



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE HACES DE LUZ VECTORIALES Y SU
APLICACIÓN EN MICROMANIPULACIÓN ÓPTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICA

P R E S E N T A :

ANAHI FLORES PÉREZ

TUTORA:

DRA. KAREN PATRICIA VOLKE
SEPÚLVEDA

2007



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

HOJA DE DATOS DEL JURADO

1.- Datos del alumno

Flores
Pérez
Anahi
Tel. 28760628
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
097135029

2.-Datos del tutor

Dra.
Karen Patricia
Volke
Sepúlveda

3.-Datos sinodal 1

Dra.
Rocío
Jáuregui
Renaud

4.-Datos sinodal 2

Dr.
Arturo
Orozco
Santillán

5.-Datos sinodal 3

Dr.
Enrique
López
Moreno

6.-Datos sinodal 4

Dr.
Víctor
Arrizón
Peña

7.-Datos del trabajo escrito

Estudio de haces de luz vectoriales y su aplicación en micromanipulación óptica
110 p
2007

Agradecimientos

Con especial énfasis quiero agradecer a mi asesora y amiga **Dra. Karen Volke Sepúlveda** por su contagioso entusiasmo y constante buen humor.

Con mucho amor agradezco a mis padres **Marcelino C. Flores Martínez** y **Ma. Del Pilar Pérez Aguilar** a quienes debo en su totalidad mis logros y éxitos. Es un placer para mí darles esta satisfacción.

A mis adoradas hermanas **Silvia, Adriana** y con cariño a **Pilar** por su comprensión y ayuda; espero que mi trabajo sirva para motivarles a terminar sus licenciaturas *hasta el final*. A toda mi familia por su infinito afecto... saben que es mutuo.

En un lugar especial de mi corazón a **Julián Ricardo Pérez Maqueda** por su franqueza, madurez y valor. Por estar conmigo en momentos cruciales, por su comprensión y apoyo incondicional. Por ser la *mejor* persona en absolutamente todos los sentidos. Je't aime.

A mis amigas de ayer, hoy y siempre: **Arlette** y **Vanesa** porque desde que nos conocemos hemos aprendido mucho juntas. A mis **amigos de la Facultad de Ciencias** por los insuperables y divertidos momentos. A todos ellos, amigos entrañables, muchas gracias.

Gracias a los estudiantes dentro del grupo con quienes compartí agradables experiencias de trabajo: **Alex, Héctor, Noemí** y con especial mención **Josué**. Les agradezco a todos su ejemplo en cuanto al paciente y dedicado trabajo en el laboratorio, mis mejores deseos para su futuro profesional.

A **Dra. Martha Rosete Aguilar** (UNAM), **M. en C. Manuel Meda Vidal** (UAM) y **Dr. Janitzio Mejía Huguet** (UAM) por permitirme aprender más al colaborar en sus excelentes cursos.

A los sinodales de esta tesis: **Dra. Rocio Jáuregui** (UNAM), **Dr. Arturo Orozco** (UNAM), **Dr. Enrique López** (UNAM) y **Dr. Víctor Arrizón** (INAOE) por sus concisos comentarios y valiosas opiniones.

Contenido

1	Conceptos básicos	4
1.1	Ecuaciones de Maxwell y ecuación de onda	4
1.2	Teoremas de conservación de energía, momento lineal y momento angular	6
1.3	Presión de radiación	10
1.4	Ondas monocromáticas y polarización	11
1.4.1	Ondas monocromáticas armónicas	11
1.4.2	Ondas planas	12
1.4.3	Polarización	15
2	Haces de luz en la aproximación paraxial	18
2.1	Aproximación paraxial y ecuación paraxial de Helmholtz	18
2.2	Ecuación paraxial de Helmholtz	21
2.3	Soluciones a la ecuación paraxial de Helmholtz	22
2.3.1	Haces Gaussianos	22
2.3.2	Haces Laguerre-Gauss (LG)	28
2.4	Soluciones a la ecuación escalar de Helmholtz con simetría circular cilíndrica: Haces Bessel (BB)	31
2.5	Generación experimental de haces escalares Gauss, Laguerre-Gauss y Bessel	33
2.5.1	Generación de haces Gauss: el Láser	33
2.5.2	Generación experimental de haces Laguerre Gauss	38
2.5.3	Generación experimental de haces Bessel	40
2.6	Momento angular en vórtices escalares	43

3	Haces de luz vectoriales	47
3.1	Soluciones a la ecuación vectorial de Helmholtz	47
3.2	Modos transversales eléctricos (TE) y transversales magnéticos (TM)	50
3.2.1	Haces con polarización azimutal y radial	50
3.2.2	Modos TE y TM de orden superior	54
3.3	Momento angular en vórtices vectoriales	60
4	Generación experimental de haces vectoriales	64
4.1	Haces con polarización radial y azimutal	64
4.1.1	Arreglo experimental	65
4.1.2	Resultados	67
4.2	Haces vectoriales de orden superior	68
4.2.1	Arreglo experimental	68
4.2.2	Resultados	73
5	Estudio de propiedades dinámicas de la luz con micromanipulación óptica	74
5.1	Pinzas Ópticas	76
5.1.1	Arreglo Experimental	79
5.1.2	Resultados	83
5.2	Transferencia de momento angular orbital y de espín	85
5.2.1	Transferencia de espín	85
5.2.2	Transferencia de momento angular orbital	91
6	Conclusiones	95
A	Apéndice A: Alineación de elementos ópticos	100
A.1	Alineación del haz láser	100
A.2	Alineación de lentes	101
A.3	Alineación de elementos en los experimentos para la generación de haces de luz vectoriales.	101
A.4	Alineación de elementos en los experimentos de micro-manipulación óptica (pinzas ópticas)	104

A.4.1 Alineación del cubo divisor polarizador y del objetivo de microscopio
(Edmund 60x N.A. 0.85 y objetivo de inmersión Zeiss 100x N.A. 1.3) . . . 104

Introducción

En virtud de que la luz es una onda electromagnética, es posible describir su comportamiento encontrando las soluciones a las ecuaciones de Maxwell de las que se deduce, en espacio libre, la ecuación de onda.

Las ondas monocromáticas armónicas satisfacen estas ecuaciones y, además, son la aproximación más sencilla porque hacen posible separar la dependencia temporal del problema. La parte espacial es descrita por la ecuación de Helmholtz, cuyas soluciones en coordenadas cartesianas dan lugar a las ondas planas. La forma en como se propagan, sus principales características y una introducción a los conceptos básicos necesarios a lo largo de todo este trabajo, serán abordados en el capítulo 1.

Una realización experimental de ondas planas es físicamente imposible debido a que, por su extensión infinita, llevan una cantidad infinita de energía. Una clase de campos ópticos más realistas son aquellos con extensión transversal finita, que surgen como soluciones de la ecuación escalar de Helmholtz dentro del régimen paraxial.

Los haces Gauss y Laguerre-Gauss son haces sujetos a ésta restricción y son modos normales de oscilación de los láseres convencionales, por lo que tienen importantes aplicaciones, por ejemplo, en el campo de la micromanipulación óptica. Su deducción analítica, propiedades fundamentales y otras formas de generación experimental serán exploradas en el capítulo 2.

En ese mismo capítulo se discutirán los llamados haces Bessel, que no están restringidos al régimen paraxial y que no se difractan conforme se propagan. Estos haces satisfacen de manera exacta la ecuación escalar de Helmholtz en coordenadas cilíndricas circulares, fuera de cualquier aproximación, hecho que aprovecharemos para generar, en el capítulo 3, las soluciones teóricas rigurosas a la ecuación vectorial de Helmholtz en el mismo sistema coordenado.

Como se verá, estos campos tienen dependencia azimutal en fase del tipo $\exp(il\phi)$, donde el entero l es llamado carga topológica o índice azimutal, y además, su vector de campo eléctrico (polarización) no es constante alrededor del modo, sino que varía en cada punto del espacio; es por lo anterior que estos campos ópticos han sido llamados *vórtices vectoriales*.

El hecho de que l sea distinto de cero, es el responsable de que estos haces sean portadores de momento angular orbital proporcional a $l\hbar$ por fotón, aún cuando estén linealmente polarizados.

Para estudiar ésta propiedad dinámica, se realizará un cálculo de la densidad de momento angular y se hará un análisis detallado de la evolución en el tiempo de los vectores de campo eléctrico. Mostraremos que la reinterpretación de las expresiones en términos de los vectores que conforman la base de polarización circular, sugiere que un vórtice vectorial tipo Bessel de cualquier orden l es la superposición de dos haces Bessel escalares con índices azimutales $l + 1$ y $l - 1$ y con polarizaciones circulares ortogonales.

Este hecho será llevado a la práctica y detallado en el capítulo 4. Para superponer los haces correspondientes se usará un arreglo interferométrico tipo Mach Zehnder como en otros casos [38, 49, 52], pero con detalles experimentales notablemente distintos. En nuestro montaje se superpondrán dos haces Bessel escalares con cargas topológicas y polarizaciones específicas para dar lugar a un vórtice vectorial tipo Bessel de orden uno, generado por primera vez en este trabajo y con aplicaciones aún no estudiadas.

Las propiedades dinámicas de la luz, tales como momento lineal y angular, pueden ser determinadas al hacer interaccionar la radiación con la materia. Dado que los órdenes de magnitud para éstas cantidades físicas son muy pequeños, una forma práctica de analizarlas consiste en observar el comportamiento de partículas microscópicas (con dimensiones desde decenas de nanómetros hasta decenas de micras) en la vecindad del plano focal del haz luminoso que deseamos estudiar.

Lo anterior representa una descripción muy básica de la captura óptica de partículas con haces de luz y es una técnica ampliamente usada desde 1970, cuando Ashkin reportó la primera observación de objetos pequeños (microesferas transparentes de látex) acelerados y atrapados usando *solamente* fuerzas de presión de radiación [7]. En 1986, Ashkin y sus colaboradores [9] reportaron la primer trampa óptica tridimensional para esferas dieléctricas usando un sólo haz láser fuertemente enfocado dirigido verticalmente hacia abajo. A esta herramienta de micromanipulación se le ha llamado desde entonces *pinzas ópticas*.

Hasta ahora, los haces de captura en los sistemas de pinzas se han limitado a los escalares, sin embargo, al comprender la manera en cómo los campos ópticos transfieren energía e intercambian momento con la materia, seremos capaces de proponer un experimento de microcontrol óptico para estudiar la densidad local de momento angular del haz vectorial generado por primera vez en ésta tesis.

Capítulo 1

Conceptos básicos

1.1 Ecuaciones de Maxwell y ecuación de onda

A lo largo de este trabajo los campos electromagnéticos serán estudiados bajo la suposición de que el espacio de propagación es el espacio libre o, de manera equivalente, de que las fuentes están suficientemente lejos de la región de propagación tal que puedan ser ignoradas.

Las ecuaciones de Maxwell¹ en ausencia de fuentes en un medio infinito están dadas por las expresiones

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{1.4}$$

Donde \mathbf{E} define el campo vectorial eléctrico, \mathbf{B} el campo inducción magnética, \mathbf{H} el campo magnético y \mathbf{D} el vector desplazamiento eléctrico. En un medio isotrópico y lineal se cumplen las relaciones $\epsilon \mathbf{E} = \mathbf{D}$ y $\mu \mathbf{H} = \mathbf{B}$; el medio es caracterizado por las cantidades μ y ϵ , la permeabilidad y la constante dieléctrica (permitividad) respectivamente que asumiremos independientes

¹En unidades SI. Este será el sistema de unidades usado a lo largo de este trabajo.

de la frecuencia, esto significa que asumiremos medios no dispersivos en los que ambas son constantes reales.

Las ecuaciones anteriores son ecuaciones diferenciales parciales de primer orden acopladas en dos variables, el campo eléctrico \mathbf{E} y el campo magnético \mathbf{B} . Para desacoplar las ecuaciones (1.3) y (1.4), aplicamos el operador $\nabla \times$ a ambos lados de la ecuación (1.3) para obtener

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B},$$

sustituyendo $\nabla \times \mathbf{B}$ de la ecuación (1.4) obtenemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Si usamos la relación vectorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ y el hecho de que la divergencia del campo eléctrico es cero (ecuación (1.1)), la ecuación anterior puede reducirse a:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.5)$$

Siguiendo un procedimiento análogo para el campo magnético encontramos que

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.6)$$

Las ecuaciones (1.5) y (1.6) son las *ecuaciones vectoriales de onda homogéneas* para el campo eléctrico \mathbf{E} y el campo magnético \mathbf{B} respectivamente. La cantidad $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ es una constante que corresponde a la velocidad de propagación de la onda electromagnética en el medio, llamada velocidad de fase.

En general la ecuación de onda puede escribirse de la forma

$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (1.7)$$

donde $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ puede representar tanto a \mathbf{E} como a \mathbf{B} .

1.2 Teoremas de conservación de energía, momento lineal y momento angular

Si un campo eléctrico \mathbf{E} y uno magnético \mathbf{B} actúan sobre una partícula cargada la fuerza total sobre ella, llamada fuerza de Lorentz, puede expresarse como

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (1.8)$$

donde q es la carga eléctrica y \mathbf{v} es la velocidad de la partícula. El trabajo hecho por los campos esta dado por

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt.$$

Si en lugar de una carga puntual lo que se tiene es una distribución continua de carga y corriente, la razón de cambio en el tiempo del trabajo que los campos realizan sobre la distribución es igual a

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3r, \quad (1.9)$$

dentro de un volumen finito V y donde $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ es el producto de la densidad de carga por la velocidad, es decir la densidad de corriente.

Si manipulamos (1.9) usando la ley de Ampère-Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (1.10)$$

la identidad vectorial $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$ y la ecuación (1.3) obtenemos [36]

$$\frac{dW}{dt} = - \int_V \left[\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] d^3r. \quad (1.11)$$

Dado que hemos asumido medios lineales sin dispersión ni pérdidas, podemos escribir la densidad de energía electromagnética total como [18, 27, 36]

$$u = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right], \quad (1.12)$$

y la energía electromagnética total como

$$U_{em} = \int_V u d^3r. \quad (1.13)$$

Entonces

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left[\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right] d^3r - \oint_{\sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a}; \quad (1.14)$$

en el segundo término del miembro derecho se ha usado el teorema de la divergencia con σ la superficie que limita a V . La ecuación (1.14) es la expresión matemática del llamado *teorema de Poynting* y establece que el trabajo hecho en las distribuciones de carga por la fuerza electromagnética es igual al decremento de la energía almacenada en el campo menos la energía que fluye hacia afuera a través de la superficie.

Por tanto, por conservación de energía, el vector

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (1.15)$$

debe representar un flujo de energía por unidad de tiempo, por unidad de área y cuyas dimensiones son de [energía/(área \times tiempo)]. Debido a la importancia de este vector en la teoría electromagnética, se le ha dado un nombre particular: *vector de Poynting* y es interpretado como una densidad de corriente de energía [18] o como una densidad de flujo de energía [27].

Como caso particular consideremos un medio no conductor; en él $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0}$ y por lo tanto, la ecuación (1.14) toma la forma diferencial [43]:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (1.16)$$

que es exactamente la forma de la ecuación de continuidad para la conservación de la carga eléctrica:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.17)$$

La ecuación (1.16) puede ser interpretada nuevamente como una condición de conservación de energía si asociamos la densidad de energía electromagnética u con la densidad de carga ρ y la densidad de corriente eléctrica \mathbf{J} con la densidad de flujo de energía \mathbf{S} .

La conservación del momento puede ser similarmente considerada, asumiendo que el cambio en el momento de las partículas cargadas que interaccionan con \mathbf{E} y \mathbf{B} dentro del volumen V puede escribirse, según la segunda ley de Newton, como

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}_{mec}}{dt} = \int_V [\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}] d^3r, \quad (1.18)$$

donde la suma sobre partículas se ha convertido en una integral en densidades de carga y de corriente, es decir, la ecuación (1.18) no es mas que la generalización de la expresión (1.8) a distribuciones continuas de carga.

La fuerza por unidad de volumen puede ser evidentemente definida como

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (1.19)$$

llamada densidad de fuerza de Lorentz [27].

Usando las ecuaciones de Maxwell para eliminar ρ y \mathbf{J} , la identidad vectorial $\frac{\partial(\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$, la ecuación (1.3) e itroduciendo un término igual a cero dado por $(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}$, obtenemos una fuerza por unidad de volumen igual a

$$\mathbf{f} = \varepsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}] - \frac{1}{2}\nabla \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}).$$

Esta compleja expresión puede ser simplificada introduciendo el *tensor de esfuerzos de Maxwell* [27, 36]:

$$T_{ij} \equiv \varepsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right), \quad (1.20)$$

$$i, j, k = x, y, z,$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Los elementos T_{ij} forman un objeto matemático llamado tensor que se denota por una doble flecha: $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$. En particular, la divergencia de $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ tiene como j' esima componente:

$$\left(\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \right)_j = \varepsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E}) E_j + (\mathbf{E} \cdot \nabla) E_j] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \mathbf{B}) B_j + (\mathbf{B} \cdot \nabla) B_j] - \frac{1}{2} \nabla_j \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right).$$

Con los resultados anteriores, la fuerza total sobre las cargas en V es

$$\mathbf{F} = \oint_{\sigma} \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a} - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} d^3r; \quad (1.21)$$

en el primer término del segundo miembro se ha usado el teorema de la divergencia con σ la superficie que limita a V . La interpretación de (1.21) en analogía con la de (1.14) es que, si una onda electromagnética incide sobre un objeto y es absorbida o reflejada, se impartirá momento a los electrones del material y por consiguiente será transmitido a la red estructural del objeto en su conjunto. La conservación del momento requiere que la onda electromagnética sea capaz de transportar momento lineal por unidad de volumen igual a [30]

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}, \quad (1.22)$$

y que haya un flujo de momento por unidad de tiempo a través de la superficie dado por el término

$$\oint_{\sigma} \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a}.$$

Por otra parte, un teorema de conservación para el momento angular puede deducirse si tomamos la densidad de momento angular mecánico como $\mathbf{l}_{mec} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_{mec}$. La razón de cambio en el tiempo del vector \mathbf{l}_{mec} es igual a la densidad de torque $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$, donde \mathbf{f} está dada por la expresión (1.19), es decir:

$$\frac{d\mathbf{l}_{mec}}{dt} = \int_V \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3r.$$

Al expresar la ecuación anterior en términos de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} , valiendose de las ecuaciones de Maxwell, puede demostrarse que si la densidad de momento angular del campo es definido como:

$$\mathbf{l}_{em} = \mathbf{r} \times \mathbf{g} = \epsilon_0 [\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})], \quad (1.23)$$

entonces

$$\frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{l}_{mec} + \mathbf{l}_{em}) d^3r = - \int_{\sigma} \overleftrightarrow{\mathbf{M}} \cdot d\mathbf{s}. \quad (1.24)$$

La interpretación de (1.24) es que para cualquier cambio en el momento angular total, mecánico mas electromagnético, habrá un correspondiente flujo de momento angular descrito

por el tensor

$$\overleftrightarrow{\mathbf{M}} \equiv \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \times \mathbf{r}.$$

1.3 Presión de radiación

Además del tratamiento electromagnético, también es posible describir el comportamiento de los campos ópticos mediante la teoría cuántica, en la que se asume que la luz está constituida por partículas sin masa pero con energía y momento llamados fotones. Ellos viajan a una velocidad $c=2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ en el vacío y con una velocidad $\frac{1}{n}$ veces menor cuando viajan dentro de algún medio material con índice de refracción n .

Cada fotón tiene una energía de magnitud $E = h\nu$, con $h = 6.6260755 \times 10^{-34} \text{ J s}$, la constante de Planck y ν la frecuencia de la luz. Lleva un momento lineal igual a $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, donde \mathbf{k} es el vector de onda, y por tanto viaja en la dirección en la que la onda se propaga. La magnitud del momento esta dado por:

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

donde λ la longitud de onda.

Cada haz luminoso contiene una colección o “corriente de fotones” con un número variable, en general muy grande. Por ejemplo, para un haz de luz proveniente del sol, el número de fotones que atraviesa un detector colocado en la superficie terrestre, por segundo por metro cuadrado, es del orden de 10^{18} . Debido a esto, consideraremos la *densidad de flujo de fotones* definido como:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{I(\mathbf{r})}{h\nu}, \quad (1.25)$$

donde $I(\mathbf{r})$ es la *irradiancia óptica* definida como el promedio temporal de la magnitud del vector de Poynting, $\langle S \rangle$. Esta relación convierte una medida clásica (con dimensiones de [energía/(tiempo \times area)]) a una cuántica (con dimensiones de [fotones/(tiempo \times area)]). El *flujo de fotones* con dimensiones de [fotones/tiempo], se halla integrando la ecuación (1.25) sobre determinada area \mathcal{A} :

$$\Phi = \int_{\mathcal{A}} \phi(\mathbf{r}) dA = \frac{P}{h\nu}, \quad (1.26)$$

donde $\int_{\mathcal{A}} I(\mathbf{r})dA = P$ es la potencia óptica con unidades de Watt en SI.

El *número promedio de fotones* detectados en un área \mathcal{A} en un intervalo de tiempo T es obtenido multiplicando el flujo de fotones por el intervalo T , esto es:

$$N = \Phi T = \frac{E}{h\nu}, \quad (1.27)$$

donde $E = PT$ es la energía óptica.

La magnitud del momento total, $P_m = Np$, esta dada entonces por:

$$P_m = \frac{E}{h\nu} \frac{h}{\lambda} = n \frac{E}{c},$$

donde n es el índice de refracción del medio en el que viaja la luz y c su velocidad en el vacío.

La fuerza que ejerce la luz al incidir sobre una superficie es la derivada temporal del momento, por tanto, la magnitud de esta fuerza óptica es:

$$F = n \frac{P}{c} = \frac{n}{c} \int_{\mathcal{A}} I(\mathbf{r})dA, \quad (1.28)$$

donde P es la potencia. La ecuación (1.28) representa el caso ideal en el que el momento de los fotones se transfiere por completo, por ejemplo, por absorción.

1.4 Ondas monocromáticas y polarización

1.4.1 Ondas monocromáticas armónicas

En virtud del teorema de Fourier, que establece que cualquier solución de la ecuación (1.7) puede ser expandida en términos de funciones con dependencia temporal de tipo armónico, asumiremos que la dependencia en el tiempo de las soluciones está contenida en un factor $\exp(-i\omega t)$; si ω es constante, se dice que las soluciones son ondas monocromáticas pues tienen una sola frecuencia característica. En este caso, las soluciones a la ecuación de onda tienen la forma general:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) \exp(i\phi(\mathbf{r})) \exp(-i\omega t), \quad (1.29)$$

donde $A(\mathbf{r})$ y $\phi(\mathbf{r})$ son la amplitud y la parte espacial de la fase de la onda respectivamente. Las superficies de fase constante, $\phi(\mathbf{r}) = cte.$, representan los frentes de onda. La ecuación (1.29) se puede reescribir como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \quad (1.30)$$

donde el factor independiente del tiempo $U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(i\phi(\mathbf{r}))$ es llamado *amplitud compleja*.

La *intensidad óptica* o *irradiancia* de una onda monocromática es el módulo al cuadrado de la amplitud compleja, es decir

$$I(\mathbf{r}) = |U(\mathbf{r})|^2. \quad (1.31)$$

A lo largo de todo este trabajo se asumirán ondas monocromáticas armónicas, por lo que supondremos soluciones para los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} tales que $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$. Sustituyendo estas condiciones en (1.7) obtenemos en forma compacta:

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = 0, \quad (1.32)$$

donde $k \equiv \frac{\omega}{v}$ se conoce como número de onda. La ecuación (1.32) es conocida como la *ecuación vectorial de Helmholtz*.

De aquí en adelante asumiremos la dependencia temporal de cualquier solución desarrollada como $\exp(-i\omega t)$, y nos concentraremos entonces a resolver únicamente la parte espacial de la ecuación de onda, es decir la ecuación (1.32).

1.4.2 Ondas planas

En coordenadas cartesianas es posible separar la ecuación (1.32) en tres ecuaciones escalares independientes [30] obteniendo en este caso

$$\nabla^2 u_j + k^2 u_j = 0, \quad (1.33)$$

$$j = x, y, z,$$

donde u_j representa cualquiera de las componentes cartesianas de los vectores \mathbf{E} o \mathbf{B} . Nótese que la ecuación anterior es semejante a la ecuación (1.32) sólo que los operadores actúan en

funciones escalares, es por ello que (1.33) es llamada *ecuación escalar de Helmholtz*.

La solución de la ecuación (1.33) para la componente x por ejemplo, tiene la forma:

$$u_x(\mathbf{r}) = \alpha \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \beta \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r});$$

$$\mathbf{r} = (x, y, z),$$

$$u_x(\mathbf{r}) = \begin{cases} E_x(\mathbf{r}) \\ B_x(\mathbf{r}) \end{cases},$$

las literales α, β denotan constantes dependientes de las condiciones a la frontera del problema.

