



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

---

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**“APLICACIONES DE MODELOS EN EL ESTUDIO  
DEL COMPORTAMIENTO DE PRODUCCIÓN POR  
SEGREGACIÓN GRAVITACIONAL, DE  
YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS”**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**INGENIERO PETROLERO**

PRESENTA:

**HUGO CARRILLO CERVANTES**



**DIRECTOR: DR. RAFAEL RODRIGUEZ NIETO**

CIUDAD UNIVERSITARIA. MÉXICO, D. F. ENERO DEL 2007



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIRECCIÓN  
60-I-1319

**SR. HUGO CARRILLO CERVANTES**  
**Presente**

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor Dr. Rafael Rodríguez Nieto y que aprobó esta Dirección para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de Ingeniero Petrolero:

**APLICACIONES DE MODELOS EN EL ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE PRODUCCIÓN POR SEGREGACIÓN GRAVITACIONAL, DE YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS**

- INTRODUCCIÓN**
- I REVISIÓN DE LA LITERATURA Y ESTADO ACTUAL DE LA TECNOLOGÍA**
  - II PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN**
  - III APLICACIÓN DE MODELOS DE YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS PARA CALCULAR EL COMPORTAMIENTO DE PRODUCCIÓN DE ACEITE, CONSIDERANDO EFECTOS GRAVITACIONALES Y VARIACIONES DISCRETAS Y CONTINUAS DE LOS TAMAÑOS DE LOS BLOQUES**
  - IV CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**
- NOMENCLATURA**  
**REFERENCIAS**

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo, le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

Atentamente

**"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"**

Cd. Universitaria, D. F., a 9 de diciembre de 2004

EL DIRECTOR

**M. en C. GERARDO FERRANDO BRAVO**

GFB/JAGC\*gtg

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



## FACULTAD DE INGENIERÍA

### DIVISIÓN DE INGENIERÍA EN CIENCIAS DE LA TIERRA

#### "APLICACIONES DE MODELOS EN EL ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE PRODUCCIÓN POR SEGREGACIÓN GRAVITACIONAL, DE YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS"

TESIS PRESENTADA POR: HUGO CARRILLO CERVANTES

DIRIGIDA POR: DR. RAFAEL RODRÍGUEZ NIETO

#### JURADO DEL EXAMEN PROFESIONAL

PRESIDENTE: ING. MANUEL VILLAMAR VIGUERAS

VOCAL: DR. RAFAEL RODRÍGUEZ NIETO

SECRETARIO: M. en I. MARIO BECERRA ZEPEDA

1er SUPLENTE: ING. MARTÍN C. VELÁZQUEZ FRANCO

2do SUPLENTE: M. en I. JOSÉ M. REYES AGUIRRE

***Este trabajo es con dedicatoria para mis  
Padres: Francisco y Guadalupe.***

## **AGRADECIMIENTOS**

*Gracias siempre te daré **Díos**, por permitirme llegar hasta este momento tan importante de mi vida, con todas las personas que tanto quiero; y recordando además a los que nos han dejado (mis abuelos **Arnulfo** y **Agapita, Juan** y **Juana**).*

*A mi fuerza de voluntad, por qué, por más grandes que fueron los obstáculos no desistí; y si caí, me levante para seguir andando.*

*A mi Padre: **Francisco Carrillo Zarraga**, por ser mi padre y proporcionarme los medios necesarios para desarrollarme a lo largo de este camino; en el cual, cuando más te he necesitado me haz dado la mano. Admiro tu fortaleza que has manifestado en los momentos más difíciles que hemos vivido y por eso, hoy como cuando era un niño sigues siendo mi “héroe”. Te quiero mucho.*

*A ti Madre: **Ma. Guadalupe Cervantes Ramírez**, por darme la vida, cuidarme y guiarme por el buen camino en el cual hemos compartido bellos momentos. El oír tu voz, saber que estas bien, es alivio para mi alma. Te quiero.*

*A mis hermanos: **Francisco, Eduardo, Juan, Cecilia, Heriberto, Oscar, Gabriel** y **Martín**, por ser un pedacito de mi, por haber compartido una niñez llena de ilusiones y alegría, una juventud con el deseo de prosperar y ahora tratando de mejorar. Los quiero*

*A la **Dra. Cecilia Carrillo** por darnos el ejemplo de perseverancia y esfuerzo.*

A ustedes **Francisco, Eduardo y Heriberto**, como un reconocimiento a su esfuerzo por buscar nuevos caminos por sobresalir en tierras lejanas; y por no perder la fe en mí, por lo que hago. Gracias.

A mí querida Esposa: **Ma. Celia Vargas M.**, por unir tu vida a la mía y hacer una sola, por los bellos momentos que hemos vivido y por tu apoyo y presencia en los momentos más difíciles. Por darme la dicha de ser padre. Te amo.

A mis hijos: **J. Christian y Sebastian**, por llenar mi vida de alegría, de sueños y sorpresas. Me supero por ustedes.

A mis sobrinos: **Cecy, Panchito, Alondra, Junior, Bryan, Alan, Berverly y Jimena**, por ser parte importante en la familia.

A mis Tíos: **Fray. Teofilo, Josefina, Rufina, Roberto, Merced, Rogelio, Dolores, Artemio, Rafael, y Auxilio**, por sus buenos consejos y por su cariño.

A ti **Fray. Teofilo**, como un reconocimiento a tus 50 aniversario de sacerdocio y por ser un pilar para la Familia. Siempre te llevo presente.

A todas aquellas personas que de alguna manera conocí a lo largo de la carrera y me brindaron su amistad, y aquellas que me ayudaron para la realización de este trabajo: **Roberto Pérez, Pedro Javier, Mario Lira, Mario Coloha, Martín Muñoz, Miguel A. González, Ricardo Hernández, Juan Campos, Gerardo Negrete.**

*A ti **Salvador Bermúdez H.**, por que los amigos se cuentan con los dedos de las manos y yo cuento contigo.*

*A la Familia **Vargas Mendoza**, por demostrarme su cariño y afecto, por sus consejos y detalles.*

*Al **Dr. Rafael Rodríguez Nieto**, por qué sin él, la realización de este trabajo no hubiera sido posible, por su paciencia, dedicación, por sus consejos, por su trato humano, su tiempo, por sus conocimientos, por ser una persona integra. Mi admiración y respetos para usted.*

*Al **Ing. Manuel Villamar**, por sus consejos y amistad.*

*A los Sinodales, por su tiempo y dedicación a este trabajo:*

*- **Ing. Manuel Villamar Viguera***

*- **Dr. Rafael Rodríguez Nieto***

*- **M. en I. Mario Becerra Zepeda***

*- **Ing. Martín Carlos Velásquez Franco***

*- **M. en C. Manuel Reyes Aguirre***

*A la Universidad Nacional Autónoma de México, por haberme recibido en su seno, en la Facultad de Ingeniería y darme los conocimientos necesarios para culminar con la Licenciatura. Gracias*

---

---

***APLICACIONES DE MODELOS EN EL ESTUDIO  
DEL COMPORTAMIENTO DE PRODUCCIÓN POR  
SEGREGACIÓN GRAVITACIONAL, DE  
YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS***

	Página
<b>RESUMEN</b>	1
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	2
<b>LISTA DE TABLAS</b>	5
<b>INTRODUCCIÓN</b>	7
<b>CAPÍTULO I</b>	
<b><i>REVISIÓN DE LA LITERATURA Y ESTADO ACTUAL DE LA TECNOLOGÍA</i></b>	9
I.1 DISCUSIÓN DE LOS TRABAJOS SOBRE EL TEMA	9
I.2 ESTADO ACTUAL DE LA TECNOLOGÍA	31
<b>CAPÍTULO II</b>	
<b><i>PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN</i></b>	33

---

## CAPÍTULO III

<b><i>APLICACIÓN DE MODELOS DE YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS PARA CALCULAR EL COMPORTAMIENTO DE PRODUCCIÓN DE ACEITE, CONSIDERANDO EFECTOS GRAVITACIONALES Y VARIACIONES DISCRETAS Y CONTINUAS DE LOS TAMAÑOS DE LOS BLOQUES</i></b>	35
III.1 ESTABLECIMIENTO DE LOS MODELOS	35
III.2 DISTRIBUCIÓN LINEAL	38
III.2.1 <b>Distribución Lineal Discreta</b>	40
III.2.2 <b>Distribución Lineal Continua</b>	40
III.3 DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL	40
III.3.1 <b>Distribución Exponencial Discreta</b>	43
III.3.2 <b>Distribución Exponencial Continua</b>	43
III.4 RESULTADOS	43
III.4.1 <b>Procedimiento de Cálculo y Ejemplo de Aplicación (hipotético)</b>	43
III.4.1.1 Distribución Lineal Discreta	44
III.4.1.2 Distribución Lineal Continua	57
III.4.1.3 Distribución Exponencial Discreta	60
III.4.1.4 Distribución Exponencial Continua	62



<b>III.4.2 Caso Cantarell</b>	<b>65</b>
III.4.2.1 Distribución Lineal Discreta	66
III.4.2.2 Distribución Lineal Continua	73
III.4.2.3 Distribución Exponencial Discreta	77
III.4.2.4 Distribución Exponencial Continua	77
<b>CAPÍTULO IV</b>	
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>82</b>
<b>NOMENCLATURA</b>	<b>86</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>91</b>
<b>APENDICE</b>	<b>95</b>

**RESUMEN**

Se presentan aplicaciones de modelos existentes, con los que se calcula el gasto de aceite a un tiempo dado, por ejemplo al principio de la explotación, así como el comportamiento de la recuperación de aceite en función del tiempo, de yacimientos naturalmente fracturados, tomando en cuenta los efectos de segregación gravitacional y la variación del tamaño de los bloques, incluyendo los casos de distribuciones discretas y continuas. El procedimiento se ilustra con ejemplos de aplicación hipotéticos, para facilitar la comprensión de los conceptos involucrados, con apoyo de programas de cómputo para cada modelo matemático que se presenta.

Con base en la información publicada del Yacimiento Akal del Campo Cantarell, que incluye tamaños mínimo y máximo de los bloques de este yacimiento naturalmente fracturado, se amplía el cálculo del gasto de aceite con las ecuaciones básicas o fundamentales de segregación gravitacional, considerando diferentes distribuciones y frecuencias de esos y otros tamaños de bloques, de tal manera que incluyendo la información disponible, con algún posible rango de error, se reprodujera el comportamiento de la producción de aceite por segregación gravitacional. Se analizan e interpretan los resultados, llegando a las conclusiones respectivas.

Finalmente, se presentan las conclusiones generales del trabajo y se incluyen algunas recomendaciones.

---

## **LISTA DE FIGURAS**

<b>FIGURAS</b>	<b>Página</b>
I.1 Modelo de Warren y Root.	9
I.2 Representación de los modelos de Braester.	11
I.3 Representación del modelo de Jalali-Yazdi y Ershaghi.	13
I.4 Representación del modelo de Cinco-L., Samaniego y Kuchuk	15
III.1 Representación de un yacimiento naturalmente fracturado con los tipos de fracturas que se pueden encontrar y los diferentes tamaños de bloques que se tienen.	37
III.2 Función de densidad de probabilidad lineal creciente.	38
III.3 Función de densidad de probabilidad exponencial (caso hipotético).	41
III.4 Función de la densidad de probabilidad exponencial (caso Cantarell).	42
III.5 Comparación de la producción de los bloques, de los tamaños indicados (caso hipotético).	54
III.6 Comparación de la presión de los bloques, de los tamaños indicados (caso hipotético).	54

## LISTA DE TABLAS

III.7	Comparación de la saturación de los bloques, de los tamaños indicados (caso hipotético).	55
III.8	Comparación de los valores de $N_p$ , en las distribuciones lineales (caso hipotético).	59
III.9	Comparación de los valores $p$ , en las distribuciones lineales (caso hipotético).	59
III.10	Comparación de los valores de $S_o$ , en las distribuciones lineales (caso hipotético).	60
III.11	Comparación de los valores de $N_p$ , en las distribuciones exponenciales (caso hipotético).	64
III.12	Comparación de los valores de $p$ , en las distribuciones exponenciales (caso hipotético).	64
III.13	Comparación de los valores de $S_o$ , en las distribuciones exponenciales (caso hipotético).	65
III.14	Comparación de la producción de los bloques, de los tamaños indicados (caso Cantarell).	70
III.15	Comparación de la presión de los bloques, de los tamaños indicados (caso Cantarell).	70
III.16	Comparación de la saturación de los bloques, de los tamaños indicados (caso Cantarell).	71

---

III.17	Comparación de los valores de $N_p$ , en las distribuciones lineales (caso Cantarell).	75
III.18	Comparación de los valores de $p$ , en las distribuciones lineales (caso Cantarell).	75
III.19	Comparación de los valores de $S_o$ , en las distribuciones lineales (caso Cantarell).	76
III.20	Comparación de los valores de $N_p$ , en las distribuciones exponenciales (caso Cantarell).	80
III.21	Comparación de los valores de $p$ , en las distribuciones exponenciales (caso Cantarell).	80
III.22	Comparación de los valores de $S_o$ , en las distribuciones exponenciales (caso Cantarell).	81

**LISTA DE TABLAS**

<b>TABLAS</b>	<b>Página</b>
1 Tamaño y frecuencia de los bloques de la Distribución Lineal Discreta (caso Hipotético).	44
2 Resultados del comportamiento de los bloques más pequeños (de altura 0.10 m) de la Distribución Lineal Discreta (caso Hipotético).	49
3 Resultados del comportamiento de los bloques de altura 1.38571 m de la Distribución Lineal Discreta (caso Hipotético).	50
4 Resultados del comportamiento de los bloques de altura 2.35 m de la Distribución Lineal Discreta (caso Hipotético).	51
5 Resultados del comportamiento de los bloques de altura 3.63571 m de la Distribución Lineal Discreta (caso Hipotético).	52
6 Resultados del comportamiento de los bloques de altura 4.6 m de la Distribución Lineal Discreta (caso Hipotético).	53
7 Resultados globales del Yacimiento con Distribución Lineal Discreta del tamaño de los bloques (caso Hipotético).	56
8 Resultados globales del Yacimiento con Distribución Lineal Continua del tamaño de los bloques (caso Hipotético).	58
9 Resultados globales del Yacimiento con Distribución Exponencial Discreta del tamaño de los bloques (caso Hipotético).	61

---

10	Resultados globales del Yacimiento con Distribución Exponencial Continua del tamaño de los bloques (caso Hipotético).	63
11	Tamaño y frecuencia de los bloques (caso Cantarell).	66
12	Resultados del comportamiento de los bloques de altura 0.10 m de la Distribución Lineal Discreta (caso Cantarell).	67
13	Resultados del comportamiento de los bloques de altura 3.3780 m de la Distribución Lineal Discreta (caso Cantarell).	68
14	Resultados del comportamiento de los bloques de altura 6.0 m de la Distribución Lineal Discreta (caso Cantarell).	69
15	Resultados globales del Yacimiento con Distribución Lineal Discreta del tamaño de los bloques (caso Cantarell).	72
16	Resultados globales del Yacimiento con Distribución Lineal Continua del tamaño de los bloques (caso Cantarell).	74
17	Resultados globales del Yacimiento con Distribución Exponencial Discreta del tamaño de los bloques (caso Cantarell).	78
18	Resultados globales del Yacimiento con Distribución Exponencial Continua del tamaño de los bloques (caso Cantarell).	79

## ***INTRODUCCIÓN***

La importancia de caracterizar cada vez mejor los yacimientos naturalmente fracturados (YNF), se debe a que gran parte de las reservas y la producción de aceite a nivel mundial y en México, provienen de este tipo de yacimientos.

Los yacimientos de doble porosidad, como también se les conoce, están compuestos por bloques y fracturas; una característica general de este sistema es la alta conductividad, que se debe a las fracturas, las cuales tienen baja capacidad de almacenamiento. Por lo que corresponde a los bloques de la matriz, tienen baja permeabilidad y generalmente mayor porcentaje de almacenamiento, en comparación con las fracturas. El flujo de fluidos hacia los pozos ocurre sólo a través de las fracturas, y los bloques de la matriz actúan como fuentes, que suministran fluidos a esas fracturas.

Se han desarrollado modelos matemáticos que estudian el comportamiento de la presión, los cuales han contribuido a la caracterización de los YNF, tomando en cuenta que los factores naturales que intervienen, como diferencias en litologías, en los esfuerzos a los que se somete la roca, en el grado de diagénesis, etc., dan lugar a un tamaño múltiple de los bloques de la matriz, lo cual incide fuertemente en la explotación de los hidrocarburos de los yacimientos carbonatados naturalmente fracturados.

Los objetivos de este trabajo son analizar el comportamiento del gasto de aceite en los yacimientos naturalmente fracturados, tomando en cuenta los efectos de segregación gravitacional y la variación continua de los tamaños de los bloques, así como ampliar las aplicaciones de modelos matemáticos existentes, que toman en cuenta el efecto de segregación gravitacional, para el caso de distribuciones discretas de los tamaños de los bloques.

---

El procedimiento de cálculo correspondiente se ilustra con un ejemplo de aplicación hipotético, con la finalidad de facilitar la comprensión de los conceptos involucrados. Además, se incluye el caso de un yacimiento real, (Cantarell, del cual se toma en cuenta la información disponible; la que falta se estima de acuerdo a como se presenta en el trabajo), pero ahora tomando en cuenta variaciones exponencial discreta y exponencial continua de los tamaños de los bloques.

## REVISIÓN DE LA LITERATURA Y ESTADO ACTUAL DE LA TECNOLOGÍA

Se han desarrollado varios cientos de aplicaciones en relación con los yacimientos naturalmente fracturados, por la importancia que tienen a nivel mundial. Sin embargo, en este capítulo solamente se comentan los trabajos en los que se toma en cuenta la variación del tamaño de los bloques<sup>1, 2, 13-15, 36-40</sup>, así como otros que pueden considerarse básicos o relacionados con el tema<sup>3-12, 16-20, 23, 35</sup>.

### I.1 DISCUSIÓN DE LOS TRABAJOS SOBRE EL TEMA

Warren y Root<sup>3</sup> utilizaron el concepto introducido por Barenblatt y Cols<sup>33, 34</sup> de sistema de doble porosidad, para designar un yacimiento naturalmente fracturado; éste fue representado por bloques de caras rectangulares, limitados por una red ortogonal de fracturas uniformes y continuas. Los bloques representaban a su vez la matriz de la roca del yacimiento (ver la **Fig. I.1**).

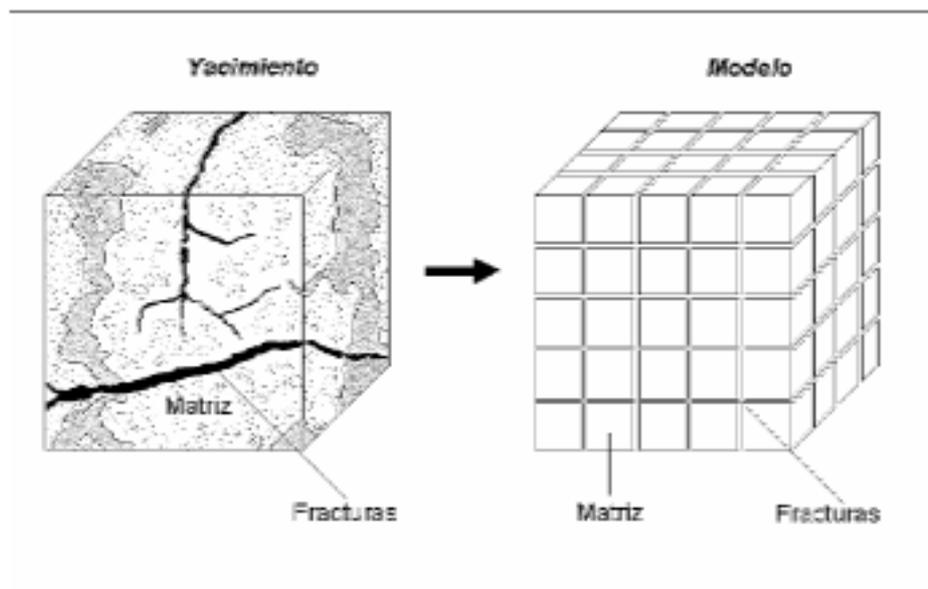


Fig. I.1 Modelo de Warren y Root.

---

Una de las características del modelo de Warren y Root considera que el flujo de la matriz a las fracturas ocurre bajo régimen pseudo-estacionario (flujo PSS, de las palabras “Pseudo Steady State”); relaciona el gasto con la diferencia de presiones entre la matriz y las fracturas. El flujo hacia los pozos es solamente a través de la red de fracturas, actuando la matriz como una fuente que suministra el fluido.

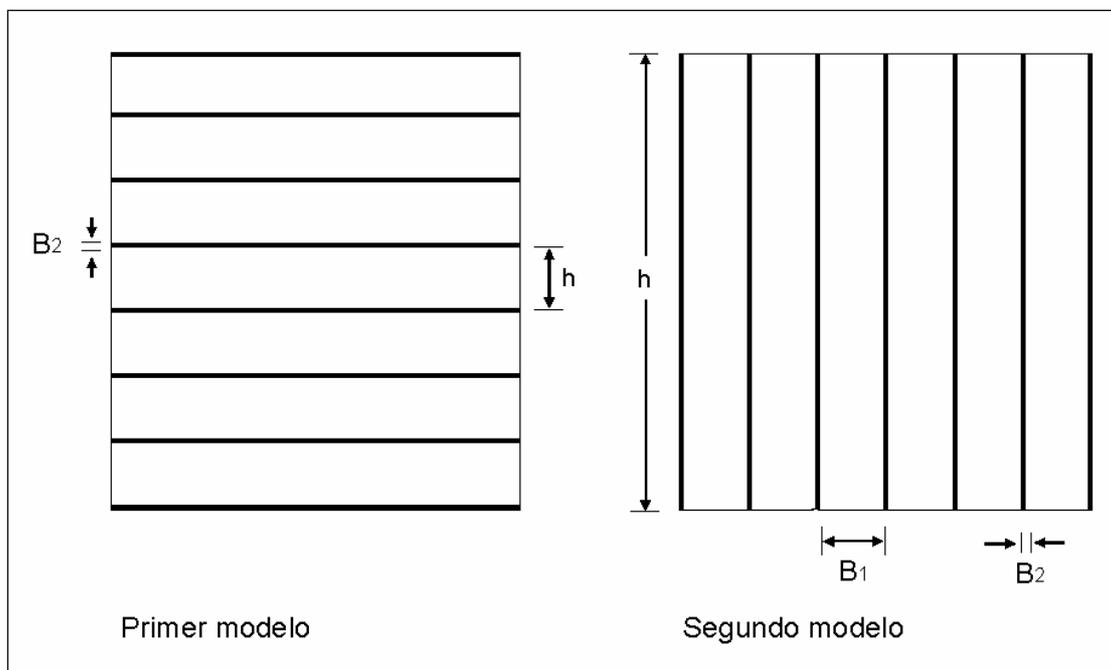
Los autores definieron los parámetros  $\lambda$ , coeficiente de flujo entre la matriz y las fracturas y  $\omega$ , almacenamiento fraccional de las fracturas, mediante los cuales describieron los resultados de pruebas de decremento e incremento de presión. Demostraron que existen dos rectas paralelas en una gráfica semilog de presión contra tiempo y una curva de transición que conecta las dos rectas.

Kazemi<sup>4</sup> y De Swaan<sup>5</sup> consideraron que el flujo matriz-fracturas se presenta en régimen transitorio (flujo USS, de las palabras “Unsteady State”). Kazemi tomó en cuenta la posibilidad de que parte de la producción en los pozos proviniera directamente de los bloques y no sólo a través de las fracturas, pero encontró que este efecto es insignificante si la matriz es de baja permeabilidad, lo cual ocurre generalmente en este tipo de sistemas. También encontró que en el caso de flujo USS el período de transición tiene mayor duración que en el flujo PSS.

De Swaan<sup>5</sup> caracterizó el comportamiento de presión del yacimiento naturalmente fracturado utilizando los parámetros  $\omega$  (el mismo de Warren y Root),  $\eta_{maD}$  (difusividad hidráulica de la matriz, en forma adimensional) y  $A_{fb}$  (área de las fracturas por volumen total de roca). Tanto en el modelo de De Swaan, como en los anteriores, no se establece explícitamente la variación del tamaño de los bloques.

La mejor manera de identificar en la práctica al régimen de flujo matriz-fracturas (PSS o USS), que existe en un sistema considerado, es observando los valores de la función derivada en el período de transición. Si estos valores son significativamente menores de 0.25, entonces ocurre el flujo PSS; si sus valores mínimos son aproximadamente 0.25, el flujo es USS.

Braester<sup>12</sup> analizó la influencia del tamaño de los bloques en la curva de transición, para una prueba de decremento de presión, considerando dos modelos (**Fig. I.2**) para conceptualizar los yacimientos naturalmente fracturados. El primer modelo está constituido por una serie de estratos horizontales, cada uno de espesor “ $h$ ” y separados por fracturas, cada una de “ $B_2$ ” de ancho. Se supuso que la ley de Darcy es aplicable tanto para el flujo en la matriz como en las fracturas, en el caso de flujo bifásico agua-aceite, tomando en cuenta las compresibilidades de estos fluidos, así como la de la formación. Se obtuvieron soluciones numéricas para gasto constante en el pozo y potencial inicial uniforme. El segundo modelo consistió de bloques verticales de altura “ $h$ ” y “ $B_1$ ” de ancho, rodeados por una red de fracturas ortogonales de ancho “ $B_2$ ”; el resto de las características es igual a las del modelo uno.



