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$, con $\mathbf{R}' \in \mathcal{R} - \{\mathbf{R}\}$, y sean $M_1, \dots, M_{h'}$ matrices de intersección representantes de los respectivos h' tipos posibles. Procediendo en forma parecida a la usada para plantear el sistema (1.8), ahora con z_ℓ ($\ell = 1, \dots, h'$) denotando el número de matrices en $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ equivalentes a M_ℓ y, para la segunda ecuación, contando de dos maneras los subconjuntos (de los q bloques) de \mathbf{R} de cardinalidad t que aparecen en $\mathcal{R} - \{\mathbf{R}\}$, se llega a:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{h'} z_\ell &= r-1 \\ \sum_{\ell=1}^{h'} \left[\sum_{a \in \widetilde{M}_\ell} \binom{a}{t} \right] z_\ell &= q(\lambda-1) \binom{k}{t}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

en que \widetilde{M}_ℓ denota la colección de q^2 elementos de M_ℓ .

1.6.6 Ejemplo (Continuación del ejemplo 1.6.5)

(a) Para los diseños resolubles 2-(10, 5, 16) el sistema (1.9) resulta ser

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= 35 \\ 20z_1 + 12z_2 + 8z_3 &= 300, \end{aligned}$$

y tiene dos soluciones $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{N}^3$: $(0, 5, 30)$ y $(1, 2, 32)$.

(b) Para los diseños resolubles 2-(12, 4, 3) el sistema (1.9) queda así:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 &= 10 \\ 9z_1 + 7z_2 + 6z_3 + 6z_4 + 4z_5 + 3z_6 &= 36, \end{aligned}$$

y tiene las siguientes ocho soluciones $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \in \mathbb{N}^6$:

$$\begin{aligned} &(0, 0, 0, 0, 6, 4), (0, 0, 0, 1, 3, 6), (0, 0, 0, 2, 0, 8), (0, 0, 1, 0, 3, 6), \\ &(0, 0, 1, 1, 0, 8), (0, 0, 2, 0, 0, 8), (0, 1, 0, 0, 2, 7), (1, 0, 0, 0, 0, 9). \quad \square \end{aligned}$$

A las soluciones de (1.9) se les llamará *patrones de intersección*. El análisis de estos patrones en varios casos particulares [39, 26, 40] llevó a un mejor entendimiento de las estructuras correspondientes, lo que permitió organizar y realizar con éxito la enumeración de los diseños resolubles 2-(12, 4, 3), 2-(14, 7, 12), 3-(14, 7, 5), 2-(10, 5, 16) y 3-(10, 5, 6). De los tres artículos citados, el último es el que más se presta para ilustrar la manera en que los patrones de intersección pueden ser incorporados a los algoritmos de enumeración de diseños resolubles, es por esto que los próximos dos capítulos se limitan a exponer las ideas y resultados publicados en [40].

2 Enumeración de objetos combinatorios

Por lo general la clasificación de objetos combinatorios se puede formular en términos de un conjunto finito X en el que actúa un grupo G . Se dice entonces que dos objetos son isomorfos si pertenecen a una misma órbita. La generación exhaustiva de objetos mutuamente no isomorfos consiste en producir exactamente un representante de cada órbita o clase de isomorfismo. Para el caso de la generación de los diseños de bloques aquí tratados, $G = \text{Sim}(P)$, es decir, G es el grupo de permutaciones del conjunto de puntos.

En la primera sección del capítulo se plantea el problema de *búsqueda* en una forma apropiada para resolverlo mediante el método de *retroceso* (del inglés “backtrack”), se pasa a discutir un poco acerca de este método, se presenta un algoritmo para la generación exhaustiva de soluciones, al que se le incorpora la operación de *rechazo por isomorfismo*, para obtener un algoritmo de enumeración, o sea que sólo da una solución por cada clase de equivalencia. Luego, para ilustrar el uso de los algoritmos, a manera de ejemplo se plantea un problema cuya respuesta se reformula más adelante en un lema, mismo que en el capítulo siguiente sirve de punto de partida para la obtención de los resultados principales de este trabajo.

La segunda sección trata del rechazo por isomorfismo en etapas intermedias de la construcción incremental —inherente al método de retroceso— de soluciones. Se presentan las generalidades del método y un algoritmo que se ilustra al aplicarlo para volver a resolver, con fines comparativos, el problema planteado en la primera sección.

La última sección sirve para discutir con brevedad la influencia, en el rendimiento de un algoritmo de retroceso, del orden en que se van agregando paso a paso las componentes de una solución, tema que en la literatura en inglés se encuentra bajo el nombre de “variable ordering”.

2.1 Algoritmos de retroceso y rechazo por isomorfismo

En muchos casos, incluyendo el de los diseños, el problema de búsqueda se puede plantear de la manera siguiente. Dada una colección de conjuntos finitos X_1, X_2, \dots, X_n y un predicado \mathcal{P} definido en $\mathbf{X} = \times_{i=1}^n X_i$, encontrar

las soluciones de \mathcal{P} , es decir, determinar $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{X} : \mathcal{P}(x_1, \dots, x_n)\}$. En principio, este conjunto se podría construir generando cada elemento de \mathbf{X} para revisar si satisface \mathcal{P} , pero en la mayoría de los casos de interés este camino resultaría muy lento, si no es que prácticamente imposible. Es más conveniente intentar resolver el problema mediante un algoritmo de retroceso [23, 3, 52]. En estos algoritmos, de manera incremental, agregando una componente en cada paso, se construyen soluciones auxiliares (x_1, \dots, x_j) , susceptibles de ser extendidas a soluciones del problema; su nombre se debe a que cuando se agotan los modos de extender una solución parcial, se retrocede a la solución parcial previa para intentar extenderla de nuevas maneras.

Aquí conviene recordar algunos conceptos elementales de la teoría de gráficas, que serán usados en el resto del trabajo, los detalles se pueden consultar en [16, 9, 36, 19]. Un *árbol* es una gráfica conexa acíclica, a sus nodos de grado 1 se les llama *hojas*. Se le llama *árbol con raíz* cuando se distingue un vértice llamándolo *raíz*. En un árbol con raíz r , de manera natural se determina un orden parcial entre los vértices, a saber, $x \leq y$ si x está en la trayectoria que va de r a y . En este caso se acostumbra decir que y es *descendiente* de x , o que x es *ancestro* de y , y se define la terminología dada a continuación. Un nodo *terminal* es una hoja distinta de r , el *nivel* o *profundidad* de un nodo es la distancia de r al nodo en cuestión y la *altura* del árbol es la profundidad máxima de un nodo.

Ahora se presentará una forma de diseñar un algoritmo de retroceso para obtener todas las soluciones. El espacio de búsqueda se amplía a $\cup_{j=0}^n \times_{i=1}^j X_i$, estructurado en forma de árbol de altura n , en que los nodos de cada nivel $j = 0, 1, \dots, n$ son los elementos de $\times_{i=1}^j X_i$, respectivamente, y los lados son todas las parejas de la forma $\{(x_1, \dots, x_j), (x_1, \dots, x_j, x_{j+1})\}$. Además, para cada $j \leq n$ se debe tener un predicado \mathcal{P}_j de dominio $\times_{i=1}^j X_i$, con $\mathcal{P}_n \equiv \mathcal{P}$ y $\mathcal{P}_0 \equiv \mathbf{1}$. A (x_1, \dots, x_j) se la llama solución *parcial* si satisface \mathcal{P}_j . Esta familia de predicados debe cumplir el siguiente *criterio de consistencia*:

$$\forall_{j \leq n} (\mathcal{P}_j(x_1, \dots, x_j) \Rightarrow \forall_{i < j} \mathcal{P}_i(x_1, \dots, x_i)), \quad (2.1)$$

es decir, si un nodo es solución parcial, entonces también lo deben ser todos sus ancestros. De esto se infiere que el conjunto de soluciones parciales induce un subárbol del espacio de búsqueda, con la misma raíz $()$, llamado *árbol de búsqueda*. En la figura 2.1 se puede ver un ejemplo de esto para $n = 3$, $X_1 = \{1, 2\}$, $X_2 = \{4, 5, 6\}$, $X_3 = \{0, 7\}$ y familia de predicados $\mathcal{P}_j(x_1, \dots, x_j) \equiv \sum_{i=1}^j x_i \leq 6$.

Los nodos de nivel n del árbol de búsqueda constituyen el conjunto de soluciones del problema, falta precisar la forma en que deben alcanzarse y para esto cae como anillo al dedo el orden de visita *primero a lo profundo* [51], ilustrado en la figura 2.2. En el algoritmo 2.1 este modo de visita

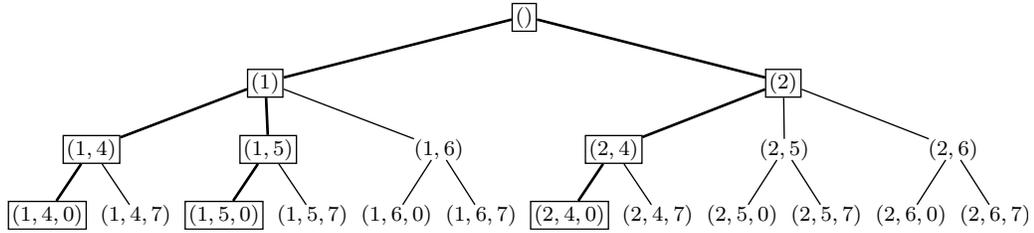


Figura 2.1 Árbol para búsqueda en $X_1 \times X_2 \times X_3$, con $X_1 = \{1, 2\}$, $X_2 = \{4, 5, 6\}$ y $X_3 = \{0, 7\}$. Los nodos del nivel j son los elementos de $\times_{i=1}^j X_i$. Aparece enmarcado cada nodo cuyas componentes suman 6 o menos; estos nodos forman un subárbol, también de raíz $()$.

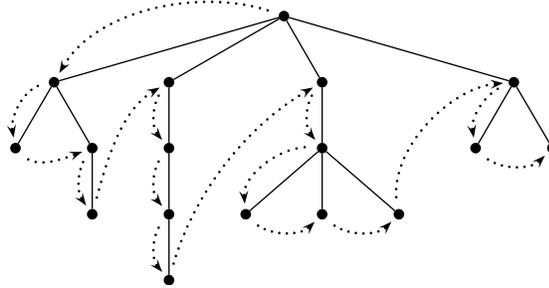


Figura 2.2 La línea punteada que parte de la raíz indica el orden de visita a los nodos del árbol en el método llamado *primero a lo profundo*.

se logra gracias a la recursión (ver [20]). Dados n y X_1, \dots, X_n , la instrucción $\text{busca}((), 0)$ desata una visita a profundidad a partir del nodo raíz $()$. Observar que cuando $\mathcal{P}_{j+1}(x_1, \dots, x_{j+1})$ resulta falso entonces ya no se visita ninguno de los descendientes del nodo (x_1, \dots, x_{j+1}) , lo que se justifica porque (2.1) también equivale a decir que si un nodo no es solución parcial entonces tampoco lo es ninguno de sus descendientes. Debido a esta manera de eliminar subárboles, como el de raíz (x_1, \dots, x_{j+1}) , se dice que la exploración es *con poda*.

En lo que sigue, por isomorfismo entre soluciones parciales se entenderá isomorfismo entre los diseños que dichas soluciones representan, es decir,

$$(x_1, \dots, x_j) \cong_{G_j} (y_1, \dots, y_j) \Leftrightarrow \{x_1, \dots, x_j\} \cong_{G_j} \{y_1, \dots, y_j\}, \quad (2.2)$$

en que $G_j \leq G$ depende del nivel j y $G_n = G$.

El algoritmo 2.1 se puede modificar fácilmente para que en S no queden soluciones isomorfas. Esto se logra agregando en su segundo renglón la condición $(x_1, \dots, x_n) \notin_G S$, abreviatura de

$$\nexists_{(y_1, \dots, y_n) \in S} \{x_1, \dots, x_n\} \cong_G \{y_1, \dots, y_n\},$$

con lo que se obtiene el algoritmo 2.2.

procedimiento busca $((x_1, \dots, x_j), j)$
si $j = n$ **entonces** $S \leftarrow S \cup \{(x_1, \dots, x_n)\}$
en caso contrario
para cada $x_{j+1} \in X_{j+1}$
si $\mathcal{P}_{j+1}(x_1, \dots, x_{j+1})$ **entonces** **busca** $((x_1, \dots, x_{j+1}), j + 1)$

$S \leftarrow \emptyset$; **busca** $((), 0)$.