Para coordenadas cartesianas, la solución más general de (1.7) se puede entonces escribir como superposición de ondas del tipo

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)),$$

con \mathbf{A} vector constante en general complejo cuya magnitud representa la amplitud de la onda, el argumento de la función exponencial es llamada la fase. La onda se propaga en la dirección del vector $\mathbf{k} \equiv (k_x, k_y, k_z)$ ($-\mathbf{k}$) si el signo entre los términos espacial y temporal difiere (es el mismo). La velocidad de propagación v y la magnitud del vector de onda \mathbf{k} (o número de onda) se relacionan por medio de la frecuencia en la ecuación

$$k \equiv |\mathbf{k}| = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\mu \epsilon}, \quad (1.34)$$

y la longitud de onda estará dada por:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

Por lo anterior, podemos admitir para (1.5) y (1.6) soluciones de la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)), \quad (1.35)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)), \quad (1.36)$$

donde \mathbf{E}_0 y \mathbf{B}_0 son vectores constantes complejos que proporcionan información sobre la am-

plitud y polarización de las ondas electromagnéticas como se detalla posteriormente. Las ecuaciones (1.35) y (1.36) son soluciones complejas que describen completamente la onda, sin embargo, por convención, son sus partes reales las que representan los campos físicos, es decir, los campos que son experimentalmente observables. En términos de sus vectores complejos conjugados, los campos físicos pueden ser escritos como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)),$$

donde se ha incluido el término de propagación $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ en la definición de $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (aunque $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ puede representar una función general de la posición) y donde $\mathbf{E}^*(\mathbf{r})$ denota su complejo conjugado. Análogamente para el campo magnético

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{B}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) + \mathbf{B}^*(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)).$$

Las soluciones (1.35) y (1.36) son llamadas ondas planas, pues las superficies de nivel

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = cte.,$$

representan planos perpendiculares a \mathbf{k} para todo tiempo t .

La diferenciación de una función del tipo (1.35) con respecto al tiempo es equivalente a multiplicar la función por la constante $-i\omega$. Similarmente, el operador ∇ se transforma en el vector constante $i\mathbf{k}$. Con lo anterior, las ecuaciones de Maxwell exclusivamente para ondas planas toman la forma:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \tag{1.37}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \tag{1.38}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0, \tag{1.39}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -\omega \mu \varepsilon \mathbf{E}_0. \tag{1.40}$$

De las ecuaciones (1.37) a (1.40) obtenemos que, en este caso, los campos son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación, es por ello que las ondas electromagnéticas planas son

transversales.

Dado que los campos $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ oscilan en el tiempo a frecuencias muy altas ($\omega \approx 10^{15}\text{Hz}$) sus valores instantáneos son imprácticos de medir [11]. Es físicamente mas razonable calcular el promedio temporal de estas cantidades tomando un intervalo de tiempo grande comparado con el periodo fundamental $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Es posible demostrar (Ref. [11], sección 1.4.3) que la parte real del promedio temporal del vector de Poynting es igual a

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re \{ \mathbf{E} \times \mathbf{B}^* \} = \frac{1}{4\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{B}), \quad (1.41)$$

por otro lado, los promedios temporales de la densidad de momento lineal y angular estarán dados respectivamente por

$$\langle \mathbf{g} \rangle = \frac{1}{c^2} \langle \mathbf{S} \rangle, \quad (1.42)$$

$$\langle \mathbf{l}_{em} \rangle \equiv \langle \mathbf{j} \rangle = \frac{1}{c^2} [\mathbf{r} \times \langle \mathbf{S} \rangle]. \quad (1.43)$$

1.4.3 Polarización

Hemos dicho que \mathbf{E}_0 y \mathbf{B}_0 en las expresiones (1.35) y (1.36) son vectores constantes complejos. Consideremos un vector complejo cuyas componentes respecto a una base de vectores reales son los escalares complejos, E'_a, E'_b, E'_c , es decir:

$$\mathbf{E}_0 = E'_a \mathbf{a} + E'_b \mathbf{b} + E'_c \mathbf{c},$$

donde \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son vectores ortonormales reales. Si tomamos \mathbf{c} en la dirección de propagación, \mathbf{k} y \mathbf{c} son proporcionales, y por tanto, la componente E'_c debe ser igual a cero para cumplir la condición (1.37). Lo anterior es válido solamente para ondas planas, en otros casos esto no es necesariamente cierto como se verá en el capítulo siguiente.

Las componentes complejas del campo eléctrico en las direcciones \mathbf{a} y \mathbf{b} se pueden expresar en forma polar como

$$E'_a = E_a \exp(i\phi_a),$$

$$E'_b = E_b \exp(i\phi_b),$$

respectivamente, con E_a y E_b amplitudes reales y ϕ_a , ϕ_b las fases correspondientes.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $\phi_b = 0$ y $\phi_a = \phi$ pues la elección de ϕ_b sólo define el origen del tiempo t . Con lo anterior podemos escribir entonces:

$$\mathbf{E}_0 = E_a \exp(i\phi)\mathbf{a} + E_b\mathbf{b}. \quad (1.44)$$

Si introducimos la expresión (1.44) en la solución (1.35) obtenemos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_a\mathbf{a} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)) + E_b\mathbf{b} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)),$$

cuya parte real es:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_a\mathbf{a} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) + E_b\mathbf{b} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t); \quad (1.45)$$

el campo eléctrico ha sido resuelto así en dos componentes ortogonales.

Consideremos como caso particular el campo cuyas componentes están en fase ($\phi = 0$) o desfasadas por media onda ($\phi = \pi$), en el plano $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, entonces la expresión (1.45) toma la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{0}, t) = (E_a\mathbf{a} + E_b\mathbf{b}) \cos(\omega t).$$

Este campo oscila alternativamente entre $\sqrt{E_a^2 + E_b^2}$, cero y $-\sqrt{E_a^2 + E_b^2}$ apuntando siempre en la dirección de $E_a\mathbf{a} + E_b\mathbf{b}$. En este caso se tiene polarización lineal ilustrada en la figura 1-1.

Supongamos ahora que $\phi = \frac{\pi}{2}$, entonces

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_a\mathbf{a} \sin(\omega t) + E_b\mathbf{b} \cos(\omega t);$$

la punta del vector \mathbf{E} describe una trayectoria elíptica en el sentido de las manecillas del reloj (ver figura 1-1). Este comportamiento es llamado *polarización elíptica derecha*.

Cuando $\phi = \frac{-\pi}{2}$, la trayectoria es la misma pero se recorre en el sentido contrario de las manecillas del reloj, a esto se le llama *polarización elíptica izquierda*.

En el caso especial cuando $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$ y $E_a = E_b$ tenemos *polarización circular* (*izquierda* en sentido contrario a las manecillas del reloj, *derecha* en caso contrario). Para otros valores de ϕ

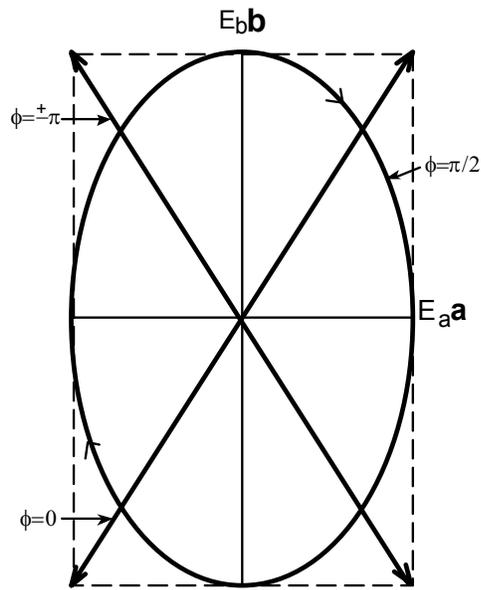


Figura 1-1: Polarización del campo eléctrico (líneas negras continuas) para diferentes valores de fase ϕ .

tenemos polarización elíptica aún cuando $E_a = E_b$. Con polarización elíptica la magnitud del vector eléctrico nunca se hace cero aún cuando alguna de sus componentes lo sea; en particular, la intensidad de un campo con polarización circular permanece siempre constante cuando se usa un polarizador lineal como analizador.

Capítulo 2

Haces de luz en la aproximación paraxial

2.1 Aproximación paraxial y ecuación paraxial de Helmholtz

Una realización experimental de ondas planas es físicamente imposible debido a que, por su extensión infinita, llevan una cantidad infinita de energía. Un tipo de haces luminosos más realistas son aquellos cuya extensión transversal permanece finita o, equivalentemente, son haces altamente direccionales.

Un rayo es una abstracción matemática que nos permite describir la propagación de las ondas utilizando geometría; se representan por líneas cuya dirección es siempre perpendicular a los frentes de onda, lo que corresponde a la dirección del flujo de energía radiante. Si la energía fluye preferentemente cerca del eje de propagación, se dice que los rayos están altamente direccionados o que son paraxiales. Una onda es llamada paraxial si las normales a sus frentes de onda son rayos paraxiales.

Una forma de construir ondas paraxiales es empezar con una onda plana polarizada en el eje x de amplitud compleja $A \exp(ik_z z)$, cuya dirección de propagación es el eje z . Si modulamos esta onda haciendo que la amplitud sea una función que varíe lentamente con la posición, la amplitud compleja de la onda modulada queda:

$$U_x(\mathbf{r}) = A(x, y, z) \exp(ik_z z). \quad (2.1)$$

La función escalar propuesta es la componente en x del campo \mathbf{E} de manera que:

$$\mathbf{E} = (U_x(\mathbf{r}), 0, 0). \quad (2.2)$$

Es importante hacer notar que la amplitud de la onda, $A(x, y, z)$ en la función (2.1), depende en general de la variable transversal $\rho^2 = x^2 + y^2$; si esto ocurre, entonces $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$ lo cual entra en contradicción con las ecuaciones de Maxwell (ecuación (1.1)).

Esta aparente paradoja motivó a Lax y a sus colaboradores a obtener soluciones rigurosas de las ecuaciones de Maxwell bajo el régimen paraxial [37]. En su trabajo se asume al campo eléctrico en sus componentes transversal y longitudinal a lo largo del eje de propagación, en la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \exp(ikz) (\mathbf{E}_T + \mathbf{a}_z E_z),$$

donde \mathbf{a}_z denota la dirección de propagación de la onda. Las soluciones de este tipo son expandidas en términos de la razón de parámetros característicos en las direcciones transversal, w_0 , y longitudinal, z_R , pues en el caso paraxial se tiene que $w_0 \ll z_R$. Sustituyendo lo anterior en las ecuaciones de Maxwell se encuentra que para la parte transversal sólo son necesarias potencias pares de $\frac{w_0}{z_R}$ iniciando con un término de orden cero, mientras que para la parte longitudinal las potencias requeridas son impares. De esta manera las soluciones toman la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T &= \mathbf{E}_T^0 + \left(\frac{w_0}{z_R}\right)^2 \mathbf{E}_T^2 + \dots; \\ E_z &= \frac{w_0}{z_R} E_z^1 + \left(\frac{w_0}{z_R}\right)^3 E_z^3 + \dots \end{aligned}$$

Se encuentra entonces que el orden mas bajo de la solución es puramente transversal, puede depender de la coordenada transversal y mientras mas términos se tomen en la serie, la divergencia del campo eléctrico tiende rápidamente a cero, resolviendo así la paradoja.

Las correcciones a primer orden corresponden a una pequeña componente longitudinal proporcional a $\frac{w_0}{z_R}$. En general, este método permite correcciones para cualquier orden tanto en las componentes transversales como longitudinales, siendo estas últimas, en la mayoría de las situaciones experimentales, muy pequeñas.

Posterior al trabajo de Lax, L.W. Davis [15] realizó una aproximación mucho mas sencilla al problema considerando, en lugar del campo eléctrico, un potencial vectorial \mathbf{A} polarizado en la dirección x ; $\mathbf{A} = A_x \mathbf{u}_x$, propagándose a lo largo del eje z . Las ecuaciones que relacionan a \mathbf{A} con el campo eléctrico y magnético son:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{i}{k} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - ik \mathbf{A}, \quad (2.4)$$

con k el número de onda y sujetos a la condición de Lorentz en la que el potencial escalar está dado por [36]:

$$\Phi = \frac{i}{k} \nabla \cdot \mathbf{A}.$$

La componente no cero del potencial vectorial cumple la ecuación escalar de Helmholtz (1.33). Se asume entonces que esta componente tiene la forma

$$A_x(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \exp(-ikz), \quad (2.5)$$

y se encuentra que $\psi(\mathbf{r})$ cumple la ecuación

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) - 2ik \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial z} = 0. \quad (2.6)$$

Reexpresando la ecuación (2.6) en términos de las variables adimensionales $x = w_0 \xi$, $y = w_0 \eta$, $z = l \zeta$ y $s = \frac{1}{kw_0}$, donde w_0 y l son parámetros característicos en las direcciones transversal y longitudinal, respectivamente, y proponiendo para la ecuación resultante una solución en serie de potencias como

$$\psi = \psi_0 + s^2 \psi_2 + s^4 \psi_4 + \dots,$$

además de usar las relaciones (2.3) y (2.4), se encuentra que las componentes transversales del campo eléctrico sólo contienen potencias pares de s , iniciando con un término de orden cero, y la componente longitudinal involucra sólo potencias impares. Para el orden mas bajo en s los resultados reproducen aquellos obtenidos por Lax, Louisell y Mcknight [37].

Hemos justificado entonces que el problema vectorial tridimensional se reduce a uno escalar

en el que \mathbf{E}_T es tomado como la componente x o y del campo eléctrico, siempre que $\frac{w_0}{z_R} \ll 1$.

2.2 Ecuación paraxial de Helmholtz

Sustituyendo la ecuación (2.1) en la ecuación escalar de Helmholtz (1.33) obtenemos:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2ik_z \frac{\partial A}{\partial z} + (k^2 - k_z^2)A = 0. \quad (2.7)$$

La suposición de que $A(\mathbf{r})$ varía lentamente con respecto a z (flujo de energía preferentemente a lo largo de z) significa que para una distancia $\Delta z = \lambda$, donde λ denota la longitud de onda, el cambio ΔA es mucho menor que A mismo, i. e., $\Delta A \ll A$. Esta desigualdad de variables complejas se aplica separadamente para las magnitudes de las partes real e imaginaria [46].

Ya que $\Delta A = \frac{\partial A}{\partial z} \Delta z = \frac{\partial A}{\partial z} \lambda$, entonces $\frac{\partial A}{\partial z} \ll \frac{A}{\lambda} = \frac{Ak}{2\pi}$, por lo tanto

$$\frac{\partial A}{\partial z} \ll kA. \quad (2.8)$$

Similarmente, la derivada $\frac{\partial A}{\partial z}$ varía lentamente en una distancia λ , esto significa que

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial A}{\partial z}, \quad (2.9)$$

por tanto,

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll k^2 A. \quad (2.10)$$

Si descomponemos el vector de onda en sus componentes transversal y longitudinal de modo que $k^2 = k_z^2 + k_t^2$, para haces altamente direccionales $k \approx k_z$ y usando la condición (2.9) en (2.7) obtenemos:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0. \quad (2.11)$$

Denotando como ∇_T^2 la parte transversal del operador laplaciano, es decir

$$\nabla_T^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

la ecuación (2.11) queda:

$$\nabla_T^2 A + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (2.12)$$

la cual es conocida como *ecuación paraxial de Helmholtz*.

2.3 Soluciones a la ecuación paraxial de Helmholtz

2.3.1 Haces Gaussianos

Consideremos una onda esférica

$$U_e(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{R} \exp(ikR), \quad (2.13)$$

propagándose lejos del origen con un frente de onda con radio de curvatura R . Si asumimos que $z^2 \gg x^2 + y^2$, la función $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ se puede expandir en serie de Taylor para la fase y para la amplitud se puede asumir $R \approx z$ (como consecuencia de que la amplitud cambia más lentamente que la fase), lo cual permite escribir la onda (2.13) en su aproximación paraxial, como:

$$U_e(\mathbf{r}) \approx \frac{A_1}{z} \exp(ikz) \exp\left(ik \left(\frac{x^2 + y^2}{2R}\right)\right), \quad (2.14)$$

con A_1 una constante. Esta es la solución mas simple, aunque no única, de la ecuación paraxial de Helmholtz y corresponde a una onda paraboloidal.

Partiendo de la forma de la ecuación (2.14) podemos buscar otras soluciones para la amplitud del tipo [28]:

$$A_g(\mathbf{r}) = \exp(iQ(z)(x^2 + y^2)) \exp(iP(z)), \quad (2.15)$$

si sustituimos lo anterior en la ecuación (2.12) encontramos que $Q(z)$ y $P(z)$ deben cumplir la condición

$$-2(x^2 + y^2)Q^2(z) + 2iQ(z) - k \frac{\partial P}{\partial z} - k(x^2 + y^2) \frac{\partial Q}{\partial z} = 0.$$

Puesto que (2.15) debe ser válida para todos los valores de x y y , debe cumplirse que:

$$k \frac{\partial P}{\partial z} - 2iQ = 0, \quad (2.16)$$

$$2Q^2 + k \frac{\partial Q}{\partial z} = 0. \quad (2.17)$$

Definiendo $q = \frac{k}{2Q}$ y derivando esto respecto a z obtenemos

$$\frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{k}{2Q^2} \frac{\partial Q}{\partial z},$$

podemos usar esta nueva variable q para reescribir (2.16) y (2.17) como:

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 1, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{i}{q}. \quad (2.19)$$

Al resolver (2.18) obtenemos que:

$$q = z + q_0,$$

donde q_0 es una constante de integración puramente imaginaria para remover la singularidad que ocurriría en $\frac{\partial Q}{\partial z}$ si $q_0 = -z_0$ para algún valor $z = z_0$. Podemos escribir entonces a q_0 como:

$$q_0 = iz_R,$$

con z_R un parámetro real conocido como *distancia de Rayleigh* [46].

Usando lo anterior para resolver la ecuación (2.19), la función $P(z)$ toma la forma:

$$P(z) = i \ln \left(1 - \frac{iz}{z_R} \right).$$

De la definición de la función logaritmo de un número complejo y con los resultados anteriores la función (2.15) queda:

$$U_g(\mathbf{r}) = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[\frac{-kz_R \rho^2}{2 \left[1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2\right]} \right] \exp \left[i \left\{ kz + \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) + \frac{k\rho^2}{2z \left[1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2\right]} \right\} \right], \quad (2.20)$$

donde se ha agregado el término de propagación $\exp(ikz)$ y donde $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Por tanto, la solución a la ecuación (2.12) puede reescribirse como [46]:

$$U_g(\mathbf{r}) = A_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{w^2(z)} - i(kz + k\frac{\rho^2}{2R(z)} - \zeta(z)) \right\}, \quad (2.21)$$

lo cual representa la amplitud compleja de un haz paraxial, donde A_0 es una constante de normalización y las expresiones para $w(z)$, $R(z)$, $\zeta(z)$ y w_0 son:

$$w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.22)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right], \quad (2.23)$$

$$\zeta(z) = \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right), \quad (2.24)$$

$$w_0 = \left(\frac{\lambda z_R}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.25)$$

El significado físico de (2.22)-(2.25) será aclarado posteriormente.

La intensidad óptica para el haz tiene la forma:

$$I(\rho, z) = I_0 \left[\frac{w_0}{w(z)} \right]^2 \exp \left[-\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right],$$

$$I_0 \equiv |A_0|^2.$$

Para cada valor de z , la intensidad es una función gaussiana de la distancia radial ρ al eje del haz; tiene un punto máximo en $\rho = 0$ y decrece monótonamente cuando ρ se incrementa, es por ello que este tipo de soluciones tienen el nombre de *haces Gauss* o *haces gaussianos*. Este comportamiento es esquematizado en la figura 2-1.

Para una distancia radial fija, la intensidad a lo largo de la dirección de propagación es también una función decreciente como vemos en la gráfica 2-2 que corresponde a la intensidad en el eje del haz ($\rho = 0$).

La función $w(z)$ definida por (2.22) representa el radio del haz como función de la distancia de propagación z . Para $z = 0$ el valor w_0 representa el radio transversal mínimo, por ello este

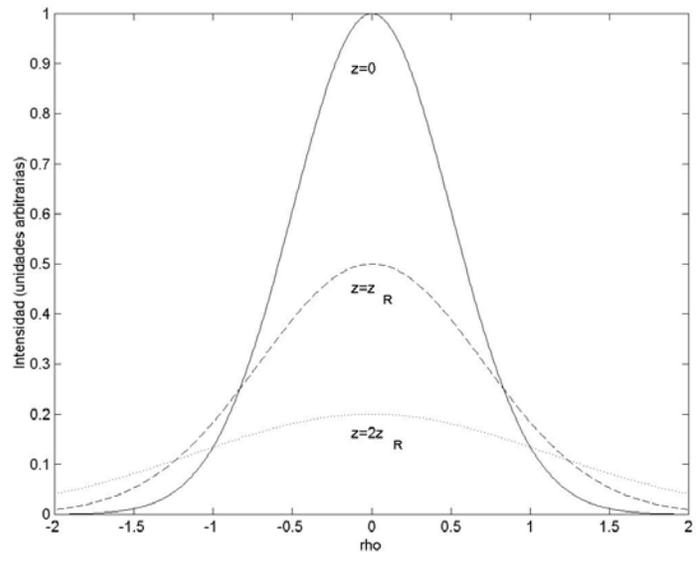


Figura 2-1: Perfiles transversales de intensidad para distintos valores de z

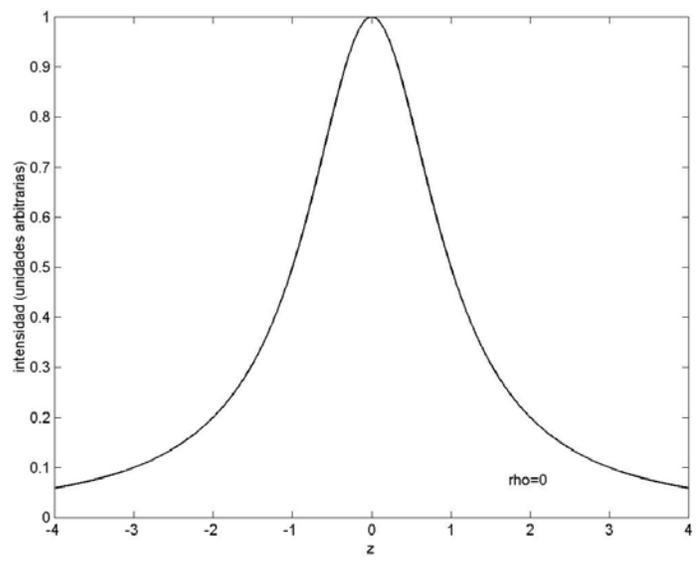


Figura 2-2: Intensidad óptica a lo largo del eje del haz.

plano es conocido como *cintura del haz*. La distancia en z para la cual el radio transversal del haz permanece menor o igual que el valor $\sqrt{2}w_0$ es llamado parámetro confocal y es igual al doble de la distancia de Rayleigh. Un aspecto aproximado de la intensidad y del tamaño transversal para diferentes valores de z se presenta en la figura 2-3 (a). Los parámetros más importantes del haz gaussiano se encuentran esquematizados en la figura 2-3 (b).

La representación asintótica de (2.22) para $z \gg 1$ es la línea recta

$$w(z) = \frac{\lambda}{\pi w_0} z, \quad (2.26)$$

cuya pendiente respecto al eje de propagación es

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}, \quad (2.27)$$

que es llamado ángulo de divergencia o difracción. La interpretación física dada a (2.27) es que la difracción causará un ensanchamiento de $\frac{2z\lambda}{\pi w_0}$ en el diámetro de un haz cuya cintura es $2w_0$ después de haberse propagado una distancia z . Notemos que entre más grande es el valor w_0 , el ensanchamiento del haz debido a difracción será menor.

El parámetro confocal o profundidad de foco está relacionado con el radio de la cintura del haz w_0 en la ecuación [46]

$$2z_R = \frac{2\pi w_0^2}{\lambda},$$

es decir, es directamente proporcional al área del haz en su cintura, por ello la profundidad de foco de un haz altamente focalizado es muy pequeña.