**Fig. I.2 Representación de los modelos de Braester.**

---

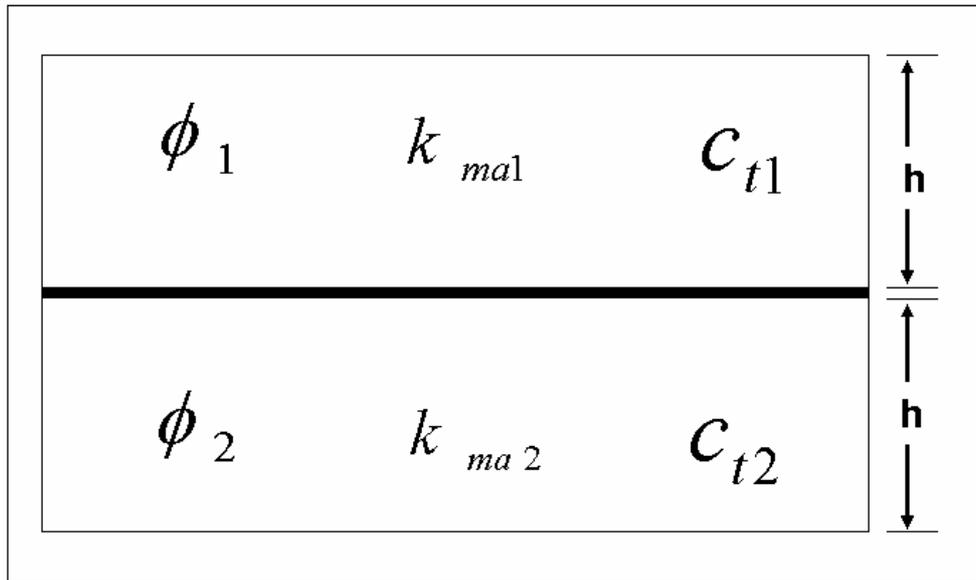
Con base en el rango limitado de parámetros que utilizó Braester, concluyó que del análisis de sus resultados no se puede obtener información confiable sobre el tamaño de los bloques a partir de una prueba de decremento de presión; es decir, la respuesta de presión no es lo suficientemente sensible a los diferentes tamaños de bloques; por otra parte, cabe establecer que ella no aplicó en su estudio el concepto de la función derivada.

Se puede observar que ambos modelos, así como los resultados y conclusiones obtenidas, son para un tamaño constante de bloques de matriz.

Entonces, se considera que una hipótesis que se presenta en cuanto a la distribución al azar del tamaño de los bloques<sup>9</sup> no está suficientemente sustentada; además, la sensibilidad de la respuesta de presión a los diferentes tamaños de bloques se refiere a que se estudia esa respuesta con un tamaño de bloques constante; se repite el proceso para un tamaño diferente y así en forma sucesiva en otras corridas del programa.

Jalali-Yazdi y Ershaghi<sup>23</sup> desarrollaron un modelo (ver **Fig. I.3**) para estudiar las características de la zona de transición, observada en gráficas semi-log de los datos de presión en función del tiempo, con el objeto de proporcionar las bases teóricas del análisis del comportamiento de esa zona.

El modelo está formado por dos estratos horizontales separados por una fractura y cada estrato tiene su porosidad, permeabilidad, compresibilidad total y espesor; se consideran dos regímenes de flujo de la matriz a las fracturas (flujo m-f); pseudo-estacionario y transitorio, (PSS y USS, respectivamente) y se estudió el gasto constante de un fluido ligeramente compresible, en un yacimiento infinito, con flujo radial en la fractura y vertical en los estratos.



**Fig. I.3 Representación del modelo de Jalali-Yazdi y Ershaghi.**

En particular, cualquier combinación de regímenes de flujo puede ser tratada: los dos estratos con el mismo régimen (PPS o USS) o cada estrato con un régimen diferente. No se toma en cuenta el efecto de almacenamiento del pozo.

Las soluciones del problema se obtienen en el espacio de Laplace y se aplica el algoritmo de Stehfest<sup>29</sup> para transformarlas al espacio real; también se desarrollan soluciones aproximadas y se establece una correlación general que involucra una diversidad de comportamientos de la zona de transición, para las combinaciones estudiadas de regímenes de flujo, permeabilidades, etc.

Jalali-Yazdi y Ershaghi<sup>20</sup> hacen una aplicación en el modelo general desarrollado por los mismos autores en la Ref. 23 y descrito en párrafos anteriores; en esta aplicación un estrato produce un régimen estacionario PSS y el otro en régimen transitorio USS, teniendo ambos estratos las mismas propiedades (en este caso se le conoce como medio fracturado de doble porosidad). El espesor total del modelo es constante, pero el espesor de cada estrato puede variar desde cero hasta el espesor total, con lo que se incluye el caso límite de yacimiento homogéneo, bajo el régimen de flujo USS o bien el PSS.

---

El desarrollo de las soluciones se basa en la teoría presentada por Najurieta<sup>6, 25</sup> para la respuesta de presión en el pozo. Los resultados se compararon con otros obtenidos por diversos medios<sup>7, 24, 26</sup>, siendo la concordancia satisfactoria.

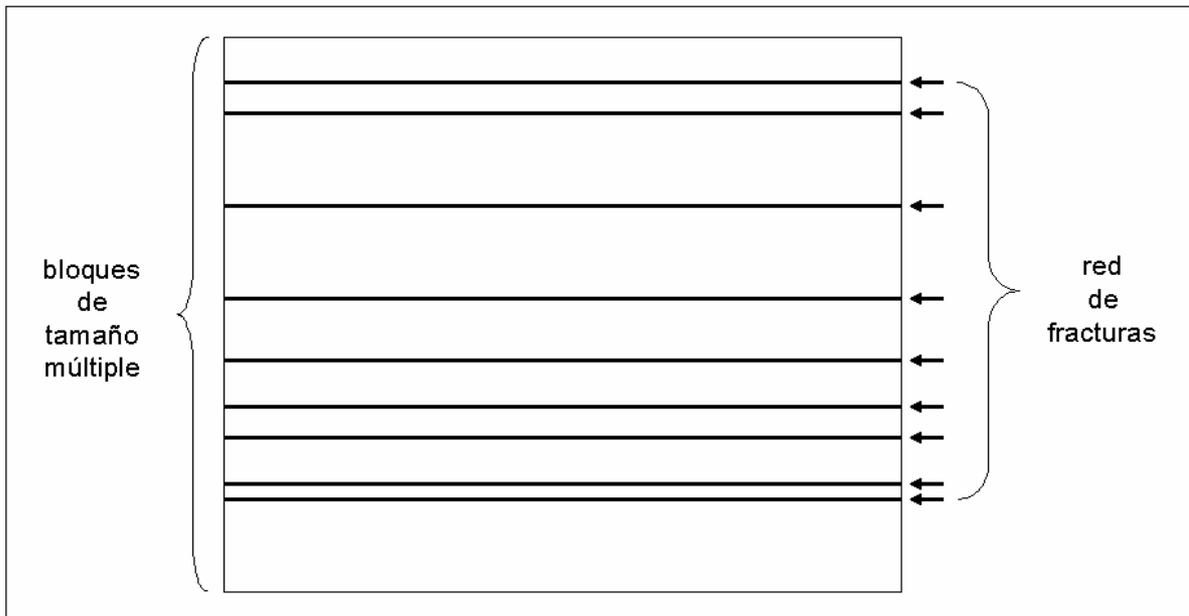
Se hace una estimación de los parámetros de almacenamiento adimensional de la matriz  $\omega_{ma}$ , coeficiente de flujo entre los dos medios (matriz y fractura)  $\lambda$ , daño en el pozo  $S$  y almacenamiento adimensional del pozo  $C_D$ ;  $\omega_{ma}$  se define como el almacenamiento de la matriz entre el almacenamiento total del sistema fracturado y  $\lambda = k_{ma} r_w^2 / k_f h^2$ , donde  $k_{ma}$  y  $k_f$  son las permeabilidades de la matriz y de la fractura, en tanto que  $h$  representa el espesor total del sistema.  $S$  y  $C_D$  son de uso relativamente común y se definen en la literatura<sup>31</sup>.

La estimación de  $\omega_{ma}$ ,  $S$  y  $C_D$  se basa en el reconocimiento de los patrones de comportamiento de la respuesta de presión y su primera derivada, en gráficas semi-log, así como en ajuste por curvas tipo y en correlaciones auxiliares. Se establecen las condiciones bajo las cuales se desarrolla cada patrón de comportamiento y se especifica el procedimiento de análisis aplicable.

Se desarrolla una curva tipo que incorpora la respuesta del flujo entre matriz y fractura (flujo "interporoso"), que puede ser USS o bien PSS, con la que es posible determinar cuál régimen gobierna el flujo interporoso. Las correlaciones auxiliares se basan en un análisis de la curva de transición entre el predominio de los efectos de la fractura y el predominio de los efectos del flujo ya estabilizado en el sistema total matriz-fractura (ma-f); a esta parte se le conoce como período de transición<sup>9-11,16-18</sup>.

Cinco-L., Samaniego y Kuchuk<sup>15</sup> presentaron el primero de los trabajos en los que realmente ya se tomó en cuenta el tamaño múltiple de los bloques de matriz (ver **Fig. I.4**); aun cuando Braester<sup>12</sup> analizó la influencia del tamaño de los bloques en la curva de transición para una prueba de decremento de presión, los modelos que desarrolló esta investigadora fueron para bloques de tamaño constante, como ya se explicó al principio de este capítulo; por otra parte, los trabajos de Jalali y Ershaghi<sup>20, 23</sup> se realizaron posteriormente, para el caso de dos tamaños de los bloques de yacimientos naturalmente fracturados.

El modelo del yacimiento se compone de bloques de matriz de tamaño múltiple, uniformemente distribuidos en el medio poroso, donde la red de fracturas tiene una permeabilidad  $k_{fb}$ , una compresibilidad total  $c_{if}$  y una porosidad  $\phi_{fb}$ ; el subíndice  $b$  significa que el parámetro correspondiente se define usando el volumen total de matriz y fracturas. Además  $k_{ma}$  es la permeabilidad de la matriz,  $\phi_{ma}$  su porosidad y  $c_{tma}$  su compresibilidad total.



**Fig. I.4 Representación del modelo de Cinco-L., Samaniego y Kuchuk.**

En particular, un parámetro muy importante que se relaciona directamente en estudios de rapidez de imbibición, es el área de fracturas por unidad de volumen de roca  $A_{fb}$  (o por unidad de volumen de matriz  $A_{fma}$ );  $A_{fb}$  es el área de interacción entre las fracturas y la matriz por unidad de volumen de roca. El modelo además considera que el flujo ocurre hacia el pozo únicamente a través de las fracturas, obedeciendo la ley de Darcy y no se toman en cuenta los efectos gravitacionales.

Para el caso que desarrollan principalmente los autores, que es el de bloques de matriz en forma de estratos horizontales de espesor variable  $h_{ma}$  separados por fracturas de anchuras  $h_f$ , se tiene

$$A_{fb} \left( \frac{2}{h_{ma} + h_f} \right) = \frac{2V_{ma}}{h_{ma} V_b} \quad y \quad A_{fma} = \frac{2}{h_{ma}},$$

donde  $V_b$  y  $V_{ma}$  son los volúmenes total y de la matriz, respectivamente.

Si se define  $f(h_{ma})$ , que es la función frecuencia para los bloques de matriz de tamaño  $h_{ma}$ , en tal forma que

$$\int_{h_{min}}^{h_{max}} f(h_{ma}) dh_{ma} = 1, \tag{1.1}$$

o en forma discreta (o discontinua)

$$\sum_{i=1}^{NB} f_i(h_{ma}) = 1, \tag{1.2}$$

donde  $NB$  es el número de tamaños de bloques que se tienen en el medio poroso fracturado, entonces

$$A_{fb} = \int_{h_{min}}^{h_{max}} f(h_{ma}) A_{fb}(h_{ma}, h_f) dh_{ma}, \tag{1.3}$$

$$A_{fma} = \int_{h_{min}}^{h_{max}} f(h_{ma}) A_{fma}(h_{ma}) dh_{ma} , \quad (1.4)$$

o en forma discreta:

$$A_{fb} = \sum_{i=1}^{NB} f_i A_{fbi} , \quad (1.5)$$

$$A_{fma} = \sum_{i=1}^{NB} f_i A_{fmai} . \quad (1.6)$$

La función  $f_i$  representa el volumen de los bloques de matriz de tamaño  $h_{mai}$ , expresado como fracción del volumen total de la matriz del medio poroso fracturado.

Además se definen el cociente de almacenamiento de las fracturas  $\omega$  y la difusividad hidráulica de la matriz en forma adimensional  $\eta_{maDi}$  respectivamente como

$$\omega = \frac{\phi_{FB} c_{if}}{(\phi_c)_t} \quad (1.7)$$

$$\eta_{maDi} = \frac{k_{ma} (\phi_c)_t r_w^2}{k_{fb} (\phi_c)_{ma} h_{mai}^2} . \quad (1.8)$$

Nótese que el tamaño de cada bloque queda involucrado en  $\eta_{maDi}$ .

En el trabajo que se comenta, se presenta el desarrollo de la ecuación diferencial de flujo para el problema planteado que incorpora el término  $\mu q^*_{ma-f,b} / k_f b$ , donde  $q^*_{ma-f,b}$  es el gasto matriz-fractura por unidad de volumen de roca y está dado por

$$q^*_{ma-f,b} = \sum_{i=1}^{NB} f_i \left[ -\frac{k_{ma}}{\mu} (\nabla p(h_{mai}))_{sup} \right] A_{fbi} . \quad (1.9)$$

En esta ecuación  $(\nabla p(h_{mai}))_{sup}$  es el gradiente de presión en la cara de los bloques de tamaño  $h_{mai}$ .

Se desarrolla la solución del problema, la cual en forma adimensional, para el caso de distribución discreta de los bloques, es:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{K_0(x)}{sxK_1(x)}, \quad (I.10)$$

donde  $K_0$  y  $K_1$  son las funciones de Bessel modificadas de segunda clase, de orden cero y uno<sup>22, 27, 28</sup>,  $\bar{p}_{wD}$  es la transformada de Laplace de  $p_{wD}$ ,

$$x = s^{1/2} [\omega + (1 - \omega)g]^{1/2}, \quad (I.11)$$

$$g(f_i, \eta_{maDi}, s) = 2 \sum_{i=1}^{NB} f_i \sqrt{\frac{\eta_{maDi}}{s}} \tanh \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s}{\eta_{maDi}}} \right), \quad (I.12)$$

siendo "s" la variable en el espacio de Laplace, que corresponde a  $t_D$  en el espacio real.

Se desarrollaron soluciones aproximadas para la presión en el pozo:

$$p_{wD}(\omega, t_D) = \frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{t_D}{\omega} \right) + 0.80907 \right] \quad (I.13)$$

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{4} \ln t_D - \frac{1}{2} \ln \left( 2 \sum_{i=1}^{NB} f_i \sqrt{\eta_{maDi}} \right) + 0.2602 \quad (I.14)$$

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} (\ln t_D + 0.80907), \quad (I.15)$$

donde

$$t_D = \frac{\beta k_{fb}}{(\phi c_t)_i \mu r_w^2} \quad (I.16)$$

$$p_{wD} = \frac{k_{fb} h \Delta p_f}{\alpha q \mu B}. \quad (I.17)$$

## CAPITULO I

La Ec. I.13 es aplicable para valores muy pequeños de  $\omega$  (almacenamiento de las fracturas), para los cuales en tiempos intermedios, el comportamiento de la presión es dominado por el flujo lineal en los bloques de matriz. Los valores de las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  dependen del sistema de unidades que se utilice en las ecuaciones.

La Ec. I.14 representa una recta semi-log y con ella se puede calcular la presión en el pozo durante el llamado período de flujo dominado por la red de fracturas; esta ecuación tiene la misma forma que la Ec. I.15, la cual representa el comportamiento de presión de un sistema homogéneo, que es lo que ocurre en este caso de tiempos grandes, cuando el flujo de la matriz hacia las fracturas ya se ha estabilizado.

De las Ecs. I.13 a I.15 se deduce que la variación en el tamaño de los bloques de matriz, incluida en la sumatoria de la Ec. I.14, solamente afecta el comportamiento de la presión en los tiempos intermedios de la prueba. En estas ecuaciones no se toma en cuenta los efectos de almacenamiento y daño en el pozo.

Por otro parte, la Ec. I.10 puede aproximarse para valores pequeños de  $x$ ; si  $x$  es pequeña,  $K_0(x)$  y  $K_1(x)$  se aproximan por:

$$K_0(x) = -\left[ \ln \frac{x}{2} + 0.5772 \right] \quad (I.18)$$

$$K_1(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad (I.19)$$

con lo cual, la Ec. I.10 se transforma en:

$$\bar{p}_{wD}(s) = -\frac{1}{s} \left[ \ln \left( \frac{x}{2} \right) + 0.5772 \right] \quad . \quad (I.20)$$

El cálculo de  $p_{wD}$  con esta ecuación no requiere de la evaluación de las funciones de Bessel  $K_0$  y  $K_1$ , en tanto que la Ec. I.10 sí necesita de esta evaluación.

---

La depositación de minerales en la cara de las fracturas puede reducir la interacción entre la matriz y las fracturas, lo cual retarda el flujo hacia estas últimas; Cinco-L. y Cols<sup>15</sup> y Moench<sup>32</sup> propusieron un factor de daño para explicar o justificar la aplicación del modelo de flujo pseudo-estacionario de Warren y Root<sup>3</sup> de la matriz a las fracturas. Este factor de daño  $s_{maD}$  se define como

$$s_{maD} = \frac{k_{ma} x_d}{k_d h_{ma}}, \quad (1.21)$$

donde  $x_d$  y  $k_d$  son el espesor de la zona dañada y su permeabilidad, respectivamente, en tanto que  $k_{ma}$  y  $h_{ma}$  son la permeabilidad y el espesor de la matriz.

Con esta conceptualización los autores extienden su modelo para aplicarlo también al caso de flujo pseudo-estacionario.

Se obtuvieron resultados para uno, dos, tres y cinco tamaños de bloques, los cuales se incluyeron en el coeficiente adimensional de difusividad hidráulica de la matriz  $\eta_{maD}$ , definida por la Ec. 1.8; del análisis ampliamente documentado de los resultados de  $p_{wD}$  y de su primera derivada se presentan las siguientes conclusiones:

La característica de tamaño múltiple de bloques de un yacimiento naturalmente fracturado no se puede determinar analizando solamente el comportamiento de la presión; sin embargo, esto sí es posible mediante la aplicación de una herramienta de análisis poderosa, como lo es la función derivada.

El uso del modelo de Warren y Root para sistemas de doble porosidad puede justificarse considerando una zona dañada entre los bloques de matriz y las fracturas.

Por otro lado, el comportamiento de la presión en el pozo puede exhibir las características típicas del sistema de doble porosidad de un solo tamaño de bloques.

## CAPITULO I

Si además se tiene un amplio rango de tamaños de bloques que incluya tamaños muy pequeños, entonces no existe el comportamiento del pozo correspondiente a la primera recta semilog.

Los parámetros  $\omega$  y  $A_{fb}$  calculados del modelo de un solo tamaño de bloques son los mismos también para un yacimiento de tamaño múltiple de bloques. En cambio, los parámetros  $\lambda$  y  $h_{ma}$  de un solo tamaño de bloques corresponden al promedio aritmético ponderado y al promedio armónico ponderado de un yacimiento con variación del tamaño de los bloques, respectivamente. A  $\lambda$  se le conoce como el parámetro de flujo entre la matriz y el sistema de fracturas.

Belani y Jalali-Yazdi<sup>13</sup> desarrollaron un modelo que incorpora la distribución del tamaño de los bloques; se considera el flujo radial en las fracturas hacia el pozo, de un fluido ligeramente compresible y se desprecian los efectos gravitacionales. Se supone que es aplicable la ley de Darcy y las propiedades de la roca son constantes. En la ecuación diferencial de flujo se incluye el término  $Q_{ma}$  que representa la contribución de la matriz y que se define por

$$Q_{ma} = \int_{h_{min}}^{h_{max}} Q(h_{ma}) f(h_{ma}) dh_{ma} \quad , \quad (1.22)$$

donde  $Q(h_{ma})$  es la contribución al flujo de los bloques de tamaños  $h_{ma}$  y  $f(h_{ma})$  es la probabilidad de que existan bloques de ese tamaño.

Para yacimientos con fracturamiento intenso,  $f(h_{ma})$  es una distribución sesgada positivamente en la que predominan los bloques pequeños, mientras que si el fracturamiento es escaso, entonces la distribución es sesgada negativamente y predominan los bloques grandes.

Los autores presentan la solución del problema en el plano de Laplace:

$$\bar{P}_{wD} = \frac{K_o(x) + Sx K_1(x)}{s\{C_D s [K_o(x) + Sx K_1(x)] + x K_1(x)\}} \quad (1.23)$$

Se puede observar que si el factor de daño  $S$  y el almacenamiento  $C_D$  son nulos, entonces la Ec. I.23 se reduce a la Ec. I.10, donde  $x = \sqrt{sg(s)}$ , siendo:

Para flujo m-f PSS:

$$g(s) = \omega_f + \omega_{ma} \int_{\frac{h_{min}}{h_{max}}}^1 \frac{3\lambda}{\omega_{ma}s + 3\lambda} f(h_D) dh_D \quad (1.24)$$

Para flujo m-f USS:

$$g(s) = \omega_f + \int_{\frac{h_{min}}{h_{max}}}^1 \sqrt{\frac{\omega_{ma}\lambda}{s}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_{ma}s}{\lambda}}\right) f(h_D) dh_D \quad (1.25)$$

$h_D$ ,  $\omega_{ma}$ ,  $\omega_f$  y  $\lambda$  se definen como sigue:

$$h_D = \frac{h_{ma}}{h_{max}} \quad (1.26)$$

$$\omega_{ma} = \left( \frac{\phi_{ma} c_{ima}}{\phi_{ma} c_{ima} + \phi_f c_{if}} \right) \quad (1.27)$$

$$\omega = 1 - \omega_{ma} \quad (1.28)$$

$$\lambda_{ma} = k_{ma} r_w^2 / k_f h_{ma}^2 \quad (1.29)$$

Belani y Jalali<sup>13</sup> no muestran el desarrollo de las Ecs. I.23 a I.25, pero sí presentan las ecuaciones de  $g(s)$  para los regímenes de flujo matriz-fractura PSS y USS y las distribuciones uniforme y bimodal del tamaño de los bloques.

En la distribución uniforme o también llamada rectangular, todos los tamaños de los bloques tienen la misma probabilidad de existir en el medio fracturado; la distribución bimodal se presenta cuando existen dos conjuntos predominantes de tamaños de bloques, uno uniforme de un rango de valores  $h_{ma1}$  a  $h_{ma2}$  y el otro también uniforme, pero de un rango de  $h_{ma3}$  a  $h_{ma4}$ .

## CAPITULO I

Los autores presentan resultados para la presión y su primera derivada en el flujo matriz-fractura PSS, considerando distribución uniforme del tamaño de los bloques, para un amplio rango del cociente  $\lambda_{min}/\lambda_{max}$  en un caso y en otro se fijó este cociente y se varió  $\omega_{ma}$ . Lo anterior también se obtuvo para flujo matriz-fractura USS y en forma similar se calcularon resultados para la distribución bimodal.

Entre otras, las conclusiones del trabajo indican que los resultados se pueden usar para estimar  $\omega_{ma}, \lambda_{min}, \lambda_{max}$  y que, como una forma alternativa, usando las soluciones que ellos proponen en una regresión no lineal de los datos de la presión, proporcionan parámetros del yacimiento como  $\omega_{ma}, \lambda_{min}, \lambda_{max}$ . Sin embargo, no se presenta el procedimiento correspondiente.

Se considera que el trabajo presentado por Johns y Jalali-Yazdi<sup>14</sup> es una extensión y/o complemento de la investigación de Belani y Jalali-Yazdi<sup>13</sup>, discutida en los párrafos anteriores. El punto de partida es el mismo problema de flujo y por supuesto la misma solución representada por la Ec. I.23, para pruebas de decremento de presión.

Donde sea conveniente y para mayor claridad se hará referencia a los cambios de nomenclatura que se introducen; por otra parte, ahora el trabajo sólo trata del régimen de flujo USS.

En la Ec. I.22 se utilizó  $f(h_{ma})$ , que es la probabilidad de que existan bloques de tamaño  $h_{ma}$  en el medio poroso naturalmente fracturado; ahora se usa el mismo concepto pero con el nombre función de densidad de probabilidad (con abreviatura PDF en inglés) y con la nomenclatura  $p(h_{ma})$ ; en la literatura<sup>22</sup> se le llama también función de probabilidad. La nomenclatura para  $g(s)$  de las Ecs. I.24 y I.25 cambia a  $f(s)$ .

Para flujo matriz-fractura USS y en presencia de daño en la cara de los bloques:

$$f(s) = \omega_f + \omega_{ma} \int_{F_h}^1 \frac{\sqrt{\lambda/\omega_{ma}s} \tanh(\sqrt{\omega_{ma}s/\lambda}) p(h_D)}{1 + S_{ID} \sqrt{\omega_{ma}s/\lambda} \tanh(\omega_{ma}s/\lambda)} \cdot \quad (I.30)$$

Además de introducir el efecto del factor de daño en la cara de los bloques  $S_{ID}$ , se define

$$F_h = \frac{h_{min}}{h_{m\acute{a}x}} \quad (1.31)$$

y se hacen dos correcciones a la Ec. 1.25 publicada con anterioridad: se agrega  $\omega_{ma}$  como factor de la integral y el cociente  $\omega_{ma}\lambda/s$  se cambia a  $\lambda/\omega_{ma}s$ ; no se presenta el desarrollo de la Ec. 1.30. Por otro lado,  $S_{ID}$  es el mismo concepto que  $S_{maD}$  (Ec. 1.21) presentado por Cinco-L. y Cols<sup>15</sup>.

Mediante la selección de una función probabilidad, se puede inferir la intensidad de fracturamiento de un medio de doble porosidad a partir de los datos de una prueba de presión; los autores utilizan dos funciones de probabilidad para representar la variabilidad del tamaño de los bloques, que son la lineal y la exponencial. A medida que aumenta la intensidad de fracturamiento,  $p(h_D)$  se hace sesgada hacia bloques pequeños y viceversa. Las funciones de probabilidad lineal y exponencial son respectivamente:

$$p(h_D) = mh_D + b \quad (1.32)$$

$$p(h_D) = \frac{ae^{-ah_D}}{e^{-ah_D} - e^{-a}} \quad (1.33)$$

donde  $m$  y  $b$  son la pendiente y la ordenada al origen de la recta y  $a$  es una constante positiva, negativa o nula, que define las características de la curva exponencial; para valores positivos de  $a$  cada vez mayores corresponden a mayores intensidades de fracturamiento, aumentando la probabilidad de existencia de bloques pequeños y disminuyendo la de los bloques grandes; si aumenta negativamente, disminuye la intensidad de fracturamiento y se incrementa la probabilidad de que se tengan bloques grandes. Si  $a = 0$  (o  $m = 0$  en la Ec. 1.32) la función de probabilidad se reduce al caso de función uniforme o rectangular.

