



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

“NÚMEROS CROMÁTICOS DE GRÁFICAS DE GIROS”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

RUY FABILA MONROY

DIRECTOR DE TESIS: DR. JORGE URRUTIA GALICIA.

México, D.F.

ENERO 2007.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

A Jorge Urrutia por todas las enseñanzas y apoyo que he recibido de ti, a lo largo de estos años.

A Ferran Hurtado por ser el mejor de los anfitriones y el tiempo que nos dedicaste.

A Clemens Huemer y David Flores por la amistad y el gran placer de haber trabajado juntos.

Al grupo de Geometría Computacional de la UPC. Por haber hecho mi estancia ahí aun más placentera.

A mis sinodales Ferran Hurtado, Juan José Montellano, Gabriela Araujo y Déborah Oliveros por sus valiosos comentarios y sugerencias.

A mis padres por el apoyo que recibí para durante la maestría.

A Jhoseline por todo el amor que me has dado.

A mis amigos y a mi hermano que han estado siempre ahí cuando los he necesitado.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Gráficas de Giros . . . . .	7
1.1.1. Triangulaciones (Caso Combinatorio) . . . . .	8
1.1.2. Triangulaciones (Caso Geométrico) . . . . .	9
1.1.3. Árboles Generadores de una Gráfica . . . . .	13
1.1.4. Gráficas de emparejamientos perfectos . . . . .	13
<b>2. Gráfica de Fichas</b>	<b>17</b>
2.1. Propiedades de la gráfica de fichas . . . . .	17
2.2. Estructuras similares la gráfica de fichas . . . . .	21
2.3. Conclusiones y trabajos futuros . . . . .	22
<b>3. Triangulaciones del <math>n</math>-gono</b>	<b>25</b>
3.1. Los números de Catalán . . . . .	26
3.2. La gráfica de giros $G_T(n)$ . . . . .	29
3.3. Gráfica de triángulos . . . . .	32
3.4. Conclusiones y trabajos futuros . . . . .	35
<b>4. Emparejamientos Perfectos</b>	<b>39</b>
4.1. Número cromático de $\mathcal{M}'(K_{n,n})$ y $\mathcal{M}'(K_{2n})$ . . . . .	40
4.2. Propiedades de $\mathcal{M}'(K_{2n})$ . . . . .	42
4.3. Conclusiones y trabajos futuros . . . . .	48
<b>5. Producto Cartesiano Torcido</b>	<b>53</b>
5.1. Producto Cartesiano Torcido . . . . .	53
5.2. Propiedades básicas . . . . .	55

5.3. El número cromático de $G_f \square H$ . . . . .	56
5.4. Conclusiones y trabajos futuros . . . . .	62
<b>6. Diamante Azteca</b> . . . . .	<b>67</b>
6.1. Diamante Azteca . . . . .	67
6.2. Número cromático de $G_{AD}(n)$ . . . . .	69
6.3. Teselaciones con dominos etiquetados de $AD_n$ . . . . .	71
6.4. Conexidad de $LG_{AD}(n)$ . . . . .	72
6.5. Conclusiones y trabajos futuros . . . . .	77
<b>7. Apéndice</b> . . . . .	<b>79</b>
7.1. Teoría de gráficas . . . . .	79
7.1.1. Número cromático . . . . .	81
7.2. Conjuntos de puntos . . . . .	82

# Índice de figuras

1.1. Giro de aristas en triangulaciones. . . . .	8
1.2. Un giro valido y uno invalido en una triangulación. . . . .	9
1.3. Giros en árboles binarios con raíz. . . . .	11
1.4. Una triangulación en $G_T(n)$ y su árbol binario asociado en $RG(n - 2)$ . . . . .	12
1.5. Un conjunto de puntos en posición convexa y un emparejamiento perfecto sobre este. . . . .	14
2.1. una gráfica y su gráfica de fichas . . . . .	18
2.2. Una Gráfica de Fichas con Número Cromático Menor que la Gráfica Original	19
3.1. $G_T(5)$ y $G_T(6)$ . . . . .	26
3.2. Contando las triangulaciones del $n$ -agono . . . . .	27
3.3. Descomposición de $\tilde{K}_6$ en trayectorias hamiltonianas geométricas . . . . .	31
3.4. El homomorfismo entre $G'_\Delta(n)$ y $G_\Delta(\frac{n}{2})$ . . . . .	33
4.1. Un emparejamiento perfecto de $K_{n,n}$ y su permutación asociada . . . . .	40
4.2. Las adyacencias entre $H_i$ y $H_j$ . . . . .	43
4.3. $\mathcal{M}'(K_6)$ en términos de $\mathcal{M}'(K_4)$ . . . . .	45
4.4. Un ciclo hamiltoniano en $\mathcal{M}'(K_6)$ . . . . .	47
4.5. Una 4 coloración propia de $\mathcal{M}'(K_6)$ . . . . .	49
5.1. $K_2 \square K_3$ y $K_{2f} \square K_3$ . . . . .	54
5.2. 2 Gráficas 3-cromáticas cuyo producto cartesiano torcido tiene número cromático 4. . . . .	58
5.3. Demostración exhaustiva de que $K_{3f} \square K_3$ no es 3-cromática. . . . .	62
6.1. El Diamante Azteca de orden 1, 2, 3 y 4 . . . . .	68

---

6.2. Distintas teselaciones con dominos de $AD_4$ . . . . .	68
6.3. Giro en teselaciones con dominos . . . . .	69
6.4. $D(AD_4)$ , una teselación con dominos de $AD_4$ y su emparejamiento perfecto asociado en $D(AD_4)$ . . . . .	70
6.5. Giro en teselaciones con dominos etiquetados . . . . .	71
6.6. La teselación horizontal con dominos de $AD_5$ y sus renglones correspondi- entes . . . . .	73
6.7. Ilustración del paso inductivo del Lema 6 en $AD_5$ . . . . .	74
6.8. Intercambio de etiquetas en el Lema 7 . . . . .	75
6.9. Intercambio de etiquetas en el Lema 8 . . . . .	76
6.10. Polígono ortogonal y dos de sus teselaciones con dominos etiquetados, no conectadas por giros . . . . .	78

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Gráficas de Giros

Dada una colección de gráficas  $\mathcal{G}$  y  $G \in \mathcal{G}$ , un giro de arista en  $G$  es la operación de quitar y agregar una arista a  $G$  para obtener otra gráfica  $G'$  también en  $\mathcal{G}$ .

Esta operación se ha estudiado para muchas clases de gráficas así como para distintos tipos de giros de arista.

Una vez que la operación de giro y la colección de gráficas  $\mathcal{G}$  han sido especificadas, estamos en condiciones de definir una gráfica de giros. En este caso la gráfica de giros asociada es la gráfica cuyo conjunto de vértices es  $\mathcal{G}$  con dos de gráficas  $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$  adyacentes si por medio de un giro se puede ir de  $G_1$  a  $G_2$  y viceversa.

Para mayor información referimos al lector a [2]. Revisamos aquí brevemente algunas gráficas de giros a manera de introducción a el resto de la tesis.

Este trabajo trata sobre el número cromático de algunas gráficas de giros.



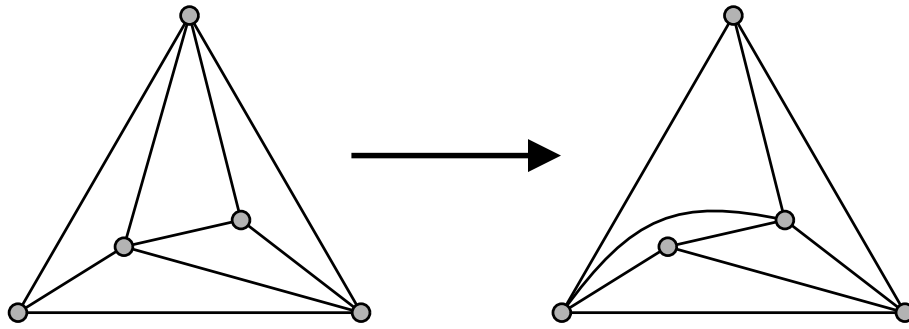


Figura 1.1: Giro de aristas en triangulaciones.

### 1.1.1. Triangulaciones (Caso Combinatorio)

Una triangulación es una gráfica plana maximal. Es decir que si agregamos cualquier otra arista, obtenemos una gráfica no plana.

Sea  $\mathcal{G}_n$  la colección de todas las triangulaciones con  $n$  vértices modulo isomorfismo, es decir consideramos dos triangulaciones isomorfas como gráficas como la misma triangulación. El giro de aristas en este caso es el que mencionamos en un principio: Dada  $T_1 \in \mathcal{G}_n$  un giro es el quitar una arista a  $T_1$  y agregar una arista (que no estuviera previamente) para obtener una triangulación  $T_2 \in \mathcal{G}_n$  (ver Figura 1.1.1).

En [37] se prueba que dadas dos triangulaciones  $T_1, T_2 \in \mathcal{G}_n$ , siempre se puede ir mediante giros de aristas de  $T_1$  a  $T_2$ . Esto significa que la gráfica de giros asociada a  $\mathcal{G}_n$  es conexa. En general propiedades de la colección y el giro de aristas en cuestión se traducen en propiedades de la gráfica de giros asociada.

El resultado anterior originó la investigación sobre giros de arista en triangulaciones. Dado que siempre es posible ir de una triangulación a otra mediante giros es natural el preguntarse cual es el mínimo número de giros necesarios para ello. Esto es equivalente a determinar el diámetro de la gráfica de giros asociada. La prueba de conexidad dada en [37] muestra que  $O(n^2)$  giros son suficientes para ir de una triangulación a cualquier otra. Actualmente

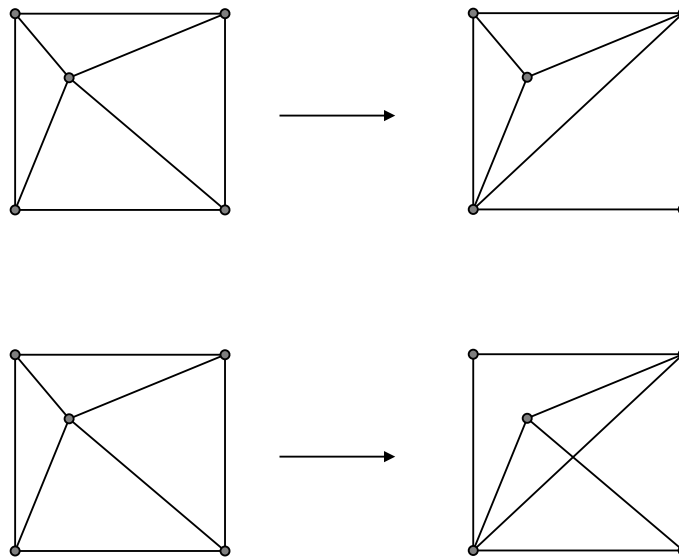


Figura 1.2: Un giro valido y uno invalido en una triangulación.

la mejor cota es de  $6n - 30$  giros [33].

Se ha estudiado también el grado de la gráfica de giros, es decir al menos y a lo más cuantas aristas son girables en cualquier triangulación. A este respecto se sabe que a lo más hay  $n - 2$  aristas girables y existen triangulaciones con a lo más  $n - 2$  aristas girables [14].

### 1.1.2. Triangulaciones (Caso Geométrico)

#### Conjuntos de Puntos en General

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general. En la variante geométrica del problema anterior se consideran todas las gráficas geométricas máximas sin cruces con vértices en  $S$ . Es decir todas las gráficas con conjunto de vértices  $S$  y cuyas aristas son segmentos de recta y no se intersecta entre sí (salvo en los vértices), con la propiedad adicional que la adición de cualquier arista genera cruces. Estas gráficas las denominamos como triangulaciones de  $S$ .

En este caso un al girar una arista en una triangulación debemos obtener otra triangulación de  $S$ . De esta manera restringimos los tipos de giros permitidos a solo aquellos que no generen cruces (ver Figura 1.1.2).

A la gráfica de giros asociada la denotamos como  $G_T(S)$ . En [26] se prueba que  $G(S)$  es conexa [26]. Posteriormente en [27] se muestra que con a lo más  $O(n^2)$  giros se puede ir una triangulación de  $S$  a cualquier otra triangulación de  $S$ . Finalmente en [12] se dan ejemplos de conjuntos con dos triangulaciones a distancia  $\Omega(n^2)$  en  $G_T(S)$ .

### Conjuntos de Puntos en Posición Convexa

Si  $S$ , se encuentra en posición convexa, la gráfica de giros de sus triangulaciones la denotamos como  $G_T(n)$  esto se debe a que la gráfica de giros de cualquier otro conjunto de  $n$  puntos en posición convexa es isomorfa a  $G_T(S)$ . Por lo tanto sin pérdida de generalidad todas ellas se pueden denotar como  $G_T(n)$ .

Estas gráficas han sido muy estudiadas, mencionamos brevemente algunas de sus propiedades, hablaremos sobre su número cromático en el Capítulo 3. En [12] se estudia el diámetro y grado de estas gráficas (de  $G_T(n)$  como  $G_T(S)$ ).

En lo que respecta a  $G_T(n)$  muchos de sus parámetros se han calculado explícitamente. En [36] se determina el diámetro de  $G_T(n)$ . Se sabe también por ejemplo [22] que  $G_T(n)$  tiene un ciclo hamiltoniano. Para una exposición de estas propiedades referimos al lector a [11], donde todos estos resultados se prueban con un marco teórico conocido como “árbol de triangulaciones”.

Hasta ahora solo hemos hablado de gráficas de giros de gráficas, sin embargo existen también gráficas de giros a partir de otros objetos y con operaciones de giros correspondientes.

$G_T(n)$  ha recibido mucha atención en parte por ser isomorfa a otra gráfica de giros que

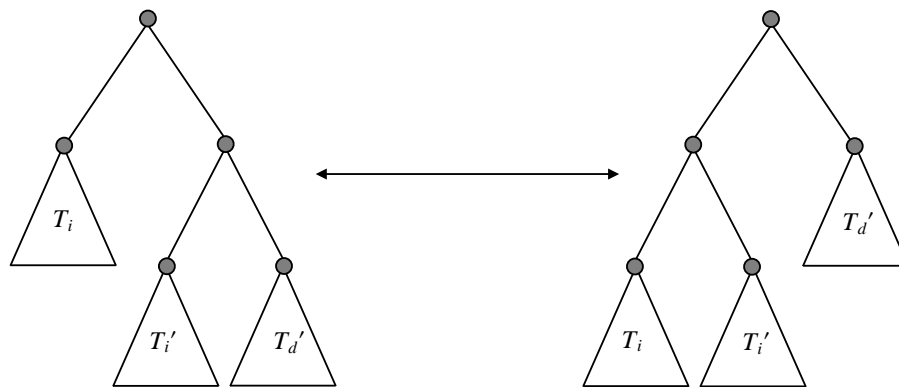


Figura 1.3: Giros en árboles binarios con raíz.

en si misma sido objeto de intenso estudio.

Un árbol binario con raíz consta de un vértice que llamamos raíz y de a lo más dos árboles binarios (árbol izquierdo y árbol derecho), a los cuales en caso de existir es adyacente a sus respectivas raíces. Se define un giro de árboles binarios como sigue: Sea  $T$  un árbol binario con raíz y subárboles izquierdo y derecho  $T_i$  y  $T_d$ , tal que  $T_d$  consta a su vez de una raíz y subárboles izquierdo y derecho  $T_i'$  y  $T_d'$  respectivamente. Una giro en  $T$  consiste en cambiar  $T$  por el árbol binario con raíz que tiene como como subárbol derecho a  $T_d'$  y subárbol izquierdo a al árbol binario con raíz cuyo subárbol izquierdo es  $T_i$  y su árbol derecho  $T_i'$ . Esta operación y su inversa constituyen los giros en los árboles binarios con raíces.

De esta manera se define otra gráfica de giros, la gráfica de giros de árboles binarios con raíz  $RG(n)$ , cuyo conjunto de vértices son los árboles binarios con raíz con  $n$  vértices, dos de ellos adyacentes si difieren por un giro.

Estas gráfica han sido muy estudiadas pues los árboles binarios se usan en computación como estructuras de datos.

Hay una biyección entre los vértices de  $G_T(n)$  y  $RG(n - 2)$  que induce un isomorfismo

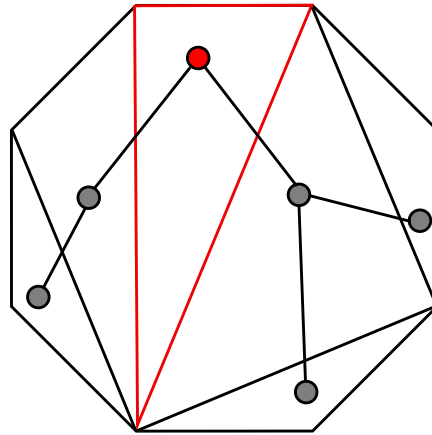


Figura 1.4: Una triangulación en  $G_T(n)$  y su árbol binario asociado en  $RG(n-2)$ .

entre ellas. Sean  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general y convexa, suponemos además que los elementos de  $S$  están etiquetados en sentido de las manecillas del reloj como  $\{p_1, \dots, p_n\}$ . Si  $n = 3$  claramente existe dicha biyección. Dada una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $S$ , escogemos una arista arbitraria del casquete convexo de  $S$ , digamos  $\overline{p_1 p_2}$ . Consideremos el único triángulo  $\tau$  que contiene la arista  $\overline{p_1 p_2}$  dicho triángulo divide a la triangulación en dos triangulaciones, que llamamos izquierda y derecha, para las cuales escogemos la arista de  $\tau$  que contienen. Ahora bien a  $\mathcal{T}$ , inductivamente le asignamos el árbol binario de  $n-2$  vértices que tiene como subárbol izquierdo el árbol binario asociado a la triangulación izquierda y como árbol derecho la triangulación asociada al árbol derecho.

Por la existencia de este isomorfismo muchas propiedades se prueban ya sea en  $G_T(n)$  o  $RG(n-2)$  según sea más fácil o dependiendo del contexto en que se encuentre. Por ejemplo en [30] dan una prueba más sencilla de que  $G_T(n)$  es hamiltoniana de la que se tenía en [22], usando  $RG(n-2)$ , su prueba da además implícitamente un algoritmo para la generación de los árboles binarios usando el ciclo hamiltoniano en  $RG(n-2)$

### 1.1.3. Árboles Generadores de una Gráfica

Sea  $G$  una gráfica, un árbol generador  $T$  de  $G$ , es una subgráfica de  $G$ , tal que  $T$  es árbol y  $V(T) = V(G)$ . Definimos la gráfica de giros de árboles generadores de  $G$  ( $T(G)$ ) como la gráfica cuyo conjunto de vértices son todos los árboles generadores de  $G$ , dos de ellos  $T_1$  y  $T_2$  adyacentes si existen aristas  $e \in E(T_1)$  y  $f \in E(T_2)$  tales que  $T_2 = T_1 - e + f$ .  $T(G)$  se definió por primera vez en [6] donde además se prueba además que siempre es hamiltoniana una prueba sencilla de este hecho se dio más tarde en [18].

En [31] se considera la versión geométrica del problema, donde ahora se tiene un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en posición general, se define la gráfica  $T(S)$  como la gráfica con conjunto de vértices todos los árboles generadores de  $S$  (es decir que en todos los elementos de  $S$  incide al menos una arista del árbol), dibujados con aristas rectas y sin cruces, dos de estos árboles  $T_1$  y  $T_2$  son adyacentes si existen aristas  $e \in E(T_1)$  y  $f \in E(T_2)$  tales que  $T_2 = T_1 - e + f$ . Los autores prueban varias propiedades para el caso cuando  $S$  esta en posición convexa, entre ellos la existencia de ciclos hamiltonianos.

Una gráfica similar es  $T^*(G)$ ,  $T^*(G)$  tiene el mismo conjunto de vértices que  $T(G)$  pero ahora se pide además que  $e$  y  $f$  incidan en un mismo vértice. Para propiedades de estas gráficas véase [17],[28] y [13].

$T(G)$  y  $T^*(G)$  han sido de las pocas gráficas de giros para las que se ha estudiado su número cromático. En [10] se dan cotas para el número cromático de ambas gráficas.

### 1.1.4. Gráficas de emparejamientos perfectos

Dada una gráfica  $G$ , definimos la gráfica de emparejamientos perfectos de  $G$  ( $\mathcal{M}(G)$ ) como la gráfica con conjunto de vértices todos los emparejamientos perfectos de  $G$  dos de ellos adyacentes si su diferencia simétrica es un ciclo de  $G$ .

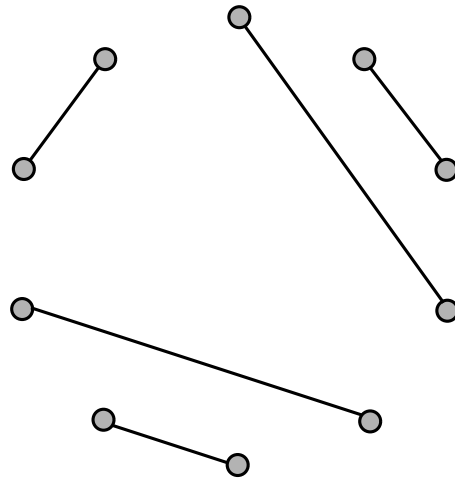


Figura 1.5: Un conjunto de puntos en posición convexa y un emparejamiento perfecto sobre este.

Estas gráficas han sido estudiadas con anterioridad. Se sabe por ejemplo que  $\mathcal{M}(G)$  siempre es hamiltoniana [8].

Nosotros consideramos una gráfica similar  $\mathcal{M}(G)$ , cuyos vértices son otra vez los emparejamientos perfectos de  $G$  solo que ahora pedimos que para que dos de ellos sean adyacentes, su diferencia simétrica sea un ciclo de longitud 4. En el Capítulo 4 damos cotas superiores para los números cromáticos de estas gráficas.

En [5] se considera la versión geométrica del problema donde ahora se tiene un conjunto  $S$  de  $2m$  puntos en posición general y convexa en el plano y se define  $\mathcal{M}_m$  como la gráfica cuyo conjunto de vértices son los emparejamientos perfectos geométricos sin cruces sobre  $S$  y dos de ellos adyacentes si su diferencia simétrica es un ciclo de longitud 4. Un emparejamiento geométrico  $M$  de  $S$  es un emparejamiento perfecto sobre la gráfica completa conjunto de vértices  $S$ , donde además se considera que las aristas de  $M$  están dibujadas con segmentos de rectas con extremos los en  $S$  y de manera que las aristas no se intersectan. En [5] prueban entre otras cosas que  $\mathcal{M}_m$  es bipartita, no tiene una trayectoria hamiltoniana

para  $m$  impar y para  $m$  par contiene un ciclo hamiltoniano.