Por otra parte, de la ecuación (2.21) vemos que las superficies de fase constante del haz Gauss son:

$$\varphi(\rho, z) = kz + \frac{k\rho^2}{2R(z)} - \zeta(z) = cte.,$$

las cuales representan superficies paraboidales con radio de curvatura $R(z)$. Cuando $z = 0$, $R(0)$ es infinito correspondiendo a frentes de onda planos. Cuando $z = z_R$, $R(z_R)$ alcanza su valor mínimo igual a $2z_R$, por tanto, en este punto la curvatura es máxima. Después de este punto, los valores de $R(z)$ se incrementan y el frente de onda es aproximadamente el mismo que el de una onda esférica. Para z negativos, los frentes de onda siguen un patrón idéntico,

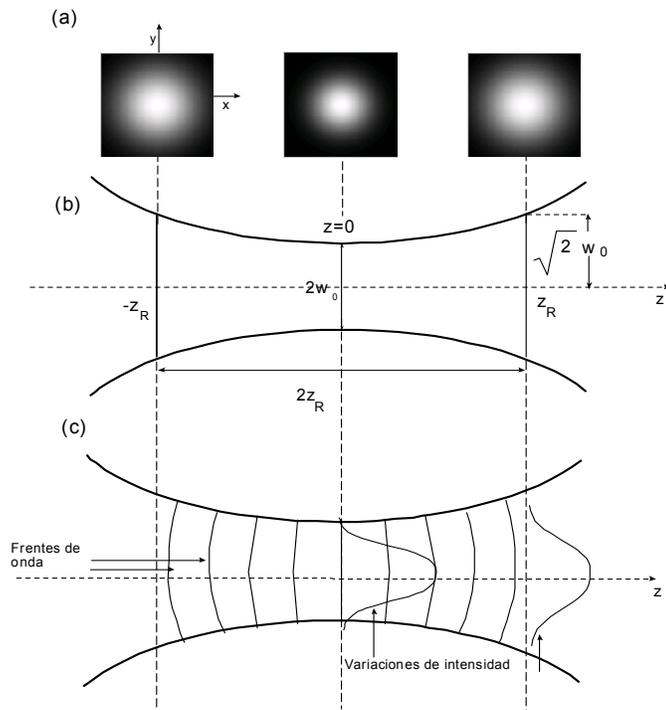


Figura 2-3: (a) Perfiles transversales de intensidad para diferentes valores de z . (b) Esquema del aspecto lateral del haz en el que se muestran sus parámetros más importantes. (c) Esquema de los frentes de onda y de las variaciones de intensidad transversal del haz a lo largo de su dirección de propagación.

excepto por el cambio de signo, lo que corresponde a ondas convergentes (ver Fig. 2-3 (c)).

Aunque el haz Gauss es la solución mas simple de la ecuación (2.12), no es la única. Los haces Hermite-Gauss (HG) y los haces Laguerre Gauss¹ (LG) forman bases completas para el espacio de soluciones de (2.12) en coordenadas cartesianas y cilíndricas circulares, respectivamente.

Los haces Hermite Gauss son soluciones cuya amplitud está dada en términos de productos de polinomios de Hermite de orden n y m modulados con una envolvente gaussiana [33, 46].

2.3.2 Haces Laguerre-Gauss (LG)

Si la ecuación paraxial de Helmholtz (1.33) se escribe en coordenadas cilíndricas circulares (ρ, ϕ, z) obtenemos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (2.28)$$

para cualquier función de la posición A y donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ son las coordenadas radial y azimutal, respectivamente.

Para determinar la solución de (2.28) se propone la función [53]

$$A(\mathbf{r}) = A(\rho, \phi, z) = F(\xi(\rho, z))\Phi(\phi)Z(z) \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2q(z)}\right). \quad (2.29)$$

Al sustituirla en (2.28) es posible encontrar condiciones sobre las funciones desconocidas $F(\xi)$, $\xi(\rho, z)$, $\Phi(\phi)$ y $Z(z)$; la función $q(z) = z + iz_R$ esta definida como en la sección 2.3.1.

La dependencia azimutal de la función viene dada por:

$$\Phi(\phi) = \exp(\pm il\phi),$$

con l un número entero.

La función $F(\xi)$ tiene la forma

$$F(\xi) = \xi^{\frac{l}{2}} L_p^l(\xi),$$

donde la función $L_p^l(\xi)$ denota el polinomio asociado de Laguerre; éstos son polinomios de grado

¹Debido a la importancia que los haces LG tienen a lo largo de este trabajo, la discusión se centra en la teoría de estos haces.

p por lo que este índice es un entero, $p \geq 0$ [1] y es llamado índice radial; $l > -1$ es también entero y es llamado índice azimutal [47]; los significados físicos de estos índices serán aclarados posteriormente.

Finalmente $Z(z)$ y $\xi(\rho, z)$ se representan como:

$$Z(z) = \frac{1}{w(z)} \exp \left[i(2p + l + 1) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) \right],$$

$$\xi(\rho, z) = \frac{2\rho^2}{w^2(z)},$$

donde $w(z)$ es la función que define el radio transversal del haz (ecuación (2.22)).

Las soluciones completas normalizadas para la ecuación paraxial de Helmholtz en coordenadas cilíndricas pueden ser expresadas como [53]:

$$A_{pl}(\rho, \phi, z) = \left(\frac{2p!}{\pi(l+p)!} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right)^{\frac{l}{2}} L_p^l \left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right) \times \quad (2.30)$$

$$\frac{\exp \{i(2p + l + 1)\zeta(z)\}}{w(z)} \exp \left\{ \frac{-\rho^2}{w^2(z)} + i \frac{k\rho^2}{2R(z)} \pm il\phi \right\};$$

$$\zeta(z) = \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right).$$

Con lo anterior, la función $U(\mathbf{r}) = A_{pl}(\rho, \phi, z) \exp(ikz)$ representa la amplitud compleja de modos paraxiales con simetría cilíndrica circular, conocidos como haces Laguerre-Gauss (LG).

La expresión para la intensidad del haz LG tiene la forma:

$$I(\rho, z) = \left(\frac{2p!}{\pi(l+p)!} \right) \left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right)^{|l|} \left(L_p^{|l|} \left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right) \right)^2 \exp \left(\frac{-2\rho^2}{w^2(z)} \right). \quad (2.31)$$

El parámetro p está relacionado con el número de nodos del perfil transversal del haz a lo largo de la dirección radial, es decir, p nos da el número de circunferencias nodales alrededor del eje central del haz. Cuando $l = 0$, el patrón de intensidad es un punto brillante central rodeado de p anillos brillantes (ver Fig. 2-4). Cuando $l \neq 0$ el número de nodos radiales se incrementa a $p + 1$; en este caso los perfiles transversales de intensidad se caracterizan por tener un punto central oscuro, debido a una singularidad azimutal de la fase en $\rho = 0$, rodeado de

$p + 1$ anillos brillantes (consideramos que el mínimo central es un nodo adicional, ver Fig. 2-4). Esta clase de campos con singularidades en la fase son referidos como *vórtices ópticos*. El índice l es también llamado *carga topológica*, *índice azimutal* o *helicidad*.

La característica mas distintiva de los haces Laguerre-Gaussianos es que cuando $l \neq 0$ la fase azimutal no es constante alrededor de la circunferencia del modo, sino que varía linealmente de 0 a 2π tantas veces como el valor del índice azimutal, es decir, l indica el número de veces en que la fase cambia de 0 a 2π alrededor de la circunferencia del haz.

Para aclarar lo anterior, las figuras² (2-4) y (2-5) esquematizan en la primera fila las gráficas de la amplitud de cada haz, en la segunda fila se representan los perfiles transversales de intensidad (en el plano de la cintura), y en la tercer fila la variación de la fase alrededor de la circunferencia del modo representados por tonalidades de gris.

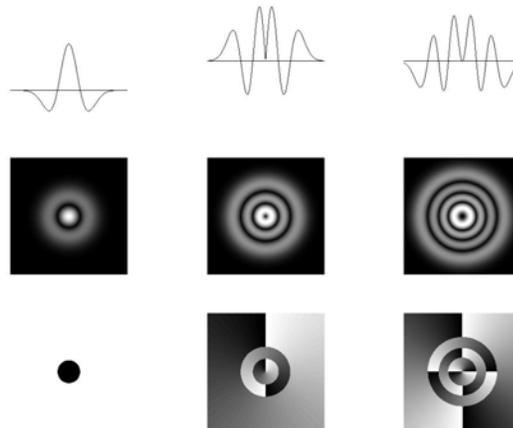


Figura 2-4: Simulaciones matemáticas de haces LG con índices $l = 0, p = 1$ (primer columna), $l = 1, p = 2$ (columna central), $l = 2, p = 3$ (tercer columna).

En la figura (2-4) las columnas de izquierda a derecha corresponden a los modos ($l = 0, p = 1$), ($l = 1, p = 2$) y ($l = 2, p = 3$) respectivamente. Para cada haz con $l \neq 0$, aparecen $p + 1$ nodos radiales además de que localmente en cada anillo se observa el comportamiento en cuanto al número de ciclos de 2π en la fase, pero con una diferencia de fase de π entre anillos consecutivos.

²Las gráficas presentadas son simulaciones numéricas realizadas en Matlab.

En la figura que ilustra las variaciones de fase del haz ($l = 0, p = 1$), el negro representa fase cero y el blanco fase π asociadas a los cambios de signo de la amplitud entre anillos vecinos.

La primer columna de la figura 2-5 muestra un haz gaussiano convencional en el que $l = 0$ y $p = 0$; es el orden más bajo de los haces del tipo LG y no tiene variaciones en fase. Las siguientes columnas esquematizan dos haces LG con $p = 0$ e índices azimutales de $l = 1$ y $l = 2$, (de izquierda a derecha) respectivamente; para estos casos notemos que no hay nodos radiales que no sean los centrales y que el radio de las circunferencias centrales de nula intensidad se incrementa conforme el índice azimutal crece.

2.4 Soluciones a la ecuación escalar de Helmholtz con simetría circular cilíndrica: Haces Bessel (BB)

La ecuación escalar de Helmholtz en coordenadas cilíndricas circulares esta expresada como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r})}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r})}{\partial z^2} + k^2 \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.32)$$

Si suponemos separación de variables de forma que

$$\psi(\rho, \phi, z) = \psi(\mathbf{r}) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z),$$

entonces las funciones $R(\rho)$, $\Phi(\phi)$ y $Z(z)$ deben cumplir la ecuación diferencial

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 = -\frac{1}{z} \frac{d^2 Z}{dz^2}.$$

El signo de la constante de separación será elegido de manera que obtengamos soluciones ondulatorias en z , esto es:

$$-\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k_z^2, \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 = k_z^2, \quad (2.34)$$

entonces las soluciones para $Z(z)$ tienen la forma $Z(z) = \exp(ik_z z)$. Si definimos ahora $k_\rho^2 \equiv k^2 - k_z^2$ y multiplicamos por ρ^2 , la ecuación (2.34) queda:

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + k_\rho^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2},$$

que usando de nuevo una constante de separación l^2 resulta en el par de ecuaciones:

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + k_\rho^2 \rho^2 = l^2, \quad (2.35)$$

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = l^2. \quad (2.36)$$

La solución para la función $\Phi(\phi)$ es entonces

$$\Phi(\phi) = \exp(\pm il\phi), \quad (2.37)$$

y al reacomodar la ecuación (2.35) obtenemos

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + (k_\rho^2 \rho^2 - l^2)R = 0, \quad (2.38)$$

que es la ecuación de Bessel de orden l [50]. De la ecuación (2.37) y de la periodicidad de ϕ resulta que l debe ser un entero positivo.

La ecuación (2.38) se satisface con las funciones de Bessel de orden l , $J_l(x)$ y $Y_l(x)$ de primera y segunda clase, respectivamente [4], con $x = k_\rho \rho$.

En virtud de que deseamos soluciones acotadas cuando $\rho \rightarrow 0$ elegimos

$$R(\rho) = \alpha J_l(k_\rho \rho) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+l)!} \left(\frac{k_\rho \rho}{2} \right)^{l+2n},$$

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Por tanto, las soluciones exactas en coordenadas cilíndricas circulares para la ecuación escalar de Helmholtz pueden representarse como:

$$\psi(\rho, \phi, z, t) = J_l(k_\rho \rho) \exp(i(l\phi + k_z z - \omega t)), \quad (2.39)$$

que son conocidas como haces *Bessel de orden l* . Simulaciones matemáticas de haces Bessel de ordenes cero, uno y dos, se encuentran esquematizados en la figura 2-6

De la ecuación (2.39) notamos que la irradiancia óptica es proporcional a $(J_l(k_\rho \rho))^2$ para cualquier z , por tanto los haces Bessel son *adifraccionales* o haces *sin difracción* [17], pues la distribución de intensidad es independiente de la coordenada z .

Una gráfica de la distribución de intensidad de un haz Bessel de orden cero es mostrada en la figura 2-7. Observamos que el radio del primer mínimo está determinado por la primer raíz de la función de Bessel de orden cero; esto es, el radio del máximo central del haz se define como el radio ρ_0 tal que $J_0(k_\rho \rho_0) = 0$; esto sucede cuando:

$$k_\rho \rho_0 = 2.4048 \equiv x_0, \quad (2.40)$$

donde x_0 es el valor del primer cero de la función de Bessel de orden 0 [4]. Encontramos entonces que el radio del máximo central del haz Bessel tiene un valor fijo $\frac{2.4048}{k_\rho}$, constante a lo largo de la dirección de propagación, por lo que el haz Bessel puede permanecer colimado grandes distancias, dentro de las restricciones experimentales.

2.5 Generación experimental de haces escalares Gauss, Laguerre-Gauss y Bessel

2.5.1 Generación de haces Gauss: el Láser

Un láser³ es un dispositivo que produce un haz de luz altamente coherente y direccionado. Los láseres son esencialmente resonadores Fabry-Perot que consisten de una cavidad formada de dos espejos que pueden tener cierta curvatura, uno de los cuales es totalmente reflejante ($\sim 99.9\%$) y otro parcialmente reflejante ($\sim 99\%$), separados por una distancia d . Dentro de la cavidad se introduce un sólido, líquido o gas (llamado medio activo) que contenga en su estructura átomos con al menos un nivel energético metaestable; esta condición es necesaria para producir fotones por medio del proceso de *emisión estimulada* [60]. En este proceso un átomo regresando de un estado excitado a su estado base genera un fotón por emisión espontánea. Cuando este

³ Acrónimo de "Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation".

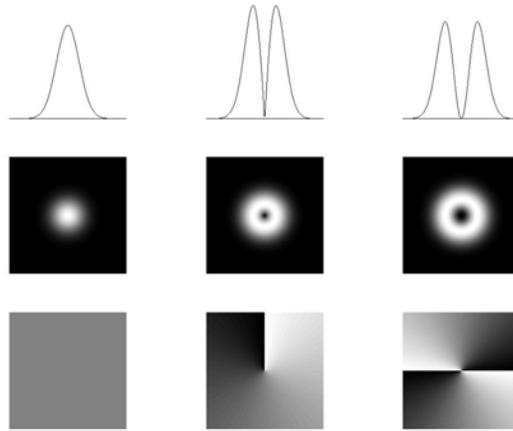


Figura 2-5: Simulaciones matemáticas de haces LG con valores $l=0$ $p=0$ (primer columna), $l=1$ $p=0$ (columna central) y $l=2$ $p=0$ (tercer columna).

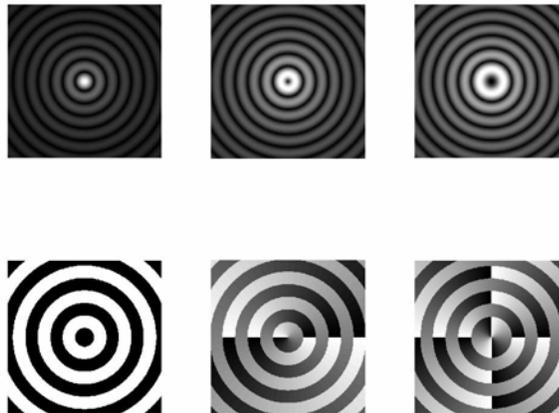


Figura 2-6: Perfiles transversales de intensidad (primer fila) y variaciones de fase (segunda fila) de haces Bessel ordenes 0, (primer columna), 1 (segunda columna), 2 (tercer columna).

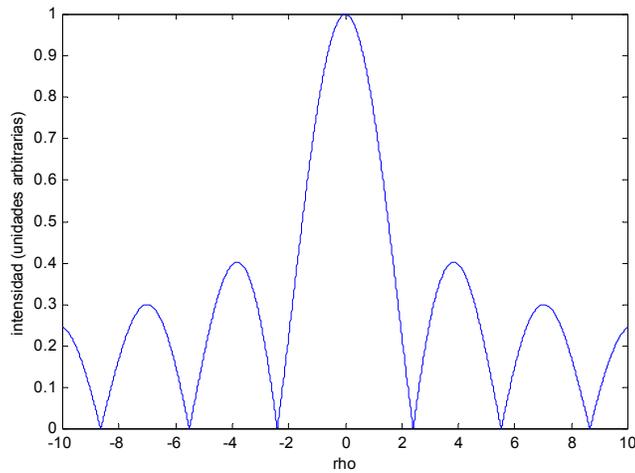


Figura 2-7: Intensidad transversal de un haz Bessel de orden 0 en el plano de la cintura (la gráfica tiene simetría radial respecto el eje perpendicular a eje rho paralelo a la página).

fotón alcanza otro átomo en estado excitado, la interacción estimula al segundo átomo a liberar otro fotón idéntico al incidente con la misma frecuencia, dirección y polarización (espacialmente coherentes) y la misma velocidad y fase (temporalmente coherentes) [51].

Los fotones producidos por la repetición de este mecanismo millones de veces son reflejados múltiples ocasiones por los espejos retroalimentando al sistema. Parte de la radiación podrá pasar a través del espejo semi-reflejante produciendo un haz colimado, que es lo que podemos detectar como emisión de luz láser (ver figura 2-8).

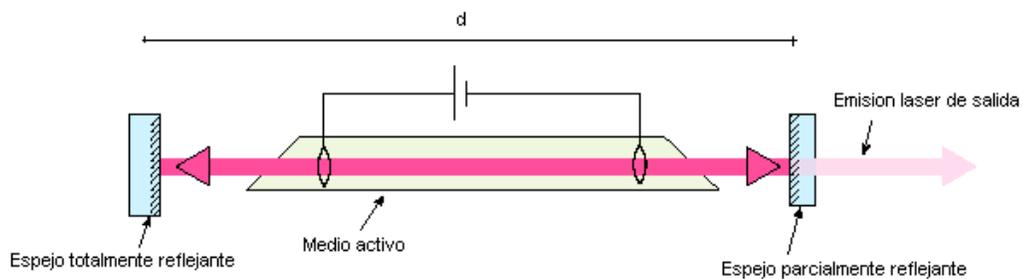


Figura 2-8: Esquema del funcionamiento básico de un láser.

El recorrido de los fotones entre los espejos provocan oscilaciones dentro de la cavidad, estableciendo ondas estacionarias determinadas por la separación d entre los espejos. Debido al tamaño finito del medio activo y de los espejos, no se puede establecer una onda estacionaria de la forma de una onda plana. Es posible demostrar que las soluciones estacionarias para la distribución de intensidades dentro de la cavidad resonante estan dadas en términos de los polinomios de Hermite de ordenes m y n . Las soluciones en función de la coordenada cilíndrica ρ (distancia al eje de la cavidad) y del ángulo azimutal ϕ están dadas en términos de los polinomios de Laguerre (sección 2.3.2).

Hay un número infinito de posibles modos oscilatorios tanto longitudinales (a lo largo del eje de la cavidad) como transversales (normales al eje de la cavidad). Los modos transversales son conocidos como modos TEM_{mn} ⁴ donde m y n denotan el número de líneas nodales transversales en las direcciones x y y , como se ilustra en la figura 2-9. Estos modos propios de oscilación corresponden a los haces del tipo Hermite-Gauss mencionados en la sección 2.3.1. El orden mas bajo o modo transversal TEM_{00} es el correspondiente al haz gaussiano convencional y es el mas ampliamente usado.

Como parte del trabajo experimental en el laboratorio, se generaron algunos modos Hermite-Gauss de orden superior variando la alineación de la cavidad resonante de un láser IR de Nd:YVO₄ (cristal de vanadato) bombeado por diodos de alta potencia.

En la figura 2-10 se muestran fotografías experimentales del comportamiento de un haz gaussiano generado por un láser HeNe, 632nm a 5mW de potencia. En la imagen (a), el haz proveniente del láser fué focalizado por un doblete de lentes de distancias focales de 50mm y 100mm e intruducido en una celda ($\sim 1cm^3$) conteniendo una solución de agua con microesferas de sílica de $1\mu m$ de diámetro. Se muestra la trayectoria del haz perpendicularmente a la dirección de propagación observando la luz dispersada por las partículas con un objetivo de microscopio con magnificación 10x. La imagen se registró en una cámara CCD. En la figura (b) se muestran fotografías de intensidad transversal para diferentes planos z sobre el eje de propagación para el mismo haz. Notemos el ensanchamiento en el diámetro del haz cuando nos alejamos del plano de la cintura.

⁴Transverse Electromagnetic Mode

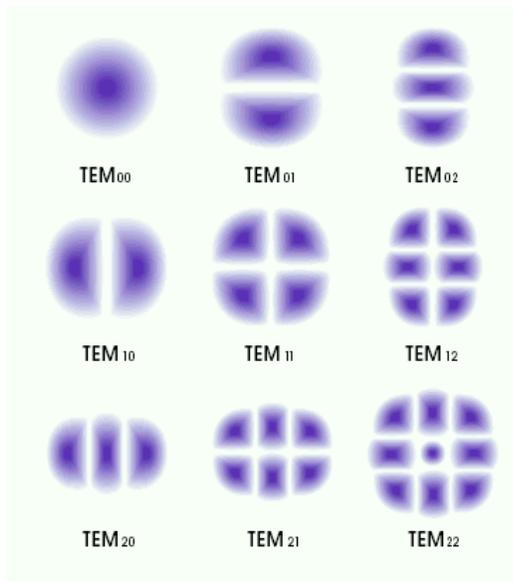


Figura 2-9: Esquemas de perfiles transversales de intensidad para haces Hermite-Gauss de diferentes ordenes.

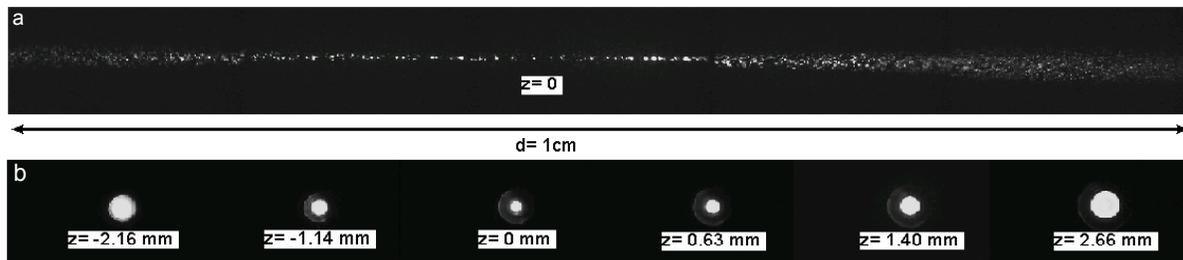


Figura 2-10: (a) Fotografías experimentales de la vista lateral del haz gauss enfocado por un doblete de lentes de 50mm y 10mm y propagándose dentro de una solución de partículas de $1\mu\text{m}$ en agua. (b) Perfiles transversales del mismo haz en diferentes planos a lo largo del eje de propagación z [31].

2.5.2 Generación experimental de haces Laguerre Gauss

Los haces tipo LG se obtienen para un medio activo con simetría cilíndrica en la dirección transversal a la dirección de propagación del haz. Algunos experimentos con láseres de gas con espejos esféricos cuidadosamente alineados muestran claramente oscilaciones LG con simetría radial y azimutal de orden superior [47].

Alternativamente, se han propuesto convertidores de modo consistentes de un arreglo de lentes cilíndricas colocadas a la salida de un láser que emite un haz Hermite-Gauss; si el haz HG tiene ordenes m y n , el haz LG resultante tiene como valor del índice azimutal $l = m - n$ e índice radial $p = \min(m, n)$ [59].

En nuestro caso se usó un holograma modulador de amplitud generado por computadora. Un holograma es la impresión en película fotográfica del patrón de franjas de interferencia producidas por la superposición de dos ondas: una de referencia, generalmente plana, y otra conocida como onda objeto, la cual puede ser la luz esparcida por un objeto físico (hologramas ópticos) o bien el campo óptico del objeto de interés en versión digital (hologramas generados por computadora). Siendo un patrón de interferencia, un holograma tendrá franjas brillantes y oscuras; las brillantes se producirán cuando las dos ondas se encuentren en fase mientras que franjas oscuras corresponden al caso de un desfase de media onda. Notemos que en un holograma la información de la fase ha sido transformada en un patrón de intensidad.

Los hologramas usados en este trabajo, son impresiones en película fotográfica de distribuciones de franjas oscuras y brillantes que resultan de la simulación matemática de la interferencia entre una onda plana con un término $l\phi$ en la fase: $\exp i(kz + l\phi)$, y otra onda plana inclinada respecto al eje z , $\exp i(k_z z + k_x x)$. La intensidad de la superposición de estas ondas, en $z = 0$, tiene la siguiente forma:

$$I \propto \cos^2\left(\frac{l\phi}{2} + \frac{k_x x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{l\phi}{2} + \frac{\pi x}{P}\right) = \cos^2\left(\frac{l\phi}{2} + \frac{\pi N x}{L}\right). \quad (2.41)$$

El término $\frac{l\phi}{2}$ es el responsable de que en la parte central del patrón de franjas aparezcan dislocaciones en forma de "tenedor" conforme crece el valor de $\frac{\pi x}{P}$. $P = \frac{L}{N}$ (longitud entre número de líneas) corresponde al periodo de una rejilla binaria, que es llamada *rejilla portadora* o, equivalentemente, es el periodo de las franjas lejos del tenedor (ver Fig. 2-11). Es importante

que la película fotográfica usada sea de alta resolución para mejorar la calidad del holograma.

