



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**LA TEORÍA DE RUINA Y SU APLICACIÓN  
EN LA SOLVENCIA DE LAS RESERVAS  
ACTUARIALES**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

**A C T U A R I O**

P R E S E N T A

**CARLOS EDUARDO GAITÁN LASTRAS**



DIRECTOR DE TESIS  
ACT. JOSÉ FABIÁN GONZÁLEZ FLORES

2007



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno  
Gaitán  
Lastras  
Carlos Eduardo  
56 80 10 44  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Actuaría  
099502346
2. Datos del tutor  
Actuario  
José Fabián  
González  
Flores
3. Datos del sinodal 1  
Doctora  
María Cristina  
Gutierrez  
Delgado
4. Datos del sinodal 2  
Doctor  
Vicente Ángel  
Soriano  
Ramírez
5. Datos del sinodal 3  
Actuaría  
María Guadalupe  
Medrano  
Ortiz
6. Datos del sinodal 4  
Actuaría  
Adriana  
Ramírez  
Velázquez
7. Tesis  
La Teoría de Ruina y su Aplicación en la Solvencia de las Reservas Actuariales  
92 p  
2007

*En algún lugar leí un proverbio chino que más o menos decía así:*

*“La felicidad se logra cuando concluyes aquello  
que has comenzado”.*

## *Agradecimientos*

*Quiero agradecer a mis padres por el apoyo incondicional que siempre me han dado y a la gran familia que formamos junto con mis dos hermanos, Sofía y Alfonso.*

*Papá, te doy gracias por ser quien eres, lo cual me ha ayudado a formarme como persona, y por mostrarme que en esta vida todo se logra teniendo la actitud correcta para enfrentar las adversidades.*

*Mamá, por tu inmenso cariño y comprensión. El saber que siempre estás ahí para escuchar y apoyar, ha hecho que mi vida sea mejor cada día. Gracias por enseñarme a amar a Dios.*

*Sofía, por ser una persona alegre y tenaz en lo que te propones, la que labró los primeros caminos del papel de ser hijo en esta familia, los cuales me siento orgulloso de hoy recorrer.*

*Alfonso, gracias por ser más que un hermano, y ser mi amigo, un acompañante de viajes y de juegos, ahora, hasta mi compañero de equipo de béisbol y fútbol.*

*A mis abuelos, por haberme dado a los padres que ahora me acompañan y por crear lazos familiares tan fuertes y unidos.*

*A mis dos ahijados, Isabela y José, ya que ellos representan un motivo para que cada día busque superarme y alcanzar mis metas.*

*A todos mis tíos, primos y demás familia, por alegrar las navidades, fin de años, fiestas familiares y demás eventos. Representan una chispa de alegría y cariño fundamental.*

*A la UNAM, por todo aquello que aprendí dentro y fuera de sus aulas, por ser un centro de enseñanza de excelencia donde convergen grandes profesores y estudiantes.*

*Fabián, gracias por la asesoría incondicional que me brindaste para el desarrollo de esta tesis, la cual representa el cierre de un ciclo trascendental en mi vida académica y me permite seguir avanzando para ser un mejor profesionista.*

*A los sinodales que amablemente accedieron a revisar este trabajo, por sus valiosos comentarios y correcciones. Gracias por ser parte de esta tesis y estar presentes en un día tan importante para mí.*

## ÍNDICE GENERAL

<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>7</b>
<b>CAPITULO I. LA TEORIA DE RUINA .....</b>	<b>10</b>
1.1 Introducción a la Teoría de Ruina .....	10
1.2 Definición del problema .....	10
1.3 Modelo básico de la Teoría de Ruina (Cramér-Lundberg).....	12
1.4 El coeficiente de ajuste .....	14
1.5 La desigualdad de Lundberg .....	18
1.6 Probabilidad de ruina y probabilidad de supervivencia.....	21
1.7 Pérdida máxima probable y tiempo de ruina .....	26
1.8 Métodos de Aproximación .....	28
1.8.1 Teorema Central del Límite.....	28
1.9 Aplicaciones a los seguros generales.....	30
1.9.1 La probabilidad de ruina.....	30
<b>CAPITULO II. MODELACIÓN DE LA SINIESTRALIDAD Y SOLVENCIA DE UNA COMPAÑÍA DE SEGUROS (TEORÍA DE RIESGO).....</b>	<b>32</b>
2.1 La siniestralidad total de un periodo.....	32
2.2 La distribución del monto de los siniestros .....	33
2.3 Momentos Ordinarios y Centrales.....	36
2.4 Función Generadora de Momentos.....	37
2.5 Modelación del número de los siniestros .....	39
2.6 La distribución Poisson .....	39
2.7 La distribución mixta o ponderada .....	42
2.8 La distribución binomial negativa .....	43
2.9 Aplicaciones a la Teoría de Ruina.....	48
2.10 Recargo de seguridad.....	50
2.11 Modelación de siniestros con horizonte temporal amplio .....	51
2.11.1 Aproximación Normal Power.....	52
2.11.2 Aproximación Gamma de tres parámetros .....	53
2.12 Procesos estocásticos relativos a la Teoría de Ruina.....	54
<b>CAPITULO III. APLICACIÓN DE LA TEORIA DE RUINA A LA SOLVENCIA DE UNA COMPAÑÍA DE SEGUROS .....</b>	<b>56</b>
3.1 Cálculo de la probabilidad de ruina y probabilidad de supervivencia.....	56
3.2 Políticas de reparto de dividendos de las compañías aseguradoras .....	57
3.3 Modelación de gastos, impuestos y dividendos .....	58
3.3.1 Gastos .....	58

3.3.2 Impuestos.....	58
3.3.3 Dividendos.....	59
3.4 Análisis y simulación del proceso de seguro.....	59
3.5 El problema de requerimiento de capital.....	62
3.6 Evaluación de los límites de retención.....	65
3.7 Forma de introducir en el modelo las estrategias de reparto de dividendos.....	66
3.7.1 Barrera de dividendos lineal.....	66
3.7.2 Barrera de dividendos asintótica.....	69
3.7.3 Barrera de dividendos parabólica.....	70
3.8 Aplicación numérica.....	73
3.9 Análisis de solvencia.....	82
3.10 Reservas actuariales.....	84
<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>86</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>91</b>



## INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta tesis es estudiar la Teoría de Ruina y mediante su aplicación se propondrá la forma en que esta teoría puede ser una herramienta muy óptima en el control de la solvencia de las reservas actuariales de una compañía de seguros.

La solvencia de las reservas actuariales es un factor importante para una compañía de seguros porque denota la capacidad del asegurador para responder al compromiso contraído con el asegurado, lo cual cimienta la confianza de la gente en la entidad aseguradora. Es por ello que el propio asegurador es el primer interesado en afrontar la cuestión de la solvencia con criterios técnicos rigurosos.

Ahora bien, la Teoría de Ruina es una rama que brota de la Teoría de Riesgo, donde esta última tiene como objeto *proporcionar un análisis matemático de las fluctuaciones aleatorias en los seguros y discutir los medios de protección contra sus efectos desfavorables* (Cramér). A su vez, en el modelo clásico de la Teoría de Ruina, la probabilidad de ruina de una compañía de seguros se calcula mediante la modelación del costo total de los siniestros.

Por ende, si se utiliza adecuadamente la Teoría de Ruina, podemos aplicar técnicas que permitan tener un control sobre las reservas actuariales, las cuales nos alertan prudentemente cuando el capital de una compañía aseguradora asignado a una cartera decrece en forma significativa, permitiendo a la aseguradora tomar ciertas medidas para subsanar esta situación.

La Teoría de Riesgo ha contribuido a la formación tanto académica como profesional de los actuarios, ayudándolos a realizar análisis más completos y matemáticamente más robustos sobre los riesgos en los que incurren las compañías de seguros. Esto supera las técnicas actuariales convencionales basadas en frecuencias y montos promedios de reclamaciones, las cuales simplifican excesivamente los hechos. Empero, el impacto

positivo de la Teoría de Riesgo y por ende, también de la Teoría de Ruina, es muy reciente y ha sido poco investigado y utilizado en México. Esto implica que las herramientas que derivan de estas ramas del conocimiento actuarial sean, desafortunadamente, poco conocidas y en consecuencia poco explotadas.

El sector asegurador mexicano sigue basándose en técnicas actuariales convencionales para el cálculo de sus primas. Lo anterior, pone en desventaja a este sector, ya que por ignorancia o desdén se dejan pasar adelantos del conocimiento actuarial que podrían mejorar la situación económica-financiera de las compañías de seguros.

La tesis se presenta a *grosso modo* en tres capítulos.

En el capítulo I se introducirán los aspectos generales de la Teoría de Ruina, abarcando la definición del problema y estudiando los tres componentes: superávit inicial, primas recibidas y reclamaciones pagadas del modelo de proceso de superávit, así como las aplicaciones de la Teoría de Ruina en los seguros generales. Se analizará el modelo básico de la Teoría de Ruina o mejor conocido como el modelo Cramér-Lundberg. A destacar dentro de este capítulo, el análisis que se hará sobre el coeficiente de ajuste y la desigualdad de Lundberg, ya que constituyen pilares para el cálculo de la probabilidad de ruina.

En el capítulo II se estudiará con mayor profundidad la modelación de la siniestralidad total de un periodo, esto debido a la relevancia de los siniestros dentro del modelo de proceso de superávit. Para ello se analizará la distribución tanto del monto de los siniestros como de su número. Otro aspecto a resaltar dentro de este capítulo, es el tratamiento sobre el recargo de seguridad y su relación con los siniestros para determinar la tasa de prima en una compañía de seguros. Por último, en este capítulo se verán aquellos elementos dentro del proceso asegurador que tienen una naturaleza estocástica.

Finalmente, en el capítulo III se harán aplicaciones numéricas sobre el cálculo de la probabilidad de ruina y su relación con el análisis de solvencia de una compañía de seguros, utilizando para ello datos reales del sector asegurador mexicano en el ramo de incendio. Se identificará la relación que guarda la Teoría de Ruina y su práctica para con las reservas actuariales dentro de una compañía de seguros. Además, se verán aquellos aspectos que pueden ser añadidos al modelo del proceso de superávit para hacerlo más completo, entre los que se señalarán la modelación de gastos, impuestos y dividendos.

# CAPITULO I. LA TEORIA DE RUINA

## 1.1 Introducción a la Teoría de Ruina

La Teoría de Ruina se refiere al nivel de superávit que mantiene un portafolio conformado por pólizas de seguro de una determinada compañía aseguradora. Considera la evolución del fondo asegurador en el tiempo, tomando en cuenta el número de reclamaciones que ocurren, así como sus montos.

En la Teoría de Ruina se asume que el asegurador comienza con una cantidad positiva de dinero (un capital inicial), cobra primas y paga las reclamaciones cuando éstas ocurren. Por lo tanto, el modelo que representa a la Teoría de Ruina tiene tres componentes: superávit inicial (o superávit en el tiempo cero), primas recibidas y reclamaciones pagadas. En la literatura actuarial, esto se conoce como un *modelo de proceso de superávit*.

Cuando el superávit del asegurador es cero o un monto menor a éste, se dice que la ruina ocurre. Este término técnico no es sinónimo de *insolvencia*, mas bien se está hablando de un término técnico que produce alguna toma de decisión. En una situación de la vida real, el evento de ruina podría no ser tan irremediable como su nombre lo sugiere, ya que si el capital de una compañía aseguradora asignado a una cartera decrece en forma significativa, la aseguradora puede tomar ciertas medidas para subsanar esta situación. De tal forma que, suponiendo que la compañía aseguradora posee varios portafolios, la ruina en uno de ellos no significa, necesariamente, bancarrota.

## 1.2 Definición del problema

Bajo la Teoría de Riesgo Colectivo, la variable aleatoria que representa el *monto acumulado de pérdida* en una unidad de tiempo, el cual se denota como  $S$ , tiene una distribución compuesta por una distribución primaria para  $N$  (número de eventos) y una

distribución secundaria para  $X$  (severidad de la pérdida). Ahora se extiende la variable  $S$  del monto acumulado de pérdida hacia el concepto de *proceso acumulado de pérdida*, el cual se denota como  $S(t)$ , para tener una variable que represente el monto acumulado de pérdida en un intervalo de tiempo que va desde 0 hasta  $t$ .

El proceso acumulado de pérdida  $S(t)$  se modela como

$$S(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)}, \quad (1.2.1)$$

donde  $N(t)$  denota un proceso de conteo para el número de pérdidas en el intervalo  $(0, t]$ , las distintas  $X_i$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que representan la severidad de la pérdida, y éstas son independientes del proceso de frecuencia de pérdida que se expresa con  $N(t)$ . Bajo estos supuestos, el proceso acumulado de pérdida  $S(t)$  es un *proceso compuesto* con una distribución para  $N(t)$  y otra distribución para  $X$ . En particular, si  $N(t)$  es un proceso de Poisson, entonces se tiene que  $S(t)$  es un *proceso de Poisson compuesto*.

Una interesante aplicación del proceso acumulado de pérdida es en el área de los modelos de proceso de superávit. La forma general de dichos modelos asume un mecanismo de suministro de algún tipo de bien y un proceso de pérdida que reduce los bienes suministrados. Generalmente, el suministro se da en una forma determinada; pero la reducción se da bajo un proceso estocástico. Por conveniencia se asume que el suministro aumenta a una tasa constante  $c$  por unidad de tiempo y se reduce de acuerdo a un proceso de pérdida Poisson compuesto  $S(t)$  en el intervalo  $(0, t]$ . Por lo tanto, el suministro en el tiempo  $t$  está dado por

$$U(t) = u + ct - S(t) \quad (1.2.2)$$

para  $t \geq 0$ , donde  $U(0) = u$  indica el suministro inicial del bien.

Un ejemplo de un modelo de proceso de superávit es el *modelo de inventario*. Sea  $u$  el número de unidades de un producto en el inventario en el tiempo 0, y sea  $c$  la tasa a la cual las unidades del producto son adicionadas al inventario. Las ventas ocurren de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$ , y cada venta es por un número aleatorio de  $X$  unidades. Si se cumplen las condiciones de independencia para un proceso compuesto, entonces  $S(t)$  representa las ventas acumuladas en el período  $(0, t]$  y el tamaño del inventario en el tiempo  $t$  es  $U(t)$  dado por la Ecuación (1.2.2).

Ahora bien, en el contexto de los seguros, se considera a  $u$  como el fondo de dinero inicial asociado a un portafolio particular de pólizas de seguros. El fondo se incrementa por un ingreso continuo de primas a una tasa fija  $c$  por unidad de tiempo y disminuye de acuerdo a las reclamaciones hechas, las cuales ocurren de acuerdo a un proceso agregado de reclamaciones  $S(t)$ . Por lo tanto,  $U(t)$  representa el balance del fondo en el tiempo  $t$ , es decir, el *superávit* en el tiempo  $t$ .

### **1.3 Modelo básico de la Teoría de Ruina (Cramér-Lundberg)**

El modelo básico de la Teoría de Ruina es conocido como el modelo de Cramér-Lundberg, el cual tiene sus orígenes en la tesis doctoral de Filip Lundberg (1903). En dicha tesis, Lundberg estudia el reaseguro de riesgos colectivos y presenta el proceso de Poisson compuesto. Dado que en esa época aún no se había desarrollado la teoría de los procesos estocásticos, los términos utilizados en ese trabajo son un tanto distintos a los actuales. En 1930 Harald Cramér retoma y desarrolla las ideas originales de Lundberg, y las pone en el contexto de los procesos estocásticos de reciente creación. El modelo ha sido extensamente estudiado y varias formas de generalizarlo se han propuesto y estudiado<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Rincón (2006).

El modelo clásico de Cramér-Lundberg es el proceso a tiempo continuo  $\{U(t): t \geq 0\}$  dado por

$$U(t) = u + ct - \sum_{j=1}^{N_t} X_j ,$$

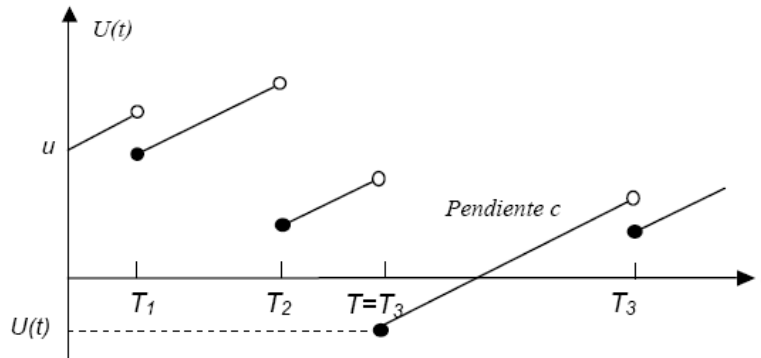
donde  $U(t)$  es el superávit del asegurador en el tiempo  $t$ ,  $u$  es el capital inicial de la compañía aseguradora,  $ct$  es la entrada por primas hasta el tiempo  $t$  con  $c$  constante,  $X_j$  es el monto de la  $j$ -ésima reclamación con distribución continua  $F(x)$  mientras que  $N_t$  sigue una distribución discreta de Poisson de parámetro  $\lambda$ , dando como resultado que el monto agregado de los siniestros se modela mediante un proceso de Poisson compuesto.

En este modelo se ignora la tasa de interés y los factores distintos a las primas y reclamaciones que pudieran afectar al excedente. Por ejemplo, se ignoran los gastos y dividendos de los tenedores de pólizas y de los accionistas.

La inclusión del proceso  $\{U(t): t \geq 0\}$  implica un interés en una familia de variables aleatorias, una para cada valor de  $t$ ,  $t \geq 0$ , y en las interconexiones entre sus distribuciones, con lo cual se establece la necesidad de una revisión simple sobre procesos estocásticos, donde también se profundizará en el proceso de Poisson.

Al proceso  $U(t)$  se le llama *proceso de superávit* o *proceso de riesgo* y tiene trayectorias como se muestra en la siguiente figura

**Figura 1.3.1.**  
Proceso de superávit<sup>2</sup>



Estas trayectorias comienzan siempre en  $u$ , que es el capital inicial. Los intervalos en donde estas trayectorias son continuas y crecientes corresponden a periodos en donde no hay reclamaciones. Nótese que el superávit se incrementa linealmente (con pendiente  $c$ ) excepto cuando ocurre una reclamación. Entonces el superávit cae por el monto de la reclamación. Las discontinuidades son siempre saltos hacia abajo y aparecen en el momento en que se efectúa una reclamación. Esto está determinado por el proceso Poisson. El tamaño de un salto es el tamaño de la reclamación dada por la variable  $X$ .

Como se ilustra en la Figura 1.3.1, el superávit podría llegar a ser negativo en ciertos tiempos,  $U(t) < 0$ , y cuando esto sucede, se habla de que ha ocurrido la ruina.

