UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TOPOLOGÍA Y COMBINATORIA EN TEORÍA DE GRUPOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

PEDRO PAREDES LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. RAFAEL VILLARROEL FLORES

MÉXICO, D. F. 2007

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

FACULTAD DE CIENCIAS

División de Estudios Profesionales

VNIVERSDAD NACIONAL AVFNMA DE MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e .

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

"Topología y Combinatoria en Teoría de Grupos"

realizado por **Paredes López Pedro,** con número de cuenta **09757473-0,** quien opta por titularse en la opción de **Tesis** de la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Tutor(a) Propietario	Dr.	Rafael Villarroel Flores	R. Villarroel F.
Propietario	Dr.	Francisco Larrión Riveroll	F. Larrión
Propietario	Dr.	Hugo Alberto Rincón Mejía	Hugo A. Rincón M.
Suplente	M. en C.	Ana Irene Ramírez Galarza	Ana I. Ramírez
Suplente	Dra.	Bertha María Tomé Arreola	Bertha Tomé

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D.F., a 13 de octubre del 2006.
EL COORDINADOR DEL COMITÉ DE TITULACIÓN
DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

M. EN C. AGUSTÍN ONTIVEROS PINEDA

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Paredes
López
Pedro
58 37 68 64
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
097574730
2. Datos del tutor
Dr
Rafael
Villarroel
Flores
3. Datos del sinodal 1
Dr
Francisco
Larrión
Riveroll
4.Datos del sinodal 2
Dr
Hugo Alberto
Rincón
Mejía
5. Datos del sinodal 3
M en C
Ana Irene
Ramírez
Galarza
6. Datos del sinodal 4
Dra
Bertha María
Tomé
Arreola
7. Datos del trabajo escrito
Topológia y Combinatoria en Teoría de Grupos
38 p
2007

Dedicada a mi familia
Paredes López, Ballesteros Montero, Torres Ayala
Y a la guapa y bellisima persona Mitzuko

Índice general

Introducción

Existen dos funtores covariantes, K : **Poset** $\rightarrow$ **SimplicialComplex** y
$|.|$:**SimplicialComplex**$\rightarrow$**Top** (donde **Poset** es la categoría de conjuntos parcialmente ordenados cuyos morfismos son las funciones que preservan el orden, **SimplicialComplex** es la categoría de complejos simpliciales cuyos morfismos son las funciones simpliciales de la definición 2 y **Top** es la categoría de espacios topológicos cuyos morfismos son las funciones continuas), cuya composición, denotémosla T (es decir $T = |.| \circ K$) nos permite asociar conceptos topológicos a los objetos y morfismos de **Poset**, por ejemplo: diremos que dos conjuntos parcialmente ordenados P y Q son del mismo tipo de homotopía, si $|K(P)|$ y $|K(Q)|$ lo son. El terema de la fibra de Quillen (teorema 1) ha sido una herramienta muy útil en el establecimiento de la igualdad del tipo de homotopía entre algunas parejas de conjuntos parcialmente ordenados, particularmente de aquellos conjuntos parcialmente ordenados que son la imagen de un grupo bajo algún funtor que vaya de la categoría **G** (cuyos morfismos son los isomorfismos usules) a la categoría **Poset**, dado que la teoría se enriquece al tener a disposición la teoría de grupos; en esta tesis trabajamos con tres familias de funtores que van de **G** a **Poset**:
$\{\mathcal{S}_p\}_p$, $\{\mathcal{A}_p\}_p$, un funtor por cada primo p y $\{\mathcal{L}\}$ que consta del único funtor $\mathcal{L}$.

Como ejemplo de la aplicación de dicho teorema probamos que si G es un grupo finito entonces $\mathcal{S}_p(G)$ y $\mathcal{A}_p(G)$ son del mismo tipo de homotopía (una de las ventajas de este resultado es que $\mathcal{A}_p(G)$ es más simple que $\mathcal{S}_p(G)$ en el sentido que $\mathcal{A}_p(G)$ está contenido en $\mathcal{S}_p(G)$). Quillen trata de probar que hay una relación, vía el funtor $\mathcal{A}_p \circ T$, entre una propiedad algebraica y una propiedad topológica:

Conjetura. Sea G un grupo finito. Entonces se cumple

$$\mathcal{O}_p(G) \neq 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{A}_p(G) \quad \text{es contraible}$$

donde $\mathcal{O}_p(G)$ es la intersección de todos los p-subgrupos de Sylow de G.

Quillen prueba que dado un grupo finito G, si $\mathcal{O}_p(G) \neq 1$ entonces $\mathcal{A}_p(G)$ es contraible, prueba la equivalencia en el caso que G sea finito y soluble, pero para el caso general en que G es finito, la implicación "$\mathcal{A}_p(G)$ es contraible, entonces $\mathcal{O}_p(G) \neq 1$" es un problema abierto.

Una de las ideas que se obtienen de el desarrollo comentado en el párrafo anterior, es que podemos aprovechar la presencia de simetrías en los conjuntos dotados de estructura: grupo, conjunto parcialmente ordenado, complejo simplicial, espacio topológico (formalizadas con el concepto de acción de grupo sobre un conjunto) con el fin de probar afirmaciones (en el marco de una teoría enriquecida al incluir la teoría de grupos) acerca de propiedades que poseen dichos conjuntos dotados de estructura (dos ejemplos de esto son el teorema 5 y el ejemplo del capítulo 4). Con este proposito se definen los conceptos: G-conjunto parcialmente ordenado, G-morfismo entre conjuntos parcialmente ordenados, G-complejo simplicial, G-función simplicial, G-espacio topológico, función equivariante, etc.

En este contexto, la versión equivariante del teorema de la fibra de Quillen resulta verdadera y también sus consecuencias análogas a las consecuencias del teorema 1.

Otra propiedad importante, aparte de la propiedad de tener simetrías, es la contraibilidad, podemos darnos cuenta de ello al analizar la demostración del teorema 5. Los corolarios 3 y 4 son herramientas básicas para probar contraibilidad. Cabe mencionar, aunque no está incluido formalmente en esta tesis, que si un complejo simplicial K contiene a un subcomplejo L y L es contraible, entonces $|K|$ y $\frac{|K|}{|L|}$ tienen el mismo tipo de homotopía.

El teorema de Thévenaz nos da el tipo de homotopía de $\mathcal{L}(G)$ en caso que G sea un grupo soluble y con una serie de principal.

Por último el ejemplo del capítulo 4 nos muestra que si G es el producto semidirecto de $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ por $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ definido en la página 31, entonces $\mathcal{S}_p(G)$ es conexo pero no es contraible. En el desarrollo de este ejemplo y en la prueba del teorema 5 podemos apreciar la increible utilidad, pese a su sencillez, del invariante homotópico “característica de Euler”.

Capítulo 1

Conjuntos parcialmente ordenados

1.1. Conceptos básicos

Sea P un conjunto y r una relación binaria sobre P. (P, r) es un conjunto parcialmente ordenado (**COPO**) si y sólo si para toda $x, y, z \in P$ se cumplen las condiciones siguientes: xrx (reflexividad), xry y yrx implica $x = y$ (antisimetría), xry y yrz entonces xrz (transitividad). Si además de las tres propiedades anteriores se cumple que para todo par $x, y \in P$ es válida una y sólo una de las relaciones siguientes: $x = y$ o xry o yrx (tricotomía), entonces (P, r) es un conjunto totalmente ordenado **COTO**, también llamado **cadena**. Por simplicidad, las presencias del sustantivo "COPO (P, r)" en un enunciado serán sustituidas por la abreviación "COPO P", a menos que en un enunciado necesitemos diferenciar a la estructura de COPO "(P, r)" de su subconjunto subyacente "P".

Emplearemos las siguientes notaciones y términos para: un COPO (P, r); x , y elementos de P.

$\leq_{\mathbf{P}}$ denotará a la relación binaria r, pero cuando no haya confusión sólo aparecerá el símbolo $\leq$

$\mathbf{x} < \mathbf{y}$ abrevia "$x \leq y$ y $x \neq y$"

Diremos que x y y son **comparables** si se cumple alguna de las relaciones: $x = y$ o xry o yrx

$\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ abrevia "x y y **no son comparables**"

Un subconjunto A de P es una **anticadena**, si cualesquiera dos elementos, distintos, de A son no comparables

Sean $x, y \in P$. Decimos que y **cubre** a x si y sólo si $x < y$ y no hay $z \in P$ tal que $x < z < y$.

El **diagrama de Hasse** de un COPO finito P es la gráfica dirigida (digráfica) cuyos vértices representan a los elementos de P y donde la arista entre 2 vértices representa a la relación que hay entre los elementos de P representados por tales 2 vértices, bajo la siguiente convención: si v_x es el vértice que representa a x y v_y el que representa a y entonces x cubre a y si y sólo si $v_x \longrightarrow v_y$ pertenece a la digráfica pero $v_y \longrightarrow v_x$ no pertenece a la digráfica.

1.2. Ejemplos de COPOs

a. Si $\leq$ es el orden usual entre naturales restringido al conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, denotado $[\mathbf{n}]$, entonces tenemos un COPO al que notaremos con $\mathbf{n}$.

Ejemplifiquemos con [3]:

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[d] \\ 2 \arrow[d] \\ 1 \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \circ \arrow[d] \\ \circ \arrow[d] \\ \circ \end{tikzcd}$$

COPO

Diagrama de Hasse

En los siguientes ejemplos el diagrama de la izquierda representa al COPO en turno, y el de la derecha es el diagrama de Hasse de tal COPO.

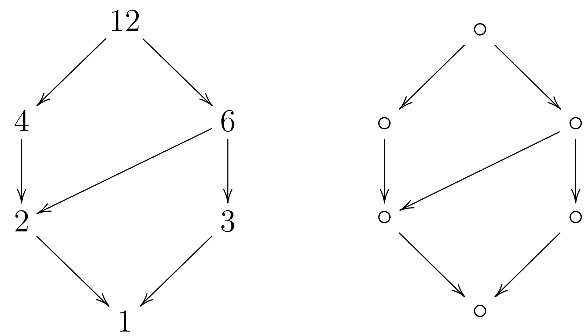
b. Consideremos al conjunto potencia de $[n]$ (notado $2^{[n]}$), entonces $(2^{[n]}, \subseteq)$ es un COPO al que abreviaremos $\mathbf{B_n}$.

Ejemplo con $2^{[2]}$:

$$\begin{tikzcd} & \{1,2\} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \{1\} \arrow[dr] & & \{2\} \arrow[dl] \\ & \emptyset & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \circ \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \circ \arrow[dr] & & \circ \arrow[dl] \\ & \circ & \end{tikzcd}$$

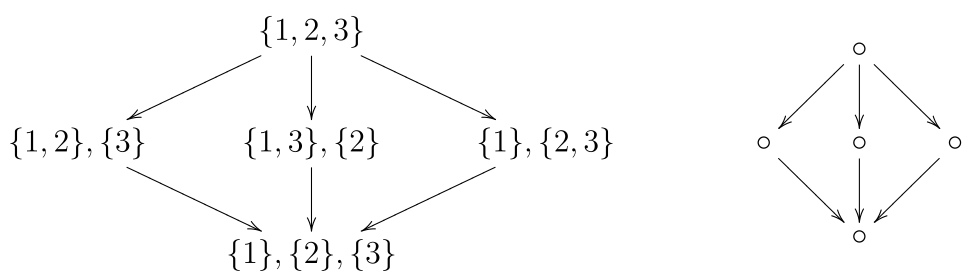
c. Sean $n \in \mathbb{P}$, $\mathbf{D_n}$ el conjunto de los divisores positivos de n para el cual $x \leq y$ se interpreta: x divide a y $(x|y)$, entonces $(D_n, \leq)$ es un COPO al que abreviaremos también con $\mathbf{D_n}$.

Ejemplo con D_{12}:



d. Sea $n \in \mathbb{N}$. El conjunto de todas las particiones de $[n]$ se convierte en un COPO, denotado con $\mathbf{\Pi_n}$, si en este caso interpretamos: para todas π, σ en Π_n, $\pi \leq \sigma$ si cada celda de π está contenida en alguna celda de σ. Por ejemplo, si $n = 7$ y consideramos las particiones de $[7]$: $\pi = \{1,4,7\} \cup \{3,5\} \cup \{2\} \cup \{6\}$ y $\sigma = \{1,4,6,7\} \cup \{2,3,5\}$ entonces $\pi \leq \sigma$.

Ejemplo con $[3]$:

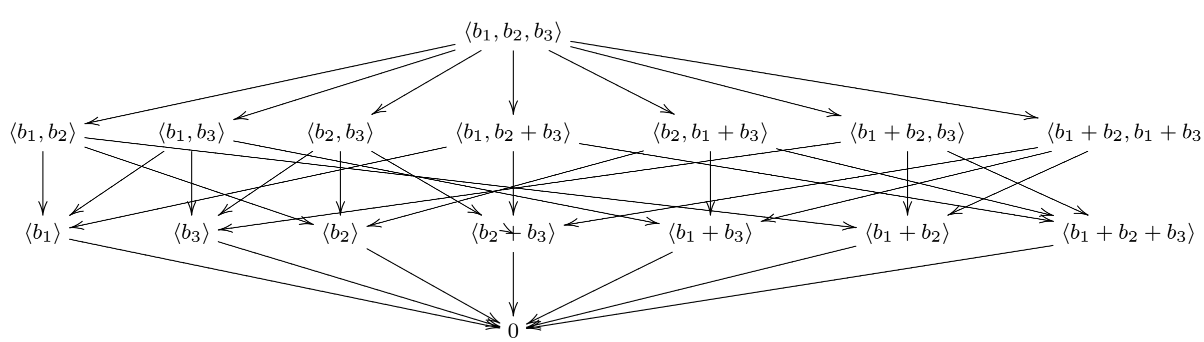


e. $\mathbf{L_n(q)}$ denotará al COPO de todos los subespacios vectoriales, del espacio vectorial n-dimensional $(\mathbf{V_n(q)})$ sobre el campo $\mathbb{F}_q$ de q elementos, ordenados por inclusión $(\subseteq)$.