Con esta breve exposición pretendemos presentar a manera introductoria las gráficas de giros. Esta lista no es de ninguna manera exhaustiva, pues de hecho en principio dado un conjunto y alguna operación entre ellos se puede definir una gráfica de giros.

Como hemos visto en casi todos los casos las propiedades que en general son más estudiadas de las gráficas de giros son conexidad, grado, diámetro y hamiltonicidad. El número cromático pese a ser una propiedad gráfica muy importante ha recibido poca atención.

En los siguientes capítulos concentraremos nuestra atención principalmente en el cálculo del número cromático de algunas gráficas de giros.



# Capítulo 2

## Gráfica de Fichas

Dada una gráfica  $G$  con  $n$  vértices y un entero positivo  $k \leq n$ , definimos la gráfica  $F_k(G)$  de  $k$  fichas de  $G$ , como la gráfica cuyo conjunto de vértices son todos los subconjuntos de  $V(G)$  de tamaño  $k$ , dos de ellos  $A$  y  $B$  adyacentes si y solo si existe un vértice  $u$  en  $A$  y  $v$  en  $B$  tal que  $B = A - u + v$  y además  $u$  es adyacente a  $v$  en  $G$ . La idea intuitiva detrás de esta definición es el imaginar que sobre los vértices de  $G$  se colocan  $k$  fichas indistinguibles unas de otras, se consideran todas las posiciones posibles de estas fichas (figura 2.1.) Aquí el giro en cuestión es el deslizar una ficha de a lo largo de una arista.

### 2.1. Propiedades de la gráfica de fichas

Algunas propiedades de  $F_k(G)$  son inmediatas, como sería el hecho de que toda gráfica es gráfica de 1 fichas de si misma i.e.  $F_1(G) \simeq G$ . En general si  $G$  tiene  $n$  vértices se tiene que  $F_k(G) \simeq F_{n-k}(G)$ .

Es interesante estudiar que propiedades de  $G$  hereda  $F_k(G)$ . Por ejemplo  $F_k(G)$  tiene a lo más el mismo número cromático que  $G$ , como lo muestra el siguiente teorema:

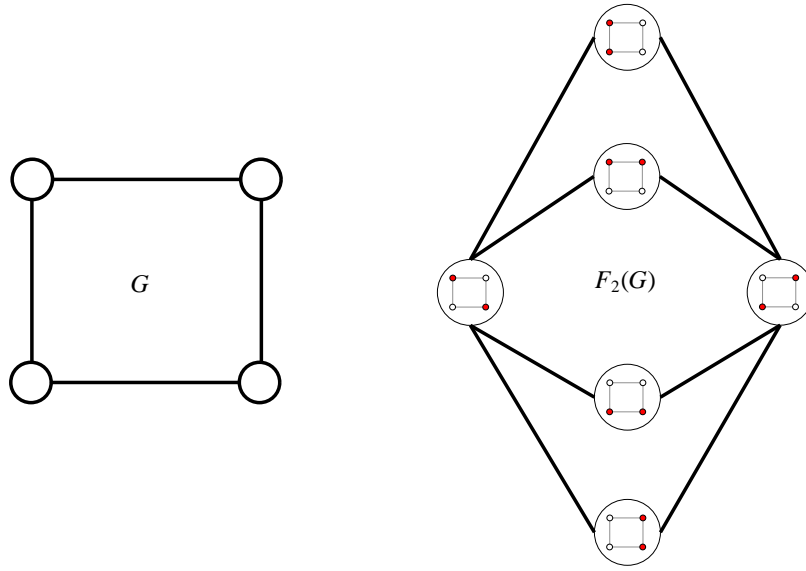


Figura 2.1: una gráfica y su gráfica de fichas

**Teorema 1.** Para toda gráfica  $G$  se tiene que  $\chi(F_n(G)) \leq \chi(G)$ .

*Demostración.* Sea  $r = \chi(G)$ , consideremos una  $r$ -coloración propia de  $G$  usando como conjunto de colores a  $\{0, \dots, r - 1\}$ . Si asignamos a cada vértice  $A \in V(F_k(G))$  el color  $\sum_{x \in A} \text{col}(x) \pmod r$ , obtenemos una coloración propia de  $F_k(G)$ . Pues si dos vértices  $A, B \in V(F_k(G))$  son adyacentes en  $F_k(G)$ , es porque existe un vértice  $u \in A$  y  $v \in B$  tal que  $B = A - u + v$ . Pero entonces  $(\text{col}(B) - \text{col}(A)) \pmod r = \text{col}(A - u + v) - \text{col}(A) \pmod r = -\text{col}(u) + \text{col}(v) \pmod r$ . Como  $u$  es adyacente a  $v$  en  $G$  y la coloración es propia se tiene que  $\text{col}(u) \pmod r \neq \text{col}(v) \pmod r$ , lo que implica que  $-\text{col}(u) + \text{col}(v) \pmod r \neq 0 \pmod r$ . Por lo que  $\text{col}(A) \neq \text{col}(B)$ . Es la coloración de  $F_k(G)$  así construida es propia como se afirmó en un principio.  $\square$

Hay que notar que en general no es cierto que  $\chi(F_k) = \chi(G)$ . Como es el caso de  $F_n(G) \simeq K_1$ , que tiene número cromático 1. Un ejemplo no trivial sería considerar  $F_2(K_4) \simeq K_{2,2,2}$  en este caso  $\chi(F_2(K_4)) = 3$  pero  $\chi(K_4) = 4$  (figura 2.1).

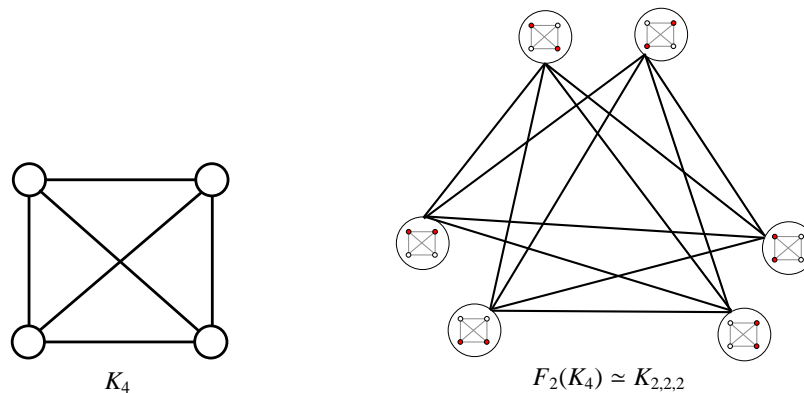


Figura 2.2: Una Gráfica de Fichas con Número Cromático Menor que la Gráfica Original

Uno podría preguntarse también si la propiedad de ser hamiltoniana también se hereda hacia las gráficas de fichas. Lamentablemente este no es el caso como lo muestra el hecho de que  $F_2(C_4)$  no es hamiltoniana y  $C_4$  si contiene un ciclo hamiltoniano (figura 1)

En lo referente a la propiedad de ser conexa, esta sí es una propiedad que hereda la gráfica de fichas:

**Teorema 2.** Si  $G$  es una gráfica conexa entonces  $F_k(G)$  también lo es.

*Demostración.* Sea  $k \leq |V(G)|$  y  $A, B$  dos elementos distintos de  $V(F_k(G))$ . Probaremos que por medio de ir moviendo fichas podemos ir de  $B$  a  $A$ . Basta mostrar de hecho que podemos reducir la diferencia simétrica de  $A$  y  $B$ , deslizando fichas. Dado que  $A \neq B$  y  $|A| = |B|$ ,  $A - B \neq \emptyset$  y  $B - A \neq \emptyset$ . Como  $G$  es conexa, existe al menos una trayectoria de  $B - A$  a  $A - B$  en  $G$ . De todas las trayectorias entre  $B - A$  y  $A - B$ , sea  $\Gamma$  la de menor longitud. Por construcción el primer vértice de  $\Gamma$  esta en  $B - A$  y el último en  $A - B$ , sean  $x$  y  $y$  dichos extremos. Además entre  $x$  y  $y$  en  $\Gamma$  no hay más vértices de  $B - A$  ni de  $A - B$ . Se puede dar el caso en que  $\Gamma$  intersecte a  $A \cap B$ . Sean  $w_1, \dots, w_k$  los vértices en dicha intersección en el orden que aparecen en  $\Gamma$  con dirección de  $x$  a  $y$ . Por las observaciones anteriores  $B \cap \Gamma = \{x, w_1, \dots, w_n\}$ . Deslizando la ficha que se encuentra en  $w_n$  hacia  $y$ , después las de

$w_i$  a  $w_{i+1}$  y finalmente la de  $x$  a  $w_1$ , llegamos a una configuración  $C$  que tiene más elementos en común con  $A$  que los que tenía  $B$ . Repitiendo este proceso llegamos eventualmente a la configuración de fichas determinada por  $A$  y asociada a las fichas que movimos, tenemos una trayectoria de  $B$  a  $A$  en  $F_k(G)$ . Por lo tanto  $F_k(G)$  es conexa  $\square$

La proposición converso al teorema 2 (el que si  $G$  es desconexa  $F_k$  también lo es), también es cierta si se tienen el número adecuado de fichas:

**Teorema 3.** *Sea  $G$  una gráfica desconexa entonces  $F_k(G)$  es desconexa para  $0 < k < |V(G)| - 1$*

*Demostración.* Como  $G$  es desconexa tiene al menos dos componentes conexos  $W$  y  $W'$ . Dado que  $0 < k < |V(G)| - 1$  existen dos configuraciones de  $k$  fichas  $A$  y  $B$  tales que  $|W \cap A| \neq |W \cap B|$ . Ya que al hacer un giro de fichas conservamos el número de fichas en  $W$  no hay manera de mediante giros llevar la configuración  $A$  a  $B$ . Es decir  $F_k(G)$  es desconexa.  $\square$

Detrás de la aparente simpleza de la definición de la Gráfica de Fichas se puede esconder una gran complejidad. Por ejemplo sea a  $G = \overbrace{K_2 \dot{\cup} K_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} K_2}^m$  con  $m$  par (la unión disjunta de  $m$  copias de  $K_2$ ). Tenemos que  $F_m(G)$  consta de la unión disjunta de varias copias de  $Q_i$  donde  $Q_0 \simeq K_1$  y  $Q_i$  es el  $i$ -cubo para cada  $i$  par desde  $i = 0$  hasta  $i = m$ . Hay además  $\binom{m}{i} \binom{m}{\frac{m-i}{2}}$  copias de cada  $Q_i$ .

Esta estructura de productos de la gráfica subyacente, no es accidental, pues la gráfica de fichas  $k$  fichas de  $G$  esta relacionada de alguna manera con el producto cartesiano de  $k$  copias de  $G$ .

Por un momento relajamos el requisito de que dos fichas no pueden estar en un mismo vértice y le damos etiquetas a las fichas (es decir pensamos que tenemos  $n$  fichas distintas

y distinguimos entre ellas). La gráfica de fichas resultante de esta definición no es otra mas que  $H_1 = \overbrace{G \square \dots \square G}^k$  el producto cartesiano de  $G$  consigo misma  $k$  veces. Si Ahora volvemos a pedir que no puedan estar dos fichas sobre el mismo vértice, la gráfica resultante  $H_2$ , es isomorfa  $H_1$  menos todos los vértices de  $H_1$  que en dos de sus coordenadas tiene el mismo vértice de  $G$  como entrada. Finalmente si de nuevo no distinguimos entre las fichas la gráfica  $H_3$ , es isomorfa a  $H_2$  identificando todos los vértices  $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)$  tal que existe una permutación  $\sigma$  de  $\{1, \dots, k\}$  con  $y_i = x_{\sigma(i)}$ . Pero  $H_3$  es isomorfa a  $F_k(G)$ .

## 2.2. Estructuras similares la gráfica de fichas

Hasta donde tenemos conocimiento la Gráfica de Fichas como tal no ha sido estudiada anteriormente. Hay sin embargo estructuras muy similares que sí han recibido atención. Una de ellas es el llamado en ingles “The Pebble Game” que se traduce al castellano a algo como “El Juego de los Guijarros”. Aquí se considera un juego donde se colocan guijarros sobre los vértices de una gráfica y dos jugadores, mueven los guijarros alternadamente según distintos conjuntos de reglas. Existen muchas variantes, una de ellas se usa para saber si una gráfica es rígida. Aquí se usan reglas distintas a las usadas por nosotros y se investiga la existencia de ciertas configuraciones que implican rígides de la gráfica. En otras aplicaciones se usa como modelo de computo. Existen muchos trabajos al respecto y no haremos mención de ellos pues se salen de tópico del presente trabajo, damos en cambio referencias para el lector interesado ([19],[21],[24],[20],[25],[32]).

Una clase de gráficas íntimamente relacionada con las gráficas de fichas son las gráficas de Johnson.  $J(v, k, i)$  es la gráfica cuyo conjunto de vértices son todos los subconjuntos de  $\{1, \dots, v\}$  de tamaño  $k$ , dos de ellos adyacentes si se intersectan en  $i$  elementos. A las gráficas  $J(v, k, k - 1)$  se les conoce como gráficas de Johnson ([15] pag 9). Obsérvese que

de hecho  $J(v, k, k - 1) \simeq F_k(K_v)$ , es decir la Gráfica de Fichas es una generalización de las gráficas de Johnson. Hay muchos trabajos alrededor de las gráficas de Johnson y no nos detendremos aquí a mencionar sus propiedades, solo las mencionamos por la similitud que tienen con la Gráfica de Fichas.

### 2.3. Conclusiones y trabajos futuros

Pese a que no fue uno de nuestros principales objetos de estudio, presentamos la Gráfica de Fichas por su sencillez y porque en investigaciones de otras gráficas de rotaciones en algunos casos nos permitió simplificar algunas pruebas. Sería muy interesante ahondar en el estudio de la Gráfica de Fichas.

Observamos al principio de este capítulo que toda gráfica  $G$  es gráfica de fichas de sí misma (en particular  $G \simeq F_1(G)$ ) pero de ninguna manera tiene que ser su expresión como gráfica de fichas mas pequeña. En general una gráfica de fichas va a tener más vértices que la gráfica original, por lo que cabe preguntarse dado una gráfica  $G$  cual es la mínima  $n \neq 1$  tal que existe una gráfica  $H$  con  $n$  vértices de manera que  $G \simeq F_k(H)$  para alguna  $k$ . Unas propiedades son inmediatas como el hecho de que el número de vértices de las gráficas de fichas son siempre coeficientes binomiales. Sin embargo no es claro que si una gráfica  $G$  tiene  $\binom{n}{m}$  vértices sea la gráfica de  $m$ -fichas de alguna gráfica  $H$  con  $n$  vértices. Así pues este es un problema interesante: ¿Cuándo es una gráfica  $G$  una gráfica de  $k$  fichas de otra con  $k > 1$ ?

El Teorema 1 nos da una cota superior para la el número cromático de la Gráfica de Fichas en términos del número cromático de la gráfica subyacente. Sabemos también que esta cota no es justa, incluso en casos no triviales. No sabemos en cambio que tanto se puede alejar el número cromático de la gráfica de fichas. Es decir dada una gráfica  $G$  con  $n$

vértices y  $0 < k < n$ : ¿Que tan grande puede ser la diferencia entre  $\chi(F_k(G))$  y  $\chi(G)$ ?

La Gráfica de Fichas se definió de esa manera en principio como un ejercicio para entender los giros en otras gráficas de rotaciones, es por eso que solo se permite el mover una ficha a la vez. Si quitamos este requisito, obtenemos una estructura más compleja. Dada una gráfica  $G$  con  $n$  vértices y  $0 \leq m \leq k \leq n$  construimos la gráfica de  $(m, k)$ -fichas  $F_{k,m}(G)$ , cuyos vértices son como en la gráfica de fichas todas las posibles configuraciones de  $k$  fichas sobre los vértices de  $G$  dos de estas configuraciones son adyacentes si podemos pasar de una a la otra moviendo exactamente  $m$  fichas de su posición a vértices adyacentes. Es interesante notar que las gráficas  $J(v, k, i)$  son un caso particular de estas gráficas es decir:  $F_{k,m}(K_n) \simeq J(n, k, k - m)$ . Las gráficas  $J(v, k, 0)$  son conocidas como las gráficas de Knesser, por lo que resultan ser un casi particular de las gráficas de  $(m, k)$ -fichas. Sólo investigaciones posteriores dirán si se gana o se pierde riqueza con esta generalización.

# Capítulo 3

## Triangulaciones del $n$ -agono

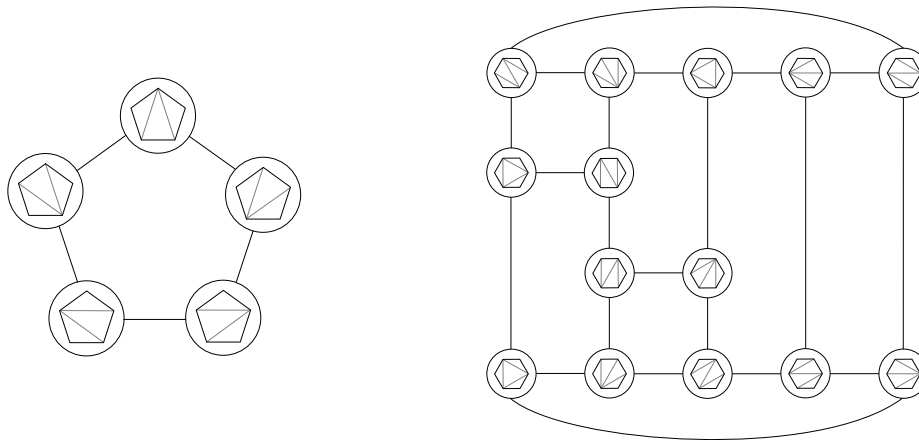
En lo subsecuente nos referiremos a un polígono convexo de  $n$  lados cualquiera como el  $n$ -agono, esto se debe a que en el contexto que nos ocupa, no importa la elección de dicho polígono.

Ahora bien una triangulación del  $n$ -agono es una colección maximal de aristas que no se intersecan dos a dos, salvo en vértices del  $n$ -agono. sobre vértices del  $n$ -agono que no se intersecan en su interior. Es maximal en el sentido de que si agregamos cualquier otra arista intersecaríamos una de las ya existentes

Dadas dos triangulaciones  $\mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$  del  $n$ -agono decimos que difieren por un giro o rotación de aristas si existen aristas  $e$  de  $\mathcal{T}_1$  y  $f$  de  $\mathcal{T}_2$  de manera que  $\mathcal{T}_2$  resulta de quitar  $e$  de  $\mathcal{T}_1$  y agregarle  $f$ .

La gráfica cuyo conjunto de vértices consiste de las triangulaciones del  $n$ -agono, dos de ellas adyacentes si difieren por un giro de aristas la llamaremos la gráfica de giros de triangulaciones del  $n$ -agono. Dicha gráfica la denotamos con  $G_T(n)$  y es el tema principal de este capítulo. Prestamos especial atención a su número cromático,



Figura 3.1:  $G_T(5)$  y  $G_T(6)$ 

### 3.1. Los números de Catalán

Las triangulaciones del  $n$ -gono han sido estudiadas desde hace mucho tiempo. Leonard Euler le propuso a Christian Goldbach el problema de contar de cuantas maneras se puede dividir un polígono convexo de  $n$  lados en triángulos. En otras palabras Euler buscaba una fórmula para el número de triangulaciones del  $n$ -gono.

La solución a dicho problema son los llamados números de Catalán, los números de Catalán se definen recursivamente como sigue  $C_0 = 0$  y  $C_1 = 1$ , el  $n$ -ésimo  $n > 1$  número de Catalán se define:

$$C_n = \sum_{i=1}^{n-1} C_i C_{n-i}$$

Es fácil ver que las triangulaciones del  $n$ -gono satisfacen esta misma recurrencia. Sea  $T_i$  el número de triangulaciones del  $i$ -gono. Por convención decimos que  $T_2 = 1$ . Supongamos que los vértices del  $n$ -gono están etiquetados en orden consecutivo  $1, \dots, n$ . Observamos que el número de triangulaciones que contienen el triángulo con vértices  $1, n$  e  $i$  es

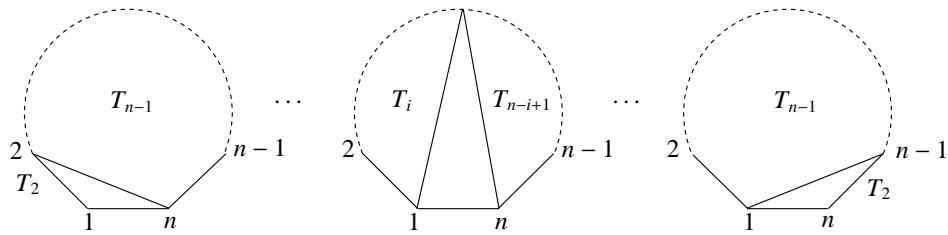


Figura 3.2: Contando las triangulaciones del  $n$ -gono

exactamente  $T_i T_{n-i+1}$ . Contando de esta manera las triangulaciones del  $n$ -gono en las que contienen el triángulo con vértices  $1, n$  e  $i$  obtenemos la siguiente recurrencia:

$$T_n = \sum_{i=2}^{n-1} T_i T_{n-i+1}$$

Observando que  $T_2 = 1 = C_1$  inductivamente tenemos que:

$$T_n = \sum_{i=2}^{n-1} T_i T_{n-i+1} = \sum_{i=2}^{n-1} C_{i-1} C_{n-i} = \sum_{j=1}^{n-2} C_j C_{(n-1)-j} = C_{n-1}$$

Para encontrar una formula explícita para el  $i$ -ésimo número de Catalán consideremos su función generadora  $F(t) = \sum_{n \geq 0} C_n t^n$ . Ahora bien los coeficientes en  $F(t)^2$  para cada termino a partir de  $t^2$  son precisamente los números de catalán. Pues el coeficiente de en  $t_n$  seria la suma del producto de los coeficientes de cada  $t_i$  con  $t_{n-i}$  ( $0 \leq i \leq n$ ), i.e.  $\sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}$ . Pero como  $C_0 = 0$  el término constante es 0 y en consecuencia la suma se puede re-escribir como  $\sum_{i=1}^{n-1} C_i C_{n-i}$  es decir  $C_n$ . Por las observaciones anteriores y dado que el coeficiente en  $t$  es  $C_1 = 1$  se tiene que:  $F(t) = t + F(t)^2$ . Despejando  $F(t)$  tenemos que  $F(t) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 4t})$ , pero como  $F(0) = 0$ ,  $F(t) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4t}) = \frac{1}{2}(1 - (1 - 4t)^{\frac{1}{2}})$ . Finalmente recordamos al lector el teorema del binomio:

**Teorema 4.** Para todo  $r \in \mathbb{R}$ ,

$$(1+x)^r = \sum_{n \geq 0} \binom{r}{n} x^n$$

$$\text{Donde } \binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}.$$

Usando el teorema del binomio y sustituyendo  $x = -4t$  tenemos que:

$$F(t) = \frac{1}{2}(1 - (1 - 4t)^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} ((-4)^n) t^n$$

Pero el coeficiente de  $t^n$  en  $F(t)$  es por definición el  $n$ -ésimo, número de Catalán. Es decir:

$$\begin{aligned} C_n &= -\frac{1}{2} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4)^n \\ &= \left( \frac{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \cdots \left( \frac{-(2n-3)}{2} \right)}{n!} \right) (-4)^n \\ &= \left( \frac{(1)(3) \cdots (2n-3)}{2(-2)^n n!} \right) (-4)^n \\ &= \left( \frac{(1)(3) \cdots (2n-3)}{2(n!)} \right) 2^n \\ &= \left( \frac{(1)(3) \cdots (2n-3)}{n!} \right) 2^{n-1} \\ &= \left( \frac{(2n-2)!}{((n-1)!(2^{n-1})n!)} \right) 2^{n-1} \tag{3.1} \\ &= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} \\ &= \frac{1}{n} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} \\ &= \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \end{aligned}$$

La igualdad 3.1 se cumple en virtud de que el producto de los números impares desde

1 hasta  $k$  (con  $k$  impar) es:

$$\frac{(k+1)!}{\frac{k+1}{2}! 2^{\frac{k+1}{2}}}$$

Este hecho se verifica inductivamente, en el caso de la igualdad 3.1 se tiene el producto de los números impares desde 1 hasta  $2n - 3$ .