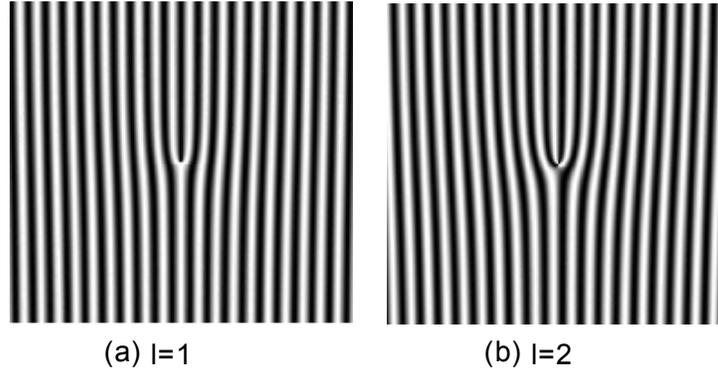


Figura 2-11: (a) Holograma generado por computadora con $l=1$. (b) Holograma generado por computadora con $l=2$.

Cuando una onda plana (o un haz gaussiano bien colimado) ilumina la dislocación central, el holograma actúa como una rejilla de difracción, donde los múltiples órdenes de difracción producen una reconstrucción de las ondas que inicialmente interfirieron. Cada orden de difracción tendrá una variación en su fase de la forma $\exp(i m \phi)$, donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ corresponde al orden que se observa. Así, por ejemplo, los órdenes ± 1 del holograma en la figura 2-11 (a) tendrán variación en su fase del tipo $\exp(\pm i \phi)$, los órdenes ± 2 del mismo holograma la tendrán en la forma $\exp(\pm 2i \phi)$, etc. En el caso del holograma de la figura 2-11 (b) los órdenes ± 1 tendrán variación en su fase como $\exp(\pm 2i \phi)$, los órdenes ± 2 la tendrán como $\exp(\pm 4i \phi)$, etc. En particular, para cualquiera de los dos hologramas el orden cero ($m = 0$) no tendrá variación en su fase de este estilo, por lo que el orden cero corresponde a la transmisión de la onda plana incidente.

Iluminando con un haz gaussiano los hologramas generados en computadora correspondientes, generamos haces LG con cargas topológicas de 1 (Fig. 2-12 (b)) y 2 (Fig. 2-12 (c)) ambos con índice radial $p = 0$.

Haces Laguerre-Gauss con $p > 0$ han sido generados mediante hologramas de este tipo pero con discontinuidades circulares adicionales a la dislocación de tenedor, con radios específicos que favorezcan un orden de difracción particular [34].

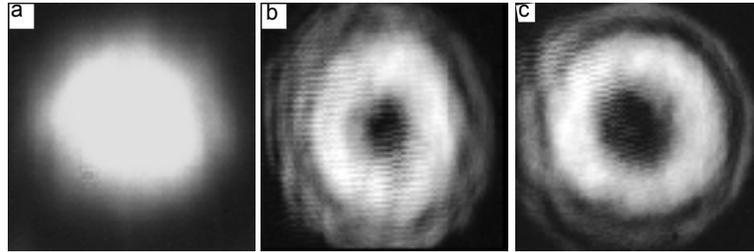


Figura 2-12: Fotografías experimentales de haces LG de orden cero (a), uno (b) y dos (c), generados por hologramas moduladores de amplitud. Nótese que el diámetro del mínimo central aumenta conforme el índice azimutal crece.

2.5.3 Generación experimental de haces Bessel

Las formas ideales de haces Bessel son experimentalmente imposibles, pues debido a su extensión infinita llevan una cantidad infinita de energía, análogo a la onda plana.

Durnin produjo la primera aproximación a un haz Bessel de orden cero iluminando con una onda plana (o un haz bien colimado) una rendija anular muy delgada colocada en el plano focal posterior de una lente [17]. En el espacio mas allá de la lente se creará una región cónica de interferencia donde el campo óptico estará dado por una función Bessel de orden cero (ver Fig. 2-13). Sin embargo, el método anterior presenta baja eficiencia pues la mayoría de la luz incidente es bloqueada por la apertura.

La técnica mas eficiente es iluminar con un haz gaussiano colimado, de radio w_c , una lente cónica llamada axicón, el cual genera también una región cónica de interferencia como se muestra en la figura 2-14.

Geoméricamente, se encuentra que cuando el ángulo de abertura del cono es pequeño se puede aproximar por:

$$\theta_0 \approx (n - 1)\gamma, \quad (2.42)$$

donde n es el índice de refracción del material del que esta hecho el axicón y γ es el ángulo de abertura del mismo. La zona de superposición de ondas se extiende en un rango longitudinal de

$$z_{\max} = \frac{w_c}{\tan \theta_0}. \quad (2.43)$$

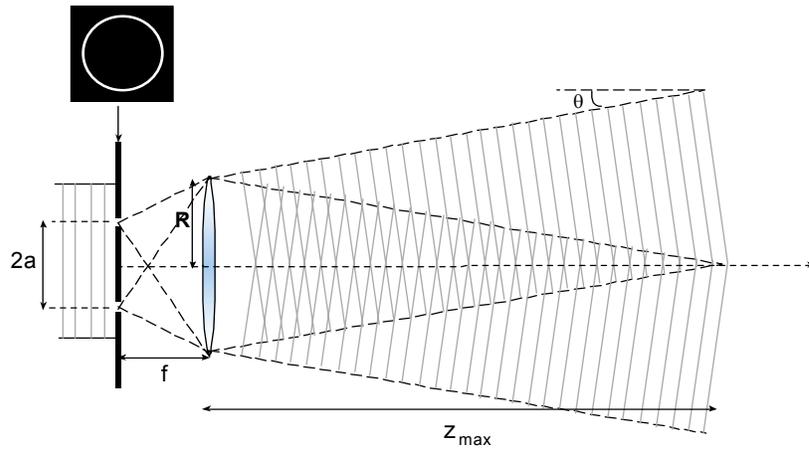


Figura 2-13: Dispositivo para la generación experimental de un haz Bessel usado por Durnin (todos los elementos tienen simetría de rotación).

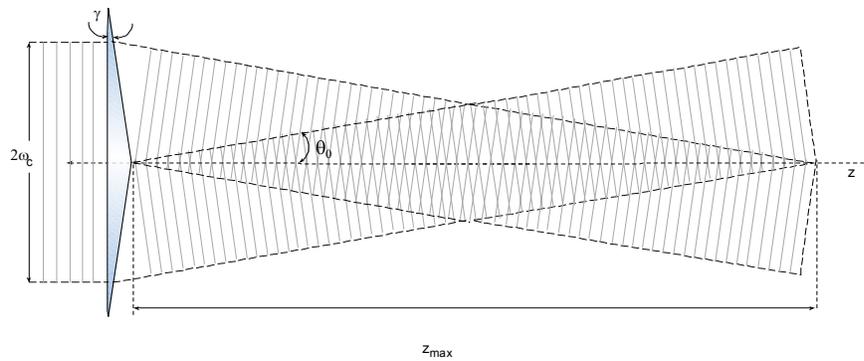


Figura 2-14: Esquema del funcionamiento básico del áxicon. (Todos los elementos tienen simetría de rotación).

Usando la relación (2.40) y el hecho de que $k_\rho = \frac{2\pi n \sin \theta_0}{\lambda}$ es la componente transversal del vector de onda en el medio de propagación, entonces, el tamaño del spot central del haz Bessel, para una longitud de onda dada, es

$$\rho_0 = \frac{x_0 \lambda}{2\pi \sin(\gamma(n-1))}. \quad (2.44)$$

Esto nos indica que para un haz Bessel de orden cero, el radio del máximo central está totalmente determinado por la longitud de onda del láser y los parámetros del axicón, siendo independiente de la coordenada z , en contraste con el haz gaussiano.

También se han obtenido aproximaciones a un haz Bessel utilizando hologramas generados por computadora con funciones de transmitancia tipo axicón; esta técnica ofrece poca eficiencia ($\sim 40.5\%$) [55, 57].

J. Arlt y K. Dholakia propusieron en el 2000, un método para generar haces Bessel de ordenes superiores [5]. En este experimento, un modo LG colimado con índice azimutal l e índice radial $p = 0$, es usado para iluminar un axicón, a la salida de éste se genera una aproximación de un haz Bessel de orden l con una eficiencia de casi 100%. En nuestro caso, esta fué la técnica usada para generar haces Bessel de ordenes cero, uno y dos. En la figura 2-15 se presenta una comparación entre las simulaciones numéricas (columna 1) y los resultados experimentales (columna 2) para haces Bessel de orden 0 (fila superior) y orden 2 (fila inferior).

La expresión aproximada para la irradiancia de un haz Bessel generado con este método es [35]:

$$I_l(\rho, z) = \frac{\pi 2^{l+1}}{l!} k_\rho w_c \left(\frac{P}{\pi w_c^2 / 2} \right) \left(\frac{z}{z_{\max}} \right)^{2l+1} \exp\left(\frac{-2z^2}{z_{\max}^2}\right) J_l^2(k_\rho \rho), \quad (2.45)$$

con P la potencia total del haz. Si buscamos un máximo para la expresión (2.45) respecto a z , encontramos que hay un punto a lo largo de z_{\max} para el cual el haz Bessel tiene máxima intensidad, este punto esta dado por:

$$z_{peak} = \frac{\sqrt{2l+1}}{2} z_{\max} \approx \frac{\sqrt{2l+1}}{2} \frac{w_c}{(n-1)\gamma}. \quad (2.46)$$

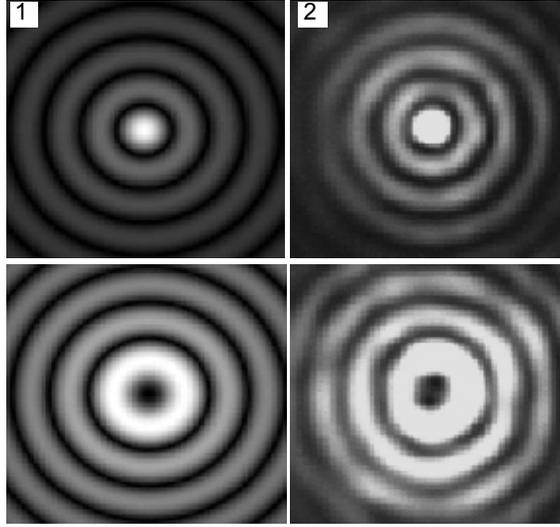


Figura 2-15: Comparación entre las simulaciones numéricas (1) y los resultados experimentales (2) para haces Bessel de orden 1 (fila superior) y orden 2 (fila inferior).

2.6 Momento angular en vórtices escalares

En ésta sección, seguiremos los cálculos del trabajo de Allen y sus colaboradores [2], para analizar el momento angular de un vórtice escalar debido a su distribución espacial de fase.

Retomando la discusión presentada al final de la sección 2.1, sabemos que un haz paraxial puede ser representado por el potencial vectorial \mathbf{A} polarizado en eje x , es decir

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \psi(x, y, z) \exp(i(kz - \omega t)) \mathbf{u}_x, \quad (2.47)$$

donde $\psi(x, y, z)$ es una función escalar que describe la amplitud del campo y que satisface (2.6).

Si usamos las ecuaciones (2.3) y (2.4) con el potencial anterior, junto con el hecho de que en este régimen se ignoran las segundas y productos de primeras derivadas de los campos [3], además de la condición (2.8), encontramos que los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} son [3]

$$\mathbf{E} = ik \left(\psi \mathbf{u}_x + \frac{i}{k} \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{u}_z \right) \exp(ikz), \quad (2.48)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = ik \left(\psi \mathbf{u}_y + \frac{i}{k} \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{u}_z \right) \exp(ikz). \quad (2.49)$$

Al introducir las ecuaciones anteriores en las expresiones (1.41) y (1.42), la parte real del promedio temporal de la densidad de momento lineal es [2, 11]

$$\langle \mathbf{g} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} (\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) = i\omega \frac{\varepsilon_0}{2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) + \omega k \varepsilon_0 |\psi|^2 \mathbf{u}_z. \quad (2.50)$$

Cuando se introduce la función de amplitud (2.30) del haz LG en la expresión (2.50) la densidad de momento lineal para un vórtice tipo LG polarizado linealmente es [2]

$$\langle \mathbf{g} \rangle = \frac{k\omega\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\rho z}{z^2 + z_R^2} |A_{pl}|^2 \mathbf{u}_\rho + \frac{l}{k\rho} |A_{pl}|^2 \mathbf{u}_\phi + |A_{pl}|^2 \mathbf{u}_z \right). \quad (2.51)$$

Notemos en (2.51) que el promedio temporal del vector de Poynting dado por $c^2 \langle \mathbf{g} \rangle$ tiene componente azimutal, además de radial y longitudinal, si $l \neq 0$, lo cual indica que la dirección de flujo de energía no es paralela a la de propagación, sino helicoidal a lo largo del eje longitudinal. La componente azimutal está asociada con la rotación de fase del campo, la radial es consecuencia de la divergencia del haz, mientras que la componente en z se relaciona con el momento lineal en la dirección de propagación [2, 53].

Calculando el promedio temporal de la densidad de momento angular respecto al origen $\langle \mathbf{j} \rangle = \mathbf{r} \times \langle \mathbf{g} \rangle$, se obtiene [2, 53]

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \frac{k\omega\varepsilon_0}{2} \left[\frac{-lz}{k\rho} |A_{pl}|^2 \mathbf{u}_\rho + \rho \left(\frac{z^2}{z^2 + z_R^2} - 1 \right) |A_{pl}|^2 \mathbf{u}_\phi + \frac{l}{k} |A_{pl}|^2 \mathbf{u}_z \right]. \quad (2.52)$$

Para obtener los momentos lineal y angular totales, es necesario llevar a cabo una integración sobre todo el espacio, sin embargo, debido a la simetría que los vectores unitarios \mathbf{u}_ρ y \mathbf{u}_ϕ tienen alrededor de la circunferencia del haz, sólo la componente z del momento angular total será distinta de cero. En general, lo anterior es válido para *cualquier* vórtice óptico con amplitud compleja

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\rho, z) \exp(il\phi). \quad (2.53)$$

El momento angular total, es entonces la integral de volumen de la componente z de $\langle \mathbf{j} \rangle$, que para campos del estilo de (2.53), o en particular para Laguerre-Gaussianos, tiene la forma:

$$|\mathbf{J}| = J_z = \frac{l\omega\varepsilon_0}{2} \int |\psi|^2 d^3r. \quad (2.54)$$

En principio la integral anterior diverge, por tanto, es físicamente más aceptable considerar el momento angular por unidad de longitud en un plano fijo $z = z_0$ [56], es decir:

$$\mathcal{J}(z_0) = \frac{l\omega\varepsilon_0}{2} \iint |\psi|^2 \rho d\rho d\phi. \quad (2.55)$$

En analogía con la mecánica cuántica, un momento angular proporcional al índice azimutal l puede ser asociado a la contribución orbital que, como vemos, es debida a la distribución espacial de fase.

Al generalizar la aproximación y considerar estados de polarización arbitrarios, tomamos el potencial vectorial \mathbf{A} ahora como

$$\mathbf{A} = \psi(x, y, z) \exp(ikz)(\alpha\mathbf{u}_x + \beta\mathbf{u}_y), \quad (2.56)$$

donde α y β denotan las componentes complejas del vector de Jones especificado por el estado de polarización del campo y que satisfacen $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

El cálculo para el promedio temporal de la densidad de momento lineal (2.50) resulta en [2, 53]

$$\langle \mathbf{g} \rangle = i\omega \frac{\varepsilon_0}{2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) + \omega k \varepsilon_0 |\psi|^2 \mathbf{u}_z + \omega \sigma \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial |\psi|^2}{\partial \rho} \mathbf{u}_\phi, \quad (2.57)$$

donde se ha definido $\sigma \equiv i(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)$. El caso $\sigma = 0$ corresponde a polarización lineal, pero toma el valor $-1(+1)$ para polarización circular derecha (izquierda).

En consecuencia, las densidades de momento lineal y angular para vórtices Laguerre-Gaussianos con polarización arbitraria son, respectivamente [53]:

$$\langle \mathbf{g} \rangle = \frac{k\omega\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\rho z}{z^2 + z_R^2} |A_{pl}|^2 \mathbf{u}_\rho + \left(\frac{l|A_{pl}|^2}{k\rho} - \frac{\sigma}{2k} \frac{\partial |A_{pl}|^2}{\partial \rho} \right) \mathbf{u}_\phi + |A_{pl}|^2 \mathbf{u}_z \right), \quad (2.58)$$

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \frac{k\omega\varepsilon_0}{2} \left[\frac{l|A_{pl}|^2}{k} - \frac{\sigma\rho}{2k} \frac{\partial |A_{pl}|^2}{\partial \rho} \right] \mathbf{u}_z. \quad (2.59)$$

Claramente, el efecto de generalizar la polarización del haz escalar es introducir un término adicional en la componente z de $\langle \mathbf{j} \rangle$ en (2.59); esta es la contribución al momento angular debida a polarización o espín [2].

En la aproximación paraxial, la parte del espín depende del gradiente local de intensidad. Sin embargo, cuando se toma el momento angular por unidad de longitud, la relación equivalente a (2.55) para (2.59), integrando por partes en ρ , queda

$$\mathcal{J}(z_0) = \frac{\omega\varepsilon_0}{2}(l + \sigma) \iiint |A_{pl}|^2 \rho d\rho d\phi - \frac{\omega\varepsilon_0}{2}\pi\sigma(\rho^2 |A_{pl}|^2)|_0^\infty, \quad (2.60)$$

pero cuando se evalúa, el último término se anula pues $\rho^2 |A_{pl}|^2 \rightarrow 0$ si $\rho \rightarrow \infty$.

Relacionando los resultados anteriores con los cuánticos, estimaremos las razones entre momento angular y energía por unidad de longitud con el propósito de inferir el "momento angular por fotón". Es necesario obtener primero la densidad de energía que para campos armónicos está dada por (ecuación 1.12)

$$u = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \right].$$

Usando el potencial vectorial (2.56) en la relación (2.4) para calcular \mathbf{E} , y las aproximaciones en el régimen paraxial necesarias, obtenemos una energía por unidad de longitud dada por [53]

$$\mathcal{U}(z_0) = \frac{1}{2}\omega^2\varepsilon_0 \iiint |A_{pl}|^2 \rho d\rho d\phi. \quad (2.61)$$

Al dividir (2.60) entre (2.61) obtenemos:

$$\frac{\mathcal{J}(z_0)}{\mathcal{U}(z_0)} = \frac{\frac{\omega\varepsilon_0}{2}(l + \sigma) \iiint |A_{pl}|^2 \rho d\rho d\phi}{\frac{1}{2}\omega^2\varepsilon_0 \iiint |A_{pl}|^2 \rho d\rho d\phi} = \frac{l + \sigma}{\omega}. \quad (2.62)$$

Si reescribimos lo anterior como $\frac{(l+\sigma)\hbar}{\omega\hbar}$ obtenemos que cada fotón tiene un momento angular total igual a

$$|\mathbf{J}| = (l + \sigma)\hbar. \quad (2.63)$$

En ausencia del término de fase $\exp(i l \phi)$ ($l = 0$) el fotón lleva momento angular siempre que esté circularmente polarizado ($\sigma = \pm 1$). La importancia de (2.63) radica en que demuestra que un vórtice escalar ($l \neq 0$) no polarizado o polarizado linealmente ($\sigma = 0$) posee un momento angular $l\hbar$ por fotón.

Capítulo 3

Haces de luz vectoriales

3.1 Soluciones a la ecuación vectorial de Helmholtz

En el capítulo anterior asumimos aproximaciones que hicieron posible resolver la ecuación de Helmholtz para un campo óptico polarizado, es decir, el problema vectorial se redujo a uno escalar donde sólo analizamos una componente de los campos electromagnéticos.

En el caso general, es necesario determinar el comportamiento del campo electromagnético por medio de la solución rigurosa de la ecuación de onda vectorial. Es posible encontrar soluciones completamente generales e independientes del sistema coordenado [45] haciendo posible el estudio de estados de polarización no convencionales, es decir, diferentes a los estudiados en la sección 1.4.3.

Dada una función escalar ψ que satisfaga ecuación escalar de Helmholtz:

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0, \quad (3.1)$$

y dado cualquier vector unitario *constante* \mathbf{u} , podemos construir tres soluciones vectoriales independientes de (1.32) como sigue [45]:

$$\mathbf{L} = \nabla\psi, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{M} = \nabla \times \mathbf{u}\psi, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}, \quad (3.4)$$

donde k es el número de onda¹.

Si sustituimos (3.2),(3.3) y (3.4) sujetas a la condición (3.1), se verifica que (1.32) es realmente satisfecha. De sus definiciones, los vectores \mathbf{M} y \mathbf{N} son solenoidales, es decir

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0, \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{N} = 0. \quad (3.6)$$

Dado que \mathbf{u} es cualquier vector constante, \mathbf{M} puede ser también escrito como

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \times \mathbf{u} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{N}, \quad (3.7)$$

lo cual se obtiene aplicando el operador rotacional a la ecuación (3.4), y simplificando con la identidad vectorial $\nabla \times \nabla \times \mathbf{M} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}) - \nabla^2 \mathbf{M}$ y con las ecuaciones (1.32) y (3.5).

Para cada solución particular de (3.1), que denotaremos como ψ_l , existen asociados los correspondientes vectores \mathbf{L}_l , \mathbf{M}_l y \mathbf{N}_l , ninguno de los cuales son colineales. Cualquier función de onda arbitraria puede ser representada como combinación lineal de éstas funciones vectoriales características.

Para usar los resultados anteriormente obtenidos en la descripción de los campos eléctrico y magnético, notemos que para campos \mathbf{E} y \mathbf{H} monocromáticos con dependencia temporal armónica, las ecuaciones de Maxwell (1.3) y (1.4) toman la siguiente forma:

$$\mathbf{H} = \frac{-i}{\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E},$$

$$\mathbf{E} = \frac{i}{\omega\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H}.$$

Es ahora evidente que tanto el campo eléctrico como el magnético satisfacen relaciones similares a las que satisfacen \mathbf{M} y \mathbf{N} en (3.4) y (3.7), así como (1.1) y (1.2) tienen analogía con (3.5) y

¹Por brevedad los argumentos de las funciones han sido omitidos.

(3.6). Lo anterior hace posible escribir a los campos eléctrico y magnético como

$$\mathbf{E} = \sum_l (a_l \mathbf{M}_l + b_l \mathbf{N}_l), \quad (3.8)$$

$$\mathbf{H} = \frac{-ik}{\omega\mu} \sum_l (a_l \mathbf{N}_l + b_l \mathbf{M}_l) \quad (3.9)$$

donde a_l y b_l son constantes reales.

Como los haces Bessel, ecuación (2.39), son solución exacta de la ecuación escalar de Helmholtz, podemos usarlos para generar un conjunto de vectores \mathbf{M}_l y \mathbf{N}_l , asumiendo que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_z$, es el vector unitario en la dirección z . Las funciones vectoriales \mathbf{M}_l y \mathbf{N}_l se calculan usando la relación vectorial del rotacional de una función en coordenadas cilíndricas circulares

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right] \mathbf{u}_\rho + \left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right] \mathbf{u}_\phi + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho F_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{u}_z,$$

$$\mathbf{F} = F_\rho \mathbf{u}_\rho + F_\phi \mathbf{u}_\phi + F_z \mathbf{u}_z,$$

y las relaciones de recurrencia para las funciones de Bessel [4]:

$$\begin{aligned} 2 \frac{dJ_l(x)}{dx} &= J_{l-1}(x) - J_{l+1}(x), \\ \frac{2l}{x} J_l(x) &= J_{l-1}(x) + J_{l+1}(x). \end{aligned} \quad (3.10)$$

La derivada respecto a x está relacionada con la derivada respecto de ρ por la regla de la cadena como: $\frac{dJ_l}{dx} = \frac{dJ_l}{d\rho} \frac{d\rho}{dx} = \frac{1}{k_\rho} \frac{dJ_l}{d\rho}$, pues en este caso el argumento de la función J_l es $k_\rho \rho$. Usando las consideraciones anteriores obtenemos como resultados [62]:

$$\mathbf{M}_l = \frac{k_\rho}{2} \{ \mathbf{u}_\rho i(J_{l-1} + J_{l+1}) - \mathbf{u}_\phi (J_{l-1} - J_{l+1}) \} \exp(i(l\phi + k_z z)); \quad (3.11)$$

$$\mathbf{N}_l = \frac{k_\rho k_z}{2k} \left\{ \mathbf{u}_\rho i(J_{l-1} - J_{l+1}) - \mathbf{u}_\phi (J_{l-1} + J_{l+1}) + 2\mathbf{u}_z \frac{k_\rho}{k_z} J_l \right\} \exp(i(l\phi + k_z z)). \quad (3.12)$$

3.2 Modos transversales eléctricos (TE) y transversales magnéticos (TM)

Llamaremos “modos puros” a los campos electromagnéticos con un valor particular de l ; si además $l \neq 0$ hablaremos de un vórtice óptico. Si el correspondiente campo eléctrico (magnético) es perpendicular a la dirección de propagación, el modo es llamado transversal eléctrico o TE (transversal magnético o TM), siguiendo la terminología usada en guías de onda. Analizando la ecuación (3.12) notamos que, a diferencia de \mathbf{M}_l , \mathbf{N}_l tiene una componente a lo largo de la dirección de propagación, z , de modo que los campos (3.8) y (3.9) con \mathbf{M}_l y \mathbf{N}_l como en (3.11) y (3.12) pueden ser TE (TM) solo si b_l (a_l) es cero [61].