Los autores realmente presentan la función lineal como

$$p(h_D) = \frac{mh_D + b}{0.5m(1 - F_h^2) + b(1 - F_h)} \quad , \quad (1.34)$$

pero se puede demostrar que las Ecs. 1.32 y 1.34 son equivalentes; por otra parte, se debe cumplir para toda función de probabilidad que el área bajo la curva de  $p(h_D)$  vs  $h_D$  es unitaria, con  $h_D$  variando desde  $F_h$  hasta 1; matemáticamente se tiene

$$\int_{F_h}^1 p(h_D) dh_D = 1 \quad . \quad (1.35)$$

Por ejemplo, para la función rectangular

$$p(h_D) = \frac{1}{(1 - F_h)} \quad (1.36)$$

con lo cual

$$\int_{F_h}^1 p(h_D) dh_D = \frac{1}{1 - F_h} \int_{F_h}^1 dh_D = 1 \quad .$$

Para pruebas de decremento de presión en ausencia de efectos de almacenamiento y daño, la solución del problema de flujo está dada por la Ec. 1.10 y se evalúa numéricamente con el algoritmo de Stehfest<sup>29</sup> para diferentes funciones de probabilidad; las respuestas de la presión y el grupo de la primera derivada se presenta gráficamente para la función exponencial con  $F_h = 0.1$  y diferentes valores de “a”, variando desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$ ; la información complementaria es  $\lambda_{min} = 10^{-7}$  y  $\omega_{ma} = 0.9$ ; de las características de las curvas de la primera derivada se obtiene cualitativamente el grado de variabilidad del tamaño de los bloques.

---

Para el caso particular de una función de probabilidad rectangular se desarrollaron curvas tipo para pruebas de decremento y de interferencia de presión con las cuales se puede determinar  $\omega_{ma}$ ,  $\lambda_{min}$  y  $F_h$ .

Rodríguez N., y Cols<sup>36-38</sup>, desarrollaron modelos y aplicaciones, que consisten en la determinación del gasto de imbibición de YNF, de matriz mojada por agua, en procesos de recuperación de aceite por inyección de agua, así como las bases para predecir el comportamiento.

Basándose en la Ref. 1, Rodríguez y Cols.<sup>37</sup>, desarrollaron un procedimiento para estimar la variabilidad del tamaño de los bloques, a partir de datos de pruebas de variación de presión, aplicando una técnica de optimización, la cual puede contribuir para tener una mejor caracterización de los YNF. También presentaron un trabajo<sup>38</sup>, tomando en cuenta la distribución continua uniforme, exponencial y normal del tamaño de los bloques de la matriz, basándose en flujo transitorio. Se puede considerar como una ampliación del modelo analítico formulado por Cinco, Samaniego y Kuchuk<sup>15</sup>, para un número finito de tamaño de bloques.

Los YNF tienen un número finito  $NB$  de los tamaños de bloques  $h_{ma1}$ ,  $h_{ma2}$ , ...,  $h_{maNB}$ , o el tamaño de los bloques puede tener una variación continua  $h_{ma}$ ;  $h_f$  es el espesor de las fracturas.

A una variación continua  $h_{ma}$  de tamaño de los bloques de la matriz, corresponde la siguiente ecuación de probabilidad:

$$\int_{h_D^{min}}^{h_D^{max}} f_D(h_D) dh_D = 1, \tag{I.37}$$

donde  $h_D$  está dada por la Ec. I.26.

Dos parámetros relacionan los cálculos de imbibición y efectos de gravedad, que son muy importantes en el proceso de recuperación secundaria por inyección de agua:

$$A_{fb} = \frac{2}{(h_{ma} + h_f)} = \frac{2 V_{ma}}{h_{ma} V_b} \quad (1.38)$$

$$A_{fma} = \frac{2}{h_{ma}}, \quad (1.39)$$

donde  $V_b$  y  $V_{ma}$  son el volumen total y el volumen de la matriz y  $A_{fb}$ ,  $A_{fma}$  son las áreas de las fracturas por unidad de volumen total y por unidad de volumen de la matriz, respectivamente.

Cinco Ley y Cols<sup>15</sup> desarrollaron la correspondiente ecuación de flujo, para un número finito  $NB$  de tamaño de bloques, la cual es:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \right) - \frac{k_{ma}}{k_{fb}} r_w^2 \sum_{j=1}^{NB} f_j A_{fb} \frac{2\pi k_{fb} h}{q \mu} [\nabla \Delta p_{ma}(h_{mai})]_{surf} = \frac{\phi_{fb} c_{if}}{(\phi c_i)_t} \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D}. \quad (1.40)$$

Y la solución al problema en el espacio de Laplace, es la Ec. I.10,

con la condición inicial:

$$p_{fD}(r_D) = 0, \quad 1 < r_D < \infty, \quad (1.41)$$

y las condiciones de frontera:

$$\left( r_D \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = -1, \quad t_D > 0, \quad (1.42)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{fD}(r_D, t_D) = 0, \quad t_D > 0. \quad (1.43)$$

El modelo con variación de tamaño de bloques presentado, representa las características de la variabilidad del tamaño, involucrando las funciones de probabilidad de las variables aleatorias del tamaño de los bloques  $h_{ma}$ , como la ordenada al origen “ $b$ ” y la pendiente “ $m$ ”, las cuales determinan las características de la recta.

Cuando  $m$  toma valores positivos, representa la posibilidad del predominio de la existencia de bloques grandes; cuando tiene valores negativos, le corresponde una mayor intensidad de fracturamiento y se incrementa la posibilidad de que se tengan bloques más pequeños. Si  $m = 0$  se reduce al caso de la función uniforme o rectangular.

$$b = \frac{2 - m(1 - F_h^2)}{2(1 - F_h)} \quad (1.44)$$

Rodríguez N. y Col.<sup>39</sup>, consideran el desplazamiento de aceite en los YNF bajo la inyección de agua, tomando en cuenta los efectos de capilaridad y gravitacionales, implica que los gradientes de presión externa debido a la inyección de agua son despreciables, así:

$$q_{o\ tot} = q_{o\ grav} + q_{o\ imb} \quad (1.45)$$

Por otro lado, para un bloque de altura  $h_{ma}$  de la matriz:

$$q_{o\ imb} = \frac{k_o A}{\mu_o B_o} \frac{p_c}{h_{ma}} \quad (1.46)$$

$$q_{o\ grav} = \frac{A k_o}{\mu_o B_o} g \Delta\rho \quad (1.47)$$

donde los gradientes de presión debido a los efectos de gravedad y capilaridad son  $g\Delta\rho$  y  $p_c/h_{ma}$ , respectivamente.

Las Ecs. 1.46 y 1.47 están en unidades de Darcy; si el gasto está en  $Bl/día$ , el área  $A$  y el resto de las unidades en el sistema métrico decimal, entonces las ecuaciones correspondientes, son:

$$q_{o\ imb} = 5.364 \times 10^{-4} \frac{k_o A}{\mu_o B_o} \frac{p_c}{h_{ma}} \quad (1.48)$$

$$q_{o\ grav} = 5.364 \times 10^{-4} \frac{k_o A}{\mu_o B_o} g \Delta\rho \quad (1.49)$$

## CAPITULO I

El gasto total  $q_{ot}$ , para un YNF teniendo  $NB$  tamaños de bloques es:

$$q_{ot} = \sum_{j=1}^{NB} n_j q_{ojtot}, \quad (1.50)$$

donde  $n_j$  es el número de bloques de un tamaño dado.

Si  $f_j$  es definida como la frecuencia o fracción de volumen de los bloques de tamaño  $h_{maj}$ , con respecto al volumen total de roca:

$$f_j = \frac{A_j n_j h_{maj}}{V_R} = \frac{V_{Rj}}{V_R}, \quad (1.51)$$

entonces la Ec. 1.50, puede ser escrita como:

$$q_{ot} = V_R \sum_{j=1}^{NB} \frac{f_j}{A_j h_{maj}} q_{ojtot}. \quad (1.52)$$

Ahora, tomando en cuenta las Ecs. 1.48 y 1.49 y sustituyendo en la Ec. 1.45:

$$q_{ot} = 5.364 \times 10^{-4} V_R \left[ p_c \sum_{j=1}^{NB} \frac{k_{oj} f_j}{\mu_{oj} B_{oj} h_{maj}^2} + g \Delta\rho \sum_{j=1}^{NB} \frac{k_{oj} f_j}{\mu_{oj} B_{oj} h_{maj}} \right], \quad (1.53)$$

donde

$$q_{otimb} = 5.364 \times 10^{-4} V_R p_c \sum_{j=1}^{NB} \frac{k_{oj} f_j}{\mu_{oj} B_{oj} h_{maj}^2}, \quad (1.54)$$

$$q_{otgrav} = 5.364 \times 10^{-4} V_R g \Delta\rho \sum_{j=1}^{NB} \frac{k_{oj} f_j}{\mu_{oj} B_{oj} h_{maj}}, \quad (1.55)$$

son el gasto total de aceite por imbibición y efectos de gravedad, para YNF teniendo  $NB$  tamaños de bloques, respectivamente.

---

Si una distribución continua de tamaños de bloques<sup>37</sup>,  $f_D(h_D)$  es considerada, las correspondientes ecuaciones para el gasto total de aceite por imbibición y gravedad, son:

$$q_{o\text{ imb}} = 5.364 \times 10^{-4} V_R P_c \int_{h_{D\text{ min}}}^{h_{D\text{ máx}}} \frac{k_o f_D}{\mu_o B_o h_{\text{máx}}^2 h_D^2} dh_D, \quad (1.56)$$

$$q_{o\text{ grav}} = 5.364 \times 10^{-4} V_R g \Delta\rho \int_{h_{D\text{ min}}}^{h_{D\text{ máx}}} \frac{k_o f_D}{\mu_o B_o h_{\text{máx}} h_D} dh_D. \quad (1.57)$$

Para el caso particular de distribución lineal continua:

$$q_{o\text{ imb}} = 5.364 \times 10^{-4} V_R P_c \int_{h_{D\text{ min}}}^{h_{D\text{ máx}}} \frac{k_o}{\mu_o B_o h_{\text{máx}}^2} \left( \frac{m}{h_D} + \frac{b}{h_D^2} \right) dh_D, \quad (1.58)$$

$$q_{o\text{ grav}} = 5.364 \times 10^{-4} V_R g \Delta\rho \int_{h_{D\text{ min}}}^{h_{D\text{ máx}}} \frac{k_o}{\mu_o B_o h_{\text{máx}}} \left( m + \frac{b}{h_D} \right) dh_D. \quad (1.59)$$

En estas ecuaciones  $h_D$  está dada por la Ec. 1.26.

El gasto de aceite por efectos gravitacionales  $q_{o\text{ grav}}$ , de un bloque de tamaño  $h_{ma}$ , está dado por la Ec. 1.47; la variación de  $q_{o\text{ grav}}$  con respecto al tiempo está dada por el cambio que  $k_o$ ,  $\mu_o$  y  $B_o$  tomen, a través de los cambios de presión y saturación de aceite.

Rodríguez N. R. elaboró un reporte interno de trabajo<sup>2</sup>, donde se presenta el desarrollo de modelos matemáticos para calcular el gasto de aceite a un tiempo dado, así como el comportamiento de la recuperación de aceite en función del tiempo, de YNF, tomando en cuenta efectos gravitacionales y variación del tamaño de los bloques, incluyendo los casos de variaciones continua y discreta.

Para el desarrollo se consideró que la resistencia al flujo en las fracturas es despreciable, por lo cual la conductividad que realmente tengan las mismas no afecta a los valores de  $q_{o\ grav}$  de los bloques.

### I.2 ESTADO ACTUAL DE LA TECNOLOGÍA

Como se puede inferir de la revisión de la literatura presentada en la Sección I.1 de este capítulo, sólo algunos trabajos han sido publicados<sup>1, 2, 13, 14, 15, 36-40</sup>, en los que se toma en cuenta el tamaño múltiple de bloques de matriz, al estudiar el comportamiento de los yacimientos naturalmente fracturados mediante pruebas de variación de presión, y en los que se calcula su comportamiento de producción.

Al tratar el problema directo, o sea el estudio del comportamiento de la presión conociendo los parámetros del yacimiento, se presentan<sup>1, 13-15, 36, 38</sup> modelos matemáticos que toman en cuenta el efecto de segregación gravitacional para el caso de distribuciones discreta y continua de los tamaños de los bloques.

Para el problema inverso, es decir, el problema de estimar parámetros de yacimientos de doble porosidad, con tamaño múltiple de bloques de matriz, a partir de los datos de pruebas de variación de presión, se presentan estudios<sup>13-15, 36, 37</sup> que contribuyen a realizar mejores caracterizaciones de este tipo de yacimientos.

Trabajos sobre el comportamiento del gasto de aceite<sup>2, 39, 40</sup> en función del tiempo, en yacimientos naturalmente fracturados, consideran la variación del tamaño de los bloques, así como efectos gravitacionales.

---

El comportamiento del gasto de aceite está dado por la variación correspondiente de  $k_o$ , a través de la disminución de  $S_o$  y su relación con  $k_o$ , así como la variación de  $\mu_o$  y  $B_o$  con respecto a  $p$ , donde  $p$  se obtiene a través de un balance de materia y  $\Delta N_p$  se calcula con la ecuación:

$$\Delta N_p = \bar{q}_{o\text{grav}} \Delta t, \quad (1.60)$$

siendo  $\bar{q}_{o\text{grav}}$  el gasto promedio en cada intervalo de tiempo  $\Delta t$ .

El fin de tomar en cuenta el tamaño múltiple de los bloques en los YNF<sup>36, 37</sup>, es realizar una mejor caracterización de los yacimientos (en este caso de los YNF), para extraer los hidrocarburos en una forma más racional. Este hecho se ve reflejado en el comportamiento del gasto de aceite, que se presenta en el **Capítulo III**.

## **PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN**

Se ha establecido que en la naturaleza, debido a variaciones de la litología, grado de diagénesis, esfuerzos a que es sometida la roca, etc., se presenta comúnmente un tamaño múltiple de los bloques de un yacimiento naturalmente fracturado. Aunado a estos fenómenos naturales, se presenta la segregación gravitacional, efecto en el que debido a ciertas condiciones favorables se desarrolla y se da la separación de los fluidos existentes en el yacimiento, debido a la diferencia de densidades. Por otra parte, un gran porcentaje de los trabajos publicados sobre la caracterización de este tipo de yacimientos, mediante el análisis de resultados de pruebas de variación de presión, supone que los bloques de matriz son de tamaño constante<sup>3-12, 24-26, 30, 31</sup>.

Solamente se encontraron algunas investigaciones que tratan expresamente la variabilidad del tamaño de los bloques de la matriz<sup>13-15, 36-38</sup>, al estudiar el comportamiento de los yacimientos naturalmente fracturados mediante pruebas de variación de presión. Del problema directo, o sea el estudio del comportamiento de la presión conociendo los parámetros del yacimiento, se dispone del desarrollo de la solución de este problema para el caso de distribución discreta de  $NB$  tamaños de bloques<sup>15</sup>, con análisis de resultados para " $n_j$ " bloques de cada uno de los tamaños y además para la variación continua de los tamaños de bloques, tomando en cuenta el efecto de segregación gravitacional.

---

En cuanto al alcance específico de este trabajo, primeramente se desarrollan y se aplican las ecuaciones correspondientes al caso de tamaño múltiple de bloques de matriz, considerando funciones continuas de probabilidad, lineales y exponenciales, incluyendo ambas los casos en los que prevalecen bloques de matriz pequeños (funciones decrecientes) o bloques de matriz grandes (funciones crecientes).

Se desarrollaron y aplicaron modelos matemáticos que incluyen efectos gravitacionales, para analizar e interpretar resultados, tanto de casos hipotéticos como reales. Se ha encontrado que los diferentes tamaños de los bloques, sus frecuencias de distribución, así como la presencia de zonas con poco o nulo fracturamiento, influyen fuertemente en el comportamiento de producción de aceite de los YNF, en los que predominan, o por los menos son importantes, los efectos de segregación gravitacional.

**APLICACIÓN DE MODELOS DE YACIMIENTOS  
NATURALMENTE FRACTURADOS PARA  
CALCULAR EL COMPORTAMIENTO DE  
PRODUCCIÓN DE ACEITE, CONSIDERANDO  
EFECTOS GRAVITACIONALES Y VARIACIONES  
DISCRETAS Y CONTINUAS DE LOS TAMAÑOS DE  
LOS BLOQUES**

III.1 ESTABLECIMIENTO DE LOS MODELOS.

El yacimiento naturalmente fracturado (YNF) se considera que está compuesto por bloques horizontales de espesor variable  $h_{ma}$ , que puede tener un número finito  $NB$  de tamaños de bloques de matriz  $h_{ma1}, h_{ma2}, \dots, h_{ma NB}$ , o bien la variación de  $h_{ma}$  puede ser continua; los bloques están separados por fracturas de espesor  $h_f$ .

En el caso de un número finito  $NB$  de tamaños de bloques, se cumple que:

$$\sum_{j=1}^{NB} f_j(h_{ma}) = 1, \quad (3.1)$$

donde la función  $f_j$  representa el volumen de los bloques de tamaño  $h_{maj}$ , expresado en fracción de volumen total de la matriz del YNF. Si la variación de  $h_{ma}$  es continua, se tiene

$$\int_{h_{min}}^{h_{max}} f dh_{ma} = 1 \quad (3.2)$$

Para el análisis, se considera que la resistencia al flujo en las fracturas es despreciable, por lo cual la conductividad que realmente tengan las mismas no afecta a los valores de  $q_{o grav}$  de los bloques.

Por otra parte, considerando un bloque de tamaño  $h_{ma}$ :

$$q_{o grav} = \frac{k_o A}{\mu_o B_o} g \Delta \rho \quad , \quad (3.3)$$

donde se enfatiza que la  $\Delta p$  por efectos gravitacionales,  $\Delta p_{grav} = g \Delta \rho h_{ma}$ , sí aumenta con  $h_{ma}$ , pero no el gradiente gravitacional  $g \Delta \rho$  y por tanto  $q_{o\ grav}$  no aumenta con  $h_{ma}$ ;  $q_{o\ grav}$  es el gasto de aceite del bloque, por segregación gravitacional.

Así que, cuando se dice en bloques grandes predominan los efectos gravitacionales, realmente significa que

$$\Delta p_{grav} > p_c ,$$

o bien que  $q_{o\ grav} > q_{o\ imb}$ , pero no porque  $q_{o\ grav}$  aumenta con  $h_{ma}$  sino porque  $q_{o\ imb}$  disminuye al aumentar  $h_{ma}$ ;  $q_{o\ imb}$  es el gasto de aceite por imbibición, que para el caso de un yacimiento de aceite mojable por agua está dado por:

$$q_{o\ imb} = \frac{k_o A}{\mu_o B_o} \frac{p_c}{h_{ma}} . \quad (3.4)$$

En las Ecs. 3.3 y 3.4,  $A$  es el área horizontal transversal al gradiente gravitacional, de los bloques de altura  $h_{ma}$ , como se muestra en la **Fig. III.1** (aunque estos a su vez pueden estar divididos en muchos bloques por fracturas verticales, lo cual no afecta para el cálculo de  $q_{o\ grav}$ , en el contenido de este desarrollo) y  $\Delta \rho$ , para el caso de un yacimiento de aceite en la etapa de saturación, es la diferencia de densidades entre el gas y el aceite, a las condiciones del yacimiento;  $p_c$  es la presión capilar.

Las demás variables tienen el significado ya conocido. Por otra parte, las variables están en unidades de Darcy; la ecuación correspondiente a la Ec. 3.3, en Bl/día, D, m<sup>2</sup>, kg/m<sup>3</sup>, m/s<sup>2</sup> cp es:

$$q_{o\ grav} = 5.364 \times 10^{-4} \frac{k_o A}{\mu_o B_o} g \Delta \rho . \quad (3.5)$$

Para un YNF con NB tamaños de los bloques horizontales, teniendo  $n_j$  bloques cada uno de estos tamaños, el gasto total de aceite  $q_{ot\ grav}$  por efectos gravitacionales es:

$$q_{ot\ grav} = \sum_{j=1}^{NB} n_j q_{oj} . \quad (3.6)$$

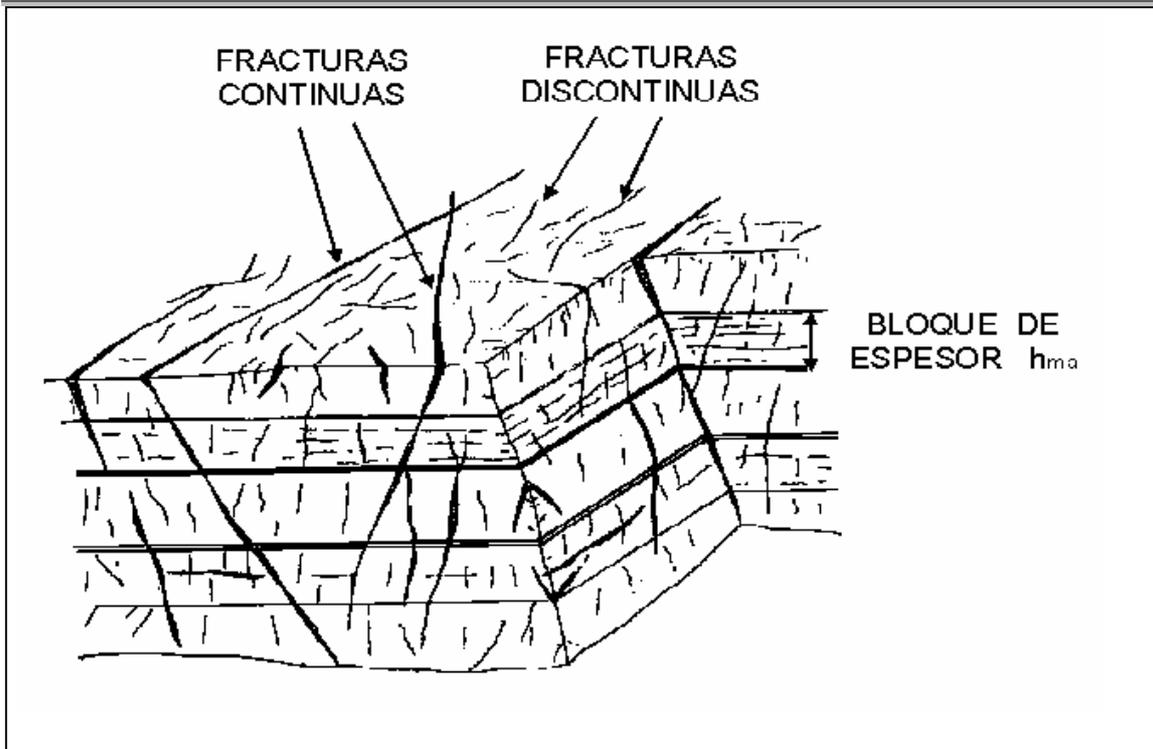


Fig. III.1 Representación de un yacimiento naturalmente fracturado con los tipos de fracturas que se pueden encontrar y los diferentes tamaños de bloques que se tienen.

Además, si se define a  $f_j$  como la fracción del volumen de los bloques de tamaño  $h_{maj}$  con respecto al volumen total:

$$q_{ot\ grav} = V_R \sum_{j=1}^{NB} \frac{f_j}{A_j h_{maj}} q_{oj} \quad (3.7)$$

de donde, tomando en cuenta la Ec. 3.3, pero ya en unidades de campo, se tiene:

$$q_{ot\ grav} = 5.364 \times 10^{-4} V_R g \Delta\rho \sum_{j=1}^{NB} \frac{k_{oj} f_j}{\mu_{oj} B_{oj} h_{maj}} \quad (3.8)$$

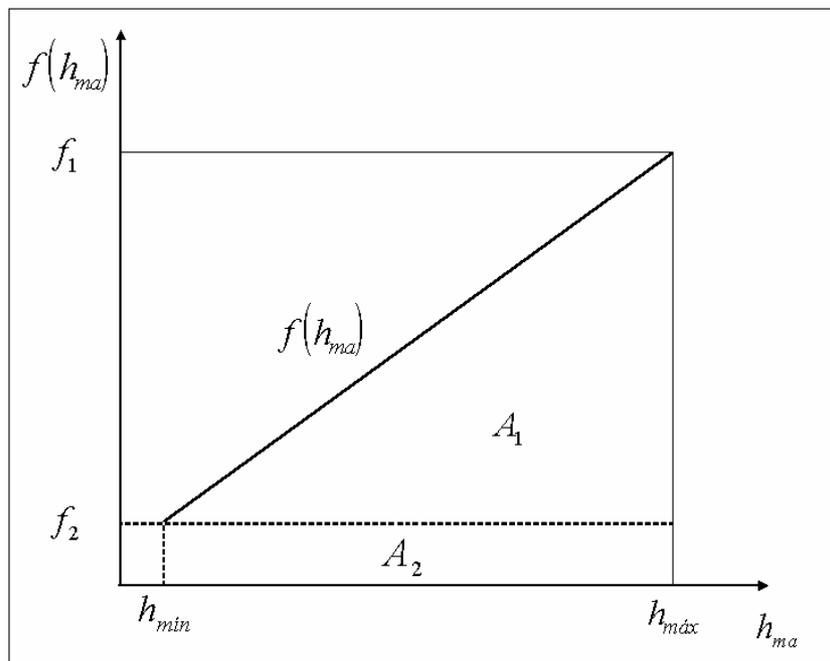
---

### III.2 DISTRIBUCIÓN LINEAL.

Estas funciones de distribución de probabilidad son de la forma

$$f = m h_{ma} + b \quad , \quad (3.9)$$

donde  $h_{ma}$  representa el tamaño variable de los bloques. En la **Fig. III.2** se muestra una de estas funciones, para el caso de  $m > 0$  (función lineal creciente), donde se incluye el rango de variación del tamaño de los bloques desde  $h_{min}$  hasta  $h_{máx}$ .