Algoritmo 2.1 Algoritmo de retroceso para enumerar los elementos de $\times_{i=1}^n X_i$ que satisfacen \mathcal{P}_n . El conjunto de soluciones queda en S .

procedimiento noIso $((x_1, \dots, x_j), j)$
si $j = n$ **y** $(x_1, \dots, x_n) \notin_G S$ **entonces** $S \leftarrow S \cup \{(x_1, \dots, x_n)\}$
en caso contrario
para cada $x_{j+1} \in X_{j+1}$
si $\mathcal{P}_{j+1}(x_1, \dots, x_{j+1})$ **entonces** **noIso** $((x_1, \dots, x_{j+1}), j + 1)$

$S \leftarrow \emptyset$; **noIso** $((), 0)$.

Algoritmo 2.2 Algoritmo de retroceso con rechazo por isomorfismo en el último nivel. En S queda una solución por cada clase de isomorfismo.

A continuación se presenta un ejemplo con dos propósitos en mente, uno es ilustrar el funcionamiento de los algoritmos antes presentados y el segundo es demostrar un lema que forma parte de los resultados principales de la tesis.

2.1.1 Ejemplo Enumeración de los diseños resolubles parciales simples 2-(10, 5, 16), constituidos por seis clases paralelas tales que alguna de ellas forma matriz de intersección de tipo \mathcal{T}_2 con cada una de las otras cinco.

Sea $P = \{0, 1, \dots, 9\}$ el conjunto de puntos y X el conjunto de clases paralelas posibles. Tenemos que $|X| = \binom{10}{5}/2 = 126$, porque cada clase paralela consta de dos bloques mutuamente complementarios, de cinco puntos cada uno.

Sea \mathcal{D} el conjunto de familias de seis clases paralelas y $G = \text{Sim}(P)$. Lo que se quiere es un representante D de cada G -órbita de \mathcal{D} tal que

$$D \text{ es simple} \wedge \exists_{x \in D} \forall_{x' \in D, x' \neq x} M(x, x') \in \mathcal{T}_2$$

(Es fácil ver que esta condición es invariante ante G , o sea que la cumple D si y sólo si la cumple gD , para toda $g \in G$).

Veamos cómo obtener estos representantes haciendo uso del algoritmo 2.2 (con rechazo por isomorfismo). Sea $\mathbf{X} = X^6$. Lo primero que se le ocurre a uno es definir $\mathcal{P}_j(x_1, \dots, x_j)$ directamente de la condición anterior, tan solo sustituyendo a D por $\{x_1, \dots, x_j\}$, pero esto no sirve porque la familia de predicados así construida no satisface el criterio de consistencia. Esto último se puede ver mediante un sencillo contraejemplo en el que (x_1, x_2, x_3) sea solución parcial pero no así (x_1, x_2) , para lo cual es suficiente elegir las componentes de tal manera que x_3 forme matrices de intersección de tipo \mathcal{T}_2 con x_1 y x_2 pero $M(x_1, x_2) \notin \mathcal{T}_2$. La dificultad anterior se resuelve pidiendo que x_1 sea la clase paralela distinguida, es decir, (2.1) se cumplirá si se define \mathcal{P}_j así:

$$\mathcal{P}_j(x_1, \dots, x_j) \Leftrightarrow \{x_1, \dots, x_j\} \text{ es simple} \wedge \forall_{1 < i \leq j} M(x_1, x_i) \in \mathcal{T}_2. \quad (2.3)$$

Para estimar el tamaño del árbol de soluciones parciales conviene observar que cada bloque B tiene intersección de tamaño 4 con 25 bloques (cada uno de éstos se obtiene sustituyendo un elemento de B por un elemento de $P - B$ y esto se puede hacer de $5 \cdot 5$ maneras), de donde se sigue que dicho árbol tiene $126 \binom{25}{5} = 6,694,380$ nodos en su último nivel, mismos que el algoritmo 2.1 dejaría en S como respuesta. En contraste, el algoritmo 2.2 rechaza por isomorfismo la gran mayoría de dichas soluciones, dejando en S sólo 20, las que se muestran en la figura 2.3 sobre la parte del árbol de búsqueda que les corresponde.

Lo anterior basta para sustentar el lema que aparece enseguida del presente ejemplo. Sin embargo, antes de terminar conviene observar cómo se pueden simplificar las computaciones mediante algunos argumentos combinatorios sencillos. En primer lugar, la acción de G en X sólo tiene una órbita (i. e., para cada $x, x' \in X$ hay $g \in G$ tal que $x' = gx$), por lo que basta considerar sólo un valor de x_1 , el que sea, por ejemplo $x_1 = \{\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8, 9\}\}$; de esta manera la búsqueda se limita a un árbol de soluciones parciales con $\binom{25}{5} = 53,130$ nodos en su último nivel y se puede efectuar mediante el mismo algoritmo 2.2, sólo cambiando en la última línea la invocación `noIso((), 0)` por `noIso((x1), 1)`. También se ve sin dificultad que x_2 se puede fijar igual a $\{\{0, 1, 2, 3, 5\}, \{4, 6, 7, 8, 9\}\}$, con lo que la búsqueda queda restringida a un árbol de $\binom{24}{4} = 10,626$ nodos en el último nivel. \square

Se resume el resultado del ejemplo anterior en el lema siguiente:

2.1.2 Lema *Sea \mathcal{H} un diseño resoluble parcial 2 - $(10, 5, 16)$, formado por seis clases paralelas tales que alguna de ellas forma matriz de intersección de tipo \mathcal{T}_2 con cada una de las otras. Entonces \mathcal{H} es isomorfo a alguno de los 20 diseños mostrados en la figura 2.4.* \square

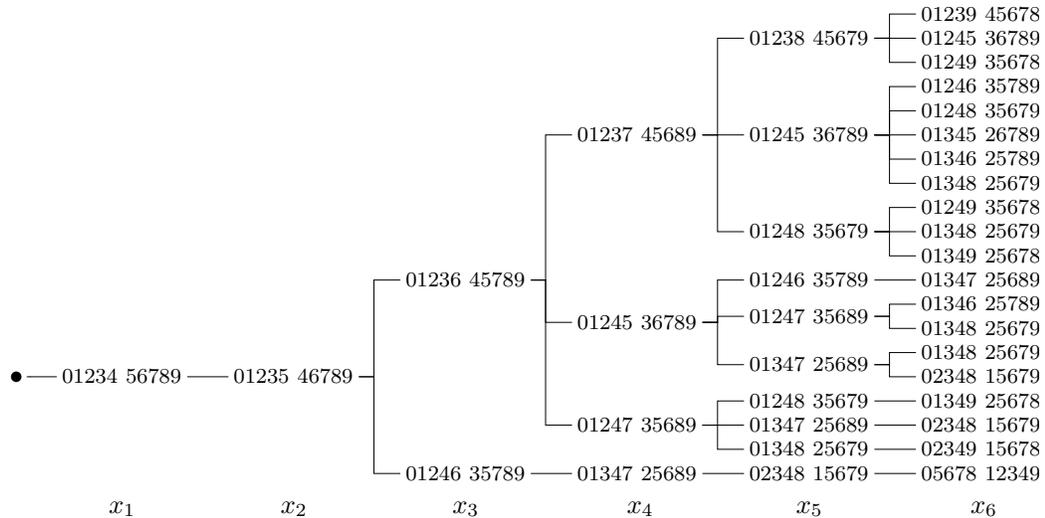


Figura 2.3 Fragmento del árbol de búsqueda con rechazo por isomorfismo en el último nivel. Sólo se muestran las ramas correspondientes a las 20 soluciones del problema (el árbol completo tiene millones de nodos). Crece hacia la derecha, en cada nodo sólo aparece la última componente de la respectiva solución parcial (x_1, \dots, x_j) , en forma abreviada, por ejemplo, 01234 56789 significa $\{\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8, 9\}\}$. (También es el árbol completo, sin faltar nodo alguno, del algoritmo con rechazo por isomorfismo en todos los niveles, que se trata en el ejemplo 2.2.3).

2.2 Rechazo por isomorfismo en niveles intermedios

El rechazo por isomorfismo resulta muy útil si también se efectúa en niveles intermedios. Sin embargo, hay que tener presente que los algoritmos pueden volverse ineficientes, tanto en tiempo de ejecución como en uso de memoria, sea porque los métodos para decidir si dos soluciones son isomorfas por lo general son lentos o porque ahora se necesita mantener un conjunto S_j de soluciones parciales por cada nivel j donde se practique el rechazo —se dirá que estos niveles son *de cotejo*. Lo recomendable es escoger como niveles de cotejo aquellos donde se espera que sea descartada por este concepto buena parte de las soluciones.

En el algoritmo de retroceso 2.3, los niveles de cotejo se dan en el conjunto N , que debe incluir a n (el último nivel). Se supone que $G_j \leq G$ para cada $j \in N$, con $G_n = G$. El algoritmo debe ir acompañado de una demostración para garantizar que no se pierden soluciones como consecuencia de la poda, es decir, que si se corta el subárbol que tiene raíz en la solución parcial $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_j)$ por ser ésta isomorfa a otra solución $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_j)$ previamente obtenida, es porque cada solución que se obtendría como extensión

$\widehat{\mathcal{E}}_1$	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01238 45679 01239 45678	$\widehat{\mathcal{E}}_2$	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01238 45679 01245 36789	$\widehat{\mathcal{E}}_3$	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01238 45679 01249 35678	$\widehat{\mathcal{E}}_4$	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01245 36789 01246 35789	$\widehat{\mathcal{E}}_5$	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01245 36789 01248 35679
$\widehat{\mathcal{E}}_6$	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01245 36789 01345 26789	$\widehat{\mathcal{E}}_7$	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01245 36789 01346 25789	$\widehat{\mathcal{E}}_8$	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01245 36789 01348 25679	$\widehat{\mathcal{E}}_9$	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01248 35679 01249 35678	$\widehat{\mathcal{E}}_{10}$	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01248 35679 01348 25679
$\widehat{\mathcal{E}}_{11}$	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01248 35679 01349 25678	$\widehat{\mathcal{E}}_{12}$	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01245 36789 01246 35789 01347 25689	$\widehat{\mathcal{E}}_{13}$	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01245 36789 01247 35689 01346 25789	$\widehat{\mathcal{E}}_{14}$	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01245 36789 01247 35689 01348 25679	$\widehat{\mathcal{E}}_{15}$	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01245 36789 01347 25689 01348 25679
$\widehat{\mathcal{E}}_{16}$	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01245 36789 01347 25689 02348 15679	$\widehat{\mathcal{E}}_{17}$	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01247 35689 01248 35679 01349 25678	$\widehat{\mathcal{E}}_{18}$	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01247 35689 01347 25689 02348 15679	$\widehat{\mathcal{E}}_{19}$	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01247 35689 01348 25679 02349 15678	$\widehat{\mathcal{E}}_{20}$	01234 56789 01235 46789 01246 35789 01347 25689 02348 15679 12349 05678

Figura 2.4 Solución al problema del ejemplo 2.1.1. Para facilitar la lectura, los conjuntos se escriben sin llaves ni comas, por ejemplo, en lugar de $\{\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8, 9\}\}$ aparece 01234 56789.

de \mathbf{x} resultaría isomorfa a alguna solución que es extensión de \mathbf{y} . Puesto en símbolos, lo que se debe probar es:

$$\begin{aligned} \forall_{j \in N} \left((x_1, \dots, x_j) \cong_{G_j} (y_1, \dots, y_j) \wedge \mathcal{P}_n(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \right. \\ \Rightarrow \exists_{y_{j+1}, \dots, y_n} \left(\mathcal{P}_n(y_1, \dots, y_j, \dots, y_n) \right. \\ \left. \left. \wedge (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \cong_G (y_1, \dots, y_j, \dots, y_n) \right) \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

(el caso $j = n$ es una trivialidad, se incluye por conveniencia). Esta condición de *poda por isomorfismo* es la clave para probar la siguiente afirmación, sirve en los dos pasos de la demostración por inducción sobre N :