Ejemplo con $V_3(2)$:

Sea $\beta = \{b_1, b_2, b_3\}$ base de $V_3(2) = V$.

Entonces tenemos $V = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \{b_1, b_2, b_3, b_1 + b_2, b_1 + b_3, b_2 + b_3, b_1 + b_2 + b_3, 0\}$



1.3. Otras definiciones

Sean P y Q dos COPOs; una función $f : P \to Q$ es un **morfismo covariante de COPOs** si cada vez que $x \leq_P y$ implica $f(x) \leq_Q f(y)$ y es un **morfismo contravariante de COPOs** si cada vez que $x \leq_P y$ implica $f(x) \geq_Q f(y)$. En el primer caso (f covariante) diremos que f preserva el orden. Dos COPOs P y Q son **isomorfos** si hay una biyección $f : P \to Q$ tal que $x \leq_P y$ si y sólo si $f(x) \leq_Q f(y)$. A tal f le llamamos **isomorfismo** entre los COPOs P y Q.

Las definiciones de COPO y de morfismo entre COPOs permiten construir la categoría **Poset**.

Sea P un COPO y $Q \subseteq P$. Podemos inducir un orden parcial en Q definiendo $\leq_Q$ del siguiente modo: para toda $x, y \in Q$ se cumple $x \leq_Q y$ si y sólo si $x \leq_P y$. Sólo en este caso diremos que Q es un **subCOPO** de P.

Como ejemplos importantes de subCOPOS de P tenemos los siguientes: fijo $x \in P$ definimos: $P_{\leq x} = \{y \in P | y \leq x\}$; análogamente definimos $P_{\geq x}$, $P_{<x}$ y $P_{>x}$. Para x y y elementos fijos de P definimos el **intervalo cerrado** $[x, y] = \{z | x \leq z \leq y\}$ sólo si $x \leq y$ y el **intervalo abierto** $(x, y) = \{z | x < z < y\}$ sólo si $x < y$.

Si todo intervalo cerrado de P es finito entonces a P se le llama **localmente finito**.

Un elemento x de P es un $\widehat{\mathbf{0}}$ de P si $x \leq y$ para toda $y \in P$ o es un $\widehat{\mathbf{1}}$ de P si $y \leq x$ para toda $y \in P$.

Sea C una cadena de P. C es **maximal** si no hay $z \in P \setminus C$ tal que $\{z\} \cup C$ siga siendo cadena. C es **saturada** si no hay $z \in P \setminus C$ tal que $x < z < y$ para algunas $x, y \in C$ y que $C \cup \{z\}$ siga siendo cadena. Dada una cadena C de P, si C es maximal entonces C es saturada pero el inverso no siempre es cierto ya que una cadena finita y saturada tiene la posibilidad de ser extendida, a otra cadena de mayor longitud, por alguno de sus extremos.

Sean C una cadena en P localmente finito, a y b elementos de C, con $a < b$. Tenemos que existe un natural $n_{a,b}$, al cual denotaremos también como $n(a, b)$, tal que $C \cap [a, b]$ es la cadena $(a = x_0) < x_0 < \ldots < (x_{n(a,b)} = b)$. Entonces es verdadera la siguiente afirmación:

Afirmación 1. *C es saturada en P si y sólo si para toda $a, b \in C$ con $a < b$, x_{i+1} cubre a x_i en P para toda $i \in \{1, \ldots, (n_{a,b} - 1)\}$.*

Demostración. El caso no inmediato, y del cual nos ocuparemos, es cuando C, y por tanto P, tiene más de un elemento.

Suficiencia: Supongamos que C es saturada en P. Sean a, b elementos de C, con $a < b$ y $(a = x_0) < x_0 < \ldots < (x_{n(a,b)} = b)$ la cadena $C \cap [a, b]$.

Caso $z \in P \setminus C$.

i. $C \cup \{z\}$ no es cadena. En este subcaso existe $x \in C$ tal que $x \perp z$. No puede ser que $x_i < z < x_{i+1}$ por que, por un lado, $x \leq x_i$ o $x_{i+1} \leq x$ implican cada una que z es comparable con x y, por el otro lado, $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ implica que x pertenece a $C \cap [a, b]$, por tanto $x = x_i$ o $x = x_{i+1}$ y entonces x es comparable con z, lo cual no es posible.

ii. $C \cup \{z\}$ es cadena. Si $x_i < z$, como $C \cup \{z\}$ es cadena, entonces no puede ser que $z < x_{i+1}$ pues C es saturada, por tanto $x_{i+1} < z$.

Caso $z \in C$. No puede ser que $x_i < z < x_{i+1}$ de lo contrario, $z \in C \cap [a, b]$ y entonces $z = x_k$ para alguna $k \in \{1, \ldots, n(a, b))\}$ que al mismo tiempo debe cumplir $i < k < i + 1$ y esto claramente no es posible.

Por tanto, en los dos casos posibles, no hay $z \in P$ tal que $x_i < z < x_{i+1}$, es decir x_{i+1} cubre a x_i en P.

Necesidad: Supongamos que para a y b elementos de C con $a < b$ es verdadero que x_{i+1} cubre a x_i en P para toda $i \in \{1, \ldots, (n_{a,b} - 1)\}$ donde $x_i \in C \cap [a, b]$. Sea $z \in P \setminus C$; si $z < x_0$ o $z \perp x$ para alguna $x \in C$, entonces tal z no nos preocupa, supongamos entonces que $x_0 < z$ ($x_0 \neq z$ dado que z no pertenece a C), como x_1 cubre a x_0 en P, necesariamente $x_1 < z$, como x_2 cubre a x_1 en P, entonces $x_2 < z$, continuando de este modo llegaremos a que $x_{n(a,b)} < z$; concluimos que para cualesquiera elementos $a, b \in C$ con $a < b$ no hay $z \in P \setminus C$ tal que $a < z < b$, es decir C es saturada.

□

Consideremos P un COPO finito, C una cadena en P, $[x, y]$ un intervalo de P. Definimos:

a. La **altura** $A(C)$ de la cadena C como el valor $A(C) = |C| - 1$.

b. La **longitud** $L(P)$ de P como el valor $L(P) = \text{máx}\{A(C) \mid C \text{ es cadena de } P\}$. $L[x, y]$ abreviará la longitud del subCOPO $[x, y]$.

c. Decimos que P tiene **altura** n (denotada $A(P)$) si toda cadena maximal de P tiene altura n. En este caso existe una única función (llamada **función rango**) $\rho : P \to \{0, \ldots, n\}$ tal que

$\rho(x) = 0 \quad$ si x es un elemento minimal de P

$\rho(y) = \rho(x) + 1 \quad$ si y cubre a x en P

Afirmación 2. *ρ está bien definida.*

Demostración. Sea $x \in P$ tal que $(x = a_l) > \cdots > a_0$, con a_0 elemento minimal de P y a_i cubre a a_{i-1} para toda $i \in \{1, \ldots, l\}$ y $(x = b_k) > \cdots > b_0$, donde b_0 es elemento minimal de P y b_j cubre a b_{j-1} para toda $j \in \{1, \ldots, k\}$. Sea c_1 un elemento de P que cubre x (en caso que haya), sea c_2 uno que cubre a c_1 (en caso que haya), etc.; este proceso termina en un elemento maximal de P, digamos en c_r. Como P es localmente finito tenemos (por la afirmación 1) que las cadenas $a_0 < \cdots < x < c_1 < \cdots < c_r$ y $b_0 < \cdots < x < c_1 < \cdots < c_r$ son saturadas (y por construcción también son maximales), por tanto tienen altura n y entonces $k = l$, es decir podemos construir una función $f : P \to \{0, \ldots, n\}$ tal que $f(x) =$ número de elementos, de cualquier cadena saturada que tenga a x, que son estrictamente menores que x; claro cualquier otra función que tenga mismos dominio, contradominio y tome los mismos valores que f, tiene que ser igual a f, por ejemplo, ρ es una asignación con mismos dominio y contradominio que f tal que, para toda x en P, $\rho(x) = f(x)$ (esto último se puede comprobar por inducción). Por tanto ρ es una función igual a f. Por tanto ρ es única tal que, para toda x en P, $\rho(x) =$ número de elementos, de cualquier cadena saturada que tenga a x, que son estrictamente menores que x. □

Observaciones:

a. Si P es un COPO finito tal que hay una función $\rho : P \to \mathbb{N}$ tal que, para toda x en P, $\rho(x)$ = número de elementos, de cualquier cadena saturada que tenga a x, que son estrictamente menores que x, entonces no necesariamente P tiene definida $A(P)$.

b. Si P tiene definida $A(P)$ entonces $A(P) = L(P)$.

Podemos mostrar que si P es finito y tiene definida $A(P)$ entonces cualquiera de sus intervalos también. Esto muestra que si $x, y \in P$ con $x \leq y$, entonces $L[x, y] = \rho(x) - \rho(y)$.

Si $\rho(x) = m$ entonces diremos que x tiene **rango** m.

Ejemplos:

P	rango de $x \in P$	altura de P
$\mathbf{n}$	$x - 1$	$n - 1$
B_n	$\lvert x\rvert$	n
D_n	número de divisores primos de x (contando multiplicidad)	número de divisores primos de n
Π_n	$n - \lvert x\rvert$	$n - 1$
$L_n(q)$	dimensión de x	n

Concluimos con una definicion más: si P tiene altura n, definimos el **nivel i-ésimo** N_i como $N_i = \{x \in P | \rho(x) = i\}$.

1.4. Construcción de COPOs a partir de otros

Sean $(P, \leq_P), (Q, \leq_Q)$ COPOS con $P \cap Q = \emptyset$. Definimos:

a. la **suma directa** de P y Q como $P + Q = (P \cup Q, \leq)$ donde para todas $x, y \in P?cupQ$ $x \leq y$ si y sólo si $(x, y \in P$ y $x \leq_P y)$ o $(x, y \in Q$ y $x \leq_Q y)$

b. La **suma ordinal** de P y Q como $P * Q = (P \cup Q, \leq)$ donde para todas $x, y \in P \cup Q$ $x \leq y$ si y sólo si $(x, y \in P$ y $x \leq_P y)$ o $(x, y \in Q$ y $x \leq_Q y)$ o $(x \in P$ y $y \in Q)$

Observamos que el orden en que aparecen los términos en la suma ordinal si importa, mientras que en la suma directa no.

Sean $(P, \leq_P), (Q, \leq_Q)$ COPOs. Definimos:

a. El **producto directo** de P y Q, denotado, al igual que el producto cartesiano de P y Q, $P \times Q$, consiste de los pares ordenados (x, y), donde $(x, y) \leq (x', y')$ si y sólo si $x \leq_P x'$ y $y \leq_Q y'$.

b. El **producto ordinal** de P y Q, denotado $P \otimes Q$, consiste de los pares ordenados (x, y), donde $(x, y) \leq (x', y')$ si y sólo si $(x = x'$ y $y \leq_Q y')$ o $(x <_Q x')$.

1.5. COPOs con acción de grupos

Emplearemos las notaciones y términos siguientes para: G un grupo que actúa en un conjunto X, $H, K \subseteq G$, $g \in G$, $A \subseteq X$ y $x \in X$.

$H \leq G$ si H es **subgrupo** de G

HA denota al conjunto $\{ha | h \in H, a \in A\}$

A es un **conjunto invariante** en X respecto a la acción del subgrupo H de G si $HA = A$. Cuando no haya confusión, usaremos el término "conjunto invariante" omitiendo la frase "respecto a la acción de H en X". Si $A = \{a\}$ o $H = \{h\}$, notaremos a HA respectivamente Ha o hA.

Gx es la **órbita** de x

G/X es el **conjunto de órbitas**

G_A $G_A = \{g \in G | gA = A\}$ es el **estabilizador** del conjunto A

$[H]$ la **clase de conjugación** de H

G_x $G_x = \{g \in G | gx = x\}$ es el **grupo de isotropía** de x

X^G es el **conjunto de puntos fijos**

Un COPO P en el cual actúa un grupo G es un **G-COPO** si la acción preserva el orden es decir $x \leq y$, $g \in G$ implica $gx \leq gy$; en este mismo caso si A es un subconjunto invariante de P, diremos que A es un **G-subCOPO** de P. Ejemplo: en caso que el grupo de isotropía G_x sea igual a G (por tanto x es un punto fijo) tenemos que $P_{\leq x}$, $P_{\geq x}$, $P_{<x}$ y $P_{>x}$ son G-subCOPOs. Si P y Q son G-COPOs y $f : P \to Q$ es una función, diremos que f es un **morfismo (de G-COPOs)** entre ellos si f preserva el órden.

Sean P,Q G-COPOs. Estableciendo que $g(p, q) = (gp, gq)$ para toda $g \in G$ y toda $(p, q) \in P \times Q$, dotamos al producto directo con estructura de G-COPO. Si la unión $P \cup Q$ es disjunta y ϕ, θ son acciones respectivamente en P y Q, consideradas como conjuntos, su unión $\phi \cup \theta$ es ajena y por tanto dota a la suma ordinal $P * Q$ con estructura de G-COPO. Tres ejemplos importantes de esta última construcción son el **cono** CP de P definido como $\{\hat{0}\} * P$, la **suspensión** ΣP definida como $\{\hat{0}, \hat{0}'\} * P$, donde $\hat{0} \perp \hat{0}'$ y G actúa trivialmente en $\{\hat{0}, \hat{0}'\}$, y por último $\widehat{\mathbf{P}} = \{\hat{0}\} * P * \{\hat{1}\}$.