Los números de Catalán aparecen en un sin fin de estructuras combinatorias, son por ejemplo: el número de árboles binarios de  $n$  nodos con raíz, el número de maneras de patentizar una suma de  $n$  términos. Para una exposición de funciones generadoras, números de catalán y cuestiones relacionadas referimos al lector a [4].

### 3.2. La gráfica de giros $G_T(n)$

Mucho se sabe sobre  $G_T(n)$ , mencionaremos algunas de sus propiedades. Dado que toda triangulación del  $n$ -agono, tiene  $n - 3$  diagonales interiores y cada una se puede girar,  $G_T(n)$  es una gráfica  $n - 3$ -regular. Se sabe también que  $G_T(n)$  es hamiltoniana (es decir existe un ciclo que pasa por todos sus vértices). Su grupo de automorfismo es el grupo dihédrico de orden  $n$  ( $D_n$ ). Es una gráfica  $n - 3$  conexa por vértices para  $n \geq 5$ .

Hasta hace relativamente poco no se tenían pruebas sencillas de las propiedades anteriores (excepto la de regularidad). En [11] se da una construcción con la cual se dan pruebas muy sencillas de estas propiedades .

Curiosamente nunca se había investigado su número cromático. Dicho problema, fue lo que originó el presente trabajo. Dado que  $G_T(n)$  es  $n - 3$  regular, por el teorema de Brooks ([3]) para coloración en gráficas, tenemos una cota superior de  $\chi(G_T(n)) \leq n - 3$  para  $n \geq 6$ .

Para conseguir una cota mejor, recordamos que las aristas de la gráfica geométrica completa  $\tilde{K}_n$  de  $n$  puntos en posición convexa (es decir la gráfica cuyos vértices son los  $n$  puntos

en posición convexa y sus aristas se dibujan como segmentos de recta que unen dichos puntos) con  $n$  par, se pueden descomponer en  $\frac{n}{2}$  trayectorias hamiltonianas geométricas planas. Usando este hecho tenemos que:

**Teorema 5.**  $\chi(G_T(n)) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

*Demostración.* Para  $n$  par usamos la descomposición de  $\tilde{K}_n$  (la cual tiene como sus vértices los puntos del  $n$ -agono) en  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  trayectorias hamiltonianas y observamos que si dos diagonales interiores se cruzan están en trayectorias distintas. Usamos el conjunto  $\{1 \dots n\}$  como conjunto de colores y cada triangulación  $\mathcal{T}$  del  $n$ -agono, le asignamos el color  $\text{col}(\mathcal{T}) = \sum_{e \in \mathcal{T}} \text{col}(e) \pmod{\frac{n}{2}}$ . Donde el color de una arista  $e$  que se encuentra en la trayectoria  $\Gamma_i$  se define como  $i$ . Dado que una triangulación  $\mathcal{T}'$  difiere por un giro de  $\mathcal{T}$  si y solo si existen aristas  $e \in \mathcal{T}$  y  $f \in \mathcal{T}'$  tales que  $\mathcal{T}' = \mathcal{T} - e + f$  por lo que  $\text{col}(\mathcal{T}') = \text{col}(\mathcal{T}) - \text{col}(e) + \text{col}(f) \pmod{\frac{n}{2}}$ . En consecuencia  $\text{col}(\mathcal{T}') - \text{col}(\mathcal{T}) \pmod{\frac{n}{2}} = \text{col}(f) - \text{col}(e) \pmod{\frac{n}{2}}$ . Pero como  $e$  y  $f$  se intersecan están en trayectorias distintas y reciben colores distintos. Por lo tanto  $\text{col}(f) - \text{col}(e) \pmod{\frac{n}{2}} \neq 0$ , es decir  $\text{col}(\mathcal{T}') \pmod{\frac{n}{2}} \neq \text{col}(\mathcal{T}) \pmod{\frac{n}{2}}$ . La coloración así construida de  $G_T(n)$  es propia para  $n$  par. Para  $n$  impar se colorea  $G_T(n+1)$  como se describe arriba y se da una inmersión de  $G_T(n)$  en  $G_T(n+1)$  (considerando por ejemplo todas las triangulaciones de  $n+1$ -agono que tienen el triángulo  $\Delta_{1,2,3}$ ). Los vértices de  $G_T(n)$  se colorean con el color que recibe su imagen bajo la inmersión en  $G_T(n+1)$ . En ambos casos se llega a que  $\chi(G_T(n)) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$  □

Algo notable de la demostración teorema 5 es que exhibe una coloración explícita. Usando la descomposición de  $\tilde{K}_n$  en trayectorias hamiltonianas se puede dar un algoritmo de tiempo lineal que al recibir una triangulación del  $n$ -agono como entrada le asigne un color, de manera que la coloración inducida de  $G_T(n)$  sea propia.

Se puede mejorar la cota del teorema 5. A.Johansson [23] probó que toda gráfica  $G$

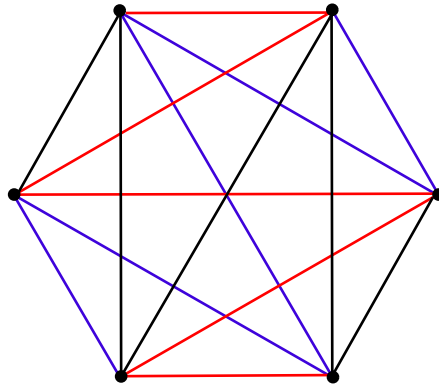


Figura 3.3: Descomposición de  $\tilde{K}_6$  en trayectorias hamiltonianas geométricas

libre de triángulos (es decir que no contiene a  $K_3$  como subgráfica inducida) tiene una coloración propia con  $O(\frac{\Delta(G)}{\log(\Delta(G))})$  colores. En el caso de  $G_T(n)$ , por ser  $n - 3$  regular y carecer de triángulos, como corolario  $\chi(G_T(n)) \leq O(\frac{n}{\log(n)})$ . El resultado de Johansson usa de el método probabilístico y es de carácter existencial, es por eso que aunque mejora la cota del teorema 5, dicho teorema y su demostración son importantes desde el punto de vista práctico.

Daremos el número cromático de  $G_T(n)$  para los primeros valores de  $n$ . Como  $G_T(3) \simeq K_1$ ,  $G_T(4) \simeq K_2$  y  $G_T(5) \simeq C_5$ , por lo tanto  $\chi(G_T(n)) = n - 2$  para  $n = 3, 4, 5$ . Ahora bien  $G_T(5)$  es subgráfica de  $G_T(6)$  por lo que  $\chi(G_T(6)) \geq 3$ , pero por el teorema 5  $\chi(G_T(6)) \leq \lceil \frac{6}{2} \rceil = 3$  es decir  $\chi(G_T(6)) = 3$

Para valores más grandes de  $n$ , lo único que sabemos es que  $\chi(G_T(7)) = 3$  y que  $\chi(G_T(8)) = 4$ . Estos cálculos los hicimos con la computadora. Desafortunadamente esto es todo lo que hasta el momento podemos decir sobre  $\chi(G_T(n))$

### 3.3. Gráfica de triángulos

Introducimos una nueva gráfica de giros con la esperanza de que arrojará un poco de luz sobre el número cromático de  $G_T(n)$ , no fue así. Sin embargo en este caso sí pudimos calcular su número cromático salvo una constante multiplicativa.

Dado  $n$  un entero positivo, sea  $P_n$  cualquier conjunto de  $n$  puntos en posición convexa y general sobre el plano. Definimos gráfica  $G_\Delta(n)$  cuyo conjunto de vértices son todos los triángulos con vértices en  $P$ , dos de ellos  $\tau_1, \tau_2$  adyacentes si comparten una arista y no se inteseacan en su interior.

$G_\Delta(n)$  contiene una subgráfica que nos dará la cota inferior. Sean  $r_1 < r_2 < \dots < r_{n-1}$  números reales y sea  $H$  la gráfica cuyo conjunto de vértices son todos los intervalos de la forma  $[r_i, r_j]$  con  $r_i < r_j$ , haciendo dos de ellos  $[r_i, r_j]$  y  $[r_k, r_l]$  adyacentes si y solo si  $r_i < r_l$  y  $r_j = r_k$ .

Supongamos ahora que coloreamos propiamente a  $H$  con  $k$  colores. Consideremos el conjunto  $\bar{r}_j$  definido como  $\bar{r}_j = \{\text{col}([r_i, r_j]) | r_i < r_j\}$ . Ahora bien dados  $r_j < r_k$ , se tiene que  $[r_j, r_k]$  es adyacente a todos los segmentos de la forma  $[r_i, r_j]$  con  $r_i < r_j$ . Por lo que los colores asignados a los intervalos de la forma  $[r_i, r_j]$  son todos distintos al color asignado a  $[r_j, r_k]$ . En consecuencia  $\text{col}([r_j, r_k]) \notin \bar{r}_j$  pero en cambio  $\text{col}([r_j, r_k]) \in \bar{r}_k$ , i.e.  $\bar{r}_j \neq \bar{r}_k$ . Necesitamos por lo tanto al menos  $n - 1$  subconjuntos distintos de los  $k$  colores. Pero hay  $2^k$  subconjuntos posibles con  $k$  colores, es decir  $\chi(H) \geq \log_2(n - 1)$ .

Supongamos que los puntos de  $P_n$  son  $p_0, \dots, p_{n-1}$  en orden cíclico en el sentido de las manecillas del reloj. Consideremos la subgráfica inducida  $H'$  de  $G_\Delta(n)$  cuyos vértices son todos aquellos triángulos que tienen como uno de sus vértices a  $p_0$ . Establecemos un isomorfismo entre  $H'$  y  $H$  de la siguiente manera a cada triángulo  $\Delta_{p_0 p_i p_j}$  vértice de  $H'$  le asignamos el vértice  $[r_i, r_j]$  de  $H$ . Es fácil ver que en efecto esta asignación induce un

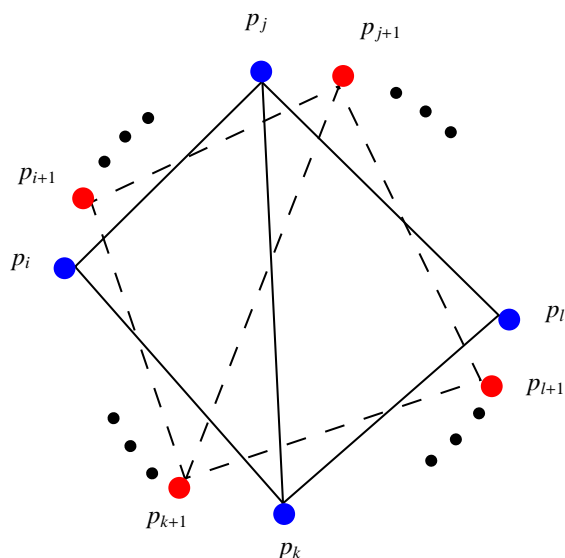


Figura 3.4: El homomorfismo entre  $G'_\Delta(n)$  y  $G_\Delta(\frac{n}{2})$

isomorfismo y como  $H' \simeq H$  y a su vez  $H'$  es subgráfica de  $G_\Delta(n)$  obtenemos la siguiente cota inferior para el número cromático de  $G_\Delta(n)$ :

$$\chi(G_\Delta(n)) \geq \log_2(n - 1)$$

Finalmente damos una cota superior. Para este efecto damos una coloración propia de subgráficas de  $G_\Delta(n)$ .

**Lema 1.** Dado  $n$  par,  $G'_\Delta(n)$  la subgráfica inducida de  $G_\Delta(n)$  por todos aquellos triángulos tales que ninguno de sus lados esta en el casquete convexo de  $P_n$ . Se tiene que  $\chi(G'_\Delta(n)) \leq \chi(G_\Delta(\frac{n}{2}))$

*Demostración.* Establecemos un homomorfismo de  $G'_\Delta(n)$  en  $G_\Delta(\frac{n}{2})$  y con esto terminamos la prueba. Supongamos otra vez que los elementos de  $P_n$ ,  $p_0, \dots, p_{n-1}$  están ordenados cíclicamente en sentido de las manecillas del reloj. Particionamos a los elementos de  $P_n$



en dos conjuntos digamos  $A = \{p_i \in P_n | i = 0 \pmod{2}\}$  y  $B = \{p_j \in P_n | i = 1 \pmod{2}\}$ . Como  $n$  es par los elementos de  $P_n$  se encuentran (en sentido de las manecillas del reloj) se encuentran alternadamente en  $A$  y  $B$  respectivamente. Definimos una función  $\sigma$  de  $P_n$  en  $B$  como sigue:

$$\sigma(p_i) = \begin{cases} p_i & \text{si } p_i \in A \\ p_{i+1} & \text{si } p_i \in B \end{cases}$$

Consideramos ahora la función  $\phi : V(G'_\Delta(n)) \rightarrow A$  que a cada triángulo  $\Delta_{p_i p_j p_k}$  en  $V(G'_\Delta(n))$  lo manda a  $\phi(\Delta_{p_i p_j p_k}) = \Delta_{\sigma(p_i)\sigma(p_j)\sigma(p_k)}$ . Para cada  $\Delta_{p_i p_j p_k} \in V(G'_\Delta(n))$ , ninguno de sus lados están en el casquete convexo y por lo tanto no unen dos vértices consecutivos. En consecuencia  $\phi$  esta bien definida es decir en efecto  $\phi(\Delta_{p_i p_j p_k})$  es un triángulo con vértices en  $A$ . Como además  $\sigma$  conserva el orden de los puntos, dados dos triángulos  $\Delta_{p_i p_j p_k}, \Delta_{p_j p_k p_l}$  adyacentes en  $V(G'_\Delta(n))$  sus imágenes  $\Delta_{\sigma(p_i)\sigma(p_j)\sigma(p_k)}, \Delta_{\sigma(p_j)\sigma(p_k)\sigma(p_l)}$  también son adyacentes entre sí. Sea  $G$  la subgráfica inducida de  $G_\Delta(n)$  por todos aquellos triángulos que tienen sus vértices en  $A$ .  $\phi$  por lo tanto induce un homomorfismo de  $G'_\Delta(n)$  en  $G$ . Pero  $G$  es isomorfa  $G_\Delta(\frac{n}{2})$ , mostrando así el homomorfismo entre  $G'_\Delta(n)$  y  $G_\Delta(\frac{n}{2})$ .  $\square$

**Teorema 6.**  $\chi(G_\Delta(n)) \leq 4\lceil \log_2(n) \rceil - 2$  para todo entero positivo  $n > 3$

*Demostración.* Consideramos por el momento que  $n$  es una potencia de 2 es decir que es de la forma  $2^k$  para algún entero positivo  $k \geq 2$ . Sea  $F(n) = \chi(G_\Delta(n))$ . Sea  $G$  la subgráfica de  $G_\Delta(n)$  inducida por todos aquellos triángulos en  $V(G_\Delta(n))$  que tienen al menos una de sus aristas en el casquete convexo de  $P_n$ .  $G$  tiene grado máximo 4 y por el teorema de Brooks admite una coloración propia con 4 colores. Ahora bien por el Lema 1  $G'_\Delta(n)$  es coloreable propiamente con  $F(\frac{n}{2}) = \chi(G_\Delta(\frac{n}{2}))$  colores. Obsérvese que  $V(G_\Delta(n)) = V(G'_\Delta(n)) \cup V(G)$ . Coloreando propiamente a  $G$  con 4 y después usando  $F(\frac{n}{2})$  colores para colorear propiamente a  $G'_\Delta(n)$ , obtenemos una coloración propia de  $G_\Delta(n)$  con  $4 + F(\frac{n}{2})$  colores. Es

decir  $F(n) \leq 4 + F(\frac{n}{2})$ . Observando que  $\frac{n}{2}$  es otra vez una potencia de 2 y que  $G_\Delta(4)$  es isomorfa a la unión disjunta de 2 copias de  $K_2$  (por lo tanto  $F(4) = 2$ ). Se tiene que  $F(n) \leq 4(\log_2(n) - 1) + 2 = 4\log_2(n) - 2$ , para toda  $n$  potencia de 2. Observando que para todo entero positivo  $\frac{n}{2} < m < n$  se tiene que  $G_\Delta(m)$  es subgráfica de  $G_\Delta(n)$  y por lo tanto  $F(m) \leq F(n)$ , podemos colorear propiamente a  $G_\Delta(m)$  con  $F(n)$  colores. Es decir  $F(m) \leq 4\lceil\log_2(m)\rceil - 2$ .  $\square$

En resumen:

**Teorema 7.**  $\log_2(n) \leq \chi(G_\Delta(n)) \leq 4\lceil\log_2(n)\rceil - 2$  para todo entero positivo  $n > 3$

**Corolario 1.**  $\chi(G_\Delta(n)) = \Theta(\log n)$

### 3.4. Conclusiones y trabajos futuros

Tenemos una cota superior sublineal para  $\chi(G_T(n))$  como corolario al resultado de Johansson. Creemos que esta cota superior esta muy lejos del verdadero valor de  $\chi(G_T(n))$ . Por otra parte no hemos podido encontrar una cota inferior para  $\chi(G_T(n))$  pese a nuestros múltiples intentos. Creemos que de hecho:

**Conjetura 1.**  $\chi(G_T(n)) = O(\log n)$  para todo entero positivo  $n \geq 3$ .

Nos gustaría al menos encontrar una cota inferior para  $G_T(n)$  y es probablemente este uno de los problemas en los que estamos más interesados.

En principio no hay razón para limitarse a conjuntos de puntos en posición convexa. Estudiamos primeros estos pues se conocen mucho mejor la gráfica de rotaciones de triangulaciones de conjuntos en posición convexa que las de conjuntos de puntos en posición general. Mencionamos brevemente el problema para conjuntos de puntos en posición general

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general. Análogamente como en el caso del  $n$ -gono, una triangulación de  $S$  es un conjunto de aristas (segmentos de recta) sobre los vértices de  $S$  maximal con la propiedad de que las aristas no se intersecan en su interior. Decimos que dos triangulaciones  $\mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$  de  $S$  difieren por un giro de aristas si existe una arista  $e \in \mathcal{T}_1$  y  $f \in \mathcal{T}_2$  tal que  $\mathcal{T}_2$  resulta de quitarle  $e$  a  $\mathcal{T}_1$  y agregarle  $f$  (es decir  $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1 - e + f$ ).

Definimos la gráfica  $G_T(S)$  de giros de triangulaciones de  $S$ , como la gráfica cuyo conjunto de vértices son todas las triangulaciones de  $G_T(S)$  dos de ellas adyacentes si difieren por un giro de arista.

Como en el caso de  $G_T(n)$  estamos interesados en calcular  $\chi(G_T(S))$ . Dado que no siempre tenemos una descomposición en trayectorias hamiltonianas planas geométricas de la gráfica completa geométrica con vértices en  $S$ , no podemos usar el Teorema 5. Podemos en cambio usar un concepto relacionado.