2.2.1 Proposición *Si $\mathcal{P}_n(x_1, \dots, x_n)$ y si los predicados y grupos que intervienen en el algoritmo 2.3 satisfacen (2.1) y (2.4), entonces para cada $j \in N$ el algoritmo deja en S_j alguna solución parcial que tiene una extensión isomorfa a (x_1, \dots, x_n) .*

Demostración. Téngase presente que debido a (2.1) el algoritmo de retroceso visita toda solución parcial. Para el caso básico, sea j_1 el primer nivel de

procedimiento $\text{noIso}((x_1, \dots, x_j), j)$
si $j \in N$ **entonces**
 si $(x_1, \dots, x_j) \notin_{G_j} S_j$ **entonces**
 $S_j \leftarrow S_j \cup \{(x_1, \dots, x_j)\}$
 si $j < n$ **entonces**
 para cada $x_{j+1} \in X_{j+1}$
 si $\mathcal{P}_{j+1}(x_1, \dots, x_{j+1})$ **entonces** $\text{noIso}((x_1, \dots, x_{j+1}), j + 1)$
en caso contrario
 para cada $x_{j+1} \in X_{j+1}$
 si $\mathcal{P}_{j+1}(x_1, \dots, x_{j+1})$ **entonces** $\text{noIso}((x_1, \dots, x_{j+1}), j + 1)$

$\forall_{j \in N} S_j \leftarrow \emptyset; \text{noIso}(\cdot, 0).$

Algoritmo 2.3 Algoritmo de retroceso con rechazo por isomorfismo en los niveles de cotejo dados en N , con $n \in N$. (El sangrado sirve para eliminar la ambigüedad, el texto de una instrucción continúa mientras aparezcan renglones de mayor sangría que el de inicio de la instrucción; por ejemplo, la condicional que empieza en el tercer renglón termina en el séptimo, a su vez esta instrucción es la primera alternativa de la condicional que empieza en el segundo renglón).

cotejo. (x_1, \dots, x_{j_1}) se debe visitar porque es solución parcial, entonces se agrega a S_{j_1} , a menos que S_{j_1} ya cuente con una solución (y_1, \dots, y_{j_1}) que, por (2.4), tiene una extensión isomorfa a (x_1, \dots, x_n) .

Para el paso inductivo, supóngase que en el nivel de cotejo $j < n$ se cumplen $(y_1, \dots, y_j) \in S_j$ y $(y_1, \dots, y_j, \dots, y_{j'}, \dots, y_n) \cong_G (x_1, \dots, x_n)$, en que j' es el nivel de cotejo siguiente a j . Razonando como en el caso básico, tenemos aquí que en el nivel j' se debe visitar $(y_1, \dots, y_j, \dots, y_{j'})$, entonces en $S_{j'}$ quedará alguna solución $(z_1, \dots, z_{j'})$ que tiene una extensión isomorfa a (y_1, \dots, y_n) y, por lo tanto, a (x_1, \dots, x_n) . \square

Una consecuencia de esta afirmación es que en S_n quedan representadas, de manera única, todas las soluciones. Para futuras referencias, conviene formular este resultado de la manera siguiente:

2.2.2 Teorema *Si los predicados y grupos usados en el algoritmo 2.3 satisfacen (2.1) y (2.4), entonces el algoritmo deja en S_n una solución por cada clase de isomorfismo.* \square

2.2.3 Ejemplo Ahora se verá cómo se puede resolver el problema del ejemplo 2.1.1 mediante el rechazo por isomorfismo en niveles intermedios. Con la intención de ilustrar mejor el algoritmo, se supondrá que x_1 es constante e igual a $\{\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8, 9\}\}$.

Sea $G_j = G_{x_1}$ —el estabilizador de x_1 en G —, para $j = 1, \dots, 5$. Se debe probar que estos grupos satisfacen (2.4), con $n = 6$ y $y_1 = x_1$. De la primera hipótesis en (2.4), se sigue que hay $g \in G_j$ tal que $g\{x_1, x_2, \dots, x_j\} = \{x_1, y_2, \dots, y_j\}$; entonces, aplicando g a la solución supuesta en la segunda hipótesis, $g\{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_6\} = g\{x_1, x_2, \dots, x_j\} \cup g\{x_{j+1}, \dots, x_6\} = \{x_1, y_2, \dots, y_j, y_{j+1}, \dots, y_6\}$, en que $y_{j+1} = gx_{j+1}, \dots, y_6 = gx_6$; por último, notando que $M(x_1, y_i) \in \mathcal{T}_2$ para cada $i = 2, \dots, 6$ (esto es consecuencia de $gx_1 = x_1$, no se tendría si, por ejemplo, se hubiera tomado G_j igual a G), resulta que $(x_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_6)$ es una solución de la forma requerida en el consecuente de (2.4).

El árbol de soluciones parciales producidas por el algoritmo es (exactamente, sin faltar nodo alguno) el de la figura 2.3. En comparación con el algoritmo que sólo rechaza isomorfos en el último nivel (usado en el ejemplo 2.1.1), se realizaron mucho menos operaciones de rechazo por isomorfismo; así, como en el penúltimo nivel se tienen 10 soluciones parciales y cada una de ellas se puede extender de 21 ($= 25 - 4$) maneras, en el último nivel se efectuaron menos de 210 rechazos.

En la figura 2.5 aparece el árbol de soluciones parciales correspondiente al rechazo por isomorfismo en los niveles impares y último. \square

2.3 Orden de las variables

Para generar una solución (x_1, x_2, \dots, x_n) , el algoritmo de retroceso debe computar antes las soluciones parciales (x_1) , (x_1, x_2) , \dots , $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. A veces lo que importa de la solución no es el orden en que aparecen las componentes sino la mera colección $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. En estos casos también es posible resolver el problema cambiando al antojo el orden de los factores en $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, es decir, cambiando el *orden de las variables* en la expresión (x_1, x_2, \dots, x_n) , por supuesto que con el consiguiente ajuste del criterio de consistencia. Sin embargo, un cambio tal puede afectar significativamente el rendimiento del algoritmo, como se ilustra enseguida con un sencillo ejemplo.

2.3.1 Ejemplo Sean $W = X = Y = \{1, \dots, 100\}$ y $Z = \{0\}$. Se trata de usar el algoritmo de retroceso para construir los cuartetos que no tengan a 0 como componente (evidentemente no hay soluciones). Si el algoritmo busca en $W \times X \times Y \times Z$, construirá las 100^3 tripletas (w, x, y) y ninguna de ellas podrá ser extendida para dar alguna solución (w, x, y, z) , pero si busca en

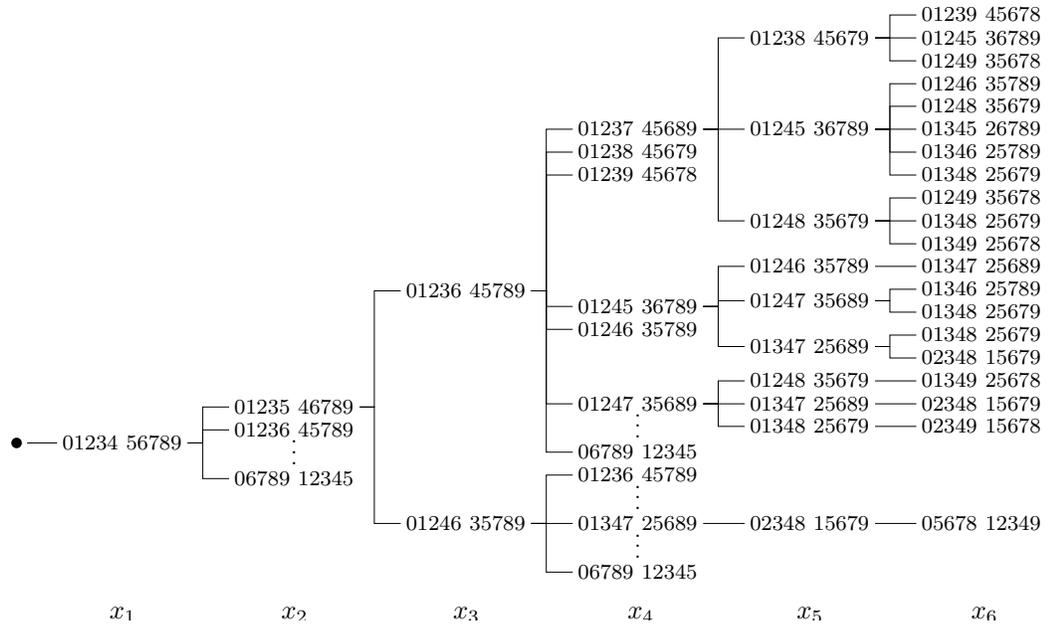


Figura 2.5 Árbol de búsqueda con rechazo por isomorfismo en niveles impares y último. (Se omiten algunos nodos terminales para ahorrar espacio, 22 del segundo nivel y $16 + 9 + 11 = 36$ del cuarto nivel).

$Z \times W \times X \times Y$, descubrirá que $\mathcal{P}_1((0))$ es falsa y, no habiendo otro nodo en el primer nivel, de inmediato terminará la ejecución. \square

En la mayoría de los problemas de interés, es difícil determinar cuál orden de las variables es el más conveniente, tanto o más que el problema mismo. La elección depende en gran medida del entendimiento que se tenga del problema en cuestión. Sin embargo, se conocen algunos métodos heurísticos para determinar algún orden conveniente [8, 18]. La intuición y la experiencia aconsejan que se escoja un orden en el que \mathcal{P}_j falle (es decir, no sea satisfecho) a menudo para valores de j correspondientes a los primeros niveles del árbol del espacio de búsqueda. A esta idea de examinar primero los casos mas propicios a fallar se le conoce como *principio de falla inicial* [22].

3 Enumeración de los diseños resolubles 2-(10, 5, 16) y 3-(10, 5, 6)

Este capítulo es el núcleo de la tesis, su propósito es presentar la manera en que se enumeraron los diseños resolubles 2-(10, 5, 16) y 3-(10, 5, 6).

En la primera sección se dan los patrones que puede presentar la colección de matrices de intersección que se obtiene al fijar una clase paralela e intersecarla con las demás clases. El estudio de estos patrones lleva a la definición de ciertas estructuras iniciales, que sirven de punto de partida al algoritmo de retroceso encargado de la generación de los diseños resolubles. En la sección 2 se presenta la construcción de las estructuras iniciales correspondientes a los diseños simples. También se hace uso del principio de falla inicial para definir el orden de las variables del algoritmo. En la sección 3 se especifican los grupos y predicados requeridos por el algoritmo 2.3 y se demuestra que éste genera exhaustivamente los diseños simples 2-(10, 5, 16) mutuamente no isomorfos. En la cuarta sección se trata el caso de los diseños no simples. En la última sección se dan los resultados de la enumeración. Hay 27, 121, 734 diseños resolubles con grupos de automorfismos cuyos órdenes quedan entre 1 y 1,440; de estos diseños 2, 006, 690 son simples.

3.1 Patrones de intersección de clases paralelas

Un diseño resoluble 2-(10, 5, 16) tiene 36 clases paralelas, lo que se obtiene de (1.5) y (1.4). En el ejemplo 1.6.5-(a) se vio que hay tres tipos de matrices de intersección, con las siguientes representantes:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_1, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_2 \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_3.$$

3.1.1 Teorema Sean \mathcal{R} una resolución de un diseño 2-(10, 5, 16), $\mathbf{R} \in \mathcal{R}$ y $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ la colección de 35 matrices de intersección que \mathbf{R} forma con las demás clases paralelas. Entonces hay dos posibilidades:

P.1 $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ tiene cinco matrices de tipo \mathcal{T}_2 y 30 de tipo \mathcal{T}_3 ó

P.2 $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ tiene una matriz de tipo \mathcal{T}_1 , dos de tipo \mathcal{T}_2 y 32 de tipo \mathcal{T}_3 .