Dados $x \in P$ y $A \subseteq P$, diremos que x es una **cota superior** de A si $a \leq x$ para cada $a \in A$. Si S denota al conjunto de cotas superiores de A y hay $x \in S$ tal que para toda $y \in S$ se cumple $x \leq y$, entonces se puede probar que x es único con tal propiedad, (entonces) distinguimos a x con el nombre de **supremo** de A y lo notamos $\bigvee \mathbf{A}$. Si existe $\bigvee A$, decimos que A está **acotado superiormente** en P. Análogamente definimos: **cota inferior** de A, **ínfimo** de A, denotado $\bigwedge \mathbf{A}$. Si existe $\bigwedge A$ decimos que A está **acotado inferiormente** en P. Ahora que si existe $\bigvee A$ y existe $\bigwedge A$ simplemente diremos que A está **acotado** en P. Si todo subconjunto finito de P está acotado inferiormente y superiormente en P, a P se le distingue con el nombre de **retícula**. Si P es una retícula con elementos $\hat{0}$ y $\hat{1}$, entonces la llamamos **retícula acotada**; en este caso al conjunto $P \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$, se le llama la **parte propia** de la retícula.

1.6. Complejos simpliciales

Definición 1. *Sea V un conjunto no vacío y $K \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$. A K se le llama **complejo simplicial** de V si:*

***1.-** S es finito y no vacío, para cada $S \in K$;*

***2.-** $\mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\} \subseteq K$ para cada $S \in K$.*

*Un **subcomplejo** de K es un subconjunto de K que es él mismo un complejo simplicial. A los elementos de K se les llama **simplejos**. Si S,$S' \in K$ y $S' \subseteq S$, a S' le llamamos una **cara** de S. A V se le llama el **conjunto de vértices** de K.*

Definición 2. *Sean K y L complejos simpliciales. Un morfismo (**función simplicial**) $\varphi : K \to L$ está determinado por una función (denotada igual) $\varphi : V_K \to V_L$ tal que si $\{v_0, ..., v_q\} \in K$ entonces $\{\varphi(v_0), ..., \varphi(v_q)\} \in L$*

Así, tenemos la categoría **SimplicialComplex** cuyos objetos son los complejos simpliciales y cuyos morfismos son las funciones simpliciales.

Definición 3. *Sea K un complejo simplicial y $S \in K$. Definimos la **dimensión** de S como $dim\, \sigma = cardinal(S) - 1$ y, si K es finito, la **dimensión** de K como $dim\, K =$máx$\{dimS | S \in K\}$*

Existe un funtor K : **Poset** $\to$ **SimplicialComplex** definido de la siguiente manera: si P es un COPO no vacío, entonces $K(P) = \{C | C$ es cadena finita no vacía en $P\}$; $K(P)$ cumple los requisitos para ser un complejo simplicial, cuyo conjunto de vértices es P.

Sea Θ una acción (izquierda) del grupo G en el conjunto V. Sabemos que para cada $g \in G$ la función $\Theta_g : V \to V$ tal que $\Theta_g(x) = gx$ para cada $x \in V$, es una biyección. Si $K \subseteq \mathcal{P}(V)$ es un complejo simplicial y se cumple que para cada $g \in G$ la biyección $\Theta_g : K \to K$ es simplicial, equivalentemente $\Theta_g \in$Aut(K) para cada $g \in G$, entonces decimos que G **actúa simplicialmente** en K o también que K es un **G-complejo simplicial**, si además para cada $S \in K$, el estabilizador G_S actúa trivialmente en S, entonces distinguiremos al G-complejo simplicial K con el adjetivo "**admisible**". No todo G complejo simplicial es admisible pero veremos en el lema 2 que si P es un G-COPO no vacío cualquiera, entonces $K(P)$ es un G-complejo simplicial admisible.

Sea $A \subseteq P$ (P un G-COPO). Denotamos $P(A)$ al conjunto $\{x \in P | x$ es comparable con todo elemento de $A\}$; si $P(A) \neq \emptyset$ entonces decimos que A es **astral**. Dado $C \subseteq P$, denotamos $\Gamma(P, C)$ al complejo simplicial cuyos elementos son los subconjuntos finitos de C que son astrales y no vacíos. Observamos que si C es invariante entonces queda definida una acción sobre $\Gamma(P, C)$, es decir $\Gamma(P, C)$ es un G-complejo simplicial, razón: si $A \in \Gamma(P, C)$ entonces $gA \in \Gamma(P, C)$ para cada $g \in G$ ya que: A finito implica que gA es finito, C invariante implica $gA \subseteq C$ y $x \in P(A)$ implica que $gx \in P(A)$.

Si P es un G-COPO, el hecho de que $\Theta_g \in$Aut(P) para cada $g \in G$, tiene consecuencias como las que veremos a continuación.

Afirmación 3. *Sea $A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq P$ tal que existe $\bigvee A$ (de hecho $(\bigvee A) = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$). Entonces*

$$g(\bigvee A) = (\bigvee gA)$$

es decir $g(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) = gx_1 \vee gx_2 \vee \ldots \vee gx_n$

Demostración. Como A está acotado superiormente, gA también lo está. Sea $b \in P$ tal que $gx_i \leq b$ para toda i, luego $x_i \leq g^{-1}b$ para toda i, por tanto $\bigvee A \leq g^{-1}b$ para toda i, luego $g(\bigvee A) \leq b$; como además, $x_i \leq \bigvee A$ para toda i implica $gx_i \leq g(\bigvee A)$ para toda i, es decir $g(\bigvee A)$ es la menor de las cotas superiores de gA. $\square$

Si además A es invariante, tenemos

$$g(\bigvee A) = gx_1 \vee gx_2 \vee \ldots \vee gx_n = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n = \bigvee A$$

dado que Θ_g permuta al conjunto A y la operación "$\vee$" es conmutativa. Esto es $\bigvee A$ es punto fijo. Gracias a la dualidad entre "$\vee$" y "$\wedge$", las afirmaciones duales, respecto a "$\wedge$", correspondientes, son verdaderas.

Sean P una retícula acotada, $x, a \in P$ tales que $x \wedge a = \hat{0}$, $x \vee a = \hat{1}$; entonces decimos que x es **complemento** de a; sea a un elemento fijo de P, al conjunto formado por los complementos de a lo denotamos $\mathbf{a}^{\perp}$, y en caso que todo elemento de P tenga complemento, a P lo llamaremos **retícula complementada**.

Aclaramos que en la prueba de la siguiente afirmación nos apoyamos en la tautología "$(\neg\alpha \longrightarrow \alpha) \longrightarrow \alpha$"

Afirmación 4. *Sean P **G-retícula** (P es G-COPO y también retícula) acotada, $a \in P$ punto fijo; entonces $a^{\perp}$ es G-invariante.*

Demostración. Si $x \in a^{\perp}$ tenemos $gx \vee a = g(x \vee a) = g(\hat{1}) = \hat{1}$ la última igualdad es por que $g(\hat{1}) < \hat{1}$ (esta desigualdad es la negación de $g(\hat{1}) = \hat{1}$ debido a la tricotomía y a la definición de $\hat{1}$) implica $\hat{1} \leq g^{-1}(\hat{1})$, luego $\hat{1} = g^{-1}(\hat{1})$ por tanto $g(\hat{1}) = \hat{1}$; concluimos que $g(\hat{1}) = \hat{1}$. Por dualidad, tenemos también que $gx \wedge a = \hat{0}$, lo cual completa la prueba de la afirmación. $\square$

Afirmación 5. *Otros subconjuntos de P que son invariantes, son el conjunto de elementos minimales (y por dualidad también el de los maximales) y si P tiene altura n para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces cualquiera de los niveles N_i.*

Demostración. La segunda parte de esta afirmación está implicada por su primera, pues N_0 es el conjunto de elementos minimales de P, N_1 el de $P \setminus N_0$ y así sucesivamente. Ahora para la primera parte, sean M el conjunto de elementos minimales de P, $x \in M$, $g \in G$ y $z \in P$. Si $z \perp gx$, entonces no es cierto que $z < gx$; y si z es comparable con x, como $z < gx$ implica $gx \leq z$, concluimos que $gx \leq z$. Por tanto no puede haber un elemento $z \in P$ tal que $z < gx$, y entonces M es invariante. $\square$

Definición 4. *El **órden del grupo** G, denotado por $|\mathbf{G}|$, es el cardinal del conjunto subyacente G. Si $g \in G$, el **órden (del elemento)** g es el órden del grupo $\langle g \rangle$ y se denota $\boldsymbol{o}(\mathbf{g})$.*

Afirmación 6. *Si g es un elemento de orden finito de G entonces $x = gx$ para cada $x \in P$ G-COPO, tal que x es comparable a gx.*

Demostración. Si $o(g) = 1$ ent $g = e$ y por tanto $x = gx$ para cada $x \in P$ dado que G actúa en P.

Caso $o(g) > 1$. Veamos que $x \neq gx$ implica $x = gx$. Si $x < gx$ entonces $gx \leq g^2x \leq \ldots \leq g^{o(g)}x = x$; ahora $x \geq gx$ implica $x \geq gx \geq g^2x \ldots \geq g^{o(g)}x = x$ entonces por antisimetría concluimos que $x = gx$. En resumen $x < gx$ implica que $x = gx$. Procediendo en forma similar tenemos que $x > gx$ implica que $x = gx$. □

Esta afirmación tiene como consecuencia la siguiente:

Afirmación 7. *Si G es grupo finito y P es un G-COPO, entonces cada G órbita es una anticadena.*

Demostración. Sea Gx una de tales órbitas y $g \in G$ tal que $gx \neq x$, entonces por la afirmación anterior, no puede ser que x y gx sean comparables. □

Procediendo en forma similar, veríamos que la siguiente afirmación es verdadera.

Afirmación 8. *Si G es un grupo, P es un G-COPO y P es finito, entonces cada G-órbita es una anticadena.*

Emplearemos las notaciones y términos siguientes para: X y Y espacios topológicos, $f, g : X \to Y$ funciones continuas.

$X \cong Y$	X **es homeomorfo a** Y
$X \equiv Y$	X **tiene el mismo tipo de homotopía** que Y
$f \cong g$	f **es homotópica a** g

Existe un funtor $|.|$:**SimplicialComplex**$\to$**Top** llamado realización geométrica que se construye de la siguiente manera: Sea K un complejo simplicial. Se define

$$|\mathbf{K}| = \{\alpha : V_K \to I| \quad \text{i)} \quad \alpha^{-1}(0,1] \in K, \qquad \text{ii)} \quad \sum_{v \in V_K} \alpha(v) = 1\}$$

donde α es función e $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Observación: la suma en ii) es finita por el inciso i). Ahora a $|K|$ le vamos a dar dos topologías; la primera es la topología generada por la métrica

$$d : |K| \times |K| \to \mathbb{R} \qquad \text{tal que} \qquad d(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\alpha(v) - \beta(v))^2} \tag{1.1}$$

A este espacio topológico lo denotaremos $|K|_d$. La segunda topología la construiremos apartir de la anterior: Sea $S \in K$. Se define $|\mathbf{S}| = \{\alpha \in K|\alpha^{-1}(0,1] \subseteq S\}$. Dotamos a $|S|$ con la topología inducida por la métrica definida en (1.1) restringida a $|S|$ y a este espacio lo denotamos $|S|_d$. Finalmente dotamos a $|K|$ con la **topología coherente** (a este espacio también lo denotamos $|K|$) en la cual $F \subseteq |K|$ es cerrado en $|K|$ si y sólo si $F \cap |S|$ es cerrado en $|S|_d$ para cada $S \in K$; se obtiene una definición equivalente al sustituir "cerrado"por "abierto".

La topología coherente tiene la siguiente propiedad:

Proposición 1. *Sea $\mathcal{A}$ una familia de espacios topológicos que también son subconjuntos del espacio topológico X. Si X tiene la topología coherente respecto a la familia $\mathcal{A}$ y $f : X \to Y$ es una función, entonces $f : X \to Y$ es continua si y sólo si $f|_a : a \to Y$ es continua para cada $a \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Suficiencia: Sea F cerrado en Y; por tanto $f^{-1}[F] \cap a = (f|_a)^{-1}[F]$ es cerrado en a para cada $a \in \mathcal{A}$, pero esto si y sólo si $f^{-1}[F]$ es cerrado en X. Por tanto f es continua. Necesidad: Sea F cerrado en Y; por tanto $f^{-1}[F]$ es cerrado en X, pero esto si y sólo si $(f|_a)^{-1}[F] = f^{-1}[F] \cap a$ es cerrado en a para cada $a \in \mathcal{A}$. □

Proposición 2. *Si $\varphi : K \to L$ es una función simplicial, entonces φ induce una función continua $|\varphi| : |K| \to |L|$*

Demostración. Sea $\alpha \in |K|$, por tanto $\alpha^{-1}(0, 1] = \{v_0, \ldots, v_q\} \in K$ y $\sum_{i=0}^{q} \alpha(v_i) = 1$ con $\alpha(v) = 0$ para toda $v \in V_K \setminus \{v_0, \ldots, v_q\}$. Denotemos T a $\{v_0, \ldots, v_q\}$ y reetiquetémoslo de la siguiente manera $\{v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1q(1)}, v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2q(2)}, \ldots, v_{p1}, v_{p2}, \ldots, v_{pq(p)}\}$ donde $\varphi(v_{ij}) = \varphi(v_{kl})$ si y sólo si $i = k$; así $\varphi[T] = \{\varphi(v_{11}), \varphi(v_{21}), \ldots, \varphi(v_{p1})\}$ y no tiene elementos repetidos.