Definimos el grosor de un conjunto de  $n$  puntos en el plano  $S$  como el mínimo número de gráficas en cualquier descomposición de  $K_n$  en gráficas planas geométricas dibujadas sobre los vértices de  $S$  y se denota como  $\bar{\theta}(S)$ . En términos de este concepto se puede dar un teorema análogo al Teorema 5 como sigue:

**Teorema 8.** *Para todo conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el plano en posición general,  $\chi(G_T(S)) \leq \bar{\theta}(S)$ .*

*Demostración.* Dada una descomposición de  $K_n$  en  $G_1, \dots, G_{\bar{\theta}(S)}$  gráficas geométricas planas dibujadas sobre  $S$ , damos una coloración de las aristas de  $K_n$  con  $\bar{\theta}(S)$  colores. Le damos a una arista  $e$  el color  $i$  si y solo si se encuentra en la gráfica  $G_i$ . Ahora bien a cada triangulación  $\mathcal{T} \in V(G_T(S))$  le damos el color  $\sum_{e \in \mathcal{T}} \text{col}(e) \pmod{\bar{\theta}(S)}$ . Sean  $\mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$  dos triangulaciones de  $S$  que difieren la una de la otra por un giro, es decir tales que existen aristas

$e \in \mathcal{T}_1$  y  $f \in \mathcal{T}_2$  de forma que  $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1 - e + f$ . Pero como  $e$  y  $f$  se cruzan se encuentran en distintas gráficas de la descomposición y por lo tanto reciben colores diferentes. Por lo tanto  $\text{col}(\mathcal{T}_1) - \text{col}(\mathcal{T}_2) = \text{col}(e) - \text{col}(f) \pmod{\bar{\theta}(S)} \neq 0$ , en consecuencia  $\text{col}(\mathcal{T}_1) \neq \text{col}(\mathcal{T}_2)$  y la coloración así construida es una coloración propia de los vértices de  $G_T(S)$  con  $\bar{\theta}(S)$  colores.  $\square$

El Teorema 8 nos da una cota lineal, pues es fácil encontrar una descomposición de  $K_n$  en un número lineal de gráficas planas geométricas dibujadas sobre  $S$ . Sin embargo el Teorema de Brooks ya nos garantiza una cota lineal. Como  $G_T(S)$  no contiene triángulos por resultado de Johansson sabemos incluso que el número cromático debe ser sublineal. La ventaja del Teorema 8 esta en su carácter existencial como en es el caso del Teorema 5.

# Capítulo 4

## Emparejamientos Perfectos

Dada una gráfica  $G$  definimos la gráfica de giros de emparejamientos perfectos de  $G$  dos de ellos adyacentes si su diferencia simétrica es un ciclo de longitud 4 en  $G$ . Aquí el giro en cuestión es dado un emparejamiento perfecto  $M$  y dos aristas  $e = (x, y)$  y  $f = (z, w)$ , quitar de  $M$  a  $e$  y a  $f$  y agregarle  $(x, z)$  y  $(y, w)$  o bien  $(x, w)$  y  $(y, z)$ . Dicha gráfica la denotamos como  $\mathcal{M}(G)$ . La razón para nuestra notación es que  $\mathcal{M}'(G)$ , se usa para la gráfica que consiste de todos los emparejamientos perfectos de  $G$  dos de ellos adyacentes si su diferencia simétrica es un ciclo de  $G$  ([5],[8],[29]).

Aunque aparece esporádicamente en la literatura  $\mathcal{M}'(G)$  ha recibido poca atención, en parte porque la que ha acaparado el interés de los investigadores es  $\mathcal{M}(G)$ . Nosotros nos enfocamos principalmente en el número cromático de  $\mathcal{M}'(K_{2n})$ . Damos cotas superiores para  $\chi(\mathcal{M}'(K_{2n}))$ . No hemos obtenido resultados para  $\chi(\mathcal{M}'(G))$  para gráficas en general.

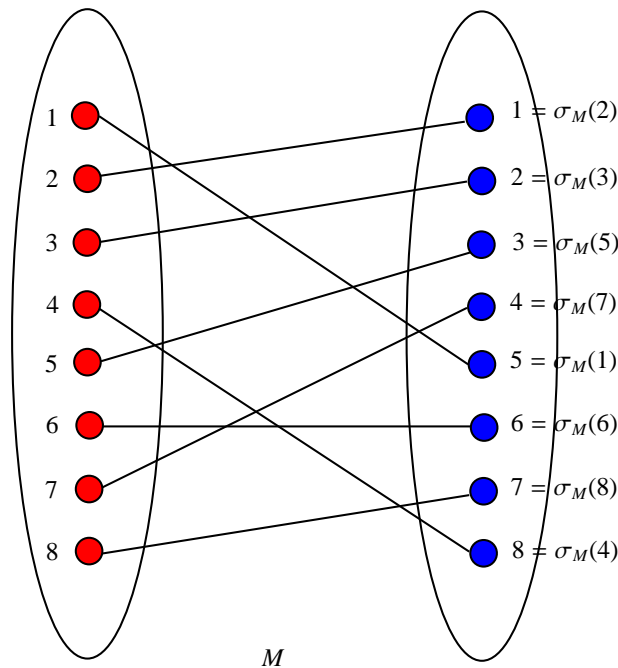


Figura 4.1: Un emparejamiento perfecto de  $K_{n,n}$  y su permutación asociada

#### 4.1. Número cromático de $\mathcal{M}'(K_{n,n})$ y $\mathcal{M}'(K_{2n})$

Usando exactamente la misma técnica que en [5], encontramos el número cromático de  $\mathcal{M}'(K_{n,n})$ :

**Teorema 9.**  $\chi(\mathcal{M}'(K_{n,n})) = 2$  para todo entero positivo  $n$ .

*Demostración.* Sean  $A$  y  $B$  los dos elementos de la partición de  $V(K_{n,n})$  en dos conjuntos independientes. Re-etiquetamos los vértices de  $K_{n,n}$  de manera de que  $A = \{1, \dots, n\}$  y  $B = \{1', \dots, n'\}$ . La técnica consiste en asignar a cada emparejamiento perfecto  $M$  de  $K_{n,n}$  una permutación  $\sigma_M$  del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Basta especificar para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  su imagen bajo  $\sigma_M$ . Como  $M$  es un emparejamiento perfecto existe una única arista  $(i, j')$  en  $M$  que incide al vértice  $i$  de  $A$  en  $K_{n,n}$ . Definimos  $\sigma_M(i) = j$  y con esto queda únicamente definida  $\sigma_M$  dado un emparejamiento perfecto  $M$  de  $K_{n,n}$ . Decimos que un emparejamiento

$M$  de  $K_{n,n}$  es par si  $\sigma_M$  como permutación es par y decimos que es impar si  $\sigma_M$  es impar. Ahora bien sean  $M_1$  y  $M_2$  dos emparejamientos perfectos de  $K_{n,n}$  que difieren por un giro, es decir que existen aristas  $(i, j')$  y  $(k, l')$  en  $M_1$  tales que  $M_2 = M_1 - (i, j') - (k, l') + (i, l') + (k, j')$ . Observamos que  $\sigma_{M_2} = (j, l) \circ \sigma_{M_1}$  por lo que la paridad de  $\sigma_{M_1}$  es distinta de la de  $\sigma_{M_2}$ . Por lo tanto los emparejamientos pares de  $K_{n,n}$  solo son adyacentes a emparejamientos impares en  $\mathcal{M}'(K_{n,n})$  y viceversa los emparejamientos impares de  $K_{n,n}$  solo a emparejamientos pares de  $K_{n,n}$  en  $\mathcal{M}'(K_{n,n})$ . Es decir  $\mathcal{M}'(K_{n,n})$  es bipartita y  $\chi(\mathcal{M}'(K_{n,n})) = 2$ .  $\square$

A continuación damos una cota superiores para  $\chi(\mathcal{M}'(K_{2n}))$  usando la el Teorema 9

**Teorema 10.**  $\chi(\mathcal{M}'(K_{2n})) \leq 4n - 4$  para  $n \geq 2$ .

*Demostración.* Re-etiquetamos el conjunto de vértices de  $K_{2n}$  de manera que  $V(K_{2n}) = \{1, \dots, 2n\}$ . Para cada emparejamiento perfecto  $M$  de  $K_{2n}$ , definimos el conjunto  $U_M = \{i \in V(K_{2n}) \mid (i, j) \in M \text{ y } i > j\}$ , definimos también  $D_M = V(K_{2n}) - U_M$ . Ahora bien dada una partición de  $V(K_{2n})$  en dos conjuntos  $U$  y  $D$  de tamaño  $n$  cada uno, sea  $G_{U,D}$  la subgráfica de  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  inducida por todos aquellos emparejamientos tales que sus aristas unan un vértice de  $U$  con un vértice de  $D$ . Dicha gráfica es isomorfa a  $\mathcal{M}'(K_{n,n})$  y por lo tanto se puede colorear propiamente con dos colores. Damos una 2-coloración propia de cada gráfica  $G_{U,D}$  con los colores 0 y 1 y denotamos el color que recibe un emparejamiento  $M$  en  $G_{U,D}$  como  $\text{col}_{(U,D)}(M)$ . Sea  $H$  la gráfica con conjunto de vértices  $\{U_M \mid M \in V(\mathcal{M}'(K_{2n}))\}$  y  $U_{M_1}$  adyacente  $U_{M_2}$  en  $H$  si y solo sí  $|U_{M_1} \Delta U_{M_2}| = 2$ .  $H$  es subgráfica de la gráfica de fichas  $F_n(K_{2n})$  presentada en el Capítulo 2, pues podemos pensar que las fichas se encuentran precisamente en los elementos de  $U_M$ . Además como siempre se tiene que  $2n \in U_M$  y que  $1 \notin U_M$ , podemos pensar que siempre hay una ficha en el vértice  $2n$  y como nunca hay una en el vértice 1 lo quitamos y en esencia solo movemos las  $n - 1$  fichas que quedan en los  $2n - 2$  vértices restantes. Es decir  $H$  es de hecho

subgráfica de  $F_{n-1}(K_{2n-2})$ , por el Teorema 1  $H$  tiene una coloración propia con  $2n - 2$  colores. Coloreamos propiamente a  $H$  con  $2n - 2$  colores y denotamos el color que recibe  $U_M$  en  $H$  como  $\text{col}_H(U_M)$ . A cada emparejamiento perfecto  $M$  de  $K_{2n}$ , le asignamos el color  $\text{col}(M) = (\text{col}_{(U_M, D_M)}(M), \text{col}_H(U_M))$ . Esta coloración es propia pues dados dos emparejamientos perfectos  $M_1$  y  $M_2$  de  $K_{2n}$  es fácil ver que  $U_{M_1} = U_{M_2}$  o bien  $|U_{M_1} \Delta U_{M_2}| = 2$ . En el primer caso se tiene que como  $U_{M_1} = U_{M_2}$ ,  $D_{M_1} = D_{M_2}$  por lo que  $M_1$  es adyacente a  $M_2$  en  $G_{U_{M_1}, D_{M_1}} = G_{U_{M_2}, D_{M_2}}$  y en consecuencia  $\text{col}_{(U_{M_1}, D_{M_1})}(M_1) \neq \text{col}_{(U_{M_2}, D_{M_2})}(M_2)$ . En el otro caso por construcción  $\text{col}_H(U_{M_1}) \neq \text{col}_H(U_{M_2})$ . Hemos exhibido una coloración propia de  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  con  $2(2n - 2) = 4n - 4$  colores. Es decir  $\chi(\mathcal{M}'(K_{2n})) \leq 4n - 4$ .  $\square$

Cabe destacar que la cota superior obtenida en el Teorema 10 no es trivial pues  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  tiene grado cuadrático (en términos de  $n$ ) y el Teorema de Brooks [3] solo nos garantizaría una cota cuadrática para el número cromático. Carecemos por el momento de una cota inferior y es este uno de los problemas más interesantes que nos queda por resolver. Hablaremos más de esto al final del capítulo.

## 4.2. Propiedades de $\mathcal{M}'(K_{2n})$

En el intento de encontrar el número cromático de  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  estudiamos su estructura con la esperanza de poder dar una cota inferior para  $\chi(\mathcal{M}'(K_{2n}))$  o al menos poder mejorar la cota superior del Teorema 10. En esta sección mencionamos algunas propiedades de  $\mathcal{M}'(K_{2n})$ .

Es fácil ver que  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  es conexa. Es una gráfica regular de grado  $n(n - 1)$ , pues cada emparejamiento  $M$  de  $K_{2n}$  consta de  $n$  aristas, de las cuales hay  $\binom{n}{2}$  parejas posibles para girar y como cada pareja se puede girar de dos maneras  $M$  tiene  $2\binom{n}{2} = n(n - 1)$  vecinos.

Cualquier permutación  $\sigma$  del conjunto de vértices de  $K_{2n}$  induce un automorfismo  $\phi_\sigma$  de



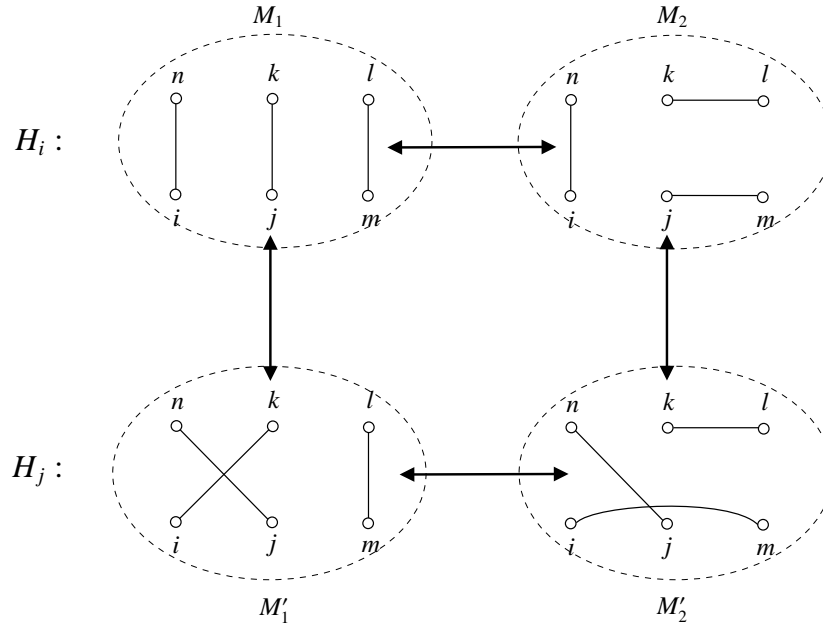


Figura 4.2: Las adyacencias entre  $H_i$  y  $H_j$

$\mathcal{M}'(K_{2n})$ , definiendo para cada emparejamiento  $M$  de  $K_{2n}$   $\phi_\sigma(M) = \{(\sigma(x), \sigma(y)) | (x, y) \in M\}$ . Por lo que  $S_n$  es subgrupo del grupo de automorfismo de  $\mathcal{M}'(K_{2n})$ , creemos de hecho que es todo su grupo de automorfismo, pero no hemos ahondado más en el tema.

Mas allá de estas propiedades una propiedad que creemos que eventualmente pudiera darnos la respuesta para  $\chi(\mathcal{M}'(K_{2n}))$  es cierta estructura recursiva en  $\mathcal{M}'(K_{2n})$ .

$\mathcal{M}'(K_{2n})$  esta compuesta por copias de las gráficas anteriores, es decir de  $\mathcal{M}'(K_{2m})$  para cada  $1 \leq m < n$ . Dichas copias abundan en  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  y se puede poner a  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  en términos de estas gráficas de muchas maneras, una en particular captó nuestra atención.

Supongamos que el conjunto de vértices de  $K_{2n}$  esta dado por  $\{1, \dots, 2n\}$ . Sea  $H_i$  las subgráfica de  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  por todo los emparejamientos que contienen la arista  $(2n, i)$ , para cada  $1 \leq i < 2n$ .

Para cada  $H_i$  se tiene que  $H_i \simeq \mathcal{M}'(K_{2(n-1)})$  y además cada vértice de  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  esta en una y exactamente una  $H_i$ .

Ahora bien cada arista de  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  o bien une dos vértices en una misma  $H_i$  o bien une un vértice de una  $H_i$  con un vértice de otra  $H_j$ .

Las adyacencias entre  $H_i$  y  $H_j$  tienen la peculiaridad de inducir un isomorfismo entre ellas. Para cada vértice  $M$  de  $H_i$  existe un único vértice  $M'$  de  $H_j$  adyacente a él. Pues dado  $M \in V(H_i)$  tal que  $(j, k) \in M$ , el único apareamiento en  $H_j$  adyacente a  $M$  es  $M' = M - (i, n) - (j, k) + (j, n) + (i, k)$ . Ahora bien la asignación  $M \mapsto M'$  es un isomorfismo de  $H_i$  en  $H_j$ . Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos vértices adyacentes en  $H_i$ ,  $M_2 = M_1 - e - f + g + h$  para algunas aristas  $e, f, g, h$  de  $K_{2n}$ . Si ninguna de estas aristas incide en  $j$  entonces  $M'_2 = M'_1 - e - f + g + h$  y  $M'_1$  es adyacente a  $M'_2$  en  $H_j$ . Por otra parte si  $e = (j, k)$ ,  $f = (l, m)$  y  $g = (j, l)$ ,  $h = (k, m)$  se tiene que  $M'_1 = M_1 - (i, n) - (j, k) + (j, n) + (i, k)$  y  $M'_2 = M_2 - (i, n) - (j, l) + (j, n) + (i, m)$ . En consecuencia  $M'_2 = M'_1 - (i, k) - (l, m) + (k, l) + (i, m)$  y  $M'_1$  es adyacente a  $M'_2$  en  $H_j$ . Mostramos este último caso en la Figura 4.2. La función así construida es un homomorfismo biyectivo entre dos gráficas isomorfas  $H_i$  y  $H_j$  y por lo tanto un isomorfismo entre ellas.

Los isomorfismos entre las diferentes copias de  $\mathcal{M}'(K_{2(n-1)})$ , determinan totalmente a  $\mathcal{M}'(K_{2n})$ . Pues  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  consta de  $n - 1$  copias disjuntas de  $\mathcal{M}'(K_{2(n-1)})$  las que denotamos como  $H_i$  ( $1 \leq i \leq n - 1$ ) e isomorfismos  $\sigma_{i,j} = \sigma_j \circ i^{-1}$  entre cada pareja  $H_i, H_j$ . Entre cada par de vértices  $x \in V(H_i)$  y  $y \in H_j$  existe una arista que los une si y solo si  $y = \sigma_{i,j}(x)$ . Las adyacencias dentro de cada  $H_i$  y las que están entre cada pareja  $H_i, H_j$  son todas las adyacencias de  $\mathcal{M}'(K_{2n})$ .

Se puede decir más pues aprovechando el hecho de que todas las  $H_i$  son isomorfas entre sí, fijando una misma etiquetación para todas se puede pensar a los isomorfismos  $\sigma_{i,j}$  de hecho como automorfismos de  $\mathcal{M}'(K_{2n})$ .

En la Figura 3.3 mostramos a  $\mathcal{M}'(K_6)$  en términos de  $\mathcal{M}'(K_4)$  y automorfismos de  $\mathcal{M}'(K_4)$ . Etiquetamos con 1, 2 y 3 los vértices de cada copia  $\mathcal{M}'(K_4)$  y para mayor claridad

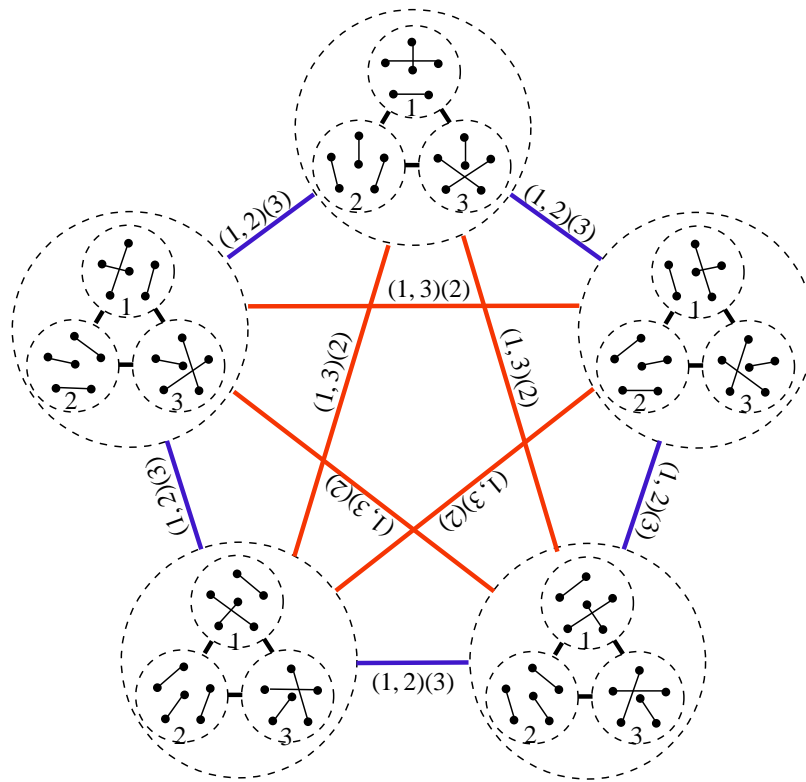


Figura 4.3:  $\mathcal{M}'(K_6)$  en términos de  $\mathcal{M}'(K_4)$

solo exhibimos el automorfismo entre distintas copias de  $\mathcal{M}'(K_4)$ .