En general, para modos puros, las soluciones a la ecuación vectorial de onda nos permiten escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_l = & \exp(i(k_z z + l\phi - \omega t)) \left[iE^{TM} (J_{l-1} - J_{l+1}) - E^{TE} (J_{l-1} + J_{l+1}) \right] \mathbf{u}_\rho - \\ & \left[E^{TM} (J_{l-1} + J_{l+1}) + iE^{TE} (J_{l-1} - J_{l+1}) \right] \mathbf{u}_\phi + \frac{2k_\rho}{k_z} E^{TM} J_l \mathbf{u}_z, \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde $E^{TE} \equiv \frac{a_l k_\rho}{2i}$ y $E^{TM} \equiv \frac{k_z k_\rho b_l}{2k}$ tienen unidades de campo eléctrico y definen las amplitudes de los modos TE ($E^{TM} = 0$) y TM ($E^{TE} = 0$) y el argumento de las funciones de Bessel, $k_\rho \rho$, por brevedad ha sido omitido. El correspondiente campo magnético se encuentra usando la transformación $E^{TM} \rightarrow E^{TE}$ y $E^{TE} \rightarrow -E^{TM}$.

Los campos ópticos de la ecuación (3.13) tienen distribuciones no convencionales de polarización, por lo que son llamados *haces vectoriales*.

3.2.1 Haces con polarización azimutal y radial

Los haces Bessel vectoriales TE y TM de orden mas bajo se obtienen de las ecuaciones (3.11) y (3.12) sustituyendo $l = 0$ y usando la relación de recurrencia $J_{-l}(x) = (-1)^l J_l(x)$, lo que resulta en

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{u}_\phi [k_\rho J_1(k_\rho \rho)] \exp(ik_z z), \quad (3.14)$$

$$\mathbf{N}_0 = \frac{k_\rho k_z}{k} \left[-\mathbf{u}_\rho i J_1(k_\rho \rho) + \mathbf{u}_z \frac{k_\rho}{k_z} J_0(k_\rho \rho) \right] \exp(ik_z z). \quad (3.15)$$

Si en este caso, seleccionamos en la ecuación (3.13) $E^{TM} = 0$ y $E^{TE} = \frac{iE_0}{2}$ con E_0 constante, proporcional a la potencia inicial y con unidades de campo eléctrico, entonces los campos eléctrico y magnético del modo Bessel TE quedan expresados como

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{AP}(\mathbf{r}) &= \mathbf{u}_\phi E_0 J_1(k_\rho \rho) \exp(ik_z z), \\ \mathbf{H}_{AP}(\mathbf{r}) &= \frac{-E_0 k_z}{\omega \mu} \left[\mathbf{u}_\rho J_1(k_\rho \rho) + i \mathbf{u}_z \frac{k_\rho}{k_z} J_0(k_\rho \rho) \right] \exp(ik_z z).\end{aligned}$$

Por tanto, el haz Bessel transversal eléctrico de orden cero puede ser interpretado como un modo con *polarización azimutal* (AP), pues el campo eléctrico sólo tiene componente a lo largo de la dirección azimutal \mathbf{u}_ϕ .

La figura 3-1 muestra simulaciones matemáticas para un haz Bessel AP; en la primera fila observamos (a) intensidad y (b) vector de campo eléctrico. Al colocar un polarizador analizador en el paso del haz, tomando en cuenta que éste sólo deja pasar la componente del campo que es paralela a su eje de transmisión, las siguientes filas muestran la intensidad y campos eléctricos respectivos cuando el eje del analizador es (c) horizontal y (e) vertical.

Siguiendo un procedimiento análogo obtenemos para el modo Bessel TM :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{RP}(\mathbf{r}) &= E_0 \left[\mathbf{u}_\rho J_1(k_\rho \rho) + i \mathbf{u}_z \frac{k_\rho}{k_z} J_0(k_\rho \rho) \right] \exp(ik_z z), \\ \mathbf{H}_{RP}(\mathbf{r}) &= \frac{E_0 k_z}{\omega \mu} \mathbf{u}_\phi J_1(k_\rho \rho) \exp(ik_z z).\end{aligned}$$

Entonces, el modo transversal magnético con $l = 0$ corresponde al estado *radialmente polarizado* (RP), siempre que las condiciones experimentales permitan despreciar la componente longitudinal proporcional a $\frac{k_\rho}{k_z}$. La figura 3-2 muestra lo análogo a la 3-1 pero para un haz Bessel RP.

Como se explicará en el capítulo siguiente, haces con polarizaciones radial y azimutal también pueden construirse con distribuciones de intensidad tipo Laguerre-Gauss, en este caso, el estado RP es particularmente interesante porque cuando es fuertemente focalizado, da lugar a una intensa componente longitudinal del campo eléctrico en la vecindad del foco; la potencia contenida en ésta componente es $\sim 49.6\%$ de la potencia incidente total [16] y aumenta conforme la apertura numérica de la lente con la que se focaliza el haz se incrementa. Además, su

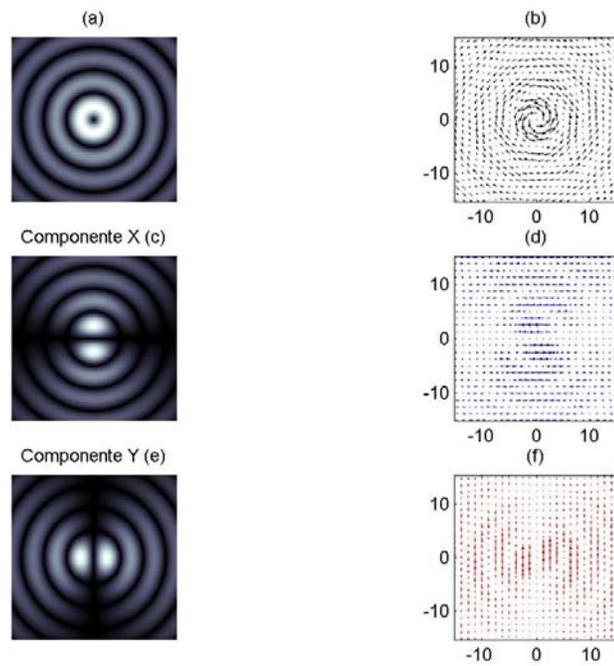


Figura 3-1: Simulaciones numéricas de un haz Bessel con polarización azimutal. (a) Distribución de intensidad, (c) y (e) intensidad después de pasar por un polarizador analizador cuyo eje es horizontal y vertical respectivamente. (b), (d), (f) campos eléctricos respectivos.

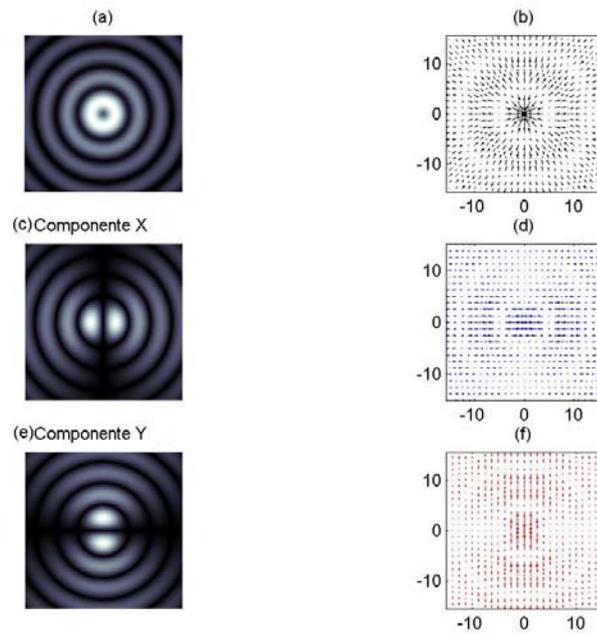


Figura 3-2: Simulaciones numéricas de un haz Bessel radialmente polarizado. (a) Intensidad antes del analizador, (c) y (e) intensidad después del mismo cuyo eje es horizontal y vertical respectivamente. (b), (d), (f) campos eléctricos correspondientes.

densidad de energía excede la densidad de energía de la componente transversal por un factor mayor que 2 [41]. Se ha propuesto usar ésta componente para acelerar partículas cargadas a altas energías y en la determinación de la orientación de moléculas individuales lo que es de importancia en el estudio de la dinámica molecular [41].

Se ha demostrado que el tamaño del haz RP en el punto focal es 35% menor que el teóricamente predicho para un haz lineal o circularmente polarizado en las mismas condiciones experimentales, pudiendo alcanzar tamaños de spot aún más reducidos si se logra confinar sólo la componente longitudinal del campo eléctrico. Este hecho puede tener potenciales aplicaciones en el campo de la micro-manipulación óptica [16].

3.2.2 Modos TE y TM de orden superior

Los vectores unitarios en coordenadas cilíndricas \mathbf{u}_ρ y \mathbf{u}_ϕ pueden escribirse en términos de los vectores base del sistema cartesiano como: $\mathbf{u}_\rho = \cos\phi\mathbf{u}_x + \sin\phi\mathbf{u}_y$; $\mathbf{u}_\phi = -\sin\phi\mathbf{u}_x + \cos\phi\mathbf{u}_y$. Sustituyendo lo anterior en (3.11) y (3.12) y reagrupando términos obtenemos las expresiones:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_l &= \frac{ik_\rho}{2} \{J_{l-1} \exp(i(l-1)\phi)(\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y) + J_{l+1} \exp(i(l+1)\phi)(\mathbf{u}_x - i\mathbf{u}_y)\} \exp(ik_z z), \\ \mathbf{N}_l &= \frac{k_\rho k_z}{2k} \{iJ_{l-1} \exp(i(l-1)\phi)(\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y) - iJ_{l+1} \exp(i(l+1)\phi)(\mathbf{u}_x - i\mathbf{u}_y) + \\ &\quad \frac{2k_\rho}{k_z} J_l \exp(il\phi)\mathbf{u}_z\} \exp(ik_z z).\end{aligned}$$

Identificando los vectores asociados a la base de polarización circular

$$\mathbf{u}_\pm = \frac{\mathbf{u}_x \pm i\mathbf{u}_y}{\sqrt{2}}, \quad (3.16)$$

y reescribiendo la relación (3.13) obtenemos²

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_l &= \exp(i(k_z z - \omega t)) ([iE^{TM} - E^{TE}] J_{l-1} \exp(i(l-1)\phi)\mathbf{u}_+ - \\ &\quad [iE^{TM} + E^{TE}] J_{l+1} \exp(i(l+1)\phi)\mathbf{u}_- + \frac{2k_\rho}{k_z} E^{TM} J_l \exp(il\phi)\mathbf{u}_z).\end{aligned} \quad (3.17)$$

La expresión anterior revela que es posible generar haces Bessel vectoriales tipo *TE* y

²El factor de normalización se ha incorporado a la definición de E^{TE} y E^{TM} .

TM mediante la superposición de dos haces escalares con cargas topológicas que difieran dos unidades entre sí y que tengan polarizaciones circulares ortogonales, es decir, espines opuestos.

En particular cuando $l = 0$, (3.17) toma la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 = \exp(i(k_z z - \omega t)) \{ & [iE^{TM} - E^{TE}] J_{-1} \exp(-i\phi) \mathbf{u}_+ - \\ & [iE^{TM} + E^{TE}] J_1 \exp(i\phi) \mathbf{u}_- + \frac{2k_\rho}{k_z} E^{TM} J_0 \exp(il\phi) \mathbf{u}_z \}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

y cuando $l = 1$ en (3.17), se obtiene el vórtice dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 = \exp(i(k_z z - \omega t)) \{ & [iE^{TM} - E^{TE}] J_0 \mathbf{u}_+ - [iE^{TM} + E^{TE}] J_2 \exp(2i\phi) \mathbf{u}_- + \\ & \frac{2k_\rho}{k_z} E^{TM} J_1 \exp(i\phi) \mathbf{u}_z \}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

En las figuras 3-3 y 3-4 se presentan simulaciones matemáticas para un vórtice vectorial tipo Bessel de orden uno, transversal eléctrico y transversal magnético, respectivamente. La primer fila representa la intensidad y el campo eléctrico del haz antes de su paso por un analizador (cuadros (a) y (b)), mientras que la segunda y tercera filas representan el haz transmitido a través de un analizador cuyo eje de transmisión está orientado horizontal y vertical (cuadros (c) y (e)), respectivamente. La columna derecha ilustra el vector de campo eléctrico para cada caso.

Notemos que siendo $J_0(k_\rho \rho)$ la única función de Bessel de orden entero que es diferente de cero en $\rho = 0$, éste haz Bessel vectorial es el único de esta clase que tiene un centro brillante. Lo anterior se sustenta si observamos las figuras 3-5 y 3-6; se trata de simulaciones matemáticas de un haz Bessel vectorial de orden dos, TE y TM , respectivamente. Notemos que, a diferencia de los haces Bessel escalares, los vectoriales tendrán un mínimo de intensidad en el eje central siempre que $l \neq 1$.

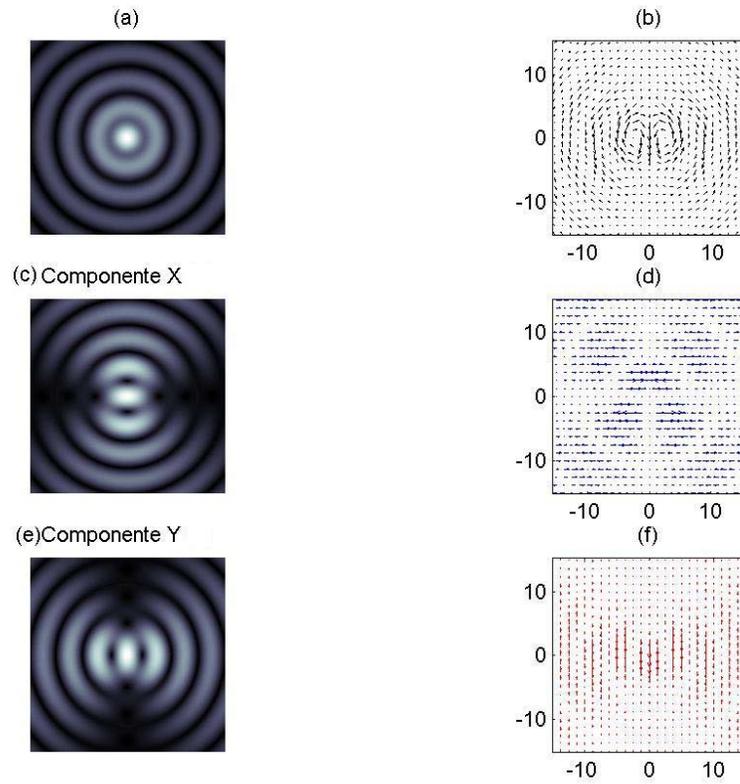


Figura 3-3: Simulación matemática de un modo Bessel vectorial eléctrico de orden 1 antes de su paso por un analizador (a) y después del mismo (orientación horizontal (c) y vertical (d)). Los cuadros (b), (d) y (f) son los campos eléctricos correspondientes.

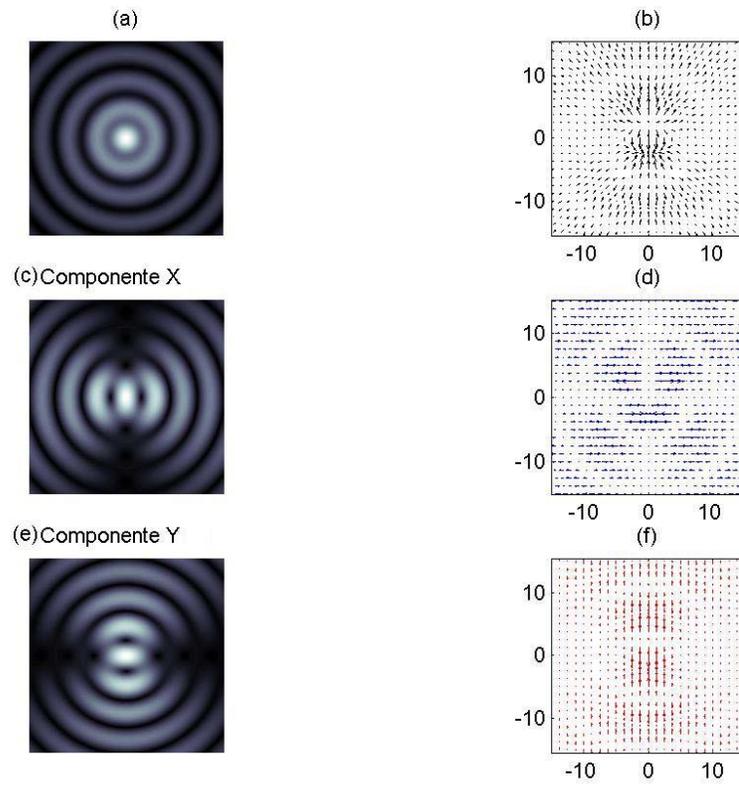


Figura 3-4: Figura análoga a 3-3 però de un modo Bessel vectorial transversal magnético de orden 1.

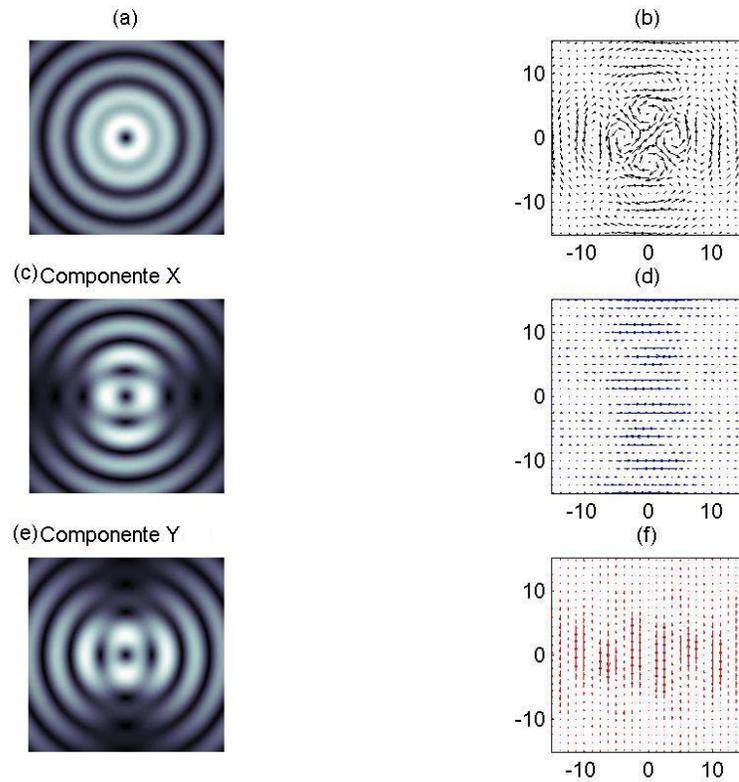


Figura 3-5: Simulación matemática de un modo Bessel vectorial eléctrico de orden 2 antes de su paso por un analizador (a) y después del mismo (orientación horizontal (c) y vertical (e)). Los cuadros (b), (d) y (f) son los campos vectoriales correspondientes.

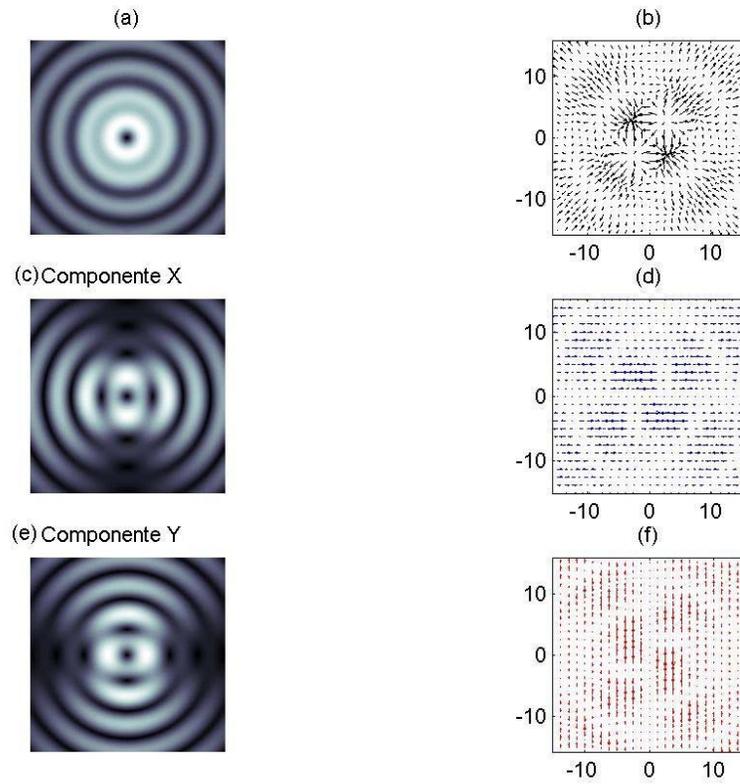


Figura 3-6: Simulación matemática de un modo Bessel vectorial transversal magnético de orden 2 antes de su paso por un analizador (a) y después del mismo (orientación horizontal (c) y vertical (d)). Los cuadros (b), (d) y (f) son los campos vectoriales correspondientes.

3.3 Momento angular en vórtices vectoriales

Para calcular los promedios temporales del vector de Poynting y del momento lineal y angular, retomemos las soluciones vectoriales a la ecuación de onda

$$\mathbf{E}_l = a_l \mathbf{M}_l + b_l \mathbf{N}_l, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{H}_l = a_l \mathbf{N}_l + b_l \mathbf{M}_l; \quad (3.21)$$

la suma en diferentes modos se ha omitido pues tomaremos en este caso modos TE y TM de orden l puros.

La parte real del promedio temporal del vector de Poynting dada por (1.41); usando las ecuaciones (3.20) y (3.21) será entonces

$$\Re \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} = \Re \left\{ \frac{ki}{2\omega\mu} [(a_l \mathbf{M}_l + b_l \mathbf{N}_l) \times (a_l^* \mathbf{N}_l^* + b_l^* \mathbf{M}_l^*)] \right\}.$$

Desarrollando la expresión entre corchete de la ecuación anterior obtenemos

$$\frac{ki}{2\omega\mu} \left\{ |a_l|^2 \mathbf{M}_l \times \mathbf{N}_l^* + a_l b_l^* \mathbf{M}_l \times \mathbf{M}_l^* + b_l a_l^* \mathbf{N}_l \times \mathbf{N}_l^* + |b_l|^2 \mathbf{N}_l \times \mathbf{M}_l^* \right\}. \quad (3.22)$$

Notemos que los términos proporcionales a $\mathbf{M}_l \times \mathbf{M}_l^*$ y $\mathbf{N}_l \times \mathbf{N}_l^*$ son distintos de cero, de hecho,

$$\mathbf{M}_l \times \mathbf{M}_l^* = \left(\frac{k_\rho}{2} \right)^2 (-2i(J_{l-1}^2 - J_{l+1}^2)) \mathbf{u}_z,$$

$$\mathbf{N}_l \times \mathbf{N}_l^* = \left(\frac{k_\rho}{2k} \right)^2 (-4ik_\rho k_z J_l (J_{l-1} - J_{l+1}) \mathbf{u}_\phi - 2ik_z^2 (J_{l-1}^2 - J_{l+1}^2) \mathbf{u}_z).$$

Lo anterior es consecuencia de que el producto $\mathbf{u}_\pm \times \mathbf{u}_\pm^* = \mathbf{u}_\pm \times \mathbf{u}_\mp$ para la base vectorial compleja de polarización circular, ecuación (3.16), tiene parte real igual a cero.

Sin embargo, dado que estamos interesados en vórtices transversales puros TE (TM) la constante b_l (a_l) es cero, por lo que tendremos

$$\Re \langle \mathbf{S} \rangle_{TE} = \Re \left\{ \frac{ki}{2\omega\mu} \left(|a_l|^2 \mathbf{M}_l \times \mathbf{N}_l^* \right) \right\}, \quad (3.23)$$

$$\Re \langle \mathbf{S} \rangle_{TM} = \Re \left\{ \frac{ki}{2\omega\mu} \left(|b_l|^2 \mathbf{N}_l \times \mathbf{M}_l^* \right) \right\}. \quad (3.24)$$

Al expandir los términos entre corchetes de las ecuaciones (3.23) y (3.24) obtendremos

$$\langle \mathbf{S} \rangle_{TE} = \frac{|a_l|^2 k_\rho^2}{4\omega\mu} \left\{ k_z (J_{l-1}^2 + J_{l+1}^2) \mathbf{u}_z + k_\rho J_l (J_{l-1} + J_{l+1}) \mathbf{u}_\phi - ik_\rho J_l (J_{l-1} - J_{l+1}) \mathbf{u}_\rho \right\}; \quad (3.25)$$

si deseamos el promedio temporal del vector de Poynting de un vórtice vectorial tipo Bessel TM , en la ecuación anterior debemos hacer la sustitución $|a_l|^2 \rightarrow |b_l|^2$ y tomar signo $+$ en la parte imaginaria.