Definamos $|\varphi|(\alpha) : V_L \to I$ de la siguiente manera $|\varphi|(\alpha)(\varphi(v_{i1})) = \sum_{j=1}^{q(i)} \alpha(v_{ij})$ para cada $i \in \{1, \ldots, p\}$ y $|\varphi|(\alpha)(v) = 0$ para cada $v \in V_L \setminus \varphi[T]$. Observación: podría haber $v \in V_K \setminus T$ tales que $\varphi(v) = \varphi(v_{ij})$ para alguna v_{ij}, pero para tal v sabemos que $\alpha(v) = 0$. Por construcción $|\varphi|(\alpha) \in |\varphi[T]|$, y entonces hemos bien definido una función $|\varphi| : |K| \to |L|$.

Usaremos la proposición 1 para ver que $|\varphi|$ es continua. Sean d, d' las métricas respectivas para $|K|$ y $|L|$ definidas en (1.1). Sea $S = \{w_0, \ldots, w_n\}$ un simplejo cualquiera de K. Veamos que $|\varphi||_{|S|} : |S|_d \to |L|$ es continua. Sea $\beta \in |S|$ y A un abierto de $|L|$ tal que $|\varphi|(\beta) \in A \cap |\varphi[S]|$. Como $A \cap |\varphi[S]|$ es abierto en $|\varphi[S]|_{d'}$, existe $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_R^{d'}(|\varphi|(\beta)) \cap |\varphi[S]| \subseteq A \cap |\varphi[S]|$; probaremos que existe $r > 0$ tal que $|\varphi||_{|S|}[B_r^d(\beta)] \subseteq B_R^{d'}(|\varphi|(\beta)) \cap |\varphi[S]|$. Reetiquetemos a S así $\{w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1n(1)}, w_{21}, w_{22}, \ldots, w_{2n(2)}, \ldots, w_{t1}, w_{t2}, \ldots, w_{tn(t)}\}$ donde $\varphi(w_{ij}) = \varphi(w_{kl})$ si y sólo si $i = k$; así $\varphi[S] = \{\varphi(w_{11}), \varphi(w_{21}), \ldots, \varphi(w_{t1})\}$ y no tiene elementos repetidos. Sea $\gamma \in |S|$, entonces

$$d(\beta, \gamma) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n(1)} (\beta(w_{1j}) - \gamma(w_{1j}))^2 + \ldots + \sum_{j=1}^{n(t)} (\beta(w_{tj}) - \gamma(w_{tj}))^2}$$

Consideremos $(\beta(w_{i1}), \ldots, \beta(w_{in(i)})), (\gamma(w_{i1}), \ldots, \gamma(w_{in(i)})) \in \mathbb{R}^{n(i)}$; como la función suma $+ : \mathbb{R}^{n(i)} \to \mathbb{R}$ (suma de las coordenadas) es continua, para $R/\sqrt{t}$ existe $r_i > 0$ tal que si $\sqrt{\sum_{j=1}^{n(i)} (\beta(w_{ij}) - \gamma(w_{ij}))^2} < r_i$, entonces $\sqrt{(\sum_{j=1}^{n(i)} \beta(w_{ij}) - \sum_{j=1}^{n(i)} \gamma(w_{ij}))^2} < R/\sqrt{t}$

y por tanto $(\sum_{j=1}^{n(i)} \beta(w_{ij}) - \sum_{j=1}^{n(i)} \gamma(w_{ij}))^2 < R^2/t$. Sea $r = \text{mín}\{r_1, \ldots, r_t\}$, entonces si $d(\beta,\gamma) < r$ se cumple $\sqrt{\sum_{j=1}^{n(i)}(\beta(w_{ij}) - \gamma(w_{ij}))^2} < r$ para cada $i \in \{1, \ldots, t\}$ (razón $\sqrt{\sum_{j=1}^{n(i)}(\beta(w_{ij}) - \gamma(w_{ij}))^2} \leq d(\beta,\gamma)$ para cada $i \in \{1, \ldots, t\}$) por lo tanto

$$d'(|\varphi|(\beta), |\varphi|(\gamma)) = \sqrt{(\sum_{j=1}^{n(1)} \beta(w_{1j}) - \gamma(w_{1j}))^2 + \ldots + (\sum_{j=1}^{n(t)} \beta(w_{tj}) - \gamma(w_{tj}))^2} <$$

$$< \sqrt{\underbrace{R^2/t + \cdots + R^2/t}_{t}} = R$$

□

Proposición 3. *Si* $S = \{v_0, \ldots, v_q\} \in K$ *entonces* $|S|_d \cong \Delta^q$, *donde* $\Delta^q = \{(\lambda_0, \ldots, \lambda_q) \in \mathbb{R}^{q+1} | \lambda_i \geq 0 \ , \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1\}$

Demostración. Sea $f : |S|_d \to \Delta^q$ tal que si $\alpha \in S$ entonces $f(\alpha) = (\alpha(v_0), ..., \alpha(v_q))$. Ahora sea $g : \Delta^q \to |S|_d$ tal que para todo $(\lambda_0, ..., \lambda_q) \in \Delta^q$ $g(\lambda_0, ..., \lambda_q) = \alpha$, donde $\alpha : V \to I$ es tal que $\alpha(v_i) = \lambda_i$ para toda $i = 0, ..., q$ y $\alpha(v) = 0$ para toda $v \in V \setminus S$. La función g está bien definida pues $\sum_{v \in V_K} \alpha(v) = \sum_{v \in S} \alpha(v) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1$ y $\alpha^{-1}(0, 1] \subseteq S$. Esta g cumple $g \circ f = 1_{|S|_d}$ y $f \circ g = 1_{\Delta^q}$. Como además f es una isometría, tenemos que f es un homeomorfismo entre $|S|_d$ y Δ^q □

Capítulo 2

Teoremas sobre homotopía de COPOs

2.1. Conceptos básicos

Denotaremos a la relación de isomorfismo estre dos grupos H y K por $H \cong K$.

Definición 5. *Si p es un número primo, entonces un* ***p-grupo elementalmente abeliano****, es un grupo finito G isomorfo a $\mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p$*

Si P es un G-COPO definimos una relación de orden en el conjunto de órbitas $\mathbf{P/G}$ que induce G en P declarando: órbita(x) $\leq$órbita(y) si hay $g \in G$ tal que $gx \leq y$

El orden parcial de un COPO X induce una partición del conjunto X en clases de equivalencia, a cada clase la llamaremos **componente conexa** de X, dos elementos pertenecen a la misma clase si y sólo si hay una cadena en X tal que uno, de los tales dos elementos, es elemento mínimo de la cadena y el otro es elemento máximo de la cadena. Denotamos $\pi_0 X$ al conjunto de componentes conexas del COPO X, tales componentes están en correspondencia uno a uno con las componentes conexas del complejo simplicial (cardinal$(\pi_0 X)$ =cardinal$(\pi_0|X|)$).

Un espacio topológico X sobre el cual actúa un grupo G, es distiguido con el adjetivo **G-espacio topológico**. Usaremos la abreviación "X es G-espacio" cuando en el contexto no haya confusión posible.

Supongamos que G actúa en los espacios topológicos X y Y. Se dice que una función continua $\phi : X \to Y$ es **equivariante** cuando $\phi(gx) = g\phi(x)$ para toda $x \in X$ y toda $g \in G$.

Si X y Y son G-espacios, una **G-homotopía** de X a Y es una función continua $H : X \times [0,1] \to Y$ que cumple $H(gx,t) = gH(x,t)$ para toda $g \in G$, toda $x \in X$ y toda $t \in [0,1]$; en caso que exista una G-homotopía tal, diremos que X y Y son **G-homotópicos**. Dos funciones continuas equivariantes $\phi, \psi : X \to Y$ son **G-homotópicas** si existe una G-homotopía de X a Y tal que $H(x,0) = \phi(x)$ y $H(x,1) = \psi(x)$ para toda $x \in X$. Diremos que dos G-COPOs P y Q son **G-homotópicos** si las respectivas realizaciones geométricas $|K(P)|$ y $|K(Q)|$ lo son. Usando estas definiciones podemos hablar, por ejemplo, de una G-equivalencia homotópica entre dos COPOs, de que P es G-contraible si P es G-homotópicamente equivalente a un punto, etc.

2.2. El teorema de la fibra de Quillen y sus consecuencias

Hagamos la siguiente convención: Si X es un COPO entonces $|X|$ denotará al complejo simplicial $K(X)$ o denotará a la realización geométrica $|K(X)|$ de dicho complejo; en lo siguiente, distinguiremos a quién denota según el contexto.

Sean X, Y COPOs y $X \times Y$ su producto directo; las proyecciones naturales $p_1 : X \times Y \to X$ y $p_2 : X \times Y \to Y$ al ser morfismos de COPOs, inducen las funciones continuas $|p_1| : |X \times Y| \to |X|$ y $|p_2| : |X \times Y| \to |Y|$, las cuales, por la propiedad universal del producto, inducen una función continua $|X \times Y| \to |X| \times |Y|$, la cual en este caso resulta además homeomorfismo:

$$|X \times Y| \cong |X| \times |Y| \tag{2.1}$$

donde $|X \times Y|$ tiene la topología coherente, y por tanto $|X| \times |Y|$ pertenece a la categoría de los espacios compactamente generados.

Proposición 4. *(Propiedad de homotopía) Si $f, g : X \to Y$ son morfismos de COPOs tal que $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in X$, entonces $|f| \cong |g|$.*

Demostración. Dotemos al conjunto $Z = \{0, 1\}$ con el órden parcial $\{(0,0), (0,1), (1,1)\}$, de esta manera $|Z| = I$. Ahora definamos un morfismo de COPOs φ del producto directo $Z \times X$ a Y así: $\varphi(0, x) = f(x)$ y $\varphi(1, x) = g(x)$ para cada $x \in X$. Al ser f, g morfismos covariantes, también lo es φ, pues si $(a, x) \leq (b, z)$ entonces $a \leq b$ y $x \leq z$. Si $a = b$ entonces ($\varphi(a, x) = f(x)$ y $\varphi(b, z) = f(z)$) o ($\varphi(a, x) = g(x)$ y $\varphi(b, z) = g(z)$); en cualquiera de los dos casos se cumpe $\varphi(a, x) \leq \varphi(b, z)$. Si $a < b$ pero $x = z$ entonces $\varphi(a, x) = f(x) \leq g(x) = \varphi(b, x)$. Si $a < b$ pero $x < z$ entonces $\varphi(a, x) = f(x) \leq f(z) \leq g(z) = \varphi(b, z)$. Entonces la afirmación se sigue de la siguiente composición $I \times |X| \cong |Z \times X| \xrightarrow[|\varphi|]{} |Y|$. □

Dado $f : X \to Y$ morfismo de COPOs y $y \in Y$ definimos

$$f/y = \{x \in X | f(x) \leq y\}$$

$$y/f = \{x \in X | f(x) \geq y\}$$

Observamos que $f/y = f^{-1}[Y_{\leq y}]$ y que $y/f = f^{-1}[Y_{\geq y}]$.

Teorema 1. *(Teorema de la fibra de Quillen. Ver [1], pág. 1849) Si f/y es contraible para toda $y \in Y$ (respectivamente y/f es contraible para toda $y \in Y$), entonces f es una equivalencia homotópica.*

Sea X un COPO y $S \subseteq X$ diremos que S es **cerrado** si cada vez que $a \leq b$ y $b \in S$, se cumple que $a \in S$. Denotemos $\mathbf{Cl(X)}$ al COPO $\langle\{S \subseteq X | S \text{ es cerrado }\}, \subseteq\rangle$. Sean X, Y

COPOs, $Z \in Cl(X \times Y)$, $P_1 : Z \to X$, $P_2 : Z \to Y$ las restricciones de las proyecciones canónicas; dado $x \in X$, la fibra $P_1^{-1}[\{x\}]$ puede identificarse con el subconjunto
$Z_x = \{y \in Y | (x, y) \in Z\}$.

Afirmación 9. *Para cada $x \in X$, Z_x es cerrado.*

Demostración. Sean $y, w \in Y$ con $y \in Z_x$ y $w \leq y$; estas hipótesis implican: $(x, w) \in X \times Y$ y $(x, w) \leq (x, y)$. Por tanto $(x, w) \in Z$ (pues Z es cerrado). Por tanto Z_x es cerrado ya que w cumple la condición para estar en Z_x. □

Afirmación 10. *$x \to Z_x$ es un morfismo contravariante de $X \to CL(Y)$.*

Demostración. Sean $w, x \in X$ con $x \leq w$. Sea $y \in Z_w$ ($(w, y) \in Z$), ahora $(x, y) \leq (w, y)$ y $(w, y) \in Z$ implican $(x, y) \in Z$, por tanto $y \in Z_x$. De lo anterior concluimos $Z_w \subseteq Z_x$. □

Por tanto cada subconjunto cerrado de $X \times Y$ induce un morfismo contravariante de $X \to CL(Y)$. Recíprocamente sea $f : X \to Cl(Y)$ un morfismo contravariante:

Afirmación 11. *$Z = \{(x, y) | x \in X, y \in f(x)\}$ es un subconjunto cerrado de $X \times Y$.*

Demostración. Sean $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ con $(x', y') \in Z$ y $(x, y) \leq (x', y')$. Tenemos $y \leq y'$ y $y' \in f(x')$ (el cual es cerrado y por tanto $y \in f(x')$); también tenemos $x \leq x'$ (por tanto $f(x') \subseteq f(x)$, al ser f contravariante). Concluimos que $y \in f(x)$, es decir $(x, y) \in Z$. Es más directamente de las definiciones se comprueba que $f(x) = Z_x$. □

Análogamente se prueba que cada subconjunto cerrado de $X \times Y$ determina y es determinado por un morfismo contravariante de Y a $Cl(X)$.