#### 1.4 El coeficiente de ajuste

La probabilidad de ruina se puede estudiar dentro de un intervalo finito de tiempo  $(0, t)$ , que se denota como  $\psi(u, t)$ , o dentro de un intervalo ilimitado de tiempo  $(0, \infty)$ , que se

<sup>2</sup> González (2005) Introducción a la Teoría del Riesgo y sus aplicaciones, notas de clase. página 99.



denota como  $\psi(u)$ . La probabilidad de ruina está en función del capital inicial  $u$ , lo cual se incorpora dentro del modelo.

Como preámbulo al estudio de la probabilidad de ruina, primero se establece que  $S(t)$  es un proceso de Poisson compuesto. Luego, las reclamaciones agregadas esperadas en una unidad de tiempo están dadas por

$$E[S(1)] = \lambda E[X], \quad (1.4.1)$$

que denotaremos como  $\lambda\mu$  por ser una notación más conveniente.

Al respecto, si  $S(t)$  es un proceso compuesto, con una distribución para  $N(t)$  y otra distribución para  $X$ , se tiene que la función generadora de momentos (f.g.m.) de  $S(t)$  está dada por

$$M_{S(t)}(r) = M_{N(t)}[\ln M_X(r)]. \quad (1.4.2a)$$

En particular, si  $N(t)$  es un proceso de Poisson con tasa (media)  $\lambda t$ , entonces se tiene

$$M_{S(t)}(r) = e^{\lambda t(e^u - 1)} \Big|_{u=\ln M_X(r)} = e^{\lambda t[M_X(r) - 1]}. \quad (1.4.2b)$$

Ahora bien, en la práctica la tasa de la prima  $c$  excederá el monto de la reclamación esperada por unidad de tiempo. La variable aleatoria de las reclamaciones agregadas en una unidad de tiempo es  $S(1)$ , por lo que se tiene  $c > E[S(1)]$ . En particular, se dice

$$c = (1 + \theta) E[S(1)] \quad (1.4.3)$$

para  $\theta > 0$ , y se refiere a  $\theta$  como un *recargo relativo de seguridad*.

De la Ecuación (1.4.1) y (1.4.3) se tiene que  $c = (1+\theta) \lambda\mu$ , donde  $\theta > 0$  por lo que  $c > \lambda\mu$ .

Ahora se considera el pago neto de la reclamación (pérdida neta) en el intervalo  $(0,t]$ , el cual se define como

$$Z(t) = S(t) - ct. \quad (1.4.4)$$

La f.g.m. de  $Z(t)$  está dada por

$$\begin{aligned} M_{Z(t)}(r) &= E[e^{r[S(t) - ct]}] \\ &= E[e^{rS(t)} e^{-rct}] \\ &= e^{-rct} M_{S(t)}(r) \\ &= e^{-rct} e^{\lambda t [M_X(r) - 1]}, \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

lo cual se deriva de la Ecuación (1.4.2b), ya que  $S(t)$  es un proceso de Poisson compuesto.

Luego se considera la ecuación  $M_{Z(t)}(r) = 1$ , la cual, de la Ecuación (1.4.5), se puede escribir como

$$e^{-rct} e^{\lambda t [M_X(r) - 1]} = 1. \quad (1.4.6a)$$

Aplicando el logaritmo natural en ambos lados de la Ecuación (1.4.6a), se tiene que

$$-rct + \lambda t [M_X(r) - 1] = 0$$

o

$$rc = \lambda[M_X(r)-1]. \quad (1.4.6b)$$

Sustituyendo  $c = (1+\theta)\lambda\mu$ , esto se vuelve

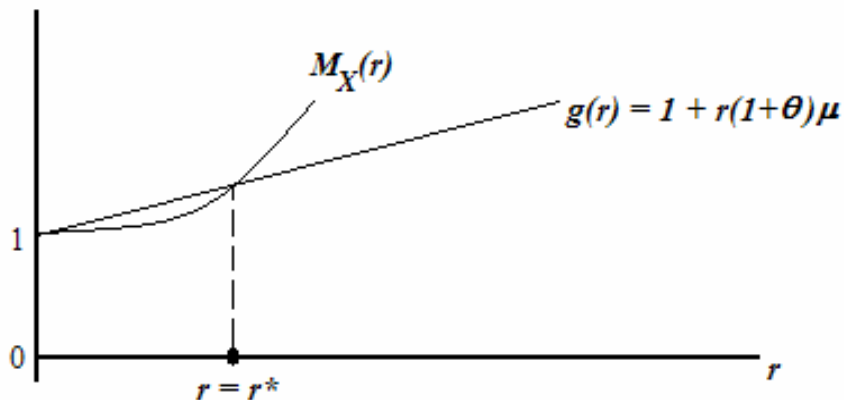
$$r(1+\theta)\lambda\mu = \lambda[M_X(r)-1]$$

o

$$M_X(r) = 1 + r(1+\theta)\mu. \quad (1.4.6c)$$

Claramente, la Ecuación (1.4.6c) se satisface cuando  $r = 0$ . No obstante, lo que también se quiere encontrar es un valor de  $r > 0$ , el cual se denota por  $r^*$ , que satisfaga la ecuación (1.4.6c). Por ser una notación más conveniente se usa  $g(r)$  para  $1 + r(1+\theta)\mu$ . El problema se ilustra en la figura siguiente.

**Figura 1.4.1.**  
Gráfica de  $M_X(r)$  y  $g(r)$ <sup>3</sup>



<sup>3</sup> Cunningham, *et al*, página 567.

Nótese que  $M_X(0) = g(0) = 1$ . La pendiente de  $M_X(r)$  en  $r = 0$  está dada por  $M'_X(0) = E[Y] = \mu$ , y la pendiente de la línea  $g(r)$  es  $g'(0) = (1+\theta)\mu$ . Dado que  $\theta > 0$ , se tiene que  $g'(0) > M'_X(0)$ , así que  $g(r)$  inicia en una posición más alta que  $M_X(r)$ . Sin embargo,  $M_X(r)$  es cóncava hacia arriba, por lo que eventualmente  $M_X(r)$  cruzará nuevamente  $g(r)$ . El valor de  $r$  al cual esto ocurre se conoce como el *coeficiente de ajuste*, y se denota como  $r = r^*$ .

Debe ser claro que  $r^*$  depende de la distribución de  $X$  y de la relación que existe entre  $c$  y  $E[S(1)] = \lambda\mu$ , la cual se expresa por el valor de  $\theta$  en la relación  $c = (1+\theta)\lambda\mu$ . De la gráfica representada en la Figura 1.4.1, se observa que a medida que  $\theta$  aumenta,  $g(r)$  se inclina más; pero  $M_X(r)$  no se afecta, así que el punto de cruce  $r = r^*$  se mueve hacia arriba y hacia la derecha. Entonces  $r^*$  es una función creciente de  $\theta$ . De forma inversa, a medida que  $\theta \rightarrow 0$ , la pendiente de  $g(r) = 1+r(1+\theta)\mu$ , que es  $g'(r) = (1+\theta)\mu$ , se aproxima a  $\mu$ , así que  $g(r)$  se vuelve tangente a  $M_X(r)$  en  $r = 0$ . Entonces,  $g(r)$  y  $M_X(r)$  no vuelven a cruzarse, haciendo que  $r^* \rightarrow 0$  a medida que  $\theta \rightarrow 0$ .

### 1.5 La desigualdad de Lundberg

Dentro del proceso de riesgo clásico, la *desigualdad de Lundberg* establece que

$$\psi(u) \leq e^{-r^*u},$$

donde  $r^*$  es el coeficiente de ajuste.

Este resultado se puede probar por el método inductivo. Se define  $\psi_n(u)$  como la probabilidad de ruina en o antes de la  $n$ -ésima reclamación. Entonces resulta suficiente mostrar que

$$\psi_n(u) \leq e^{-r^*u}$$

para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , dado que

$$\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u).$$

Por lo tanto, se asume que para un valor fijo de  $n$ , donde  $n \geq 1$ ,  $\psi_n(u) \leq e^{-r^*u}$ . Luego, se establece una expresión para  $\psi_{n+1}(u)$  la cual considera el tiempo y el monto de la primera reclamación como sigue.

Se supone que la primera reclamación ocurre en el tiempo  $t > 0$  y que el monto de esta reclamación es  $x$ . Si la ruina ocurre en o antes de la  $(n+1)$ -ésima reclamación, se tiene que

- (i) la ruina ocurre en la primera reclamación, así que  $x > u + ct$ , o
- (ii) la ruina no ocurre en la primera reclamación, así que el superávit después del pago de esta reclamación,  $u + ct - x$ , es no negativa, y la ruina ocurre desde este nuevo nivel de superávit en las siguientes  $n$  reclamaciones.

Dado que las reclamaciones ocurren como un proceso de Poisson (con parámetro  $\lambda$ ), la distribución del tiempo hasta la primera reclamación es exponencial con parámetro  $\lambda$ . Entonces, integrando sobre todos los posibles tiempos y montos de la primera reclamación se tiene

$$\psi_{n+1}(u) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^{\infty} f(x) dx dt + \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x) \psi_n(u+ct-x) dx dt.$$

La primera integral representa la probabilidad de ruina en la primera reclamación, y la segunda integral representa la probabilidad de que la ruina no ocurre en la primera reclamación pero sí ocurra en alguna de las siguientes  $n$  reclamaciones. También se establece que, en términos probabilísticos, el proceso de superávit “comienza de nuevo”

después del pago de la primera reclamación, así que la probabilidad de ruina en las siguientes  $n$  reclamaciones después del pago de la primera reclamación, es tan sólo  $\psi_n(u + ct - x)$ .

Ahora se aplica la hipótesis inductiva para escribir

$$\psi_{n+1}(u) \leq \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^{\infty} f(x) dx dt + \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x) e^{-r^*(u+ct-x)} dx dt .$$

Luego, se usa el hecho de que  $e^{-r^*(u+ct-x)} \geq 1$  para  $x \geq u + ct$ , así que

$$\int_{u+ct}^{\infty} f(x) dx \leq \int_{u+ct}^{\infty} e^{-r^*(u+ct-x)} f(x) dx ,$$

con lo cual se tiene que

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &\leq \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} f(x) e^{-r^*(u-ct-x)} dx dt \\ &= e^{-r^*u} \int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+cr^*)t} \int_0^{\infty} e^{r^*x} f(x) dx dt \\ &= e^{-r^*u} \int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+cr^*)t} M_X(r^*) dt . \end{aligned}$$

Dado que  $\lambda + cr^* = \lambda M_X(r^*)$ , la integral es igual a 1 con lo cual se tiene que

$$\psi_{n+1}(u) \leq e^{-r^*u}$$

Finalmente, se debe mostrar que el resultado es cierto para  $n = 1$ . Siguiendo los argumentos antes expuestos

$$\begin{aligned}
 \psi_1(u) &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^{\infty} f(x) dx dt \\
 &\leq \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^{\infty} f(x) e^{-r^*(u+ct-x)} dx dt \\
 &\leq \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} f(x) e^{-r^*(u+ct-x)} dx dt \\
 &= e^{-r^*u}
 \end{aligned}$$

y la prueba está completa.

## 1.6 Probabilidad de ruina y probabilidad de supervivencia

La probabilidad de ruina en un tiempo infinito, también conocida como la probabilidad última de ruina, se define como

$$\psi(u) = \Pr(U(t) < 0 \text{ para algún } t > 0).$$

En otras palabras,  $\psi(u)$  es la probabilidad de que el superávit del asegurador caiga por debajo de cero en un algún tiempo futuro, esto es que las reclamaciones excedan el capital inicial más el ingreso por primas. Esta es una probabilidad de ruina en tiempo continuo, la cual también se puede definir una probabilidad última de ruina en tiempo discreto como

$$\psi_r(u) = \Pr(U(t) < 0 \text{ para algún } t, t = r, 2r, 3r, \dots).$$

Así que, bajo esta definición, la ruina ocurre sólo si el superávit es menor a cero en algún punto en el tiempo  $r, 2r, 3r, \dots$ . Si la ruina ocurre bajo la definición de tiempo discreto, ésta también debe ocurrir bajo la definición de tiempo continuo. No obstante,

lo contrario no se cumple. Para ver esto, se considera un proceso de superávit donde, para algún integrando  $n$ , se tiene que  $U(nr) > 0$  y  $U((n+1)r) > 0$  con  $U(\tau) < 0$  para algún  $\tau \in (nr, (n+1)r)$ . Si  $U(t) > 0$  para toda  $t$  fuera del intervalo  $(nr, (n+1)r)$ , entonces la ruina ocurre bajo la definición de tiempo continuo; pero no bajo la definición de tiempo discreto. Esto es  $\psi_r(u) < \psi(u)$ . Sin embargo, a medida que  $r$  se hace pequeña, de forma que se “revisa” el nivel de superávit muy frecuentemente, se tiene  $\psi_r(u)$  debería ser una buena aproximación de  $\psi(u)$ .

Se define a la probabilidad última de ruina en un tiempo finito  $\psi(u, t)$  como

$$\psi(u, t) = \Pr(U(s) < 0 \text{ para algún } s, 0 < s \leq t).$$

De tal forma,  $\psi(u, t)$  es la probabilidad de que el superávit del asegurador caiga por debajo de cero en un intervalo de tiempo finito  $(0, t]$ . También, para un tiempo discreto, se puede definir la probabilidad última de ruina en un tiempo finito como

$$\psi_r(u, t) = \Pr(U(s) < 0 \text{ para algún } s, s = r, 2r, 3r, \dots, t)$$

donde  $t$  es un integrando múltiplo de  $r$ . Los argumentos antes utilizados para explicar porque  $\psi_r(u) < \psi(u)$  también aplican en el tiempo finito dando que  $\psi_r(u, t) < \psi(u, t)$ , además, si  $r$  es pequeña, se tiene que  $\psi_r(u, t)$  debería ser una buena aproximación de  $\psi(u, t)$ .

La probabilidad de supervivencia se define como  $\phi(u) = 1 - \psi(u)$ , que es la probabilidad de que la ruina nunca ocurra con un superávit inicial  $u$ . Una ecuación para  $\phi$  se puede establecer al adaptar el razonamiento utilizado para probar la desigualdad de Lundberg. Al considerar el tiempo y el monto de la primera reclamación se tiene



$$\phi(u) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x) \phi(u+ct-x) dx dt, \quad (1.6.1)$$

haciendo notar que si la primera reclamación ocurre en el tiempo  $t$ , su monto no debe exceder  $u+ct$ , ya que en caso contrario, la ruina ocurriría. Sustituyendo  $s = u+ct$  en la Ecuación (1.6.1) se tiene

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \frac{1}{c} \int_u^{\infty} \lambda e^{-\lambda(s-u)/c} \int_0^s f(x) \phi(s-x) dx ds \\ &= \frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c} \int_u^{\infty} e^{-\lambda s/c} \int_0^s f(x) \phi(s-x) dx ds. \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

Se puede establecer una ecuación para  $\phi$ , conocida como la ecuación integro-diferencial, derivando la Ecuación (1.6.2), y la ecuación resultante se puede utilizar para encontrar una solución explícita para  $\phi$ . Haciendo la derivada se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \phi(u) &= \frac{\lambda^2}{c^2} e^{\lambda u/c} \int_u^{\infty} e^{-\lambda s/c} \int_0^s f(x) \phi(s-x) dx ds - \frac{\lambda}{c} \int_0^u f(x) \phi(u-x) dx \\ &= \frac{\lambda}{c} \phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u f(x) \phi(u-x) dx. \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

En una primera impresión, la Ecuación (1.6.3) no parecer tener una ruta de solución promisoría, ya que la función  $\phi$  aparece en tres diferentes lugares de la ecuación. Sin embargo, eliminando el término de la integral, se puede crear una ecuación diferencial y de esta forma resolverla.

Para abordar esto, se considera la situación cuando  $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ ,  $x \geq 0$ . Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \phi(u) &= \frac{\lambda}{c} \phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \alpha e^{-\alpha x} \phi(u-x) dx \\ &= \frac{\lambda}{c} \phi(u) - \frac{\alpha \lambda}{c} \int_0^u e^{-\alpha(u-x)} \phi(x) dx \\ &= \frac{\lambda}{c} \phi(u) - \frac{\alpha \lambda}{c} e^{-\alpha u} \int_0^u e^{\alpha x} \phi(x) dx. \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

La derivada de la Ecuación (1.6.4) da

$$\frac{d^2}{du^2} \phi(u) = \frac{\lambda}{c} \frac{d}{du} \phi(u) + \frac{\alpha^2 \lambda}{c} e^{-\alpha u} \int_0^u e^{\alpha x} \phi(x) dx - \frac{\alpha \lambda}{c} \phi(u). \quad (1.6.5)$$

El término de la integral en la Ecuación (1.6.5) es simplemente el término de la integral en la Ecuación (1.6.4) multiplicado por  $-\alpha$ . Entonces, si se multiplica a la Ecuación (1.6.4) por  $\alpha$  y se suma la ecuación resultante a la Ecuación (1.6.5) se tiene

$$\frac{d^2}{du^2} \phi(u) + \alpha \frac{d}{du} \phi(u) = \frac{\lambda}{c} \frac{d}{du} \phi(u)$$

o

$$\frac{d^2}{du^2} \phi(u) + \left( \alpha - \frac{\lambda}{c} \right) \frac{d}{du} \phi(u) = 0.$$

Esto es una ecuación diferencial de segundo orden y su solución general es

$$\phi(u) = a_0 + a_1 e^{-(\alpha-\lambda/c)u},$$

donde  $a_0$  y  $a_1$  son constantes. Dado que la desigualdad de Lundberg aplica, se sabe que  $\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u) = 1$ , lo que da  $a_0 = 1$ . Luego se sigue que  $\phi(0) = 1 + a_1$ , esto es  $a_1 = -\psi(0)$ , así que

$$\phi(u) = 1 - \psi(0)e^{-(\alpha-\lambda/c)u}.$$

Ahora bien, lo que queda por resolver es  $\psi(0)$ , y esto se puede hacer suponiendo que la desigualdad de Lundberg aplica. Escribiendo  $\phi = 1 - \psi$  en la Ecuación (1.6.3) se tiene que

$$\frac{d}{du} \psi(u) = \frac{\lambda}{c} \psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u f(x) \psi(u-x) dx - \frac{\lambda}{c} (1 - F(u)),$$

e integrando esta ecuación sobre  $(0, \infty)$  se obtiene

$$-\psi(0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} \psi(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} \int_0^u f(x) \psi(u-x) dx du - \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} (1 - F(u)) du. \quad (1.6.6)$$

Cambiando el orden de integración de la doble integral de la Ecuación (1.6.6), se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^u f(x) \psi(u-x) dx du &= \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \psi(u-x) du f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \psi(y) dy f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \psi(y) dy. \end{aligned}$$

De este modo, los primeros dos términos de la parte derecha de la Ecuación (1.6.6) se cancelan, quedando

$$\psi(0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} (1 - F(u)) du = \frac{\lambda m_1}{c}. \quad (1.6.7)$$

No se necesita especificar la forma de  $F$  para probar este resultado; pero se asumió que la desigualdad de Lundberg aplica. No obstante, la fórmula de la Ecuación (1.6.7) aplica de forma generalizada, sin tener que asumir que la desigualdad de Lundberg aplica<sup>4</sup>.