Si definimos $E_0 \equiv a_l k_\rho = b_l k_\rho$ y tomamos la parte real de (3.25) resulta que los vórtices TE y TM tienen la misma expresión para la parte real del promedio temporal del vector de Poynting, a saber,

$$\Re \langle \mathbf{S} \rangle_{TE, TM} = \frac{|E_0|^2 k_z}{4\omega\mu_0} \left[(J_{l-1}^2 + J_{l+1}^2) \mathbf{u}_z + \frac{k_\rho}{k_z} J_l (J_{l-1} + J_{l+1}) \mathbf{u}_\phi \right]. \quad (3.26)$$

Cuando se sustituye $l = 0$ para analizar los casos azimutal (AP) y radialmente (RP) polarizados, la componente \mathbf{u}_z se reduce usando

$$J_{-1}^2 + J_1^2 = \frac{(J_{-1} + J_1)^2 + (J_{-1} - J_1)^2}{2} = 2J_1^2.$$

Entonces el promedio temporal del vector de Poynting para haces AP y RP queda [54]

$$\Re \langle \mathbf{S} \rangle_{AP, RP} = \frac{|E_0|^2 k_z}{2\omega\mu_0} (J_1(k_\rho \rho))^2 \mathbf{u}_z. \quad (3.27)$$

Lo anterior indica que el flujo de energía de estos haces es en dirección de propagación y se distribuye de acuerdo a la intensidad del haz, en contraste con el caso general descrito en la ecuación (3.26), que indica que el flujo de energía en vórtices vectoriales tiene componente azimutal al igual que los vórtices escalares.

Dividiendo las ecuaciones (3.26) y (3.27) entre c^2 obtenemos la densidad de momento lineal, en virtud de la relación $\langle \mathbf{g} \rangle = \frac{1}{c^2} \langle \mathbf{S} \rangle$.

La correspondiente expresión de la densidad de momento angular respecto al origen $\langle \mathbf{j} \rangle =$

$\mathbf{r} \times \langle \mathbf{g} \rangle$, para vórtices vectoriales resulta

$$\langle \mathbf{j} \rangle_{TE, TM}^l = \frac{|E_0|^2 k_z}{4\omega\mu_0 c^2} \left[\left(\frac{k_\rho}{k_z} J_l (J_{l-1} + J_{l+1}) \right) (\rho \mathbf{u}_z - z \mathbf{u}_\rho) - \rho (J_{l-1}^2 + J_{l+1}^2) \mathbf{u}_\phi \right], \quad (3.28)$$

donde se ha usado el vector de posición \mathbf{r} en coordenadas cilíndricas circulares $\mathbf{r} = \rho \mathbf{u}_\rho + z \mathbf{u}_z$.

Para haces AP y RP se obtiene [54]

$$\langle \mathbf{j} \rangle_{AP, RP} = -\frac{|E_0|^2 k_z}{2\omega\mu_0 c^2} \rho (J_1(k_\rho \rho))^2 \mathbf{u}_\phi. \quad (3.29)$$

Cuando se integra la relación (3.28) alrededor de la región del modo, la única componente distinta de cero será la z , dada la simetría de los vectores unitarios \mathbf{u}_ρ y \mathbf{u}_ϕ respecto al origen. Usando la relación de recurrencia $J_{l-1} + J_{l+1} = \frac{2l}{x} J_l$ con $x = k_\rho \rho$, ésta componente se puede reescribir como

$$j_z^{TE, TM} = \frac{l |E_0|^2}{2\omega\mu_0 c^2} (J_l(k_\rho \rho))^2 \mathbf{u}_z,$$

por lo que, en analogía con el caso escalar, el momento angular total de los vórtices vectoriales es proporcional a la carga topológica l y es debido a la contribución orbital, pues no aparece contribución de espín.

Sin embargo, si se observa la evolución en el tiempo del vector de campo eléctrico del modo Bessel vectorial TE y TM de orden uno, obtenido teóricamente en la figura 3-7, corroboramos que en las regiones centrales ($0 \leq k_\rho \rho \ll 1$) el campo rota sin cambiar de magnitud debido a la polarización circular asociada al término J_0 (ecuación (3.19)), entonces, la densidad *local* de momento angular debida a polarización es no nula aunque su contribución total lo sea. En regiones lejanas al eje ($k_\rho \rho \gg 1$) la dirección del vector de polarización (\mathbf{E}) es esencialmente radial (azimutal) para el modo TM (TE), mientras que en regiones intermedias \mathbf{E} cambia tanto en magnitud como en dirección. Globalmente la distribución de polarización rota en el tiempo, lo cual es manifestación del momento angular orbital, que es proporcional a $l\hbar$ por fotón.

En contraste, la integración de la expresión (3.29) resulta en un momento angular total igual a cero para haces RP y AP. Desde un punto de vista físico, el momento angular total (espín mas orbital) en cada término de un vórtice descrito por (3.17) es precisamente el valor de la carga l ; si $l = 0$ el momento angular total del haz es cero y el flujo de energía será únicamente

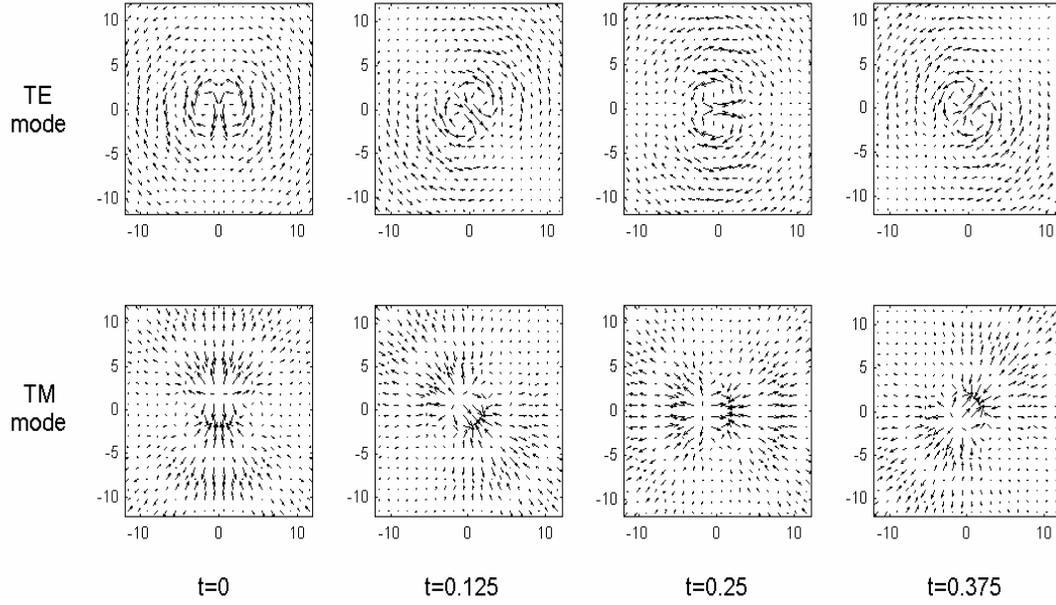


Figura 3-7: Vector de campo eléctrico del modo Bessel vectorial TE y TM de orden $l=1$ para diferentes tiempos en unidades de $\frac{2\pi}{\omega}$.

en dirección longitudinal.

Capítulo 4

Generación experimental de haces vectoriales

Para generar los haces Bessel vectoriales de ordenes cero y uno se superpusieron los haces correspondientes como lo sugieren las ecuaciones (3.18) y (3.19). Experimentalmente, esta superposición se logró usando un arreglo interferométrico como en otros casos [38, 49, 52] pero con detalles notablemente distintos.

4.1 Haces con polarización radial y azimutal

Además de los haces Bessel, es posible generar modos radial y azimutalmente polarizados con distribución de intensidad diferente, de acuerdo con la ecuación

$$\mathbf{E}_1 = u(\rho, z) \exp(-i\phi)\mathbf{u}_+ \pm u(\rho, z) \exp(i\phi)\mathbf{u}_- \quad (4.1)$$

la cual representa una generalización de la expresión (3.18), en aproximación paraxial, para campos arbitrarios con índice azimutal ± 1 y amplitud compleja $u(\rho, z) \exp(\pm i\phi)$. El signo $-$ ($+$) se toma para el modo TE (TM). La ecuación (4.1) nos dice que es válido superponer vórtices cualesquiera de ordenes ± 1 con polarizaciones circulares ortogonales para generar modos con polarización radial o azimutal. En particular, cuando $u(\rho, z)$ es la distribución de los haces Laguerre-Gauss, se generan, con relativa facilidad, haces radial y azimutalmente polarizados ya

ampliamente conocidos [49], lo que aprovechamos para probar el arreglo experimental reproduciendo los resultados anteriores con haces LG [38, 49, 52] para después generar haces Bessel de esta clase.

4.1.1 Arreglo experimental

En los experimentos realizados se usó un láser HeNe con 15mW de potencia de salida, emitiendo un modo gaussiano convencional con un ancho diametral en la cintura de 2mm. Un sistema telescópico de lentes de -5cm (L1) y 15 cm (L2), separadas por una distancia igual a la suma de sus distancias focales, magnificó el ancho del haz, logrando un haz colimado de salida con ~ 5 mm de diámetro trasversal.

Este haz iluminó la parte central de hologramas moduladores de amplitud generados por computadora (H). Como resultado, se obtuvo un patrón de difracción cuyos ordenes ± 1 llevaban ~ 10 % de la potencia inicial total. Para compensar en lo posible la baja eficiencia, nuestra combinación se realizó tomando dos ordenes independientes.

Espejos metálicos (E1-E4) llevaron a los ordenes ± 1 de un holograma con carga topológica $l = 1$ a los brazos de un interferómetro tipo Mach-Zehnder (ver figura 4-1). En cada brazo se filtró el haz de interés por medio de diafragmas (D) y se le indujo polarización circular usando un polarizador lineal (P1 o P2) cuyo eje de transmisión hace un ángulo de $\pm 45^\circ$ con el eje lento de la placa retardadora de $\lambda/4$. Las polarizaciones inducidas en cada brazo son ortogonales (ver detalles en el apéndice A). Estos haces se hicieron coincidir en un cubo divisor (CD) no polarizador para visible. La polarización a la salida del cubo es estudiada rotando un polarizador lineal que sirve como analizador (A).

Para igualar las intensidades se interpuso en uno de los brazos un filtro de pasos (FP) y en otro una placa de $\lambda/2$ colocada tal que a la salida de P2 se notara máxima intensidad. También se introdujo un porta-objetos de vidrio (PO), cuya función es modificar el camino óptico e introducir una diferencia de fase entre los dos haces, pues el paso entre modos TE y TM viene dada por un factor en fase igual a π , cuya manifestación es un cambio de signo en la ecuación (3.17).

Las imágenes de cada haz fueron detectadas por una cámara CCD y almacenadas en la computadora para su procesamiento.

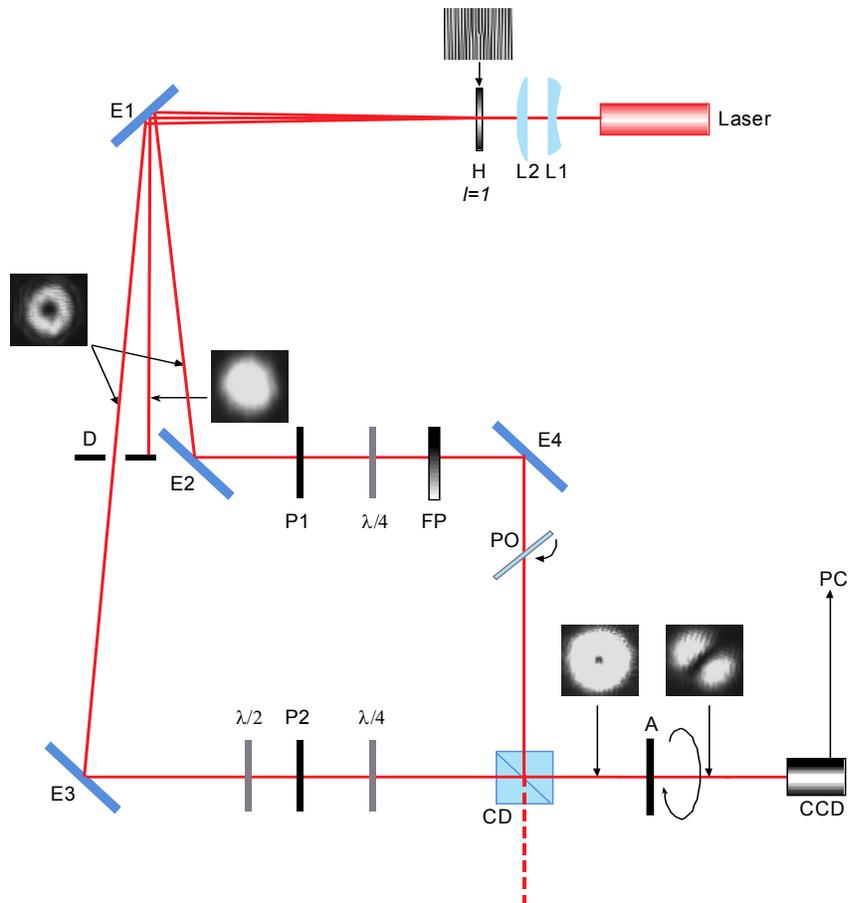


Figura 4-1: Arreglo experimental usado para generar haces LG con polarizaciones radial y azimutal.

En el apéndice A se encuentran más detalles de la alineación de cada elemento del arreglo.

4.1.2 Resultados

Con el montaje de la figura 4-1 se generaron experimentalmente modos Laguerre-Gauss con estados de polarización radial y azimutal, pasando de uno a otro al inclinar el portaobjetos a diferentes ángulos respecto del haz. Los resultados, en el caso de polarización azimutal para diferentes ángulos de orientación del analizador, se muestran en la figura 4-2 (a) junto con (b) las simulaciones teóricas correspondientes.

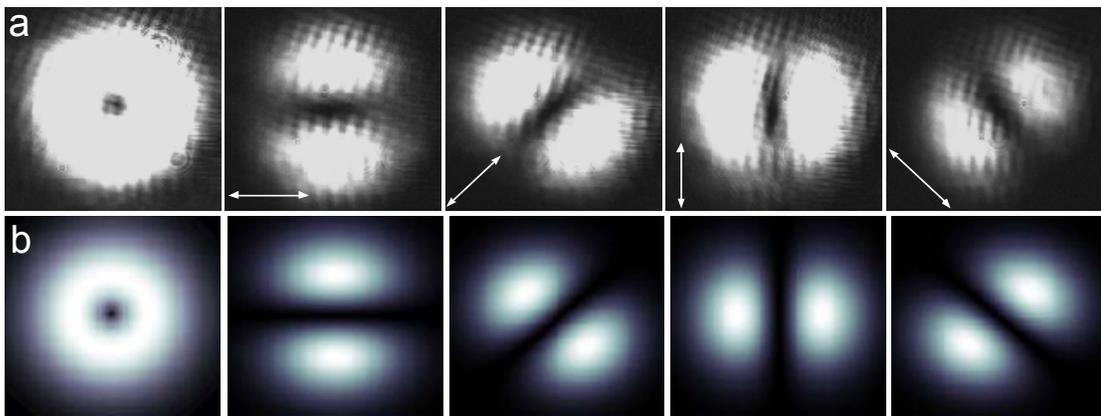


Figura 4-2: Comparación entre (a) fotografías experimentales y (b) simulaciones de un haz LG con polarización azimutal antes del analizador (extremo izquierdo) y después del mismo (cuadros restantes) cuya orientación se muestra con las flechas. Para polarización radial el patrón después del analizador está rotado $\pi/2$.

Para la generación experimental de haces Bessel con polarizaciones radial y azimutal se usó esencialmente el mismo arreglo de la figura 4-1 sólo que en el haz de salida del cubo, se interpuso un axicón para generar los haces Bessel correspondientes. Cuando en el interferómetro se deja pasar sólo uno de los modos LG de orden l , el axicón generará el correspondiente haz BB del mismo orden (ver sección 2.5.3).

La polarización del haz resultante fue estudiada con el mismo analizador. La figura 4-3 muestra una comparación entre resultados (a) experimentales y (b) teóricos para diferentes orientaciones del analizador, de las cuales podemos notar excelente correspondencia.

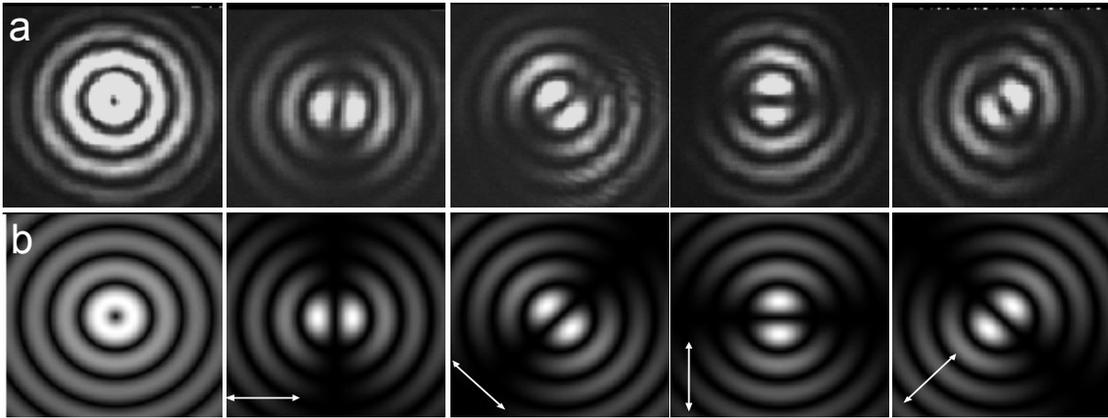


Figura 4-3: Comparación entre (a) fotografías experimentales y (b) simulaciones del haz Bessel con polarización radial antes del analizador (extremo izquierdo) y después del mismo (cuadros restantes) cuya orientación se muestra con la flecha. Los resultados para polarización azimutal tienen aspecto idéntico, sólo que el patrón después del analizador está rotado $\pi/2$.

4.2 Haces vectoriales de orden superior

4.2.1 Arreglo experimental

Para la generación experimental de haces Bessel vectoriales de orden superior se usó el holograma con $l = 2$. En este caso los órdenes de difracción de interés fueron el cero y el uno con índices azimutales $l = 0$ y $l = 2$, respectivamente. Es importante señalar que los haces Bessel TE y TM de orden superior fueron generados por primera vez en este experimento y tienen aplicaciones importantes y propiedades dinámicas aún no estudiadas [19].

Inicialmente el arreglo fué básicamente el mismo que el anterior (Fig. 4-1); sólo se cambió el holograma, se realinearon los espejos para dirigir los órdenes mencionados, así como el cubo (no polarizador) y el axicón fueron también ligeramente reajustados. Con las modificaciones anteriores se obtuvieron los haces mostrados en la figura 4-4.

En este montaje inicial se tuvieron esencialmente dos problemas: el primero fué que el orden reflejado en el cubo (ver Fig. 4-1) incidía circularmente polarizado, pero después de la reflexión sufría un cambio de tal manera que emergía con polarización elíptica. Lo anterior se infirió del hecho de que cuando se bloqueó el orden cero y se dejó pasar el orden uno a través del analizador (A) se observaron variaciones de intensidad de un máximo a un mínimo (sin llegar a

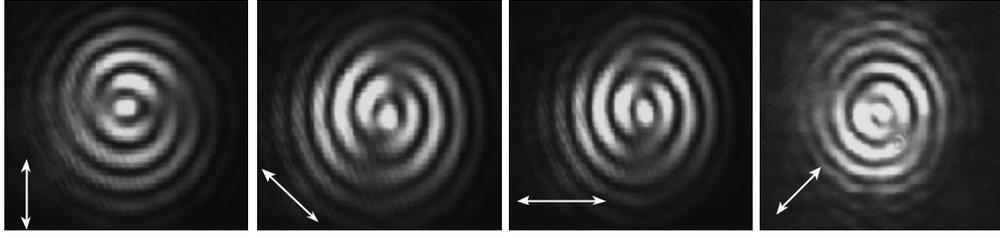


Figura 4-4: Fotografías experimentales de haces Bessel vectoriales de orden superior ($l \neq 1$) después del analizador cuya orientación se indica con las flechas.

la total extinción) cuando se rotó el mismo. Análogamente, para el orden cero, se observó que el efecto estaba también presente pero notablemente menos visible.

Debido a estas polarizaciones indeseables y a las diferencias de intensidad en cada haz, los modos obtenidos no fueron satisfactorios¹.

El problema fué resuelto induciendo las polarizaciones circulares de los haces no desde los brazos del interferómetro, sino después del cubo: se sustrajeron del arreglo las placas de $\lambda/4$ y $\lambda/2$, así como el polarizador P2, y el cubo no polarizador fue sustituido por uno polarizador (CDP) como se muestra en la figura 4-5. Este elemento introduce polarizaciones lineales ortogonales en los haces reflejado y transmitido (horizontal y vertical respecto a las caras del cubo). A la salida del cubo se colocó un axicón que genera los haces Bessel necesarios, cuyas polarizaciones lineales son transformadas en circulares opuestas mediante una placa de $\lambda/4$ a 45° colocada como se indica en la figura 4-6.

Rotando el analizador para estudiar la polarización de cada haz por separado se corroboró que efectivamente las polarizaciones de cada uno eran circulares.

Para resolver el problema de las intensidades se colocó un polarizador lineal (P1). Variando los angulos relativos del eje del polarizador y del cubo fue posible equilibrar las intensidades de cada haz haciéndolas muy semejantes. Las mejoras logradas hasta este punto consistieron en que aumentó el contraste y se consiguió en apariencia algo más cercano a lo que sugería la teoría. Cabe mencionar que estas modificaciones resultan convenientes para la generación de

¹Aunque para el primer experimento hecho, los ordenes ± 1 presentaban el mismo fenómeno, consideramos que no fué tan relevante pues las diferencias de intensidad fueron pequeñas además de que, debido a que los perfiles de intensidad son iguales, las zonas brillantes siempre se superponían.

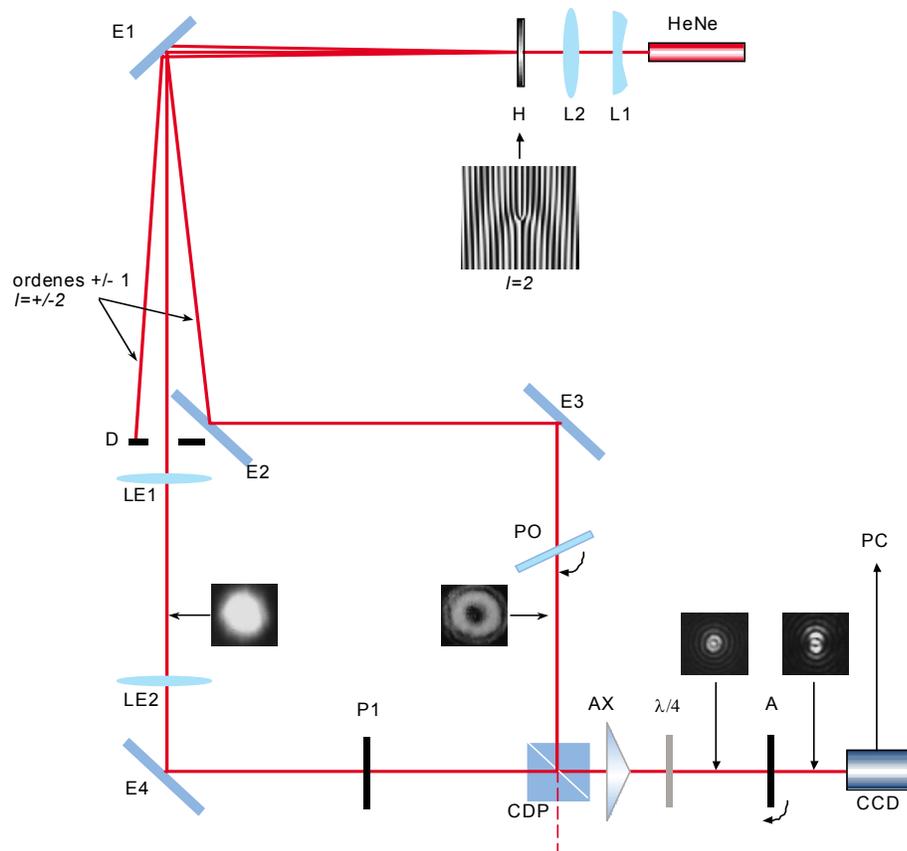


Figura 4-5: Arreglo experimental modificado para la generación de haces Bessel TE y TM de orden superior (ver texto).