Proposición 5. *Si Z_x es contraible para cada $x \in X$, entonces $P_1 : Z \to X$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Sabemos que $x/P_1 = \{(w, y) \in Z | P_1(w, y) \geq x\}$. Sea $f : Z_x \to x/P_1$ definida como $f(y) = (x, y)$. Ahora $P_2 \circ f(y) = y$ para cada $y \in Z_x$, por tanto $|P_2 \circ f| = |1_{Z_x}| = 1_{|Z_x|}$; como además $f \circ P_2(w, y) = (x, y) \leq (w, y)$ para cada $(w, y) \in x/P_1$ implica $|f \circ P_2| \cong |1_{x/P_1}| = 1_{|x/P_1|}$, concluimos $|Z_x| \simeq |x/P_1|$. Por tanto x/P_1 es contraible, pues por hipótesis Z_x lo es; así por el teorema 1 concluimos que $P_1 : Z \to X$ es una equivalencia homotópica. □

Corolario 1. *Si Z_x y Z_y son contraibles para toda x en X y toda y en Y, entonces X y Y tienen el mismo tipo de homotopía.*

Demostración. Pues en esta situación X y Y tienen el mismo tipo de homotopía que Z. □

Definición 6. *Dado un grupo G y p un número primo, denotamos a los siguientes COPOs de subconjuntos de G, en los que la relación de orden es la inclusión, de la siguiente manera: $\mathcal{S}_{\mathbf{p}}(\mathbf{G}) = \{H \leq G | p^i = |H|, i > 0\}$, $\mathcal{A}_{\mathbf{p}}(\mathbf{G}) = \{H \in \mathcal{S}_p(G) | H$ es elementalmente abeliano $\}$.*

Proposición 6. *Sea G un grupo finito y p un primo que divide al orden de G. Entonces la inclusión $\mathcal{A}_p(G) \xrightarrow{i} \mathcal{S}_p(G)$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Tenemos que $i/P = \mathcal{A}_p(P)$ para cualquier $P \in \mathcal{S}_p(G)$, entonces, basta probar el siguiente $\square$

Lema 1. *Si P es un p-grupo no trivial y finito, entonces $\mathcal{A}_p(P)$ es contraible.*

Demostración. Sabemos que el centro Z de P es no trivial, por tanto hay $g \in Z \setminus 1$ tal que $|\langle g\rangle| = p$; tenemos que $\langle g\rangle \trianglelefteq P$ (pues $\langle g\rangle \leq Z$) y por tanto para cualquier subgrupo H de P se cumple $H\langle g\rangle \leq P$; es más $H\langle g\rangle$ es isomorfo a $H \times \langle g\rangle$ si $H \cap \langle g\rangle = 1$, y si $H \cap \langle g\rangle > 1$ entonces $H\langle g\rangle = H$. De esta manera, si $H \in \mathcal{A}_p(P)$ entonces se cumple que $H\langle g\rangle \in \mathcal{A}_p(P)$, y la función $\mathcal{A}_p(P) \xrightarrow{f} \mathcal{A}_p(P)$ tal que $f(H) = H\langle g\rangle$ está bien definida. Ahora como $H\langle g\rangle \geq H, \langle g\rangle$ para toda H, entonces $f(H) \geq H$ para toda H, por tanto $|f| \cong |1_{\mathcal{A}_p(P)}| = 1_{|\mathcal{A}_p(P)|}$ y finalmente $f(H) \geq \langle g\rangle$ para toda H nos dice que $|f|$ es homotópica a la función constante $|c|$ donde $c : \mathcal{A}_p(P) \to \mathcal{A}_p(P)$ es la función con valor constante $\langle g\rangle$ y por tanto $|c|$ es la función con valor constante la cadena $\{\langle g\rangle\}$. Concluimos que $\mathcal{A}_p(P)$ es contraible. $\square$

La prueba del lema nos sugiere la siguiente generalización:

Proposición 7. *Si G es un grupo finito y contiene un p-subgrupo normal no trivial, entonces $\mathcal{A}_p(G)$ es contraible.*

Demostración. Por la proposición 6 basta probar que, en este caso, $\mathcal{S}_p(G)$ es contraible. Sea C tal p-subgrupo normal no trivial y $H \in \mathcal{S}_p(G)$ uno cualquiera, sabemos que $HC \leq G$ (pues $C \trianglelefteq G$) y que $|HC| = \frac{|H||C|}{|H \cap C|}$ (esta igualdad muestra que $|HC|$ es una potencia de p), por tanto HC es un p subgrupo de G; así la siguiente función $\mathcal{S}_p(G) \xrightarrow{f} \mathcal{S}_p(G)$ tal que $f(H) = HC$ está bien definida, y cumple $f(H) \geq H, C$, por tanto $|f| \cong |1_{\mathcal{S}_p(G)}| = 1_{|\mathcal{S}_p(G)|}$ y $|f|$ es homotópica a la constante con valor $|k|$ donde $k : \mathcal{S}_p(G) \to \mathcal{S}_p(G)$ es la constante con valor C. $\square$

Quillen plantea como un problema interesante, saber si el recíproco de la proposición anterior es decidible, también nos muestra que para G finito hay evidencia de la siguiente

Conjetura 1. *Si G es finito y $\mathcal{A}_p(G)$ es contraible, entonces G contiene un p-subgrupo normal no trivial.*

Sea G un grupo finito, denotamos $\mathbf{\mathcal{O}_p(G)}$ al mayor (en cardinal) p-subgrupo normal de G. Tenemos la siguiente caracterización: $\mathcal{O}_p(G) = \cap \mathrm{P}$ donde P es la familia de p-subgrupos de Sylow de G.

Proposición 8. *Sea G un grupo finito. Entonces si $\mathcal{O}_p(G) \neq 1$ entonces $\mathcal{A}_p(G)$ es contraible.*

Demostración. Esta proposición es corolario de la prueba de la proposición 7; entonces nos preguntamos ¿qué tiene de especial $\mathcal{O}_p(G)$?, la respuesta es que la siguiente conjetura de Quillen "G grupo finito y $\mathcal{S}_p(G)$ contraible, entonces $\mathcal{O}_p(G) \neq 1$" fué probada por Quillen en el caso en que G es soluble. $\square$

El siguiente teorema es la versión equivariante de la "propiedad de homotopía" (proposición 4), la prueba de la proposición 4, transcrita al caso equivariante, proporciona una prueba de dicho teorema, pues por ejemplo: si X, Y son dos G-COPOs, entonces existe un homeomorfismo equivariante (**G-homeomorfismo**) entre $|X \times Y|$ y $|X| \times |Y|$.

Teorema 2. *Sean P, Q G-COPOs y $\phi, \varphi : P \to Q$ G-morfismos tales que $\varphi(x) \leq \phi(x)$ para toda $x \in P$; entonces φ y ϕ son G-homotópicas.*

Corolario 2. *Sea P un G-COPO y $P \xrightarrow{\phi} P$ un G-morfismo tal que $\phi(x) \geq x$ para toda $x \in P$; entonces $P \xrightarrow{\phi} \phi[P]$ es una G-equivalencia homotópica, cuya G-inversa homotópica es la inclusión $\phi[P] \xrightarrow{i} P$ (Dualmente, la conclusión es verdadera si $\phi(x) \leq x$ para toda $x \in P$).*

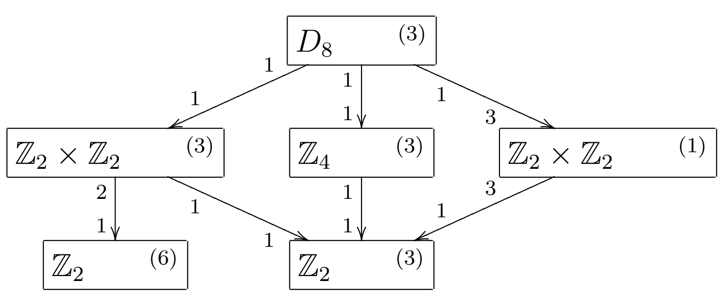
Demostración. El teorema anterior prueba que $i \circ \phi$ es G-homotópica a $1_{|P|}$ e $\phi \circ i$ es G-homotópica a $1_{|\phi[P]|}$. $\square$

Los siguientes dos corolarios son herramientas básicas para probar contraibilidad.

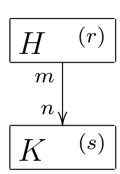
Corolario 3. *Sea P un G-COPO que tiene elemento máximo (o tiene elemento mínimo); entonces P es G-contraible.*

Demostración. La función que envía todo P al elemento distinguido, es un G-morfismo (razón: si $\phi : P \to P$ es tal que $\varphi(x) = m$ para toda $x \in P$, donde m es el mínimo (máximo) de P entonces $g\varphi(x) = g(m) = m = \varphi(gx)$, donde $g(m) = m$ por la afirmación 5) que satisface la hipótesis del corolario anterior. $\square$

Ejemplo 1. *Si G es finito cuyo orden es divisible por p entonces $\mathcal{S}_p(G)/G$ es contraible; la razón es que $\mathcal{S}_p(G)/G$ tiene como elemento máximo a la clase que consta de los p-subgrupos de Sylow de G; así, ya podemos afirmar que $\mathcal{S}_2(S_4)/S_4$ es contraible. La siguiente figura es el diagrama de $\mathcal{S}_2(S_4)/S_4$, este se deduce fácilmente del diagrama de $\mathcal{S}_2(S_4)$ si recordamos que dos permutaciones de S_n son conjugadas en S_n si y sólo si tienen la misma estructura cíclica.*



Donde un nodo de la forma



significa que cada uno de los r elementos en la órbita de H es mayor a m elementos de la órbita de K y que cada uno de los s elementos de la órbita de K es menor a n elementos de la órbita de H.

Corolario 4. *Si P es un G-COPO tal que hay $a \in P$ tal que $\{a\}$ es invariante y para toda existe $x \in P$ $x \vee a$ (existe $x \wedge a$), entonces P es G-contraible.*

Demostración. Sea $f : P \to P$ definida como $f(x) = x \vee a$. f es G-morfismo: Sean $g \in G$ y $x \in P$ entonces se cumple: $f(gx) = gx \vee a = gx \vee ga = g(x \vee a) = gf(x)$. Además f satisface la hipótesis del corolario 2. □

Definición 7. *Una **serie normal** de un grupo G es una sucesión de subgrupos*

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \ldots \geq G_n = 1$$

*en la cual $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$ para toda i. Los **grupos factores** de esta serie normal son las grupos G_i/G_{i+1} para $i = 0, 1, \ldots, n-1$; la **longitud de la serie normal** es el número de inclusiones estrictas, esto es, la longitud es el número de factores distintos de* 1.

Definición 8. *Una **serie de composición** es una serie normal*

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \ldots \geq G_n = 1$$

en la cual, para cada i, G_{i+1} es subgrupo maximal normal de G_i o $G_{i+1} = G_i$.

Afirmación 12. *Sea G un grupo tal que $G = H_1 \times \ldots \times H_n = K_1 \times \ldots \times K_m$ donde H_i, K_j son simples para toda i y para toda j; entonces se cumple $m = n$ y existe $\sigma \in S_n$ tal que $H_i \cong K_{\sigma(i)}$.*

Demostración. Tenemos que

$$1 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_1H_2 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq (H_1H_2 \ldots H_n) = G$$

y que

$$\frac{(H_1H_2 \ldots H_i)H_{i+1}}{(H_1H_2 \ldots H_i)} \cong \frac{H_{i+1}}{(H_1H_2 \ldots H_i) \cap H_{i+1}} = \frac{H_{i+1}}{1}$$

H_{i+1} es por hipótesis simple y distinto de 1, por tanto la serie tiene como conjunto de grupos factores $\{H_1, H_2, \ldots H_n\}$ y por tanto esta serie es de composición. Análogamente

$$1 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq K_1K_2 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq (K_1K_2 \ldots K_m) = G$$

es de composición; por tanto por el teorema de Jordan-Hölder (ver [3], pág 100, teorema 5.12) se cumple la conclusión de la afirmación. □

Definimos la **dimensión del COPO** X como la dimensión del complejo simplicial $|X|$, o equivalentemente, el supremo de los naturales n tales que hay una cadena no vacía $x_0 < \ldots < x_n$ en X. Definimos la **p-dimensión de un grupo** G, denotada $\dim_p(G)$, como el supremo de las dimensiones de sus p-subgrupos elementalmente abelianos considerándolos como espacios vectoriales. Como corolario de la prueba de la afirmación 12 tenemos que un subgrupo (de G) elementalmente abeliano A de dimensión r tiene serie de composición de longitud r; por tanto si G es finito

$$\dim \mathcal{A}_p(G) = \dim_p(G) - 1$$

Esto tiene como consecuencia que los grupos de homología $H_m(\mathcal{A}_p(G))$, los cuales por la proposición 6 son los mismos que los de $\mathcal{S}_p(G)$, cumplan $H_m(\mathcal{A}_p(G)) = 1$ para toda $m \geq \dim_p(G)$.

La siguiente es la versión equivariante del "Teorema de la fibra de Quillen".