Por lo tanto, la solución completa para  $\phi$  cuando  $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ ,  $x \geq 0$ , es

$$\phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \lambda/c)u}. \quad (1.6.8)$$

### 1.7 Pérdida máxima probable y tiempo de ruina

Se considera un nuevo proceso  $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ , conocido como el proceso de pérdida agregada, definida como  $L(t) = S(t) - ct$  para toda  $t \geq 0$ , así que  $U(t) = u - L(t)$ . Luego, se define la variable aleatoria  $L$  como el máximo del proceso de pérdida agregada, y se puede relacionar a  $L$  con  $\phi$  como sigue

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \Pr(U(t) \geq 0 \text{ para todo } t > 0) \\ &= \Pr(L(t) \leq u \text{ para todo } t > 0) \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup> Dickson, página 137.

$$= \Pr(L \leq u).$$

De este modo,  $\phi$  es la función de distribución de  $L$ , y dado que  $L(0)=0$ ,  $L$  es una variable aleatoria no-negativa. Más aún, cuando  $\phi(0) = \Pr(L = 0)$ ,  $L$  tiene una distribución mixta con una distribución concentrada en cero.

Dado un superávit inicial  $u$ , el tiempo de la ruina se denota como  $T_u$  y se define como

$$T_u = \inf\{t : U(t) < 0\}$$

con  $T_u = \infty$  si  $U(t) \geq 0$  para todo  $t > 0$ . De este modo,  $\psi(u) = \Pr(T_u < \infty)$ .

La distribución de  $T_u$  es importante ya que  $\Pr(T_u \leq t)$  implica la probabilidad de que la ruina ocurra en o antes del tiempo  $t$ . En otras palabras, si se conoce la distribución de  $T_u$ , se pueden calcular las probabilidades de ruinas para tiempos finitos.

## 1.8 Métodos de Aproximación

### 1.8.1 Teorema Central del Límite

La suma de una serie de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (de media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  cada una de ellas) tiende a seguir una distribución Normal  $N \sim (n\mu, \sqrt{n}\sigma)$ , lo cual se da cuando  $n > 30$ .

Ahora bien, se considera una cartera  $C$  formada por  $n$  pólizas distribuidas en  $k$  categorías homogéneas  $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$ , a su vez cada una de estas categorías  $j = 1, 2, 3, \dots, k$  está formada por pólizas que tienen un mismo nivel de factores de riesgo.

Dadas estas condiciones se define a  $X_{ij}$  como la variable aleatoria asociada a la siniestralidad de la póliza  $i$  que pertenece a la categoría  $j$ . En otras palabras

$$X_1 = X_{11} + X_{21} + X_{31} + \dots + X_{n_1 1} = \sum_{i=1}^{n_1} X_{i1},$$

donde  $X_1$  es la siniestralidad total de la primera categoría. Los parámetros de  $X_{i1}$  son

$$E[X_{i1}] = P_1$$

$$\sigma^2(X_{i1}) = \sigma_1^2 \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, n_1.$$

Análogamente, para las categorías restantes, resulta lo siguiente

$$X_2 = X_{12} + X_{22} + X_{32} + \dots + X_{n_2 2} = \sum_{i=1}^{n_2} X_{i2}$$

$$E[X_{i2}] = P_2$$

$$\sigma^2(X_{i_2}) = \sigma_2^2 \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, n_2, \dots$$

$$X_k = X_{1k} + X_{2k} + X_{3k} + \dots + X_{n_k k} = \sum_{i=1}^{n_k} X_{ik}$$

$$E[X_{ik}] = P_k$$

$$\sigma^2(X_{ik}) = \sigma_k^2 \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, n_k$$

La variable aleatoria de la siniestralidad total de la cartera  $S$  tiene los parámetros siguientes

$$E[S] = \mu = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + \dots + E[X_k] = \sum_{j=1}^k n_j P_j$$

$$\sigma^2[S] = \sigma^2 = \sigma^2[X_1] + \sigma^2[X_2] + \sigma^2[X_3] + \dots + \sigma^2[X_k] = \sum_{j=1}^k n_j \sigma_j^2$$

Si el tamaño de la cartera es lo suficientemente grande, aplicando el *teorema central del límite* se obtiene lo siguiente

$$P[S \leq s] = P\left[\frac{S - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \approx \frac{s - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right] = \Phi\left[\frac{s - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right]$$

que es una distribución Normal (0,1). Ésta es la distribución más utilizada dentro de la teoría individual del riesgo; aunque también se ha propuesto la distribución Normal Power<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup> Martínez (2006).

## 1.9 Aplicaciones a los seguros generales

### 1.9.1 La probabilidad de ruina

En una compañía de seguros se puede obtener una medida útil del riesgo financiero calculando la probabilidad de ruina como una consecuencia de la variación en la cantidad del superávit.

Para un proceso de superávit de tiempo continuo, la probabilidad de ruina para un intervalo de tiempo infinito está dada por

$$\psi(u) = \frac{e^{-r^*u}}{E[e^{-r^*U(T)} | T < \infty]}, \quad (1.9.1.1)$$

donde  $T$  denota el tiempo (aleatorio) de ruina. Entonces  $U(T)$  indica la variable aleatoria para la posición del superávit al momento de la ruina. Nótese que  $U(T)$  es necesariamente una cantidad negativa, así que  $Y = -U(T)$  es positiva y denota la variable aleatoria para el déficit (positivo) en el instante de la ruina. El denominador de la Ecuación (1.9.1.1) indica el valor de la esperanza condicional de  $e^{r^*Y}$ , dado que la ruina ocurre, lo cual se muestra con  $|T < \infty$ <sup>6</sup>. Esto se puede interpretar como  $M_Y(r^*)$ , la f.g.m. para la variable aleatoria  $Y$  evaluada en el coeficiente de ajuste  $r^*$ .

Se hacen varias observaciones acerca de  $\psi(u)$  definida por la Ecuación (1.9.1.1).

- (1) A medida de que  $\theta \rightarrow 0$ , así como  $r^* \rightarrow 0$ , se tiene que  $\psi(u) \rightarrow 1$ , lo cual indica que la ruina es cierta. Esto es, si  $\theta \rightarrow 0$  se tiene que  $c$  se aproxima al monto de la reclamación esperada, sugiriendo entonces que si sólo se cobra por el seguro (prima) el monto de la reclamación esperada, la ruina es (eventualmente) inevitable.

---

<sup>6</sup> Es importante señalar que no se está asegurando que la ruina ocurre, lo que en ese caso haría que la probabilidad de ocurrencia fuese de 1. Mas bien, lo que se está encontrando es la esperanza condicional de  $e^{r^*Y}$ , bajo la condición de que la ruina ocurre.



(2) Dado que  $Y$  y  $r^*$  son positivos, el denominador de la Ecuación (1.9.1.1) excede a 1, por lo que  $\psi(u) < e^{-r^*u}$ , estableciendo un límite superior a la probabilidad de ruina.

(3) Igualmente, se puede establecer un límite inferior  $\psi(u)$  si existe un valor máximo para el monto individual de pérdida  $X$ . Si  $m$  es el valor máximo de  $X$ , entonces  $m$  también es el valor máximo de  $Y$ , dado que el déficit al momento de la ruina no puede exceder el tamaño de la reclamación que causa el evento de ruina. Entonces se tiene que  $Y \leq m$ , de tal forma que  $r^*Y \leq r^*m$ , y por ende,  $e^{r^*Y} \leq e^{r^*m}$  siguiendo que  $E[e^{r^*Y}] \leq e^{r^*m}$ . Lo cual muestra que

$$\psi(u) \geq \frac{e^{-r^*u}}{er + m} = e^{-r^*(u+m)},$$

estableciendo que  $e^{-r^*(u+m)}$  es un límite inferior de  $\psi(u)$ .

(4) Claramente, si  $\psi(u) \rightarrow 0$  dado que  $u \rightarrow \infty$ , indica que la ruina no es posible si comenzamos con un superávit inicial “lo suficientemente grande”.

## **CAPITULO II. MODELACIÓN DE LA SINIESTRALIDAD Y SOLVENCIA DE UNA COMPAÑIA DE SEGUROS (TEORÍA DE RIESGO)**

### **2.1 La siniestralidad total de un periodo**

El riesgo colectivo consiste en unidades individuales de riesgo tales como casas, edificios y fábricas con seguros contra incendios, o personas con seguros de vida. Los eventos primarios son los accidentes con los que se topan aleatoriamente las unidades, dando paso a las reclamaciones. En la teoría del riesgo individual la modelación del proceso de riesgo considera a estas unidades como entidades separadas. La probabilidad de que una o más reclamaciones ocurran en un periodo de tiempo está determinada por cada unidad, así como la distribución del tamaño de la reclamación. Por lo tanto, la variable que denota el número de reclamaciones de todo el colectivo se obtiene mediante la suma de las variables del número de reclamaciones de las unidades de riesgo individual y, correspondientemente, el monto agregado de las reclamaciones es la suma del monto agregado de las reclamaciones de cada unidad de riesgo.

Históricamente, la teoría de riesgo individual es la primera fase en el desarrollo de la teoría de riesgo. En la práctica, sin embargo, no es adecuada para grandes riesgos colectivos y es más conveniente utilizar un enfoque de aproximación colectivo. Este enfoque propone un modelo que se desarrolla directamente de la variable del número de reclamaciones y del monto agregado de las reclamaciones para todo el colectivo, sin considerar a las unidades de riesgo individual.

## 2.2 La distribución del monto de los siniestros

Se considera una situación donde el monto de las reclamaciones puede variar. El monto de la reclamación es la suma que el asegurador tiene que pagar si se presenta un incendio, inundación, accidente, muerte u otro evento asegurado.

El proceso de reclamación se generaliza para incluir el monto de las reclamaciones. Sea  $k$  el número de reclamaciones de un portafolio de seguros en un determinado periodo de tiempo, por ejemplo, un año. El monto agregado de reclamaciones  $X$  durante ese periodo es

$$X = \sum_{i=1}^k Z_i \quad (2.2.1)$$

donde  $Z_i$  es el tamaño de la reclamación de la  $i$ -ésima reclamación ocurrida durante el periodo de tiempo. Si no hay reclamaciones, entonces  $k = 0$  y  $X = 0$ .

Las variables de la forma (2.2.1) se conocen como sumas aleatorias dado que el número  $k$  de los sumandos es un número aleatorio así como el valor individual de los sumandos.

El objetivo es encontrar una expresión para la distribución de probabilidad del monto agregado de reclamaciones  $X$  en términos del número de reclamaciones (como se verá más adelante en este capítulo, 2.5) y la distribución del tamaño de la reclamación. El evento  $\{X \leq x\}$  puede ocurrir de las siguientes formas

$$k = 0 \text{ (siendo } X \text{ no negativo),}$$

$$k = 1 \text{ y } Z_1 \leq X,$$

$$k = 2 \text{ y } Z_1 + Z_2 \leq X,$$

$$k = 3 \text{ y } Z_1 + Z_2 + Z_3 \leq X,$$

etc.

Se asume que el tamaño de las reclamaciones individuales  $Z_i$  son independientes del número de reclamaciones  $k$ , y aplicando las reglas de la suma y multiplicación de probabilidades, la función de densidad (f.d.) de  $F$  de  $X$  se puede escribir como

$$F(X) = \Pr\{X \leq x\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot \Pr ob\left\{\sum_{i=1}^k Z_i \leq X\right\}, \quad (2.2.2)$$

donde  $p_k = \Pr ob\{k = k\}$  es la probabilidad de que exactamente  $k$  reclamaciones ocurran.

Para que este resultado se mantenga es necesario que las variables del tamaño de las reclamaciones sean independientes de  $k$ <sup>1</sup>.

Ahora se asume que, además de ser independientes del número de reclamaciones  $k$ , el tamaño de las reclamaciones  $Z_i$  que se agrupan en la variable del monto de las reclamaciones agregadas  $X$  son también mutuamente independientes e idénticamente distribuidas, cada una teniendo la misma f.d.  $S$ ,

$$S(Z) = \Pr ob\{Z_i \leq Z\}. \quad (2.2.3)$$

Una variable del monto agregado de reclamaciones  $X$  que satisfaga estos supuestos se conoce como una *variable compuesta*, y su distribución se conoce como *distribución*

---

<sup>1</sup> Daykin, *et al.*, página 56.

*compuesta*. Cuando la variable del número de reclamaciones  $k$  es Poisson (mixta), la distribución de  $X$  es una *Poisson (mixta) compuesta*. Términos análogos son utilizados para los respectivos procesos de los montos de las reclamaciones agregadas cuando la acumulación de los montos de las reclamaciones se asume que tome lugar continuamente en el tiempo.

La independencia mutua de las variables del tamaño de las reclamaciones  $Z_i$  y la variable del número de las reclamaciones  $k$  significa que la probabilidad de una reclamación individual de un tamaño particular no está afectada por el número de reclamaciones que han ocurrido, ni por el tamaño de las mismas. Consecuentemente, la f.d.  $F$  de la variable compuesta  $X$  está completamente determinada por la distribución del número de reclamaciones y el tamaño de la reclamación f.d.  $S$ . Más precisamente, para una variable compuesta  $X$  la fórmula (2.2.2) se vuelve

$$F(X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot S^{k*}(X), \quad (2.2.4)$$

donde

$$S^{k*}(X) = \Pr ob \left\{ \sum_{i=1}^k Z_i \leq X \right\} \quad (2.2.5)$$

es la  $k$ -ésima convolución  $S^{k*}$  de  $S$  evaluada en el punto  $X$ . En particular,  $S^{0*}(X) = 0$ , si  $X < 0$ , y  $S^{0*}(X) = 1$ , si  $X \geq 0$ . Se hace notar la fórmula recursiva  $S^{k*}(X) = S^* S^{(k-1)*}(X)$ , cuando  $k > 0$ .

### 2.3 Momentos Ordinarios y Centrales<sup>2</sup>

A continuación se señalará la forma de los momentos ordinarios y centrales, así como de algunos estimadores de una variable aleatoria.

Sea  $\xi$  una variable aleatoria cualquiera, se tiene que

Momentos ordinarios:

$$\alpha_1(\xi) = E(\xi) = \mu(\xi)$$

$$\alpha_2(\xi) = E(\xi^2)$$

...

$$\alpha_i = E(\xi^i)$$

Momentos centrales:

$$\mu_2(\xi) = E[(\xi - E[\xi])^2] = \sigma^2(\xi) = \alpha_2(\xi) - \alpha_1^2(\xi)$$

$$\mu_3(\xi) = E[(\xi - E[\xi])^3] = \alpha_3(\xi) - 3\alpha_1(\xi)\alpha_2(\xi) + 2\alpha_1^3(\xi)$$

$$\mu_4(\xi) = E[(\xi - E[\xi])^4] = \alpha_4(\xi) - 4\alpha_1(\xi)\alpha_3(\xi) + 6\alpha_1^2(\xi)\alpha_2(\xi) - 3\alpha_1^4(\xi)$$

Media:

$$\mu(\xi) = \alpha_1(\xi)$$

Varianza:

$$\sigma^2(\xi)$$

---

<sup>2</sup> González (2005)

Sesgo:

$$\gamma_1(\xi) = \frac{\mu_3(\xi)}{\sigma^3(\xi)}$$

Kurtosis:

$$\gamma_2(\xi) = \frac{\mu_4(\xi)}{\sigma_2^2(\xi)} - 3.$$

## 2.4 Función Generadora de Momentos

$$M(t) = E(e^{xt}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} dF_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} f_X(x) dx \quad t \in R$$

Se dice que la función generadora de momentos<sup>3</sup> (f.g.m.) existe si la integral está definida para valores estrictamente positivos  $t_0 > 0$ . Si también  $M(t_1) < \infty$  para un valor negativo  $t_1 < 0$ , entonces todos los momentos de  $F_X(x)$  existen y presentan la siguiente relación:

$$\begin{aligned} M'(0) &= E(X) \\ M''(0) &= E(X^2) \\ &\dots \\ M^{(k)}(0) &= E(X^k) \end{aligned}$$

A partir de la f.g.m. se pueden obtener fácilmente los momentos ordinarios mediante el valor de las derivadas sucesivas de esta función en el punto  $\tau = 0$ .

---

<sup>3</sup> González F. (2005), páginas 41 y 42.

$$M_{\xi}(\tau) = E[e^{\xi\tau}]$$

$$\alpha_i(\xi) = E(\xi^i) = \left. \frac{d^i M_{\xi}(\tau)}{d\tau^i} \right|_{\tau=0} = M_{\xi}^{(i)}(0)$$

La f.g.m. tiene algunas propiedades interesantes que vale la pena recordar:

- i. Puede expresarse mediante la expansión de momentos ordinarios

$$M_{\xi}(\tau) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \frac{\tau^h}{h!}.$$

- ii. La función de distribución está determinada de manera única por su f.g.m. (si existe).
- iii. Si  $y = a\xi + b \Rightarrow M_y(\tau) = e^{b\tau} M_{\xi}(a\tau)$ .
- iv. Si  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son variables aleatorias independientes, la f.g.m. de la suma  $\xi_1 + \xi_2$  se obtiene por producto,  $M_{\xi_1 + \xi_2}(\tau) = M_{\xi_1}(\tau)M_{\xi_2}(\tau)$  –en el caso de las funciones de distribución, se está hablando de convoluciones–.



## 2.5 Modelación del número de siniestros

Las reclamaciones de los seguros ocurren como una consecuencia de eventos aleatorios, para los cuales no es posible predecir su tiempo exacto de ocurrencia ni tampoco su número exacto.

Si se puede asumir que las reclamaciones ocurren independientemente una de otra, entonces el número de reclamaciones en un periodo de tiempo dado puede estar distribuido Poisson.

El número de reclamaciones esperadas  $N(t) = E(x(t))$  es una función continua de  $t$ . Siendo  $k$  una variable que denota el número de reclamaciones y que está distribuida Poisson, las probabilidades de los diferentes valores de  $x$  se obtienen por medio de la siguiente expresión:

$$p_x = p_x(\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad (2.5.1)$$

donde  $\lambda$  es un número positivo real, conocido como el parámetro de Poisson, que es igual al valor esperado de  $x$ , es decir,  $\lambda = E(x)$ .

La distribución Poisson (2.5.1) define una clase de distribuciones caracterizadas por el parámetro  $\lambda$ , denotadas como Poisson( $\lambda$ ).