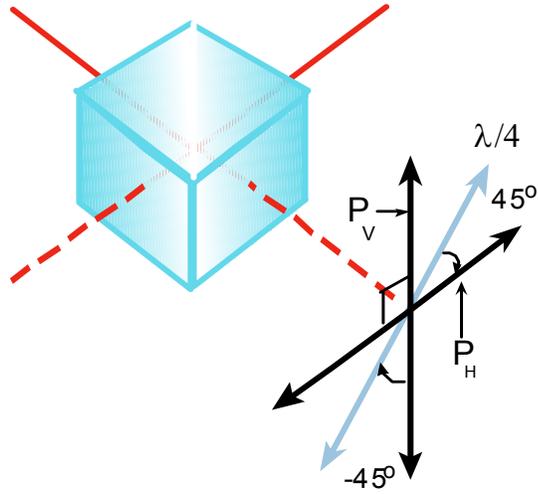


Figura 4-6: Esquema de las orientaciones relativas entre los ejes de polarización del cubo (P_V y P_H) y el eje lento de la placa retardadora de $\lambda/4$. Las líneas punteadas representan los haces de salida del cubo.

un haz vectorial de cualquier orden.

Por otro lado, aunque la zona de superposición de ondas cónicas (z_{max}) que da lugar al haz Bessel de orden cero, comienza desde el vértice del axicón, el plano de máxima definición (z_{peak}) depende de su índice azimutal l , como demuestra la ecuación (2.46); expresión de la cual es posible deducir que los puntos $z_{peak}^{(0)}$ y $z_{peak}^{(2)}$ asociados a los ordenes cero y dos, respectivamente, están relacionados por

$$z_{peak}^{(2)} = \sqrt{5}z_{peak}^{(0)}. \quad (4.2)$$

Por tanto, el plano de máxima intensidad del orden dos está $\sqrt{5}$ veces más alejado del vértice del axicón que el correspondiente al cero. Experimentalmente, encontramos que $z_{peak}^{(0)} \approx 21\text{cm}$, mientras que $z_{peak}^{(2)} \approx 50\text{cm}$, lo que casi coincide con lo anteriormente discutido.

Cualitativamente, al observar las figuras 4-7 y 4-8 (a), notamos que el orden cero empieza a empeorar cuando comienza la definición de anillos del orden dos; estos hechos constituyeron el segundo problema que impidió, inicialmente, la obtención de buenas aproximaciones a los haces vectoriales ideales.

De la ecuación (2.46) establecemos que, para índices azimutales y parámetros del axicón fijos, la única manera de superponer los puntos de definición máxima es extender la distancia

z_{\max} sólo para el orden cero, lo cual se logra haciendo crecer el valor w_c . Con lo anterior, la distancia $z_{\text{peak}}^{(0)}$ se desplazará de tal manera que coincidirá aproximadamente con la del Bessel de orden dos. Para lograr nuestro propósito se introdujo en el brazo del orden cero, un telescopio formado con lentes de 75.6 mm (LE1) y 175mm (LE2) de distancias focales, separadas 25.5 cm (ver figura 4-5), obteniendo una magnificación 2.5:1.

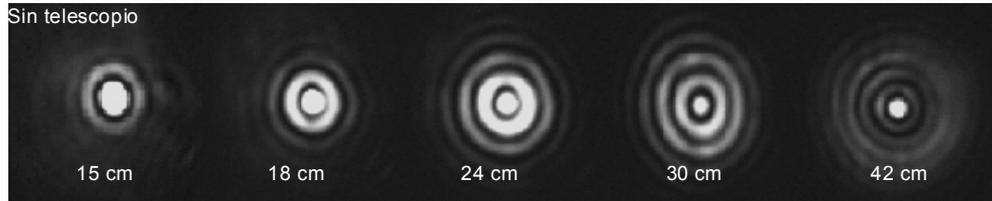


Figura 4-7: Fotografías experimentales del haz Bessel de orden cero a diferentes distancias del vértice del axicón.

Al poner el telescopio los haces tienen su mejor perfil transversal en zonas que sí están superpuestas (ver Fig. 4-8)

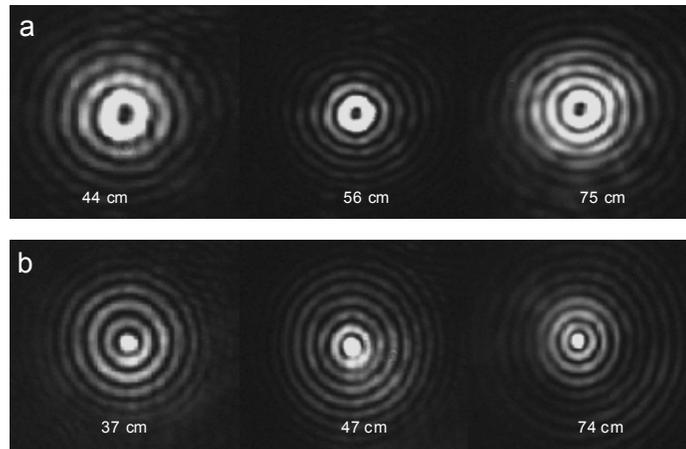


Figura 4-8: Comparación entre los perfiles transversales de intensidad a diferentes distancias del axicón para los haces (a) Bessel de orden 2 y (b) orden 0 este último con el arreglo de telescopio puesto (ver texto).

4.2.2 Resultados

Hechas todas las modificaciones anteriores y dejando pasar ambos haces a través del analizador se obtuvo la secuencia de imágenes experimentales para haces Bessel TE y TM de orden uno mostrada en las fotografías 4-9 (a). El paso del modo TE al TM se hace rotando el portaobjetos como se mencionó anteriormente.

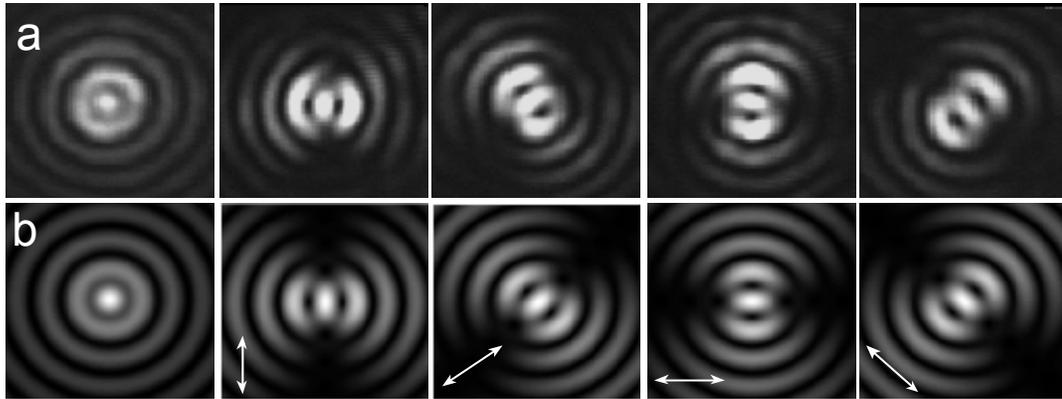


Figura 4-9: Comparación entre (a) fotografías experimentales y (b) simulaciones del haz Bessel TE de orden 1 antes del analizador (extremo izquierdo) y después del mismo (cuadros restantes). Los resultados para polarización TM tienen aspecto idéntico, sólo que el patrón después del analizador está rotado $\pi/2$. La orientación del mismo se muestra con las flechas. Estas fotografías se lograron con el arreglo de la figura 4-5.

Comparando las fotografías 4-9 (a) experimentales con (b) simulaciones, observamos la excelente correspondencia con los resultados teóricos.

Capítulo 5

Estudio de propiedades dinámicas de la luz con micromanipulación óptica

Las propiedades dinámicas de la luz, tales como momento lineal y angular, pueden ser determinadas al hacer interaccionar la radiación con la materia. Dado que los órdenes de magnitud para estas cantidades físicas son muy pequeños, una forma práctica de analizarlas consiste en observar el comportamiento de partículas microscópicas (con dimensiones desde decenas de nanómetros hasta decenas de micras) en la vecindad del plano focal del haz luminoso que deseamos estudiar.

Lo anterior representa una descripción básica de la captura óptica de partículas con haces de luz y es una técnica ampliamente usada desde 1970, cuando Ashkin reportó la primera observación de objetos pequeños (microesferas transparentes de látex) acelerados y atrapados usando *solamente* fuerzas de presión de radiación [7]. En 1986, Ashkin y sus colaboradores [9] reportaron la primer trampa óptica tridimensional para esferas dieléctricas usando un solo haz láser fuertemente enfocado dirigido verticalmente hacia abajo. A esta herramienta de micromanipulación se le ha llamado desde entonces *pinzas ópticas*.

Hasta ahora, los haces de captura en los sistemas de pinzas se han limitado a los escalares discutidos en el capítulo 2, sin embargo, al comprender la manera en cómo los campos ópticos transfieren energía e intercambian momento con la materia, seremos capaces de proponer un experimento basado en el microcontrol óptico para estudiar la densidad local de momento

angular del haz vectorial generado por primera vez en este trabajo.

Para entender los principios físicos involucrados en la técnica del micro-control óptico, retomemos los conceptos estudiados en la sección 1.3.

La fuerza que la luz ejerce sobre una superficie, ecuación (1.28), representa un caso ideal en el que el momento de los fotones se transfiere por completo, por ejemplo, por absorción. En el caso idealizado de reflexión total, la fuerza es del doble, mientras que toma el valor de cero si la transferencia es nula.

Por lo anterior, podemos reescribir la ecuación (1.28) introduciendo un factor adimensional de “eficiencia” de transferencia de momento Q , es decir

$$F = Q \frac{nP}{c}, \quad (5.1)$$

la determinación experimental de Q para el caso de pinzas ópticas depende del tamaño de las partículas capturadas así como de si la dirección en la que se mide la fuerza es transversal o longitudinal; por ejemplo para partículas transparentes de $2\mu m$ atrapadas en un haz gaussiano el valor transversal de Q es 0.067 mientras que su valor longitudinal es 0.060 [42].

Asumamos además, que la probabilidad de encontrar fotones en cierta región de un haz luminoso es directamente proporcional a la intensidad en ese punto [46], por tanto, habrá más fotones en una región intensa, como por ejemplo el eje central del haz gaussiano. Intuitivamente podemos pensar que el efecto del haz sobre una partícula, dentro de ciertas restricciones, puede ser modelado usando un cúmulo de rayos representantes de la trayectoria de los fotones, con cada rayo individual pesado de acuerdo a la intensidad.

La aproximación de rayos como en Óptica Geométrica, da resultados consistentes con el cálculo teórico de las fuerzas ópticas sólo para partículas con dimensiones características mayores que la longitud de onda de la radiación usada. Esta condición define el llamado Régimen de Mie.

Para partículas con dimensiones mucho menores que la longitud de onda, la aproximación geométrica es deficiente. Las fuerzas en esta situación, llamada Régimen de Rayleigh, se calculan aproximando a la partícula como un dipolo eléctrico que interactúa con los campos electromagnéticos en cuestión.

5.1 Pinzas Ópticas

Consideremos válido el régimen de Mie e imaginemos una partícula esférica de índice de refracción n_e mayor al del medio en el cual se encuentra inmersa. Supongamos que se encuentra iluminada por un haz gaussiano fundamental altamente focalizado y fuera del eje del mismo. Un esquema de la partícula en la vecindad del haz se ilustra en la figura 5-1.

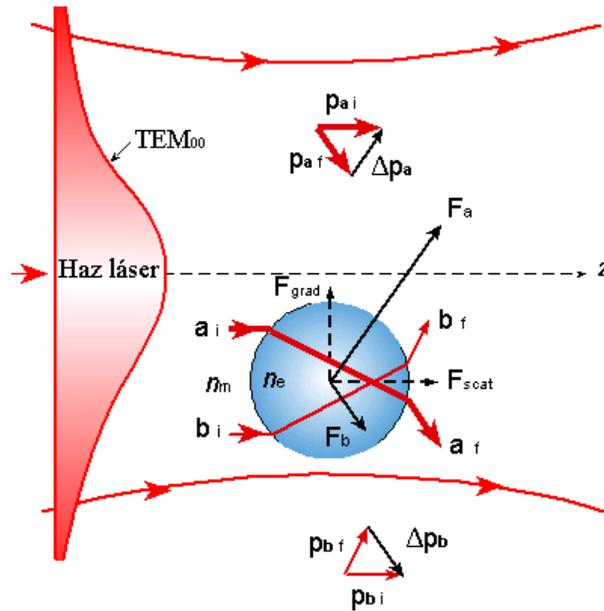


Figura 5-1: Dibujo esquemático de una partícula de alto índice de refracción fuera del eje de un haz gaussiano convencional. Los diagramas de flechas indican los cambios en las cantidades físicas correspondientes (ver texto) [31].

Tomemos un par de rayos a_i y b_i llegando a la partícula. Despreciando la parte reflejada en la superficie, los dos haces se refractan y salen finalmente de la esfera siendo los rayos a_f y b_f . La refracción representó un cambio en la dirección de los fotones incidentes y, por lo tanto, un cambio en su momento lineal; para el rayo a_i este cambio es $-\Delta p_a$ y para b_i es $-\Delta p_b$. Por conservación de momento, la esfera adquiere un momento lineal de magnitud igual y en sentido opuesto al de la luz ó, equivalentemente, los rayos han impreso sobre la partícula las correspondientes fuerzas F_a y F_b en la dirección del cambio de momento en la esfera. Ya que el rayo a_i se encuentra más cerca del eje central del haz, éste es más intenso que el b_i y por

tanto, la magnitud de la fuerza \mathbf{F}_a es mayor que la de \mathbf{F}_b (ecuación (1.28)).

Sumando todas las contribuciones para el cúmulo de rayos que modelan al haz, es posible decir que la fuerza total tiene dos componentes: una llamada fuerza de esparcimiento, \mathbf{F}_{scat} , en la dirección de propagación de la luz incidente, y otra fuerza llamada fuerza de gradiente, \mathbf{F}_{grad} , apuntando hacia la región de máxima intensidad.

La fuerza de gradiente es la responsable de la captura transversal de la esfera; actúa como una fuerza restitutiva de un resorte. Una vez que la esfera se encuentra en eje, la fuerza óptica neta en dirección transversal es cero por simetría y, por tanto, la única posición de equilibrio es el centro del haz.

La fuerza de esparcimiento esta dirigida perpendicularmente a los frentes de onda del haz incidente, por lo que esta fuerza empuja a la esfera en dirección de la propagación de la luz. Para contrarrestar la fuerza de esparcimiento y obtener una trampa tridimensional, se utiliza un haz sumamente focalizado usando, por ejemplo, un objetivo de microscopio. En la figura 5-2 se encuentra esquematizada una partícula en la vecindad del foco del haz gaussiano que pasa a través de un objetivo de gran apertura numérica.

El cambio en el momento de la luz resulta en el par de fuerzas \mathbf{F}_a y \mathbf{F}_b en la dirección del cambio de momento en la esfera. La fuerza óptica neta está dirigida hacia el foco del haz y su principal contribución proviene de los rayos fuera de eje como, los rayos a y b. Experimentalmente, esta fuerza es suficientemente grande como para igualar o superar tanto la fuerza de esparcimiento como el peso de la esfera (Fig. 5-2, (A) y (B)).

Cuando se provoca un pequeño desplazamiento de la esfera lejos del foco en dirección transversal (Fig. 5-2 (C)) surgen fuerzas restitutivas dirigidas hacia el punto focal. Combinando la fuerza transversal y las fuerzas provocadas por el gradiente de intensidad en dirección de propagación del haz, se obtiene una trampa óptica tridimensional en la que se usa sólo un haz, lo que usualmente es llamado *pinza óptica*.

La técnica de atrapamiento óptico es aplicable sólo para para partículas con diámetros desde decenas de nanómetros hasta decenas de micras debido a que, para atrapar partículas mayores, es necesaria una alta potencia que puede eventualmente destruirlas.

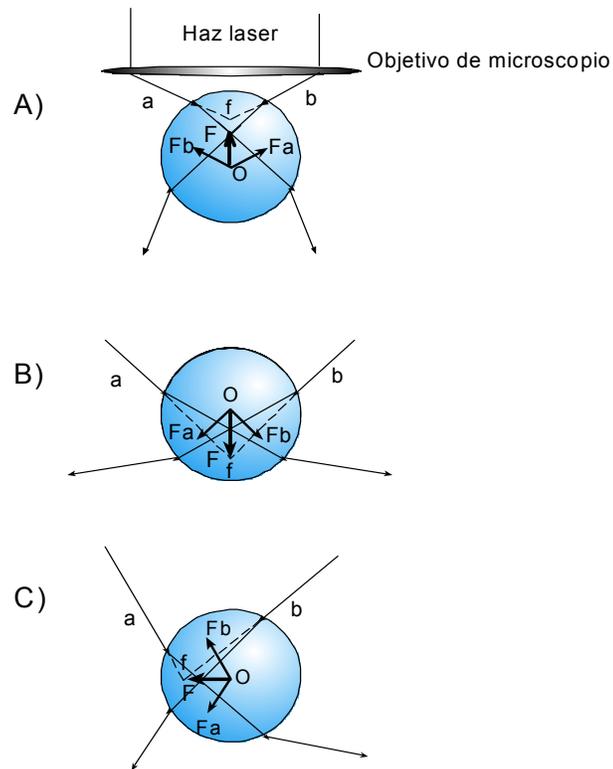


Figura 5-2: Diagrama de rayos para una esfera cerca del foco de un haz gaussiano concentrado después de su paso por un objetivo de microscopio.

5.1.1 Arreglo Experimental

Para lograr capturar ópticamente, se usa una fuente de alta coherencia espacial, tal como la radiación láser. Puede estar fuertemente enfocada por medio de un objetivo de microscopio de gran apertura numérica. Recordemos que ésta propiedad define el ángulo del cono máximo de la luz captada por la lente.

El arreglo experimental para un montaje de pinzas ópticas se muestra en la figura 5-3 y en nuestro caso constó de un láser Nd:YVO₄ a 1064 nm emitiendo un modo gaussiano convencional colimado con un diámetro de 3mm. Un telescopio de amplificación, armado con lentes positivas de 75.6 mm y de 175 mm, optimizó el tamaño del modo para lograr que la apertura posterior del objetivo de microscopio quedara totalmente iluminada. Este aspecto es muy importante pues son los rayos fuera de eje los que más contribuyen a una captura eficiente. Después del sistema de lentes se corroboró la colimación observando que el tamaño del modo a diferentes distancias fuera el mismo.

Un arreglo de periscopio llevó al haz hacia un cubo divisor polarizador que funcionó como espejo dicróico al reflejar el rayo láser hacia la apertura posterior de un objetivo Edmund 60x N.A. 0.85. Entre el periscopio y el cubo, se colocó una placa retardadora de $\lambda/2$ en una montura rotatoria, y un polarizador lineal para infrarrojo. Variando el ángulo entre el eje lento de la placa y el eje de transmisión del polarizador fue posible controlar la potencia de la luz que ingresa al sistema de pinzas ópticas.

Debajo y muy cerca del objetivo se colocó una montura de traslación XYZ que con la ayuda de tornillos micrométricos puede desplazar la muestra en forma controlada en cada dirección cartesiana. Como sistema de iluminación de fondo fue colocada una lámpara de halógeno, un diafragma y una lente positiva de 25mm. La finalidad del diafragma y de la lente fue condensar la luz en el plano de la muestra para lograr una iluminación lo mas uniforme posible, pues de esto depende la calidad de la imagen obtenida.

Como dispositivo de observación, se montó, justo arriba del cubo divisor, una lente convergente de 150mm para enfocar la imagen en una cámara CCD que registra imágenes y video en la computadora. Gran parte de la radiación IR se refleja en el cubo hacia el plano de la muestra, sin embargo, una pequeña porción de ella se dirige hacia la cámara CCD como se

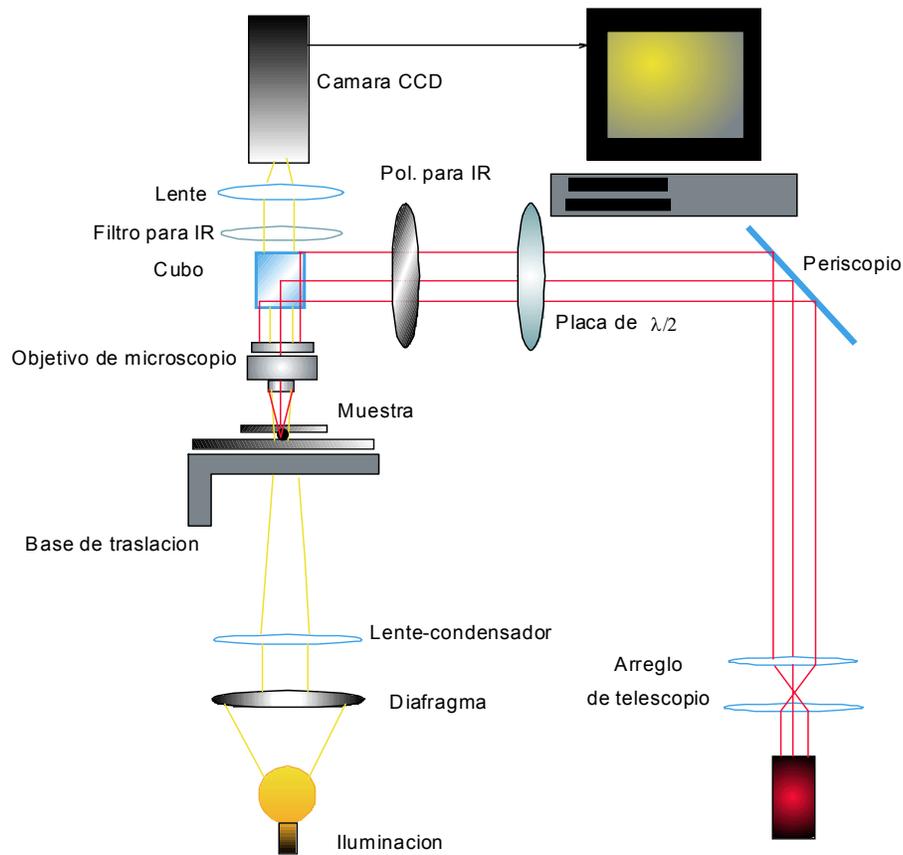


Figura 5-3: Figura esquemática del arreglo experimental de pinzas ópticas.

muestra en la figura 5-4. Para evitar que ésta parte del haz dañara la cámara se usó un filtro de línea infrarroja que bloqueara sólo esta parte del espectro pero no el visible, pues ello impediría que observáramos las partículas nítidamente.

Las partículas que capturamos son microesferas de polímero látex ($n_l=1.59$) de $2\mu\text{m}$ de diámetro, y microesferas de vidrio borosilicato ($n_l=1.56$) con diámetros de $5\mu\text{m}$, $8\mu\text{m}$, $10\mu\text{m}$ y $15\mu\text{m}$, cuyo aspecto a simple vista es parecido al del talco. Cada muestra se preparó agregando un tipo de esferas en una solución de agua con sal al 0.54%. Una gota de cada suspensión se colocó en un portaobjeto, fue rodeada de un espaciador vinílico de ≈ 80 micras de espesor y cubierta con un cubreobjeto. Una por una, fueron localizadas en el haz gaussiano focalizado que emerge del objetivo. Variando la distancia entre la cámara, la lente de observación y el objetivo, fue posible obtener una imagen nítida de las partículas en el plano focal del objetivo

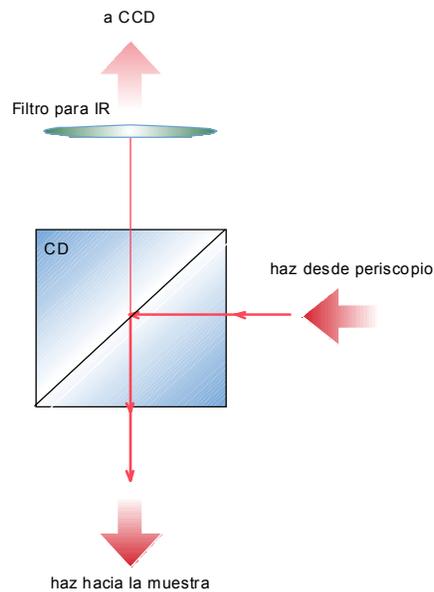


Figura 5-4: Esquema de la trayectoria del haz IR a su paso por el cubo divisor (CD). La pequeña porción reflejada (representada por una flecha en color más claro) hacia la cámara es bloqueada mediante el filtro para IR.

capturadas por acción de la luz. Es importante mencionar que cuando observamos la muestra a través del objetivo, la distancia entre partículas debe ser grande comparada con su diámetro.

En un arreglo posterior y con la finalidad de obtener un punto focal mucho más reducido, el objetivo Edmund 60x que inicialmente se usó, fue sustituido por un objetivo de inmersión en aceite Zeiss 100x N.A. 1.3. Para eliminar la parte de la radiación infrarroja reflejada hacia la cámara por el cubo, éste fue sustituido por un espejo de línea infrarroja que sólo refleja esta parte del espectro y permite pasar las longitudes de onda correspondientes al visible. Además, se colocaron, entre el espejo de línea y el espejo superior de periscopio, un par de lentes positivas de distancia focal 10 cm separadas por una distancia igual a la suma de sus distancias focales. La finalidad de este arreglo fue obtener un haz colimado siempre centrado en la apertura posterior del objetivo de microscopio. Para lograrlo, la distancia entre la apertura posterior y la lente más próxima debe ser ~ 10 cm, mientras que la distancia entre el objetivo y el espejo superior del periscopio debe ser ~ 40 cm. Cualquier movimiento angular del espejo superior del periscopio permitirá variar la posición del haz en el plano de la muestra sin pérdidas de intensidad luminosa

en el plano de interés. Una fotografía del arreglo experimental de pinzas ópticas se muestra en la figura 5-5.