Teorema 3. *(Teorema de la fibra de Quillen). Sean P, Q G-COPOs y $f : P \to Q$ un morfismo de G-COPOs. Si para cada $y \in Q$ se cumple $f^{-1}[Q_{\leq y}]$ es G_y-contraible, entonces f es una equivalencia homotópica. (en forma dual se obtiene la misma conclusión pero con la hipótesis $f^{-1}[Q_{\geq y}]$ es G_y-contraible para cada $y \in Q$)*

2.3. Característica de Euler de $\mathcal{S}_p(G)$

Definición 9. *Sea K un complejo simplicial de dimensión n, donde $n \in \mathbb{N}$, para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$ sean $C_i = \{\sigma \in K |\ dimensión(\sigma) = i\}$ y $c_i = |C_i|$ (Aquí $|C_i|$ denota el cardinal del conjunto C_i). Definimos la **característica de Euler** de K, denotada por $\chi(K)$, como la suma $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_i$, es decir*

$$\chi(K) = c_0 - c_1 + c_2 - \ldots + (-1)^n c_n$$

Teorema 4. *(Versión débil del "teorema del nervio". Ver [1], pág 1850). Sea K un complejo simplicial y $(K_i)_{i \in I}$ una familia de subcomplejos tales que $K = \bigcup_{i \in I} K_i$. Suponiendo que toda intersección $K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_n}$ finita no vacía es contraible, entonces K es contraible.*

Recordemos que un G-complejo simplicial K es admisible si para cada $S \in K$, el estabilizador G_S actúa trivialmente en S.

Lema 2. *Si P es un G-COPO, entonces $K(P)$ es un G-complejo simplicial admisible.*

Demostración. Si P es un G-COPO, entonces $K(P)$ es un G-complejo simplicial, esto se debe a que si $v_0 \leq \ldots \leq v_q$ es una cadena en P entonces $g(v_0 \leq \ldots \leq v_q) = gv_0 \leq \ldots \leq gv_q$ también es una cadena en P para toda $g \in G$; es más $K(P)$ es admisible: sea S la cadena $v_0 < \ldots < v_q$, por tanto S tiene $q+1$ niveles: $N_0, \ldots, N_q$ donde $N_i = \{v_i\}$, ahora la afirmación 5 prueba que para toda $g \in G$ y para toda i se cumple $g\{v_i\} = \{v_i\}$, finalmente al ser $g\{v_i\} = \{gv_i\}$ para toda $g \in G$ y para toda i, concluimos que $gv_i = v_i$ para toda $g \in G$ y para toda i. Por tanto el G-complejo simplicial, $K(P)$, es admisible. $\square$

Observación 1. *Si K es un G-complejo simplicial admisible, entonces K es un H-complejo simplicial admisible para todo $H \leq G$.*

Lema 3. *Si K es un G-complejo simplicial admisible, entonces K^G es un complejo simplicial*

Demostración. Sea $S \in K^G$; como K es un G-complejo simplicial admisible, tenemos que G_S, el cual en este caso es igual a G, actúa trivialmente en S y, desde luego, en cualquiera de los subconjuntos no vacíos de S, en otras palabras, los subconjuntos no vacíos de S también son elementos de K^G. $\square$

Observación 2. *La unión arbitraria de complejos simpliciales, es también un complejo simplicial. La intersección arbitraria y no vacía de complejos simpliciales, es también un complejo simplicial.*

Teorema 5. *Sea K un G-complejo simplicial admisible de dimensión n, donde $n \in \mathbb{N}$ y tal que existen $\tau \in K$ y P un p-subgrupo de Sylow de G que cumplen $|P\tau| < p^r$, donde p^r es la mayor potencia del primo p que divide al orden de G. Si para todo $Q \in \mathcal{S}_p(G)$ se tiene que K^Q es contraible, entonces $\chi(K) \equiv 1$ mód(p^r).*

Demostración. Necesariamente $r > 0$ pues si $r = 0$ tendríamos $|P\tau| < p^r = 1$, donde τ es como en la hipótesis, lo cual no es posible. Sean $C_i = \{\sigma \in K | \text{ dimensión}(\sigma) = i\}$ y $c_i = |C_i|$; entonces tenemos que

$$\chi(K) = c_0 - c_1 + c_2 - \ldots + (-1)^n c_n$$

Sea P como en la hipótesis (pero lo estamos tomando fijo). Consideremos el siguiente conjunto $K_0 = \{\sigma \in K || P\sigma| = p^r\}$. Recordemos que $P\sigma$ denota a la órbita de σ bajo la acción del grupo P en K. Sea K_1 el complemento de K_0 relativo a K, es decir $K_1 = K \setminus K_0$.

Sean $A_i = K_0 \cap C_i$ y $B_i = K_1 \cap C_i$, denotemos a_i y b_i a sus respectivos cardinales, es decir $a_i = |A_i|$ y $b_i = |B_i|$; por tanto $c_i = a_i + b_i$ y podemos reexpresar a la característica de Euler de K en la siguiente forma

$$\chi(K) = (a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n) + (b_0 - b_1 + b_2 - \ldots + (-1)^n b_n)$$

En general, la dimensión de un simplejo es invariante bajo la acción del grupo en turno, independientemente de si se da la condición de ser "admisible" o no, por tanto cada A_i es una unión ajena de P-órbitas, cada órbita con exactamente p^r elementos, y por tanto

$$p^r \mid a_i \qquad \text{para toda } i$$

(entonces debemos probar que $K_1 \neq \emptyset$ pues si $K_1 = \emptyset$, por el argumento anterior se cumple $\chi(K) = 0$).

Probaremos que K_1 es un complejo simplicial, de esta manera tendremos que $\chi(K_1) = b_0 - b_1 + b_2 - \ldots + (-1)^n b_n$. También probaremos que K_1 es contraible, esto tiene como consecuencia que $\chi(K_1) = 1$. Así habremos probado

$$\chi(K) \equiv 0 + 1 \qquad \text{mód}(p^r)$$

que es la conclusión deseada.

Sea $\mathcal{P} = \{Q | 1 \neq Q \leq P\}$; observemos que $P \in \mathcal{P}$. Afirmamos que $K_1 = \bigcup_{Q\in\mathcal{P}} K^Q$. Esta igualdad implica que K_1 es un complejo simplicial, pues por el lema 3 y la observación 1, K^Q es un complejo simplicial para cada $Q \in \mathcal{P}$, luego por la observacion 2 la unión $\bigcup_{Q\in\mathcal{P}} K^Q$ es un complejo simplicial. Veamos entonces que se cumple

$$K_1 = \bigcup_{Q\in\mathcal{P}} K^Q$$

Para ello es importante observar que si $\sigma \in K_0$, entonces $P\sigma$ tiene exactamente p^r elementos, como P también tiene exactamente p^r elementos, ningún elemento de $P \setminus 1$ deja fijo a σ. Un argumento similar prueba que si $\sigma \in K_1$, entonces existen $x, y \in P$ con $x \neq y$ (por tanto $y^{-1}x \neq 1$) tal que $x\sigma = y\sigma$ (es decir $y^{-1}x\sigma = \sigma$). En resumen:

$$\sigma \in K_0 \quad \text{si y sólo si para toda} \quad x \in P \setminus 1 \quad \text{se cumple} \quad x\sigma \neq \sigma$$

(esto muestra que $K_1 \neq \emptyset$ pues una τ como en la hipótesis no puede pertenecer a K_0).

Sea $\sigma \in \bigcup_{Q\in\mathcal{P}} K^Q$, por tanto existe $Q \in \mathcal{P}$ tal que $\sigma \in K^Q$, por tanto existe $g \in Q \setminus 1$ tal que $g\sigma = \sigma$; como $Q \leq P$ tenemos que hay $g \in P \setminus 1$ tal que $g\sigma = \sigma$, es decir $\sigma \in K_1$.

Ahora sea $\sigma \in K_1$, por tanto hay $g \in P \setminus 1$ tal que $g\sigma = \sigma$ por tanto $1 \neq \langle g \rangle \leq P$ y $\sigma \in K^{\langle g \rangle}$.

Finalmente, K_1 es contraible: Sea $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$ tal que $\bigcap_{Q\in\mathcal{R}} K^Q \neq \emptyset$ y $\mathcal{R}$ es finito. Entonces tenemos que $\bigcap_{Q\in\mathcal{R}} K^Q$ es un complejo simplicial contraible, por ser intersección finita no vacía de complejos simpliciales contraibles. Por tanto por la versión débil del "teorema del nervio"(teorema 4) concluimos que K_1 es contraible. □

Corolario 5. *Sean G grupo finito y p^r la mayor potencia del primo p que divide al orden de G con $r > 0$, entonces $\chi(K(\mathcal{S}_p(G)) \equiv 1$ mód(p^r).*

Demostración. Sea P un p-subgrupo de Sylow de G y τ el 0-simplejo de $K(\mathcal{S}_p(G))$ que consta del vértice P, en otras palabras $\tau = \{P\}$, entonces se cumple que $|P\tau| = 1 < p^r$, pues $r > 0$; así, hemos verificado una hipótesis importante del teorema 5.

Consideremos la acción por conjugación de G sobre $\mathcal{S}_p(G)$. Afirmamos que se cumple la siguiente igualdad para todo p-subgrupo Q no trivial de G

$$K((\mathcal{S}_p(G))^Q) = (K(\mathcal{S}_p(G)))^Q \tag{2.2}$$

Sea Q un p-subgrupo no trivial de G; tengamos presente lo siguiente

$$H \in (\mathcal{S}_p(G))^Q \qquad \text{si y sólo si} \qquad gHg^{-1} = H \quad \text{para cada } g \in Q \quad \text{y cada } H \in \mathcal{S}_p(G)$$

Sea $\sigma \in K((\mathcal{S}_p(G))^Q)$, digamos σ es la cadena $H_0 \leq \ldots \leq H_r$, donde $H_i \in (\mathcal{S}_p(G))^Q$ para toda i; entonces $g\sigma = g(H_0 \leq \ldots \leq H_r) = (gH_0g^{-1} \leq \ldots \leq gH_rg^{-1}) = (H_0 \leq \ldots \leq H_r)$ para toda $g \in Q$; es decir $\sigma \in (K(\mathcal{S}_p(G)))^Q$.

Ahora sea $\sigma \in (K(\mathcal{S}_p(G)))^Q$, digamos, σ es la cadena $H_0 \leq \ldots \leq H_r$, donde $H_i \in \mathcal{S}_p(G)$ para toda i; para toda $g \in Q$ se cumple $g\sigma = \sigma$, como $K(\mathcal{S}_p(G))$ es G-complejo simplicial admisible por el lema (2), necesariamente se cumple que $gH_ig^{-1} = H_i$ para toda $g \in Q$ y para toda i, es decir $H_i \in (\mathcal{S}_p(G))^Q$ para toda i, por tanto $\sigma \in K((\mathcal{S}_p(G))^Q)$.

Ahora, como la igualdad (2.2) es cierta para este Q, es suficiente mostrar que $(\mathcal{S}_p(G))^Q$ es contraible.

Sea $H \in (\mathcal{S}_p(G))^Q$, la fórmula del producto $|HQ| = \frac{|H||Q|}{|H \cap Q|}$ implica que $HQ \in \mathcal{S}_p(G)$. Por otra parte sea $x \in Q$, dado que para toda $g \in Q$, $gHg^{-1} = H$, esto nos proporciona

$$xHQx^{-1} = (xHx^{-1})(xQx^{-1}) = HQ$$

pues claramente $Q \in (\mathcal{S}_p(G))^Q$.

Por tanto si $H \in (\mathcal{S}_p(G))^Q$, entonces $HQ \in (\mathcal{S}_p(G))^Q$, lo cual nos permite bien definir la función $(\mathcal{S}_p(G))^Q \xrightarrow{f} (\mathcal{S}_p(G))^Q$ como $f(H) = HQ$. Es más f es morfismo de COPOs: Sean $A, B \in (\mathcal{S}_p(G))^Q$ con $A \leq B$ entonces se cumple $f(A) = AQ \leq BQ = f(B)$. Como $1_{(\mathcal{S}_p(G))^Q}(H) \leq f(H)$ para tada $H \in (\mathcal{S}_p(G))^Q$, por la propiedad de homotopía (proposición 4) tenemos que f es homotópica a $1_{(\mathcal{S}_p(G))^Q}$. Análogamente, al cumplirse $Q \leq f(H)$ para toda $H \in (\mathcal{S}_p(G))^Q$, entonces la constante con valor Q es homotópica a f. Por lo tanto $\mathcal{S}_p(G)$ es contraible a un punto. $\square$

Observamos que si $r = 1$ entonces $K(\mathcal{S}_p(G))$ consta de l componentes conexas, una por cada p-subgrupo de Sylow de G, entonces el corolario 5 nos dice que $l \equiv 1$ módulo p, en otras palabras, si $r = 1$ entonces el número de p-subgrupos de Sylow es congruente a 1 módulo p.

Definición 10. *El **grupo dihédrico** $\mathbf{D_{2n}}$, para $n \geq 2$, es el grupo de orden $2n$ generado por dos elementos s y t tales que*

$$s^n = 1, \quad t^2 = 1 \quad y \quad tst = s^{-1}$$

Ejemplo 2. *La característica de Euler de $\mathcal{S}_2(D_{2n})$, para $n = 4$.*

$$\begin{tikzcd}
& & D_8 \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \mathbb{Z}_4 \arrow[d] & & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \\
\mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2
\end{tikzcd}$$

Figura: 1. *Digráfica de $\mathcal{S}_2(D_8)$*

Consideremos los tres niveles N_0, N_1 y N_2 de $\mathcal{S}_2(D_8)$. Observamos que en $\mathcal{S}_2(D_8)$ hay siete 2-simplejos, quince 1-simplejos y nueve 0-simplejos; por tanto $\chi(K(\mathcal{S}_2(D_8))) = 9 -$

$15+7=1\equiv 1$ mód(8), lo cual concuerda con el corolario 5. Pero observemos también que $\chi(N_0\cup N_1)=1\equiv 1$ módulo 4, $\chi(N_0)=5\equiv 1$ módulo 4 (generalizando la definición 9 a subconjuntos del complejo simplicial K).