Demostración. En el ejemplo 1.6.6-(a) se vió que se pueden presentar dos patrones de intersección, $(z_1, z_2, z_3) = (0, 5, 30)$ ó $(z_1, z_2, z_3) = (1, 2, 32)$, en que z_ℓ ($\ell = 1, 2, 3$) es el número de matrices de tipo \mathcal{T}_ℓ que tiene \mathcal{M}_R . \square

De acuerdo a la notación usada en la demostración, se dirá que un diseño parcial resoluble 2-(10, 5, 16) es *consistente con* el patrón P.1 si todas sus clase paralelas satisfacen $z_1 = 0$, $z_2 \leq 5$ y $z_3 \leq 30$, y será consistente con el patrón P.2 si cada clase paralela cumple estas condiciones ó $z_1 \leq 1$, $z_2 \leq 2$ y $z_3 \leq 32$.

3.1.2 Observación Sea \mathcal{Q} un diseño resoluble 2-(10, 5, 16), es claro que es simple si y sólo si no tiene clases paralelas cuya matriz de intersección sea de tipo \mathcal{T}_1 . Entonces, por el teorema 3.1.1:

- (a) \mathcal{Q} es simple si y sólo si todas sus clases paralelas satisfacen P.1.
- (b) \mathcal{Q} es no simple si y sólo si alguna de sus clases paralelas satisface P.2. \square

3.2 Estructuras iniciales para los diseños simples

Sean $P = \{0, 1, \dots, 9\}$ el conjunto de puntos, $X = \{0, \dots, 4\}$, $Y = \{5, \dots, 9\}$ y \mathcal{C} el conjunto de clases paralelas posibles para los diseños del caso. Tenemos que $|\mathcal{C}| = 126$ (ver ejemplo 2.1.1).

Una clase paralela *parcial* es una partición de un subconjunto de P . Sea $\mathcal{E} \in \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{20}\}$ un diseño de los mostrados en la figura 3.1; se dirá que \mathcal{E} es una *estructura inicial* y $\widehat{\mathcal{E}}$ denotará al diseño formado por las primeras seis clases paralelas de \mathcal{E} (esta notación es consistente con la de la figura 2.4).

3.2.1 Teorema Sea \mathcal{Q} un diseño resoluble simple 2-(10, 5, 16). Entonces $\exists \mathcal{E} \in \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{20}\}$ tal que \mathcal{Q} es isomorfo a algún diseño \mathcal{D} para el que se cumplen:

- (1) $\widehat{\mathcal{E}} \subset \mathcal{D}$.
- (2) La intersección de X con cada bloque de las 30 clases paralelas de $\mathcal{D} - \widehat{\mathcal{E}}$ da las clases paralelas parciales de \mathcal{E} .

Demostración. Sea $\mathcal{H} \subset \mathcal{Q}$ un diseño parcial compuesto de una clase paralela cualquiera y las cinco con las que ésta tiene matriz de intersección de tipo \mathcal{T}_2 ; por el lema 2.1.2, \mathcal{H} es isomorfo a algún diseño $\widehat{\mathcal{E}} \in \{\widehat{\mathcal{E}}_1, \dots, \widehat{\mathcal{E}}_{20}\}$; si se aplica a \mathcal{Q} un isomorfismo entre \mathcal{H} y $\widehat{\mathcal{E}}$, se obtiene un diseño \mathcal{D} que satisface (1). La primera clase paralela de $\widehat{\mathcal{E}}$ forma matriz de intersección de tipo \mathcal{T}_3

con cada una de las 30 clases paralelas de $\mathcal{D} - \widehat{\mathcal{E}}$ entonces, por el teorema 1.5.5, de la cuenta de tríos de elementos de X presentes en $\widehat{\mathcal{E}}$ se sigue (2). \square

El teorema anterior da la pauta para construir los diseños resolubles simples, sugiere que se obtengan completando apropiadamente las clases paralelas parciales de cada una de las veinte estructuras iniciales y así se hará mediante el algoritmo 2.3 (de retroceso con rechazo por isomorfismo en niveles intermedios) adaptado a la presente situación, esto es, definiendo las componentes que intervienen en él (el conjunto N de niveles de cotejo, los grupos G_j , los conjuntos X_j y los predicados \mathcal{P}_j), cuidando que se cumplan (2.1) y (2.4), para entonces aplicar el teorema 2.2.2.

Conviene tomar al producto cartesiano \mathcal{C}^n como espacio de búsqueda, adelante se verá cómo restringirlo para explorar el árbol de soluciones correspondiente a una estructura inicial \mathcal{E} . Para cada $j \leq n$, el predicado \mathcal{P}_j , de dominio \mathcal{C}^j , se define así:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_j(C_1, \dots, C_j) \Leftrightarrow \{C_1, \dots, C_j\} \text{ es consistente con P.1} \\ \wedge \{C_1, \dots, C_j\} \text{ es diseño parcial 2-(10, 5, 16)} \\ \wedge \{C_1, \dots, C_j\} \text{ es diseño parcial 3-(10, 5, 6).} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Sin dificultad se prueba que esta familia satisface (2.1).

Sea $\mathcal{E} \in \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{20}\}$. El espacio de búsqueda de diseños $\{C_1, \dots, C_{36}\}$ producibles a partir de \mathcal{E} se delimita de la siguiente manera. Como solución inicial se toma el diseño parcial (C_1, \dots, C_6) formado por las primeras seis clases paralelas de $\widehat{\mathcal{E}}$. Para cada $j = 7, \dots, 36$, si $E_j = \{A, B\}$ denota la j -ésima clase paralela parcial de \mathcal{E} , el conjunto de valores posibles de C_j es

$$\mathcal{C}(E_j) = \{ \{A \cup \{y_1, y_2\}, B \cup \{y_3, y_4, y_5\}\} \in \mathcal{C} : \{y_1, \dots, y_5\} = Y \}.$$

3.2.2 Observación

- (a) $|\mathcal{C}(E_j)| = 10$, porque los elementos de $\mathcal{C}(E_j)$ corresponden a las diez maneras de partir Y en un par y un trío:

56 789, 57 689, 58 679, 59 678, 67 589, 68 579, 69 578, 78 569, 79 568, 89 567.

- (b) En estas particiones, cada $y \in Y$ aparece en cuatro pares y en seis tríos, por lo tanto, en las clases paralelas de $\mathcal{C}(E_j)$, y aparece en 4 bloques izquierdos y en 6 bloques derechos.
- (c) Sea $\{A \cup \{y_1, y_2\}, B \cup \{y_3, y_4, y_5\}\} \in \mathcal{C}(E_j)$. Si $\{x, x'\} \subset A$, entonces el primer bloque contiene dos tríos $\{x, x', y\}$ con $y \in Y$, y si $\{x, x'\} = B$, el segundo bloque contiene tres tríos de esa forma. \square

\mathcal{E}_1	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01238 45679 01239 45678 (5) 234 01 (5) 014 23 (5) 134 02 (5) 024 13 (5) 034 12 (5) 124 03 (16, 26, 31, 36)	\mathcal{E}_2	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01238 45679 01245 36789 (5) 234 01 (4) 014 23 (1) 013 24 (1) 023 14 (1) 123 04 (4) 024 13 (4) 124 03 (5) 134 02 (5) 034 12 (16, 18, 26, 31, 36)	\mathcal{E}_3	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01238 45679 01249 35678 (5) 234 01 (4) 014 23 (1) 013 24 (1) 023 14 (1) 123 04 (4) 024 13 (4) 124 03 (5) 134 02 (5) 034 12 (16, 18, 26, 31, 36)	\mathcal{E}_4	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01245 36789 01246 35789 (5) 234 01 (3) 014 23 (2) 013 24 (2) 023 14 (2) 123 04 (3) 024 13 (3) 124 03 (5) 134 02 (5) 034 12 (16, 20, 26, 31, 36)	\mathcal{E}_5	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01245 36789 01248 35679 (5) 234 01 (3) 014 23 (2) 013 24 (2) 023 14 (2) 123 04 (3) 024 13 (3) 124 03 (5) 134 02 (5) 034 12 (16, 20, 26, 31, 36)
\mathcal{E}_6	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01245 36789 01345 26789 (5) 234 01 (3) 014 23 (1) 012 34 (1) 013 24 (2) 023 14 (2) 123 04 (4) 134 02 (4) 024 13 (4) 034 12 (4) 124 03 (16, 20, 28, 32, 36)	\mathcal{E}_7	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01245 36789 01346 25789 (5) 234 01 (3) 014 23 (1) 012 34 (1) 013 24 (2) 023 14 (2) 123 04 (4) 134 02 (4) 024 13 (4) 034 12 (4) 124 03 (16, 20, 28, 32, 36)	\mathcal{E}_8	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01245 36789 01348 25679 (5) 234 01 (3) 014 23 (1) 012 34 (1) 013 24 (2) 023 14 (2) 123 04 (4) 134 02 (4) 024 13 (4) 034 12 (4) 124 03 (16, 20, 28, 32, 36)	\mathcal{E}_9	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01248 35679 01249 35678 (5) 234 01 (3) 014 23 (2) 013 24 (2) 023 14 (2) 123 04 (3) 024 13 (3) 124 03 (5) 134 02 (5) 034 12 (16, 20, 26, 31, 36)	\mathcal{E}_{10}	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01248 35679 01348 25679 (5) 234 01 (3) 014 23 (1) 012 34 (1) 013 24 (2) 023 14 (2) 123 04 (4) 134 02 (4) 024 13 (4) 034 12 (4) 124 03 (16, 20, 28, 32, 36)
\mathcal{E}_{11}	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01237 45689 01248 35679 01349 25678 (5) 234 01 (3) 014 23 (1) 012 34 (1) 013 24 (2) 023 14 (2) 123 04 (4) 134 02 (4) 024 13 (4) 034 12 (4) 124 03 (16, 20, 28, 32, 36)	\mathcal{E}_{12}	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01245 36789 01246 35789 01347 25689 (5) 234 01 (2) 013 24 (2) 014 23 (1) 012 34 (3) 023 14 (3) 123 04 (3) 024 13 (3) 124 03 (4) 134 02 (4) 034 12 (16, 22, 28, 32, 36)	\mathcal{E}_{13}	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01245 36789 01247 35689 01346 25789 (5) 234 01 (2) 013 24 (2) 014 23 (1) 012 34 (3) 023 14 (3) 123 04 (3) 024 13 (3) 124 03 (4) 134 02 (4) 034 12 (16, 22, 28, 32, 36)	\mathcal{E}_{14}	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01245 36789 01247 35689 01348 25679 (5) 234 01 (2) 013 24 (2) 014 23 (1) 012 34 (3) 023 14 (3) 123 04 (3) 024 13 (3) 124 03 (4) 134 02 (4) 034 12 (16, 22, 28, 32, 36)	\mathcal{E}_{15}	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01245 36789 01347 25689 01348 25679 (5) 234 01 (2) 012 34 (2) 014 23 (1) 013 24 (3) 023 14 (3) 123 04 (3) 034 12 (3) 134 02 (4) 024 13 (4) 124 03 (16, 22, 28, 32, 36)
\mathcal{E}_{16}	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01245 36789 01347 25689 02348 15679 (4) 234 01 (3) 014 23 (2) 012 34 (2) 013 24 (3) 123 04 (2) 023 14 (3) 024 13 (3) 034 12 (4) 134 02 (4) 124 03 (17, 22, 28, 32, 36)	\mathcal{E}_{17}	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01247 35689 01248 35679 01349 25678 (5) 234 01 (2) 013 24 (2) 014 23 (1) 012 34 (3) 023 14 (3) 123 04 (3) 024 13 (3) 124 03 (4) 134 02 (4) 034 12 (16, 22, 28, 32, 36)	\mathcal{E}_{18}	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01247 35689 01347 25689 02348 15679 (4) 234 01 (3) 014 23 (2) 012 34 (2) 013 24 (3) 123 04 (2) 023 14 (3) 024 13 (3) 034 12 (4) 134 02 (4) 124 03 (17, 22, 28, 32, 36)	\mathcal{E}_{19}	01234 56789 01235 46789 01236 45789 01247 35689 01348 25679 02349 15678 (4) 234 01 (3) 014 23 (2) 012 34 (2) 013 24 (3) 123 04 (2) 023 14 (3) 024 13 (3) 034 12 (4) 134 02 (4) 124 03 (17, 22, 28, 32, 36)	\mathcal{E}_{20}	01234 56789 01235 46789 01246 35789 01347 25689 02348 15679 12349 05678 (3) 234 01 (3) 012 34 (3) 013 24 (3) 014 23 (3) 023 14 (3) 123 04 (3) 134 02 (3) 024 13 (3) 034 12 (3) 124 03 (18, 24, 30, 33, 36)

Figura 3.1 Estructuras iniciales para la búsqueda de diseños simples. La notación $(n) abc de$ significa que la clase paralela parcial $\{\{a, b, c\}, \{d, e\}\}$ aparece n veces en \mathcal{E}_ℓ . Los niveles donde se ha de aplicar el rechazo por isomorfismo se indican al pie de \mathcal{E}_ℓ , en el vector $(n_{\ell_1}, \dots, n_{\ell_s})$, y también mediante las rayas que aparecen a la izquierda.