**Fig. III.2 Función de densidad de probabilidad lineal creciente.**

Esta función de distribución con  $m > 0$  significa que los bloques cada vez más grandes tienen cada vez mayor posibilidad de existir, siendo lineal la relación de aumento en frecuencia con aumento de tamaño.

En otras palabras, para este caso en el que  $m > 0$ , predominan los bloques grandes (baja intensidad de fracturamiento) y a mayores valores de "m" es mayor el predominio de los bloques grandes (a mayor valor de "m" es menor el fracturamiento). Realmente, el predominio de los bloques grandes significa que el mayor volumen poroso se encuentra en esos bloques y no que el número de ellos se mayor que el de bloques pequeños.

Si el valor de la pendiente "m", disminuye  $q_{ot\ grav.}$ , por que disminuye el número de bloques y aumenta el número de bloques grandes, por lo cual disminuye el número total de bloques.

Como se debe cumplir que  $A_1 + A_2 = 1$  (propiedad de las funciones de densidad de probabilidad y se obtiene a partir de la Ec. 3.1), que equivale a que la suma de los volúmenes de bloques de todos los tamaños es igual al volumen total, entonces de la **Fig. III.2** se puede deducir que existe una relación entre  $m$  y  $b$ , por lo que no se debe considerar por separado la variación de cada uno de estos parámetros. Así, tomando en cuenta lo anterior, se puede demostrar<sup>1, 37</sup> que:

$$b = \frac{2 h_{m\acute{a}x} - m(h_{m\acute{a}x} - h_{m\acute{i}n})}{2(h_{m\acute{a}x} - h_{m\acute{i}n})} \quad (3.10)$$

Esta misma relación se mantiene (la demostración es similar) si la distribución es lineal decreciente o uniforme; es decir, si  $m \leq 0$ .

De la Ec. 3.10 se puede deducir también que sólo a medida que  $h_{m\acute{i}n} \rightarrow h_{m\acute{a}x}$  se puede incrementar  $m$ , tal que  $m > 2$ . A medida que  $h_{m\acute{i}n} \rightarrow h_{m\acute{a}x}$  se reduce el rango de tamaños de los bloques; un solo tamaño de ellos se representa con  $h_{m\acute{i}n} = h_{m\acute{a}x}$ . Con  $m = 0$  (distribución rectangular o uniforme) significa que todos los tamaños tienen la misma probabilidad de existir en el medio poroso fracturado.

---

### III.2.1 Distribución Lineal Discreta

$f_j$  se define como la fracción del volumen de los bloques de tamaño  $h_{maj}$  con respecto al volumen total; se puede expresar la Ec. 3.6 en términos de  $f_j$ , como está en las Ecs. 3.7 y 3.8

### III.2.2 Distribución Lineal Continua

Ahora, para una distribución continua  $f(h_{ma})$  del tamaño de los bloques, la ecuación equivalente a la Ec. 3.8 es:

$$q_{ot\ grav} = 5.364 \times 10^{-4} V_R g \Delta\rho \int_{h_{min}}^{h_{max}} \frac{k_o f}{\mu_o B_o h_{ma}} dh_{ma} \quad , \quad (3.11)$$

de donde, considerando la Ec. 3.9:

$$q_{ot\ grav} = 5.364 \times 10^{-4} V_R g \Delta\rho \int_{h_{min}}^{h_{max}} \frac{k_o}{\mu_o B_o} \left( m + \frac{b}{h_{ma}} \right) dh_{ma} \quad . \quad (3.12)$$

### III.3. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL.

Se representa por medio de la ecuación

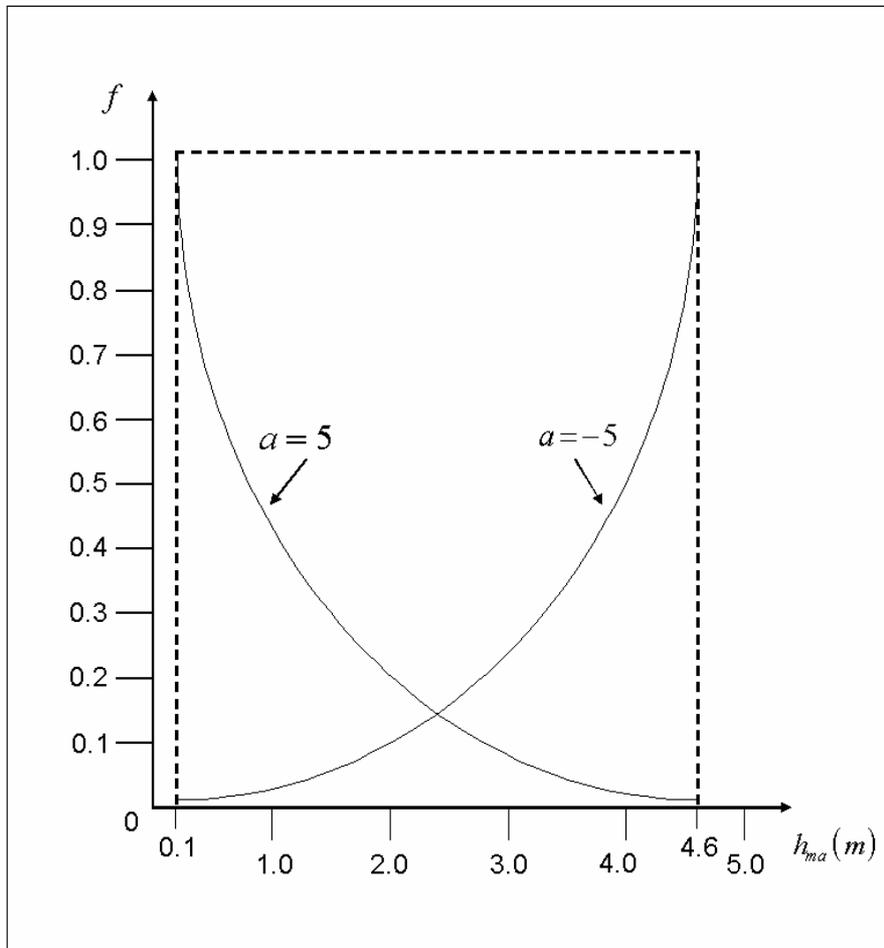
$$f = \frac{a e^{-a \frac{h_{ma}}{h_{max}}}}{h_{max} \left( e^{-a \frac{h_{min}}{h_{max}}} - e^{-a} \right)} \quad , \quad (3.13)$$

donde "a" es una constante real que define las características de la curva exponencial; esta ecuación no está definida para  $a = 0$ , pero corresponde a la función uniforme o rectangular. En las **Figs. III.3** y **III.4** se presenta esta función para valores de "a" de  $-5$  y  $5$ , para los casos Hipotético y Cantarell, respectivamente.

Aplicando la Ec. 3.2:

$$\frac{a}{h_{m\acute{a}x} \left( e^{-a \frac{h_{m\acute{a}x}}{h_{m\acute{a}x}}} - e^{-a} \right)} \int_{h_{m\acute{a}n}}^{h_{m\acute{a}x}} \left( e^{-a \frac{h_{ma}}{h_{m\acute{a}x}}} \right) dh_{ma} = 1 \quad . \quad (3.14)$$

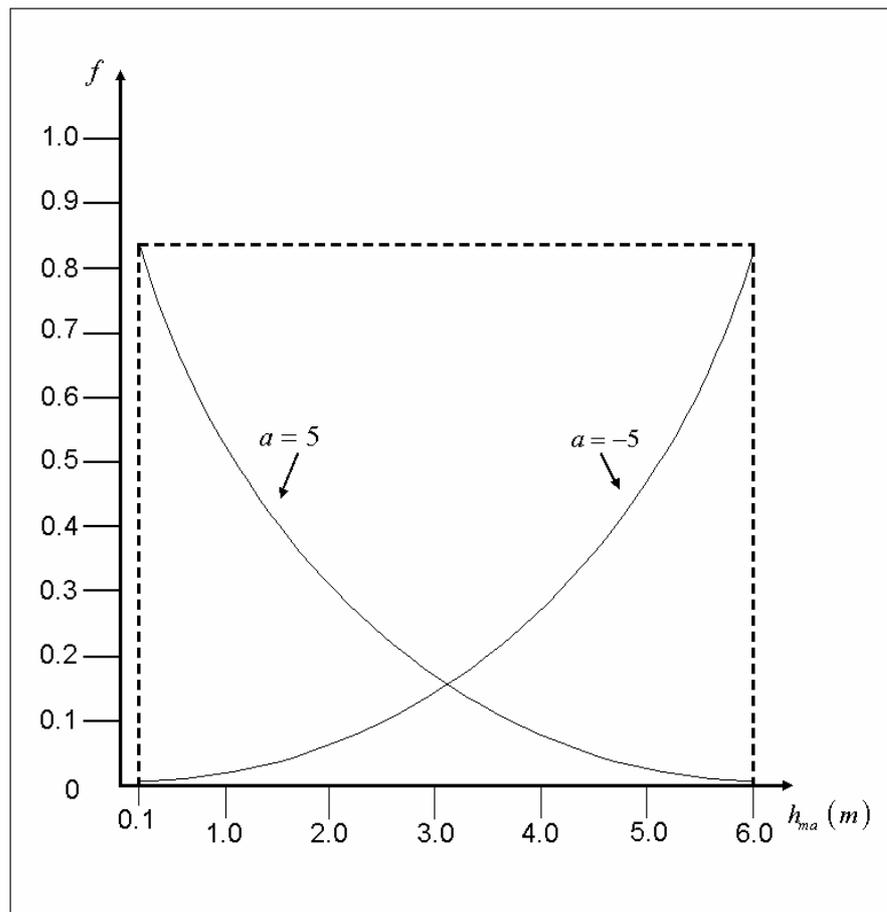
Esta ecuaci3n se cumple independientemente de los valores que tengan "a",  $h_{m\acute{a}n}$  y  $h_{m\acute{a}x}$ , por lo que, a diferencia de las distribuciones lineales, aqu3 se pueden variar por separado "a",  $h_{m\acute{a}n}$  y  $h_{m\acute{a}x}$ . Los rangos correspondientes de variaci3n son  $-\infty$  a  $+\infty$  y cero para  $h_{m\acute{a}n}$  hasta  $h_{m\acute{a}n} = h_{m\acute{a}x}$ . El aumento o disminuci3n con  $h_{ma}$  del predominio de los bloques grandes o de los peque1os ocurre con cambios m1s pronunciados que en las funciones de densidad de probabilidad lineales.



**Fig. III. 3** Funci3n de densidad de probabilidad exponencial (caso hipot3tico).

---

Como ya se estableció, en la **Fig. III.4** se muestra la función de densidad de probabilidad para el caso Cantarell; el espesor máximo es de 6 m y el mínimo, de 0.1 m.



**Fig. III. 4** Función de densidad de probabilidad exponencial (caso Cantarell).

### III.3.1 Distribución Exponencial Discreta

Los valores de  $f$  que se utilizan en la Ec. 3.8, se obtienen con la Ec. 3.13, para determinados valores de  $h_{ma}$  y fijando  $a$ ,  $h_{min}$ ,  $h_{máx}$ , cuidando que se cumpla la Ec. 3.1.

### III.3.2 Distribución Exponencial Continua

Para este tipo de distribución,  $q_{ot\ grav}$  se calcula con la Ec. 3.11, substituyendo previamente  $f$  con la expresión de la Ec. 3.13, con lo cual queda:

$$q_{ot\ grav} = 5.364 \times 10^{-4} V_R g \Delta\rho \frac{a}{h_{máx} \left( e^{-a \frac{h_{min}}{h_{máx}}} - e^{-a} \right)} \int_{h_{min}}^{h_{máx}} \frac{k_o e^{-a \frac{h_{ma}}{h_{min}}}}{\mu_o B_o h_{ma}} dh_{ma} \quad , \quad (3.15)$$

en la cual los parámetros que la constituyen, ya han sido definidos anteriormente.

## III.4 RESULTADOS.

Para ilustrar el procedimiento de cálculo se emplea un ejemplo de aplicación hipotético y posteriormente se aplica este procedimiento a un caso real. Se incluyen distribuciones lineales y exponenciales de los tamaños de los bloques, para los casos de variaciones discretas y continuas.

### III.4.1 Procedimiento de Cálculo y Ejemplo de Aplicación (hipotético).

Datos

$$\begin{aligned} A &= 21 \times 10^6 \text{ m}^2; & \Delta\rho &= 500 \text{ kg/m}^3; & g &= 9.807 \text{ m/s}^2; & \phi &= 0.091; \\ S_{oi} &= 0.667; & k_{oi} &= 0.0005 \text{ D}; & S_{gi} &= 0.05; & S_{wi} &= 0.283; \\ \mu_{oi} &= 2.924 \text{ cp}; & B_{oi} &= 1.308 \text{ m}^3/\text{m}^3; & NB &= 15; & k &= 0.000667646 \text{ D}; \\ S_{or} &= 0.25; & p_i &= 300 \text{ kg/cm}^2 \text{ abs}; & S_{g\ crit} &= 0.05; \end{aligned}$$

A estas condiciones, al iniciar la producción comienza la segregación gravitacional.

### III.4.1.1 Distribución Lineal Discreta (D. L. D.)

**Tabla 1. Tamaño y frecuencia de los bloques de la Distribución Lineal Discreta (caso Hipotético).**

1	2	3	4	5	6	7
j	$h_{ma}$ (m)	$n_j$	$f_j$	$h_j n_j$ (m)	$N_j$ $10^6 (Bl)$	$q_{ot\ grav\ in}$ $10^6 (Bl/día)$
1	0.10	50	0.01	5.00	30.6478086	0.361051488
2	0.421428	21	0.0177	8.85	54.24654766	0.151641625
3	0.742857	18	0.02674	13.37142	81.96098094	0.129978535
4	1.064285	16	0.03406	17.02857	104.3776095	0.115536476
5	1.385714	15	0.04157	20.78571	127.4072923	0.108315446
6	1.707142	15	0.05121	25.60714	156.9604838	0.108315446
7	2.028571	14	0.0568	28.4	174.079516	0.101094416
8	2.350000	14	0.0658	32.9	201.6625806	0.101094416
9	2.671428	14	0.0748	37.4	229.2455592	0.101094416
10	2.992851	14	0.0838	41.9	256.8286238	0.101094416
11	3.314285	14	0.0928	46.4	284.4116024	0.101094416
12	3.635714	14	0.1018	50.9	311.9946669	0.101094416
13	3.957142	14	0.1108	55.4	339.5776457	0.101094416
14	4.278571	13	0.11124	55.62142	340.9349451	0.093873387
15	4.6	13	0.1196	59.8	366.5477908	0.093873387
		259	1.0000	499.36428	3060.883653	1.870246690

Explicación de datos de la tabla anterior.

Col. 1: Número de tamaño de los bloques.

Col. 2: Tamaño de los bloques.

Col. 3: Número de bloques de cada uno de los tamaños. Se obtiene fijando la frecuencia  $f$  y haciendo ajuste para que se tengan valores enteros de  $n$ .

Col. 4: Se considera una frecuencia creciente del tamaño de los bloques, donde los bloques más grandes (de 4.6 m) tienen una frecuencia de 11.96 veces mayor que los bloques más pequeños; esta frecuencia es con respecto al volumen total de cada uno de los tamaños.

Col. 5: Espesor total de cada uno de los tamaños de los bloques.

Col. 6: Volumen original de aceite @ c.s. en cada uno de los tamaños de los bloques y volumen original total.

Col. 7: Gasto inicial de aceite @ c.s. por efectos gravitacionales, de cada uno de los tamaños de los bloques y gasto total de aceite de YNF.

$B_o$  y  $\mu_o$  vs  $p$ , así como  $k_o$  vs  $S_o$  se usan en cualquier forma disponible. En este ejemplo:

$B_o$  vs  $p$

$$B_o = a_0 + a_1 p + a_2 p^2$$

$$a_0 = 0.898258521.$$

$$a_1 = 0.002410531.$$

$$a_2 = -0.000003485.$$

$\mu_o$  vs  $p$

$$\mu_o = b_0 + b_1 p + b_2 p^2$$

$$b_0 = 9.446533693$$

$$b_1 = -0.38438817$$

$$b_2 = 0.00005565274825$$

$k_o$  vs  $S_o$

Para

$$0.35 \leq S_o \leq 0.667: k_o = k \left( \frac{S_o}{1 - S_w} \right)^4 \quad (3.16)$$

y para

$$0.25 \leq S_o \leq 0.35: k_o = k(0.568 S_o - 0.142). \quad (3.17)$$

---

Con esto se obtiene  $S_{or} = 0.25$  y una transición continua de  $k_o$  entre los dos rangos de saturación de aceite; si  $S_{wi}$  se modifica de 0.283 a cualquier otro valor, cambia la ecuación para el segundo rango de saturación de aceite.

$$c_o = 35.3 \times 10^{-5} \left( \text{kg/cm}^2 \text{ abs} \right)^{-1}$$

$$c_{gi} = 333.333 \times 10^{-5} \left( \text{kg/cm}^2 \right)^{-1}$$

$$c_w = 4 \times 10^{-5} \left( \text{kg/cm}^2 \right)^{-1}$$

$$c_f = 6 \times 10^{-5} \left( \text{kg/cm}^2 \right)^{-1} .$$

Como aproximación:  $c_g = 1/p$

Utilizando la Ec. 3.5 se calcula  $q_{o \text{ grav}}$  por bloque, con las condiciones iniciales de presión y saturación de fluidos, así como con el resto de los datos.

Con información de la **Tabla 1** se obtienen los valores de  $q_{o \text{ grav}}$  para cada uno de los tamaños de bloques y  $q_{ot \text{ grav}}$ ; estos valores se muestran en la Col. 7 de dicha Tabla.

La compresibilidad efectiva se calcula con la ecuación:

$$c_e = c_o + c_w \frac{S_{wi}}{S_o} + c_g \frac{S_g}{S_o} + \frac{c_f}{S_o} \quad (3.18)$$

cuyo valor, para las condiciones iniciales, es  $70.98 \times 10^{-5} \left( \text{kg/cm}^2 \text{ abs} \right)^{-1}$ .

Con toda la información inicial, se procede a calcular el comportamiento por segregación gravitacional de la producción de aceite, para cada tamaño de bloques.

A un  $\Delta t$  dado (en el ejemplo se utiliza  $\Delta t = 1.01389$  días, para los bloques más pequeños, al principio del comportamiento del yacimiento):

### CAPÍTULO III

1. Se obtiene  $\Delta N_p$ , considerando  $q_{o\text{ grav}}$  constante e igual a su valor al principio del intervalo de tiempo; esta aproximación se mejora con un  $\Delta t$  más pequeño. La  $N_p$  actual se obtiene con la  $N_p$  anterior; los resultados se muestran en Col. 3 de la **Tabla 2**.
2. Se calcula  $N_r$  con la  $N_r$  anterior y  $N_p$ ;  $N_r$  es el volumen de aceite remanente.
3. Con  $c_e$  y  $N_r$  del nivel de tiempo anterior ( $c_e$  se calcula con la Ec. 3.18), se obtiene  $\Delta p$  con la ecuación:

$$\Delta p = \Delta N_p / N_r c_e , \quad (3.19)$$

y con el valor anterior de presión se calcula la nueva  $p$ .

4. Con este valor de  $p$  se obtienen  $B_o$  y  $\mu_o$  de las ecuaciones de  $B_o$  y  $\mu_o$  vs  $p$ , respectivamente.
5. Para el caso de  $A = 21 \times 10^6$ ,  $\phi = 0.091$  y  $N_r$  en ( $10^6$  Bl),  $h$  en m;  $S_o$  se calcula con la ecuación:

$$S_o = N_r B_o / 12.02019 h, \quad (3.20)$$

con lo cual se obtiene  $S_g$  ( $S_w$  es constante);  $S_o$  está en la Col. 4.

6.  $k_o$  y  $c_e$  se obtienen con las Ecs. 3.16 a 3.18; considera los rangos de  $S_o$  y el valor de  $S_{or}$ .
7.  $q_{o\text{ grav}}$  se calcula con la Ec 3.5 y se considera el número de bloques de cada tamaño. Los resultados se presentan en la Col. 5.
8. El ciclo se repite hasta cierto tiempo de explotación.

Los resultados para los bloques de 0.10, 1.385714, 2.35, 3.635714 y 4.6 m, se muestran en las **Tablas 2, 3, 4, 5 y 6**, respectivamente; se presentan también resultados de  $p$  y  $S_o$  medias del yacimiento fracturado, ponderadas tomando en cuenta el tamaño de los bloques y los resultados globales del yacimiento fracturado (**Tabla 7 y 15**).

---

En la **Tabla 2** se presenta el comportamiento de los gastos de aceite, el cual se calcula con una  $\Delta t = 1.01389$  días; se emplea esta  $\Delta t$  para que los cambios que se presenten durante el proceso puedan ser distinguidos, ya que los bloques en estudio son muy pequeños y las variaciones se pueden presentar en tiempos cortos; también se presentan resultados de las producciones acumuladas de aceite y de las saturaciones de aceite, por efectos gravitacionales, de los bloques de altura 0.10 m. Al comienzo de la explotación, el gasto de aceite es alto debido a que el número de bloques de este espesor es  $n_j = 50$  (ver **Tabla 1**); el gasto de aceite para un bloque de cualquier tamaño es el mismo a  $t = 0$ , por lo cual a mayor número de bloques, mayor el gasto de aceite. Cabe recordar, que el gasto de cada bloque por segregación gravitacional no depende de su altura.

La rapidez de declinación del gasto es mucho mayor en los bloques más pequeños, debido a que disminuye rápidamente su volumen de aceite remanente; estos bloques de 0.10 m dejan de producir a los nueve años y los bloques de mayor espesor siguen produciendo aún a los diez años.

Para calcular el volumen original de aceite de todos los bloques del mismo tamaño, se aplica la siguiente ecuación:

$$N = \frac{A\phi S_{oi} h_{maj} n_j * 6.29}{B_{oi}}, \quad (3.21)$$

donde  $h_{maj}$  es el espesor de los bloques

y  $n_j$  es el número de bloques de cada uno de los tamaños.

El volumen original de aceite para estos bloques (de espesor  $h_{maj} = 0.10$  m) es

$N = 30.647,808 \times 10^6$  Bl y el volumen de aceite producido ( $N_p$ ) a los siete años es el 46.31% con respecto al volumen original.

### CAPÍTULO III

**Tabla 2. Resultados del comportamiento de los bloques más pequeños (de altura 0.10 m) de la Distribución Lineal Discreta (caso Hipotético).**

t (años)	t (días)	Np (10 <sup>6</sup> Bl)	$\bar{p}$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\bar{S}_o$	q <sub>ot grav.</sub> 10 <sup>6</sup> (Bl/día)
	0	0	300	0.667	0.361051
	1.01389	0.366066	282.9689	0.6556	0.327444
	3.04167	0.698059	254.3524	0.6344	0.268687
	*5.06945	1.518822	231.7233	0.6154	0.223367
	10.1389	2.489169	192.1374	0.5776	0.153021
	15.20835	3.180029	166.3405	0.5497	0.115326
	30.4167	4.519150	122.7174	0.4963	0.066594
	60.8334	6.020168	84.3096	0.4412	0.037193
0.25	91.2501	6.972857	65.4306	0.4101	0.026435
0.5	182.5002	8.750822	39.8660	0.3603	0.014850
0.75	273.7503	9.897317	28.6648	0.3330	0.010741
1	365	10.757826	22.3029	0.3145	0.008247
2	730	12.721562	12.4978	0.2767	0.003363
3	1095	13.561161	9.7406	0.2619	0.001496
4	1460	13.939940	8.7030	0.2554	0.000683
5	1825	14.113912	8.2639	0.2525	0.000315
6	2190	14.194397	8.0683	0.2511	0.000146
7	2555	**AGOTAMIENTO	**AGOTAMIENTO	**AGOTAMIENTO	**AGOTAMIENTO
8	2920				
9	3285				
10	3650				

\*Los cálculos se realizan con un  $\Delta t = 1.01389$  días, pero sólo se presentan resultados para los valores de  $t$  indicados.

\*\*Se considera que los bloques de este tamaño están agotados, cuando su  $q_{ot grav}$  es menor a 50 Bl/día, o cuando su  $S_o < 0.251$ .

Para las **Tablas 3, 4, 5 y 6** el procedimiento de cálculo del comportamiento del gasto de aceite (señalado anteriormente en la pg 38), se inicia empleando una  $\Delta t = 5.06945$  días para que las variaciones de  $S_o$ ,  $p$  y  $q_{ot\ grav}$  puedan ser distinguidas; esto es debido a que el  $h_{maj}$  es mayor que en el caso anterior. El volumen original de aceite (empleando la Ec. III.21) es  $N = 127.407,292 \times 10^6$  Bl y el volumen producido acumulado a los diez años es 31.94% con respecto a  $N$ , para los bloques de 1.38571 m.

**Tabla 3. Resultados del comportamiento de los bloques de altura 1.38571 m de la Distribución Lineal Discreta (caso Hipotético).**

t (años)	t (días)	Np ( $10^6$ Bl)	$\bar{p}$ ( $kg/cm^2$ )	$\bar{S}_o$	$q_{ot\ grav}$ $10^6$ (Bl/día)
	0	0	300	0.667	0.108315
	5.06945	0.549099	293.9019	0.6629	0.104727
	10.1389	1.080008	288.0420	0.6590	0.101241
	15.20835	1.593245	282.4123	0.6551	0.097829
	30.4167	3.031162	266.8371	0.6438	0.088208
	60.8334	5.500848	240.8491	0.6229	0.072236
0.25	91.2501	7.537886	220.2457	0.6045	0.060289
0.5	182.5002	12.011148	178.1203	0.5621	0.039328
0.75	273.7503	15.106060	151.8392	0.5321	0.028971
1	365	17.468792	133.5068	0.5095	0.022956
2	730	23.636157	93.0351	0.4536	0.012779
3	1095	27.542725	72.8200	0.4218	0.009043
4	1460	30.459575	60.2513	0.3999	0.007088
5	1825	32.813122	51.5367	0.3836	0.005875
6	2190	34.799645	45.0814	0.3705	0.005045
7	2555	36.526285	40.0811	0.3598	0.004436
8	2920	38.058215	36.0806	0.3507	0.003970
9	3285	39.444133	32.7869	0.3427	0.003630
10	3650	40.714913	30.0184	0.3356	0.003335

### CAPÍTULO III

Los resultados mostrados en la **Tabla 4** para los bloques de  $h_{maj} = 2.35 \text{ m}$ , indican que el gasto de aceite inicial a  $t = 0$  es menor en comparación a los de las **Tablas 2 y 3**, ya que el número de bloques del mismo tamaño ( $n_j$ ) disminuye.