Esta manera de ver a  $\mathcal{M}'(K_{2n})$ , nos permite probar propiedades de  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  como hamiltonicidad:

**Lema 2.** *El producto cartesiano  $C \times \Gamma$  de un  $C$  ciclo de longitud mayor o igual a 4 con una trayectoria contiene un ciclo hamiltoniano.*

*Demostración.* Sean  $C = (x_1, \dots, x_n)$  un ciclo de longitud  $n \geq 4$  y  $\Gamma = (y_1, \dots, y_m)$  una trayectoria de longitud  $m$ . Por inducción sobre la longitud de  $\Gamma$  afirmamos que existe un ciclo hamiltoniano en  $C \times \Gamma$  que pasa por todas las aristas del ciclo  $((x_1, y_m), (x_2, y_m), \dots, (x_n, y_m))$ , con la posible excepción de una arista. Para el caso  $k = 1$  el ciclo  $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_1))$  cumple con las propiedades anteriores. Inductivamente supongamos que dicho ciclo existe

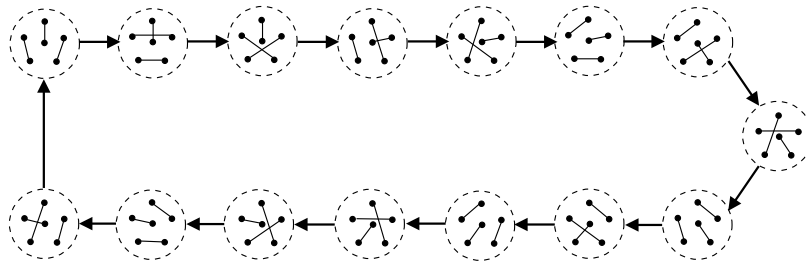
para trayectorias de longitud  $m$ . Consideremos ahora una trayectoria  $(y_1, \dots, y_m, y_{m+1})$  de longitud  $m + 1$  y sea  $\Gamma = (y_1, \dots, y_m)$ , por inducción existe un ciclo  $C'$  hamiltoniano en  $C \times \Gamma$  que pasa por todas las aristas del ciclo  $((x_1, y_m), \dots, (x_n, y_m))$  con la posible excepción de una arista  $((x_i, y_m), (x_{i+1}, y_m))$  como  $n \geq 4$  existe una arista  $((x_j, y_m), (x_{j+1}, y_m))$  disjunta de  $((x_i, y_m), (x_{i+1}, y_m))$  en  $((x_1, y_m), \dots, (x_n, y_m))$ . Sea  $\Gamma'$  la trayectoria contenida en  $C'$  de  $(x_{j+1}, y_m)$  a  $(x_j, y_m)$  que no pasa por la arista  $((x_j, y_m), (x_{j+1}, y_m))$  y sea  $C'' = ((x_1, y_{m+1}), (x_2, y_{m+1}), \dots, (x_n, y_{m+1}))$ . Finalmente  $(x_j, y_{m+1})C''^{-1}(x_{j+1}, y_{m+1}), (x_{j+1}, y_{m+1})\Gamma(x_j, y_m)$  es un ciclo hamiltoniano en  $C \times \Gamma$  que pasa por todas las aristas de  $((x_1, y_{m+1}), (x_2, y_{m+1}), \dots, (x_n, y_{m+1}))$  con excepción de  $((x_j, y_{m+1}), (x_{j+1}, y_{m+1}))$ .  $\square$

**Corolario 2.** *El producto cartesiano  $G \times \Gamma$  de una gráfica hamiltoniana  $G$  con  $n \geq 4$  vértices con una trayectoria  $\Gamma$  contiene un ciclo hamiltoniano.*

*Demostración.* Sea  $C$  un ciclo hamiltoniano en  $G$ ,  $C \times \Gamma$  es una subgráfica generadora de  $G \times \Gamma$  y por el lema 2 tiene un ciclo hamiltoniano. Por lo tanto  $G \times \Gamma$  tiene un ciclo hamiltoniano  $\square$

**Teorema 11.**  *$\mathcal{M}'(K_{2n})$  tiene un ciclo hamiltoniano para todo entero  $n \geq 2$ .*

*Demostración.* Para  $n = 2$   $\mathcal{M}'(K_6) \simeq K_3$  y por lo tanto tiene un ciclo hamiltoniano. El caso  $n = 3$  lo mostramos en la Figura 3.4. Supongamos inductivamente que  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  contiene un ciclo para  $n \geq 3$ . Probaremos que  $\mathcal{M}'(K_{2(n+1)})$  contiene un ciclo hamiltoniano. Por el corolario 2 basta mostrar que  $\mathcal{M}'(K_{2(n+1)})$  contiene como subgráfica generadora a  $\mathcal{M}'(K_{2n}) \times P_{2(n+1)-1}$ . Usando la notación anteriormente descrita, sea  $H_i$   $1 \leq i < 2(n+1)$  la subgráfica de  $\mathcal{M}'(K_{2(n+1)})$  por todos los emparejamientos de  $K_{2(n+1)}$  (vistos como vértices de  $\mathcal{M}'(K_{2(n+1)})$ ) que contengan la arista  $(i, 2(n+1))$  y  $\sigma_{i,j}$  el automorfismo entre  $H_i$  y  $H_j$ . Como cada vértice de  $\mathcal{M}'(K_{2(n+1)})$  se encuentra en una y solo una  $H_i$  y las  $H_i$  todas isomorfas entre sí y a su vez isomorfas a  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  podemos suponer que los vértices de cada  $H_i$  están

Figura 4.4: Un ciclo hamiltoniano en  $\mathcal{M}'(K_6)$ 

etiquetados de la misma manera que los vértices de  $\mathcal{M}'(K_{2n})$ . Etiquetamos los vértices de  $\mathcal{M}'(K_{2(n+1)})$  como  $(x, j)$  donde  $x$  es la etiqueta del vértice en  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  y  $(x, j)$  pertenece a  $H_j$ . Sea  $\rho_i = \sigma_{1,2} \circ \sigma_{2,3} \circ \cdots \circ \sigma_{i-1,i}$  para  $1 < i < 2(n+1) - 1$  y  $\rho_1$  la identidad restringida a  $\mathcal{M}'(K_{2n})$ . Etiquetamos los vértices de  $P_{2(n+1)-1}$  como  $\{1, \dots, 2(n+1) - 1\}$ . Ahora bien la gráfica con conjunto de vértices  $V(\mathcal{M}'(K_{2(n+1)}))$  y cuyas aristas son todas las aristas que se encuentran en cada  $H_i$  y las que unen un vértice de  $H_i$  con un vértice de  $H_{i+1}$  es una gráfica generadora de  $\mathcal{M}'(K_{2(n+1)})$  isomorfa a  $\mathcal{M}'(K_{2n}) \times P_{2(n+1)-1}$ . El isomorfismo en cuestión es la función que a cada vértice  $(x, j)$  le asigna  $(\rho_j(x), j)$ .  $\square$

En la demostración Teorema 11, de alguna manera se encuentra  $\mathcal{M}'(K_{2n}) \times P_{2(n+1)-1}$  solo que “torcida”. En la demostración lo que se hace es destorcerla. Esto no es accidental pues de hecho  $\mathcal{M}'(K_{2(n+1)})$  es de alguna manera un torcimiento de  $\mathcal{M}'(K_{2n}) \times P_{2(n+1)-1}$ . Lo que da este torcimiento son los automorfismos  $\sigma_{i,j}$  de  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  de los que hablamos previamente. Estas observaciones inspiraron el tema del capítulo posterior.

Por el momento es todo lo que podemos decir de  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  y de su número cromático.

### 4.3. Conclusiones y trabajos futuros

Quizá lo más urgente por resolver es el encontrar una cota inferior para  $\chi(\mathcal{M}'(K_{2n}))$ . Pues creemos que nuestra cota superior no esta muy lejos del número cromático real. Para este motivo nuestra investigación se centra en el estudiar la estructura recursiva de la que hemos hablado.

No hemos podido probar ninguna cota inferior superior a una constante para  $\chi(\mathcal{M}'(K_{2n}))$ . Hemos calculado con la computadora el número cromático de  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  para  $n = 2, 3, 4$ , y nuestros resultados han sido que  $\chi(\mathcal{M}'(K_{2n})) = n + 1$  en estos casos. Estos cálculos y la cota del Teorema 10 nos han motivado a conjeturar:

**Conjetura 2.**  $\chi(\mathcal{M}'(K_{2n})) = n + 1$  para  $n \geq 2$

Intuitivamente creemos que la esta característica de  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  de ser de alguna manera una torción de  $\mathcal{M}'(K_{2(n-1)}) \times K_{2n-1}$ , nos hace pensar que el número cromático debe de aumentar al aumentar  $n$ .

Si bien la Conjetura 2 podría parecer muy aventurada, al menos creemos que se debe cumplir:

**Conjetura 3.**  $\chi(\mathcal{M}'(K_{2n})) = \Theta(n)$

Sería interesante el investigar  $\chi(\mathcal{M}'(G))$  para otras gráficas a parte de  $K_{2n}$ . En virtud de que  $\chi(\mathcal{M}'(K_{n,n})) = 2$ , una buena candidata a ser estudiada seria  $\mathcal{M}'(K_{r_1, \dots, r_m})$  (con  $\sum_{i=1}^m r_i$  par). Respecto a  $\mathcal{M}'(K_{r_1, \dots, r_m})$  no tenemos más cotas para su número cromático que la cota superior que hereda como subgráfica de  $\mathcal{M}'(K_{2n})$ .

Por otra parte solo hemos estudiado el problema desde un punto de vista combinatorio, no hemos dicho nada sobre la versión geométrica. Sea  $S$  un conjunto de  $2n$  puntos en posición general en el plano de manera análoga a  $\mathcal{M}'(G)$  se define  $\mathcal{M}'(S)$  como la gráfica

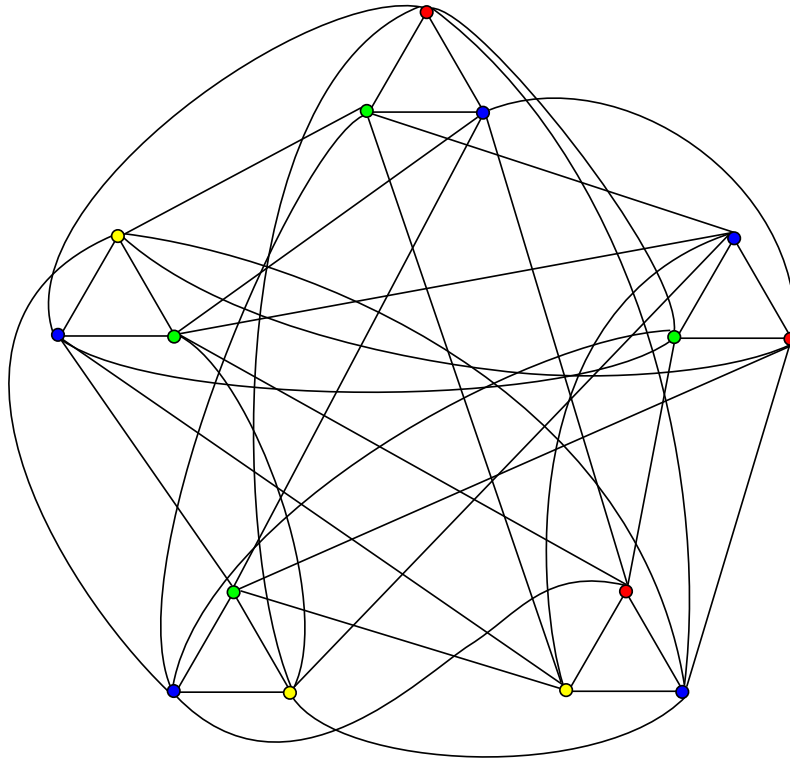


Figura 4.5: Una 4 coloración propia de  $\mathcal{M}'(K_6)$

cuyo conjunto de vértices son todos los emparejamientos geométricos y sin cruces sobre los vértices de  $S$ , dos de ellos adyacentes si su diferencia simétrica es un ciclo de longitud 4. En [5] se prueba que si los elementos de  $S$  se encuentra en posición convexa  $\mathcal{M}'(S)$  es bipartita. Faltaría por estudiar el caso cuando hay puntos de  $S$  al interior de sus cerradura convexa. Sería muy interesante el saber que tanto se puede alejar  $\chi(\mathcal{M}'(S))$  y  $\chi(\mathcal{M}'(K_{2n}))$ . Como  $\mathcal{M}'(S)$  es subgráfica de  $\mathcal{M}'(K_{2n})$ , sabemos que al menos  $\chi(\mathcal{M}'(S)) \leq \chi(\mathcal{M}'(K_{2n}))$  y por el Teorema 10 tenemos que  $\chi(\mathcal{M}'(S)) \leq 4n - 4$ . Sin embargo la diferencia entre  $\chi(\mathcal{M}'(S))$  y  $\chi(\mathcal{M}'(K_{2n}))$  bien podría ser arbitrariamente grande. Al entrar en el contexto geométrico usando técnicas de geometría combinatoria es posible que se encuentre cotas más justas.

La propiedad de la estructura recursiva  $\chi(\mathcal{M}'(K_{2n}))$  tiene copias de gráficas anteriores emparejadas entre sí solo que “torcidas” es un tema a estudiar para gráficas en general. Al respecto en el Capítulo 5, estudiamos un caso inspirado por esta situación. Esta también la situación más general donde ahora tenemos  $G_1, \dots, G_m$  gráficas disjuntas, todas isomorfas a una gráfica  $G$ , suponemos además que los vértices de cada  $G_i$  están etiquetados como  $(x, i)$  donde  $(x, i) \mapsto x$  es un isomorfismo de  $G_i$  en  $G$ . Contamos también con un conjunto  $A = \{\phi_{i,j} \in \text{Aut}(G) | 1 \leq i < j \leq m\}$  de automorfismos de  $G$ . Sea  $K_{m,A}(G)$  la gráfica cuyo conjunto de vértices es  $V(G_1) \cup \dots \cup V(G_m)$  y dos vértices  $(x, i) \in V(G_i)$ ,  $(y, j) \in V(G_j)$  adyacentes si solo si  $i = j$  y  $x$  es adyacente a  $y$  en  $G$  o bien  $i < j$  y  $y = \phi_{i,j}(x)$ .

Un tema a investigar es como afecta  $m$ , el número cromático de  $G$  y la elección del conjunto de automorfismos  $A$  al número cromático de  $K_{m,A}(G)$ . Como  $G$  es subgráfica de  $K_{m,A}(G)$ ,  $\chi(K_{m,A}(G)) \geq \chi(G)$ . Sabemos también por ejemplo que:

**Teorema 12.** *Dados dos enteros positivos  $n$  y  $m$  cualesquiera, existe un conjunto de automorfismos de  $K_n$   $A = \{\phi_{i,j} \in \text{Aut}(K_n) | 1 \leq i < j \leq m\}$  de manera de que  $\chi(K_{m,A}(K_n)) = n$ .*

*Demostración.* Supongamos que el conjunto de vértices de  $K_n$  esta dado por  $\{0, \dots, n-1\}$ . Sea  $\phi$  el automorfismo de  $K_n$  dado por  $i \mapsto i+1 \pmod n$ . Sea  $A = \{\phi_{i,j} = \phi | 1 \leq i < j \leq m\}$ , ahora bien a cada vértice  $(i, k)$  de  $K_{m,A}(K_n)$  le asignamos el color  $i$ , esta es una  $n$ -coloración propia de  $K_{m,A}(K_n)$ . Sean  $(i, k)$  y  $(j, l)$  dos vértices adyacentes de  $K_{m,A}(K_n)$ . Si  $k = l$ ,  $i$  es adyacente a  $j$  en  $K_n$ ,  $i \neq j$  y  $(i, k)$  recibe un color distinto a  $(j, l)$ . Por otra parte si  $i < j$  se tiene que  $j = i+1 \pmod n$  y  $(i, k)$  y  $(j, l)$  reciben colores distintos.  $\square$

Un problema por trabajar seria el saber bajo que elecciones de automorfismo de  $G$  se tiene que  $\chi(K_{m,A}(G)) > \chi(G)$ . Un ejemplo es que si  $m > \chi(G)$  y todos los elementos de  $A$  dejan fijo algún un vértice  $x$  de  $G$ ,  $K_{m,A}(G)$  tiene como subgráfica a  $K_m$  y  $\chi(K_{m,A}(G)) \geq m > \chi(G)$ . Estamos interesados en elecciones de  $A$  que eviten precisamente estos casos. Nuestro



interés en este tema radica en que  $\mathcal{M}'(K_{2n})$  es una de estas gráficas.

Terminamos este capítulo, con un resultado sobre la hamiltonicidad de estas gráficas:

**Teorema 13.** *Sea  $G$  una gráfica hamiltoniana con  $n \geq 4$  vértices y  $m$  un entero positivo cualquier y  $A = \{\phi_{i,j} \in \text{Aut}(G) | 1 \leq i < j \leq m\}$  entonces  $K_{m,A}(G)$  es hamiltoniana.*

*Demostración.* En el mismo espíritu que la demostración del Teorema 11, sean  $\phi_1$  la identidad restringida a  $V(G)$  y  $\phi_i = \phi_{1,2} \circ \cdots \circ \phi_{i-1,i}$  para  $1 < i < m$ . Sea  $P_m = (1, \dots, m)$  una trayectoria con  $m$  vértices. Observando que  $(x, i) \mapsto (\phi_i(x), i)$  es un isomorfismo de  $K_{m,A}(G)$  en  $G \times P_m$  y por el Corolario 2, contiene un ciclo hamiltoniano y por lo tanto  $K_{m,A}(G)$  también. □

# Capítulo 5

## Producto Cartesiano Torcido

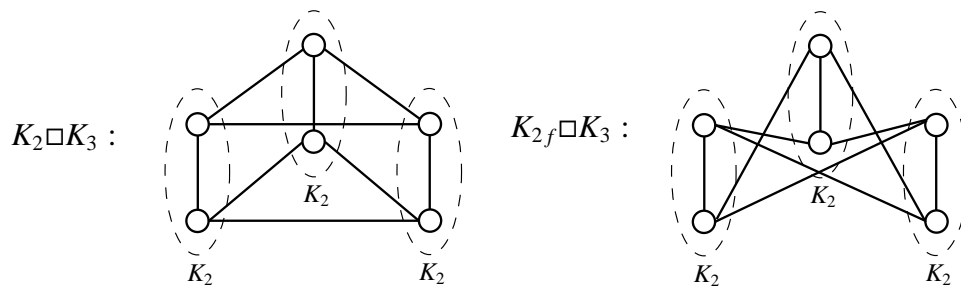
Las investigaciones del Capítulo 4, nos inspiraron a definir un nuevo tipo de producto de gráficas que hasta donde sabemos no has sido estudiado con anterioridad. Pese a estar inspirado en las gráfica de giros de emparejamientos de  $K_{2n}$ , el presente capítulo se sale del tema del número cromático de las gráficas de giros. Lo incluimos por los resultados obtenidos y por su novedad.

Al final del capítulo 4 estudiamos gráficas creadas a partir de copias disjuntas de una gráfica  $G$  y isomorfismos entre estas copias que determinan nuevas adyacencias.

En este capítulo estudiamos una estructura en un aspecto más general y en otro más sencillo y particular.

### 5.1. Producto Cartesiano Torcido

Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas y  $f$  un automorfismos de  $G$  de orden a lo más 2 (es decir  $f = f^{-1}$ ). Definimos el producto cartesiano torcido  $G_f \square H$  de  $G$  con  $H$  como la gráfica con conjunto de vértices  $V(G) \times V(H)$ , y dos de sus vértices  $(x, y), (x', y')$  adyacentes si y solo

Figura 5.1:  $K_2 \square K_3$  y  $K_{2_f} \square K_3$ 

si  $x = f(x')$  y  $y$  adyacente a  $y'$  en  $H$  o bien  $y = y'$  y  $x$  adyacente a  $x'$  en  $G$ .

Observamos la similitud con el producto cartesiano  $G \square H$  de  $G$  con  $H$ , recordando su definición:  $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$  y  $(x, y), (x', y') \in V(G \square H)$  adyacentes si y solo si  $x = x'$  y  $y$  es adyacente a  $y'$  en  $H$  o bien  $y = y'$  y  $x$  es adyacente a  $x'$  en  $G$ . De esta manera de hecho si  $e$  es la identidad restringida a  $V(G)$ , se tiene que  $G_e \square H \simeq G \square H$  es decir el producto cartesiano es una generalización natural del producto cartesiano.

Hacemos un paréntesis para explicar la intuición detrás del nombre que hemos escogido para este nuevo producto. El producto cartesiano de  $G$  con  $H$ , se puede dibujar primero dibujando a  $H$  y por cada vértice de  $H$  dibujar una copia de  $G$  y entre dos copias que provenían de dos vértices adyacentes en  $H$  unir representantes del mismo vértice en  $G$ . El producto cartesiano  $G_f \square H$  de  $G$  con  $H$  se puede dibujar de la misma manera solo que las adyacencias entre distintas copias de  $G$  están torcidas por  $f$ . En la Figura 5.1 se puede apreciar esta situación donde se muestran a  $K_2 \square K_3$  y a  $K_{2_f} \square K_3$  (donde  $f$  es el único automorfismo de  $K_2$  distinto de la identidad).

## 5.2. Propiedades básicas

A continuación daremos algunas propiedades básicas del producto cartesiano torcido. En lo subsecuente nos referiremos a los automorfismos de orden a lo más 2 como involuciones.

Sean  $G$  y  $H$  gráficas. La relación existente entre dos involuciones  $f$  y  $g$  de  $G$  de alguna manera se debe reflejar en sus respectivos productos torcidos  $G_f \square H$  y  $G_g \square H$  con  $H$ . Al respecto tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 14.** *Sean  $f$  y  $g$  dos involuciones conjugadas de  $G$  (i.e.  $f = h^{-1}gh$  para algún automorfismo  $h$  de  $G$ ) entonces  $G_f \square H \simeq G_g \square H$  para toda gráfica  $H$ .*

*Demostración.* Consideremos la función  $\phi$  de  $V(G_f \square H)$  en  $V(G_g \square H)$  dada por  $\phi(x, y) = (h(x), y)$  para todo  $(x, y) \in V(G_f \square H)$ . Afirmamos que dicha función es un isomorfismo de  $G_f \square H$  en  $G_g \square H$ . Como  $h$  es biyectiva,  $\phi$  también lo es. Sea  $(x, y)$  adyacente a  $(x', y')$  en  $G_f \square H$ , se tienen dos casos:  $x' = f(x)$  y  $y$  es adyacente a  $y'$  en  $H$  o bien  $y = y'$  y  $x$  es adyacente a  $x'$  en  $G$ . En el primer caso tenemos que  $h^{-1}h(x') = x' = f(x) \Rightarrow h(x') = hf(x) = hh^{-1}gh(x) = gh(x) = g(h(x))$  por lo tanto  $(h(x), y)$  es adyacente a  $(h(x'), y')$  en  $G_g \square H$ . En el otro caso como  $h$  es un automorfismo de  $G$ ,  $y = y'$  y  $h(x)$  es adyacente a  $h(x')$  en  $G$  por lo que  $(h(x), y)$  es adyacente a  $(h(x'), y')$  en  $G_g \square H$ . Por lo tanto  $\phi$  es un homomorfismo biyectivo de  $G_f \square H$  en  $G_g \square H$ . Además como  $G_f \square H$  tienen el mismo número de vértices y aristas,  $\phi$  es un isomorfismo entre ellas.  $\square$

En algunas ocasiones es posible “destorcer” el producto cartesiano torcido, como lo demuestra el siguiente resultado:

**Teorema 15.** *Sea  $G$  una gráfica y  $f$  una involución de  $G$ , si  $H$  es una gráfica bipartita se tiene que  $G_f \square H \simeq G \square H$ .*

*Demostración.* Como  $H$  es bipartita existe una partición de su conjunto de vértices  $V(H) = A \cup B$  de manera de que las aristas de  $H$  solo unen vértices en  $A$  con vértices en  $B$ . Sea  $\phi$  la función de  $V(G_f \square H)$  que a cada vértice  $(x, y)$  le asigna  $\phi(x, y) = (x, y)$  si  $y \in A$  y  $\phi(x, y) = (f(x), y)$  si  $y \in B$ . Dado que  $f$  es un isomorfismo de  $G$ ,  $\phi$  es biyectiva. Ahora bien sean  $(x, y), (x', y')$  dos vértices adyacentes en  $G_f \square H$ . Si  $y = y'$  y  $x$  es adyacente a  $x'$  en  $G$ , como  $f$  es un isomorfismo de  $G$ ,  $f(x)$  es adyacente a  $f(x')$  en  $G$  por lo que ya sea que  $y \in A$  o que  $y \in B$ ,  $\phi(x, y)$  es adyacente a  $\phi(x', y')$  en  $G \square H$ . Por otra parte si  $x = f(x')$  y  $y$  es adyacente a  $y'$  en  $H$ ,  $y \in A$  o bien  $y \in B$ . En el primer caso,  $y' \in B$ ,  $\phi(x, y) = (x, y)$  y  $\phi(x', y') = (f(x'), y) = (x, y')$  (por ser  $f$  involución de  $G$ ) por lo que  $\phi(x, y)$  es adyacente a  $\phi(x', y')$  en  $G \square H$ . Si en cambio  $y \in B$ ,  $y' \in A$  y  $\phi(x, y) = (f(x), y) = (x', y)$  y  $\phi(x', y') = (x', y')$  por lo que  $\phi(x, y)$  es adyacente a  $\phi(x', y')$  en  $G \square H$ . Por lo tanto  $\phi$  es un homomorfismo biyectivo de  $G_f \square H$  en  $G \square H$  y como  $G \square H$  tiene el mismo número de aristas que  $G_f \square H$  es de hecho un isomorfismo entre ellas.  $\square$

### 5.3. El número cromático de $G_f \square H$

Dado que el estudio de números cromáticos fue lo que nos inspiró a definir el producto cartesiano torcido, nuestros esfuerzos se han centrado en dar cotas para este parámetro en los productos cartesianos torcidos. En esta sección daremos algunos resultados obtenidos en este sentido. En lo subsecuente  $G$  y  $H$  serán gráficas y  $f$  una involución de  $G$ .