El orden de las clases paralelas parciales en \mathcal{E} se definió con la idea de favorecer la formación de tríos $\{x, x', y\}$, con $x, x' \in X$ y $y \in Y$, en los primeros niveles del árbol de búsqueda, ahora se verá que ésto se ajusta al principio de falla inicial [§2.2.3]. Considérese un trío fijo de la forma $\{x, x', y\}$. La pareja $\{x, x'\}$ debe aparecer en 16 clases paralelas y en 6 de éstas debe presentarse el trío $\{x, x', y\}$. Supóngase que ya se tienen estos 6 tríos en (C_1, \dots, C_{j-1}) , no así las 16 presencias de $\{x, x'\}$, y que esta pareja aparece en E_j . De la observación 3.2.2(b) se desprende que \mathcal{P}_j de seguro fallará en 4 ó 6 de los 10 nodos de la forma $(C_1, \dots, C_{j-1}, C_j)$, con $C_j \in \mathcal{C}(E_j)$. Entonces, por el principio mencionado, conviene que estas fallas se presenten en los primeros niveles del árbol, para lo cual es adecuado escoger como pareja $\{x, x'\}$ una de las que más aparecen en las primeras seis clases paralelas y a continuación de éstas colocar las clases paralelas parciales en que figura $\{x, x'\}$; en todas las estructuras iniciales la pareja elegida fue $\{0, 1\}$.

También con el propósito de adelantar las susodichas fallas, se pusieron primero las clases paralelas parciales que tienen a $\{0, 1\}$ como segundo bloque, pues son las que, de acuerdo a la observación 3.2.2(c), al completarse contribuyen con más tríos $\{0, 1, y\}$ por clase paralela. Por último, las colecciones que tienen a $\{0, 1\}$ en el primer bloque se situaron de mayor a menor cardinalidad por lo siguiente. El conjunto de candidatas $\mathcal{C}(E)$ es el mismo para todas las clases paralelas parciales de la colección de repeticiones de E . Entonces, tratándose de diseños simples, cada elemento de $\mathcal{C}(E)$ que forme parte de una solución parcial quedará descartado para extender ésta; por ejemplo, en la estructura \mathcal{E}_2 , las cuatro clases paralelas parciales $\{014, 23\}$ se pueden completar cuando mucho de $\binom{10}{4} = 210$ maneras.

Las clases paralelas parciales restantes se ordenaron en forma parecida. Mientras las hubiera, se tomaron las correspondientes a una pareja $\{x, x'\}$ con menos presencias faltantes y se colocaron las colecciones del caso, tal como se hizo con las de $\{0, 1\}$. En la figura 3.1, las rayas que aparecen a la izquierda de cada estructura corresponden a los niveles en que las sucesivas parejas $\{x, x'\}$ seleccionadas completan sus $\lambda = 16$ apariciones, estos niveles también se indican en el vector que aparece al pie de estructura. Por ejemplo, para \mathcal{E}_2 se eligieron las parejas $\{0, 1\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{0, 2\}$ y $\{0, 3\}$, que completan λ presencias en los niveles 16, 18, 26, 31 y 36, respectivamente. Además, estos niveles son precisamente los escogidos para aplicar el rechazo por isomorfismo, del que se hablará a continuación.

3.3 Enumeración de los diseños simples

En el ejemplo 2.2.3 se vió que el algoritmo de retroceso con rechazo por isomorfismo en todos o algunos niveles del árbol de búsqueda puede disminuir

considerablemente el número de nodos que deben visitarse, respecto al algoritmo en que sólo se aplica tal rechazo en los nodos del último nivel (ejemplo 2.1.1). Para los diseños simples que se están tratando, estos niveles de cotejo, como se dijo al final de la sección anterior, se dan en el vector que aparece al pie de cada estructura en la figura 3.1. Se escogieron así tomando en cuenta que los grupos $G_j \leq G = \text{Sim}(P)$, necesarios para definir el isomorfismo en los respectivos niveles de cotejo, serán

$$G_j = G_X \text{ para } j < n \quad \text{y} \quad G_n = G, \quad (3.2)$$

por lo que, en todo nivel de cotejo intermedio, cada isomorfismo dejará fijo a X y entonces, al aplicarlo a un diseño, transformará cada subconjunto de X —en particular los pares y tríos que las soluciones parciales tengan en el nivel del caso— en otro de la misma naturaleza, cardinalidad y número de repeticiones. Los experimentos corroboraron que con esta elección se mejoró el rendimiento del algoritmo.

En adelante, cuando se diga que el algoritmo 2.3 se aplica para la estructura inicial \mathcal{E} , se debe entender que en la última línea del algoritmo se cambia la invocación $\text{noIso}(\cdot, 0)$ por $\text{noIso}((E_1, \dots, E_6), 6)$, limitando así la búsqueda a los diseños que extiendan la solución parcial (E_1, \dots, E_6) formada por las clases paralelas de $\widehat{\mathcal{E}}$.

3.3.1 Proposición *Sea $\mathcal{E} \in \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{20}\}$ una estructura inicial para la que se aplica el algoritmo 2.3, con los predicados (3.1) y los grupos (3.2). Entonces se satisface la condición de poda (2.4).*

Demostración. Sea j un nivel de cotejo intermedio. Para probar la implicación que aparece en (2.4), supóngase $(D_1, \dots, D_j) \cong_{G_X} (C_1, \dots, C_j)$ y $\mathcal{P}_j(D_1, \dots, D_j, \dots, D_n)$. Sea $g \in G_X$ tal que $g\{D_1, \dots, D_j\} = \{C_1, \dots, C_j\}$; entonces

$$\begin{aligned} g\{D_1, \dots, D_j, \dots, D_n\} &= g\{D_1, \dots, D_j\} \cup g\{D_{j+1}, \dots, D_n\} \\ &= \{C_1, \dots, C_j\} \cup \{gD_{j+1}, \dots, gD_n\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como $\{D_1, \dots, D_j\}$ y $\{C_1, \dots, C_j\}$ provienen de \mathcal{E} , en ambas soluciones parciales aparecen exactamente los mismos subconjuntos de X , en particular los tríos. En consecuencia, las presencias de tríos de este tipo en $g\{D_{j+1}, \dots, D_n\}$ deben coincidir con las que se tienen en $\{D_{j+1}, \dots, D_n\}$; pero estas últimas son, por construcción, las que se dan en la colección $\{E_{j+1}, \dots, E_n\}$ de clases paralelas parciales de \mathcal{E} . Por lo tanto, al ordenar apropiadamente $\{gD_{j+1}, \dots, gD_n\}$, se evidencia que (3.3) es una extensión de (C_1, \dots, C_j) que satisface al consecuente de la implicación en (2.4). \square

Ya que los predicados (3.1) satisfacen (2.1) y los grupos (3.2) satisfacen (2.4), por el teorema 2.2.2 se tiene que con ellos el algoritmo 2.3, aplicado para una estructura inicial \mathcal{E} , enumera correctamente los diseños resolubles simples 2-(10, 5, 16) que contienen a $\widehat{\mathcal{E}}$. Ahora se verá que la misma enumeración vale para los diseños resolubles simples que contienen un diseño isomorfo a $\widehat{\mathcal{E}}$.

3.3.2 Teorema *Sea $\mathcal{E} \in \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{20}\}$ una estructura inicial para la que se aplica el algoritmo 2.3, con los predicados (3.1) y los grupos (3.2). Entonces el algoritmo deja en S_n una solución por cada clase de isomorfismo del conjunto de diseños resolubles simples 2-(10, 5, 16) que contienen un diseño isomorfo a $\widehat{\mathcal{E}}$.*

Demostración. Sean \mathcal{Q} un diseño resoluble simple 2-(10, 5, 16) y $\mathcal{H} \subset \mathcal{Q}$ isomorfo a $\widehat{\mathcal{E}}$. Al aplicar a \mathcal{Q} un isomorfismo entre \mathcal{H} y $\widehat{\mathcal{E}}$, se obtiene un diseño \mathcal{D} que contiene a $\widehat{\mathcal{E}}$. Lo dicho en el párrafo previo al teorema implica que \mathcal{D} , y en consecuencia \mathcal{Q} , es isomorfo a algún diseño en S_n . \square

Un diseño resoluble simple 2-(10, 5, 16) puede contener un diseño parcial isomorfo a $\widehat{\mathcal{E}}_i$ y otro isomorfo a un $\widehat{\mathcal{E}}_\ell$ distinto, caso en que entre las soluciones construidas a partir de \mathcal{E}_i necesariamente se tendrá una isomorfa a alguna de las construidas para \mathcal{E}_ℓ . La generación de este tipo de soluciones isomorfas se evita si, durante la aplicación del algoritmo para \mathcal{E}_ℓ , en cada nivel de cotejo j , una solución parcial (x_1, \dots, x_j) se rechaza si contiene algún diseño parcial \mathcal{H} isomorfo a algún $\widehat{\mathcal{E}}_i$ con $i < \ell$. Esto se logra si se cambia la expresión booleana en el tercer renglón del algoritmo 2.3 por

$$(\nexists_{i < \ell} \wedge \mathcal{H} \subset \{x_1, \dots, x_j\} \mathcal{H} \cong_G \widehat{\mathcal{E}}_i) \wedge (x_1, \dots, x_j) \notin_{G_j} S_j \quad (3.4)$$

(desde luego que también se debe agregar al algoritmo lo necesario para controlar el parámetro ℓ y lo correspondiente a las constantes $\widehat{\mathcal{E}}_i$). Sin dificultad se prueba que esta forma de rechazo por isomorfismo es correcta.

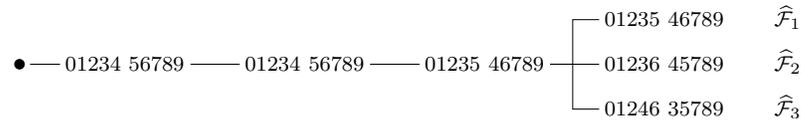
3.4 Los diseños no simples

Para obtener los diseños no simples se procede en forma parecida al caso de los simples, por lo que no se detallará, sólo se presentarán las diferencias importantes. Ahora se tiene el siguiente teorema, que da las estructuras iniciales.

3.4.1 Teorema *Sean \mathcal{Q} un diseño resoluble no simple 2-(10, 5, 16) y $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ y \mathcal{F}_3 las estructuras mostradas en la figura 3.2. Entonces $\exists \mathcal{F} \in \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}$ tal que \mathcal{Q} es isomorfo a algún diseño \mathcal{D} para el que se cumplen:*

- (1) $\widehat{\mathcal{F}} \subset \mathcal{D}$.
- (2) La intersección de X con cada bloque de las 32 clases paralelas de $\mathcal{D} - \widehat{\mathcal{F}}$ da las clases paralelas parciales de \mathcal{F} .

Demostración. Se vio que un diseño resoluble 2-(10, 5, 16) es no simple si y sólo si tiene al menos una clase paralela \mathbf{R} que satisface P.2 del teorema 3.1.1, o sea que en la colección de matrices de intersección que \mathbf{R} forma con las otras clases paralelas, debe haber una de tipo \mathcal{T}_1 , dos de tipo \mathcal{T}_2 y 32 de tipo \mathcal{T}_3 . Se puede proceder como en el ejemplo 2.2.3, aquí para enumerar los diseños parciales \mathcal{H} de cuatro clases paralelas tales que la primera forme matriz de tipo \mathcal{T}_1 con la segunda y de tipo \mathcal{T}_2 con cada una de las otras dos, para obtener el siguiente árbol de búsqueda, con soluciones $\widehat{\mathcal{F}}_1, \widehat{\mathcal{F}}_2$ y $\widehat{\mathcal{F}}_3$:



Este árbol también se puede deducir con facilidad a partir del formado por los primeros tres niveles del árbol mostrado en la figura 2.3, tomando en cuenta que ahora la segunda clase paralela debe ser igual a la primera y que la tercera puede ser igual a la cuarta.