El valor de  $N = 201.662,580 \times 10^6 \text{ Bl}$  (calculado con la Ec. III.21) es mayor por el espesor de los bloques y por el mismo motivo el  $q_{ot \text{ grav}}$ ,  $\bar{S}_o$  y la  $p$  son mayores a los diez años de producción, que los valores correspondientes a los de la **Tablas 2 y 3**. La  $N_p$  hasta los diez años es del 27.15% con respecto a  $N$ .

**Tabla 4. Resultados del comportamiento de los bloques de altura 2.35 m de la Distribución Lineal Discreta (caso Hipotético).**

t (años)	t (días)	$N_p$ ( $10^6 \text{ Bl}$ )	$\bar{p}$ ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )	$\bar{S}_o$	$q_{ot \text{ grav.}}$ $10^6 \text{ (Bl/día)}$
	0	0	300	0.667	0.101094
	5.06945	0.512493	296.4105	0.6645	0.099111
	10.1389	1.014936	292.9040	0.6622	0.097190
	15.20835	1.507638	289.4776	0.6600	0.095286
	30.4167	2.928307	279.6687	0.6532	0.089924
	60.8334	5.524725	262.0360	0.6401	0.079516
0.25	91.2501	7.828298	246.7452	0.6278	0.070714
0.5	182.5002	13.389339	211.4215	0.5961	0.051739
0.75	273.7503	17.572261	186.5599	0.5710	0.040192
1	365	20.894868	167.9932	0.5507	0.032712
2	730	29.847742	123.7370	0.4966	0.018760
3	1095	35.590141	100.0359	0.4638	0.013292
4	1460	39.872606	84.7438	0.4408	0.010390
5	1825	43.317528	73.8627	0.4233	0.008586
6	2190	46.216864	65.6360	0.4093	0.007353
7	2555	48.731085	59.1532	0.3978	0.006454
8	2920	50.957986	53.8882	0.3879	0.005767
9	3285	52.961670	49.5127	0.3794	0.005224
10	3650	54.786502	45.8101	0.3719	0.004783

Para la **Tabla 5**  $N = 311.994,667 \times 10^6 \text{ Bl}$  y tiene  $n_j = 14$  por lo cual tiene el mismo gasto inicial de aceite que los bloques de la **Tabla 4**. Los valores, a los diez años, de  $q_{ot \text{ grav}}$ ,  $S_o$  y la  $p$ , son aún mayores a los de las **Tablas 2, 3 y 4**. El volumen producido acumulado es el 23.51% en relación a  $N$ , aunque este porcentaje va disminuyendo conforme es mayor el espesor de los bloques; la vida productiva de estos bloques es más prolongada.

**Tabla 5. Resultados del comportamiento de los bloques de altura 3.63571 m de la Distribución Lineal Discreta (caso Hipotético).**

t (años)	t (días)	Np ( $10^6 \text{ Bl}$ )	$\bar{p}$ ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )	$\bar{S}_o$	$q_{ot \text{ grav.}}$ $10^6 (\text{Bl}/\text{día})$
	0	0	300	0.667	0.101094
	5.06945	0.512493	297.6820	0.6654	0.099800
	10.1389	1.018425	295.3989	0.6639	0.098558
	15.20835	1.518063	293.1494	0.6624	0.097322
	30.4167	2.979542	286.5991	0.6580	0.093664
	60.8334	5.738528	274.3619	0.6493	0.086657
0.25	91.2501	8.290867	263.2027	0.6409	0.080180
0.5	182.5002	14.881295	235.2005	0.6179	0.064228
0.75	273.7503	20.219152	213.4979	0.5980	0.052759
1	365	24.655962	196.2133	0.5809	0.044452
2	730	37.203206	151.5633	0.5315	0.026898
3	1095	45.495799	125.8502	0.4993	0.019296
4	1460	51.722773	108.6452	0.4760	0.015122
5	1825	56.736659	96.1096	0.4579	0.012493
6	2190	60.952625	86.4637	0.4433	0.010684
7	2555	64.603184	78.7540	0.4312	0.009363
8	2920	67.831495	72.4171	0.4208	0.008354
9	3285	70.731945	67.0956	0.4118	0.007557
10	3650	73.370061	62.5501	0.4038	0.006910

### CAPÍTULO III

Esta **Tabla 6** contiene los resultados de los bloques de mayor altura (4.6 m) de este yacimiento, por lo cual a los diez años en el proceso del análisis del comportamiento del gasto de aceite, se tienen los valores más grandes de  $q_{ot\ grav}$ ,  $S_o$  y  $\bar{p}$ . El gasto inicial es menor, que al mostrado en las **Tablas 2, 3, 4 y 5**, por tener menor número de bloques. El volumen original es  $N = 366.547,791 \times 10^6 \text{ Bl}$  y el volumen de aceite producido es el 21.64% en relación a  $N$ .

**Tabla 6. Resultados del comportamiento de los bloques de altura 4.6 m de la Distribución Lineal Discreta (caso Hipotético).**

t (años)	t (días)	Np ( $10^6 \text{ Bl}$ )	$\bar{p}$ ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )	$\bar{S}_o$	$q_{ot\ grav}$ $10^6 (\text{Bl}/\text{día})$
	0	0	300	0.667	0.093873
	5.06945	0.475886	298.1685	0.6657	0.092915
	10.1389	0.946917	296.3590	0.6645	0.092004
	15.20835	1.413329	294.5705	0.6633	0.091096
	30.4167	2.785028	289.3292	0.6598	0.088397
	60.8334	5.406788	279.3929	0.6529	0.083158
0.25	91.2501	7.872565	270.1518	0.6462	0.078198
0.5	182.5002	14.429788	246.1234	0.6272	0.065314
0.75	273.7503	19.938864	226.6275	0.6102	0.055313
1	365	24.639564	210.5551	0.5952	0.047618
2	730	38.384324	166.9767	0.5495	0.029998
3	1095	47.697685	140.7067	0.5183	0.021795
4	1460	54.749053	122.7178	0.4952	0.017160
5	1825	60.443580	109.4183	0.4770	0.014199
6	2190	65.236226	99.0766	0.4623	0.012147
7	2555	69.386205	90.7431	0.4499	0.010642
8	2920	73.054776	83.8473	0.4392	0.009491
9	3285	76.348956	78.0232	0.4300	0.008580
10	3650	79.343365	73.0234	0.4218	0.007841

En las Figs. III.5, III.6 y III.7 se muestra la variación de  $N_p$ ,  $p$  y  $S_o$  contra  $t$  respectivamente, correspondiente a los valores presentados en las Tablas 2 a 6.

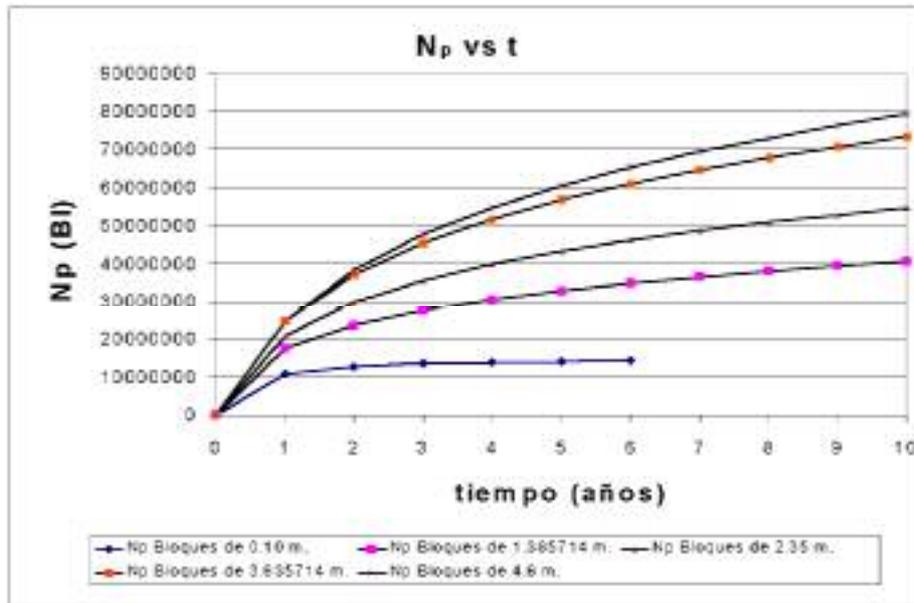


Fig. III. 5 Comparación de la producción de los bloques, de los tamaños indicados (caso hipotético).

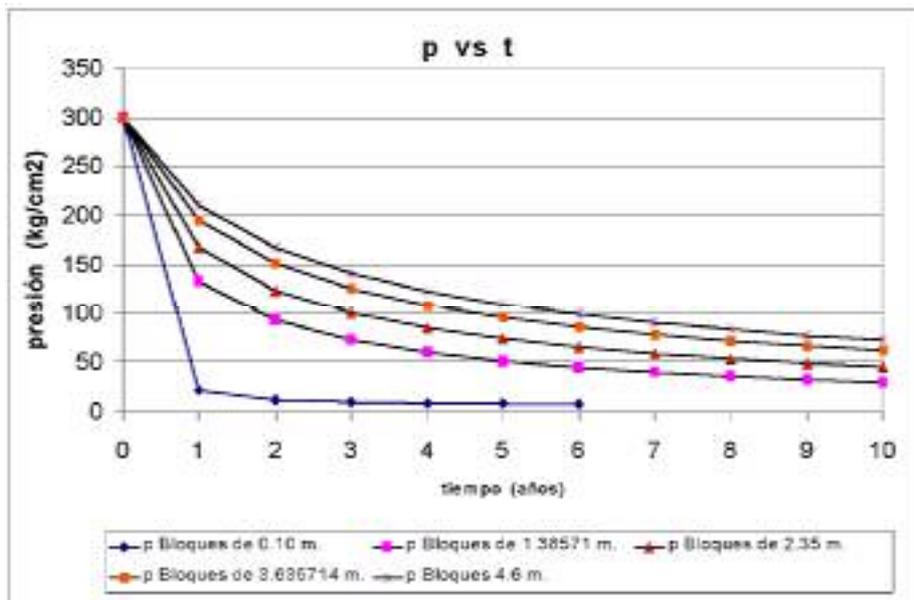
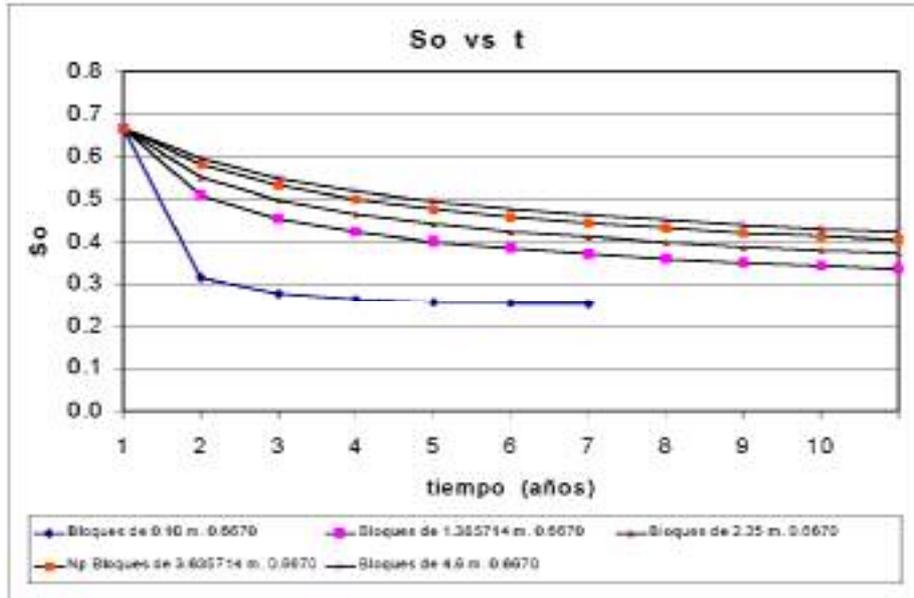


Fig. III. 6 Comparación de la presión de los bloques, de los tamaños indicados (caso hipotético).



**Fig. III. 7 Comparación de la saturación de los bloques, de los tamaños indicados (caso hipotético).**

En la **Tabla 7** se presentan los resultados globales de  $N_p$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{S}_o$  y  $q_{ot\ grav}$  del yacimiento, para la Distribución Lineal Discreta, del caso hipotético. Para calcular  $\bar{p}$ , se emplea la siguiente ecuación:

$$\bar{p} = \sum_{j=1}^{NB} (p_j * V_j) / V_{TOT}, \quad (3.22)$$

donde  $\bar{p}$  es la presión promedio del yacimiento.

$V_j$  es el volumen de roca de los bloques de un cierto tamaño.

$V_{TOT}$  es el volumen total del yacimiento.

$\bar{S}_o$  se calcula con la ecuación:

$$\bar{S}_o = \sum_{j=1}^{NB} (S_{oj} * V_j) / V_{TOT}. \quad (3.23)$$

Para obtener  $q_{ot\ grav}$ , se suman los gastos de aceite de los diferentes tamaños de bloques para cada tiempo.

El volumen original de aceite del yacimiento se calcula con la ecuación:

$$N = \frac{6.29 V_{TOT} \phi S_{oi}}{B_{oi}}, \quad (3.24)$$

donde 6.29 es un factor de conversión de unidades.

En este caso  $N = 3,060.857,941 \times 10^6 \text{ Bl}$  y el  $N_p$  a los diez años es del 25.53% en relación a  $N$ .

**Tabla 7. Resultados globales del yacimiento con Distribución Lineal Discreta del tamaño de los bloques (caso Hipotético).**

t (años)	t (días)	Np (10 <sup>6</sup> Bl)	$\bar{p}$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\bar{S}_o$	q <sub>ot grav.</sub> 10 <sup>6</sup> (Bl/día)
	0	0	300	0.667	1.867849
	5.06945	9.158207	296.4564	0.6393	1.680735
	10.1389	17.471839	293.1103	0.6379	1.472582
	15.20835	25.358681	289.9120	0.6367	1.481920
	30.4167	46.871667	281.0041	0.6318	1.312973
	60.8334	84.101466	265.4796	0.6220	1.104436
0.25	91.2501	116.149804	252.2085	0.6135	0.955806
0.5	182.5002	192.879124	221.2643	0.5900	0.706632
0.75	273.7503	251.388159	198.7601	0.5721	0.560969
1	365	298.655631	182.2963	0.5587	0.663547
2	730	419.036792	138.1247	0.5177	0.269082
3	1095	513.594023	113.8351	0.4905	0.192709
4	1460	576.906108	97.7751	0.4718	0.151081
5	1825	627.766451	86.1631	0.4582	0.126639
6	2190	670.474817	77.2784	0.4463	0.108147
7	2555	707.390154	70.2102	0.4365	0.094639
8	2920	739.998164	64.4233	0.4279	0.084288
9	3285	769.587492	59.5806	0.4201	0.076076
10	3650	781.492357	55.4347	0.4126	0.069385

III.4.1.2 Distribución Lineal Continua (D. L. C.)

Para la **Tabla 8**, el gasto inicial se calcula con la Ec.3.12, usando los valores iniciales de  $\frac{k_o}{\mu_o B_o}$ ; el resultado es  $q_{ot\ grav} = 2.624,340 \times 10^6 \text{ Bl/día}$ . Se emplean los mismos valores de tiempo (1.01389, 3.04167, 506945, . . . días) que en la distribución lineal discreta, para fines comparativos.

El procedimiento de cálculo es el mismo que el presentado en el Apéndice, para obtener  $m_c$ ,  $b_c$  y consecuentemente el  $q_{ot\ grav}$  para  $t = 0$ .

El gasto de aceite inicial para esta distribución tiene un valor mayor en comparación con el de la distribución lineal discreta (D. L. D.), y a los diez años la D. L. C. ha producido aproximadamente  $203.5 \times 10^6 \text{ (Bl)}$  más que la D. L. D., en tanto que tienen diferentes valores de  $\bar{p}$  y  $\bar{S}_o$ .

La  $N_p$  se calcula de la misma forma como se hizo en el caso de la **Tabla 7**;  $N$  es el mismo que el de la **Tabla 7** y el  $N_p$  a los diez años es el 32.18% en relación con el  $N$ . Como se puede observar, la distribución lineal continua (D. L. C.) a los diez años ha producido más que la D. L. D., por lo mismo, esta última conserva mayor valor en la  $\bar{p}$  y la  $\bar{S}_o$ .

**Tabla 8. Resultados globales del Yacimiento con Distribución Lineal Continua del tamaño de los bloques (caso Hipotético).**

t (años)	t (días)	Np (10 <sup>6</sup> BI)	$\bar{p}$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\bar{S}_o$	q <sub>ot grav.</sub> 10 <sup>6</sup> (Bl/día)
	0	0	300	0.667	2.659527
	1.01389	2.696467	298.7577	0.6660	2.640784
	3.04167	8.051397	296.2917	0.6645	2.605792
	5.06945	13.335369	293.8640	0.6629	2.570786
	10.1389	26.367842	287.8757	0.6589	2.483373
	15.20835	38.957179	282.1279	0.6549	2.397676
	30.4167	75.421874	265.4509	0.6428	2.146271
	60.8334	140.704354	235.9149	0.6193	1.708605
0.25	91.2501	192.674481	213.5532	0.5992	1.399598
0.5	182.5002	320.387982	159.5335	0.5452	0.803730
0.75	273.7503	393.728386	133.5578	0.5145	0.586397
1	365	447.237191	116.7642	0.4929	0.468973
2	730	618.410814	65.4703	0.4236	0.221792
3	1095	699.364806	50.7195	0.3979	0.166786
4	1460	760.241817	41.9264	0.3806	0.136970
5	1825	810.235983	35.8788	0.3675	0.117543
6	2190	853.139270	31.3996	0.3569	0.103641
7	2555	890.968195	27.9225	0.3480	0.093359
8	2920	925.044357	25.1246	0.3403	0.085598
9	3285	956.287630	22.8082	0.3335	0.078815
10	3650	985.055019	20.8668	0.3275	0.072837

Las **Figs. III.8, III.9 y III.10** muestran los valores gráficamente de  $N_p$ ,  $p$  y  $S_o$  respectivamente, para los resultados globales de las D. L. D. y la D. L. C. que se presentan en las **Tablas 7 y 8**.

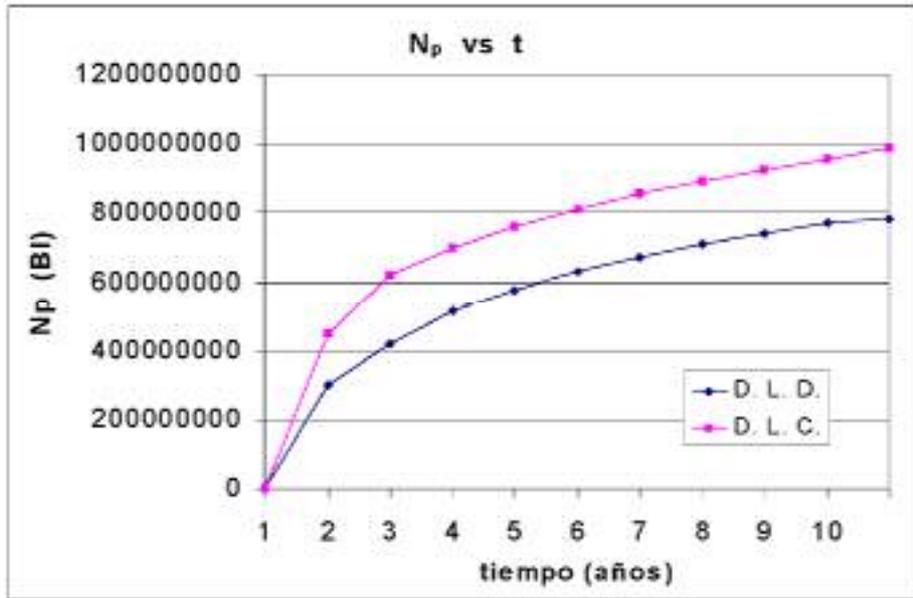


Fig. III. 8 Comparación de los valores de  $N_p$ , en las distribuciones lineales (caso hipotético).

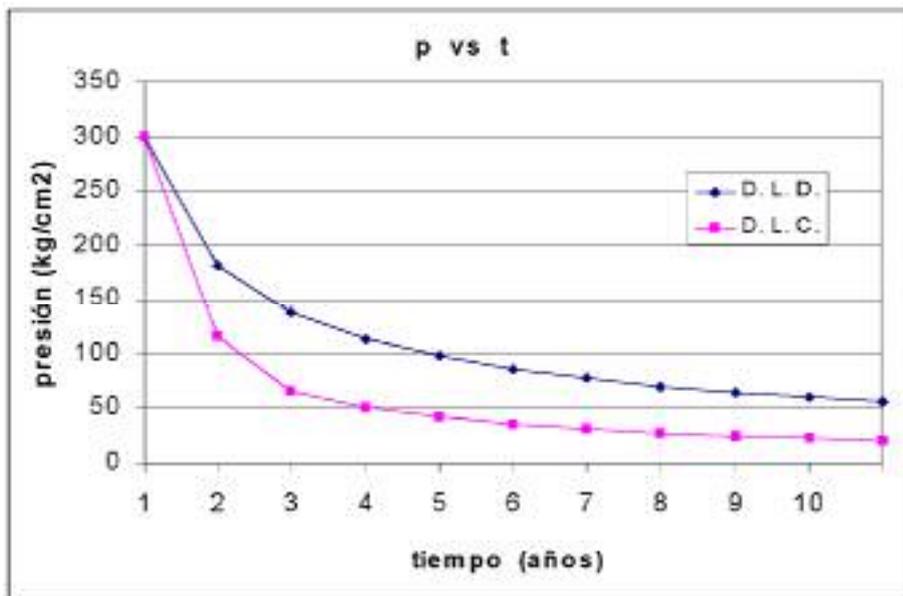
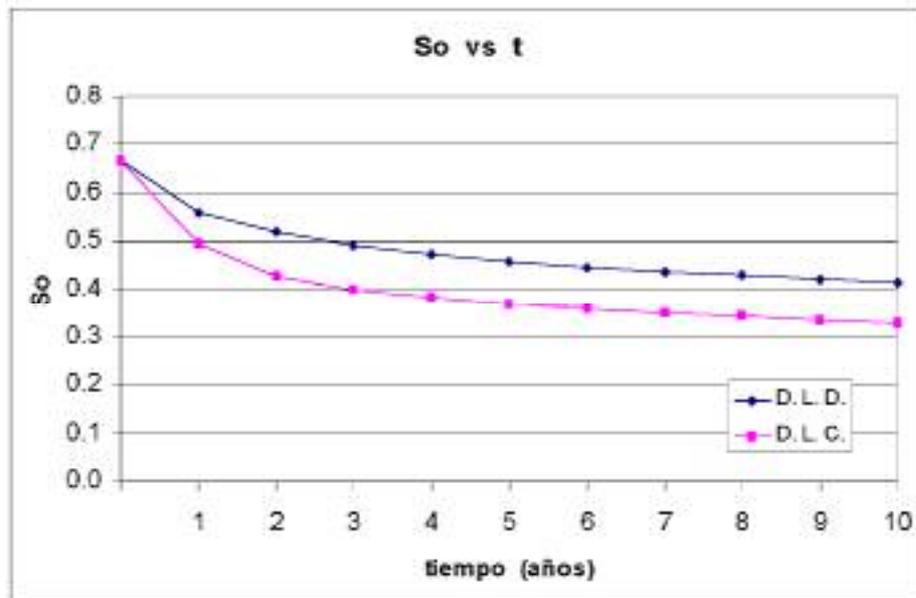


Fig. III. 9 Comparación de los valores de  $p$ , en las distribuciones lineales (caso hipotético).



**Fig. III. 10** Comparación de los valores de  $S_o$ , en las distribuciones lineales (caso hipotético).

#### III.4.1.3 Distribución Exponencial Discreta (D. E. D.)

Para calcular  $q_{ot\ grav}$  se emplea la Ec. 3.8, obteniendo  $f_j$  con la Ec. 3.13; debe de cumplirse con la condición presentada en la Ec 3.1. El resto de los valores que intervienen en la ecuación para calcular el gasto total de aceite se presenta en la página 38, en tanto que  $\mu_{oj}$ ,  $B_{oj}$  y  $k_{oj}$  se obtienen con los valores correspondientes de  $p_j$  y  $S_{oj}$ .

En la **Tabla 9** se muestra el comportamiento global del yacimiento fracturado en el que incluye las variaciones de  $\bar{S}_o$  y  $\bar{p}$ , ponderadas con respecto al volumen de roca de los bloques; además presenta valores de  $N_p$  y  $q_{ot\ grav}$  hasta los diez años.

### CAPÍTULO III

El volumen original de aceite ( $N$ ) se calcula con la Ec. 3.24, obteniendo  $N = 3,060.857,941 \times 10^6 \text{ Bl}$ , valor que es igual al de las distribuciones lineales discreta y continua, por tener los mismos parámetros iniciales. El volumen de aceite producido acumulado a los diez años es del 26.58% con respecto  $N$ .