## 2.6 La distribución Poisson

Cuando una variable aleatoria  $N$  tiene una distribución Poisson con parámetro  $\lambda > 0$ , su función de probabilidad está dada por

$$\Pr(N = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad (2.6.1)$$

para  $x = 0, 1, 2, \dots$ . La f.g.m. es

$$M_N(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$$

y la función generadora de probabilidad es

$$P_N(r) = \sum_{x=0}^{\infty} r^x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \exp\{\lambda(r - 1)\}.$$

Los momentos de  $N$  se obtienen a través de la función generadora de momentos (f.g.m).

Por ejemplo,

$$M'_N(t) = \lambda e^t M_N(t)$$

y

$$M''_N(t) = \lambda e^t M_N(t) + (\lambda e^t)^2 M_N(t)$$

de donde se sigue que  $E[N] = \lambda$  y  $E[N^2] = \lambda + \lambda^2$  tal que  $V[N] = \lambda$ .

Se utiliza la notación  $P(\lambda)$  para denotar una distribución Poisson con parámetro  $\lambda$ .

Las variables aleatorias distribuidas Poisson tienen propiedades muy útiles<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup> Daykin, *et al.*, páginas 33 a 35.

(a) Aditividad. La suma de variables independientes Poisson es distribuida Poisson. Más precisamente, si  $x_1, x_2, \dots, x_m$  son variables aleatorias independientes distribuidas Poisson, entonces su suma

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_m$$

también es distribuida Poisson, con un parámetro de Poisson  $\lambda$  igual a la suma de los parámetros de Poisson  $\lambda_i$  de los sumandos  $x_i$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m.$$

(b) Características.

Media:  $\mu = \lambda$

Varianza:  $\sigma = \lambda$

Sesgo:  $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

Kurtosis:  $\gamma_2 = \frac{1}{\lambda}$ .

(c) Fórmula recursiva. La forma más sencilla de calcular las probabilidades de Poisson  $p_x$  es utilizando la siguiente fórmula recursiva

$$p_x = \frac{\lambda}{x} \cdot p_{x-1} \quad \text{para } x = 1, 2, 3, \dots$$

con valor inicial  $p_0 = e^{-\lambda}$ .

## 2.7 La distribución mixta o ponderada

Esta distribución se utiliza cuando existen cambios aleatorios del parámetro de Poisson en su nivel esperado  $\lambda^5$ . Dichos cambios se describirán por un factor multiplicativo  $q$  tal que  $E(q) = 1$ . Se define de esta manera para que la intensidad de reclamación durante el periodo de tiempo sea al nivel esperado, el valor de  $q'$  de  $q$  será igual a 1. Si  $q' > 1$ , la intensidad sería mayor a lo esperado y viceversa si  $0 < q' < 1$ . A su vez, si el valor de  $q$  es fijo e igual a  $q'$ , la condición de independencia se satisface y el número de reclamaciones condicional  $F(x|q = q')$  es Poisson( $\lambda q'$ ).

La variable  $q$  ( $q > 0$ ) se llama *variable de mixtura* y la variable correspondiente al número de reclamaciones  $x$  como *variable mixta de Poisson*.

La f.d. de la variable de mixtura, es decir, la f.d. de mixtura, se denota como

$$H(q) = \Pr\{q \leq q'\}. \quad (2.7.1)$$

Sea  $x$  la variable del número de reclamaciones mixto de Poisson, y sea  $q$  la variable de mixtura correspondiente. Entonces, por definición, la distribución condicional  $F(\cdot|q = q')$  de  $x$  está distribuida Poisson( $\lambda q$ ) para cualquier valor de  $q'$  de la variable de mixtura  $q$ . Las probabilidades del número de reclamaciones  $p_x$  de  $x$  pueden obtenerse de las probabilidades de Poisson condicionales  $p_x(\lambda q')$  dado por (2.6.1),

$$p_x = E(p_x(\lambda q)) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda q'} \frac{(\lambda q')^x}{x!} dH(q'). \quad (2.7.2)$$

Esta fórmula tiene una explicación directa: el resultado de Poisson (el integrando) es evaluado para todos los estados alternativos de los factores de fondo, es decir, para todos valores de la variable de mixtura  $q$ , y luego se toma un promedio ponderado,

---

<sup>5</sup> Daykin, *et al.*, página 41 a 42.

usando la f.d. de mixtura para ponderar. La f.d.  $F$  de la variable mixta de Poisson se escribe como

$$F(x) = E(F(x|q)) = \int_0^{\infty} F_{\lambda q'}(x) dH(q').$$

Dado que la media condicional de la variable mixta de Poisson  $x$  es  $\lambda q'$ , la distribución condicional siendo Poisson( $\lambda q'$ ), se tiene que

$$E(x) = E(E(x|q)) = E(\lambda q) = \lambda \cdot E(q) = \lambda \cdot 1 = \lambda.$$

Las características principales de la variable mixta o ponderada  $x$  son

Media:  $\mu_x = \lambda$

Varianza:  $\sigma_x^2 = \lambda + \lambda^2 \cdot \sigma_q^2$

Sesgo:  $\gamma_{1,x} = \frac{\lambda + 3 \cdot \lambda^2 \cdot \sigma_q^2 + \lambda^3 \cdot \gamma_{1,q} \cdot \sigma_q^3}{\sigma_x^3}$

Kurtosis:  $\gamma_{2,x} = \frac{\lambda + 7\lambda^2 \cdot \sigma_q^2 + 6\lambda^3 \cdot \gamma_{1,q} \cdot \sigma_q^3 + \lambda^4 \cdot \gamma_{2,q} \cdot \sigma_q^4}{\sigma_x^4}$ .

## 2.8 La distribución binomial negativa

Cuando una variable aleatoria  $N$  tiene una distribución binomial negativa con parámetros  $k > 0$  y  $p$ , donde  $0 < p < 1$ , su función de probabilidad está dada por

$$\Pr(N = x) = \binom{k+x-1}{x} p^k q^x$$

para  $x = 0, 1, 2, \dots$ , donde  $q = 1 - p$ . Cuando  $k$  es un número entero, el cálculo de la función de probabilidad es directo ya que la función de probabilidad puede expresarse en términos de factoriales<sup>6</sup>. Un método alternativo para el cálculo de la función de probabilidad, sin importar si  $k$  es un número entero, es recursivamente como

$$\Pr(N = x+1) = \frac{k+x}{x+1} q \Pr(N = x)$$

para  $x = 0, 1, 2, \dots$  con un valor inicial  $\Pr(N = 0) = p^k$ .

La f.g.m. se puede encontrar haciendo uso de la identidad

$$\sum_{x=0}^{\infty} \Pr(N = x) = 1.$$

De esto se sigue que

$$\sum_{x=0}^{\infty} \binom{k+x-1}{x} (1-qe^t)^k (qe^t)^x = 1$$

mientras que  $0 < qe^t < 1$ . Por lo tanto,

$$M_N(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \binom{k+x-1}{x} p^k q^x$$

---

<sup>6</sup> Dickson, página 3.

$$= \frac{p^k}{(1-qe^t)^k} \sum \binom{k+x-1}{x} (1-qe^t)^k (qe^t)^x$$

$$= \left( \frac{p}{1-qe^t} \right)^k$$

mientras que  $0 < qe^t < 1$ , o, equivalentemente,  $t < -\log q$ . De manera análoga, la función generadora de probabilidad es

$$P_N(r) = \left( \frac{p}{1-qr} \right)^k.$$

Los momentos de esta distribución se pueden encontrar al derivar la f.g.m., y la media y la varianza están dados por  $E[N] = kq/p$  y  $V[N] = kq/p^2$ .

Se utiliza la notación  $NB(k, p)$  para denotar una distribución binomial negativa con parámetros  $k$  y  $p$ .

Por otra parte, la distribución gamma  $\text{Gamma}(r, a)$  es a menudo utilizada como la distribución de la variable de mixtura  $q$  (2.7.1)<sup>7</sup>. Su densidad es

$$f(x) = \frac{a^r}{\Gamma(r)} e^{-ax} x^{r-1} \quad (x \geq 0) \quad (2.8.1)$$

donde  $r$  y  $a$  son constantes positivas y

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{r-1} du \quad (2.8.2)$$

---

<sup>7</sup> Daykin, *et al.*, página 48.

es la función  $\Gamma$  de Euler.

El valor medio de la variable  $\text{Gamma}(r,a)$  es  $r/a$ . Dado que se ha convenido que  $E(q)=1$  para la variable de mixtura, es decir, los parámetros  $r$  y  $a$  deben ser iguales. Denotando el valor común como  $h$ , la f.d.  $H$  de la variable de mixtura  $q$  es  $\text{Gamma}(h,h)$

$$H(q) = \frac{1}{\Gamma(h)} \int_0^{hq} e^{-z} z^{h-1} dz, \quad (2.8.3)$$

y sus características principales son

$$\text{Media:} \quad E(q) = 1$$

$$\text{Desviación estándar:} \quad \sigma_q = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

$$\text{Sesgo:} \quad \gamma_{1,q} = \frac{2}{\sqrt{h}}$$

$$\text{Kurtosis:} \quad \gamma_{2,q} = \frac{6}{\sqrt{h}}.$$

Ahora bien, cuando se utiliza la gamma normada (2.8.3) como una distribución de mixtura, las probabilidades puntuales (2.7.2) del componente mixto de la distribución de Poisson se pueden obtener de la siguiente forma

$$p_x = \binom{h+x-1}{x} \cdot p^h \cdot (1-p)^x, \quad (2.8.4)$$



donde

$$p = \frac{h}{\lambda + h}$$

y

$$\binom{r}{s} = \frac{(r+s)!}{r!s!} = \frac{\Gamma(r+s+1)}{\Gamma(r+1) \cdot \Gamma(s+1)} \quad (2.8.5)$$

es el coeficiente binomial.

La distribución de probabilidad definida por (2.8.4) es, de hecho, conocida en probabilidad como la **binomial negativa**, también conocida como la **distribución Pólya**<sup>8</sup>.

La f.g.m. de la variable del número de reclamaciones  $k$  distribuida Pólya es

$$M(s) = \left( \frac{h}{h + \lambda - \lambda \cdot e^s} \right)^h \quad (2.8.6)$$

y sus principales características son

$$\text{Media:} \quad \mu_x = E(x) = \lambda$$

$$\text{Varianza:} \quad \sigma_x^2 = \lambda + \frac{\lambda^2}{h}$$

---

<sup>8</sup> Daykin, *et al.*, página 50.

Sesgo: 
$$\gamma_x = \frac{\lambda + \frac{3\lambda^2}{h} + \frac{2\lambda^3}{h^2}}{\sigma_x^3}.$$

## 2.9 Aplicaciones a la Teoría de Ruina

Las reclamaciones de los seguros ocurren como consecuencia de eventos aleatorios para los cuales no es posible predecir el momento de ocurrencia ni el número total. Si se puede que asumir las reclamaciones ocurren independientemente una de otra, entonces el número de reclamaciones en un periodo de tiempo se puede distribuir Poisson<sup>9</sup>.

Se considera a  $x(t)$  como el número acumulado de reclamaciones que ocurren durante un periodo de tiempo que va de 0 a  $t$  como función del tiempo  $t$ . Entonces  $x(t)$  es un proceso estocástico. Se postula que este proceso del número de reclamaciones satisface las siguientes tres condiciones.

- i. El número de reclamaciones que ocurren en cualquiera dos intervalos de tiempo disjuntos son independientes (**independencia de los incrementos**).
- ii. No más de una reclamación puede derivarse del mismo evento (**exclusión de múltiples reclamaciones**).
- iii. La probabilidad de que una reclamación ocurra en un punto fijo en el tiempo es igual a cero (**exclusión de puntos específicos en el tiempo**).

Luego el número de reclamaciones que ocurre en cualquier intervalo de tiempo puede estar distribuido Poisson.

---

<sup>9</sup> Daykin, *et al*, página 31.

Comúnmente, hay factores de fondo que pueden causar que las reclamaciones en diferentes periodos estén correlacionadas. Factores típicos de esta naturaleza pueden ser el clima y las condiciones económicas<sup>10</sup>.

La influencia de los factores de fondo puede ser a menudo cuantificada al introducir una variable auxiliar (o proceso) que controle los cambios en la propensión al riesgo. En este sentido se llega a la distribución mixta o ponderada.

El proceso de las reclamaciones se puede componer de (1) tendencias, (2) variaciones periódicas (no regulares) de la propensión al riesgo, conocidas como ciclos, (3) oscilación de corto periodo de la propensión al riesgo y (4) fluctuación puramente aleatoria.

- (1) Las tendencias implican cambios lentos en las probabilidades de las reclamaciones. Las cuales son causadas, por ejemplo, por cambios en los métodos para la construcción de edificios lo cual afecta las frecuencias de incendios, por cambios en las condiciones de tráfico lo cual afecta la propensión de accidentes o por una mejora en la tasa de mortalidad lo cual afecta a los seguros de vida.
- (2) Los ciclos en las propensiones de las reclamaciones son consecuencia de ciclos económicos nacionales o internacionales.
- (3) Las oscilaciones de corto periodo son variaciones estacionales u otros efectos similares de corta duración.
- (4) La fluctuación puramente aleatoria es del tipo descrito por la ley de Poisson.

Lo anterior muestra que la propensión al riesgo, es decir, la intensidad de los eventos que provocan las reclamaciones, está sujeta a distintas variaciones.

---

<sup>10</sup> Ibid, páginas 38 a 40.

Siempre y cuando las variaciones sean deterministas, como aquellas que se relacionan al día y a la noche, y las condiciones (i) a (iii) antes mencionadas sean satisfechas, no hay problema pues las hipótesis del proceso de Poisson continúan cumpliéndose. Sin embargo, cuando la variación de la intensidad de las reclamaciones es aleatoria, la condición de independencia es violada. En tal situación, la variación estocástica de la intensidad de reclamación puede ser comúnmente interpretada como cambios aleatorios del parámetro de Poisson en su nivel esperado  $\lambda$ . El cambio se describirá por un factor multiplicativo  $q$  tal que  $E(q) = 1$ . Lo que resulta en que las reclamaciones siguen un proceso Poisson( $\lambda q$ ).

### **2.10 Recargo de seguridad**

En la práctica la tasa de la prima  $c$  excederá el monto de la reclamación esperada por unidad de tiempo. Por lo tanto, una compañía aseguradora no debería cobrar únicamente el valor esperado de los siniestros a su cargo, en cambio, debería cobrar adicionalmente un recargo por seguridad que está en función de la varianza del monto de los siniestros por el riesgo asumido.

La variable aleatoria de las reclamaciones agregadas en una unidad de tiempo es  $S(I)$ , por lo que se tiene  $c > E[S(I)]$ . En particular, se dice

$$c = (1 + \theta) E[S(I)]$$

para  $\theta > 0$ , y se refiere a  $\theta$  como un *recargo relativo de seguridad*.

El valor de  $\theta$  es decisión de la compañía aseguradora y puede ser determinado por las políticas de ésta y/o por la competencia en precios del mercado. En ocasiones y dependiendo de dicha competencia en precios, es posible que el recargo de seguridad sea igual a cero.

En la práctica, es común que encontremos recargos de seguridad en función de la esperanza, sin hacer ningún análisis de la varianza del monto de los siniestros. Lo cual significa que podríamos cobrar la misma prima por dos riesgos aceptados que tuvieran el mismo valor esperado de siniestros; pero distinta varianza, algo que resulta ilógico<sup>11</sup>.

Una forma conveniente para determinar el valor de  $\theta$ , es fijando la probabilidad de ruina, es decir, escoger aquella  $\theta$  tal que la probabilidad de que el monto de los siniestros sobrepase la prima del seguro sea un determinado valor, por ejemplo 5%, 10%, 20%,... Análogamente, se podría utilizar la probabilidad de ruina para contemplar la posibilidad de aceptar o rechazar el riesgo en el caso en que las fuerzas de mercado exijan un máximo como prima de seguro.

### 2.11 Modelación de siniestros con horizonte temporal amplio

Para obtener una aproximación útil de las obligaciones contingentes de una aseguradora, se ha hecho una modelación de siniestros  $X$  con horizonte temporal amplio a través de las siguientes aproximaciones<sup>12</sup>.

#### *Aproximación Normal*

En caso de que el número promedio de siniestros sea grande, la distribución de siniestros puede ser aproximada mediante

$$F_X(x) \approx \Phi\left(\frac{x - E[X]}{\sqrt{\text{var}(X)}}\right),$$

donde  $\Phi$  es la distribución normal estándar.

Esta aproximación, basada en el teorema central del límite, es clásica en la Teoría de Probabilidades y también en la Teoría de Riesgo. La distribución normal simplifica

---

<sup>11</sup> Nava, página 21.

<sup>12</sup> Hernández (1997), páginas 23 a 27.

enormemente los cálculos y permite tener una amplia perspectiva de fenómenos con muchas variables, traduciéndolos a fórmulas que no se podrían obtener mediante otras técnicas ni con la misma facilidad.

Sin embargo, la precisión de esta aproximación es deficiente, debido a que la distribución de los montos individuales es generalmente sesgada, ocasionando que  $F_X$  tenga una cola pesada a la derecha. La curva normal subestimaré la probabilidad de que los siniestros agregados sean elevados, aunque para algunos propósitos resulta recomendable, como en el caso de portafolios con riesgos reasegurados, donde el sesgo es menor.

### 2.11.1 Aproximación Normal Power

Este método fue propuesto por primera vez por Kauppi y Ojantakanen en 1969<sup>13</sup> y aún es motivo de desarrollo e investigación en las publicaciones actuariales. Su origen proviene de comparaciones entre la aproximación Normal y la distribución Poisson compuesta en casos donde el cálculo directo era posible. Se encontró un patrón cuyo ajuste fue incluido en la fórmula normal y posteriormente se demostró teóricamente a partir de resultados de Cornish y Fisher en 1937<sup>14</sup>. Dicha demostración consiste en encontrar una transformación de la aproximación normal que se ajuste mejor al sesgo de la distribución compuesta. El resultado fue una transformación polinomial al invertir la serie de Edgeworth<sup>15</sup>

$$F_X(x) \approx \Phi \left( \sqrt{\frac{9}{\gamma^2} + 1 + \frac{6(x - E[X])}{\gamma \sqrt{\text{var}(X)}} - \frac{3}{\gamma}} \right).$$

---

<sup>13</sup> Kauppi, L. y Ojantakanen, P. *Approximations of the Generalized Poisson Function*. ASTIN Bulletin (1969), citado en Hernández (1997).

<sup>14</sup> Beard, R.E.; Pentikäinen, T. y Pesonen E. *Risk Theory*. Ed. Chapman & Hall. 3ª Edición (1984), citado en Hernández (1997).

<sup>15</sup> Beard, R.E.; Pentikäinen, T. y Pesonen E. *Risk Theory*. Ed. Methuen & Co. 1ª Edición (1969), citado en Hernández (1997).

Nótese que ahora la aproximación requiere tres parámetros: la media, desviación estándar y sesgo de la distribución, con lo que se obtiene un mejor ajuste, principalmente cuando el sesgo es pequeño. Nuevamente, en caso de distribuciones sesgadas el problema persiste, por lo cual se propone la siguiente aproximación.