Para completar la demostración basta adecuar al caso presente la prueba del teorema 3.2.1, lo que se reduce a usar $\widehat{\mathcal{F}}$ en lugar de $\widehat{\mathcal{E}}$. □

\mathcal{F}_1 <ul style="list-style-type: none"> 01234 56789 01234 56789 01235 46789 01235 46789 (2) 012 34 (2) 013 24 (2) 023 14 (2) 123 04 (4) 234 01 (4) 014 23 (4) 024 13 (4) 134 02 (4) 034 12 (4) 124 03 (12, 20, 28, 32, 36) 	\mathcal{F}_2 <ul style="list-style-type: none"> 01234 56789 01234 56789 01235 46789 01236 45789 (2) 012 34 (2) 013 24 (2) 023 14 (2) 123 04 (4) 234 01 (4) 014 23 (4) 024 13 (4) 134 02 (4) 034 12 (4) 124 03 (12, 20, 28, 32, 36) 	\mathcal{F}_3 <ul style="list-style-type: none"> 01234 56789 01234 56789 01235 46789 01246 35789 (2) 012 34 (4) 034 12 (4) 134 02 (4) 234 01 (3) 013 24 (3) 014 23 (3) 023 14 (3) 124 03 (3) 024 13 (3) 123 04 (6, 10, 14, 18, 36)
--	--	---

Figura 3.2 Estructuras iniciales para la búsqueda de los diseños no simples Se usa la misma notación que en la figura 3.1.

La manera de ordenar las clases paralelas parciales de las estructuras iniciales de los diseños simples no dio buenos resultados para los no simples. Por ejemplo, ordenando \mathcal{F}_1 como en el caso de los diseños simples, con las colecciones de $\{234, 01\}$ y $\{014, 23\}$ al principio, el experimento arrojó 218,079

diseños parciales en el nivel 12, mientras que con el orden dado a \mathcal{F}_1 en la figura 3.2 se produjeron 156,243 diseños en el mismo nivel. Fue con la ayuda de este tipo de ensayos que se eligió un orden conveniente. Los niveles de cotejo también se escogieron a discreción.

Los predicados \mathcal{P}_j se definen como en (3.1), sólo cambiando P.1 por P.2 (también resulta evidente que satisfacen el criterio de consistencia):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_j(C_1, \dots, C_j) &\Leftrightarrow \{C_1, \dots, C_j\} \text{ es consistente con P.2} \\ &\wedge \{C_1, \dots, C_j\} \text{ es diseño parcial 2-(10, 5, 16)} \\ &\wedge \{C_1, \dots, C_j\} \text{ es diseño parcial 3-(10, 5, 6)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Asimismo, son mínimas las modificaciones a la proposición 3.3.1 y al teorema 3.3.2 y las respectivas demostraciones no sufren alteración que valga la pena mencionar; el teorema queda así:

3.4.2 Teorema *Sea $\mathcal{F} \in \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}$ una estructura inicial para la que se aplica el algoritmo 2.3, con los predicados (3.5) y los grupo (3.2). Entonces el algoritmo deja en S_n una solución por cada clase de isomorfismo del conjunto de diseños resolubles no simples 2-(10, 5, 16) que contienen un diseño parcial isomorfo a $\widehat{\mathcal{F}}$. \square*

Por último, en la expresión booleana (3.4) se sustituye $\widehat{\mathcal{E}}_i$ con $\widehat{\mathcal{F}}_i$ para obtener la fórmula correspondiente al presente caso.

3.5 Resultados

A partir del algoritmo 2.3, con las adecuaciones antes presentadas, se escribió un programa para computar los diseños resolubles 2-(10, 5, 16) —por el teorema 1.5.3, el número de diseños no isomorfos coincide con el de resoluciones. El programa, escrito en lenguaje C , se compiló y ejecutó en una máquina “Alpha DEC” con un procesador de 800 MHz de frecuencia. Fue así como se llegó al resultado principal siguiente:

3.5.1 Teorema *Hay 27, 121, 734 diseños resolubles 2-(10, 5, 16) sin isomorfismos entre ellos, 2, 006, 690 de los cuales son simples. \square*

En las tablas 3.1 y 3.2 se presentan algunas de las cuentas obtenidas para los diseños resolubles 2-(10, 5, 16) mutuamente no isomorfos, clasificados según el tamaño del grupo de automorfismos completo de cada diseño. También se muestra en ellas el tiempo empleado por el procesador para la generación de los diseños correspondientes a cada estructura inicial.

Tabla 3.1 Clasificación de los diseños resolubles simples 2-(10, 5, 16).

	Aut(D)																Total	t (h)					
	1	2	3	4	5	6	8	9	10	16	18	20	24	27	32	40			48	54	360	640	1440
\mathcal{E}_1	7	14	4	2	0	3	2	1	0	0	1	0	3	0	0	1	0	0	1	0	0	39	0.01
\mathcal{E}_2	5208	63	24	0	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5302	0.16
\mathcal{E}_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00
\mathcal{E}_4	17284	76	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17361	0.26
\mathcal{E}_5	223562	300	6	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	223872	3.44
\mathcal{E}_6	10268	230	0	32	0	1	15	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	10550	0.26
\mathcal{E}_7	224172	434	31	1	0	8	3	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	224652	1.36
\mathcal{E}_8	511174	1057	21	19	0	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	512276	7.41
\mathcal{E}_9	12793	241	39	4	0	4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13082	0.28
\mathcal{E}_{10}	19819	375	2	22	0	3	5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	20227	0.27
\mathcal{E}_{11}	12396	404	0	24	0	1	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12832	0.31
\mathcal{E}_{12}	120180	251	7	10	0	5	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	120456	1.62
\mathcal{E}_{13}	437419	358	30	4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	437812	7.61
\mathcal{E}_{14}	399308	684	93	20	1	9	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	400118	12.50
\mathcal{E}_{15}	7875	89	10	15	0	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7993	1.83
\mathcal{E}_{16}	52	16	4	9	2	5	5	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0.18
\mathcal{E}_{17}	1	1	0	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	96	4.96
\mathcal{E}_{18}	3	0	2	2	0	4	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	13	0.34
\mathcal{E}_{19}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0.33
\mathcal{E}_{20}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0.42
Total	2001521	4593	273	169	3	55	43	6	1	6	1	1	7	1	3	1	2	1	1	1	1	2006690	43.55

Tabla 3.2 Clasificación de los diseños resolubles no simples 2-(10, 5, 16).

	Aut(D)																Total	t (h)				
	1	2	3	4	5	6	8	9	12	16	18	24	32	48	64	128			144	256	640	
\mathcal{F}_1	285123	5326	3	475	0	7	128	1	3	37	0	3	12	4	3	1	1	1	1	1	291129	7.34
\mathcal{F}_2	10140856	16991	146	268	0	47	9	0	7	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10158326	53.51
\mathcal{F}_3	14648955	16062	273	210	3	48	24	2	4	5	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	14665589	258.61
Total	25074934	38379	422	953	3	102	161	3	14	43	3	4	12	4	3	1	1	1	1	1	25115044	319.46

Se hicieron algunas comparaciones entre el algoritmo empleado y otro en que sólo en el último nivel se efectúa el rechazo por isomorfismo (algoritmo 2.2) y no se considera el principio de falla inicial para ordenar las estructuras iniciales, sino que se ordenan lexicográficamente. Un algoritmo como este último se usó en los trabajos previos [26, Section 5] y [39]. En la tabla 3.3 se indica el tiempo dedicado por el procesador para generar los diseños correspondientes a tres estructuras iniciales.

Tabla 3.3 Tiempos de proceso (h) de dos algoritmos de retroceso.

Estructura inicial	Con rechazo por isomorfismo en niveles intermedios y ordenamiento de variables.	Sólo con rechazo en el último nivel.
\mathcal{E}_{11}	0.31	22.48
\mathcal{E}_{15}	1.83	54.23
\mathcal{F}_1	7.34	739.33

Por último, en la figura 3.3 se muestran dos diseños simples y uno no simple construidos por el algoritmo. El diseño (a) se generó a partir de la estructura \mathcal{E}_1 y tiene grupo de automorfismos de orden 1, contiene subestructuras isomorfas a $\widehat{\mathcal{E}}_1, \widehat{\mathcal{E}}_{14}, \dots, \widehat{\mathcal{E}}_{20}$, v. gr. las clases paralelas 11 a 15 y 17 integran un diseño isomorfo a $\widehat{\mathcal{E}}_{18}$ (cf. figura 2.4). El diseño (b) tiene grupo de automorfismos de orden 1,440, se generó a partir de \mathcal{E}_{20} , por lo que no posee subestructuras isomorfas a $\widehat{\mathcal{E}}_i$, para $i = 1, \dots, 19$. El diseño (c) tiene siete clases paralelas dobles y el orden de su grupo de automorfismos es 1.