**Tabla 9. Resultados globales del yacimiento con Distribución Exponencial Discreta del tamaño de los bloques (caso Hipotético).**

t (años)	t (días)	Np ( $10^6 \text{ Bl}$ )	$\bar{p}$ ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )	$\bar{S}_o$	q <sub>tot grav.</sub> $10^6 (\text{Bl}/\text{día})$
	0	0	300	0.667	1.410373
	1.01389	1.429963	299.3415	0.6665	1.404872
	3.04167	4.278735	298.0299	0.6656	1.395011
	5.06945	7.107522	296.7291	0.6648	1.385172
	10.1389	14.129586	293.4997	0.6627	1.360514
	15.20835	21.026644	290.3379	0.6606	1.336081
	30.4167	41.346232	281.0122	0.6542	1.262806
	60.8334	79.756642	263.4558	0.6414	1.222227
0.25	91.2501	113.891102	248.2152	0.6293	1.000337
0.5	182.5002	205.172010	207.5632	0.5940	0.702825
0.75	273.7503	269.304914	181.4149	0.5678	0.538951
1	365	318.484333	162.8120	0.5475	0.438162
2	730	478.413573	103.4984	0.4777	0.210821
3	1095	555.363566	83.2047	0.4486	0.154806
4	1460	611.867830	70.7431	0.4287	0.125094
5	1825	657.527349	61.9792	0.4141	0.106483
6	2190	696.393862	55.6463	0.4022	0.093240
7	2555	730.426737	50.0741	0.3922	0.083333
8	2920	760.843430	45.7812	0.3837	0.075586
9	3285	788.432408	42.1949	0.3762	0.069338
10	3650	813.741047	39.1445	0.3696	0.064178

---

#### III.4.1.4 Distribución Exponencial Continua (D. E. C.)

Para calcular el gasto de aceite con esta distribución del tamaño de los bloques, se emplea la Ec. 3.15, en la cual interviene una integral que no se le ha encontrado solución analítica, por lo que se emplea el método de Gauss-Jordan para obtener una aproximación de dicha integral. Se utiliza la misma información del yacimiento y  $a = -5$ , cuya función de densidad de probabilidad se presenta en la **Fig. III.3**.

En la **Tabla 10** se muestran los resultados globales del comportamiento del yacimiento, en donde se incluyen valores de  $\bar{S}_o$  y  $\bar{p}$ , ponderados tomando en cuenta el tamaño de los bloques y también valores globales de  $N_p$  y  $q_{ot\ grav}$ . El gasto de aceite inicial es menor en comparación a la distribución exponencial discreta;  $N$  es igual al volumen original de aceite de las distribuciones lineales en las que se presentan resultados globales (**Tablas 7 y 8**) y en la distribución exponencial discreta (**Tabla 9**), por tener los mismos parámetros en las propiedades de los fluidos y de la roca.

El volumen de aceite producido acumulado a diez años es el 24.01% del volumen original de aceite.

**Tabla 10. Resultados globales del yacimiento con Distribución Exponencial Continua del tamaño de los bloques (caso Hipotético).**

t (años)	t (días)	N <sub>p</sub> (10 <sup>6</sup> Bl)	$\bar{p}$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\bar{S}_o$	q <sub>ot grav.</sub> 10 <sup>6</sup> (Bl/día)
	0	0	300	0.667	1.024403
	1.01389	1.038632	299.5218	0.6666	1.021369
	3.04167	3.109745	298.5683	0.6660	1.016168
	5.06945	5.170311	297.6206	0.6654	1.011032
	10.1389	10.295689	295.2628	0.6638	0.998025
	15.20835	15.355129	292.9409	0.6623	0.985066
	30.4167	30.336361	286.0588	0.6577	0.946193
	60.8334	59.116452	272.8743	0.6484	0.870062
0.25	91.2501	85.580869	260.9430	0.6394	0.800169
0.5	182.5002	158.596411	228.0221	0.6125	0.615058
0.75	273.7503	214.720521	204.1890	0.5904	0.493032
1	365	259.709783	186.1126	0.5722	0.410129
2	730	409.406964	126.5006	0.5069	0.207997
3	1095	485.326198	103.3540	0.4763	0.151291
4	1460	540.548198	88.9221	0.4556	0.121506
5	1825	584.898236	78.6495	0.4398	0.102666
6	2190	622.371675	70.8110	0.4272	0.089494
7	2555	655.037066	64.5623	0.4166	0.079698
8	2920	684.126937	59.4266	0.4075	0.072086
9	3285	710.438357	55.1088	0.3996	0.065975
10	3650	734.519497	51.4143	0.3926	0.060954

Las **Figs. III.11, III.12 y III.13** muestran los valores de  $N_p$ ,  $p$  y  $S_o$  respectivamente, para los resultados globales de las D. E. D. y la D. E. C. que se presentan en las **Tablas 9 y 10**.

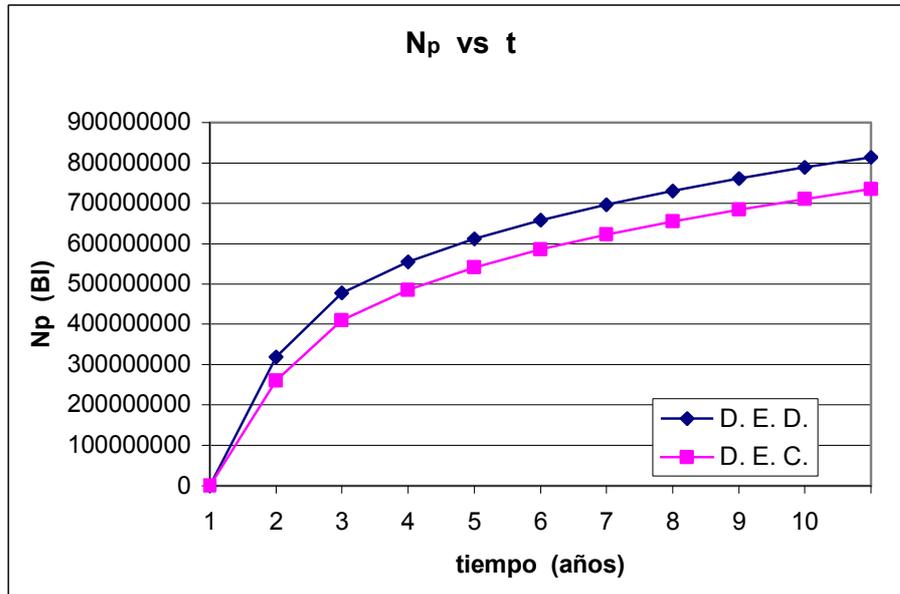


Fig. III. 11 Comparación de los valores de  $N_p$ , en las distribuciones exponenciales (caso hipotético).

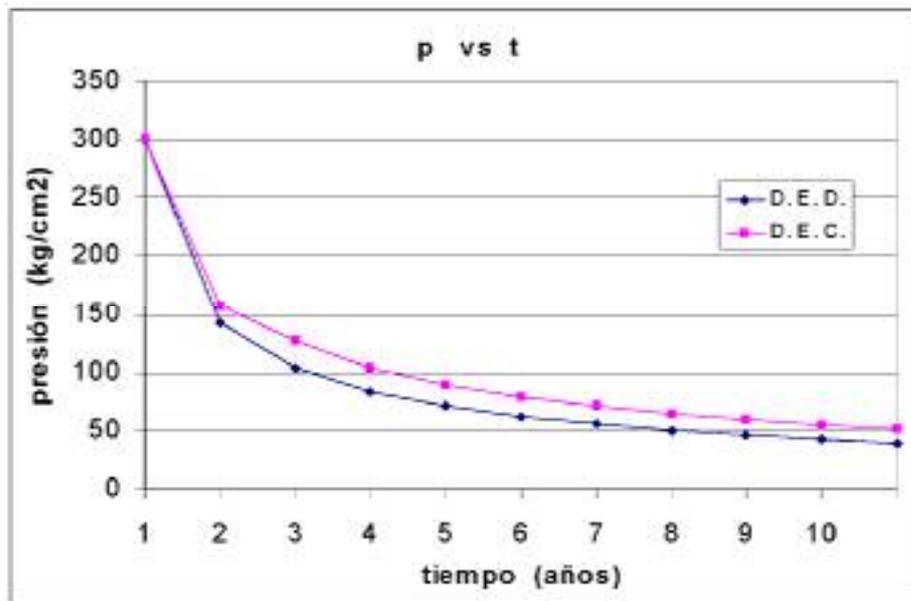


Fig. III. 12 Comparación de los valores de  $p$ , en las distribuciones exponenciales (caso hipotético).

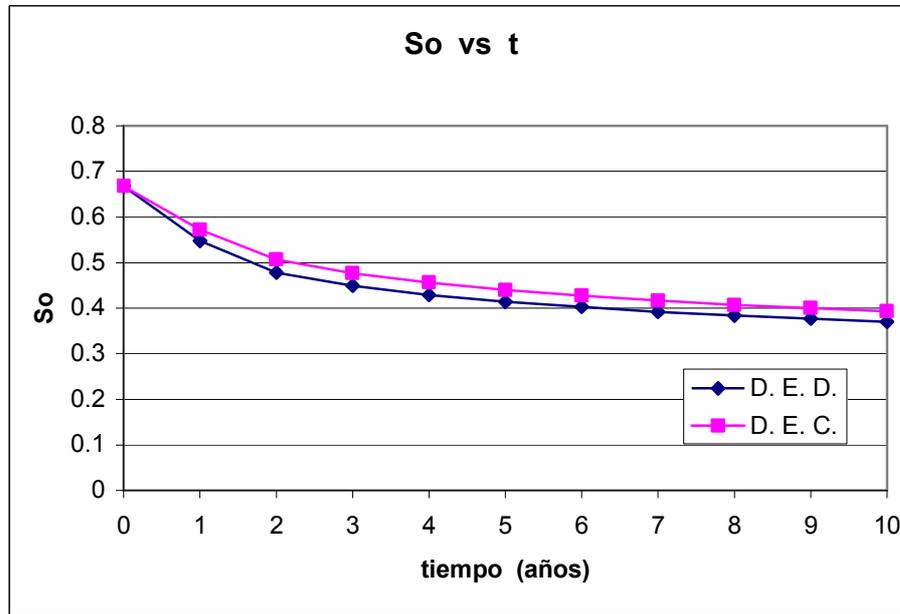


Fig. III. 13 Comparación de los valores de  $S_o$ , en las distribuciones exponenciales (caso hipotético).

#### III.4.2 Caso Cantarell

Para este caso de un yacimiento real, se incluye información sobre la altura de los bloques del yacimiento; se usa  $NB = 10$  (diez tamaños de bloques), con un espesor mínimo de 0.10 m y uno máximo de 6.0 m. El número de bloques totales es de 161. Para los datos de las propiedades de los fluidos y de la roca que no se disponen, se utilizan los mismos que en el caso hipotético (ver la **Tabla 1**).

En la **Tabla 11** se muestran las mismas siete columnas que en la **Tabla 1**; una de las diferencias que se pueden hacer resaltar es que la columna 5 muestra un espesor total de 402.9 m del yacimiento naturalmente fracturado.

**Tabla 11. Tamaño y frecuencia de los bloques (caso Cantarell ).**

1	2	3	4	5	6	7
j	$h_{ma}$ (m)	$n_j$	$f_j$	$h_j n_j$ (m)	$N_j$ $10^6 (Bl)$	$q_{ot\ grav\ in}$ $10^6 (Bl/día)$
1	0.10	40	0.0099	4.00	24.5182470	0.290919
2	0.7556	16	0.0300	12.09	74.10340	0.115536
3	1.4112	14	0.0490	19.76	121.100510	0.101094
4	2.0668	13	0.0667	26.87	164.691496	0.094548
5	2.7224	13	0.0878	35.39	216.932520	0.094548
6	3.3780	13	0.1090	43.91	269.173543	0.094548
7	4.0336	13	0.1302	52.44	321.414566	0.094548
8	4.6892	13	0.1513	60.96	373.655582	0.094548
9	5.3448	13	0.1724	69.48	425.896605	0.094548
10	6.0000	13	0.1936	78.00	478.105756	0.094548
		161	1.0000	402.90	2469.592765	1.169385

#### III.4.2.1 Distribución Lineal Discreta (D. L. D.)

Para la **Tabla 12**, el procedimiento de cálculo se realiza con un  $\Delta t = 1.01389$  días constante hasta los diez años (como para el caso hipotético, Pg. 38), para representar mejor los cambios que ocurren durante el proceso, debido al espesor tan pequeño que tienen estos bloques ( $h_{ma} = 0.1$  m). El número de bloques de este tamaño es  $n_j = 40$ , por lo que el volumen original de aceite ( $N_j$ ) para estos bloques es de  $N = 24.518,247 \times 10^6$  Bl.

Se observa que el  $q_{ot\ grav}$  inicial es relativamente alto ( $0.290919 \times 10^6$  Bl/día), disminuye rápidamente de tal manera que a un mes baja a  $0.053,329 \times 10^6$  Bl/día y se agota su producción antes de los siete años; el  $N_p$  a ese tiempo es de 46.32% con relación a  $N$ .

### CAPÍTULO III

En la **Tabla 13** muestra los resultados de  $N_p$ ,  $p$ ,  $S_o$  y  $q_{ot\ grav}$  para los bloques intermedios de tamaño  $h_{ma} = 3.3780\ m$  del yacimiento. El procedimiento de cálculo se lleva a cabo con un  $\Delta t = 5.06945\ días$ , ya que el espesor de estos bloques es mayor; los cambios en los resultados se observan bien empleando una  $\Delta t$  mayor, en comparación al de los bloques de  $h_{ma} = 0.1\ m$ . El volumen original de aceite ( $N$ ), se calcula empleando la Ec. 3.21, con la que se obtiene para estos bloques  $N = 269.173,543 \times 10^6\ Bl$ .

**Tabla 12. Resultados del comportamiento de los bloques de altura 0.10 m de la Distribución Lineal Discreta (caso Cantarell).**

t (años)	t (días)	Np ( $10^6\ Bl$ )	$\bar{p}$ ( $kg/cm^2$ )	$\bar{S}_o$	$q_{ot\ grav.}$ $10^6 (Bl/día)$
	0	0	300	0.667	0.290919
	1.01389	0.294960	282.8449	0.6555	0.263640
	3.04167	0.804046	254.0589	0.6341	0.216016
	5.06945	1.222177	231.3347	0.6150	0.179377
	10.1389	2.000892	191.6606	0.5770	0.122692
	15.20835	2.554662	165.8509	0.5491	0.092406
	30.4167	3.627300	122.2651	0.4957	0.053329
	60.8334	4.829270	83.9374	0.4406	0.029783
0.25	91.2501	5.592191	65.1123	0.4095	0.021170
0.5	182.5002	7.016174	39.6392	0.3597	0.011894
0.75	273.7503	7.934661	28.4852	0.3325	0.008602
1	365	8.623450	22.1588	0.3140	0.006597
2	730	10.191224	12.4308	0.2764	0.002677
3	1095	10.858219	9.7051	0.2617	0.001185
4	1460	11.157589	8.6831	0.2553	0.000539
5	1825	11.294347	8.2524	0.2524	0.000247
6	2190	11.357282	8.0614	0.2511	0.000114
7	2555	AGOTAMIENTO	AGOTAMIENTO	AGOTAMIENTO	AGOTAMIENTO
8	2920				
9	3285				
10	3650				

La vida productiva de estos bloques es más prolongada en comparación con los bloques de la **Tabla 12**, esto es debido a la capacidad de almacenamiento que tienen estos bloques (tamaño de los bloques). El  $N_p$  hasta los diez años para este tamaño de bloques es de 24.16% con relación al  $N$ .

**Tabla 13. Resultados del comportamiento de los bloques de altura 3.3780 m de la Distribución Lineal Discreta (caso Cantarell).**

t (años)	t (días)	$N_p$ ( $10^6$ BI)	$\bar{p}$ ( $kg/cm^2$ )	$\bar{S}_o$	$q_{ot}$ grav. $10^6$ (Bl/día)
	0	0	300	0.667	0.094548
	5.06945	0.095864	299.6828	0.6666	0.094343
	10.1389	0.573687	298.0995	0.6656	0.093546
	15.20835	1.045098	296.5320	0.6646	0.092751
	30.4167	2.421238	291.9234	0.6616	0.090382
	60.8334	5.006713	283.1211	0.6556	0.085748
0.25	91.2501	7.382858	274.8523	0.6497	0.081304
0.5	182.5002	13.446052	252.9504	0.6328	0.069431
0.75	273.7503	18.285553	234.7364	0.6174	0.059819
1	365	22.267347	219.4252	0.6036	0.052162
2	730	33.387648	176.6865	0.5602	0.033724
3	1095	40.669756	150.1850	0.5298	0.024724
4	1460	46.121217	131.7720	0.5069	0.019535
5	1825	50.505533	118.0345	0.4888	0.016186
6	2190	54.190514	107.2831	0.4740	0.013854
7	2555	57.380928	98.5763	0.4615	0.012138
8	2920	60.202405	91.3425	0.4508	0.010821
9	3285	62.737582	85.2121	0.4413	0.009780
10	3650	65.043743	79.1235	0.4330	0.008934

### CAPÍTULO III

En la **Tabla 14** se presentan los resultados del análisis de comportamiento del gasto de aceite para los bloques de  $h_{ma} = 6 m$  donde  $n_j = 13$  y el  $N = 478.105.756 \times 10^6 Bl$ ; para el cual se emplea una  $\Delta t = 5.06945$  días durante el proceso hasta los diez años. El gasto de aceite inicial es igual al mostrado en la **Tabla 13** por tener el mismo  $n_j$ ; el tiempo de declinación para estos tamaños de bloques es más prolongado como se puede observar en la **Tabla 14**. El  $N_p$  hasta los diez años para este tamaño de bloques es de 19.65% con relación al  $N$ .

**Tabla 14. Resultados del comportamiento de los bloques de altura 6 m de la Distribución Lineal Discreta (caso Cantarell).**

t (años)	T (días)	$N_p$ ( $10^6 Bl$ )	$\bar{p}$ ( $kg/cm^2$ )	$\bar{S}_o$	$q_{ot\ grav.}$ $10^6 (Bl/día)$
	0	0	300	0.667	0.094548
	5.06945	0.095862	299.7174	0.6667	0.094362
	10.1389	0.574229	298.3069	0.6658	0.093653
	15.20835	1.049001	296.9089	0.6648	0.092945
	30.4167	2.451819	292.7893	0.6622	0.090833
	60.8334	5.161803	284.8803	0.6568	0.086685
0.25	91.2501	7.747338	277.3986	0.6515	0.082680
0.5	182.5002	14.808880	257.3125	0.6363	0.071785
0.75	273.7503	20.954502	240.2931	0.6222	0.062703
1	365	26.344604	225.7611	0.6094	0.055273
2	730	42.738929	184.1760	0.5683	0.036608
3	1095	54.219254	157.7294	0.5388	0.027096
4	1460	63.022736	139.1056	0.5162	0.021500
5	1825	70.171236	125.0926	0.4982	0.017852
6	2190	76.201867	114.0600	0.4834	0.015295
7	2555	81.428509	105.0850	0.4709	0.013405
8	2920	86.049528	97.6013	0.4601	0.011953
9	3285	90.197938	91.2399	0.4506	0.010802
10	3650	93.967150	85.7483	0.4422	0.009867

En las Figs. III.14, III.15 y III.16 se presentan los valores de  $N_p$ ,  $p$  y  $S_o$  contra  $t$  respectivamente, para la D. L. D. (caso Cantarell) datos que se muestran en las Tablas 12, 13 y 14.

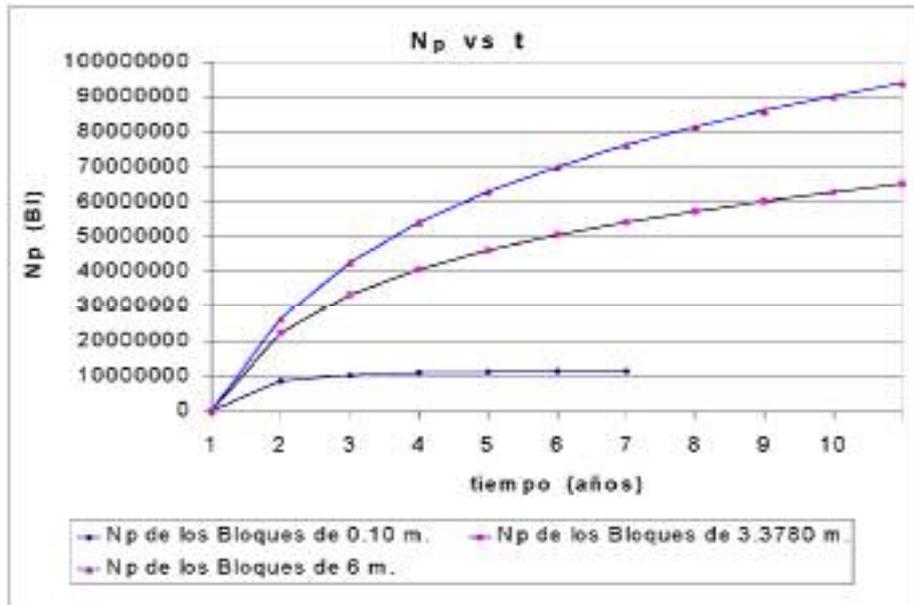


Fig. III. 14 Comparación de la producción de los bloques, de los tamaños indicados (caso Cantarell).

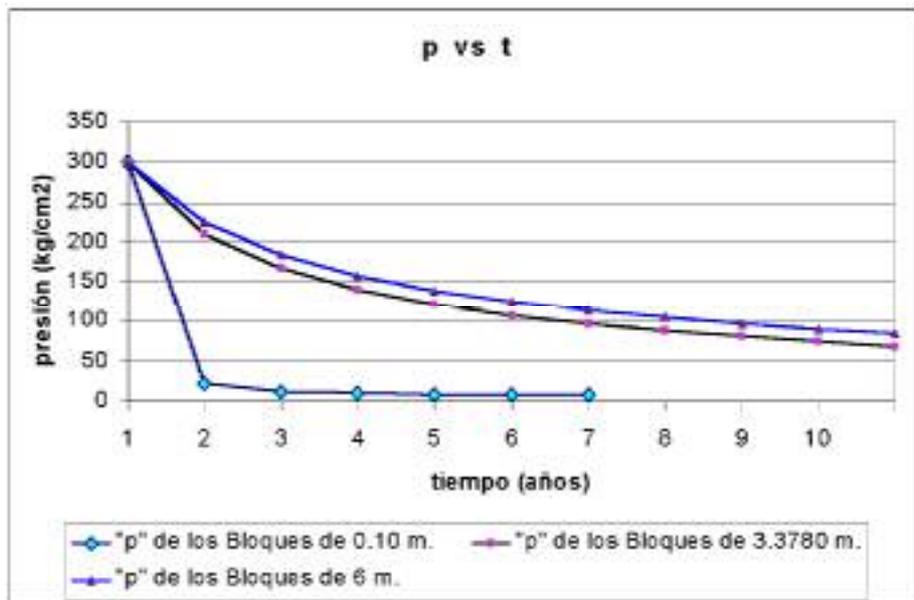


Fig. III. 15 Comparación de la presión de los bloques, de los tamaños indicados (caso Cantarell).

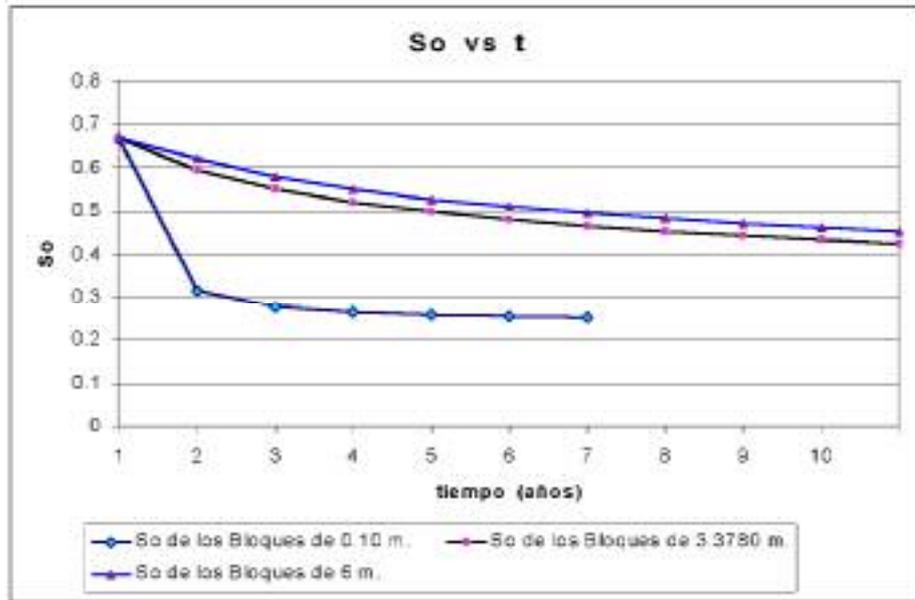


Fig. III.16 Comparación de la saturación de los bloques, de los tamaños indicados (caso Cantarell).

En la **Tabla 15** se muestra el comportamiento global del yacimiento en el que se incluyen las variaciones  $p$  y  $S_o$  medias, ponderadas con respecto al volumen de roca de los bloques, las cuales se calculan con las Ecs. 3.22 y 3.23 respectivamente. También se presenta el comportamiento de los gastos y las producciones acumuladas de aceite por efectos gravitacionales, datos en donde se toman los  $NB = 10$ . El volumen original de aceite del yacimiento es  $N = 2,469.600,417 \times 10^6 \text{ Bl}$  (el cual se calcula con la Ec. 3.24), y el  $N_p$  para este caso hasta los diez años, es de 23.55% en relación al  $N$ .

**Tabla 15. Resultados globales del yacimiento con Distribución Lineal Discreta del tamaño de los bloques (caso Cantarell).**

t (años)	t (días)	Np (10 <sup>6</sup> BI)	$\bar{p}$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\bar{S}_o$	q <sub>ot grav.</sub> 10 <sup>6</sup> (Bl/día)
	0	0	300	0.667	1.170943
	5.06945	2.114422	298.8089	0.6660	1.055280
	10.1389	7.333486	295.8770	0.6640	0.979881
	15.20835	12.232724	293.1467	0.6621	0.931264
	30.4167	25.794832	285.6571	0.6567	0.840705
	60.8334	49.804959	272.5945	0.6469	0.731188
0.25	91.2501	71.003653	261.2620	0.6380	0.654549
0.5	182.5002	123.582194	226.0668	0.6147	0.503808
0.75	273.7503	166.779568	213.3659	0.5954	0.410327
1	365	199.716486	196.9630	0.5791	0.345560
2	730	297.544485	154.1714	0.5334	0.210458
3	1095	362.517317	129.1021	0.5007	0.151352
4	1460	411.370303	112.1422	0.4779	0.118661
5	1825	450.714564	99.6933	0.4603	0.098052
6	2190	483.802019	90.0613	0.4459	0.083840
7	2555	512.436668	82.3308	0.4339	0.073416
8	2920	537.736413	75.9558	0.4236	0.065430
9	3285	560.442668	70.5868	0.4125	0.059139
10	3650	581.611955	65.3042	0.4067	0.053998

III.4.2.2 Distribución Lineal Continua (D. L. C.)