**Corolario 3.** Si  $H$  es una gráfica bipartita entonces  $\chi(G_f \square H) = \chi(G \square H)$ .

*Demostración.* Por el Teorema 15,  $G_f \square H \simeq G \square H$  y en consecuencia  $\chi(G_f \square H) = \chi(G \square H)$ .  $\square$

Es fácil dar unas primeras cotas inferiores:

**Lema 3.**  $\chi(G_f \square H) \geq \chi(G)$

*Demostración.* Sea  $y$  un vértice cualquiera de  $H$ . La subgráfica de  $G_f \square H$  inducida por todos los vértices de la forma  $(x, y) \in V(G_f \square H)$  con  $x \in V(G)$  es isomorfa a  $G$ . Por lo que  $\chi(G_f \square H) \geq \chi(G)$ .  $\square$

**Lema 4.** Si  $f$  tiene al menos un punto fijo entonces  $\chi(G_f \square H) \geq \chi(H)$

*Demostración.* Como  $f$  tiene al menos un punto fijo, existe un vértice  $x \in V(G)$  tal que  $f(x) = x$ . La subgráfica de  $G_f \square H$  inducida por todos los vértices de la forma  $(x, y) \in V(G \square H)$  con  $y \in V(H)$  es isomorfa a  $H$ . Por lo tanto  $\chi(G \square H) \geq \chi(H)$ .  $\square$

**Teorema 16.** Si  $f$  no tiene puntos fijos,  $\chi(G_f \square H) = \chi(G)$

*Demostración.* Como  $f$  no tiene puntos fijos,  $f(x) \neq x$  para todo  $x \in V(G)$ . Sea  $\text{col}_G$  una coloración propia de  $G$  con  $\chi(G)$  colores. A cada vértice  $(x, y) \in V(G_f \square H)$  le asignamos el color  $\text{col}_G(x)$ . Esta coloración es propia pues dados dos vértices  $(x, y)$  y  $(x', y')$  adyacentes en  $G_f \square H$  Se tiene uno de dos casos,  $x' = f(x)$  y  $y$  adyacente a  $y'$  en  $H$  en cuyo caso  $\text{col}(x, y) = \text{col}_G(x) \neq \text{col}_G(f(x)) = \text{col}_G(x') = \text{col}(x', y')$  o bien  $y = y'$  y  $x$  es adyacente a  $x'$  en  $K_n$  por lo que  $\text{col}_G(x) \neq \text{col}_G(x')$  y por lo tanto  $\text{col}(x, y) = \text{col}_G(x) \neq \text{col}_G(x') = \text{col}(x', y')$ . Por lo tanto  $\chi(G_f \square H) \leq \chi(G)$  y por el Lema 3  $\chi(G_f \square H) \geq \chi(G)$ . Es decir  $\chi(G_f \square H) = \chi(G)$ .  $\square$

El número cromático del producto cartesiano, se conoce a la perfección [34]:

**Teorema 17.** (G.Sabadussi) Sean  $G$  y  $H$  gráficas entonces  $\chi(G \square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$ .

*Demostración.* Sea  $k = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$ . Damos una coloración  $\text{col}_G$  propia de  $G$  con  $\chi(G)$  colores y una coloración  $\text{col}_H$  propia de  $H$  con  $\chi(H)$  colores. A cada vértice  $(x, y)$  de  $G \square H$  le asignamos el color  $\text{col}_G(x) + \text{col}_H(y) \pmod k$ . La coloración así construida es

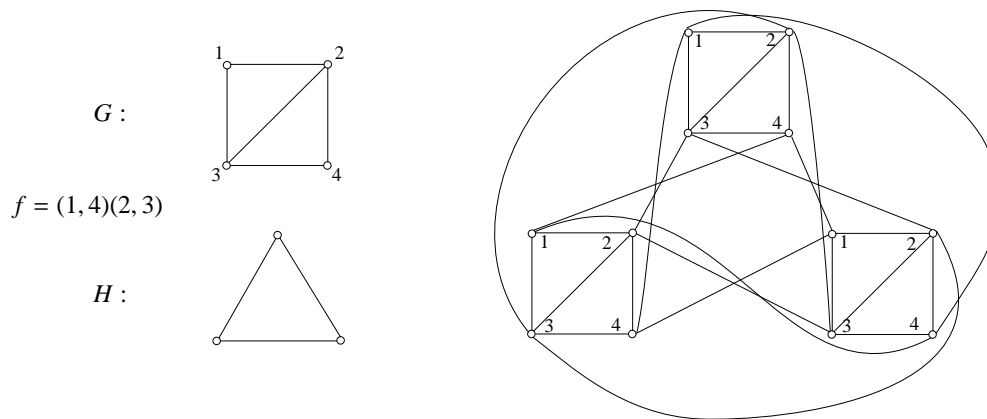


Figura 5.2: 2 Gráficas 3-cromáticas cuyo producto cartesiano torcido tiene número cromático 4.

propia pues dados dos vértices  $(x, y)$  y  $(x', y')$  en  $G \boxtimes H$  se tiene que  $x = x'$  y  $y$  es adyacente a  $y'$  en  $H$  o bien  $y = y'$  y  $x$  adyacente a  $x'$  en  $G$ . En el primer caso  $\text{col}_H(y) = \text{col}_H(y')$  y  $\text{col}_G(x) \neq \text{col}_G(x')$  en consecuencia  $\text{col}(x, y) - \text{col}(x', y') \pmod k = \text{col}_G(x) + \text{col}_H(y) - \text{col}_G(x') - \text{col}_H(y') \pmod k = \text{col}_G(x) - \text{col}_G(x') \pmod k \neq 0 \pmod k$ . Es decir  $\text{col}(x, y) \neq \text{col}(x', y')$ . Por otra parte si  $y = y'$  y  $x$  es adyacente a  $x'$  en  $G$ , se tiene de manera análoga que  $\text{col}_G(x) = \text{col}_G(x')$  y  $\text{col}_H(y) \neq \text{col}_H(y')$ . Por lo tanto  $\text{col}(x, y) - \text{col}(x', y') \pmod k = \text{col}_G(x) + \text{col}_H(y) - \text{col}_G(x') - \text{col}_H(y') \pmod k = \text{col}_H(y) - \text{col}_H(y') \pmod k \neq 0 \pmod k$  y  $\text{col}(x, y) \neq \text{col}(x', y')$ .  $\square$

Cabe destacar que dicho resultado no se cumple para el producto cartesiano torcido de dos gráficas en general. Mostramos un ejemplo en la Figura 5.3 donde exhibimos dos gráficas 3 cromáticas cuyo producto cartesiano torcido necesita más de 3 colores para ser coloreado propiamente. Esto se puede verificar exhaustivamente asignando colores y viendo que coloraciones fuerzan. En todas las maneras posibles de hacerlo se llega a una contradicción.

Tenemos sin embargo resultados análogos para productos torcidos de gráficas com-

pletas. En lo subsecuente  $K_n$  y  $K_m$  serán gráficas completas con  $n$  y  $m$  vértices respectivamente y  $f$  una involución de  $f$ . Suponemos además que  $V(K_n) = \{0, \dots, n-1\}$  y  $V(K_m) = \{0, \dots, m-1\}$ .

**Teorema 18.** *Si  $f$  tiene al menos un punto fijo y  $\max\{n, m\}$  es par entonces  $\chi(K_{n,f} \square K_m) = \max\{n, m\}$ .*

*Demostración.* Por los Lemas 3 y 4,  $\chi(K_{n,f} \square K_m) \geq \max\{n, m\}$ . Sea  $\text{fix}(f) = \{x \in V(K_n) \mid f(x) = x\}$ . Como  $f$  tiene al menos un punto fijo,  $\text{fix}(f) \neq \emptyset$ . Sea  $S = \{x \in V(K_n) - \text{fix}(f) \mid x < f(x)\}$  y  $r = \max\{n, m\}$ . Re-etiquetamos los vértices de  $K_n$  de manera de que  $\text{fix}(f) = \{0, 1, \dots, k\}$  y  $f(x) = x + 1$  para todo  $x$  en  $S$ . Empezamos con una primera coloración asignando a cada vértice  $(i, j)$  de  $K_{n,f} \square K_m$  el color  $\text{col}(i, j) = i + j \pmod r$ . Esta coloración induce una coloración propia de cada subgráfica  $H_j$  de  $K_n \square K_m$  inducida por todos los vértices de la forma  $(x, j)$  pues dados dos vértices  $(i, j)$  y  $(k, j)$  en  $H_j$  se tiene que  $\text{col}(i, j) - \text{col}(k, j) \pmod r = i + j - (k + j) \pmod r = i - k \pmod r \neq 0 \pmod r$ , es decir  $\text{col}(i, j) \neq \text{col}(k, j)$ . A partir de esta coloración damos una nueva donde para cada  $j$  impar intercambiamos los colores que reciben  $(x, j)$  y  $(f(x), j)$  para cada  $x \in S$  y el resto de las asignaciones de colores las dejamos igual. Denotamos esta nueva coloración como  $\text{col}'(i, j)$  para cada  $(i, j)$  vértice de  $K_{n,f} \square K_m$ . Como solo hicimos un intercambio de colores, la coloración restringida a los vértices de  $H_j$  sigue siendo propia. Solo falta ver que vértices adyacentes que se encuentren en distintas subgráficas  $H_j$  reciban colores distintos. Sean  $(i, j), (k, l) \in V(K_{n,f} \square K_m)$  adyacentes con  $j \neq l$ , entonces  $k = f(i)$ . Si  $i \in \text{fix}(f)$ , se tiene que  $k = i$  y  $\text{col}'(i, j) = i + j \pmod r = k + j \pmod r \neq k + l \pmod r = \text{col}'(k, l)$ . Si  $i \notin \text{fix}(f)$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $i \in S$  y que  $(i, j)$  recibe el mismo color que  $(k, l)$  i.e.  $\text{col}'(i, j) = \text{col}'(k, l)$ . Si  $j$  y  $l$  ambos son pares se tiene que  $i + j \pmod r = \text{col}(i, j) = \text{col}'(i, j) = \text{col}'(k, l) = \text{col}(k, l) = k + l \pmod r = i + 1 + l \pmod r$ . Es decir  $j \pmod r = l + 1 \pmod r$  y tanto  $j$  como  $l$  son



pares, lo cual es una contradicción por ser  $r$  par. Análogamente si  $i$  y  $j$  son impares,  $i + j + 1 \pmod r = \text{col}(i + 1, j) = \text{col}(f(i), j) = \text{col}'(i, j) = \text{col}'(k, l) = \text{col}(f^{-1}(k), l) = \text{col}(i, l) = i + l \pmod r$ . Por lo que  $l \pmod r = j + 1 \pmod r$  con  $l$  y  $k$  impares y de nuevo es una contradicción por ser  $r$  par. Por otra parte si  $j$  es par y  $l$  impar,  $i + j \pmod r = \text{col}'(i, j) = \text{col}'(k, l) = i + l \pmod r$ . Por lo que  $j \pmod r = l \pmod r$ , contradicción pues  $l$  y  $j$  tienen distinta paridad. Finalmente si  $j$  es impar y  $l$  par,  $i + j + 1 \pmod r = \text{col}'(i, j) = \text{col}'(k, l) = i + 1 + l$ . De la misma manera  $j \pmod r = l \pmod r$  y tienen distinta paridad. Por lo tanto la coloración así construida es propia y  $\chi(K_{n_f} \square K_m) \leq \max\{n, m\}$ . En conclusión  $\chi(K_{n_f} \square K_m) = \max\{n, m\}$ .  $\square$

**Corolario 4.** Si  $f$  tiene al menos un punto fijo entonces  $\max\{n, m\} \leq \chi(K_{n_f} \square K_m) \leq \max\{n, m\} + 1$ .

*Demostración.* Observamos que  $K_{n_f} \square K_m$  es subgráfica de  $K_{n_f} \square K_{m+1}$ .  $K_{n_f} \square K_{m+1}$  es de la misma manera subgráfica de  $K_{n_f} \square K_{m+2}$ , y así sucesivamente. Supongamos que  $r = \max\{m, n\}$  es impar.  $K_{n_f} \square K_m$  es subgráfica de  $K_{n_f} \square K_{r+1}$  y por el Teorema 18  $\chi(K_{n_f} \square K_{r+1}) = r + 1$ . Por lo tanto  $\chi(K_{n_f} \square K_m) \leq \max\{n, m\} + 1$ . De los Lemas 3 y 4 tenemos la otra desigualdad,  $\max\{n, m\} \leq \chi(K_{n_f} \square K_m)$ .  $\square$

Resumiendo:

**Teorema 19.** Sean  $K_n$  y  $K_m$  gráficas completas con  $n$  y  $m$  vértices respectivamente y  $f$  una involución de  $K_n$ , entonces:

1. Si  $f$  no tiene puntos fijos:

- $\chi(K_{n_f} \square K_m) = n$

2. Si  $f$  tiene al menos un punto fijo:

- Si  $\max\{n, m\}$  es par,  $\chi(K_{n_f} \square K_m) = \max\{n, m\}$

- Si  $\max\{n, m\}$  es impar,  $\max\{n, m\} \leq \chi(K_n \square K_m) \leq \max\{n, m\} + 1$

□

Para gráficas en general carecemos de cotas superiores tan justas. Por el momento lo más que podemos decir es:

**Teorema 20.** Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas con  $\chi(H) \geq 2$  y  $f$  una involución de  $G$  entonces  $\chi(G_f \square H) \leq \chi(G)(\chi(H) - 1)$

*Demostración.* Sean  $l = \chi(G)$ ,  $r = \chi(H)$ ,  $\text{col}_G$  una coloración propia de  $G$  con  $l$  colores y  $\text{col}_H$  una coloración propia de  $H$  con  $r$  colores. Suponemos además que  $\text{col}_G$  tiene como conjunto de colores a  $\{1, \dots, l\}$  y que  $\text{col}_H$  tiene como conjunto de colores a  $\{1, \dots, r\}$ . Ahora bien cada vértice  $(x, y) \in V(G_f \square H)$  tal que  $1 \leq \text{col}_H(y) \leq r - 1$  le asignamos el color  $\text{col}(x, y) = (\text{col}_G(x), \text{col}_H(y))$ . A los vértices  $(x, y) \in V(G_f \square H)$  tales que  $\text{col}_H(y) = r$  les asignamos el color  $\text{col}(x, y) = ((\text{col}_G(f(x)) + 1 \pmod{r}), r - 1)$ . Dicha coloración es propia pues dados dos vértices  $(x, y)$  y  $(x', y')$  se tienen dos casos:  $y = y'$  y  $x$  es adyacente a  $x'$  en  $G$  o bien  $f(x) = x'$  y  $y$  es adyacente a  $y'$  en  $H$ . En el primer caso como  $x$  es adyacente a  $x'$  se tiene que  $\text{col}_G(x) \neq \text{col}_G(x')$  y por lo tanto  $\text{col}(x, y) \neq \text{col}(x', y')$ . En el segundo caso si  $\text{col}(x, y) = \text{col}(x', y')$  se tiene que  $\text{col}_H(y) = \text{col}_H(y')$  o bien sin pérdida de generalidad  $\text{col}_H(y) = r - 1$  y  $\text{col}_H(y') = r$ . Si  $\text{col}_H(y) = \text{col}_H(y')$ , tendríamos una contradicción pues  $y$  es adyacente a  $y'$  en  $H$ . Por otra parte si  $\text{col}_H(y) = r - 1$  y  $\text{col}_H(y') = r$ , como  $f(x) = x'$  se tiene que  $\text{col}_G(f(x')) + 1 \pmod{r} = \text{col}_G(x) + 1 \pmod{r} \neq \text{col}_G(x) \pmod{r}$ . Por lo tanto  $\text{col}(x, y) = (\text{col}_G(x), \text{col}_H(y)) \neq (\text{col}_G(x) + 1 \pmod{r}, r - 1) = ((\text{col}_G(f(x')) + 1 \pmod{r}), \text{col}_H(y')) = \text{col}(x', y')$ . □

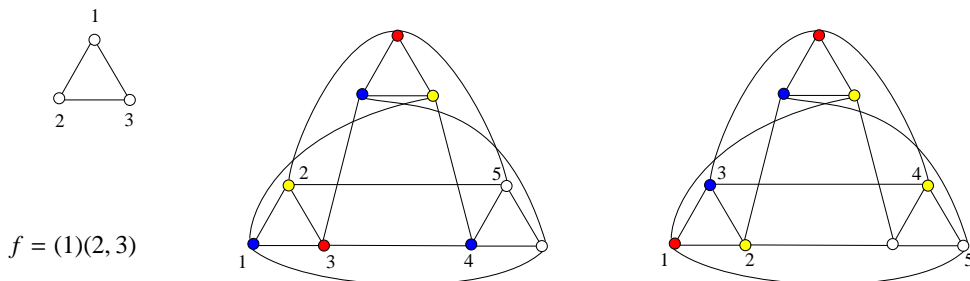


Figura 5.3: Demostración exhaustiva de que  $K_{3_f} \square K_3$  no es 3-cromática.

## 5.4. Conclusiones y trabajos futuros

Enfocamos nuestra atención principalmente en el número cromático de productos cartesianos torcidos. Nos gustaría tener un resultado para productos cartesianos análogo al Teorema 17 de productos cartesianos. Estamos muy lejos de ello por el momento tenemos, sin embargo un resultado muy justo para productos cartesiano torcidos de gráficas completas.

Por el Teorema 18 sabemos que  $\chi(K_{n_f} \square K_m)$  esta entre  $\max\{n, m\}$  y  $\max\{n, m\} + 1$  cuando  $f$  tiene al menos un punto fijo. Tenemos el ejemplo de una involución  $f$  de  $K_3$  donde  $\chi(K_{3_f} \square K_3) = \max\{3, 3\} + 1 = 3 + 1 = 4$ . En la Figura 5.4 se muestra una involución  $f$  de  $K_3$ , seguido de intentos exhaustivos de colorear propiamente a  $K_{3_f} \square K_3$  con 3 colores. Primeramente se colorea un triángulo  $K_{3_f} \square K_3$  sin perdida de generalidad de manera arbitraria con 3 colores, después se elije un vértice (marcado con 1) que puede recibir dos colores. Se muestran ambos casos y se enumeran consecutivamente los vértices que tienen un color forzado con la coloración asignada hasta el momento. Eventualmente en ambos casos se llega a un vértice que no puede recibir ninguno de los 3 colores usados.

Creemos que hay dos escenarios posibles.

1. A partir de un cierto número, los productos cartesianos torcidos de completas se comportan como productos cartesianos normales:

**Conjetura 4.** *Existe un entero positivo  $c$  tal que si  $n \geq c$  y  $m \geq c$ ,  $\chi(K_n \square_f K_m) = \max\{n, m\}$ , para toda involución  $f$  de  $K_n$  con al menos un punto fijo.*

2. Todas las involuciones de  $K_n$  con la menos un punto fijo, hacen que el número cromático de  $K_n \square_f K_m$  suba cuando  $\max\{n, m\}$  es impar:

**Conjetura 5.** *Sea  $f$  una involución de  $K_n$ , con al menos un punto fijo. Si  $\max\{n, m\}$  es impar entonces  $\chi(K_n \square_f K_m) = \max\{n, m\} + 1$ .*

Solo nos faltaría determinar estos casos para tener un teorema análogo al Teorema 17 para gráficas completas.

Respecto al número cromático del producto cartesiano torcido de gráficas en general no tenemos elementos para aventurar una conjetura. Creemos que de alguna manera, el grupo de automorfismos de una gráfica  $G$  influye en el número cromático de su producto torcido  $G_f \square H$  con una gráfica  $H$ .

Sería muy interesante el sabe que tanto se puede alejar  $\chi(G_f \square H)$  de  $\chi(G \square H)$ .

Cabe destacar que en nuestra definición del producto cartesiano torcido, solo “torcemos” una coordenada. Generalizamos el producto cartesiano torcido y ahora permitimos el torcimiento de todas sus coordenadas. Sean  $G_1, \dots, G_k$  gráficas y  $f_1, \dots, f_k$  involuciones de estas respectivamente. Definimos el producto cartesiano torcido  $\square_{i=1}^n G_{i f_i}$  de  $G_1, \dots, G_k$ . Como la gráfica cuyo conjunto de vértices es  $\times_{i=1}^n V(G_i)$  y dos de sus vértices  $x, y$  adyacentes entre sí, si y solo si existe  $1 \leq i \leq n$  tal que  $x(i)$  es adyacente a  $y(i)$  en  $G_i$  y  $f_j(x_j) = y_j$  para todo  $j \neq i$ .