### 2.11.2 Aproximación Gamma de tres parámetros

Todas las aproximaciones arriba descritas no dan resultados satisfactorios ante distribuciones sesgadas. Además, existe el hecho de que las distribuciones compuestas: binomial, binomial negativa y Poisson, tienen un sesgo positivo. Con la finalidad de reconocer este hecho resultaría lógico aproximar directamente a  $X$  mediante otra distribución sesgada. Para ello se propone ajustar la distribución Gamma

$$F_X(x) = \int_0^{x-x_0} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt = G(x - x_0 : \alpha, \beta).$$

Esta función  $G$  es la distribución gamma original; pero con un parámetro adicional que se ajustará de acuerdo con el grado de asimetría.

Para encontrar los parámetros, se procede a igualar la media, varianza y sesgo de la distribución original con los de la aproximación:

$$E[X] = x_0 + \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\text{var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

$$E[(X - E[X])^3] = \frac{2\alpha}{\beta^3}$$

Despejando se obtiene:

$$x_0 = E[X] - 2 \frac{(\text{var}(x))^2}{E[(X - E[X])^3]}$$

$$\alpha = 4 \frac{(\text{var}(x))^3}{E[(X - E[X])^3]^2}$$

$$\beta = 2 \frac{\text{var}(X)}{E[(X - E[X])^3]}.$$

## 2.12 Procesos estocásticos relativos a la Teoría de Ruina

Dentro de los elementos que usualmente son de una naturaleza estocástica se encuentran los siguientes<sup>16</sup>:

- Los *tiempos de las reclamaciones*; denotándose por  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ . En algunos casos se considera un tiempo adicional de arribo de reclamaciones en el tiempo cero, el cual se denota como  $\sigma_0 = 0$ . Aparte del hecho de que los tiempos forman una sucesión no decreciente, no se asume nada en específico sobre su interdependencia. Las variables aleatorias definidas como  $T_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ , se llaman los *tiempos de interocurrencia* entre reclamaciones sucesivas.
- El *número de reclamaciones* hasta el tiempo  $t$  se denota por  $N(t)$  donde  $N(t) = \sup\{n : \sigma_n \leq t\}$ . La relación intrínseca entre la sucesión del arribo de reclamaciones  $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots\}$  y el proceso de conteo  $\{N(t), t \geq 0\}$  está dado por  $\{N(t) = n\} = \{\sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}\}$ .

---

<sup>16</sup> Rolski, *et al.*, páginas 1 y 2.



- La reclamación ocurrida en el tiempo  $\sigma_n$  tiene un tamaño  $U_n$ . La secuencia  $\{U_n, n = 1, 2, \dots\}$  de *tamaños de reclamaciones* consecutivas a menudo se asume como variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.
- El *monto agregado de reclamaciones* hasta el tiempo  $t$  está dado por  $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} U_i$  donde  $X(t) = 0$  si  $N(t) = 0$ . Por esta definición, el monto agregado de reclamaciones es en general una *suma aleatoria* de variables aleatorias.
- El *ingreso por primas*. En el transcurso del tiempo 0 a  $t$  se asume que un total de  $\Pi(t)$  se ha recibido a través de primas.
- La *reserva de riesgo* en el tiempo  $t$  es entonces  $R(t) = u + \Pi(t) - X(t)$ .

## CAPITULO III. APLICACIÓN DE LA TEORIA DE RUINA A LA SOLVENCIA DE UNA COMPAÑÍA DE SEGUROS

### 3.1 Cálculo de la probabilidad de ruina y probabilidad de supervivencia

En el modelo clásico de la Teoría de Ruina se calcula la probabilidad de ruina de una compañía de seguros modelando el costo total de los siniestros a través de un proceso de Poisson compuesto, es decir, considerando que el número de siniestros sigue una función discreta de Poisson de parámetro  $\lambda$  y el monto individual de cada siniestro una distribución continua  $F(z)$ . Como consecuencia de utilizar una distribución de Poisson en el número de siniestros, el tiempo que transcurre entre la ocurrencia de dos siniestros puede ser modelado mediante una distribución exponencial de media  $\frac{1}{\lambda}$ .

El cálculo de la probabilidad de ruina bajo estas hipótesis es un tema ampliamente tratado en la literatura actuarial. El cálculo de esa probabilidad,  $\psi(u)$ , se realiza en tiempo infinito (probabilidad de ruina última) y tiempo continuo. La probabilidad de supervivencia,  $\phi(u) = 1 - \psi(u)$ , depende del nivel inicial de las reservas o capital inicial  $R(0) = u$ , siendo  $R(t) = u + ct + S_t$  donde  $S_t$  es el proceso acumulado de siniestros hasta el tiempo  $t$ , y  $c$  la tasa a la cual ingresan las primas por unidad de tiempo.

Ahora bien, se considera el problema de encontrar la probabilidad de que la ruina ocurra dentro de un intervalo finito de tiempo  $(0, \tau)$ , dando un proceso de pérdida de tiempo discreto  $S(t)$  para  $t = 1, 2, \dots$ . Dicha probabilidad puede ser calculada numéricamente a partir de los supuestos del modelo, sin la necesidad de hacer una formulación analítica compleja. Lo cual se ilustra en el siguiente ejemplo.

Una compañía de seguros paga una reclamación anual al final de cada año de posibles montos 3, 5 o 7, con probabilidades  $p(3) = .75$ ,  $p(5) = .15$  y  $p(7) = .10$ . La compañía obtiene un monto por primas al inicio del año igual a la reclamación esperada más un recargo de seguridad del 30%. Se ignoran los demás gastos. El fondo de la aseguradora inicia con un capital de 3.

La prima recibida en el primer año es

$$1.30 E[X] = 1.30 [3(.75) + 5(.15) + 7(.10)] = 4.81.$$

Así que el fondo al final del año es de 7.81. Después de pagar la reclamación del primer año, el fondo puede ser igual a 4.81, 2.81 o 0.81, con probabilidades .75, .15 y .10, respectivamente. Se observa que la probabilidad de ruina en el primer año no es posible. El fondo al final del segundo año, incluyendo la prima del segundo año, puede ser 9.62, 7.62 o 5.62. Dado que la reclamación más alta del segundo año es 7, la única forma de que la ruina ocurra es con una reclamación de 7 contra un fondo de 5.62. A su vez, un fondo de 5.62 resulta solamente si la reclamación también es de 7 en el primer año. Por lo tanto, la probabilidad de ruina en el segundo año con un fondo inicial de 3 es

$$\psi(3,2) = (.10)(.10) = .01,$$

dado que la probabilidad de una reclamación de 7 es  $p(7) = .10$ .

### **3.2 Políticas de reparto de dividendos de las compañías aseguradoras**

La no inclusión de una política de reparto de dividendos significa dejar que todos los beneficios técnicos se acumulen en forma de reservas. Ahora bien, una política de reparto de dividendos implica una regla de decisión sobre la parte de beneficios que se integrarán en las reservas, repartiéndose el resto en forma de dividendos. La forma de introducir en el modelo matemático esas estrategias de reparto es mediante las barreras de dividendos  $b(t)$ , que producirán cambios en el proceso de acumulación de reservas

(como se ve en la sección 3.7 de este capítulo). Así, cuando las reservas alcanzan el nivel de la barrera se mantiene en ella hasta la ocurrencia del siguiente siniestro, mientras tanto todos los excesos se van repartiendo en forma de dividendos. Esto da lugar a cambios en la probabilidad de ruina<sup>1</sup>.

### 3.3 Modelación de gastos, impuestos y dividendos

#### 3.3.1 Gastos

La palabra **gastos** se utiliza como un término “sombrija” para cubrir todos los diferentes tipos de gastos administrativos y operacionales de una compañía de seguros.

Los gastos  $E$  de la aseguradora se asumen a una tasa constante  $e$  respecto del ingreso por primas  $B$ , esto es

$$E(t) = e \cdot B(t).$$

De hecho, ésta puede ser una primera aproximación satisfactoria; sin embargo, para un análisis más profundo los cambios en la tasa de gastos pueden ser significativos. Una debilidad de esta fórmula es que en proyecciones de largo plazo el ingreso por primas  $B(t)$  está sujeto a varios cambios que no necesariamente afectan los gastos, al menos no proporcionalmente como se ha asumido.

#### 3.3.2 Impuestos

La legislación y la práctica común referente a impuestos difieren en gran medida de país a país, de tal forma que no es posible proponer una fórmula universal para ellos. En algunos países el monto pagado por concepto de impuestos es relativamente estable, debido en parte a la posibilidad de igualar los resultados anuales entre años sucesivos.

---

<sup>1</sup> Alegre, *et al*, página 76.

Entonces, se puede inferir una fórmula de aproximación satisfactoria, siendo una simple relación lineal respecto del ingreso por primas.

$$E_{tax}(t) = e_{tax} \cdot B(t).$$

Esta regla puede ser menos burda si se incorpora una regla de decisión que detenga o reduzca el pago de impuestos en casos donde la posición financiera del asegurador es precaria.

### **3.3.3 Dividendos**

En la práctica las compañías de seguros tratan de mantener los pagos de dividendos que hacen a sus accionistas muy estables, dando una compensación por inflación y otorgando un rendimiento real en su inversión. Una aproximación directa para modelar esto es relacionando los dividendos a la ganancia  $Y(t)$ :

$$D(t) = d_Y(t) \cdot Y(t).$$

La ganancia en este contexto debería ser preferentemente la ganancia señalada en los libros contables de la compañía. El coeficiente  $d_Y(t)$  es un parámetro a definir de acuerdo a cada compañía de seguros.

### **3.4 Análisis y simulación del proceso de seguro**

Es claro que los ciclos de la suscripción son de los factores más importantes que afectan los resultados del negocio y, finalmente, la fortaleza financiera de los aseguradores. Debido a su relevancia es conveniente analizar la causa de los ciclos y explorar sus características.

Existen varios factores potenciales de fondo que varían de periodo a periodo. La experiencia del comportamiento actual del proceso de seguro se ve afectada por este tipo de factores, los cuales, directa o indirectamente, son responsables de los ciclos del negocio. A continuación se presentan algunos de los factores que inducen ciclos.

- i. Reclamaciones.- tienen sus propias tendencias, ciclos y variabilidad de corto plazo. Éstas aumentan la fluctuación de todo el proceso de seguro.
- ii. Ciclos de primas.- pueden ser inducidos por estrategias de competencia, cuando se busca una mayor comercialización, o por cuestiones regulatorias o políticas.
- iii. Inflación.- una tasa inflacionaria estable no se espera que tenga un efecto cíclico, dado que los ajustes por inflación se pueden hacer con los niveles esperados para determinar primas, reservas, márgenes de solvencia, entre otros. Sin embargo, si la tasa de inflación cambia a niveles inesperados, se pueden provocar ciclos en todo tipo de cuantificaciones monetarias.
- iv. Fluctuaciones en las tasas de interés y los valores de los activos.- pueden tener un impacto directo en los niveles de suscripción. Si la tasa de inversión en las reservas técnicas o de otro tipo son altas, se pueden esperar menos primas, debido a que el costo esperado de colocar reclamaciones se ajusta hacia abajo o porque disminuye el margen de ganancia aceptado. Los altos rendimientos provocan expectativas sobre optimistas de los rendimientos de las futuras inversiones, lo cual causa pérdidas operativas cuando las tasas de rendimiento caen. Los cambios en los valores de los activos pueden tener un impacto significativo en la fortaleza financiera, induciendo a acciones correctivas a través de las primas.
- v. Cuestiones de mercado.- la capacidad del mercado puede tener un gran impacto en los precios de ciertos bienes. Una excesiva capacidad en el reaseguro y en las líneas comerciales tiene la tendencia de presionar hacia abajo las primas e, inversamente, la falta de capacidad presiona hacia arriba los precios. Por otro lado, el capital

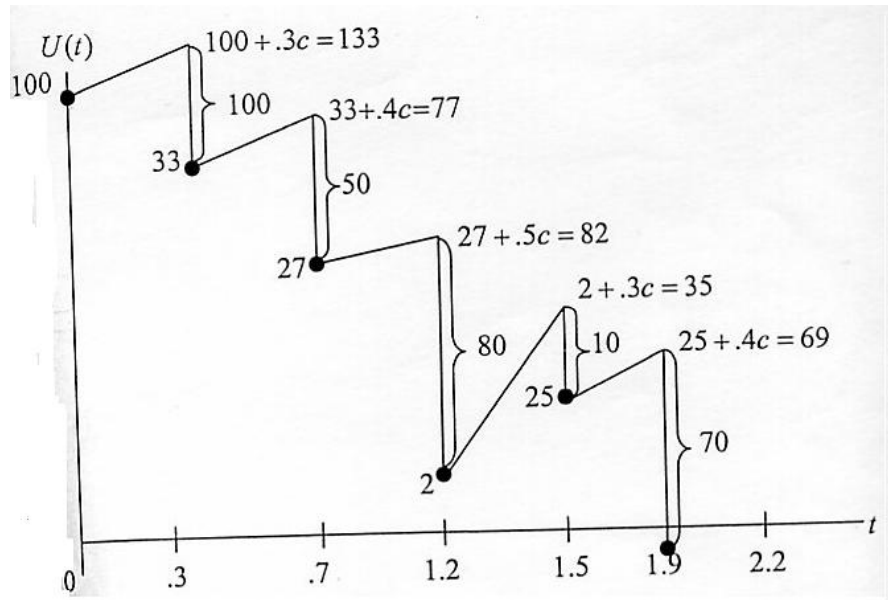
disponible depende por una parte de las ganancias o pérdidas anteriores de la industria, y por otra de las utilidades anticipadas del negocio del seguro con respecto a otras industrias, particularmente si hay libre entrada en el mercado. Nuevos participantes serán atraídos al mercado si existen expectativas de altas ganancias. También será más sencillo persuadir a los accionistas actuales para que otorguen más capital en dichas circunstancias. La capacidad para suscribir más negocio está determinada por el capital y las reservas libres. Esto provoca alternativamente expansión y contracción de la capacidad y, consecuentemente, variaciones cíclicas en los precios.

Sin la necesidad de aplicar una formulación complicada, a continuación se presenta un ejemplo de una simulación simple del proceso de seguro. Se inicia con un capital inicial de 100 y se incrementa con un ingreso por prima recibida a una tasa continua de 110 por unidad de tiempo. La experiencia muestra que las reclamaciones ocurren en los tiempos siguientes y en las cantidades que se muestran:

Tiempo de la reclamación	Monto de la reclamación
0.3	100
0.7	50
1.2	80
1.5	10
1.9	70
2.2	60

La experiencia de este proceso se muestra en la gráfica siguiente.

**Figura 3.4.1.**  
Simulación del proceso de seguro, análisis del superávit<sup>2</sup>



El superávit aumenta a una tasa constante hasta que ocurre la primera reclamación (tiempo 0.3), en ese punto cae por 100 (el monto de la reclamación). Luego, éste crece de nuevo hasta que cae por 50 en el tiempo 0.7, y así sucesivamente. En la quinta reclamación (tiempo 1.9), el superávit cae por un monto de 70, un nivel por debajo de cero y el proceso de seguro se interrumpe, ocurriendo la ruina de esa cartera.

### 3.5 El problema de requerimiento de capital

Una compañía de seguros necesita de diversos métodos para hacerle frente a los periodos de tiempo adversos y con ello compensar las pérdidas con las ganancias entre años consecutivos, es decir, controlar la fluctuación del nivel de solvencia  $u(t)$ . A grandes rasgos el problema se puede interpretar como sigue:

<sup>2</sup> Cunningham, *et al*, página 565.

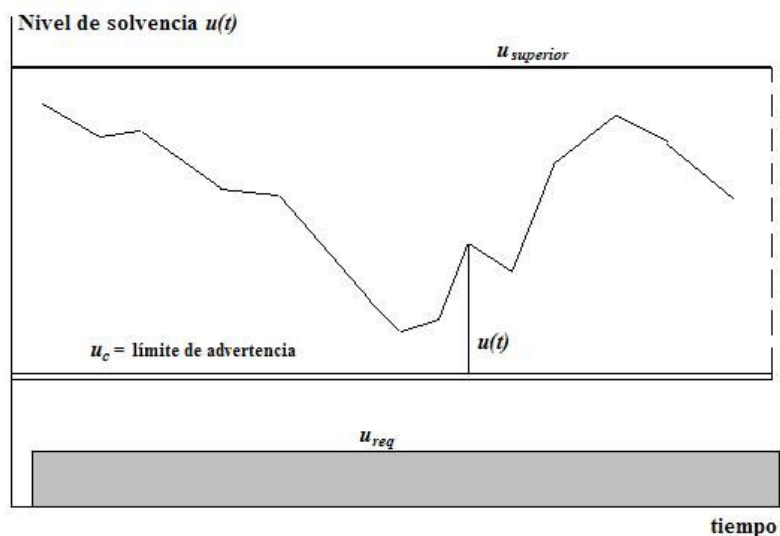


En la mayoría de los países hay una regulación que requiere un margen mínimo de solvencia  $u_{req}$ , una barrera que todo asegurador debe observar para poder continuar suscribiendo negocio. Para la sobrevivencia de la compañía es necesario mantener el nivel fluctuante de solvencia  $u(t)$  por encima de la barrera.

Si el nivel de solvencia  $u(t)$  cae cercano a la barrera  $u_{req}$ , hay una probabilidad considerable de que una fluctuación normal aleatoria pueda llevar a una caída por debajo de dicha barrera. Por lo tanto, es recomendable establecer un límite previo de advertencia  $u_c$ , a un margen suficiente por encima de  $u_{req}$ , para tratar de controlar la fluctuación de  $u(t)$  y de esta forma evitar que caiga por debajo de la barrera  $u_{req}$ .

Como se observa en la figura siguiente, el área por encima de la barrera de advertencia  $u_c$ , en donde el nivel de solvencia  $u(t)$  debe fluctuar, se llama **zona de confianza**. Resulta también de interés evaluar el límite superior  $u_{superior}$  de la zona. Para un adecuado manejo se necesita al menos una idea aproximada de su magnitud para mantener las fluctuaciones del nivel de solvencia dentro de la zona. Este límite superior también puede ser utilizado como indicador para decidir cuánto de las ganancias pueden distribuirse como dividendos. Una estrategia es retener suficientes recursos para mantener la zona de confianza.

**Figura 3.5.1.**  
Zona de confianza para controlar el nivel de solvencia<sup>3</sup>



<sup>3</sup> Daykin, *et al.*, página 365.