El cálculo de  $q_{ot\ grav}$  para la distribución lineal continua se hace con la Ec. 3.12, para este caso el valor de  $m_c = 0.03051$  (ver el apéndice),  $b_c = 0.150524$  y el de la

integral es  $\int_{0.1}^6 \left( m_c + \frac{b_c}{h_{máx} h_{ma}} \right) dh_{ma} = 0.79631$ . Con esto se obtiene

$$q_{ot\ grav} = 2.316,747 \times 10^6 \text{ Bl/día para } t = 0.$$

La **Tabla 16** contiene los resultados del comportamiento global del yacimiento, en donde se incluyen las variaciones de  $p$  y  $S_o$  medias, ponderadas con respecto al volumen de roca del yacimiento, así como el comportamiento de los gastos de aceite y los volúmenes de aceite producido acumulado, por efectos gravitacionales, que se presentan a estas condiciones, en las que al iniciar la producción comienza la segregación gravitacional.

El volumen original de aceite para este caso es  $N = 2,469.600,417 \times 10^6 \text{ Bl}$ , igual que en la distribución lineal discreta por tener las mismas propiedades de los fluidos y de la roca (por tratarse del mismo yacimiento). El procedimiento de cálculo del comportamiento del gasto de aceite se empieza con un  $\Delta t = 1.01389, 3.04167 \text{ días}$ .

El volumen de aceite producido acumulado ( $N_p$ ) a los diez años es el 32.86% con respecto a  $N$ .

**Tabla 16. Resultados globales del yacimiento con Distribución Lineal Continua del tamaño de los bloques (caso Cantarell).**

t (años)	t (días)	Np (10 <sup>6</sup> BI)	$\bar{p}$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\bar{S}_o$	Q <sub>ot grav.</sub> 10 <sup>6</sup> (Bl/día)
	0	0	300	0.667	2.316747
	1.01389	2.348926	298.6587	0.6660	2.299244
	3.04167	7.011288	295.9974	0.6643	2.266286
	5.06945	11.606818	293.3810	0.6625	2.233315
	10.1389	22.928499	286.9344	0.6582	2.151046
	15.20835	33.833119	280.7679	0.6540	2.070916
	30.4167	65.328328	262.9282	0.6409	1.836362
	60.8334	121.184413	231.6697	0.6156	1.435806
0.25	91.2501	164.856891	208.5415	0.5945	1.162949
0.5	182.5002	270.976106	153.4494	0.5384	0.653108
0.75	273.7503	330.572279	127.9002	0.5077	0.475684
1	365	373.978515	111.5018	0.4862	0.380547
2	730	512.878040	61.5751	0.4175	0.180624
3	1095	578.805812	47.4495	0.3922	0.136185
4	1460	628.513493	38.1439	0.3745	0.110885
5	1825	668.986485	32.5852	0.3618	0.095513
6	2190	703.848819	28.4644	0.3514	0.084405
7	2555	734.656518	25.2668	0.3428	0.076582
8	2920	762.608866	22.6813	0.3352	0.070004
9	3285	788.160447	20.5534	0.3285	0.064273
10	3650	811.620014	18.7790	0.3225	0.059203

En las **Figs. III.17, III.18 y III.19** se presentan los valores de  $N_p$ ,  $p$  y  $S_o$  contra  $t$  respectivamente, de los valores globales de las D. L. D. y D. L. C. (caso Cantarell); los datos que se muestran en las **Tablas 15 y 16**.

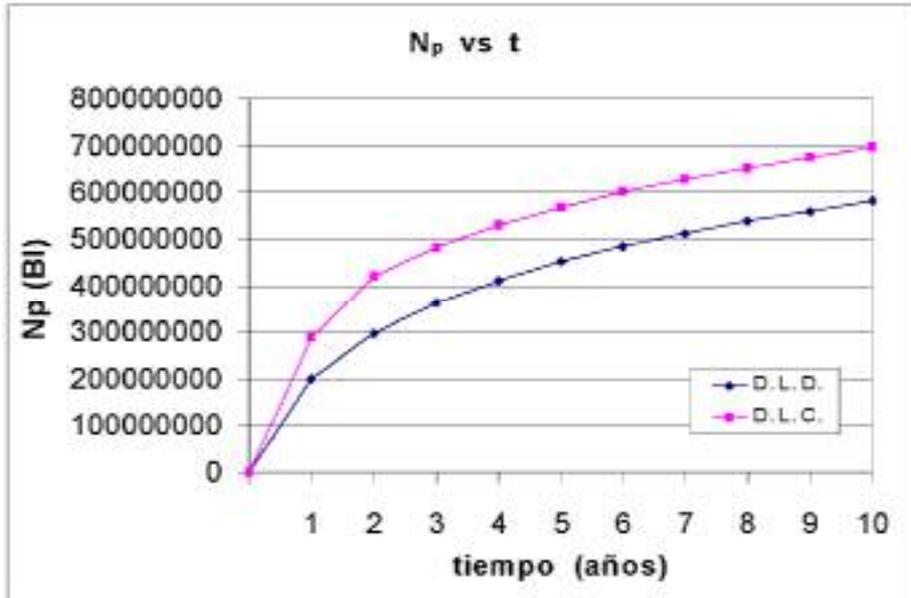


Fig. III. 17 Comparación de los valores de  $N_p$ , en las distribuciones lineales (caso Cantarell).

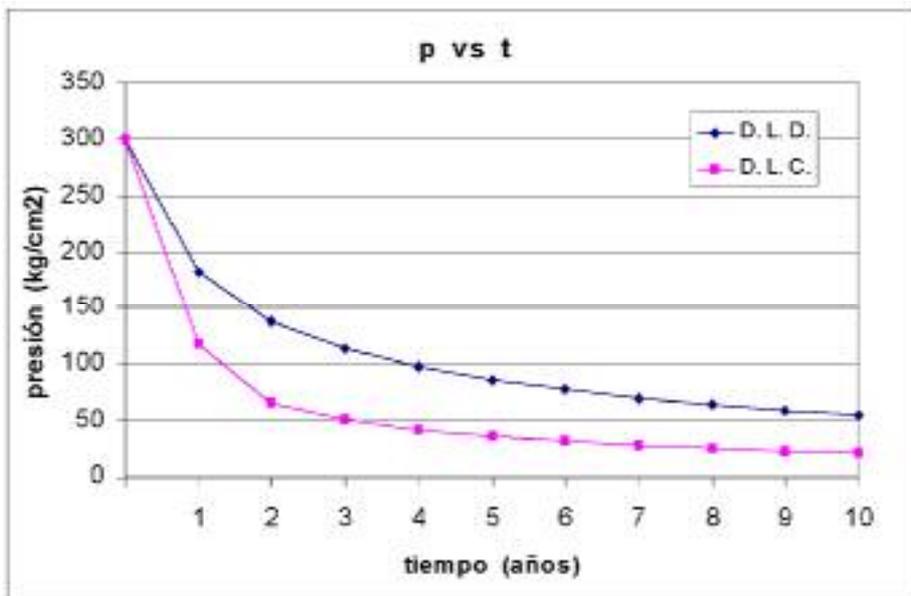
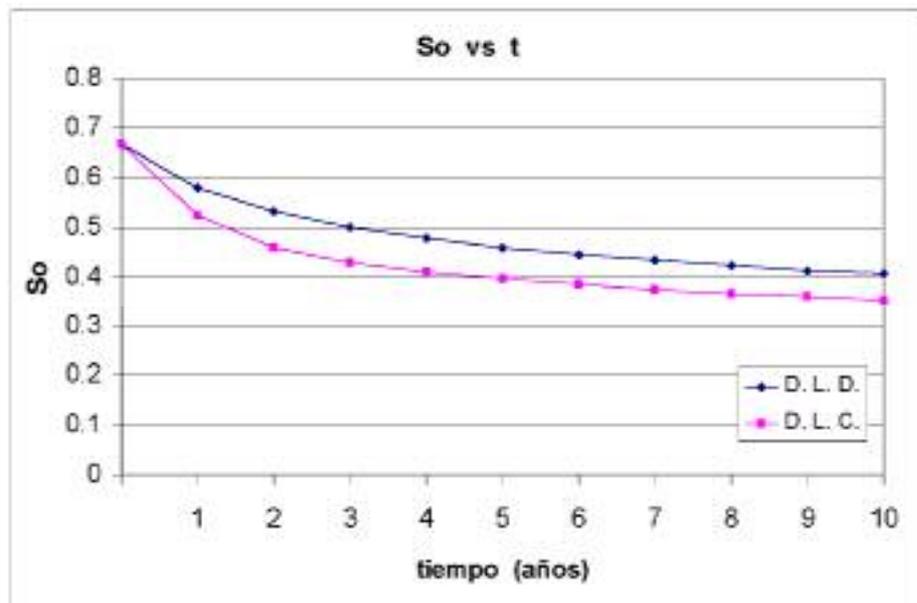


Fig. III. 18 Comparación de los valores de  $p$ , en las distribuciones lineales (caso Cantarell).



**Fig. III. 19 Comparación de los valores de  $S_0$ , en las distribuciones lineales (caso Cantarell).**

III.4.2.3 Distribución Exponencial Discreta (D. E. D.)

Al igual que en el caso hipotético, el procedimiento de cálculo es el mismo, por lo

que  $\sum_{n=1}^{NB} \frac{f_j}{h_{maj}} = 0.27252$  y el  $q_{ot\ grav}$  para un  $t = 0$  es  $q_{ot\ grav} = 0.792,856 \times 10^6 \text{ Bl/día}$ ,

tomando  $NB = 10$ . La **Tabla 17** contiene los resultados globales del comportamiento del gasto de aceite, de  $N_p$ ,  $\bar{p}$ ,  $S_o$  y  $q_{ot\ grav}$ , donde se muestran las variaciones de  $p$  y  $S_o$  medias, ponderadas con respecto al volumen de roca del yacimiento. El comportamiento del gasto de aceite se hace de  $t = 0$  hasta los diez años, como se muestra en la **Tabla 17**, considerando el número total de bloques de 161. El  $N$  es el mismo que el de anteriores distribuciones, por tener las mismas dimensiones y parámetros de la roca; el  $N_p$  a los diez años es de 23.75% con relación a  $N$ .

III.4.2.4 Distribución Exponencial Continua (D. E. C.)

Al igual que en el caso hipotético, se emplea la Ec. 3.15; se usa el método de Gauss-Jordan para obtener una aproximación de la integral. El valor de la integral

es  $\int_{0.1}^6 \left( \frac{e^{-a \frac{h_{ma}}{h_{máx}}}}{h_{ma}} \right) dh_{ma} = 0.422693$  con  $a = -5$  (ver Fig. III.4, función de densidad de

probabilidad); el  $q_{ot\ grav}$  para  $t = 0$  es  $0.695,602 \times 10^6 \text{ Bl/día}$ . La **Tabla 18** muestra los resultados globales del comportamiento del gasto de aceite, de  $N_p$ ,  $\bar{p}$ ,  $S_o$  y  $q_{ot\ grav}$ . Se muestran las variaciones de  $p$  y  $S_o$  medias, ponderadas con respecto al volumen de roca del yacimiento.

**Tabla 17. Resultados globales del Yacimiento con Distribución Exponencial Discreta del tamaño de los bloques (caso Cantarell)**

t (años)	t (días)	Np (10 <sup>6</sup> Bl)	$\bar{p}$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\bar{S}_o$	q <sub>ot grav.</sub> 10 <sup>6</sup> (Bl/día)
	0	0	300	0.667	0.792856
	1.01389	0.803870	299.5412	0.6665	0.790614
	3.04167	2.407062	298.6265	0.6660	0.786732
	5.06945	4.002382	297.7170	0.6654	0.782898
	10.1389	7.971247	295.4541	0.6639	0.773232
	15.20835	11.891109	293.2244	0.6624	0.763643
	30.4167	23.504861	286.6118	0.6580	0.734724
	60.8334	45.852749	273.9185	0.6491	0.678069
0.25	91.2501	66.477382	262.3830	0.6446	0.642003
0.5	182.5002	125.060268	229.4708	0.6138	0.482268
0.75	273.7503	169.067348	206.2587	0.5929	0.390440
1	365	204.690982	188.4279	0.5746	0.325294
2	730	323.423600	131.4646	0.5118	0.169979
3	1095	385.466057	107.3680	0.4806	0.122817
4	1460	430.294472	92.4161	0.4595	0.098278
5	1825	466.166237	81.7921	0.4435	0.082835
6	2190	496.401166	73.6938	0.4306	0.072086
7	2555	522.712812	67.2398	0.4199	0.064115
8	2920	546.114815	61.9352	0.4107	0.057929
9	3285	567.259101	57.4750	0.4027	0.052974
10	3650	586.594624	53.6579	0.3956	0.048904

### CAPÍTULO III

El volumen original de aceite ( $N$ ) tiene el mismo valor al de las distribuciones del caso Cantarell y el  $N_p$  al llegar a los diez años, es del 22.64% con relación a  $N$ .

**Tabla 18. Resultados globales del yacimiento con Distribución Exponencial Continua del tamaño de los bloques (caso Cantarell).**

t (años)	t (días)	$N_p$ ( $10^6$ BI)	$\bar{p}$ ( $kg/cm^2$ )	$\bar{S}_o$	$q_{ot}$ grav. $10^6$ (BI/día)
	0	0	300	0.667	0.695602
	1.01389	0.705264	299.5975	0.6666	0.693816
	3.04167	2.115792	298.7927	0.6661	0.690862
	5.06945	3.516709	297.9939	0.6655	0.687864
	10.1389	7.003803	296.0057	0.6643	0.680454
	15.20835	10.453335	294.0425	0.6630	0.673076
	30.4167	20.689712	288.2122	0.6591	0.650792
	60.8334	40.484660	276.9613	0.6513	0.606880
0.25	91.2501	58.943975	266.6079	0.6437	0.565812
0.5	182.5002	110.574426	237.6232	0.6207	0.453173
0.75	273.7503	151.926540	215.5086	0.6010	0.372692
1	365	185.934795	198.1439	0.5842	0.314855
2	730	300.857117	139.7138	0.5226	0.166414
3	1095	361.598518	115.1739	0.4917	0.120806
4	1460	405.692797	99.7025	0.4704	0.096721
5	1825	440.996325	88.6214	0.4542	0.081493
6	2190	470.741598	80.1271	0.4412	0.070875
7	2555	496.611260	73.3292	0.4303	0.062991
8	2920	519.603161	67.7231	0.4209	0.056878
9	3285	540.363717	62.9955	0.4128	0.051984
10	3650	559.338153	58.9386	0.4055	0.047962

En las **Figs. III. 20 III.21 y III.22** se presentan los valores de  $N_p$ ,  $p$  y  $S_o$  contra  $t$  respectivamente, de los valores globales de las D. E. D. y D. E. C. (caso Cantarell); de los datos que se muestran en las **Tablas 17 y 18**.

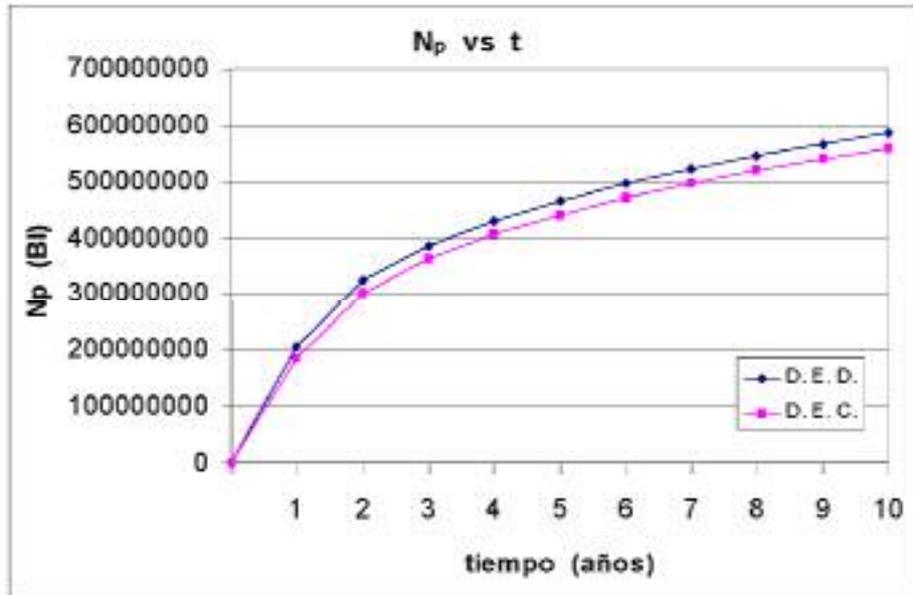


Fig. III. 20 Comparación de los valores de  $N_p$ , en las distribuciones exponenciales (caso Cantarell).

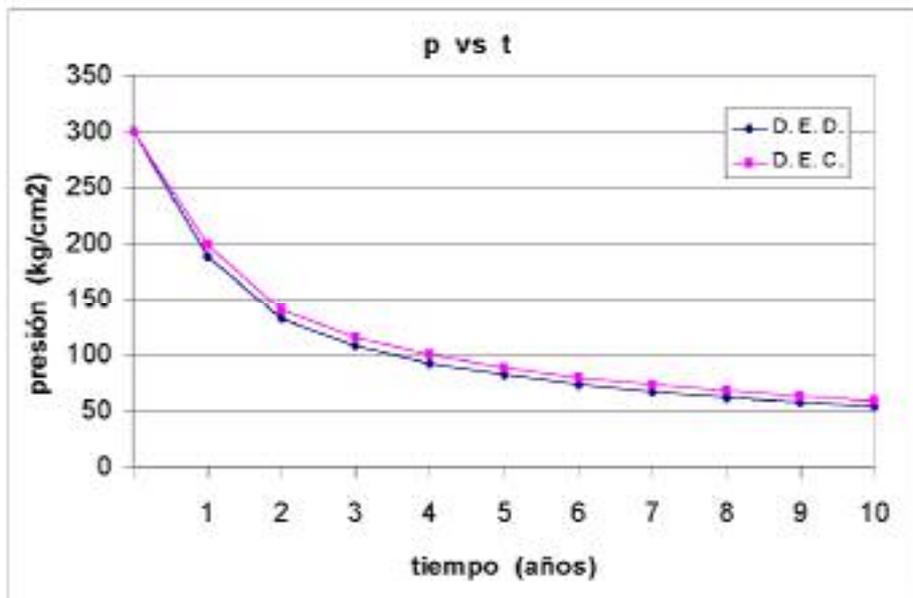


Fig. III. 21 Comparación de los valores de  $p$ , en las distribuciones exponenciales (caso Cantarell).

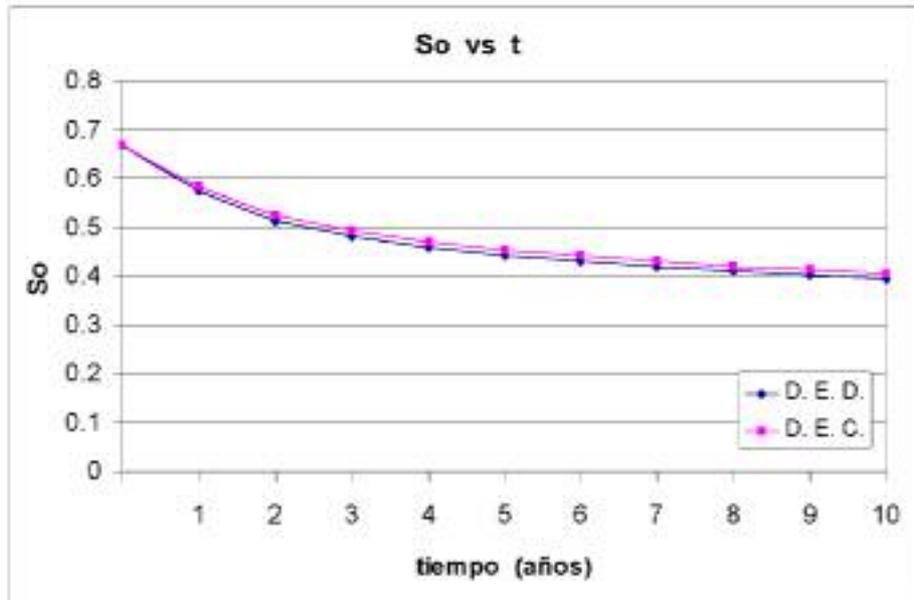


Fig. III. 22 Comparación de los valores de  $S_0$ , en las distribuciones exponenciales (caso Cantarell).

---

---

## **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

El propósito del desarrollo de esta tesis ha sido analizar el comportamiento del gasto de aceite en los yacimientos naturalmente fracturados, tomando en cuenta los efectos de segregación gravitacional y la variación continua de los tamaños de los bloques, así como ampliar las aplicaciones de modelos matemáticos existentes, que toman en cuenta el efecto de segregación gravitacional, para el caso de distribuciones discretas de los tamaños de los bloques

De los resultados que se obtuvieron del análisis del comportamiento del gasto de aceite por segregación gravitacional para dos casos (uno hipotético y una aplicación en Cantarell), en las diferentes distribuciones que se presentan en el Capítulo III, se llegó a las siguientes conclusiones:

Los bloques más pequeños, aun con una frecuencia muy reducida, producen con  $q_{ot\ grav.}$  muy elevados al principio, pero su rapidez de declinación es muy pronunciada, comportamiento que es opuesto al de los bloques más grandes.

Al aumentar el valor de la pendiente " $m$ ", disminuye  $q_{ot\ grav.}$ , debido a que disminuye el número de bloques pequeños y aumenta el número de bloques, por lo cual disminuye el número total de bloques.

**Para el caso hipotético**, donde  $NB = 15$  y  $N = 3,060.857,941 \times 10^6$  Bl, los resultados obtenidos son:

**Distribución Lineal Discreta.**

En esta distribución, al hacer el análisis por cada tamaño de bloques, se puede observar (**Tabla 2**) que la producción de los bloques de espesor  $h_{maj} = 0.10 m$  alcanza el agotamiento a los siete años debido a que se llega a la  $S_{or}$ ; esto se debe a los volúmenes pequeños de aceite contenidos en estos bloques; además, al principio de la producción se tienen altos valores en el gasto, en comparación con los bloques de mayor espesor, por lo que su vida productiva es corta.

Siguiendo con el mismo análisis de la distribución lineal discreta, pero ahora con los resultados globales (ver **Tabla 7**), el volumen producido de aceite acumulado a los diez años es  $N_p = 781.492,357 \times 10^6 Bl$ , lo que significa que es el 25.53% en relación con  $N$ ; el gasto de aceite total al mismo tiempo es  $q_{ot\ grav.} = 0.069,385 \times 10^6 Bl/día$ .

**Distribución Lineal Continua.**

Para este caso no se puede hacer un análisis de cada tamaño de bloques, sino que se hace tomando los bloques en forma global; a los diez años se tiene  $N_p = 983.320,732 \times 10^6 Bl$ , con un 26.42% de aceite producido en relación a  $N$  y con un gasto total a ese mismo tiempo de  $q_{ot\ grav.} = 0.072,850 \times 10^6 Bl/día$ .

**Distribución Exponencial Discreta.**

Para esta distribución se emplea una función exponencial creciente, con  $a = -5$ , para determinar los valores de  $f_j$ , cumpliendo además con  $\sum f_j = 1$ ; a los diez años se tiene  $N_p = 813.741,047 \times 10^6 Bl$ , con un 26.58% de aceite producido en relación a  $N$ ; el gasto de aceite total al mismo tiempo es de  $q_{ot\ grav.} = 0.064,178 \times 10^6 Bl/día$ .

---

Distribución Exponencial Continua.

Esta distribución también emplea una función exponencial y una constante  $a = -5$ , en la cual a los diez años de producción se tiene un  $N_p = 734.519,497 \times 10^6 \text{ Bl}$ , valor que corresponde a un 24.01% de aceite producido en relación a  $N$ ; con un gasto de aceite total de  $q_{ot\ grav.} = 0.064,178 \times 10^6 \text{ Bl/día}$ .

**Para el caso Cantarell**, se utiliza  $NB = 10$  y se tiene  $N = 2,469.600,417 \times 10^6 \text{ Bl}$ ; además se emplean las mismas propiedades de los fluidos y de la roca que en el caso hipotético, lo único que varía es el espesor del yacimiento, por lo que también cambian los espesores de los diferentes tamaños de los bloques. Se tienen los siguientes resultados:

Distribución Lineal Discreta.

Para esta distribución el  $n_{jTOT} = 161$ , al hacer el análisis del comportamiento del gasto de aceite para cada tamaño de bloques, se observa (ver **Tabla 12**) que en los bloques de  $h_{maj} = 0.10 \text{ m}$  se llega al agotamiento de aceite a los siete años de vida productiva, debido a que se alcanza la  $S_{or}$ ; esto se debe al tamaño que tienen los bloques y a la alta producción que se presentó al inicio, lo que trae como consecuencia una vida productiva corta. Para este caso de la distribución lineal discreta, con los resultados globales del yacimiento se tiene el  $N_p = 581.611,955 \times 10^6 \text{ Bl}$  a los diez años, que le corresponde el 23.55% del aceite producido en relación a  $N$ . El gasto de aceite total a este mismo tiempo es  $q_{ot\ grav.} = 0.053,998 \times 10^6 \text{ Bl/día}$ .

Distribución Lineal Continua.

Para este caso, el análisis se hizo como comportamiento global del gasto de aceite por tratarse de una distribución continua; a los diez años se tiene  $N_p = 696.662,519 \times 10^6 \text{ Bl}$ , lo que corresponde el 28.21% del aceite producido en relación a  $N$ ; y le corresponde un gasto de aceite total a este tiempo de  $q_{ot\ grav.} = 0.053,397 \times 10^6 \text{ Bl/día}$ .

Distribución Exponencial Discreta.

Para este caso se hace el análisis del comportamiento del gasto de aceite global donde el  $N_p = 586.594,624 \times 10^6 \text{ Bl}$  a los diez años, al que le corresponde 23.75% del aceite producido en relación a  $N$ ; el gasto de aceite total a este mismo tiempo es de  $q_{ot\ grav.} = 0.048,904 \times 10^6 \text{ Bl/día}$ .