Sería muy interesante el estudiar como los nuevos torcimientos afectan el número cromático de los productos cartesianos torcidos, pues en muchos de nuestros resultados para productos cartesianos con solo una de sus coordenadas, torcidas teníamos cotas inferiores inmediatas al tener siempre uno de sus factores como subgráfica del producto.

El producto cartesiano torcido es una generalización natural del producto cartesiano y muchas de las propiedades que de son fáciles de determinar para el producto cartesiano, parecen ser más difíciles en el producto cartesiano torcido, por otra parte parecieran más sencillas que en otros productos de gráficas (ver [38]). Una fuente de problemas para trabajos futuros sería el tratar de generalizar los teoremas de productos cartesianos para para productos cartesianos torcidos. Por otra parte todo teorema sobre productos cartesianos torcidos es automáticamente un teorema sobre productos cartesianos.

El producto cartesiano torcido realmente esta determinado únicamente por sus factores y la elección de involuciones. De esta manera el producto cartesiano torcido podría decir algo sobre el grupo de automorfismos de sus factores.

Finalizamos esta sección con un resultado sobre el grupo de automorfismos del producto cartesiano torcido. El producto directo del grupo de automorfismos de los factores de un producto cartesiano siempre es subgrupo del grupo de automorfismos del producto. Esto parece no ser siempre el caso para productos cartesianos torcidos. Podemos asegurar sin embargo que:

**Teorema 21.** Sean  $G_1, \dots, G_n$  gráficas y  $f_1, \dots, f_n$  involuciones de cada una de ellas. Entonces  $\times_{i=1}^n C_{\text{Aut}(G_i)}(f_i) \leq \text{Aut}(\square_{i=1}^n G_{if_i})$  (donde  $C_{\text{Aut}(G_i)}(f_i) = \{h \in \text{Aut}(G_i) | hf_i = f_i h\}$ )

*Demostración.* Consideramos la función  $\varphi$  que cada elemento  $h$  de  $\times_{i=1}^n C_{\text{Aut}(G_i)}(f_i)$ , le asigna la función  $\varphi(h) : V(\square_{i=1}^n G_{if_i}) \longrightarrow V(\square_{i=1}^n G_{if_i})$  definida como  $\varphi(h)(x)(i) = h(i)(x(i))$  para todo  $x \in V(\square_{i=1}^n G_{if_i})$ . Como  $h(i)$  es un automorfismo de  $G_i$  para cada  $1 \leq i \leq n$  y para cada  $h \in \times_{i=1}^n C_{\text{Aut}(G_i)}(f_i)$ ,  $\varphi(h)$  biyectiva. Sea  $h \in \times_{i=1}^n C_{\text{Aut}(G_i)}(f_i)$ . Ahora bien dos vértices  $x$  y  $y$  en  $V(\square_{i=1}^n G_{if_i})$  son adyacentes si y solo si existe  $1 \leq i \leq n$ , tal que  $x(i)$  es adyacente a  $y(i)$  en  $G_i$  y  $f_j(x_j) = y_j$  para todo  $j \neq i$ . Esto sucede si y solo si existe  $1 \leq i \leq n$ , tal que  $\varphi(h)(x)(i) = h(i)(x(i))$  es adyacente a  $\varphi(h)(y)(i) = h(i)(y(i))$  en  $G_i$  y

$h(j)(f_j(x_j)) = h(j)(y_j)$  para todo  $j \neq i$ . Como  $h \in \times_{i=1}^n C_{\text{Aut}(G_i)}(f_i)$  esto pasa si y solo si existe  $1 \leq i \leq n$ , tal que  $\varphi(h)(x)(i) = h(i)(x(i))$  es adyacente a  $\varphi(x)(y)(i) = h(i)(y(i))$  en  $G_i$  y  $f_j(\varphi(h)(x)(j)) = f_j(h(j)(x_j)) = h(j)(y_j) = \varphi(h)(y)(j)$  para todo  $j \neq i$ . Es decir  $\varphi(h)$  es un automorfismo de  $\square_{i=1}^n G_{i f_i}$  y por definición  $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$  para todo  $g, h \in \times_{i=1}^n C_{\text{Aut}(G_i)}(f_i)$ . Por lo que  $\varphi$  es un homomorfismo de grupos de  $\times_{i=1}^n C_{\text{Aut}(G_i)}(f_i)$  en  $\text{Aut}(\square_{i=1}^n G_{i f_i})$ . Además  $\varphi(h)$  es la identidad en  $V(\square_{i=1}^n G_{i f_i})$  si y solo si  $\varphi(h)(x)(i) = h(i)(x(i)) = x(i)$  para todo  $1 \leq i \leq n$  y todo  $x \in V(\square_{i=1}^n G_{i f_i})$ . Es decir si y solo si  $h(i)$  es la identidad restringida a  $V(G_i)$ . Por lo tanto  $h$  es la identidad restringida a  $V(\square_{i=1}^n G_{i f_i})$  y  $\varphi$  es un homomorfismo inyectivo. En consecuencia  $\times_{i=1}^n C_{\text{Aut}(G_i)}(f_i) \leq \text{Aut}(\square_{i=1}^n G_{i f_i})$   $\square$

# Capítulo 6

## Diamante Azteca

Finalizamos esta obra con un problema más sobre gráficas de rotación en este caso y divergiendo un poco sobre lo anterior, el tema principal a tratar aquí no es el número cromático sino la conexidad.

Estudiamos la gráfica de giros teselaciones con domino del diamante azteca. Dado que mucho se sabe sobre las teselaciones con domino del diamante azteca introducimos una variante al problema donde ahora los dominos están etiquetados. demostramos que esta gráfica es conexa.

### 6.1. Diamante Azteca

El Diamante Azteca de orden  $n$  ( $AD_n$ ) es la región del plano que consta de la union de todos los cuadrados de lado 1 cuyas esquinas  $(x, y)$  tienen coordena enteras y tales que  $|x| + |y| \leq n + 1$  (ver Figura 6.1). Un domino es un rectangulo de  $1 \times 2$ , cuyo lado más grande es paralelo al eje  $y$  o al eje  $x$ , en el primer caso decimos que el domino esta en posición vértical y en el segundo en posición horizontal.

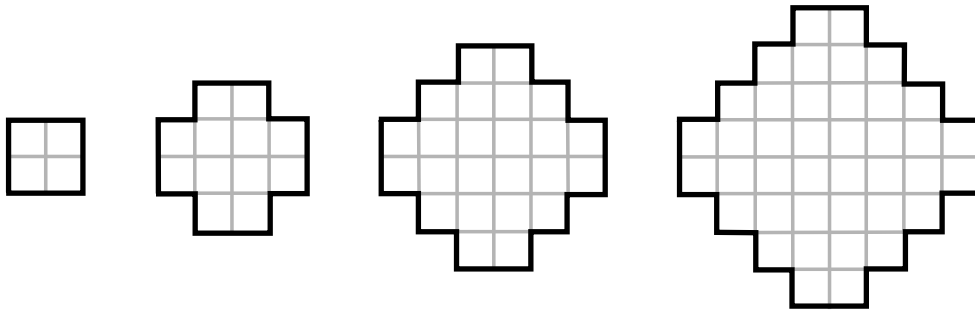


Figura 6.1: El Diamante Azteca de orden 1, 2, 3 y 4

Una teselación con dominos del Diamante Azteca de orden  $n$  es un conjunto de dominos que no se intersecan en su interior cuya unión cubre a  $AD_n$  (ver Figura 6.1).

Muchos se conoce sobre las teselaciones con dominos del Diamante Azteca. Se sabe por ejemplo que el número de teselaciones con dominos del Diamante Azteca es  $2^{n(n+1)/2}$  (ver [9]). Si dos dominos en una teselacion con dominos del Diamante Azteca comparten uno de sus lados de longitud 2, ambos están en posición vertical o bien ambos estan en posición horizontal. Un giro en una teselación con dominos es cambiar la orientación de estos dominos. Es decir si ambos se encontraban en posición horizontal, los intercambiamos por dos en posición vertical y viceversa si se encuentran en posición vertical los

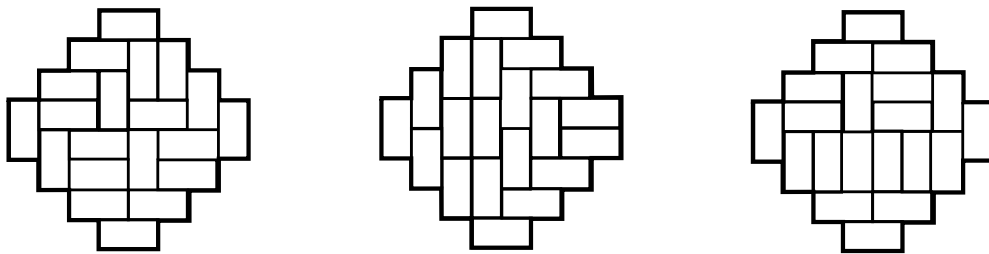


Figura 6.2: Distintas teselaciones con dominos de  $AD_4$



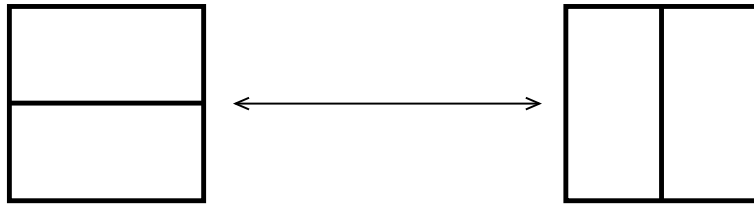


Figura 6.3: Giro en teselaciones con dominos

intercambiamos por dos dominos en posición horizontal.

Definimos con esto la gráfica  $G_{AD}(n)$  de giros de teselaciones con dominos del Diamante Azteca de orden  $n$ , como la gráfica cuyo conjunto de vértices son todas las teselaciones con dominos del  $AD(n)$ , dos de ellas adyacentes si y solo si difieren por un giro de dominos.

$G_{AD}(n)$  ha sido muy estudiada, nosotros por el momento nos concentramos en su número cromático.

## 6.2. Número cromático de $G_{AD}(n)$

Una simple observación nos permite calcular  $\chi(G_{AD}(n))$ . Sea  $D(AD_n)$  la gráfica cuyo conjunto de vértices son todos los cuadrados de  $1 \times 1$  con coordenadas enteras contenidos en  $AD(n)$  dos de ellos adyacentes si y solo si comparten un lado.

Ahora bien a cada teselación con dominos de  $AD(n)$  le podemos asociar un emparejamiento perfecto de  $D(AD_n)$  de manera de que  $G_{AD}(n) \simeq \mathcal{M}'(D(AD_n))$  (la gráfica de emparejamientos perfectos estudiada en el Capítulo 4).

En una teselación con dominos de  $AD_n$  cada domino cubre exactamente dos cuadrados adyacentes  $x, y$  en  $V(D(AD_n))$ , a dicho domino le asociamos la arista  $(x, y)$ . Como cada

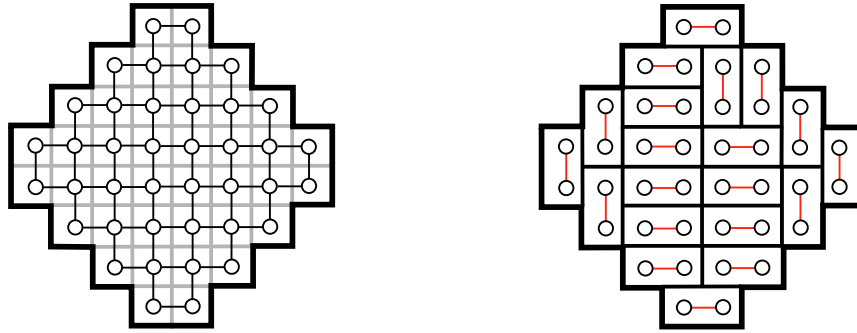


Figura 6.4:  $D(AD_4)$ , una teselación con dominos de  $AD_4$  y su emparejamiento perfecto asociado en  $D(AD_4)$

la teselación cubre todos los cuadrados en  $V(D(AD_n))$  y cada cuadrado está cubierto por exactamente un domino, la colección de aristas asociadas a los dominos de la teselación determina un emparejamiento perfecto de  $D(AD_n)$ . De manera análoga un emparejamiento perfecto de  $D(AD_n)$  determina una teselación de  $AD_n$ , tomando como teselación los dominos asociados a cada arista del emparejamiento. Además dos teselaciones con dominos de  $AD_n$  difieren por un giro si y solo si sus emparejamientos asociados difieren por un giro en  $D(AD_n)$ .

**Teorema 22.**  $\chi(G_{AD}(n)) = 2$

*Demostración.* Como  $D(AD_n)$  es bipartita,  $D(AD_n)$  es subgráfica de  $K_{m,m}$  para alguna  $m$ . Por lo tanto  $\mathcal{M}'(D(AD_n))$  es subgráfica de  $\mathcal{M}'(K_{m,m})$ . Por el Teorema 9 del Capítulo 4,  $\chi(\mathcal{M}'(K_{m,m})) = 2$  y en consecuencia  $\chi(\mathcal{M}'(D(AD_n))) = 2$ . Como  $G_{AD}(n) \simeq \mathcal{M}'(D(AD_n))$  se tiene que  $\chi(G_{AD}(n)) = 2$ .  $\square$

Consideramos ahora la variante “etiquetada” de las teselaciones con dominos del Diamante Azteca.

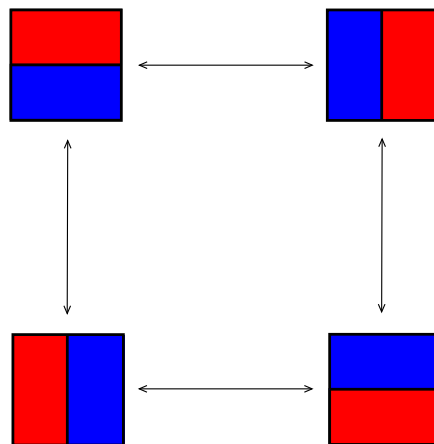


Figura 6.5: Giro en teselaciones con dominos etiquetados

### 6.3. Teselaciones con dominos etiquetados de $AD_n$

Si observamos el Diamante Azteca de orden  $n$ , vemos que el número de cuadrados de  $1 \times 1$  que lo conforman (aquellos con sus esquinas con coordenadas enteras) en orden de arriba abajo son  $2, 4, 6, \dots, 2n, 2n, 2(n-1), \dots, 2$ . Es decir  $2 \sum_{i=1}^n 2i = 4 \sum_{i=1}^n i = 4 \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = 2n(n+1)$ . Como cada domino cubre exactamente dos cuadrados toda teselación tiene exactamente  $n(n+1)$  dominos.

Consideramos ahora teselaciones “etiquetadas”, donde ahora todos los dominos de la teselación tienen una etiqueta o color distintos y son distinguibles uno de otro, distinguimos entre dos teselaciones con dominos etiquetados con la misma teselación subyacente pero distinta etiquetación. Formalmente una teselación con dominos etiquetados de  $AD_n$  es un par ordenado  $(\mathcal{T}, f)$ , donde  $\mathcal{T}$  es una teselación con dominos de  $AD_n$  y  $f$  es una función biyectiva de  $\mathcal{T}$  a  $\{1, 2, \dots, n(n+1)\}$ . Dos teselaciones etiquetadas  $(\mathcal{T}, f)$  y  $(\mathcal{T}', f')$  difieren por un giro si  $\mathcal{T}'$  se obtiene de  $\mathcal{T}$  al girar dos dominos  $d_1, d_2$  por  $d'_1, d'_2$ ,  $f$  y  $f'$  coinciden en todos los dominos distintos de  $d_1, d_2, d'_1$  y  $d'_2$ , además  $f'(d'_1) = f(d_1)$  y  $f'(d'_2) = f(d_2)$  o

bien  $f'(d'_1) = f(d_2)$  y  $f'(d'_2) = f(d_1)$ .

Definimos la gráfica  $LG_{AD}(n)$  de rotaciones de las teselaciones con dominos etiquetados del Diamante Azteca de orden  $n$  como la gráfica cuyo conjunto de vértices son todas las teselaciones con dominos etiquetados de  $AD_n$  y dos de ellas son adyacentes si y solo si difieren por un giro.

Hasta donde tenemos conocimiento esta variante del problema no ha sido estudiada con anterioridad.

Como la función que a cada vértice  $(\mathcal{T}, f) \in V(LG_{AD}(n))$  lo manda en  $\mathcal{T}$  es un homomorfismo de gráficas de  $LG_{AD}(n)$  en  $G_{AD}(n)$ , el número cromático de  $LG_{AD}(n)$  es a lo más el número cromático de  $G_{AD}(n)$  que es 2. Como además existe al menos una arista en  $E(LG_{AD}(n))$ ,  $\chi(LG_{AD}(n)) = 2$ .

El último problema que tratamos en esta obra es el de la conexidad de  $LG_{AD}(n)$ .

## 6.4. Conexidad de $LG_{AD}(n)$

Para probar la conexidad de  $LG_{AD}(n)$  necesitamos primero un resultado (ver [35]) que enunciamos en forma de lema:

**Lema 5.**  $G_{AD}(n)$  es conexa para todo entero positivo  $n$ .

□

A la teselación con dominos de  $AD_n$  con todos sus dominos en posición horizontal, la llamamos la teselación horizontal con dominos de  $AD_n$ . Concentraremos por el momento nuestra atención en esta teselación. La posición de los dominos nos permite hablar de renglones de dominos, diremos de esta manera que de arriba abajo, los dominos se encuentran en el renglón  $n, n-1, \dots, 1, -1, -2, \dots, -n$  respectivamente.

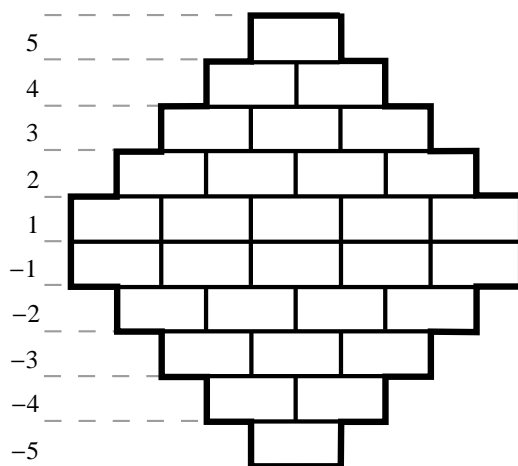


Figura 6.6: La teselación horizontal con dominos de  $AD_5$  y sus renglones correspondientes

**Lema 6.** Desde la teselación horizontal con dominos de  $AD_n$ , para todo  $1 \geq i \geq n$  se pueden poner por medio de giros, a los dominos en los renglones  $i, i-1, \dots, 1, -1, \dots, -(i-1)$ ,  $i$  en posición vertical, sin girar los dominos en los renglones restantes (es decir en los renglones  $i+1, i+2, \dots, n$  y  $-(i+1), -(i+2), \dots, n$ ).

*Demostración.* Partiendo de la teselación horizontal de  $AD_n$ , claramente se pueden poner los dominos en los renglones 1 y -1 en posición vertical sin girar los dominos en los renglones restantes. Inductivamente supongamos que se pueden poner en posición vertical los dominos en los renglones  $i, i-1, \dots, 1, -1, \dots, -(i-1), -i$  sin mover los dominos en los renglones restantes. Poniendo los dominos en dicha posición tenemos que abajo de cada domino en el renglón  $i+1$  se encuentra una columna de dominos de 2 en 2 en posición vertical hasta llegar al correspondiente domino en el renglón  $-(i+1)$ . Girando los dominos en esa columna podemos ponerlos a todos los dominos en posición vertical, desde el primer domino en el renglón  $i+1$  hasta el correspondiente domino en el renglón  $-(i+1)$ . Haciendo esto para cada domino en el renglón  $i+1$ , logramos colocar todos los dominos

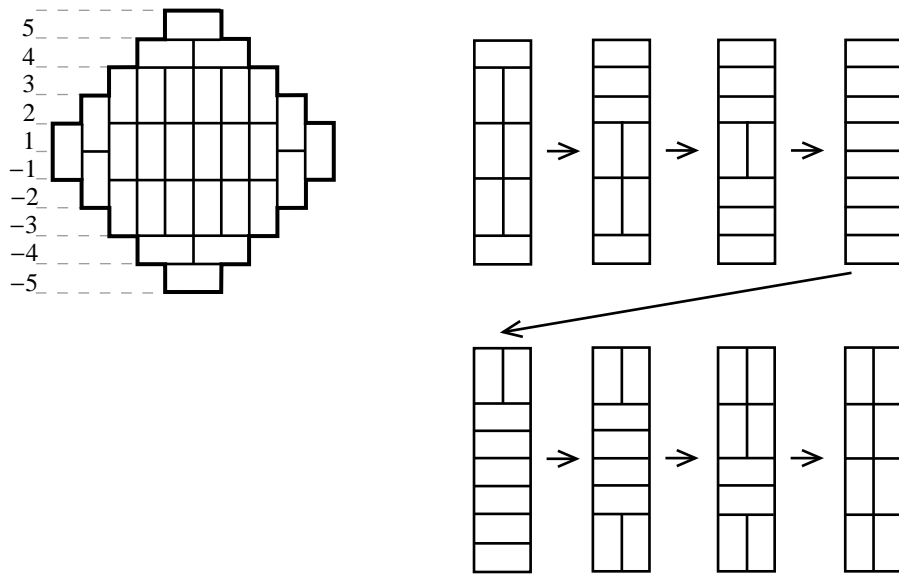


Figura 6.7: Ilustración del paso inductivo del Lema 6 en  $AD_5$

en los renglones  $i + 1, i, \dots, 1, -1, \dots, -i, -(i + 1)$  en posición vertical sin haber girado los dominos en los renglones restantes.  $\square$

A las teselaciones con dominos etiquetadas  $(\mathcal{T}, f)$  de  $AD_n$  donde  $\mathcal{T}$  sea la teselación horizontal de  $AD_n$ , las denominamos genéricamente como teselaciones horizontales con dominos etiquetadas de  $AD_n$ .