Es importante hacer notar que el límite del nivel superior  $u_{superior}$  depende no sólo de la variabilidad estocástica, que está más allá del control de la administración, sino también de las acciones de la administración. Las prácticas para la determinación de precios (primas) y el reaseguro externo caen dentro de estas acciones. Si los precios se modifican rápidamente a la luz de la experiencia del negocio, el rango de la fluctuación del margen solvencia puede ser reducido significativamente. La estrategia de inversión puede también tener un gran impacto en los requerimientos de capital medidos por  $u_{superior}$ . Si se tiene un alto rendimiento en las inversiones, la volatilidad del rendimiento probablemente aumentará y entonces habrá posibilidad de pérdidas de capital. Todo esto contribuye a la fluctuación del margen de solvencia que influye sobre el tamaño requerido de la zona de confianza.

A pesar de que el rango de fluctuación puede ser controlado a un cierto grado por las acciones de la administración, como reaseguro, determinación de precios, reservas e inversión, esto no puede ser totalmente eliminado. Entonces, una compañía de seguros necesita de una reserva de capital para cubrirse de cualquier adversidad en los resultados anuales. Por otro lado, es natural que las ganancias aleatorias se almacenen en esta misma reserva de capital. Una solución que se ha adoptado en algunos países es establecer una reserva particular para este propósito, comúnmente llamada reserva de compensación.

Un problema práctico asociado con la reserva de compensación es el tratamiento fiscal. De hecho, es tratado como una reserva especial sólo si las transferencias hacia dicha reserva se hacen sin aplicárseles previamente un impuesto por ganancias. El visto bueno que dan las autoridades fiscales a esta reserva de compensación se da si el monto de dicha reserva se limita razonablemente para propósitos de compensación. Realmente, el problema es esencialmente el mismo de la zona de confianza con un muy bien definido límite superior (Figura 3.5.1).

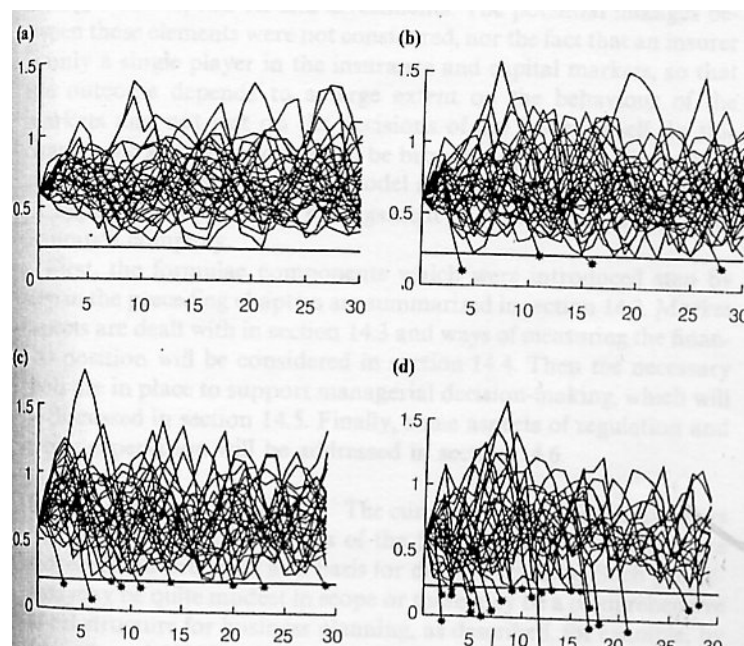
Otra condición es que las transferencias hacia y desde la reserva deben ser tomadas como una genuina fluctuación aleatoria. Esto lleva a que la compañía de seguros

establezca reglas para que aquella parte de la suscripción que genera una ganancia que excede a un nivel promedio por un periodo de tiempo considerable se transfiera a la reserva de compensación. De forma similar, si el resultado cae por debajo de dicho promedio, la diferencia debería ser deducida de la reserva de compensación.

### 3.6 Evaluación de los límites de retención

La Figura 3.6.1 muestra un ejemplo de una evaluación de los límites de retención  $M$ , donde se asume que se provee un capital inicial  $u_0$  para respaldar la suscripción de algún conjunto de riesgos, como una línea de negocio, un grupo particular de pólizas o el portafolio completo de un asegurador.

**Figura 3.6.1.**  
Ejemplo de la simulación del nivel de solvencia, variando el límite de retención<sup>4</sup>



Caso (a)  $M = \text{£}0.1$  millones, (b)  $M = \text{£}3$  millones, (c)  $M = \text{£}4$  millones y (d)  $M = \text{£}10$  millones; 40 realizaciones.

<sup>4</sup> Tomado de Pentikäinen and Rantala (1982), *EC credit insurance directive*; tomado de Daykin, *et al*, página 367.

El problema radica en encontrar un límite de retención  $M$  tan grande como sea posible, sujeto a la restricción de que la pérdida aleatoria no debe exceder al capital en riesgo. Cuando el tipo y detalles del posible contrato de reaseguro, así como otras características básicas, son conocidos, se puede llevar a cabo la simulación del proceso de suscripción. El límite de retención se incrementa gradualmente, como se observa en la figura. Una cantidad más precisa para  $M$  se puede determinar al refinar la evaluación con distintos valores entre los casos (a) y (b), y eventualmente corriendo la simulación con mayores números de realizaciones.

### 3.7 Forma de introducir en el modelo las estrategias de reparto de dividendos

En la literatura actuarial se ha estudiado el efecto de la probabilidad de ruina y su complementaria probabilidad de supervivencia con la introducción de diversos tipos de barreras. En caso de la barrera constante  $b(t) = b$ , evidentemente la probabilidad de ruina es uno<sup>5</sup>.

En Alegre, *et al* se hace un planteamiento para distintas barreras de dividendos, basado en ecuaciones de renovación, las cuales se explican a continuación.

#### 3.7.1 Barrera de dividendos lineal

Se considera una barrera lineal  $b(t) = b_0 + at$ , donde  $b_0 \geq 0$  es el nivel inicial de la barrera, y  $a$  la pendiente de la recta, es decir, el incremento instantáneo aceptable por la compañía en el nivel máximo de reservas a acumular, cumpliéndose que  $0 < a < c$ , condición necesaria para asegurar que en algún momento  $t$  el proceso de reservas alcanzará la barrera de dividendos.

La probabilidad de supervivencia  $\phi(u, b_0)$  será función de dos variables: el valor inicial de las reservas  $u$ , y el nivel inicial de la barrera  $b_0$ , donde se cumple  $0 \leq u \leq b_0$ ,

---

<sup>5</sup> Bühlmann, H. (1970), *Mathematical Methods in Risk Theory*, página 165. Citado en Alegre, *et al*, página 76.

condición lógica ya que el modelo con reparto de dividendos impide que el nivel de las reservas esté por encima del nivel de la barrera de dividendos.

La probabilidad de supervivencia sin barrera puede obtenerse con el planteamiento basado en las ecuaciones de renovación

$$\phi(u) = E[\phi(u + ct - z)] = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \phi(u + ct - z) dF(z) dt .$$

Bajo este enfoque, en Alegre, *et al* se introduce la idea de la barrera lineal para obtener la probabilidad de supervivencia

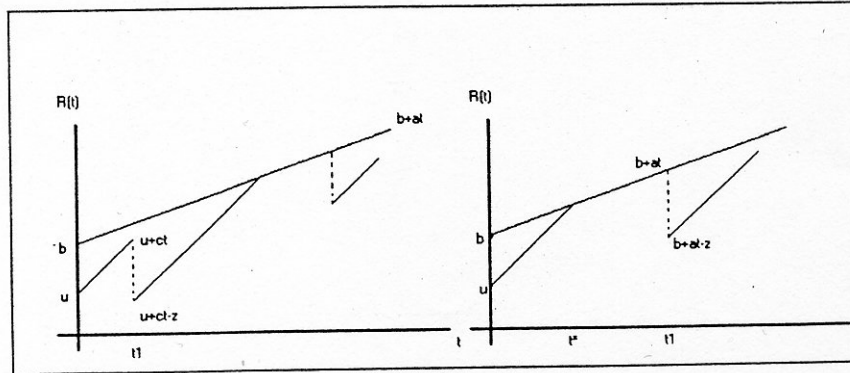
$$\begin{aligned} \phi(u, b_0) = & \int_0^{t^*} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \phi(u + ct - z, b_0 + at) dF(z) dt \\ & + \int_{t^*}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{b_0+at} \phi(b_0 + at - z, b_0 + at) dF(z) dt \end{aligned} \quad (3.7.1.1)$$

siendo  $t^*$  el punto de corte entre  $u + ct$  y  $b_0 + at$

$$t^* = \frac{b_0 - u}{c - a} .$$

La primera de las integrales dobles de (3.7.1.1) corresponde al caso en que el primer siniestro ocurra antes del punto de corte, en ese caso no se ha alcanzado la barrera y por tanto, el nivel de reservas es  $u + ct + z$ . El segundo sumando de (3.7.1.1) indica el caso en que ese primer siniestro se produzca una vez que las reservas hayan alcanzado la barrera, el nuevo nivel de reservas será  $b_0 + at - z$ .

**Figura 3.7.1.1.**  
Barrera de dividendos lineal



En Alegre, *et al* se desarrolla matemáticamente la expresión (3.7.1.1) llegando a la siguiente ecuación:

$$c \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + a \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} - \lambda \phi(u, b_0) + \lambda \int_0^u \phi(u-z, b_0) dF(z) = 0.$$

En el caso concreto de que siga una distribución exponencial normalizada (con esperanza unitaria), se obtiene una ecuación de derivadas parciales (EDP) de segundo orden.

$$c \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial u^2} + a \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial b_0 \partial u} + (c - \lambda) \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + a \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} = 0, \quad (3.7.1.2)$$

con las siguientes condiciones de contorno necesarias para la obtención de la correcta solución de  $\phi(u, b_0)$  como probabilidad de supervivencia:

- $\frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} \Big|_{u=b_0} = 0$ , la variación en la probabilidad de supervivencia ante cambios en el nivel de reservas cuando este coincide con el nivel de barrera es nula.

- $\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u, b_0) = 1$  ( $b_0 \rightarrow \infty$ ), a medida que  $u$  tiende a  $\infty$  (uniformemente con  $b_0$ , ya que  $b_0 \geq u$ , la probabilidad de supervivencia tiende a 1.
- $\lim_{b_0 \rightarrow \infty} \phi(u, b_0) = \phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{c-\lambda}{c}u}$ , si el punto inicial de la barrera tiende a infinito, es equivalente a desaparecer la barrera. Por lo tanto, la probabilidad de supervivencia con barrera tenderá a la probabilidad de supervivencia sin barrera, en el caso de que la cuantía de los siniestros exponencial toma esa expresión.

### 3.7.2 Barrera de dividendos asintótica

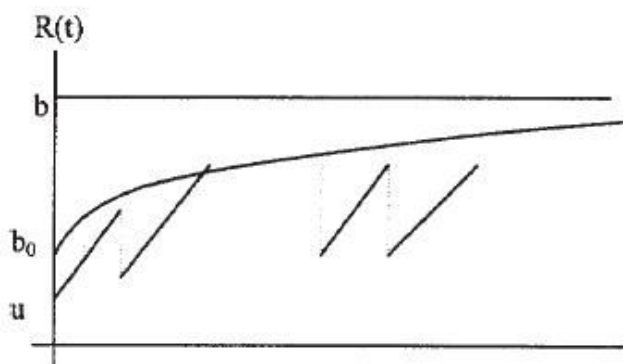
Uno de los problemas de la barrera lineal es que permite la acumulación infinita de reservas. Para limitar dicha acumulación, se genera la idea de una barrera asintótica.

La barrera asintótica propuesta es de la forma

$$b(t) = b + (b_0 - b)e^{-\alpha t}, \quad \alpha \in R^+$$

siendo su gráfica como lo muestra la figura siguiente.

**Figura 3.7.2.1.**  
Barrera de dividendos asintótica



Se observa que  $b_0$  es el nivel inicial de la barrera,  $b$  es el nivel de la asíntota y  $\alpha$  el parámetro que indica la velocidad de aproximación de la barrera a la asíntota y que puede ser interpretado como un tanto instantáneo.

El tope que impone esta barrera en  $b(\infty) = b$ , de igual forma que ocurre con la barrera constante, provoca que la probabilidad de ruina sea 1. No obstante, aunque desde el punto de vista de la probabilidad de ruina de la barrera constante y la barrera asíntótica sean idénticas, no lo son desde el punto de vista de los dividendos repartidos en cada una de ellas.

### 3.7.3 Barrera de dividendos parabólica

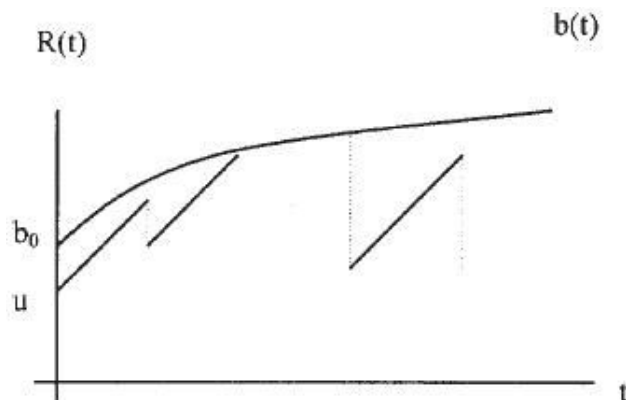
Con la barrera parabólica desaparece el valor máximo de acumulación de reservas, pudiéndose plantear el cálculo de la probabilidad de supervivencia,  $\phi(u) = 1 - \psi(u)$ .

La función que representa la barrera parabólica es

$$b(t) = \sqrt{b_0^2 + \beta t},$$

siendo  $b_0$  la ordenada al origen y  $\beta$  la tasa que indica la variación de la cuantía máxima de reservas que la compañía decide acumular en cada momento  $t$ .

**Figura 3.7.3.1.**  
Barrera de dividendos parabólica



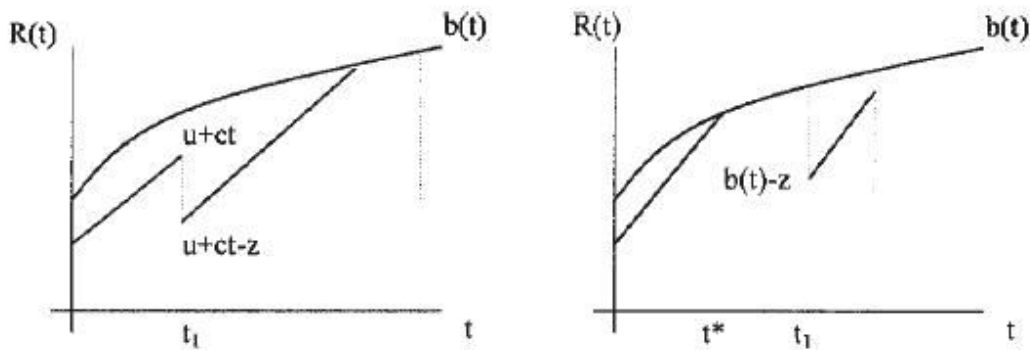


Para la determinación de la probabilidad de supervivencia con esta nueva barrera se utiliza el planteamiento alternativo hecho para la barrera lineal,

$$\begin{aligned} \phi(u, b_0) = & \int_0^{t^*} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \phi(u+ct-z, \sqrt{b_0^2 + \beta t}) dF(z) dt \\ & + \int_{t^*}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \beta t}} \phi(\sqrt{b_0^2 + \beta t} - z, \sqrt{b_0^2 + \beta t}) dF(z) dt . \end{aligned} \quad (3.7.3.1)$$

La idea gráfica de los sumandos de la ecuación (3.7.3.1) se muestra en la figura siguiente.

**Figura 3.7.3.2.**  
Idea de los sumandos de la barrera de dividendos parabólica



A partir de (3.7.3.1), siguiendo un proceso similar al aplicado en el caso de la barrera lineal, Alegre *et al* obtienen la correspondiente EDP:

$$\frac{\beta}{2b_0} \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} + c \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} - \lambda \phi(u, b_0) + \lambda \int_0^u \phi(u-z, b_0) dF(z) = 0 .$$

En el caso concreto de la distribución exponencial, con  $F(z) = 1 - e^{-z}$ ,  $z > 0$ , se llega a la correspondiente EDP

$$c \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial u^2} + \frac{\beta}{2b_0} \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial b_0 \partial u} + (c - \lambda) \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + \frac{\beta}{2b_0} \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} = 0, \quad (3.7.3.2)$$

con las siguientes condiciones de contorno:

- $\left. \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} \right|_{u=b_0} = 0$ .
- $\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u, b_0) = 1 \quad (b_0 \rightarrow \infty)$ .
- $\lim_{b_0 \rightarrow \infty} \phi(u, b_0) = \phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{c-\lambda}{c}u}$ .

Si se compara la estructura de esta ecuación diferencial (3.7.3.2) con la obtenida en el caso de barrera lineal (3.7.1.2), se observa la similitud existente entre ambas. En el caso de barrera lineal la expresión obtenida era:

$$c \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial u^2} + a \frac{\partial^2 \phi(u, b_0)}{\partial b_0 \partial u} + (c - \lambda) \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial u} + a \frac{\partial \phi(u, b_0)}{\partial b_0} = 0.$$

La obtenida en el caso de barrera parabólica es la misma sustituyendo la pendiente de la barrera lineal por la pendiente de la barrera parabólica en cero, en otras palabras

$$b'(0) = \frac{\beta}{2b_0}.$$

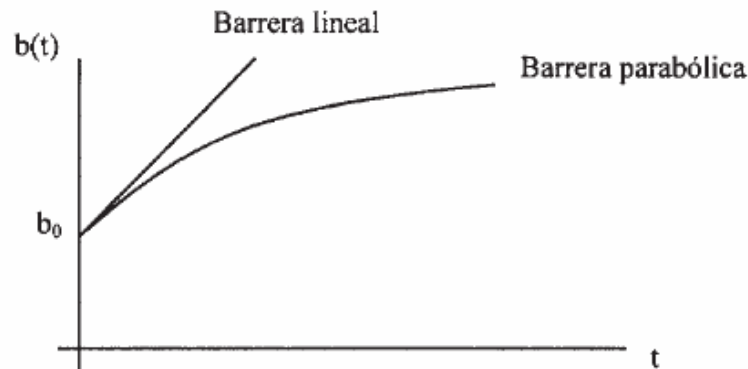
La solución de las EDP correspondientes a la barrera lineal y la barrera parabólica, a pesar de la similitud en la estructura de las ecuaciones, será muy diferente debido a que la correspondiente a la barrera lineal es una EDP de coeficientes constantes, mientras que para la barrera parabólica la EDP resultante es de coeficientes variables.

Ciertamente, la probabilidad de supervivencia será distinta cuando el proceso esté modificado con una barrera lineal con pendiente  $a$  o con una parabólica cuya pendiente en  $t = 0$  tenga valor  $\frac{\beta}{2b_0}$ .

En la siguiente figura se puede observar como, intuitivamente, la probabilidad de supervivencia en el caso de barrera lineal será mayor, ya que se permite una mayor acumulación en el nivel de reservas.