Distribución Exponencial Continua.

El análisis del comportamiento del gasto de aceite global presenta el  $N_p = 559.338,153 \times 10^6 \text{ Bl}$  con un 22.64% del aceite producido en relación al  $N$ ; con un gasto de aceite total al mismo tiempo de  $q_{ot\ grav.} = 0.047,962 \times 10^6 \text{ Bl/día}$ .

### Recomendaciones

- Incluir en toda la teoría el mecanismo de imbibición para que los modelos sean aplicables en los casos de entrada natural o inyección de agua.
- Resolver analíticamente el caso de la integral de la Ec. 3.15.
- Encontrar la relación entre las pendientes de la distribución exponencial discreta y la distribución exponencial continua, para tener mejor base de comparación de resultados.

---

## **NOMENCLATURA**

- $a$  Constante en la función de densidad de probabilidad exponencial, Ec. 3.13.
- $A$  Área del yacimiento.
- $b$  Ordenada al origen de la función de densidad de probabilidad lineal; Ec. 3.10.
- $b_c$  Ordenada al origen en la Distribución Lineal Continua.
- $b_d$  Ordenada al origen en la Distribución Lineal Discreta.
- $B_{oi}$  Factor de volumen de aceite inicial.
- $B_o$  Factor de volumen de aceite.
- $Bl$  Unidad de volumen, barriles.
- $c_e$  Compresibilidad efectiva al aceite.
- $c_f$  Compresibilidad de la formación.
- $c_g$  Compresibilidad del gas.
- $c_o$  Compresibilidad del aceite.
- $c_{tf}$  Compresibilidad total en las fracturas.
- D. E. C.* Distribución Exponencial Continua.
- D. E. D.* Distribución Exponencial Discreta.

## NOMENCLATURA

$D. L. C.$	Distribución Lineal Continua.
$D. L. D.$	Distribución Lineal Discreta.
$f(h_{ma})$	Función de frecuencia del tamaño $h_{ma}$ de los bloques.
$f_j$	Fracción de volumen de los bloques de un tamaño $j$ con respecto al volumen total de la matriz.
$f_c$	Fracción de volumen de los bloques de un tamaño $j$ con respecto al volumen total de la matriz, de la distribución lineal continua.
$f_d$	Fracción de volumen de los bloques de un tamaño $j$ con respecto al volumen total de la matriz, de la distribución lineal discreta.
$h_{ma j}$	Espesor de los bloques de un cierto tamaño, distribución discreta.
$h_{ma}$	Espesor de los bloques, distribución continua.
$h_{máx}$	Tamaño máximo de los bloques.
$h_{mín}$	Tamaño mínimo de los bloques.
$h_f$	Espesor de las fracturas.
$k_{ma}$	Permeabilidad de la matriz.
$k_f$	Permeabilidad de las fracturas.
$k_{oi}$	Permeabilidad del aceite inicial.
$m$	Pendiente de la recta.

---

$m_c$	Pendiente de la recta de la distribución lineal continua.
$m_d$	Pendiente de la recta de la distribución lineal discreta.
$NB$	Número de tamaños de los bloques.
$N$	Volumen de aceite original, @ c.s.
$N_p$	Volumen de aceite producido acumulado, @ c.s.
$N_r$	Volumen de aceite remanente, @ c.s.
$p$	Presión.
$p_i$	Presión inicial.
$\bar{p}$	Presión promedio.
$q_o$	Gasto de aceite.
$q_{oj}$	Gasto de aceite para cierto tamaño de bloque.
$q_{o\ grav}$	Gasto de aceite por segregación gravitacional.
$q_{o\ tot}$	Gasto de aceite total.
$S_{gi}$	Saturación de gas inicial.
$S_{g\ crit}$	Saturación crítica de gas.
$S_{oi}$	Saturación de aceite inicial.
$S_o$	Saturación de aceite.

## NOMENCLATURA

$\bar{S}_o$	Saturación de aceite promedio.
$S_{wi}$	Saturación de agua inicial.
$t$	Tiempo.
$V_R$	Volumen de roca.
$V_{ma}$	Volumen de la matriz.
$V_b$	Volumen total.
$\omega$	Almacenamiento fraccional de las fracturas.
$\omega_{ma}$	Almacenamiento adimensional de la matriz.

### Símbolos

$\Delta f$	Diferencia de la fracción
$\Delta\rho$	Diferencia de densidades.
$\Delta h$	Diferencia de alturas.
$\Delta N_p$	Diferencia del volumen de aceite producido acumulado.
$\Delta t$	Intervalo de tiempo.

---

$\lambda$  Coeficiente de flujo entre la matriz y las fracturas.

$\mu$  Viscosidad.

$\phi_{ma}$  Porosidad de la matriz.

$\phi_{fb}$  Porosidad de la red de las fracturas.

## REFERENCIAS

1. Rodríguez, N. R.: Caracterización de Yacimientos de Doble Porosidad con Tamaño Múltiple de Bloques de Matriz, Tesis para obtener el grado de Doctor en Ingeniería Petrolera, UNAM (feb. del 2000).
2. Rodríguez, N. R.: "Comportamiento de la Producción de Aceite en Yacimientos Fracturados. Caso Cantarell". Versión ampliada que se presenta como Reporte interno de trabajo. Facultad de Ingeniería de la UNAM (jul. del 2004).
3. Warren, J. E. y Root, P. J.: "The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs", SPEJ (sept. de 1963) 245-55.
4. Kazemi, H.: "Pressure Transient Analysis of Naturally Fractured Reservoirs with Uniform Fracture Distribution", SPEJ (dic. de 1969) 451-62.
5. De Swaan, A.: "Analytic Solutions for the Determination of the Naturally Fractured Reservoirs Properties by Well Testing", SPEJ (jun. de 1976) 117-22.
6. Najurieta, L. H.: "A Theory for Pressure Transient Analysis in Naturally Fractured Reservoirs", JPT (jul. de 1980) 1241-250.
7. Bourdet, D. y Gringarten, A. C.: "Determination of Fissure Volumen and Block Size in Fractured Reservoirs by Type-Curve Analysis", artículo SPE 9293, presentado en la "1980 SPE Annual Technical Conference and Exhibition", Dallas TX, (sept. 21-24 de 1980).
8. Cinco, L. H. y Samaniego, F. V.: "Transient Analysis for Fractured Wells", JPT (sept. de 1981) 1749-66.
9. Gringarten, A. C.: "Interpretation of Tests in Fissured and Multilayered Reservoirs with Double-Porosity Behavior: Theory and Practice", JPT (abr. de 1984), 549-64. También artículo SPE 10044, presentado en el SPE International Petroleum Exhibition and Technical Symposium, Beijing, China, (mar. 18-26 de 1982).
10. Cinco-L. H. y Samaniego V. F.: "Pressure Transient Analysis for Naturally Fractured Reservoirs", artículo SPE 11026 presentado en la "1982 SPE Annual Fall Technical al Conference and Exhibition", N. Orleans, LA, (sept. 26-29 de 1982).
11. Bourdet, D., Ayoub, J. A., Whittle, T. M., Pirad, Y. M. y Kniazzeff, V.: "Interpreting Well Tests in Fractured Reservoirs", World Oil (oct. de 1983) 77-87.

- 
12. Braester, C.: "Influence of Block Size on the Transition Curve for Drawdown Test in a Naturally Fractured Reservoir", SPEJ (oct. de 1984) 498-504.
  13. Belani, A. K y Jalali-Yazdi, Y.: "Estimation of Matrix Block Size Distribution in Naturally Fractured Reservoirs", artículo SPE 18171, presentado en la "1988 SPE Annual Technical Conference and Exhibition", Houston, TX, (oct. 2-5 de 1988).
  14. Johns, R. T. y Jalali-Yazdi, Y.: "Comparison of Pressure-Transient Response in Intensely and Sparsely Fractured Reservoirs", SPEFE, (dic. de 1991) 513-18. Tesis de Maestría, U. de Stanford (1989).
  15. Cinco-L. H., Samaniego. V. F. y Kuchuk, F.: "The Pressure Transient Behavior for Naturally Fractured Reservoirs with Multiple Block Size", artículo SPE 14168, presentado en la "1985 SPE Annual Technical Conference and Exhibition", Las Vegas, NV, (sept. 22-25 de 1985).
  16. Bourdet, D., Whittle, T. M., Douglas, A. A. y Pirard, Y. M.: "A New Set of Type Curves Simplifies Well Test Analysis", World Oil (mayo de 1983).95-106.
  17. Bourdet, D. Ayoub, J. A. y Pirard, Y. M. : "Use of pressure Derivative in a Well Test Interpretation", artículo SPE 12777, presentado en el "1984 SPE California Regional Meeting" Long Beach, CA. (abr. 11-13 de 1984); también SPEFE (jun. de 1989) 293-302.
  18. Bourdet, D., Alagoa, A., Ayoub, J. A. y Pirard, Y. M.: "New Type Curves Aid Analysis of Fissured Zone Well Test", World Oil (abr. De 1984) 111-124.
  19. Alagoa, A., Bourdet, D. y Ayoub, J. A.: "How to Simplify the Analysis of Fractured Well Tests", World Oil (oct. de 1985) 97- 102.
  20. Jalali-Yazdi, Y. y Ershaghi, I.: "A Unified Type Curve Approach for Pressure Transient Analysis of Naturally Fractured Reservoirs", artículo SPE 16778, presentado en la "1987 SPE Annual Conference and Exhibition", Dallas, TX (sept. 27-30 de 1987).
  21. Earlougher Jr. R. C: Advances in Well Test Analysis, SPE Monograph, (1977).
  22. Kreyszig, E.: Advanced Engineering Mathematics, Ch. 4, John Wiley and Sons (1962).

## REFERENCIAS

23. Jalali-Yazdi, Y. y Ershaghi, I.: "Pressure Transient Analysis of Heterogeneous Naturally Fractured Reservoirs", artículo SPE 16341, presentado en el "1987 SPE California Regional Meeting", Ventura, CA, (abr. 8-10).
24. Serra, K. V., Reynolds, A. C. y Raghavan, R.: "New Pressure Transient Analysis Methods for Naturally Fractured Reservoirs", artículo SPE 10780 presentado en S. Francisco, CA, mar. 24-26 de 1982. También JPT (dic. de 1983).
25. Najurieta, L. H.: "Interference and Pulse Testing in Uniformly Fractured Reservoirs", artículo SPE 8283, presentado en la "1979 SPE Annual Fall Technical Conference and Exhibition", Las Vegas, NV (sept. 23-26 de 1979).
26. Jalali-Yazdi, Y.: "Pressure Transient Behavior of Heterogeneous Naturally Fractured Reservoirs", Tesis Doctoral, Universidad del Sur de California (ago. de 1987).
27. Gray, W. y Matthews, T.: Treatise on Bessel Functions, (1931).
28. Abramowitz, M. y Stegun, I.: Handbook of Mathematical Functions. Bessel Functions of Integer Order. Novena Impresión. (nov. de 1970).
29. Stehfest, H.: "Numerical Inversion of Laplace Transforms; communications of ACM (ene. de 1970) 47-49.
30. Chez, F. y Janot, P.: "Statistical Calculation of Elementary Matrix Blocks in Fractured Reservoirs", artículo SPE 4047 presentado en el "1972 SPE Annual Fall Meeting", S. Antonio TX, (oct. 8-11 de 1972).
31. Janot, P.: "Determining the Elementary Matrix Block in a Fissured Reservoir-Eschau Field, France", JPT (jul. de 1973) 523-30.
32. Moench, A. F.: "Double-Porosity Models for a Fissure Groundwater Reservoir With Fracture Skin", Water Resour. Res., Vol 20, No. 7 (jul. de 1984) 831-46.
33. Barenblatt, G. E. y Cols.: "Basic Concepts in the Theory of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks", JAMM (1960) Vol. 24, 1286-1303.
34. Barenblatt, G. E.: "On Certain Boundary-Value Problems for the Equations of Seepage of a Liquid in Fissured Rocks", JAMM (1963) Vol. 27, 513-18.

- 
35. Kazemi, H., Seth, M. S. y Thomas, G. W.: "The Interpretation of Interference Tests in Naturally Fractured Reservoirs with Uniform Fracture Distribution", SPEJ (dic. de 1969) 463-72.
  36. Rodríguez N. R., Cinco-L. H. y Samaniego V. F.: "Caracterización de Yacimientos Naturalmente Fracturados Considerando Tamaño Variable de Bloques". Artículo Técnico presentado en el XXXVIII Congreso Nacional de la AIPM, realizado en Veracruz, Ver., (may. 11-13 del 2000), y publicado en la Revista Ingeniería Petrolera; (nov. del 2000).
  37. Rodríguez N. R., Cinco-L. H. y Samaniego V. F.: "Fractured Reservoir Parameters Estimation Considering Multiple Block Size". Artículo Técnico SPE 74387, presentado en la "2002 SPE International Petroleum Conference and Exhibition in México", Villahermosa, Tab., (feb. 10-12, del 2002).
  38. Rodríguez N. R., Cinco-Ley, H., Samaniego, V. F.: "A Variable Block Size Model for the Characterization of Naturally Fractured Reservoirs", Artículo Técnico SPE 71570, presentado en la "2001 SPE Annual Technical Conference and Exhibition" realizado en New Orleans, Louisiana, (sep. 30-oct. 3, del 2001).
  39. Rodríguez N. y Vásquez C. M. A.: "Models for Oil Recovery from Naturally Fractured Reservoirs, Considering Multiple Block Size, Capillarity And Gravity Effects". Artículo Técnico presentado en la "2004 AAPG International Conference and Exhibition", realizada en Cancún, Q. R., (oct. 24-27 del 2004).
  40. Rodríguez N. R.: "Comportamiento de la Producción de Aceite en Yacimientos Fracturados. Caso Cantarell". Artículo técnico presentado en el XLIII Congreso Nacional de la AIPM, Puebla. Pue. (abr. 14-17 del 2005), en el Primer Simposio de Investigación de la Facultad de Ingeniería (dic. 2 del 2004) y en las XIX Jornadas Técnicas de la Delegación México de la AIPM (ago. 20 del 2004).

**Ejemplo A.1:**

Para el caso de la Distribución Lineal Discreta donde se tienen los siguientes datos:  $NB = 10$ ,  $h_{min} = 0.1 \text{ m}$ ,  $h_{máx} = 4.6 \text{ m}$  y  $f_1 = 0.01$

**Datos**

$$\begin{aligned}
 A &= 21 \times 10^6 \text{ m}^2; & \Delta\rho &= 500 \text{ kg/m}^3; & g &= 9.807 \text{ m/s}^2; & \phi &= 0.091; \\
 S_{oi} &= 0.667; & k_{oi} &= 0.0005 \text{ D}; & S_{gi} &= 0.05; & S_{wi} &= 0.283; \\
 \mu_{oi} &= 2.924 \text{ cp}; & B_{oi} &= 1.308 \text{ m}^3/\text{m}^3; & k &= 0.000667646 \text{ D}; & S_{g \text{ crit}} &= 0.05; \\
 S_{or} &= 0.25; & p_i &= 300 \text{ kg/cm}^2 \text{ abs}; & h_{TOT} &= 499.36 \text{ m};
 \end{aligned}$$

A estas condiciones, al iniciar la producción comienza la segregación gravitacional.

Para obtener el valor de  $\Delta h$ , se procede como sigue:

$$\begin{aligned}
 h_1 &= 0.10 \\
 h_2 &= 0.10 + \Delta h \\
 h_3 &= 0.10 + 2 \Delta h \\
 h_4 &= 0.10 + 3 \Delta h \\
 h_5 &= 0.10 + 4 \Delta h \\
 h_6 &= 0.10 + 5 \Delta h \\
 h_7 &= 0.10 + 6 \Delta h \\
 h_8 &= 0.10 + 7 \Delta h \\
 h_9 &= 0.10 + 8 \Delta h \\
 h_{10} &= 0.10 + 9 \Delta h \quad .
 \end{aligned}$$

Como  $h_{máx} = 4.6$  entonces

$$4.6 = 0.10 + 9 \Delta h,$$

de donde  $\Delta h = 0.5 \text{ m}$ .

---

Sustituyendo el valor de  $\Delta h$  en cada término de  $h_1$  hasta  $h_{10}$ , para obtener el valor de cada término de  $h_{maj}$ :

$$h_1 = 0.10, \quad h_2 = 0.60, \quad h_3 = 1.10, \quad h_4 = 1.60, \quad h_5 = 2.10, \quad h_6 = 2.60, \quad h_7 = 3.10, \quad h_8 = 3.60, \\ h_9 = 4.10, \quad h_{10} = 4.60, \quad [m]$$

Para calcular  $f_j$ , se desarrolla el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1 &= 0.01 \\ f_2 &= 0.01 + \Delta f \\ f_3 &= 0.01 + 2 \Delta f \\ f_4 &= 0.01 + 3 \Delta f \\ f_5 &= 0.01 + 4 \Delta f \\ f_6 &= 0.01 + 5 \Delta f \\ f_7 &= 0.01 + 6 \Delta f \\ f_8 &= 0.01 + 7 \Delta f \\ f_9 &= 0.01 + 8 \Delta f \\ f_{10} &= 0.01 + 9 \Delta f \end{aligned}$$

$$\Sigma f_j = 0.10 + 45 \Delta f = 1,$$

de donde se obtiene:

$$\Delta f = 0.02,$$

y

$$f_1 = 0.01, \quad f_2 = 0.03, \quad f_3 = 0.05, \quad f_4 = 0.07, \quad f_5 = 0.09, \quad f_6 = 0.11, \quad f_7 = 0.13, \quad f_8 = 0.15 \\ f_9 = 0.17, \quad f_{10} = 0.19,$$

y

$$\Sigma f_j = 1.00.$$

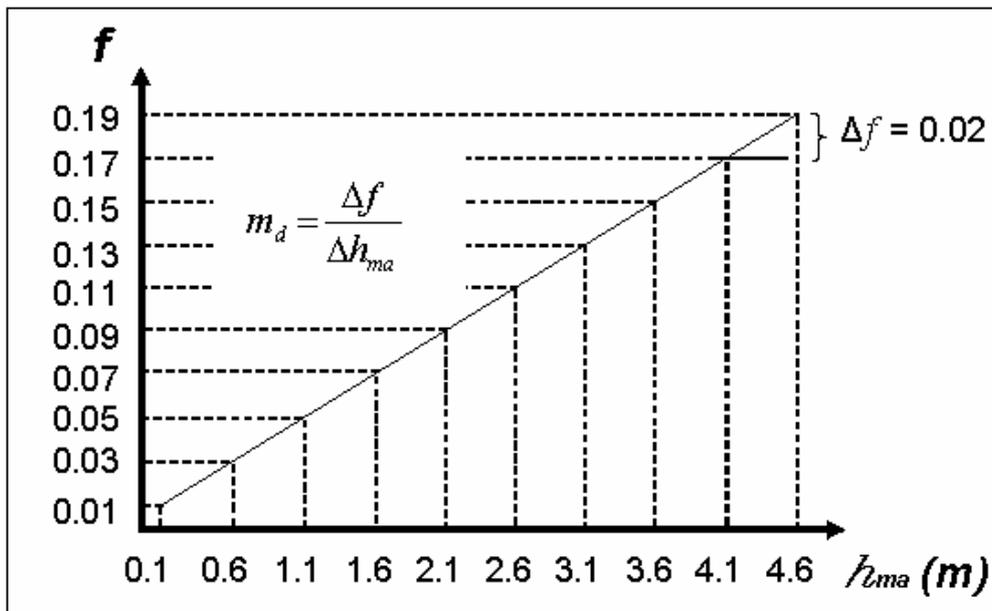
Por lo que cumple con la condición para la Distribución Lineal Discreta.

En la **Fig. 1. A.** se muestra la gráfica de  $f$  vs  $h_{ma}$ , de donde se determina  $m_d$ :

$$m_d = \frac{\Delta f}{\Delta h_{ma}},$$

donde el subíndice  $d$  significa “discreta”.

Y al sustituir valores, se tiene:



**Fig. A. 1** Distribución Lineal Discreta.

$$m_d = \frac{0.02}{0.5} = 0.04.$$

Por otro lado

$$f_d = m_d h_{ma} + b_d. \tag{A.1}$$

---

Si,  $h_{ma} = 0.10 \text{ m}$ ,  $f_d = 0.01$  y  $m_d = 0.04$ , entonces:

$$b_d = 0.006 .$$

Comprobación, usando otro valor de  $h_{ma}$  :

$$f_d = (0.04)(4.6) + 0.006$$
$$f_d = 0.19$$

Por tanto:

$$f_d = (0.04) h_{ma} + 0.006 . \quad (\text{A.1}')$$

Aplicando la Ec. 3.8

$$q_{ot \text{ grav}} = 5.364 \times 10^{-4} V_R g \Delta\rho \Sigma \frac{k_{oi} f_j}{\mu_{oi} B_{oi} h_{maj}} ,$$

y sustituyendo los valores correspondientes, se tiene:

$$q_{ot \text{ grav}} = 1.769,556 \times 10^6 \text{ Bl/día} .$$

Ahora para la Distribución Lineal Continua:

$$f_c = m_c h_{ma} + b_c , \quad (\text{A.2})$$

con  $f_c$  adimensional y  $m_c [L^{-1}]$ ; se debe cumplir que

$$\int_{h_{min}}^{h_{max}} f_c dh_{ma} = 1 : \quad (\text{A.3})$$

$$\int_{h_{min}}^{h_{max}} (m_c h_{ma} + b_c) dh_{ma} = \left[ \frac{1}{2} m_c h_{ma}^2 + b_c h_{ma} \right]_{h_{min}}^{h_{max}} = 1 ,$$

## APÉNDICE

que es la ecuación que relaciona  $m_c$  con  $b_c$ .

Para este caso particular donde  $h_{min} = 0.1 m$ ,  $h_{max} = 4.6 m$  y  $m_c = 0.04$  (usando el mismo valor que, para la Distribución Lineal Discreta),

$$10.575 m_c + 4.5 b_c = 1, \tag{A.4}$$

y sustituyendo los valores en la Ec. A.4, se tiene:

$$\begin{aligned} (10.575)(0.04) + 4.5 b_c &= 1 \\ \therefore b_c &= 0.12822. \end{aligned}$$

Con los valores obtenidos se emplea la Ec. 3.12 para calcular el gasto de aceite total por segregación gravitacional:

$$q_{ot\ grav} = 5.364 \times 10^{-4} V_R g \Delta\rho \int_{h_{min}}^{h_{max}} \frac{k_{oi} f_c}{\mu_{oi} B_{oi} h_{ma}} dh_{ma},$$

donde  $f_c$  esta dada en la Ec. A.2, por lo que el gasto de aceite, es:

$$q_{ot\ grav} = 2.419,224 \times 10^6 \text{ Bl/día}.$$

**Comparación de valores de  $b$  y  $q_{ot\ grav}$ , para las D. L. D. y D. L. C.**

	$n_j$	$m$	$b$	$q_{ot\ grav.} \cdot 10^6 \text{ Bl/día}$
D. L. D.	246	0.04	0.19	1.769556
D. L. C	---	0.04	0.12822	2.419224

---

### Ejemplo A.2:

Considerando los mismos datos del Ejemplo 1, (propiedades de la roca y los fluidos), lo único que cambia es  $NB = 5$ .

Y siguiendo, el mismo proceso que en el ejemplo anterior, se tiene:

$$\Delta h = 1.125 \text{ m},$$

por lo que, los espesores de los bloques, son:

$$h_1 = 0.10, \quad h_2 = 1.225, \quad h_3 = 2.35, \quad h_4 = 3.475, \quad h_5 = 4.6 \text{ [m]}.$$

Ahora, para obtener la  $\sum f_j = 1$ , (como condición para la Distribución Lineal Discreta); se tiene que:

$$\Delta f = 0.095,$$

y los valores de  $f_j$  son:

$$f_1 = 0.01, \quad f_2 = 0.105, \quad f_3 = 0.200, \quad f_4 = 0.295, \quad f_5 = 0.390.$$

con lo cual, se cumple con la condición.

De la **Fig. A.1**, se tiene definida  $m_d$ , por lo que se sustituyen los valores para obtener:

$$m_d = 0.0844 .$$

Siguiendo con el proceso, empleando la Ec. A.1 y despejando  $b_d$  se tiene:

$$b_d = 0.00156 .$$

Empleando la Ec. 3.8, para calcular el gasto de aceite

$$q_{ot \text{ grav}} = 1.588,360 \times 10^6 \text{ Bl/día} .$$

## APÉNDICE

Ahora, realizando los cálculos para la Distribución Lineal Continua con los mismos datos que la Distribución Lineal Discreta.

Cumpliendo con la condición Ec. A.3; y si  $h_{\min} = 0.10 \text{ m}$ ,  $h_{\max} = 4.6 \text{ m}$  y  $m_c = 0.0844$ ; (usando el mismo valor que para la Distribución Lineal Discreta), se calcula  $b_c$ , despejando de la Ec. A.4, se tiene:

$$b_c = 0.02378 .$$

Ahora se emplea la Ec. 3.12, para calcular el gasto de aceite total:

$$q_{ot\ grav} = 1.698,574 \times 10^6 \text{ Bl/día}.$$

**Comparación de valores de  $b$  y  $q_{ot\ grav}$ , para las D. L. D. y D. L. C.**

	$n_j$	$m$	$b$	$q_{ot\ grav.} \cdot 10^6 \text{ Bl/día}$
D. L. D.	220	0.0844	0.00156	1.588360
D. L. C	---	0.0844	0.02378	1.698574

---

### Ejemplo A.3:

Para este caso, se consideran los mismos datos que en el ejemplo A.2.

Se fija el valor de  $b_c$  para encontrar el de  $m_c$ , empleando la Ec. A.4; considerando los siguientes valores:  $b_c = 0.0035$ ,  $f_1 = 0.01$  y  $h_{ma} = 0.10 \text{ m}$  y sustituyendo los valores en la ecuación y despejando  $m_c$ , se tiene:

$$(10.575)m_c + 4.5(0.0035) = 1$$
$$\therefore m_c = 0.09307.$$

Se calcula el gasto de aceite por segregación gravitacional, empleando la Ec. 3.12, la cual se tiene como resultado:

$$q_{ot\ grav} = 1.558,521 \times 10^6 \text{ Bl/día.}$$