En el ejemplo $G=(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3)\rtimes(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)$ del cápitulo 4, 2^2 es la mayor potencia de 2 que divide al orden de G pero veremos que en ese ejemplo $\chi(K(\mathcal{S}_2(G)))=-3$, y claro se cumple $3\equiv 1$ módulo 4.

Capítulo 3

Tipo de homotopía de los complejos de subgrupos

3.1. Conceptos básicos

La **n-esfera $\mathbf{S^n}$** es el conjunto$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \; ||x|| = 1\}$

Una **serie soluble** de un grupo G es una serie normal cuyos grupos factores son todos abelianos. Un grupo G **es soluble** si tiene almenos una serie soluble.

Definición 11. *Una **serie principal** de un grupo G es una serie, de subgrupos normales de G, que es soluble y de máxima longitud.*

Teorema 6. *(Teorema de la correspondencia). Sean $K \trianglelefteq G$ y $\nu : G \to \frac{G}{K}$ la proyección natural. Entonces $S \mapsto \nu(S) = \frac{S}{K}$ es una biyección entre la familia de todos subconjuntos S de G que contienen a K y la familia de todos los subgrupos de $\frac{G}{K}$. Además*

(i) *$T \leq S$ si y sólo si $\frac{T}{K} \leq \frac{S}{K}$.*

(ii) *$T \trianglelefteq S$ si y sólo si $\frac{T}{K} \trianglelefteq \frac{S}{K}$.*

3.2. La retícula de todos los subgrupos

Dado un grupo G y p un número primo, denotamos $\mathcal{L}(\mathbf{G})$ al COPO $\{H \leq G | H \neq G, H \neq 1\}$ en el que la relación de orden es la inclusión.

Tenemos el siguiente teorema sobre el tipo de homotopía de $\mathcal{L}(G)$ para G un grupo soluble:

Teorema 7. *(Thévenaz 1985). Sean G un grupo soluble y*

$$1 = N_0 \lhd N_1 \lhd \ldots \lhd N_n = G$$

una serie principal de G. Entonces $\mathcal{L}(G)$ tiene el tipo de homotopía de una cuña de $m_1 m_2 \ldots m_{n-1}$ esferas de dimensión $n-2$, donde m_i es el número de complementos de $\frac{N_i}{N_{i-1}}$ en $\frac{G}{N_{i-1}}$, es decir $\mathcal{L}(G)$ tiene el tipo de homotopía de $\bigvee_{i=1}^{m_1 m_2 \ldots m_{n-1}} S^{n-2}$

Ejemplo 3. *. El subgrupo $V = \{(1), (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$ de S_4 es una unión de clases de conjugación respecto a S_4 y por tanto V es subgrupo normal de S_4. Como $\left|\frac{S_4}{A_4}\right| = 2$, entonces A_4 es normal maximal en S_4; por la misma razón V es normal maximal en A_4. Ninguno de los subgrupos de orden dos de V es normal en S_4 pues cada uno por separado, no es una unión ajena de clases de conjugación (respecto a S_4) por último, los tres grupos factores de la serie*

$$1 \lhd V \lhd A_4 \lhd S_4$$

son abelianos por tener orden menor o igual a cuatro, concluimos que la serie anterior, es una serie principal de S_4. Entonces para usar el teorema 7 determinemos a m_1 y a m_2 ya que en este caso $n = 3$:

Para m_1:

Tenemos que $\frac{S_4}{1} \cong S_4$ y $\frac{V}{1} \cong V$. En la siguiente figura

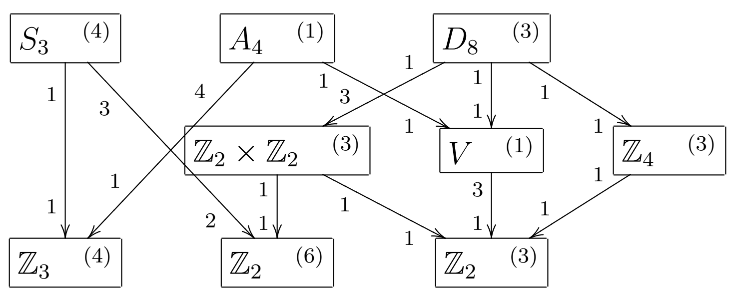


Figura: 2. $\mathcal{L}(S_4)$

podemos apreciar que V tiene exactamente cuatro complementos y estos son los cuatro elementos de la clase $[S_3]$; por tanto $m_1 = 4$.

Para m_2:

Sabemos que $\frac{S_4}{V}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_6$ o es isomorfo a S_3 (es un resultado general que si H es un grupo de orden seis, entonces H es isomorfo a exactamente uno de los dos grupos $\mathbb{Z}_6$ y S_3), pero $\frac{S_4}{V}$ no puede se isomorfo al subgrupo cíclico $\mathbb{Z}_6$ pues en la figura 2 observamos que V es subgrupo de cada uno de los tres elementos de $[D_8]$, es más V es subgrupo normal de cada uno de los tres elementos de $[D_8]$ por ser V normal en S_4, entonces por el teorema *de la correspondencia hay almenos tres distintos subgrupos de orden dos en $\frac{S_4}{V}$, como es un resultado general que un grupo cíclico finito tiene exactamente un subgrupo de órden m para cada natural m que divide al órden del grupo, concluimos que $\frac{S_4}{V}$ es isomorfo a S_3. Es sencillo construir la retícula de todos los subgrupos de S_3, si tenemos presente el siguiente resultado "Si p es un primo mayor que dos, α una transposición y β un p-cíclo, entonces $\langle \alpha\beta \rangle = S_p$".*

$$
\begin{tikzcd}
& S_3 \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[ddr] \arrow[ddrr] & & \\
\langle(1\,2\,3)\rangle \arrow[ddr] & & & \\
& \langle(1\,2)\rangle \arrow[d] & \langle(1\,3)\rangle \arrow[dl] & \langle(2\,3)\rangle \arrow[dll] \\
& 1 & &
\end{tikzcd}
$$

Figura: 3. *Retícula de todos los subgrupos de S_3.*

Por otro lado $\frac{A_4}{V}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ pues $\frac{|A_4|}{|V|} = 2$.

En la figura 3 podemos observar que cualquier subgrupo de S_3 isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ tiene exactamente tres complementos, y por tanto $m_2 = 3$.

Finalmente, el teorema 7 muestra que S_4 tiene el tipo de homotopía de una cuña de doce esferas de dimensión uno.

Corolario 6. *Bajo las mismas hipótesis del teorema 7 se cumple lo siguiente: $\mathcal{L}(G)$ es contraible si y sólo si existe $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $\frac{N_i}{N_{i-1}}$ no tiene complementos en $\frac{G}{N_{i-1}}$.*

Observemos que este corolario relaciona una propiedad algebraica con una topológica.

Capítulo 4

Otros ejemplos

Denotamos $G(n,q)$ al grupo de matrices de $n\times n$ con entradas en $\mathbb{Z}_q$.

Sean $K=\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ y $Q=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. Utilizando que K es un grupo elementalmente abeliano se puede probar que $\mathrm{Aut}(K)$ y $\mathrm{GL}(3,3)$ son isomorfos como grupos.

La función $\Theta : Q \to \mathrm{Aut}(K)$ definida por

$$\binom{x}{y} \mapsto \begin{pmatrix} (-1)^x & 0 \\ 0 & (-1)^y \end{pmatrix}$$

es claramente un isomorfismo con la imagen $\Theta[Q]$.

Consideremos el siguiente producto semidirecto $K \rtimes_\Theta Q$, al que denotaremos "G", en el cual la acción por conjugación de Q sobre K la definimos de la siguiente manera: si $\binom{x}{y}\in Q$ y $\binom{a}{b}\in K$, entonces $(\Theta\binom{x}{y})\binom{a}{b}$ es el producto usual de matrices. De este modo si $\big(\binom{a}{b},A\big)$ y $\big(\binom{c}{d},B\big)$ son elementos de G (aprovechando que Θ es isomorfismo con su imagen tomamos A y B en $\Theta[Q]$), entonces su producto está dado por

$$(\tbinom{a}{b},A)(\tbinom{c}{d},B) = (\tbinom{a}{b}+A\tbinom{c}{d},AB) \tag{4.1}$$

y por tanto el inverso del elemento $\big(\binom{a}{b},A\big)$ debe ser $\big(-A^{-1}\binom{a}{b},A^{-1}\big)$.

Nuestro objetivo es mostrar que $\mathrm{cardinal}(\pi_0(\mathcal{S}_2(G)))=1$, es decir $\mathcal{S}_2(G)$ es conexo, y que $\chi(K(\mathcal{S}_2(G))=-3$ esto último implica que $\mathcal{S}_2(G)$ no es contraible. Entonces este será un ejemplo de un $\mathcal{S}_p(G)$ conexo pero no contraible.

Denotemos a los cuatro elementos de $\Theta[Q]$ de la siguiente manera:

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad -I=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad -D=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

Sabemos que $K\times\{I\}$ es subgrupo normal de G, por tanto G actúa por conjugación sobre $K\times\{I\}$, explícitamente: si $\big(\binom{a}{b},A\big)\in G$ y $\big(\binom{\alpha}{\beta},I\big)\in K\times\{I\}$

$$(\tbinom{a}{b},A)(\tbinom{\alpha}{\beta},I)(-A^{-1}\tbinom{a}{b},A^{-1}) = (A\tbinom{\alpha}{\beta},I) \tag{4.2}$$

En el caso particular en que α, β sean elementos de $\mathbb{Z}_3$ ambos cero, se cumple $G_{(\binom{0}{0},I)} = G$, la razón es que un elemento $\big(\binom{a}{b}, A\big)$ está en $G_{(\binom{0}{0},I)}$ si sólo si $\big(A\binom{0}{0}, I\big) = \big(\binom{0}{0}, I\big)$, la cual se cumple para toda $\binom{a}{b} \in K$ y para toda $A \in \Theta[Q]$.

En general, los grupos de isotropía han probado ser de gran utilidad, por ejemplo los han usado para determinar la estructura de algunos grupos finitos; nuestro objetivo es probar dos afirmaciones pertinentes a $\mathcal{S}_2(G)$, por ello estamos interesados en encontrar una acción de G sobre K tal que algún grupo de isotropía sea además un 2-subgrupo de Sylow de G; tal 2-subgrupo de Sylow necesariamente tiene órden 4 ya que G tiene órden 36. Tomando en cuenta lo anterior, la acción conjugación de G sobre $K \times \{I\}$, tal cual, no nos es útil, en el fondo ello se debe a que el lado derecho de la igualdad (4.2) no depende del elemento $\binom{a}{b}$ de K, esto se soluciona multiplicando ambos lados de dicha igualdad por el elemento $\big(\binom{a}{b}, I\big)$, quedándonos

$$(\tbinom{a}{b}, I)(\tbinom{a}{b}, A)(\tbinom{\alpha}{\beta}, I)(-A^{-1}\tbinom{\alpha}{\beta}, A^{-1}) = (\tbinom{a}{b} + A\tbinom{\alpha}{\beta}, I)$$

pues como veremos enseguida, en una forma equivalente, la asignación

$$((\tbinom{a}{b}, A), (\tbinom{\alpha}{\beta}, I)) \mapsto (\tbinom{a}{b} + A\tbinom{\alpha}{\beta}, I) \tag{4.3}$$

es una acción de G sobre $K \times \{I\}$. Esta acción es adecuada para nuestros propositos, por que tiene la cualidad que el subgrupo de isotropía $G_{(\binom{0}{0},I)}$ es un 2-subgrupo de Sylow de G, también esto lo veremos en la forma equivalente antes mencionada.

Observamos que la asignación

$$((\tbinom{a}{b}, A), \tbinom{\alpha}{\beta}) \mapsto \tbinom{a}{b} + A\tbinom{\alpha}{\beta} \tag{4.4}$$

toma sólo la parte esencial de la asignación (4.3), por lo mismo es más sencillo probar que es una acción de G sobre K:

1.- Sea $\binom{\alpha}{\beta} \in K$, entonces se cumple $\big(\binom{0}{0}, I\big)\binom{\alpha}{\beta} = \binom{0}{0} + I\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha}{\beta}$

2.- Sean $\big(\binom{a}{b}, A\big), \big(\binom{c}{d}, B\big) \in G$ y $\binom{\alpha}{\beta} \in K$; tenemos

$\big(\binom{a}{b}, A\big)\Big[\big(\binom{c}{d}, B\big)\binom{\alpha}{\beta}\Big] = \big(\binom{a}{b}, A\big)\Big[\binom{c}{d} + B\binom{\alpha}{\beta}\Big] = \binom{a}{b} + A\binom{c}{d} + AB\binom{\alpha}{\beta} =$
$= \big(\binom{a}{b} + A\binom{c}{d}, AB\big)\binom{\alpha}{\beta} = \Big[\big(\binom{a}{b}, A\big)\big(\binom{c}{d}, B\big)\Big]\binom{\alpha}{\beta}$

Aún más, esta acción es transitiva: sean $\binom{a}{b}, \binom{c}{d}$ dos elementos cualesquiera de K, entonces el elemento $\big(\binom{a}{b} - \binom{c}{d}, I\big)$ de G cumple $\big(\binom{a}{b} - \binom{c}{d}, I\big)\binom{c}{d} = \binom{a}{b}$.

El hecho que la acción sea transitiva nos será de mucha utilidad.

Por otro lado, un elemento $\big(\binom{a}{b}, A\big)$ de G pertenece a $G_{\binom{0}{0}}$ si y sólo si $\binom{0}{0} = \big(\binom{a}{b}, A\big)\binom{0}{0} = \binom{a}{b} + A\binom{0}{0} = \binom{a}{b}$; concluimos que

$$G_{\binom{0}{0}} = \{(\tbinom{0}{0}, A) | A \in \Theta[Q]\} \tag{4.5}$$

Esta última igualdad prueba que $G_{\binom{0}{0}}$ es isomorfo al grupo Q cuyo orden es 4, por tanto $G_{\binom{0}{0}}$ es un 2-subgrupo de Sylow de G.