**Figura 3.7.3.3.**

Comparativo de la probabilidad de supervivencia con barrera lineal y barrera parabólica



### 3.8 Aplicación numérica

Se analizará la probabilidad de ruina utilizando datos del sector asegurador mexicano. Para ello, se tomaron las *Estadísticas de Mercado* reportadas en el Sistema Estadístico del Sector Asegurador (SESA) del ramo de **incendio** para los tres últimos años (2003, 2004 y 2005) que publica la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) a través de su portal de Internet ([www.cnsf.gob.mx](http://www.cnsf.gob.mx)).

Ahora bien, retomando lo que se ha tratado de explicar en este trabajo sobre la Teoría de Ruina tenemos que una opción para la distribución de  $N$  (número de siniestros) es la Poisson con función de probabilidad (f.p.) dada por

$$\Pr(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $\lambda > 0$ . Para la distribución Poisson,  $E[N] = \text{Var}[N] = \lambda$ . Con esta selección para la distribución de  $N$ , la distribución de  $S$  (reclamaciones agregadas) es una *distribución compuesta de Poisson*.

Las reclamaciones agregadas  $S$  son una suma aleatoria donde

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N.$$

Los montos de las reclamaciones individuales  $X_1, X_2, \dots$  son variables aleatorias y miden la severidad de las reclamaciones.

Hay dos supuestos fundamentales:

1.  $X_1, X_2, \dots$  son variables aleatorias idénticamente distribuidas.
2. Las variables aleatorias  $N, X_1, X_2, \dots$  son mutuamente independientes.

Siendo  $S$  una distribución compuesta de Poisson se tiene que<sup>6</sup>

$$E[S] = E[E[S|N]] = E[p_1 N] = p_1 E[N] = \lambda p_1 \quad (3.8.1)$$

y

$$\text{Var}(S) = E[\text{Var}(S|N)] + \text{Var}(E[S|N])$$

---

<sup>6</sup> Donde  $p_k = E[X^k]$  representa el  $k$ -ésimo momento respecto al origen.

$$\begin{aligned}
&= E[NVar(X)] + Var(p_1N) \\
&= E[N]Var(X) + p_1^2Var(N) \quad \text{donde } Var(X) = p_2 - p_1^2 \\
&= \lambda(p_2 - p_1^2) + \lambda p_1^2 \\
&= \lambda p_2
\end{aligned} \tag{3.8.2}$$

El valor esperado de las reclamaciones agregadas  $E[S]$  es el producto del monto esperado de la reclamación individual y el número esperado de reclamaciones ( $p_1E[N]$ ). De acuerdo con la antepenúltima igualdad de la varianza de las reclamaciones agregadas  $Var(S)$ , ésta es la suma de dos componentes donde el primero se atribuye a la variabilidad del monto de la reclamación individual  $-E[N]Var(X)-$  y el segundo a la variabilidad del número de reclamaciones  $-p_1^2Var(N)-$ <sup>7</sup>. No obstante, para el caso particular de una distribución compuesta de Poisson, la varianza de las reclamaciones agregadas es el producto del segundo momento con respecto al origen de las reclamaciones individuales por el número esperado de reclamaciones.

Para un modelo de tiempo discreto, sea  $U_n$  el superávit del asegurador en el tiempo  $n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Se asume que

$$U_n = u + nc + S_n,$$

donde  $u$  es el superávit inicial, el monto de primas recibidas en cada periodo es constante y se denota por  $c$ , y  $S_n$  es el monto agregado de reclamaciones de los primeros  $n$  periodos. Más aún, se tiene que

$$S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n,$$

donde  $W_i$  es la suma de las reclamaciones en el periodo  $i$ .

---

<sup>7</sup> Bowers, página 368.

Por lo tanto,  $U_n$  se puede escribir como

$$U_n = u + (c - W_1) + (c - W_2) + \dots + (c - W_n).$$

Sea

$$\tilde{T} = \min\{n : U_n < 0\}$$

lo que denota el tiempo de ruina y la probabilidad de ruina en este contexto se denota por

$$\tilde{\psi}(u) = \Pr(\tilde{T} < \infty).$$

Existe una importante conexión entre una cantidad definida como el *coeficiente de ajuste* y la probabilidad de ruina. Se define el coeficiente de ajuste  $\tilde{R}$  como la solución positiva de la ecuación

$$M_{W-c}(r) = E[e^{r(W-c)}] = e^{-rc} M_W(r) = 1,$$

o la ecuación equivalente

$$\log M_W(r) = rc \tag{3.8.3}$$

donde  $W$  denota una variable aleatoria con la distribución de las reclamaciones anuales,  $W_i$ .

La conexión entre el coeficiente de ajuste y la probabilidad de ruina se da por el siguiente resultado.

$$\tilde{\varphi}(u) = \frac{\exp(-\tilde{R}u)}{E[\exp(-\tilde{R}U_T) | \tilde{T} < \infty]} \quad (3.8.4)$$

Dado que  $U_T < 0$  por definición, de (3.8.4) se sigue que

$$\tilde{\varphi}(u) = \exp(-\tilde{R}u).$$

Ahora se deriva una aproximación para  $\tilde{R}$ . Se tiene que para una variable aleatoria  $X$

$$\frac{d}{dt} \log M_X(t) \Big|_{t=0} = E[X]$$

y

$$\frac{d^2}{dt^2} \log M_X(t) \Big|_{t=0} = \text{Var}(X).$$

Luego, utilizando la expansión de las series de Maclaurin, se tiene que

$$\log M_W(r) = \mu r + \frac{1}{2} \sigma^2 r^2 + \dots,$$

donde  $\sigma^2 = \text{Var}(W)$ . Si sólo se utilizan los primeros dos términos de esta expansión en (3.8.3), se obtiene la aproximación

$$\tilde{R} \cong \frac{2(c - \mu)}{\sigma^2}.$$

Esta aproximación es exacta en el caso de que la distribución de las  $W_i$  sea normal<sup>8</sup>. No obstante, si  $W$  tiene una distribución compuesta y un recargo de seguridad  $\theta$  dado por  $c = (1 + \theta)\mu$ , entonces (3.8.1) y (3.8.2) llevan a que

$$\tilde{R} \cong \frac{2\theta p_1 E[N]}{(p_2 - p_1^2)E[N] + p_1^2 Var(N)}, \quad (3.8.5)$$

donde  $N$  es una variable aleatoria distribuida como el número de reclamaciones en un periodo.

Para el caso que se trata de analizar, donde se supone una distribución Poisson (con parámetro  $\lambda$ ) para el número de siniestros  $N$  y una distribución compuesta de Poisson para las reclamaciones agregadas, el coeficiente de ajuste es

$$\tilde{R} \cong \frac{2\theta p_1}{p_2}.$$

Para el análisis de la probabilidad de ruina se tomaron los datos reportados en el Formato 3: *Primas y Siniestros por Tipo de Riesgo, Tipo de Bien, Cobertura y Tipo de Giro* del SESA del seguro de incendio para los años de 2003, 2004 y 2005.

**Tabla 3.8.1.**  
Estadísticas del seguro de incendio, 2003-2005

<b>Año</b>	<b>Número de siniestros</b>	<b>Monto de siniestros</b>	<b>Prima emitida</b>
<b>2003</b>	<b>12,599</b>	<b>6,713,498,470</b>	<b>6,296,802,141</b>
<b>2004</b>	<b>10,932</b>	<b>6,025,360,751</b>	<b>7,409,737,674</b>
<b>2005</b>	<b>23,033</b>	<b>24,202,035,766</b>	<b>7,575,998,453</b>

Fuente: *SESA del Seguro de Incendio, Formato 3.*

<sup>8</sup> Bowers, página 403.



Como se puede observar, en el año 2005 hay un considerable aumento tanto en el número de siniestros como en el monto de los mismos respecto de lo observado en los dos años anteriores.

Dado que el SESA no presenta datos desagregados, lo cual implica que no se tenga conocimiento del monto de cada uno de los siniestros reportados, se decidió dividir los datos presentados en el Formato 3 en dos categorías dependiendo del *tipo de bien*, **Edificios** o **Contenidos**. Luego, para el número de siniestros se contabilizó si se presentó algún siniestro en los distintos desgloses del Formato 3, de acuerdo a los tres *tipos de riesgo*, trece *coberturas* y 120 *tipos de giro*.

**Tabla 3.8.2.**  
Estadísticas del seguro de incendio por tipo de bien, 2003-2005

<b>Año</b>	<b>Tipo de bien</b>	<b>Número de siniestros</b>	<b>Monto de siniestros</b>	<b>Prima emitida</b>
2003	Edificios	547	4,370,821,375	3,655,572,407
	Contenidos	547	2,342,677,095	2,641,229,734
2004	Edificios	442	3,832,925,119	3,818,013,082
	Contenidos	498	2,192,435,632	3,591,724,592
2005	Edificios	556	19,474,065,217	3,718,921,253
	Contenidos	550	4,727,970,549	3,857,077,200

Fuente: SESA del Seguro de Incendio, Formato 3.

En la tabla siguiente, se muestran los datos necesarios para evaluar el coeficiente de ajuste,  $\tilde{R} \cong \frac{2\theta p_1}{p_2}$ , y la probabilidad de ruina por tipo de bien,  $\psi(u) = \exp(-\tilde{R}u)$ , del ramo de incendio del sector asegurador mexicano.

**Tabla 3.8.3.**  
 $p_1$  y  $p_2$  por tipo de bien, 2003-2005

Año	Tipo de bien	$p_1$	$p_2$
		(media del monto de los siniestros)	(segundo momento con respecto al origen del monto de los siniestros)
2003	Edificios	7,990,533	786,944,609,967,894
	Contenidos	4,282,773	263,792,071,436,702
2004	Edificios	8,671,776	1,343,285,732,089,320
	Contenidos	4,402,481	504,331,942,021,747
2005	Edificios	35,025,297	44,489,391,314,325,300
	Contenidos	8,596,310	1,398,570,976,771,940
2003-2005	Edificios	17,914,441	16,673,328,521,683,400
	Contenidos	5,807,576	730,197,872,995,156

Fuente: Cálculos realizados con base en datos del SESA del Seguro de Incendio, Formato 3.

La Tabla 3.8.4 muestra la probabilidad de ruina para el tipo de bien *edificios* para distintos valores de recargo de seguridad  $\theta$  y diferentes montos iniciales  $u_0$ . El cálculo de la probabilidad de ruina se realizó utilizando los datos observados en cada uno de los tres años (2003, 2004 y 2005), así como para el periodo comprendido de 2003 a 2005. Esto último para tratar de suavizar el incremento tan brusco en el monto de los siniestros observado en el 2005.

**Tabla 3.8.4.**  
 Probabilidad de ruina para el tipo de bien *edificios*, 2003-2005

2003		$u_0$			
		500,000,000	1,000,000,000	2,000,000,000	4,000,000,000
$\theta$	0.01	0.903446	0.816215	0.666207	0.443832
	0.03	0.737406	0.543768	0.295684	0.087429
	0.05	0.601882	0.362262	0.131234	0.017222
	0.10	0.362262	0.131234	0.017222	0.000297

2004		$u_0$			
		500,000,000	1,000,000,000	2,000,000,000	4,000,000,000
$\theta$	0.01	0.937483	0.878875	0.772421	0.596634
	0.03	0.823930	0.678861	0.460852	0.212385
	0.05	0.724132	0.524366	0.274960	0.075603
	0.10	0.524366	0.274960	0.075603	0.005716

2005		$u_0$			
		500,000,000	1,000,000,000	2,000,000,000	4,000,000,000
$\theta$	0.01	0.992158	0.984378	0.969000	0.938961
	0.03	0.976659	0.953862	0.909853	0.827832
	0.05	0.961401	0.924292	0.854316	0.729855
	0.10	0.924292	0.854316	0.729855	0.532689

2003-2005		$u_0$			
		500,000,000	1,000,000,000	2,000,000,000	4,000,000,000
$\theta$	0.01	0.989313	0.978740	0.957933	0.917636
	0.03	0.968281	0.937568	0.879033	0.772700
	0.05	0.947696	0.898127	0.806632	0.650656
	0.10	0.898127	0.806632	0.650656	0.423353

En un ejercicio similar al anterior, la Tabla 3.8.5 muestra la probabilidad de ruina para el tipo de bien *contenidos* para distintos valores de recargo de seguridad  $\theta$  y diferentes montos iniciales  $u_0$ .

**Tabla 3.8.5.**  
Probabilidad de ruina para el tipo de bien *contenidos*, 2003-2005

<b>2003</b>		<b><math>u_0</math></b>			
		500,000,000	1,000,000,000	2,000,000,000	4,000,000,000
<b><math>\theta</math></b>	0.01	<b>0.850140</b>	<b>0.722738</b>	<b>0.522350</b>	<b>0.272850</b>
	0.03	<b>0.614429</b>	<b>0.377523</b>	<b>0.142523</b>	<b>0.020313</b>
	0.05	<b>0.444071</b>	<b>0.197199</b>	<b>0.038887</b>	<b>0.001512</b>
	0.10	<b>0.197199</b>	<b>0.038887</b>	<b>0.001512</b>	<b>0.000002</b>

<b>2004</b>		<b><math>u_0</math></b>			
		500,000,000	1,000,000,000	2,000,000,000	4,000,000,000
<b><math>\theta</math></b>	0.01	<b>0.916408</b>	<b>0.839804</b>	<b>0.705271</b>	<b>0.497407</b>
	0.03	<b>0.769603</b>	<b>0.592289</b>	<b>0.350807</b>	<b>0.123065</b>
	0.05	<b>0.646316</b>	<b>0.417724</b>	<b>0.174494</b>	<b>0.030448</b>
	0.10	<b>0.417724</b>	<b>0.174494</b>	<b>0.030448</b>	<b>0.000927</b>

<b>2005</b>		<b><math>u_0</math></b>			
		500,000,000	1,000,000,000	2,000,000,000	4,000,000,000
<b><math>\theta</math></b>	0.01	<b>0.940386</b>	<b>0.884326</b>	<b>0.782032</b>	<b>0.611574</b>
	0.03	<b>0.831607</b>	<b>0.691571</b>	<b>0.478270</b>	<b>0.228742</b>
	0.05	<b>0.735412</b>	<b>0.540830</b>	<b>0.292498</b>	<b>0.085555</b>
	0.10	<b>0.540830</b>	<b>0.292498</b>	<b>0.085555</b>	<b>0.007320</b>

<b>2003-2005</b>		<b><math>u_0</math></b>			
		500,000,000	1,000,000,000	2,000,000,000	4,000,000,000
<b><math>\theta</math></b>	0.01	<b>0.923546</b>	<b>0.852938</b>	<b>0.727503</b>	<b>0.529261</b>
	0.03	<b>0.787728</b>	<b>0.620515</b>	<b>0.385039</b>	<b>0.148255</b>
	0.05	<b>0.671883</b>	<b>0.451426</b>	<b>0.203786</b>	<b>0.041529</b>
	0.10	<b>0.451426</b>	<b>0.203786</b>	<b>0.041529</b>	<b>0.001725</b>

De las dos tablas anteriores se puede observar que la probabilidad de ruina es inversamente proporcional tanto al recargo de seguridad como al monto inicial. En ambas tablas la mayor probabilidad de ruina se da cuando se tiene el menor recargo de seguridad y monto inicial, con una probabilidad de ruina mayor al 90%, con excepción de un caso. A su vez, cuando se tiene el mayor recargo de seguridad y monto inicial, la probabilidad de ruina es menor al 1%, excepto para el tipo de bien *edificios* en el año 2005 y el periodo 2003-2005, cuando se observó un incremento brusco en el monto de los siniestros.

### 3.9 Análisis de solvencia

Para realizar este análisis se utilizó el programa *Cristal Ball*<sup>9</sup> para correr simulaciones del proceso de superávit en diez distintos períodos de tiempo,  $U_n$  con  $n = 1, 2, \dots, 10$ . Utilizando los datos del SESA para el periodo 2003-2005, se supuso que el número de siniestros  $N$  tuviera una distribución Poisson con  $\lambda = 515$ <sup>10</sup> para el tipo de bien *edificios* y  $\lambda = 532$ <sup>11</sup> para el tipo de bien *contenidos*. Para el monto de los siniestros se utilizaron los datos de la Tabla 3.8.3 para el periodo en cuestión, suponiendo una distribución exponencial para dichos montos.

El cálculo de la prima recibida por periodo de tiempo se hizo tomando en cuenta que  $c = (1 + \theta)\mu$ , donde  $\mu = E[W_i]$ <sup>12</sup> y  $\theta$  es el recargo de seguridad, para nuestro análisis será de 0.05. Este monto de recargo de seguridad no obedece a ningún factor específico, simplemente se consideró adecuado para realizar el análisis de solvencia. Asimismo, no se consideró el capital mínimo de garantía para las aseguradoras establecido por la CNSF debido a que los datos del SESA utilizados no corresponden a una compañía en específico, sino a todo el sector asegurador nacional en el ramo de incendio.

En la figura siguiente se muestra la simulación del proceso de seguro para el tipo de bien *edificios* para cuatro distintos montos iniciales utilizando un mismo recargo de seguridad ( $\theta = 0.05$ ). Al respecto, se utilizaron los datos del periodo de 2003-2005.

---

<sup>9</sup> Los requisitos del sistema para correr este programa son: Microsoft® Windows® 2000 o sistema operativo XP. Microsoft Excel 2000, 2002(XP) o 2003. Estructura .NET de Microsoft v1.1.