**Lema 7.** *Dada una teselación horizontal con dominos etiquetados  $(\mathcal{T}, f)$  de  $AD_n$  y 2 dominos  $d_1$  y  $d_2$  consecutivos (es decir que comparten un lado) en el renglon  $i$  se puede llegar por medio de giros a la teselación horizontal con dominos etiquetados  $(\mathcal{T}, f')$ . Donde  $f$  coincide con  $f'$  en todos sus valores salvo en  $d_1$  y  $d_2$  donde se tiene que  $f(d_1) = f'(d_2)$  y  $f(d_2) = f'(d_1)$ .*

*Demostración.* Supongamos sin pérdida de generalidad que  $d_1$  se encuentra a la izquierda de  $d_2$  en  $\mathcal{T}$ . Por medio de giros podemos llegar de  $\mathcal{T}$  a la teselación descrita en el Lema

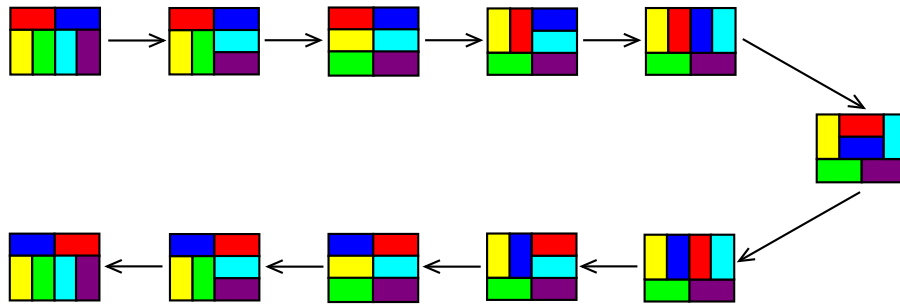


Figura 6.8: Intercambio de etiquetas en el Lema 7

6, donde todos los dominos entre el renglón  $i - 1$  y  $-(i - 1)$  están en posición vertical, sin haber girado los dominos restantes. Haciendo estos giros en la teselación con dominos etiquetados  $(\mathcal{T}, f)$  llegamos a una teselación con dominos etiquetados  $(\mathcal{T}_1, f_1)$  de  $AD_n$ , con la propiedad de que  $f_1$  coincide con  $f$  en todos los dominos que  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}_1$  tienen en común (aquellos en posición horizontal). Acto seguido es posible ir por medio de giros de  $(\mathcal{T}_1, f_1)$  a una teselación con dominos etiquetados  $(\mathcal{T}_1, f_2)$  con la propiedad de que  $f_1$  y  $f_2$  coinciden en todos sus valores salvo en  $d_1$  y  $d_2$  donde se tiene que  $f_1(d_1) = f_2(d_2)$  y  $f_1(d_2) = f_2(d_1)$ . Como  $(\mathcal{T}_1, f_2)$  es esencialmente  $(\mathcal{T}_1, f_1)$  con las etiquetas de  $d_1$  y  $d_2$  intercambiadas, deshaciendo en orden inverso exactamente los mismos giros que hicimos para llegar de  $(\mathcal{T}, f)$  a  $(\mathcal{T}_1, f_1)$  llegamos a una teselación con dominos etiquetados  $(\mathcal{T}, f')$  de  $AD_n$ , tal que  $f$  y  $f'$  coinciden en todos sus valores salvo en  $d_1$  y  $d_2$  donde se tiene que  $f(d_1) = f'(d_2)$  y  $f(d_2) = f'(d_1)$ .  $\square$

**Lema 8.** Desde una teselación horizontal con dominos etiquetados  $(\mathcal{T}, f)$  de  $AD_n$  y 2 dominos  $d_1$  y  $d_2$  uno justo encima del otro (es decir uno en el renglón  $i$  y el otro en el  $i + 1$  y tales se interseca en uno de sus lados), se puede llegar por medio de giros a la teselación horizontal con dominos etiquetados  $(\mathcal{T}, f')$ . Donde  $f$  coincide con  $f'$  en todos sus valores salvo en  $d_1$  y  $d_2$  donde se tiene que  $f(d_1) = f'(d_2)$  y  $f(d_2) = f'(d_1)$ .

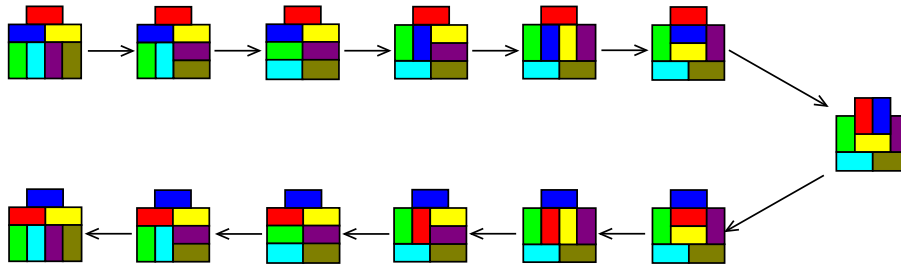


Figura 6.9: Intercambio de etiquetas en el Lema 8

*Demostración.* Supongamos sin pérdida de generalidad que  $d_1$  se encuentra en el renglón  $i + 1$  y  $d_2$  justo debajo y a la izquierda de  $d_1$  en el renglón  $i$ . Siguiendo la misma técnica que en el Lema 7, ponemos a todos los dominos entre los renglones  $i - 1$  y  $-(i - 1)$  en posición vertical. Con giros es posible llegar a la misma teselación con dominos salvo que las etiquetas de  $d_1$  y  $d_2$  están intercambiadas. Deshaciendo todos los giros que hicimos en un principio llegamos a una teselación  $(\mathcal{T}, f')$  tal que  $f$  coincide en todos sus valores con  $f'$  salvo en  $d_1$  y  $d_2$  donde se tiene que  $f(d_1) = f'(d_2)$  y  $f(d_2) = f'(d_1)$ .  $\square$

**Teorema 23.** *Para todo entero positivo  $n$ , la subgráfica de  $LG_{AD}(n)$  inducida por todas las teselaciones horizontales con dominos etiquetados de  $AD_n$  es conexa.*

*Demostración.* Sean  $(\mathcal{T}, f)$  y  $(\mathcal{T}, f')$  teselaciones horizontales con dominos etiquetados de  $AD_n$ . Por los Lemas 7 y 8 basta con que dos dominos se toquen para poder intercambiar por medio de giros sus etiquetas. Por lo tanto podemos llevar a  $(\mathcal{T}, f')$  a  $(\mathcal{T}, f)$  por medio de giros empezando por el domino en el renglón  $-n$  por medio de intercambio de giros llegamos a que tenga la etiqueta que tiene en  $(\mathcal{T}, f)$ , después seguimos con el domino el primer domino de izquierda del renglón  $n - 1$ , seguido del domino del segundo de izquierda a derecha en el renglón  $n - 1$ . Así sucesivamente manteniendo la invariante de que la parte que nos falta por procesar es conexa, en el sentido de que cualesquiera dos dominos están



conectados por una secuencia de dominos se tocan en alguno de sus lados.  $\square$

**Corolario 5.**  $LG_{AD}(n)$  es conexa para todo entero positivo  $n$ .

*Demostración.* Sean  $(\mathcal{T}_1, f_1), (\mathcal{T}_2, f_2) \in V(LG_{AD}(n))$ , por el Lema 5 se puede mediante giros ir de  $(\mathcal{T}_1, f_1)$  a  $(\mathcal{T}, f'_1)$  y de  $(\mathcal{T}_2, f_2)$  a  $(\mathcal{T}, f'_2)$  donde  $\mathcal{T}$  es la teselación horizontal de  $AD_n$ . Por el Teorema 23 existe una secuencia de giros que lleva  $(\mathcal{T}, f'_1)$  a  $(\mathcal{T}, f'_2)$  Por lo tanto se puede llevar a  $(\mathcal{T}_1, f_1)$  mediante giros a  $(\mathcal{T}_2, f_2)$   $\square$

## 6.5. Conclusiones y trabajos futuros

Se pueden considerar objetos más generales para teselaciones con dominos. Por ejemplo se puede hablar de teselaciones con dominos de polígonos ortogonales simples. Consideramos ahora polígonos simples en el plano con lados paralelos al eje  $X$  o  $Y$  y cuyos extremos esquinas tienen coordenadas enteras. Una teselación con dominos de un polígono ortogonal  $P$  es una colección de dominos cuya unión cubre a  $P$  de manera de que los dominos no se intersecan en su interior.

Se sabe que teselaciones con dominos de estos polígonos están conectadas por giros [35], de hecho basta con que la región sea simplemente conexa para que sus teselaciones con dominos estén conectadas por giros.

Un problema natural sería el estudiar la conexidad de teselaciones con dominos etiquetados de estos polígonos. Es fácil construir ejemplos de polígonos ortogonales tales que sus teselaciones con dominos etiquetadas no estén conectadas por giros. Por ejemplo el rectángulo de  $1 \times 4$  se puede teselar con dominos y de hecho de manera única, pero tiene dos teselaciones con dominos etiquetados no adyacentes

Incluso en el caso cuando se tienen más grados de libertad es posible que las teselaciones con dominos etiquetados no estén conectadas por giros (ver Figura 6.5).



Figura 6.10: Polígono ortogonal y dos de sus teselaciones con dominos etiquetados, no conectadas por giros

El problema a resolver aquí sería el dar condiciones necesarias y/o suficientes para que las teselaciones con dominos etiquetados esten conectadas por giros.

Finalmente quedan por determinar muchas de las propiedades como gráfica de  $LG_{AD}(n)$  como sería diámetro y hamiltonicidad.

Con estas consideraciones terminamos este Capítulo y con el la obra.

# Capítulo 7

## Notación

En este apéndice damos algunos los conceptos y notación que usamos en la tesis.

### 7.1. Teoría de gráficas

Una *gráfica*  $G$  es un par ordenado de conjuntos  $(V(G), E(G))$ , donde  $V(G)$  es un conjunto finito que llamamos *vértices* y  $E(G) \subset \{\{x, y\} | x, y \in V(G) \text{ y } x \neq y\}$ , que llamamos *aristas*. Dos vértices  $x, y \in V(G)$  son *adyacentes* si y solo si  $e = \{x, y\} \in E(G)$  y decimos que la arista  $e$  *incide* en  $x$  y  $y$ .

El *grado*  $d_G(x)$  de un vértice  $x$  en  $G$  es el número de aristas que inciden en  $x$ . El mínimo sobre todos los grados de los vértices de  $G$  se denota como  $\delta(G)$  y el máximo como  $\Delta(G)$ . En particular si todos los vértices de  $G$  tienen el mismo grado la gráfica se llama es *regular* y si en particular todos su vértices el mismo grado  $r$  la gráfica se dice que es  *$r$ -regular*.

Un *camino* en  $G$  es una sucesión finita  $C = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  de vértices de  $G$ , donde  $x_i$  es adyacente a  $x_{i+1}$  para todo  $1 \leq i < k$ . En esta caso decimos que  $C$  es un camino de  $x$  a  $y$  de longitud  $k$ . Si para cualesquiera par de vértices de  $G$  existe un camino que los une decimos

que  $G$  es *conexa*, en caso contrario que es *disconexa*. Las trayectorias nos permiten definir una distancia en gráficas conexas como sigue: La *distancia* entre dos vértices  $x$  y  $y$  en  $G$  es la longitud mínima entre todas las trayectorias de  $x$  a  $y$ . El *diámetro* de  $G$  es la máxima distancia entre cualesquiera par de vértices en  $G$ .

Una *trayectoria* es un camino que no repite vértices y un *ciclo* es un camino donde el primer y último vértice coinciden y además de estos vértices (el primero y el último) son los únicos vértices que se repiten a lo largo del camino. Una *trayectoria hamiltoniana* es una trayectoria que pasa por todos los vértices de  $G$ , análogamente un *ciclo hamiltoniano* es un ciclo que pasa por todos los vértices de  $G$ .

Un *árbol* es una gráfica conexa sin ciclos.

Un *emparejamiento*  $M$  de  $G$  es un subconjunto de  $E(G)$  tal que sobre todos los vértices de  $G$  incide a lo más una arista en  $M$ . El emparejamiento es perfecto si sobre todo vértice de  $G$  incide exactamente una arista en  $M$ .

Decimos que una gráfica  $H$  es *subgráfica* de una gráfica  $G$  si  $V(H) \subset V(G)$  y  $E(H) \subset E(G)$ . Dado un conjunto  $S \subset V(G)$ , se define la *gráfica inducida* por  $S$  como la subgráfica de  $G$  con conjunto de vértices  $S$  y tal que contiene todas las aristas que unen vértices de  $S$  en  $G$ .

A la gráfica con  $n$  vértices tal que cualquier par de vértices son adyacentes, la llamamos sin pérdida de generalidad, la *gráfica completa* con  $n$  vértices y la denotamos con  $K_n$ .

La gráfica cuyo conjunto de vértices esta particionada en  $k$  conjuntos de tamaño  $r_1, \dots, r_k$  respectivamente y que contiene todas las aristas que unen dos vértices en distintos elementos de la partición y solo dichas aristas, la denotamos como  $K_{r_1, \dots, r_k}$ .

A la gráfica de  $n$  vértices que contiene una trayectoria de longitud  $n$  y solo las aristas sobre esta trayectoria, la denotamos como  $P_n$ .

Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas. Una función  $f : V(G) \longrightarrow V(H)$  es un *homomorfismo* de  $G$  en

$H$ , si  $x$  adyacente a  $y$  en  $G$  implica  $f(x)$  adyacente a  $f(y)$  en  $H$ . Un *isomorfismo* entre  $G$  y  $H$  es un homomorfismo biyectivo entre  $G$  y  $H$  tal que  $f^{-1}$  es un homomorfismo de  $H$  en  $G$ .

Un isomorfismo de  $G$  en  $G$  se le conoce como automorfismo de  $G$ , el conjunto de todos los automorfismos de  $G$ , forma un grupo bajo la composición de funciones, denotamos a dicho grupo como  $\text{Aut}(G)$ .

### 7.1.1. Número cromático

Una *coloración* con  $k$  colores de una gráfica  $G$  es una función  $\text{col}_G$  de  $V(G)$  a un conjunto de tamaño  $k$ . Una *coloración propia* de  $G$  es una coloración de  $G$  con la propiedad de que vértices adyacentes reciben colores distintos. Si  $G$  admite una coloración propia con  $r$  colores decimos que  $G$  es  *$r$ -cromática*.

El *número cromático*  $\chi(G)$  de  $G$  es el mínimo entero tal que existe una coloración propia de  $G$  con ese número de colores.

Hay una relación natural entre homomorfismos y número cromático, pues una coloración propia  $\text{col}_G$  con  $n$  colores de  $G$  induce un homomorfismo de  $G$  en  $K_n$ . Consideramos la gráfica completa  $K_n$  con conjunto de vértices precisamente los  $n$  colores usados por  $\text{col}_G$ ,  $\text{col}_G$  es un homomorfismo de  $G$  en  $K_n$  pues dados dos vértices adyacentes en  $G$  reciben colores distintos y por lo tanto sus imágenes son vértices distintos y adyacentes en  $K_n$ . De esta manera también se puede definir el número cromático como el mínimo entero  $\chi(G)$  tal que existe un homomorfismo de  $G$  en  $K_{\chi(G)}$ . Como la composición de homomorfismos es un homomorfismo (siempre que la imagen del primero coincida con el dominio del segundo) dadas dos gráficas  $G$  y  $H$ , tales que exista un homomorfismo de  $G$  en  $H$ , se sigue que  $\chi(G) \leq \chi(H)$ . De la misma manera si  $H$  es subgráfica de  $G$ , la identidad restringida a  $V(H)$ , es un homomorfismo de  $H$  en  $G$ , por lo que  $\chi(H) \leq \chi(G)$ .

Finalmente enunciamos sin demostración un resultado clásico [3] sobre números cromáticos.

**Teorema 24. (R.L. Brooks)** *Si  $G$  es una gráfica conexa, distinta de un ciclo de longitud impar o una gráfica completa entonces  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .*

□

Para una discusión a profundidad de estos temas véase [16],[1],[7]).

## 7.2. Conjuntos de puntos

Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  se dice que es *convexo*, si para cualquiera par de puntos en  $A$ , el segmento de recta que los une esta enteramente contenido en  $A$ .

Dado  $S \subset \mathbb{R}^n$ , definimos la *cerradura convexa* de  $S$  ( $\text{Conv}(S)$ ), como la intersección de todos los conjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$  que contienen a  $S$ . Dicho conjunto resulta ser el menor conjunto convexo (por contención) que contiene a  $S$ . A la frontera de  $\text{Conv}(S)$ , la llamamos el *casquete convexo* de  $S$ .

Un conjunto finito de puntos  $S \subset \mathbb{R}^n$  esta en *posición convexa*, si  $S$  esta contenido en su casquete convexo. Si para cuales quiera 3 puntos en  $S$  no hay una recta que pase por los tres, decimos que  $S$  esta en *posición general*.

# Bibliografía

- [1] Béla Bollobás. *Modern Graph Theory*. Springer Verlag, 1998.
- [2] Prosenjit Bose and Ferran Hurtado. Flips in planar graphs. Technical report, Carleton University - School of Computer Science, 2006.
- [3] R. L. Brooks. On coloring the nodes of a network. In *Cambridge Philos Soc.*, volume 37, pages 194–197, 1941.
- [4] Peter J. Cameron. *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*. Cambridge University Press, 1994.
- [5] C.Hernando, F.Hurtado, and M.Noy. Graphs of non-crossing perfect matchings. *Graphs and Combinatorics*, 18:517–532, 2002.
- [6] R.L. Cummings. Hamilton circuits in tree graphs. *IEEE Trans. Circuit Theory*, 13:82–90, 1966.
- [7] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Springer Verlag, second edition, 2000.
- [8] D.Naddef and W.R. Pulleyblank. Hamiltonicity and combinatorial polyhedra. *J. Comb. Theory, Ser B*, 31:297–312, 1981.

- 
- [9] N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, and J. Propp. Alternating-sign matrices and domino tilings (part i). *J. Algebraic Combinatorics*, 1:111–132, 1992.
- [10] V. Estivill-Castro, M.Noy, and J.Urrutia. On the chromatic number of tree graphs. *Discrete Mathematics*, 223:363–366, August 2000.
- [11] F.Hurtado and M.Noy. Graph of triangulations of convex polygon and tree of triangulations. *Computational Geometry*, 13:179–188, 1999.
- [12] F.Hurtado, M.Noy, and J.Urrutia. Flipping edges in triangulations. *Discrete and Computational Geometry*, 22:333–346, 1999.
- [13] Zhang F.J. and Chen Z. Connectivity of (adjacency) tree graphs. *J. Xinjiang Univ. Nat. Sci.*, 3:1–5, 1986.
- [14] Z. Gao, J. Urrutia, and J. Wang. Diagonal flips in labelled planar triangulations. *Graphs Combin.*, 17(4):647–657, 2001.
- [15] Chris Godsil and Gordon Royle. *Algebraic Graph Theory*. Graduate Text in Mathematics. Springer Verlag, 2001.
- [16] Frank Harary. *Graph Theory*. Perseus Books, 1969.
- [17] Broersma H.J. and Li. X. The connectivity of the leaf-exchange spanning tree graph of a graph. *Ars Combinatorica*, 43:225–231, 1996.
- [18] C.A. Holtzman and F. Harary. On the tree graph of a matroid. *SIAM J. Appl. Math.*, 22:187–193, 1972.
- [19] D. J. Jacobs and M. F. Thorpe. Generic rigidity percolation:the pebble game. *Phys. Rev. Lett.*, 75(22):4051–4054, 1995.



- [20] Hong Jia-Wei and H. T. King. I/o complexity: The red-blue pebble game. In *STOC '81: Proceedings of the thirteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 326–333, New York, NY, USA, 1981. ACM Press.
- [21] Donald J. Jacobs and Bruce Hendrickson. An algorithm for two-dimensional rigidity percolation: the pebble game. *Journal of Computational Physics*, 137:346–365, 1997.
- [22] J. Lucas. The rotation graph of binary trees is hamiltonian. *J. Algorithms*, 8:503–535, 1988.
- [23] A. Johansson. Asymptotic choice number for triangle free graphs. Technical report, DIMACS, 1996.
- [24] T. Kasai, A. Adachi, and S. Iwata. Classes of pebble games and complete problems. In *ACM '78: Proceedings of the 1978 annual conference*, pages 914–918, New York, NY, USA, 1978. ACM Press.
- [25] A. J. Kfoury and A. P. Stolboushkin. An infinite pebble game and applications. Technical report, Boston, MA, USA, 1996.
- [26] C. Lawson. Transforming triangulations. *Discrete Mathematics*, 3:35–372, 1972.
- [27] C. Lawson. *Mathematical Software III*, chapter Software for  $C_1$  surface interpolation, pages 161–194. Academic Press, 1977.
- [28] G.Z. Liu. Paths between vertices in a tree graph. *System Science and Math. Science*, 5:453–459, 1992.
- [29] L. Lovász and M.D. Plummer. *Matching Theory*. North-Holland, 1986.

- 
- [30] Joan M. Lucas, Dominique Roelants van Baronaigien, and Frank Ruskey. On rotations and the generation of binary trees. *J. Algorithms*, 15(3):343–366, 1993.
- [31] M.C.Hernando, F.Hurtado, A.Marquez, M.Mora, and M.Noy. Geometric tree graphs of points in convex position. *Discrete Applied Mathematics*, 93:51–66, 1999.
- [32] P. Ming Li Vitanyi. Reversible simulation of irreversible computation. In *Computational Complexity, 1996., Eleventh Annual IEEE Conference*, pages 301–306, 1996.
- [33] R. Mori, A.Ñakamoto, and K. Ota. Diagonal flips in hamiltonian triangulations on the sphere. *Graphs Combin*, 19(3):413–418, 2003.
- [34] G. Sabidussi. Graphs with given group and graph-theoretical properties. *Canad. J. Math.*, 9:515–525, 1957.
- [35] Saldanha, Tomei, Casarin, and Romualdo. Spaces of domino tilings. *GEOMETRY: Discrete & Computational Geometry*, 14, 1995.
- [36] D.D. Sleator and W.P. Thurston R.E: Tarjan. Rotations distance, triangulations, and hyperbolic geometry. *J. Amer Math Soc*, 1:647–682, 1988.
- [37] K. Wagner. Bemerkung zum vierfarbenproblem. *Jber. Deutsch. Math.-Verein*, pages 26–32, 1936.
- [38] Sandi Klavžar. Coloring graph products-a survey. *Discrete Mathematics*, 155:135–145, 1996.