$\widehat{\mathcal{E}}_1$	$\widehat{\mathcal{E}}_{20}$	$\widehat{\mathcal{F}}_1$																																																																																																																																																																																																																												
<div style="display: flex; align-items: center;"> { <table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td>01234</td><td>56789</td></tr> <tr><td>01235</td><td>46789</td></tr> <tr><td>01236</td><td>45789</td></tr> <tr><td>01237</td><td>45689</td></tr> <tr><td>01238</td><td>45679</td></tr> <tr><td>01239</td><td>45678</td></tr> <tr><td>23456</td><td>01789</td></tr> <tr><td>23457</td><td>01689</td></tr> <tr><td>23458</td><td>01679</td></tr> <tr><td>23467</td><td>01589</td></tr> <tr><td>23489</td><td>01567</td></tr> <tr><td>01456</td><td>23789</td></tr> <tr><td>01458</td><td>23679</td></tr> <tr><td>01459</td><td>23678</td></tr> <tr><td>01467</td><td>23589</td></tr> <tr><td>01478</td><td>23569</td></tr> <tr><td>13456</td><td>02789</td></tr> <tr><td>13457</td><td>02689</td></tr> <tr><td>13469</td><td>02578</td></tr> <tr><td>13478</td><td>02569</td></tr> <tr><td>13479</td><td>02568</td></tr> <tr><td>02457</td><td>13689</td></tr> <tr><td>02459</td><td>13678</td></tr> <tr><td>02467</td><td>13589</td></tr> <tr><td>02468</td><td>13579</td></tr> <tr><td>02479</td><td>13568</td></tr> <tr><td>03458</td><td>12679</td></tr> <tr><td>03468</td><td>12579</td></tr> <tr><td>03469</td><td>12578</td></tr> <tr><td>03479</td><td>12568</td></tr> <tr><td>03489</td><td>12567</td></tr> <tr><td>12459</td><td>03678</td></tr> <tr><td>12468</td><td>03579</td></tr> <tr><td>12469</td><td>03578</td></tr> <tr><td>12478</td><td>03569</td></tr> <tr><td>12489</td><td>03567</td></tr> </table> </div>	01234	56789	01235	46789	01236	45789	01237	45689	01238	45679	01239	45678	23456	01789	23457	01689	23458	01679	23467	01589	23489	01567	01456	23789	01458	23679	01459	23678	01467	23589	01478	23569	13456	02789	13457	02689	13469	02578	13478	02569	13479	02568	02457	13689	02459	13678	02467	13589	02468	13579	02479	13568	03458	12679	03468	12579	03469	12578	03479	12568	03489	12567	12459	03678	12468	03579	12469	03578	12478	03569	12489	03567	<div style="display: flex; align-items: center;"> { <table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td>01234</td><td>56789</td></tr> <tr><td>01235</td><td>46789</td></tr> <tr><td>01246</td><td>35789</td></tr> <tr><td>01347</td><td>25689</td></tr> <tr><td>02348</td><td>15679</td></tr> <tr><td>12349</td><td>05678</td></tr> <tr><td>23456</td><td>01789</td></tr> <tr><td>23458</td><td>01679</td></tr> <tr><td>23469</td><td>01578</td></tr> <tr><td>01259</td><td>34678</td></tr> <tr><td>01268</td><td>34579</td></tr> <tr><td>01289</td><td>34567</td></tr> <tr><td>01358</td><td>24679</td></tr> <tr><td>01367</td><td>24589</td></tr> <tr><td>01368</td><td>24579</td></tr> <tr><td>01457</td><td>23689</td></tr> <tr><td>01459</td><td>23678</td></tr> <tr><td>01469</td><td>23578</td></tr> <tr><td>02357</td><td>14689</td></tr> <tr><td>02379</td><td>14568</td></tr> <tr><td>02389</td><td>14567</td></tr> <tr><td>12356</td><td>04789</td></tr> <tr><td>12367</td><td>04589</td></tr> <tr><td>12379</td><td>04568</td></tr> <tr><td>13458</td><td>02679</td></tr> <tr><td>13459</td><td>02678</td></tr> <tr><td>13478</td><td>02569</td></tr> <tr><td>02456</td><td>13789</td></tr> <tr><td>02457</td><td>13689</td></tr> <tr><td>02478</td><td>13569</td></tr> <tr><td>03468</td><td>12579</td></tr> <tr><td>03469</td><td>12578</td></tr> <tr><td>03479</td><td>12568</td></tr> <tr><td>03479</td><td>12567</td></tr> <tr><td>12467</td><td>03589</td></tr> <tr><td>12478</td><td>03569</td></tr> <tr><td>12489</td><td>03567</td></tr> </table> </div>	01234	56789	01235	46789	01246	35789	01347	25689	02348	15679	12349	05678	23456	01789	23458	01679	23469	01578	01259	34678	01268	34579	01289	34567	01358	24679	01367	24589	01368	24579	01457	23689	01459	23678	01469	23578	02357	14689	02379	14568	02389	14567	12356	04789	12367	04589	12379	04568	13458	02679	13459	02678	13478	02569	02456	13789	02457	13689	02478	13569	03468	12579	03469	12578	03479	12568	03479	12567	12467	03589	12478	03569	12489	03567	<div style="display: flex; align-items: center;"> { <table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td>01234</td><td>56789</td></tr> <tr><td>01234</td><td>56789</td></tr> <tr><td>01235</td><td>46789</td></tr> <tr><td>01235</td><td>46789</td></tr> <tr><td>01267</td><td>34589</td></tr> <tr><td>01267</td><td>34589</td></tr> <tr><td>01368</td><td>24579</td></tr> <tr><td>01379</td><td>24568</td></tr> <tr><td>02368</td><td>14579</td></tr> <tr><td>02379</td><td>14568</td></tr> <tr><td>12389</td><td>04567</td></tr> <tr><td>12389</td><td>04567</td></tr> <tr><td>23456</td><td>01789</td></tr> <tr><td>23467</td><td>01589</td></tr> <tr><td>23468</td><td>01579</td></tr> <tr><td>23478</td><td>01569</td></tr> <tr><td>01458</td><td>23679</td></tr> <tr><td>01467</td><td>23589</td></tr> <tr><td>01468</td><td>23579</td></tr> <tr><td>01489</td><td>23567</td></tr> <tr><td>02457</td><td>13689</td></tr> <tr><td>02458</td><td>13679</td></tr> <tr><td>02478</td><td>13569</td></tr> <tr><td>02489</td><td>13567</td></tr> <tr><td>13456</td><td>02789</td></tr> <tr><td>13457</td><td>02689</td></tr> <tr><td>13478</td><td>02569</td></tr> <tr><td>13478</td><td>02569</td></tr> <tr><td>03459</td><td>12678</td></tr> <tr><td>03469</td><td>12578</td></tr> <tr><td>03469</td><td>12578</td></tr> <tr><td>03479</td><td>12568</td></tr> <tr><td>03479</td><td>12568</td></tr> <tr><td>12459</td><td>03678</td></tr> <tr><td>12469</td><td>03578</td></tr> <tr><td>12469</td><td>03578</td></tr> <tr><td>12479</td><td>03568</td></tr> </table> </div>	01234	56789	01234	56789	01235	46789	01235	46789	01267	34589	01267	34589	01368	24579	01379	24568	02368	14579	02379	14568	12389	04567	12389	04567	23456	01789	23467	01589	23468	01579	23478	01569	01458	23679	01467	23589	01468	23579	01489	23567	02457	13689	02458	13679	02478	13569	02489	13567	13456	02789	13457	02689	13478	02569	13478	02569	03459	12678	03469	12578	03469	12578	03479	12568	03479	12568	12459	03678	12469	03578	12469	03578	12479	03568
01234	56789																																																																																																																																																																																																																													
01235	46789																																																																																																																																																																																																																													
01236	45789																																																																																																																																																																																																																													
01237	45689																																																																																																																																																																																																																													
01238	45679																																																																																																																																																																																																																													
01239	45678																																																																																																																																																																																																																													
23456	01789																																																																																																																																																																																																																													
23457	01689																																																																																																																																																																																																																													
23458	01679																																																																																																																																																																																																																													
23467	01589																																																																																																																																																																																																																													
23489	01567																																																																																																																																																																																																																													
01456	23789																																																																																																																																																																																																																													
01458	23679																																																																																																																																																																																																																													
01459	23678																																																																																																																																																																																																																													
01467	23589																																																																																																																																																																																																																													
01478	23569																																																																																																																																																																																																																													
13456	02789																																																																																																																																																																																																																													
13457	02689																																																																																																																																																																																																																													
13469	02578																																																																																																																																																																																																																													
13478	02569																																																																																																																																																																																																																													
13479	02568																																																																																																																																																																																																																													
02457	13689																																																																																																																																																																																																																													
02459	13678																																																																																																																																																																																																																													
02467	13589																																																																																																																																																																																																																													
02468	13579																																																																																																																																																																																																																													
02479	13568																																																																																																																																																																																																																													
03458	12679																																																																																																																																																																																																																													
03468	12579																																																																																																																																																																																																																													
03469	12578																																																																																																																																																																																																																													
03479	12568																																																																																																																																																																																																																													
03489	12567																																																																																																																																																																																																																													
12459	03678																																																																																																																																																																																																																													
12468	03579																																																																																																																																																																																																																													
12469	03578																																																																																																																																																																																																																													
12478	03569																																																																																																																																																																																																																													
12489	03567																																																																																																																																																																																																																													
01234	56789																																																																																																																																																																																																																													
01235	46789																																																																																																																																																																																																																													
01246	35789																																																																																																																																																																																																																													
01347	25689																																																																																																																																																																																																																													
02348	15679																																																																																																																																																																																																																													
12349	05678																																																																																																																																																																																																																													
23456	01789																																																																																																																																																																																																																													
23458	01679																																																																																																																																																																																																																													
23469	01578																																																																																																																																																																																																																													
01259	34678																																																																																																																																																																																																																													
01268	34579																																																																																																																																																																																																																													
01289	34567																																																																																																																																																																																																																													
01358	24679																																																																																																																																																																																																																													
01367	24589																																																																																																																																																																																																																													
01368	24579																																																																																																																																																																																																																													
01457	23689																																																																																																																																																																																																																													
01459	23678																																																																																																																																																																																																																													
01469	23578																																																																																																																																																																																																																													
02357	14689																																																																																																																																																																																																																													
02379	14568																																																																																																																																																																																																																													
02389	14567																																																																																																																																																																																																																													
12356	04789																																																																																																																																																																																																																													
12367	04589																																																																																																																																																																																																																													
12379	04568																																																																																																																																																																																																																													
13458	02679																																																																																																																																																																																																																													
13459	02678																																																																																																																																																																																																																													
13478	02569																																																																																																																																																																																																																													
02456	13789																																																																																																																																																																																																																													
02457	13689																																																																																																																																																																																																																													
02478	13569																																																																																																																																																																																																																													
03468	12579																																																																																																																																																																																																																													
03469	12578																																																																																																																																																																																																																													
03479	12568																																																																																																																																																																																																																													
03479	12567																																																																																																																																																																																																																													
12467	03589																																																																																																																																																																																																																													
12478	03569																																																																																																																																																																																																																													
12489	03567																																																																																																																																																																																																																													
01234	56789																																																																																																																																																																																																																													
01234	56789																																																																																																																																																																																																																													
01235	46789																																																																																																																																																																																																																													
01235	46789																																																																																																																																																																																																																													
01267	34589																																																																																																																																																																																																																													
01267	34589																																																																																																																																																																																																																													
01368	24579																																																																																																																																																																																																																													
01379	24568																																																																																																																																																																																																																													
02368	14579																																																																																																																																																																																																																													
02379	14568																																																																																																																																																																																																																													
12389	04567																																																																																																																																																																																																																													
12389	04567																																																																																																																																																																																																																													
23456	01789																																																																																																																																																																																																																													
23467	01589																																																																																																																																																																																																																													
23468	01579																																																																																																																																																																																																																													
23478	01569																																																																																																																																																																																																																													
01458	23679																																																																																																																																																																																																																													
01467	23589																																																																																																																																																																																																																													
01468	23579																																																																																																																																																																																																																													
01489	23567																																																																																																																																																																																																																													
02457	13689																																																																																																																																																																																																																													
02458	13679																																																																																																																																																																																																																													
02478	13569																																																																																																																																																																																																																													
02489	13567																																																																																																																																																																																																																													
13456	02789																																																																																																																																																																																																																													
13457	02689																																																																																																																																																																																																																													
13478	02569																																																																																																																																																																																																																													
13478	02569																																																																																																																																																																																																																													
03459	12678																																																																																																																																																																																																																													
03469	12578																																																																																																																																																																																																																													
03469	12578																																																																																																																																																																																																																													
03479	12568																																																																																																																																																																																																																													
03479	12568																																																																																																																																																																																																																													
12459	03678																																																																																																																																																																																																																													
12469	03578																																																																																																																																																																																																																													
12469	03578																																																																																																																																																																																																																													
12479	03568																																																																																																																																																																																																																													
(a)	(b)	(c)																																																																																																																																																																																																																												

Figura 3.3 Tres diseños resolubles 2-(10, 5, 16) generados por el algoritmo presentado. Cada clase paralela aparece en forma abreviada, por ejemplo, 01234 56789 significa $\{\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8, 9\}\}$.

Conclusiones

Por muy poderosos que sean los recursos de computación, para resolver problemas de enumeración constructiva situados en la frontera de lo prácticamente computable, es valioso realizar un análisis combinatorio de las estructuras en cuestión. De este modo se logró clasificar los diseños resolubles 2-(10, 5, 16) y 3-(10, 5, 6) a la vez. La técnica seguida, que se apoya en el estudio de los patrones de intersección de clases paralelas, aunque no es una panacea también sirvió para clasificar los diseños resolubles 2-(12, 4, 3), los 2-(14, 7, 12), los 3-(14, 7, 5) [39, 26] y los cuasiresolubles 2-(2k + 1, k, k - 1) para $k \leq 13$ [38]. La interpretación adecuada de los patrones de intersección lleva a la construcción de un conjunto de configuraciones iniciales que se dan como entrada al algoritmo encargado de la enumeración, de tal suerte que el espacio de búsqueda de soluciones se reduce de manera significativa.

En el caso de la enumeración de los diseños presentada en esta tesis, también fue importante agregar al algoritmo de búsqueda con retroceso el rechazo por isomorfismo en niveles intermedios y la ordenación de las variables. La inclusión de estos elementos influyó sustancialmente en la duración de los cómputos.

Otra reflexión interesante es que vale la pena aprovechar teoremas como el de Alltop, pues proporcionan condiciones necesarias para la existencia de diseños, mismas que repercuten en la definición de las configuraciones iniciales y restringen el espacio de búsqueda.