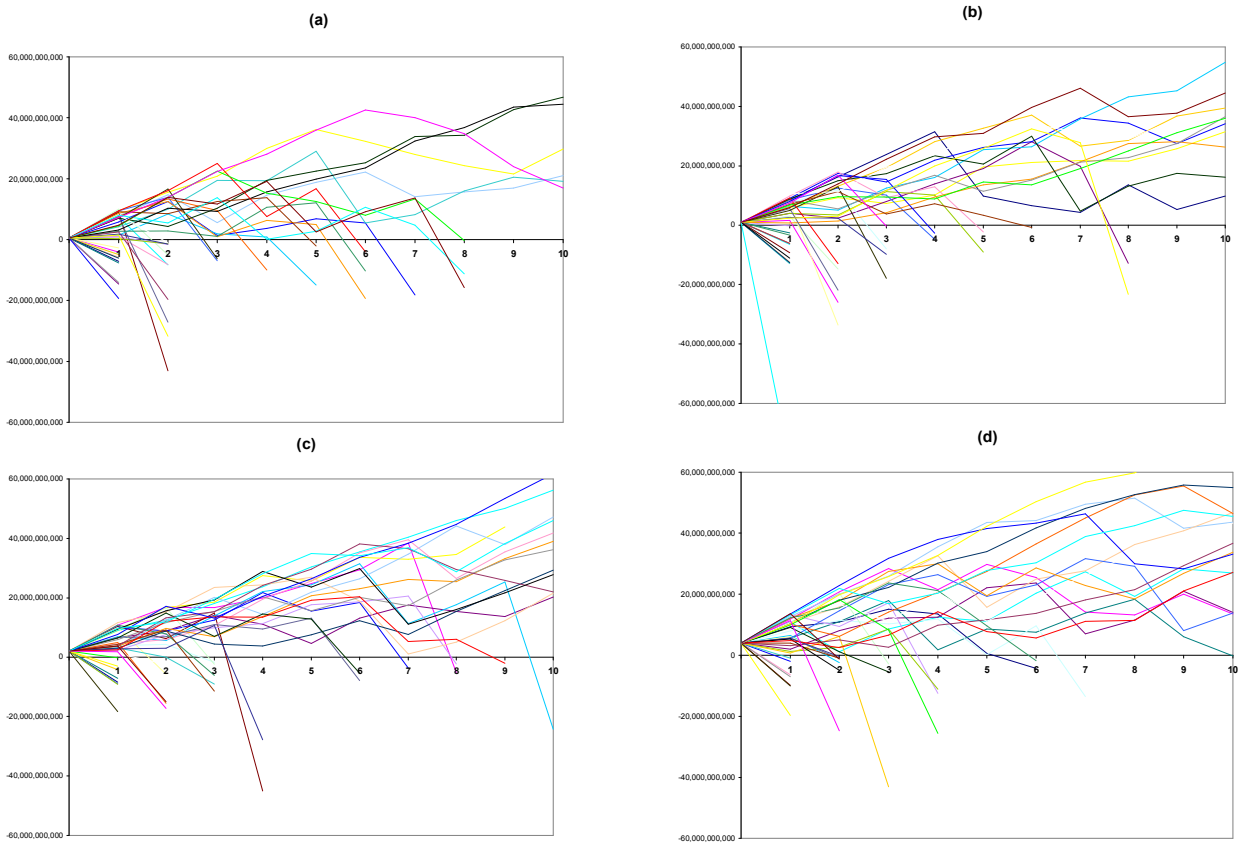
<sup>10</sup> Este número es el promedio del número de siniestros del tipo de bien *edificios* obtenidos de los datos del SESA para el periodo 2003-2005.

<sup>11</sup> *Ibid.*

<sup>12</sup> Recuérdese que  $W_i$  es la suma de las reclamaciones en cada periodo.

**Figura 3.9.1.**

Análisis del proceso de superávit para el tipo de bien *edificios* para cuatro distintos montos iniciales



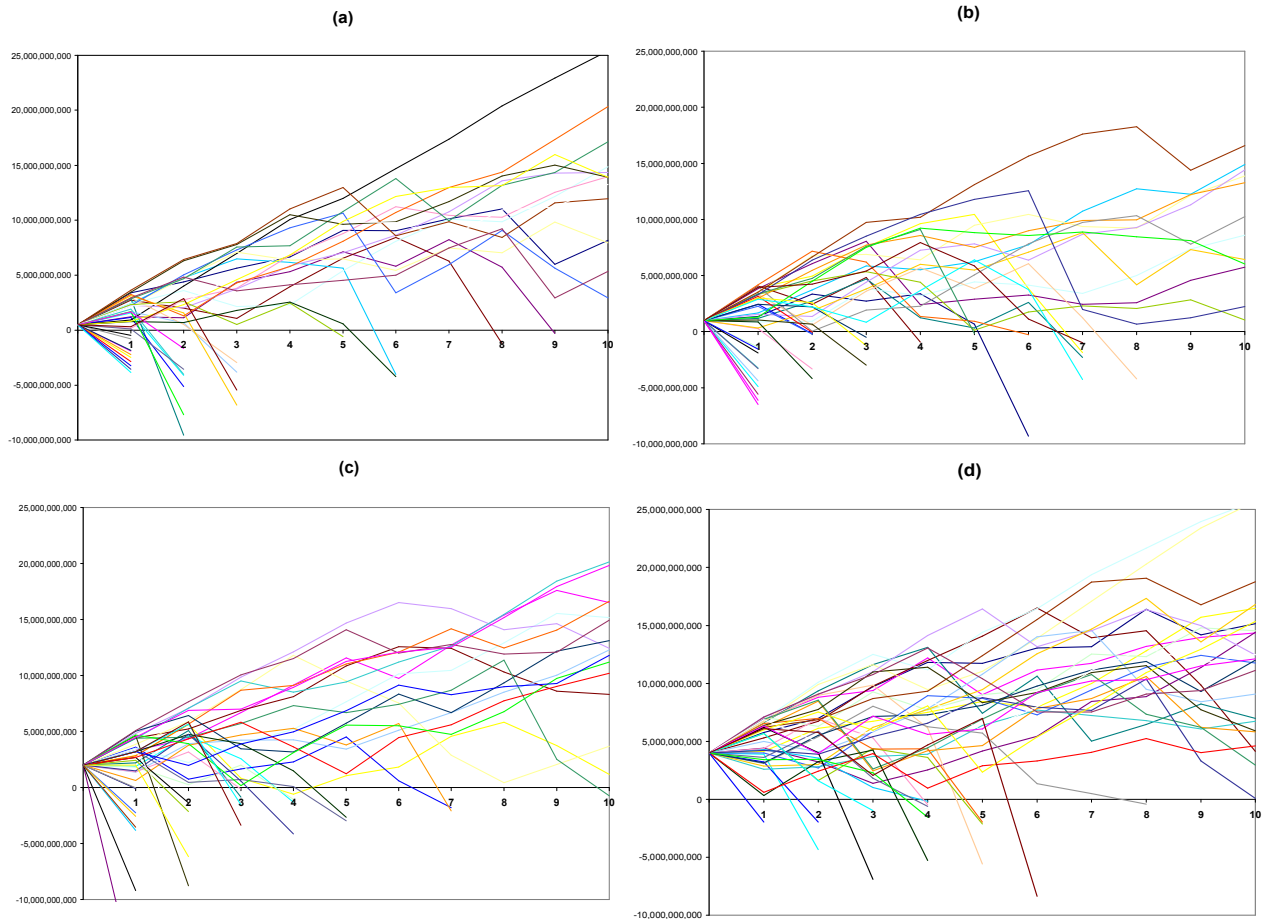
Caso (a)  $u_0 = 500,000,000$ , (b)  $u_0 = 1,000,000,000$ , (c)  $u_0 = 2,000,000,000$  y  
(d)  $u_0 = 4,000,000,000$ ; 40 realizaciones.

Se puede observar que a medida que el monto inicial  $u_0$  va aumentando, el proceso de seguro es menos recurrente en caer por debajo de cero, lo que implica ruina.

En un ejercicio similar, la Figura 3.9.2 muestra la simulación del proceso de seguro para el tipo de bien *contenidos* para cuatro distintos montos iniciales utilizando un mismo recargo de seguridad ( $\theta = 0.05$ ). También se utilizaron los datos del periodo de 2003-2005.

**Figura 3.9.2.**

Análisis del proceso de superávit para el tipo de bien *contenidos* para cuatro distintos montos iniciales



Caso (a)  $u_0 = 500,000,000$ , (b)  $u_0 = 1,000,000,000$ , (c)  $u_0 = 2,000,000,000$  y  
(d)  $u_0 = 4,000,000,000$ ; 40 realizaciones.

### 3.10 Reservas actuariales

Una reserva actuarial es un capital requerido por un monto estimado para cumplir con el pago de todas las obligaciones contraídas por la compañía aseguradora mediante un contrato de seguro con un particular en caso de ocurrencia de un incidente. El monto estimado resulta del cálculo matemático - financiero (llamado también, cálculo actuarial).

A través del cálculo de la probabilidad de ruina se tiene un análisis matemático de las fluctuaciones aleatorias en los seguros, en este caso en el de incendio, pudiendo con ello prever medios de protección contra sus efectos desfavorables. Es decir, se tiene una medida que alerta en términos probabilísticos sobre una posible ruina de un portafolio de pólizas. Cuando ocurre la ruina significa que las reservas previstas para hacer frente a las obligaciones contraídas se han agotado, lo que pone en una situación precaria a la compañía de seguros; aunque ello no signifique necesariamente su quiebra.

Si se observa una alta probabilidad de ruina, significa que es muy probable que el monto acumulado de las reclamaciones de un conjunto de pólizas sobrepase las reservas asignadas para hacerles frente. Esto se puede observar en lo mostrado por la Figura 3.9.1 y 3.9.2.

Dentro de las virtudes de la probabilidad de ruina para un mejor análisis de las reservas actuariales, se encuentran que dos de los componentes que se utilizan para su cálculo, el recargo de seguridad  $\theta$  y el monto inicial  $u_0$ , son inversamente proporcionales a la probabilidad de ruina. Con ello se tiene que una  $\theta$  de mayor proporción o un  $u_0$  de mayor tamaño reducen la probabilidad de ruina del portafolio seleccionado, lo cual claramente se ilustra en la Tabla 3.8.4 y Tabla 3.8.5. Esto permite que el asegurador pueda manejar ambos factores para reducir el riesgo de que sus reservas se vean agotadas.

## CONCLUSIONES

El superávit inicial, las primas recibidas y las reclamaciones pagadas son los tres componentes del modelo que representa a la Teoría de Ruina, el cual se conoce como un modelo del proceso de superávit.

El modelo del proceso de superávit se da como un mecanismo de suministro de algún tipo de bien, en forma determinada y a tasa constante, y un proceso de pérdida que reduce los bienes suministrados, un proceso estocástico. A *grosso modo*, esto es la base de la Teoría de Ruina, dando paso a un análisis más profundo sobre la forma y comportamiento de los componentes del modelo.

Ahora bien, se tiene un proceso acumulado de pérdida compuesto por número de eventos y severidad de pérdida. El número de eventos es un proceso Poisson, lo que da lugar a que el proceso acumulado de pérdida sea un proceso de Poisson compuesto. A su vez, es a través del modelo clásico de Cramér-Lundberg donde se llega a la generalización del modelo básico de la Teoría de Ruina:

$$U(t) = u + ct - \sum_{j=1}^{N_t} X_j .$$

Cuando el superávit del asegurador es cero o un monto menor a éste, se dice que la ruina ocurre. La probabilidad de ruina se puede estudiar dentro de un intervalo finito o ilimitado de tiempo. Para poder determinar la probabilidad de ruina es necesario contar con un *coeficiente de ajuste*, el cual a su vez, se obtiene mediante la *desigualdad de Lundberg*

$$\psi(u) \leq e^{-r^*u} ,$$

donde  $\psi(u)$  es la probabilidad de ruina,  $r^*$  es el coeficiente de ajuste y  $u$  es el capital inicial de la compañía aseguradora.



La importancia del cálculo de la probabilidad de ruina en una compañía de seguros radica en que ésta representa una medida útil del riesgo financiero, la cual, bajo un análisis completo y matemáticamente robusto, alerta cuando el capital de una compañía aseguradora asignado a una cartera decrece en forma significativa, permitiendo a la aseguradora tomar ciertas medidas para subsanar esta situación.

En la Teoría de Riesgo, el enfoque de aproximación colectiva es el adecuado para grandes riesgos colectivos, pues propone un modelo que se desarrolla directamente de la variable del número de reclamaciones y del monto agregado de las reclamaciones.

El monto de la reclamación es la suma de dinero que el asegurador tiene que pagar si se presenta un incendio, inundación, accidente, muerte u otro evento asegurado. El proceso de reclamación se generaliza para incluir el monto de las reclamaciones, obteniendo una suma aleatoria donde la cantidad de sumandos es un número aleatorio, así como el valor individual de cada uno de los sumandos.

Una característica importante del proceso de reclamación es que el tamaño de las reclamaciones individuales (valor individual de cada sumando) es independiente del número de las reclamaciones (cantidad de sumandos). Es decir, la probabilidad de una reclamación individual de un tamaño particular no está afectada por el número de reclamaciones que han ocurrido, ni por el tamaño de las mismas (independencia mutua). De esta forma, aplicando las reglas de la suma y multiplicación de probabilidades, se obtiene la función de densidad del monto agregado de las reclamaciones, una variable compuesta.

Entonces, para tener conocimiento de la variable compuesta resulta necesario analizar uno de sus componentes, el número de siniestros. Éste es consecuencia de eventos aleatorios, para los cuales no es posible predecir su tiempo exacto de ocurrencia ni tampoco su número exacto. Ahora bien, asumiendo que el número de reclamaciones que ocurre en cualquier dos intervalos de tiempo disjuntos son independientes, no más de una reclamación se puede dar en el mismo evento y la probabilidad de que una

reclamación ocurra en un punto fijo del tiempo es igual a cero; se tiene que el número de reclamaciones en un periodo de tiempo dado se distribuye Poisson.

Cuando existen factores de fondo que pueden causar cambios aleatorios en el parámetro de Poisson ( $\lambda$ ), se introduce una variable auxiliar (o proceso) que controle dichos cambios, llegando a la distribución mixta o ponderada.

En cuanto a la modelación del monto de los siniestros para un horizonte temporal amplio, ésta se ha hecho a través de aproximaciones. La primera de ellas es a través de la distribución normal estándar por la enorme simplificación de cálculos; sin embargo, por la naturaleza insesgada de la distribución normal, esta aproximación subestima los siniestros agregados. Para lidiar con este problema se utiliza la aproximación Normal Power, la cual consiste en encontrar una transformación de la aproximación Normal que se ajuste mejor al sesgo de la distribución compuesta. Por último, la aproximación Gamma de tres parámetros es la que mejor se ajusta cuando se tienen distribuciones en el monto de los siniestros sesgadas, como es el caso de distribuciones compuestas con sesgo positivo como la Binomial, Binomial Negativa y Poisson.

Por otra parte, en la práctica la prima cobrada por el asegurador excede, generalmente, el monto de la reclamación esperada. Este cobro adicional se conoce como el recargo de seguridad, que está en función de la varianza del monto de los siniestros por el riesgo asumido. Asimismo, el recargo de seguridad es decisión de la aseguradora, siendo determinado por sus políticas o por la competencia en precios del mercado. No obstante, una forma conveniente para determinar este recargo sería fijar la probabilidad de ruina, es decir, fijar aquel recargo de seguridad tal que la probabilidad de que el monto de los siniestros sobrepase la prima del seguro sea un determinado valor.

Bajo la construcción de un modelo del proceso de superávit y a través de ejemplos prácticos se vio la forma en cómo se logra calcular la probabilidad de ruina  $\psi(u)$  para poder dar una visión de cómo esta Teoría de Ruina se puede aplicar dentro de una compañía de seguros para el análisis de su solvencia.

Existen importantes factores a considerar para hacer del modelo del proceso de superávit más robusto y a su vez más complejo. Entre dichos factores se encuentra la modelación de gastos, impuestos y dividendos. Al respecto, tanto para los gastos como para los impuestos se utilizan tasas constantes con respecto al ingreso por primas. No obstante, en proyecciones de largo plazo el ingreso por primas está sujeto a varios cambios que no necesariamente afectan los gastos o los impuestos, al menos no proporcionalmente como se ha asumido en los modelos presentados.

Para el caso de los dividendos se hace notar que éstos los otorgan las compañías de seguros para tratar de hacer atractivas las inversiones de sus accionistas, dando una compensación por inflación y otorgando un rendimiento real en su inversión. Se presenta el trabajo de Alegre, *et al* para ilustrar la idea e importancia del reparto de dividendos dentro de la probabilidad de ruina.

La aplicación numérica que se realiza en el último capítulo trata de ilustrar los alcances prácticos que el cálculo de la probabilidad de ruina tiene para el análisis de la solvencia de una compañía de seguros y su relación con las reservas actuariales. Si bien el análisis hecho no es específico a una cartera de pólizas de una aseguradora, se trató, con la información de la CNSF disponible a través del SESA, de ejemplificar el cálculo de la probabilidad de ruina para el seguro de incendio y ver los comportamientos a diferentes recargos de seguridad y montos de capital inicial.

Mediante el análisis de solvencia, a través de simulaciones, se logró ver el comportamiento de un proceso de seguro y como éste se relaciona con la probabilidad de ruina, es decir, a mayor probabilidad hay más posibilidades de que el proceso de seguro caiga por debajo de cero, ocurriendo la ruina. Bajo el análisis planteado en este trabajo, el monto que deberán mantener las reservas actuariales depende del nivel de probabilidad de ruina que el asegurador quiere enfrentar, es decir, se pueden modificar las reservas actuariales para enfrentar una mayor o menor probabilidad de ruina.

Finalmente, el trabajo cumple con el objetivo de plantear un vínculo entre la probabilidad de ruina y la solvencia de las reservas actuariales. No obstante, quedan

abiertas líneas de investigación futuras respecto a la probabilidad de ruina y su vinculación con las compañías aseguradoras. En principio, contando con datos específicos de cada aseguradora, se podría realizar un análisis individualizado por compañía de seguros, lo que permitiría observar el comportamiento de la probabilidad de ruina respecto a los riesgos que enfrenta cada compañía. También, mediante la introducción de estrategias de barrera, se podría analizar como éstas afectan a la probabilidad de ruina de una compañía de seguros y plantear estrategias óptimas para la repartición de dividendos.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Alegre, *et al* Alegre, Antonio; Claramunt, M. Mercè y Mármol, Maite. *Probabilidad de Ruina y Estrategias de Barrera bajo un proceso de Poisson compuesto*. Cuadernos de CC.EE. y EE., N° 41. 2001, pp. 75-92.
2. Bowers Bowers, Newton L., Jr. *Actuarial Mathematics*. SOA. 2ª Edición, 1997.
3. Cunningham, *et al* Cunningham, Robin; Herzog, Thomas y London, Richard L. *Models for Quantifying Risk*. ACTEX Publications, Inc. 2005.
4. Dickson Dickson, David C.M. *Insurance Risk and Ruin*. Cambridge University Press. 1ª Edición, 2005.
5. González (2005) González, Fabián *Inducción a la Teoría de Riesgo y sus aplicaciones [Notas preliminares]*. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. 2005.
6. Rincón (2006) Rincón, Luis. *Introducción a la Teoría del Riesgo [Notas preliminares]*. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. Febrero, 2006.
7. Daykin, *et al* Daykin, C.D.; Pentikäinen, T. y Pesonen, M. *Practical Risk Theory for Actuaries*. Ed. Chapman & Hall. 1ª Edición. 1996.
8. Hernández (1997) Hernández Rangel, Diego. *Modelos de la Teoría de Riesgo para la Solvencia del Sector Asegurador*. Comisión Nacional de Seguros y Fianzas. Segundo Lugar del Premio de Investigación sobre Seguros y Fianzas 1997.

9. Nava  
Nava, Ricardo. *Cálculo de la Prima de Reaseguro de Stop Loss en el Seguro de Vida*. Revista Mexicana de Ciencias Actuariales, Primer número.
10. Rolski, *et al*  
Rolski, Tomas; Schmidli, Hanspeter; *et al*. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Ed. Wiley. 1999.