En general, si H es un grupo que actúa en un conjunto X, se cumple la igualdad $hH_xh^{-1} = H_{hx}$ para toda $h \in H$ y toda $x \in X$. Por tanto si la acción de H sobre X es transitiva, cualquier par de grupos de isotropía son conjugados en H. Como en el caso que estamos trabajando la acción es transitiva, cualquier par de subgrupos de isotropía son 2-subgrupos de Sylow de G, por serlo $G_{\binom{0}{0}}$. Por otro lado, si P es un 2-subgrupo de Sylow de G, al ser cualquier par de subgrupos de Sylow conjugados en G, existe $g \in G$ tal que $P = gG_{\binom{0}{0}}g^{-1} = G_{g\binom{0}{0}}$, por tanto P es el subgrupo de isotropía de algún elemento de G. En resumen hay una correspondencia biúnivoca entre el conjunto de grupos de isotropía contenidos en G y el conjunto de 2-subgrupos de Sylow de G.

A continuación veremos que si x y y son dos elementos de K, tales que $x \neq y$ entonces $G_x \neq G_y$; esto implicará que hay exactamente nueve 2-subgrupos de Sylow de G. Supongamos pues que x y y son dos distintos elementos de K para los cuales $G_x = G_y$. Por la transitividad de la acción, existe $g \in G$ tal que $gx = y$, luego $G_x = G_y = G_{gx} = gG_xg^{-1}$; concluimos que si hay x y y elementos distintos de K tal que $G_x = G_y$, entonces existe $g \in G$ tal que g no pertenece a G_x (por que $x \neq y = gx$) y $g \in \mathrm{N}_G(G_x)$. Entonces para probar que $G_x \neq G_y$ si $x \neq y$, es suficiente mostrar que $\mathrm{N}_G(G_x) = G_x$ para toda $x \in K$. Primero veamos que $\mathrm{N}_G(G_{\binom{0}{0}}) = G_{\binom{0}{0}}$. Sean $\left(\binom{0}{0}, B\right) \in G_{\binom{0}{0}}$ y $\left(\binom{a}{b}, A\right) \in G$; tenemos la siguiente igualdad

$$(\tbinom{a}{b}, A)(\tbinom{0}{0}, B)(-A^{-1}\tbinom{a}{b}, A^{-1}) = (\tbinom{a}{b} - ABA^{-1}\tbinom{a}{b}, -ABA^{-1}) \tag{4.6}$$

de la ecuación (4.6) se deduce que $\left(\binom{a}{b} - ABA^{-1}\binom{a}{b}, -ABA^{-1}\right) \in G_{\binom{0}{0}}$ si y sólo si $\binom{a}{b} - ABA^{-1}\binom{a}{b} = \binom{0}{0}$, pero esta última igualdad se cumple si y sólo si

$$B\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

(al ser Q abeliano se cumple $ABA^{-1} = B$)

Para a y b elementos, no ambos cero de $\mathbb{Z}_3$, tenemos en total tres casos exclusivos entre sí:

Caso 1. $a, b \neq 0$. En este caso se cumple la igualdad (4.7) si y sólo si

$$B = I$$

Por tanto $\left[\left(\binom{a}{b}, A\right)G_{\binom{0}{0}}\left(\binom{a}{b}, A\right)^{-1}\right] \cap G_{\binom{0}{0}} = \{\left(\binom{0}{0}, I\right)\}$ para toda $\left(\binom{a}{b}, A\right) \in G$ donde $a, b \neq 0$.

Caso 2. $a = 0, b \neq 0$. En este caso se verifica la igualdad (4.7) si y sólo si

$$B = I \qquad \text{o} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $\left[\left(\binom{a}{b},A\right)G_{\binom{0}{0}}\left(\binom{a}{b},A\right)^{-1}\right]\cap G_{\binom{0}{0}}=\{(\binom{0}{0},I),(\binom{0}{0},D)\}$ para toda $\left(\binom{a}{b},A\right)\in G$ donde $a=0$ y $b\neq 0$.

Caso 3. $a\neq 0, b=0$. En este caso se cumple la igualdad (4.7) si y sólo si

$$B=I \qquad \text{o} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $\left[\left(\binom{a}{b},A\right)G_{\binom{0}{0}}\left(\binom{a}{b},A\right)^{-1}\right]\cap G_{\binom{0}{0}}=\{(\binom{0}{0},I),(\binom{0}{0},-D)\}$ para toda $\left(\binom{a}{b},A\right)\in G$ donde $a\neq 0$ y $b=0$.

Observación 3. *De los tres casos anteriores se deducen:*

(i) *Para toda* $\left(\binom{a}{b},A\right)\in G$ *con* a *y* b *elementos, no ambos cero, de* $\mathbb{Z}_3$ *se cumple* $\left(\binom{a}{b},A\right)$ *no pertenece a* $N_G(G_{\binom{0}{0}})$.

(ii) *El subgrupo* $\left\{\left(\binom{0}{0},I\right),\left(\binom{0}{0},-I\right)\right\}$ *de* $G_{\binom{0}{0}}$ *no es subgrupo de ningún otro 2-subgrupo de Sylow de* G.

Del inciso (i) de la observación 3 y de la igualdad $G_{\binom{0}{0}}=\left\{\left(\binom{0}{0},A\right)|A\in\Theta[Q]\right\}$ (4.5), se deduce que $\mathrm{N}_G(G_{\binom{0}{0}})=G_{\binom{0}{0}}$.

Ahora, sea $\binom{\alpha}{\beta}\in K$, sabemos que existe $g\in G$ tal que $g\binom{0}{0}=\binom{\alpha}{\beta}$, por tanto
$\mathrm{N}_G(G_{\binom{\alpha}{\beta}})=\mathrm{N}_G(G_{g\binom{0}{0}})=\mathrm{N}_G(gG_{\binom{0}{0}}g^{-1})=g\mathrm{N}_G(G_{\binom{0}{0}})g^{-1}=gG_{\binom{0}{0}}g^{-1}=G_{g\binom{0}{0}}=G_{\binom{\alpha}{\beta}}$

Esto prueba que hay exactamente nueve 2-subgrupos de Sylow de G.

Para abreviar denotemos a $\left(\binom{a}{b},I\right)G_{\binom{0}{0}}\left(\binom{a}{b},I\right)^{-1}$ con $\binom{a}{b}G_{\binom{0}{0}}\binom{a}{b}^{-1}$; con tal simplificación, los tres casos y el inciso (ii) de la observación 3 podemos dar la digráfica correspondiente a los subgrupos de orden 2 de $G_{\binom{0}{0}}$ y aquellos subgrupos de isotropía cuya intersección con $G_{\binom{0}{0}}$ contiene a alguno de estos (subgrupos de orden 2 de $G_{\binom{0}{0}}$), pero para ilustrar los argumentos que daremos a continuación agregaremos a tal digráfica los 4 subgrupos de isotropía restantes como si fuesen puntos aislados.

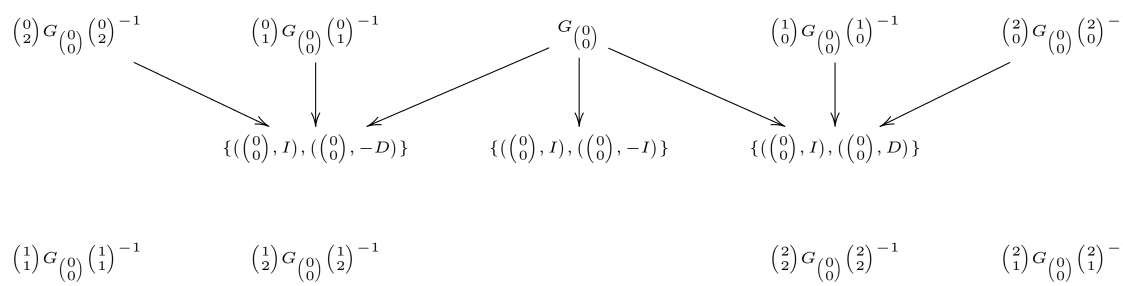


Figura: 4. *Caso particular de* $G_{\binom{0}{0}}$

Si P es un 2-subgrupo de Sylow de $G_{\binom{0}{0}}$ entonces existe $g \in G$ tal que $P = gG_{\binom{0}{0}}g^{-1}$, la ilustración correspondiente a P es

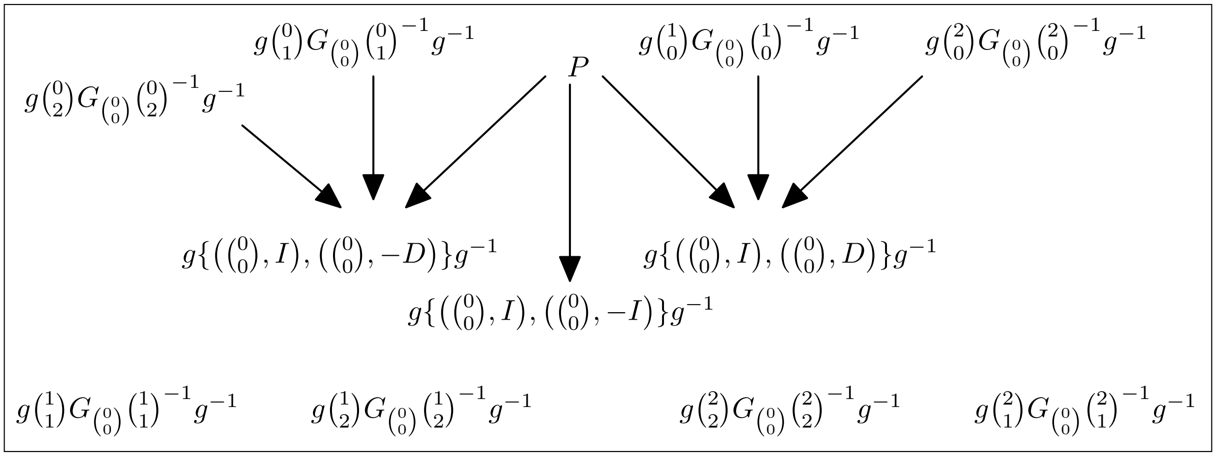


Figura: 5. *Caso general.*

esto queda justificado por lo siguiente: Sean H,K y L subgrupos de un grupo M. Si existe $g \in M$ tal que $gHg^{-1} = L$, entonces:

(a) $gKg^{-1} \cap L = g(K \cap H)g^{-1}$.

$$\text{Razón:} \qquad gKg^{-1} \cap L = gKg^{-1} \cap gHg^{-1} = g(K \cap H)g^{-1}$$

(b) Si $K \neq L$ y $K \neq H$ entonces $gKg^{-1} \neq L$, pues si $gKg^{-1} = L$, entonces $K = g^{-1}Lg = H$.

Podemos apreciar en la figura 4 que $G_{\binom{0}{0}}$ está en la misma componente conexa de cuando menos otros cuatro 2-subgrupos de Sylow, distintos entre si y distintos de $G_{\binom{0}{0}}$. Por tanto, si P es un 2-subgrupo de Sylow, al ser conjugado de $G_{\binom{0}{0}}$, almenos está en la misma componente conexa de otros cuatro 2-subgrupos de Sylow, distintos entre si y distintos de P (figura 5). Finalmente, sólo hay cuatro 2-subgrupos de Sylow "$\binom{a}{b}G_{\binom{0}{0}}\binom{a}{b}^{-1}$"con a y b elementos, ambos distintos de cero, de $\mathbb{Z}_3$ y por tanto si $\binom{a}{b}G_{\binom{0}{0}}\binom{a}{b}^{-1}$ es uno de estos, necesariamente $\binom{a}{b}G_{\binom{0}{0}}\binom{a}{b}^{-1}$ debe pertenecer a la misma componente conexa de $\binom{c}{d}G_{\binom{0}{0}}\binom{c}{d}^{-1}$, para algún $\binom{c}{d}$ tal que $c = 0$ o $d = 0$; esto nos permite concluir que $\mathcal{S}_2(G)$ es conexo.

En el caso general que ilustra la figura 5, P tiene exactamente tres subgrupos de orden 2, uno de los cuales está contenido exclusivamente en P y cada uno de los dos restantes está contenido en exactamente tres 2-subgrupos de Sylow, por tanto, dado que hay nueve 2-subgrupos de Sylow, en total hay $9 + \frac{18}{3} = 15$ subgrupos de orden dos. Así en total tenemos $9 + 15 = 24$ 0-simplejos. Es sencillo, en este caso, contar los 1-simplejos pues éstos corresponden con las relaciones de inclusión entre los 2-subgrupos de Sylow y sus respectivos subgrupos de orden dos, es decir, hay $9(3) = 27$ 1-simplejos. Por tanto $\chi(K(\mathcal{S}_2(G)) = 24 - 27 = -3$ (lo cual es congruente a 1 módulo 4 como lo establece el corolario 5).

Bibliografía

[1] Björner A. *Topological methods*, Handbook of combinatorics. R. Graham, M. Grötschel, L. Lovász (Editors), New York: Elsevier: Cambridge, Massachusett: MIT, **2** (1995), 1848-1872.

[2] Quillen D. *Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroups of a group*, Advances in Math. **28** (1978), 101-128.

[3] Rotman J. *An introduction to Theory of Groups*, Springer-Verlag. 1995.

[4] Thévenaz J. *The top homology of the lattice of subgroups of a solvable group*, Discrete Math. **55** (1985), 291-303.

[5] Villarroel-Flores Rafael. *Homotopy Type of Posets of Subgroups*, No publicado.