Aunque hay grandes avances en la clasificación de diseños, durante varios años se ha intentado resolver una serie de problemas, entre los que se encuentra el de enumeración de los diseños 2-(4t + 4, 2t + 2, 2t + 1), 3-(4t + 4, 2t + 2, 2t + 1) y 2-(4t + 3, 2t + 1, t), para $t = 7$ y 8. Como trabajo futuro se tiene considerado investigar su estructura en forma parecida a la presentada en esta tesis, pero generalizando un poco el análisis de los patrones de intersección, de tal manera que además se examinen las intersecciones de tres bloques tomados de clases paralelas distintas. Asimismo, se tiene contemplado mejorar el algoritmo integrándole otros componentes, por ejemplo el paralelismo y la ordenación dinámica de las variables durante la búsqueda exhaustiva.

Glosario de símbolos

\equiv	equivalencia de matrices	13
\cong	isomorfismo	10
$\text{Aut}(X)$	grupo de automorfismos de X	10
(B)	traza del bloque B	8
(\mathcal{B})	conjunto de trazas de bloques de \mathcal{B}	8
(\mathbf{D})	estructura de incidencia reducida de \mathbf{D}	10
gx	valor en (g, x) de la acción $G \times X \rightarrow X$	9
Gy	órbita de y bajo G	9
G_y	grupo estabilizador de y en G	9
I	matriz identidad	15
J	matriz con todos sus elementos iguales a 1	15
$M(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$	matriz de intersección de clases paralelas	18
(P, \mathcal{B})	diseño combinatorio con conjunto de puntos P y colección \mathcal{B} de subconjuntos de puntos	1
$(P, \mathcal{B}, \mathbf{I})$	estructura de incidencia con conjunto de puntos P , conjunto de bloques \mathcal{B} y relación de incidencia \mathbf{I}	8
$\text{Sim}(X)$	grupo simétrico en X	9
t - (v, k, λ)	cf. definición 1.4.1	14
\mathcal{T}	tipo de una matriz de intersección	18

Bibliografía

- [1] R. J. R. Abel and S. Furino. Resolvable and near resolvable designs. In C. J. Colbourn and J.H. Dinitz, editors, *CRC Handbook of Combinatorial Designs*, pages 87–94. CRC Press, Boca Raton FL, 1996.
- [2] A. V. Aho. *Handbook of Graph Theory*, chapter 2.1, Computer Representations of Graphs. J. Yellen e J.L. Gross eds., CRC Press Series, in Discrete Mathematics and Its Applications, 2004.
- [3] S. Alagić and M. A. Arbib. *The Design of Well-Structured and Correct Programs*. Springer-Verlag, 1978.
- [4] W. O. Alltop. Extending t -designs. *J. Combin. Theory Ser. A*, 18:177–186, 1975.
- [5] T. Beth, D. Jungnickel, and H. Lenz. *Design Theory*, volume I of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, second edition, November 1999.
- [6] A. Betten, R. Laue, and A. Wassermann. Simple 7-designs with small parameters. *J. Combin. Des.*, 7(2):79–94, 1999.
- [7] N. L. Biggs, E. K. Lloyd, and R. J. Wilson. The history of combinatorics. In R. L. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, editors, *Handbook of Combinatorics*, volume 2, chapter 44, pages 2163–2198. North-Holland, Amsterdam, 1995.
- [8] J. R. Bitner and E. M. Reingold. Backtrack programming techniques. *Comm. ACM*, 18(11):651–656, 1975.
- [9] B. Bollobas. *Modern Graph Theory*. Springer, July 1998.
- [10] G. Brinkmann. Fast generation of cubic graphs. *J. Graph Theory*, 23:139–149, 1996.

- [11] A. E. Brouwer, J. B. Shearer, N. J. A. Sloane, and W. D. Smith. A new table of constant weight codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 36(6):1334–2013, 1990.
- [12] C. J. Colbourn. Triple system. In C.J. Colbourn and J.H. Dinitz, editors, *Handbook of Combinatorial Designs*, pages 58–71. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton FL, 2nd edition, 2007.
- [13] C. J. Colbourn, J. H. Dinitz, and D. R. Stinson. Applications of combinatorial designs to communications, cryptography, and networking. In Walker, editor, *Surveys in Combinatorics, 1993*. London Mathematical Society Lecture Note Series 187, Cambridge University Press, 1999.
- [14] C. J. Colbourn and R. A. Mathon. Steiner systems. In C. J. Colbourn and J.H. Dinitz, editors, *CRC Handbook of Combinatorial Designs*, pages 66–74. CRC Press, Boca Raton FL, 1996.
- [15] H. L. de Vries. Historical notes on steiner systems. *Discrete Math.*, 52:293–297, 1984.
- [16] R. Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, January 2000.
- [17] J. H. Dinitz, D. K. Garnick, and B. D. McKay. There are 526,915,620 nonisomorphic one-factorizations of k_{12} . *J. Combin. Des.*, 2(4):273–285, 1994.
- [18] E. C. Freuder. A sufficient condition for backtrack-free search. *J. ACM*, 29(1):24–32, 1982.
- [19] H.N. Gabow. *Handbook of Graph Theory*, chapter 10.1, Searching. J. Yellen and J. L. Gross eds., CRC Press Series, in *Discrete Mathematics and Its Applications*, 2004.
- [20] P. B. Gibbons and P. R. J. Östergård. Computational methods in design theory. In C.J. Colbourn and J.H. Dinitz, editors, *Handbook of Combinatorial Designs*, pages 755–783. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton FL, 2nd edition, 2007.
- [21] J. L. Gross. *Handbook of graph theory*. CRC Press, 2004.
- [22] R. M. Haralick and G. L. Elliott. Increasing tree search efficiency for constraint satisfaction problems. *Artificial Intelligence*, 14:263–313, 1980.

- [23] Ellis Horowitz. Algorithms, design and classification of. In Anthony Ralston and Edwin D. Reilly, editors, *Encyclopedia of Computer Science*, pages 33–37. Van Nostrand Reinhold, 3rd edition, 1993.
- [24] N. Ito, J. S. Leon, and J. Q. Longyear. Classification of 3-(24; 12; 5) designs and 24-dimensional hadamard matrices. *J. Combin. Theory Ser. A*, 31(1):66–93, 1981.
- [25] P. Kaski. Isomorph-free exhaustive generation of combinatorial designs. Research Report A70, Helsinki University of Technology, Laboratory for Theoretical Computer Science, Espoo, Finland, December 2001.
- [26] P. Kaski, L. B. Morales, P. R. J. Östergård, D. A. Rosenblueth, and C. Velarde. Classification of resolvable 2-(14, 7, 12) and 3-(14, 7, 5) designs. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 47:65–74, 2003.
- [27] P. Kaski and P. R. J. Östergård. Miscellaneous classification results for 2-designs. *Discrete Math.*, 280:65–75, 2004.
- [28] E. S. Kramer and D. M. Mesner. t -designs on hypergraphs. *Discrete Math.*, 15(3):263–296, 1976.
- [29] D. L. Kreher and S. P. Radziszowski. Finding simple t -designs by using basis reduction. *Congr. Numer.*, 55:235–244, 1986.
- [30] D. L. Kreher and D. R. Stinson. Combinatorial algorithms: generation, enumeration and search. *CRC Press series on discrete mathematics and its applications*, pages 105–145, 1998.
- [31] C. Lam and V. D. Tonchev. Classification of affine resolvable 2-(27; 9; 4) designs. *J. Statist. Plann. Inference*, 56(2):187–202, 1996. (Corrections in 86(1):277–278, 2000).
- [32] C. W. H. Lam, L. Thiel, and S. Swiercz. The non-existence of finite projective planes of order 10. *Canad. J. Math.*, 41:1117–1123, 1989.
- [33] R. Laue. Constructing objects up to isomorphism, simple 9-designs with small parameters. In A. Betten, A. Kohnert, R. Laue, and A. Wassermann, editors, *Algebraic Combinatorics and Applications*, (Proc. AL-COMA, Sept. 12-19, Gößweinstein, Germany, 1999), pages 232–260. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2001.
- [34] R. Mathon and A. Rosa. $2-(v, k, \lambda)$ designs of small order. In C. J. Colbourn and J.H. Dinitz, editors, *CRC Handbook of Combinatorial Designs*, pages 3–41. CRC Press, Boca Raton FL, 1996.

- [35] R. Mathon and A. Rosa. $2-(v, k, \lambda)$ designs of small order. In C. J. Colbourn and J.H. Dinitz, editors, *Handbook of Combinatorial Designs*, pages 25–58. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton FL, 2nd edition, 2007.
- [36] S. B. Maurer. *Handbook of Graph Theory*, chapter 3.2, Directed Acyclic Graphs. J. Yellen e J.L. Gross eds., CRC Press Series, in Discrete Mathematics and Its Applications, 2004.
- [37] B. D. McKay. NAUTY user’s guide (version 1.5). Technical Report TR-CS90-02, Computer Science Department, Australian National University, 1990.
- [38] L. B. Morales, R. San Agustín, and C. Velarde. Enumeration of all $(2k + 1, k, k - 1)$ -NRBIBDs for $3 \leq k \leq 13$. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 60, February 2007.
- [39] L. B. Morales and C. Velarde. A complete classification of $(12, 4, 3)$ -RBIBDs. *J. Combin. Des.*, 9(6):385–400, 2001.
- [40] L. B. Morales and C. Velarde. Enumeration of resolvable $2-(10, 5, 16)$ and $3-(10, 5, 6)$ designs. *J. Combin. Des.*, 13(2):108–119, 2005.
- [41] P. R. J. Östergård. Classification of binary/ternary one-error-correcting codes. *Discrete Math.*, 223(1-3):253–262, 2000.
- [42] P. R. J. Östergård. Enumeration of $2-(12, 3, 2)$ designs. *Australas. J. Combin.*, 22:227–231, 2000.
- [43] P. R. J. Östergård, T. Baicheva, and E. Kolev. Optimal binary one-error-correcting codes of length 10 have 72 codewords. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 45(4):1229–1231, 1999.
- [44] P. R. J. Östergård and P. Kaski. Enumeration of $2-(9; 3; \lambda)$ designs and their resolutions. *Designs, Codes and Cryptography*, 27(1-2):131–137, 2002.
- [45] C. Pietsch. On the enumeration of $2-(7, 3, \lambda)$ block designs. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 16:103–114, 1994.
- [46] J. Plücker. *System der analytischen Geometrie, auf neue Betrachtungsweisen gegründet, und insbesondere eine ausführliche Theorie der Curven dritter Ordnung enthaltend*. Duncker und Humblot, Berlin, 1835.
- [47] D. K. Ray-Chaudhuri and R. M. Wilson. Solution of Kirkman’s school-girl problem. *Symp. Pure Math.*, 19:187–204, 1971.

- [48] J. J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1995.
- [49] B. Schmalz. The t -designs with prescribed automorphism group, new simple 6-designs. *J. Combin. Des.*, 1(2):125–170, 1993.
- [50] D. J. Street and W. H. Wilson. Resolvable designs for resolving disputes. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 38:139–148, 2001.
- [51] J. H. van Lint and R. M. Wilson. *A Course in Combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, England, second edition, 2001.
- [52] Niklaus Wirth. Program development by stepwise refinement. *Communications of the ACM*, 14(4):221–227, 1971.

Índice

- acción, 9
- árbol, 24
 - con raíz, 24
 - de búsqueda, 24
- BIBD, 14
- bloque, 1, 8
- clase paralela, 16
 - parcial, 34
- condición de balanceo, 14
- criterio de consistencia, 24
- diseño
 - t -(v, k, λ), 14
 - resoluble, 1, 16
- equivalencia de matrices, 13
- estabilizador, 9
- estructura
 - de incidencia, 8
 - reducida, 10
 - simple, 8
 - inicial, 34
- gráfica, 11
 - representante canónica, 12
- grupo simétrico, 9
- isomorfismo
 - de estructuras de incidencia, 10
 - de gráficas, 11
 - de gráficas de estructuras, 11
 - de resoluciones, 16
- matrices equivalentes, 13
- matriz
 - de incidencia, 12
 - de intersección, 18
 - tipo de, 18
- nauty*, 12
- nivel de cotejo, 28
- órbita, 9
- orden de las variables, 31
- partición de un número, 19
- patrón de intersección, 22
- plano proyectivo, 8
- poda, 25
 - por isomorfismo, 29
- principio de falla inicial, 32
- punto, 1, 8
- relación de incidencia, 8
- resolución, 1, 16
- solución parcial, 24
- tipo de matriz de intersección, 18
- traza, 8