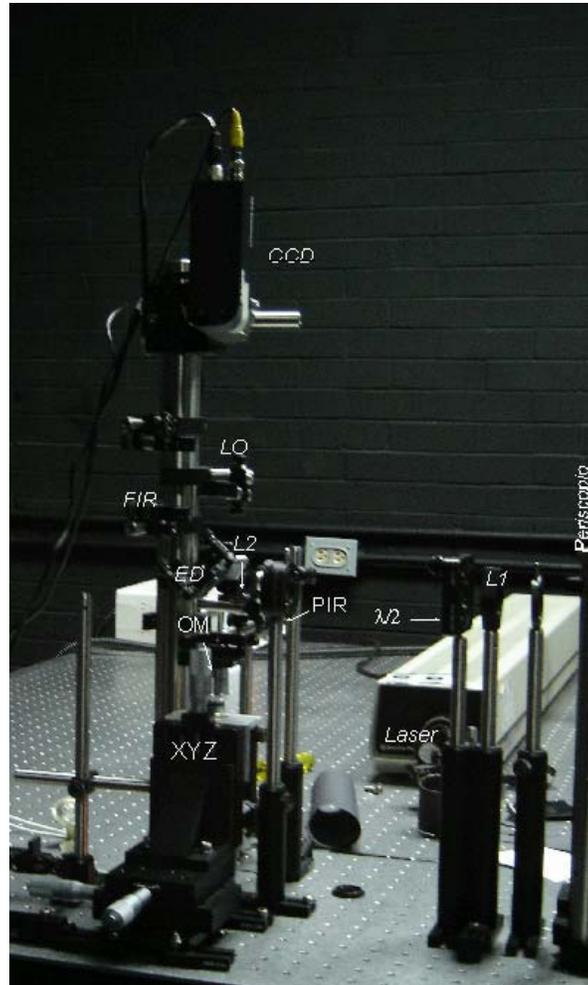


Figura 5-5: Fotografía del aspecto real del sistema de pinzas ópticas. Montura de traslación (XYZ), objetivo de microscopio (OM), espejo dieléctrico (ED), filtro para infrarrojo (FIR), lente de observación (LO), cámara CCD (CCD), polarizador para infrarrojo (PIR), placa retardadora ($\lambda/2$), lentes positivas de 10 cm de distancia focal (L1 y L2).

Con lo anterior, es posible manipular una partícula de dos maneras: manteniendo fijo el haz respecto al plano de la muestra y moviendo el entorno de la partícula capturada, o variando lateralmente la posición del haz respecto al plano de la muestra valiéndose del espejo superior del periscopio mientras se mantiene fijo el entorno de la partícula.

5.1.2 Resultados

Con el primer sistema de pinzas ópticas, usando el objetivo 60x (Edmund, N.A. 0.85), se capturaron y manipularon microesferas de polímero látex ($n_l=1.59$) de $2\mu\text{m}$ de diámetro, así como microesferas de vidrio borosilicato ($n_l=1.56$) con diámetros de $5\mu\text{m}$, $8\mu\text{m}$, $10\mu\text{m}$ y $15\mu\text{m}$. Cada tipo de esferas fueron manipuladas moviéndolas respecto a su entorno distancias de decenas de veces su diámetro con preciso control de posición espacial. Con micropartículas de $8\mu\text{m}$ se probó que la formación de microestructuras es posible por medio de ésta técnica. En la figura 5-6 se muestra la formación de la letra griega Σ con este tipo de microesferas.

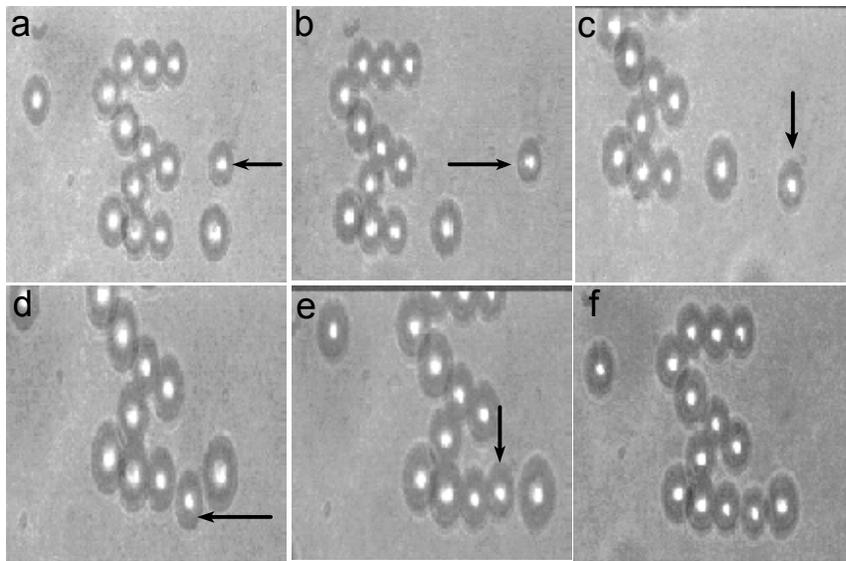


Figura 5-6: Secuencia de cuadros de video que muestran la construcción de microestructuras (letra griega Σ) controlando partículas de $8\mu\text{m}$ de diámetro. La flecha indica la partícula que esta siendo manipulada. (Ver video No.3 CD anexo).

Como caracterización de la potencia luminosa necesaria para la captura, se tomaron mediciones de la potencia a la salida del objetivo de microscopio, en el plano de la muestra (Thorlabs Optical Power Meter System PM 210), como función del ángulo relativo entre el eje lento de la placa de $\lambda/2$ y el eje de transmisión del polarizador para infrarrojo.

La trampa óptica resultó muy eficiente para una corriente de bombeo en el láser de 1A, lo que correspondió a una potencia a la salida del arreglo de telescopio de 377.4 mW. Para este

valor de la corriente de bombeo, las mediciones de potencia luminosa en el plano de la muestra como función del ángulo relativo entre el eje lento de la placa de $\lambda/2$ y el eje de transmisión del polarizador se muestran en la gráfica 5-7.

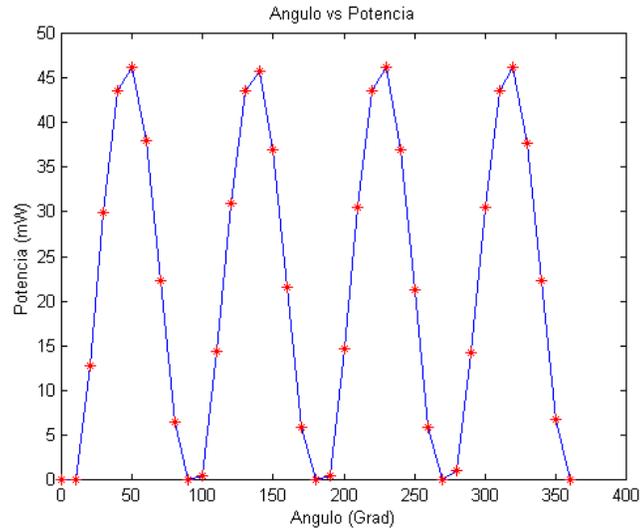


Figura 5-7: Potencia en el plano de la muestra contra ángulo relativo entre el eje de polarización y el eje lento de la placa $\lambda/2$.

La potencia necesaria para una captura eficiente es la correspondiente a los máximos en la figura 5-7 (~ 46.20 mW). Experimentalmente se observó el calentamiento del agua para potencias luminosas mayores debido a la gran absorción del IR, esto produjo movimiento browniano dominante en las partículas y, por tanto, menor eficiencia en la trampa.

Creemos que la contaminación en algunas de las muestras, provocó en ellas el crecimiento de microorganismos que fueron, fortuitamente, también capturados sin ser dañados por la radiación. Se infiere que no se les causó daño porque no hubo cambio en su movimiento y en su forma aún mucho tiempo después de haber sido capturados. La experiencia anterior realizada por primera vez en 1987 por A. Ashkin y sus colaboradores abrió la posibilidad de usar la técnica de pinzas ópticas como método de estudio de los ciclos de vida *in vivo* de microorganismos [10]. Usando el objetivo Zeiss 100x obtuvimos la secuencia de imágenes de la figura 5-8 en las que se muestra la captura de muchos microorganismos en el punto focal (a), la liberación de los

mismos bloqueando el haz de entrada (b-e) y la re-captura, en este caso se dejó pasar el haz nuevamente hacia la trampa (f).

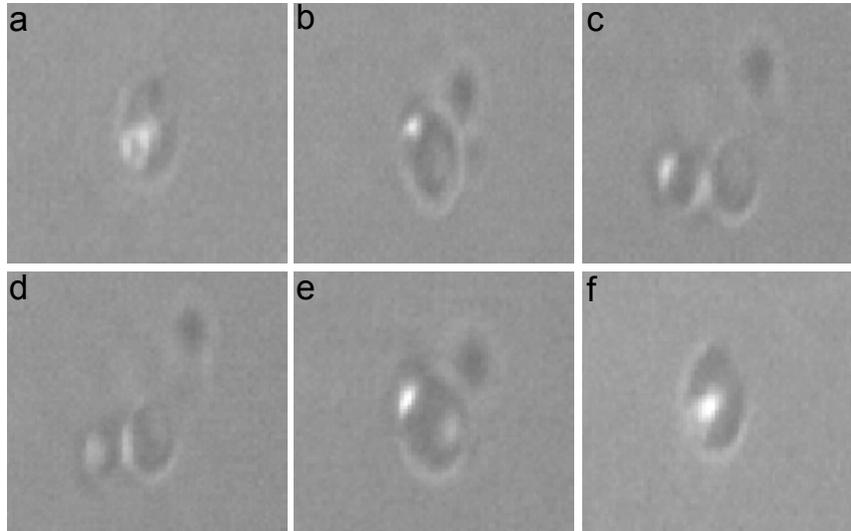


Figura 5-8: Secuencia de cuadros tomados de video en los que se muestra la captura de microorganismos en el punto focal del haz (a). Bloqueando el mismo los microorganismos son liberados (b-e). Son re-capturados cuando se deja pasar el haz nuevamente (f). (Ver video No. 4 CD anexo).

5.2 Transferencia de momento angular orbital y de espín

5.2.1 Transferencia de espín

El hecho de que la luz circularmente polarizada puede transferir momento angular a la materia fué teóricamente predicho por Poynting en 1909 y experimentalmente mostrado por R. Beth en 1936 [?].

El experimento de Beth consta de tres placas retardadoras: dos de $\lambda/4$ fijas y una de $\lambda/2$ suspendida de una fina fibra de cuarzo como se muestra en la figura 5-9.

Un haz de luz linealmente polarizado incide desde abajo pasando por la placa de $\lambda/4$ inferior, la cual está dispuesta de tal manera que de ella emerge luz con polarización circular. El haz pasa entonces por la placa de $\lambda/2$, cuya función es invertir el sentido de rotación del campo eléctrico, lo que implica una transferencia de momento angular debido a conservación del momento, y

por tanto, una pequeña torsión en el hilo de cuarzo.

Para duplicar el efecto y facilitar la medición, la lámina de $\lambda/4$ superior tiene un recubrimiento reflejante en la cara posterior. Después de que el haz pasa dos veces por esta placa se vuelve a invertir la polarización, de modo que la luz reflejada hacia abajo transfiera a la lámina de $\lambda/2$ la misma cantidad de momento angular que inicialmente. Midiendo el periodo de oscilación, Beth fué capaz de confirmar que la luz transfería momento angular a la materia como sugería la teoría.

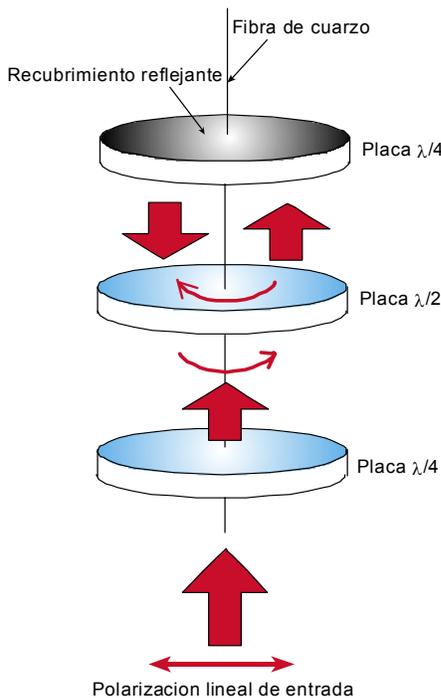


Figura 5-9: Figura esquemática del experimento que R. Beth (1936) usó para medir la torca producida por el cambio de momento angular en luz circularmente polarizada.

Según la teoría cuántica, cada fotón tiene un momento angular intrínseco o momento angular de espín s , cuya magnitud es

$$|s| = \frac{h\nu}{2\pi\nu} \left[\frac{\text{energía}}{\text{frecuencia angular}} \right],$$

lo que se reduce a

$$|\mathbf{s}| = \frac{\hbar}{2\pi} \equiv \hbar.$$

Entonces la magnitud del espín de un fotón tiene el valor \hbar cuyo valor es $1.05457266 \times 10^{-34}$ Js, lo que coincide con el resultado de la sección 2.6 obtenido para polarización circular. Asumiremos que el vector \mathbf{s} tiene sólo dos posibles orientaciones: para luz con polarización circular izquierda, la dirección del espín es paralela a la dirección de propagación, mientras que para luz con polarización circular derecha, es antiparalela a la dirección de propagación [36].

La luz linealmente polarizada y sin polarización pueden ser consideradas como combinaciones iguales de luz circular derecha e izquierda, por lo que el momento angular promedio es cero. En el caso de la luz linealmente polarizada la combinación es coherente, mientras que para la luz no polarizada la combinación es incoherente [20].

Físicamente, las cargas bajo la acción de una onda linealmente polarizada ejecutan oscilaciones lineales y la torca promedio en cada carga es cero.

En una versión moderna de los experimentos de Beth, Friese y sus colaboradores [24] propusieron en 1998 usar partículas de calcita ($1-15\mu m$ en tamaño) capturadas bidimensionalmente mediante un sistema de pinzas ópticas. El haz de captura usado fué un gaussiano fundamental y en su trayectoria, justo antes del objetivo, fué introducida una placa de $\lambda/4$; rotando el eje rápido de la placa con respecto al eje de polarización (lineal) del haz incidente, fué posible variar el estado de polarización de la luz y observar el efecto sobre las partículas en cada caso.

Debido a su naturaleza birrefringente, las partículas de calcita actúan como micro-láminas retardadoras y cambian la polarización (circular) del haz que incide sobre ellas. Dado que existe un cambio en la polarización, hay un cambio en el momento angular y como resultado, se presenta una torca de la luz sobre la partícula de magnitud proporcional a [40]

$$\tau \propto \frac{\varepsilon_0}{2\omega} E_0^2 [1 - \cos(kd(n_0 - n_e))], \quad (5.2)$$

donde ω es la frecuencia de la luz con amplitud E_0 , k es el número de onda y d el espesor del cristal de calcita con índices de refracción n_0 y n_e para los rayos ordinarios y extraordinarios respectivamente.

Esta torca es balanceada por una "torca de arrastre"

$$\tau_D = D\Omega, \quad (5.3)$$

debido a que la partícula está inmersa en un fluido con coeficiente de arrastre D moviéndose con velocidad angular Ω , y como consecuencia, rota a una frecuencia y velocidad angular constantes. Por tanto, midiendo la frecuencia de rotación es posible inferir un orden de magnitud para las torcas ópticas.

Para que la torca dada en (5.2) sea máxima, $kd(n_0 - n_e)$ debe ser igual a π y en este caso la torca óptica es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{2P}{\omega}, \quad (5.4)$$

con P la potencia del haz. Por ejemplo, para un haz de 488nm a 1W de potencia la torca máxima es $\sim 10^{-16}$ Nm, que aunque es muy pequeño es realmente observable para partículas micrométricas. Para un haz gaussiano circularmente polarizado, las frecuencias de rotación medidas en éste experimento fueron ~ 350 Hz, a diferencia de experimentos realizados en las mismas condiciones con partículas metálicas ($1\mu m - 10\mu m$ en tamaño) fuertemente absorbentes [23], en los que los resultados oscilaban de 1Hz a 25Hz. Esto se debe a que para obtener velocidades de rotación más altas es necesaria una gran potencia, con la que las partículas absorbentes, a diferencia de las de calcita, son eventualmente destruidas.

Por otro lado, para el caso en el que la luz incidente está linealmente polarizada se observó también una transferencia de momento angular. Este efecto fué estudiado por el grupo japonés de E. Higurashi [32] atrapando paralelepípedos de polímero birrefringente de $15\mu m$ de espesor en un sistema de pinzas ópticas. Cuando el haz gaussiano (linealmente polarizado) atraviesa los microcubos, adquiere polarización elíptica que sí lleva momento angular y por tanto una torca debió ejercerse en el objeto. En respuesta el objeto rota y su eje rápido se alinea con el plano de vibración del campo incidente. En esta situación el objeto no modifica ya el estado de polarización y ,por tanto, ya no experimenta torca.

En resumen, el objeto rota hasta que su eje óptico se alinea con el plano de polarización, si la orientación de éste último se modifica (por ejemplo, introduciendo una placa de $\lambda/2$), este efecto puede ser usado para controlar la posición de la partícula y observarla desde distintos

angulos [24].

Como aplicaciones tecnológicas se han propuesto micro-engranés de SiO_2 ($1\mu\text{m}$ de diámetro) colocados muy próximos a un trozo de calcita en rotación, ambos capturados mediante una trampa óptica dual (pinzas ópticas con dos haces independientes). El líquido circundante a la calcita y al engrane induce en este último un movimiento rotacional entre 100Hz y 200Hz en frecuencia [22]. Existen además una amplia variedad de micro-máquinas más complejas puestas en funcionamiento únicamente con luz.

Arreglo experimental

Como parte del trabajo en el laboratorio, se repitieron los experimentos para calcita descritos anteriormente; esto con la finalidad de entender el uso de las pinzas en el estudio de la transferencia de momento angular a la materia.

Para los experimentos de transferencia de momento de espín a la materia, dispusimos un arreglo convencional de pinzas ópticas mostrado en la figura 5-10.

Un haz gaussiano emitido por un láser (*Verdi*, 532nm @ 5W de potencia máxima de salida), polarizado linealmente, y con diámetro de 2.25 mm, fué llevado hacia un periscopio y a la salida del mismo fueron colocadas un par de lentes positivas de 17.5 cm y 10 cm separadas una distancia igual a la suma de sus distancias focales. En seguida el espejo dicróico (EL) refleja sólo la parte del espectro correspondiente al verde y lo dirige hacia la apertura posterior de un objetivo (OM) Edmund 60x N.A.=0.85. Como sistema de iluminación se dispuso un arreglo formado por una lente esférica, tres lentes positivas y dos diafragmas montados en una jaula de varillas retenedoras. Como fuente de luz blanca fué usada una lámpara de fibra óptica Thorlabs.

Para observar las partículas, la cámara CCD y una lente de observación (LO) fueron puestas directamente en la parte superior del objetivo. Debido a que una pequeña porción de la luz láser es reflejada hacia el plano de observación, fué necesario introducir filtros para bloquear esta parte de la radiación pero dejar pasar el resto del rango visible, de lo contrario la calidad de la imagen obtenida sería muy deficiente.

Dado que el espejo dicróico inducía polarización elíptica en el haz que ingresa a las pinzas, antes de aquel se colocó un polarizador lineal (P1) y, justo a la entrada del objetivo, una placa de $\lambda/4$ para asegurar que el haz de captura estuviera circularmente polarizado como en

experimentos antecesores [21, 23, 24, 40, 48]. A la salida del objetivo se verificó lo anterior rotando un analizador y corroborando que la intensidad permaneciera siempre constante.

Las muestras consistieron de una suspensión en agua destilada de partículas de calcita de tamaños variables obtenidas al triturar un cristal grande de ese material. Una pequeña porción de jabón líquido fué añadida para aumentar la movilidad. Una gota de la solución fué colocada en un porta-objetos con un espaciador vinílico adherido y cubierta con un cubre-objetos. Finalmente la muestra fué colocada debajo y muy cerca del objetivo en una base de traslación XYZ.

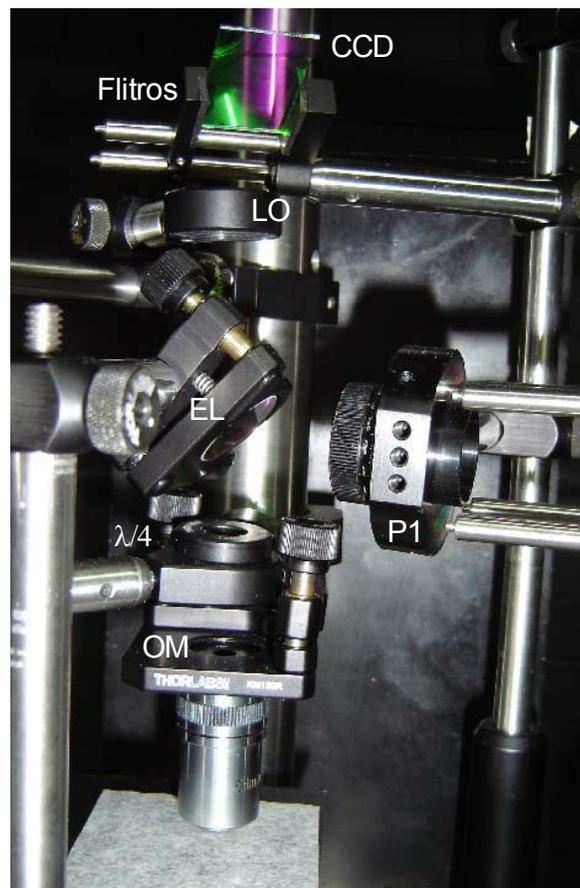


Figura 5-10: Fotografía experimental de la parte central del arreglo de pinzas ópticas usado para transferir momento angular de espín a micropartículas de calcita

Resultados

Antes de introducir la placa de $\lambda/4$, probamos la eficiencia de la trampa repitiendo los experimentos de captura anteriores. Obtuvimos un control muy eficiente de partículas de $10\mu m$ de vidrio borosilicato con las que fué posible obtener la secuencia de la figura 5-11¹. Cabe mencionar que la potencia de salida del láser en nuestros experimentos no revasó los 700 mW.

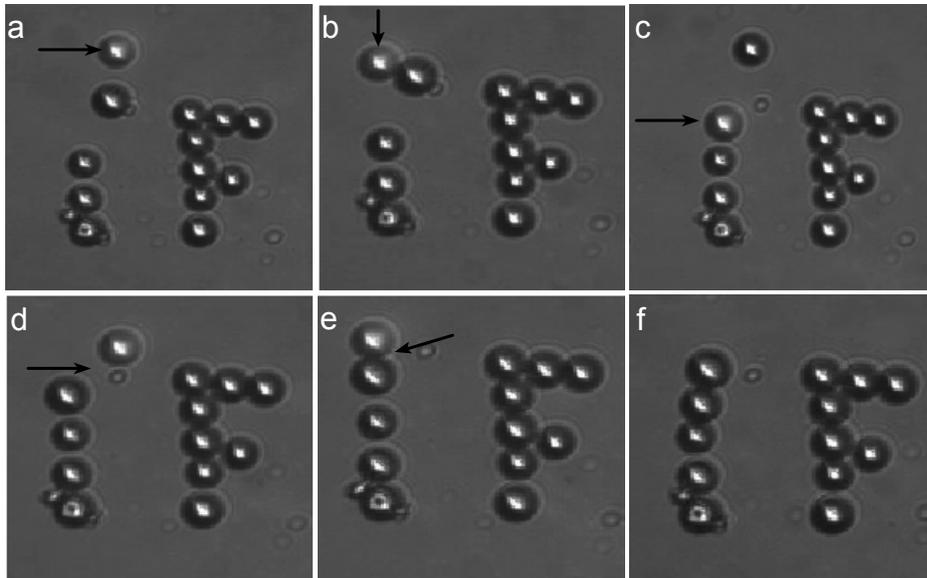


Figura 5-11: Micromanipulación de partículas de $10\mu m$ para formar las siglas IF. La flecha indica la partícula que está siendo controlada. (Ver video No. 1 CD anexo).

Después de colocar el polarizador lineal y la lámina de $\lambda/4$ se introdujo una muestra de microtrozos de calcita, con lo que obtuvimos la secuencia de fotografías en la imagen 5-12. Nótese que la partícula localizada a la izquierda de cada cuadro permanece inmóvil. La flecha indica un punto de referencia en la partícula de calcita.

5.2.2 Transferencia de momento angular orbital

Aún cuando esté linealmente polarizado, un vórtice óptico con índice azimutal $l \neq 0$ puede transferir momento angular, aunque en este caso se debe a que el vector de Poynting tiene una

¹Nótense las mejoras sustanciales de ésta imagen respecto a la figura 5-6. Ellas se deben al nuevo arreglo de iluminación, que aunque más robusto, es sumamente efectivo.

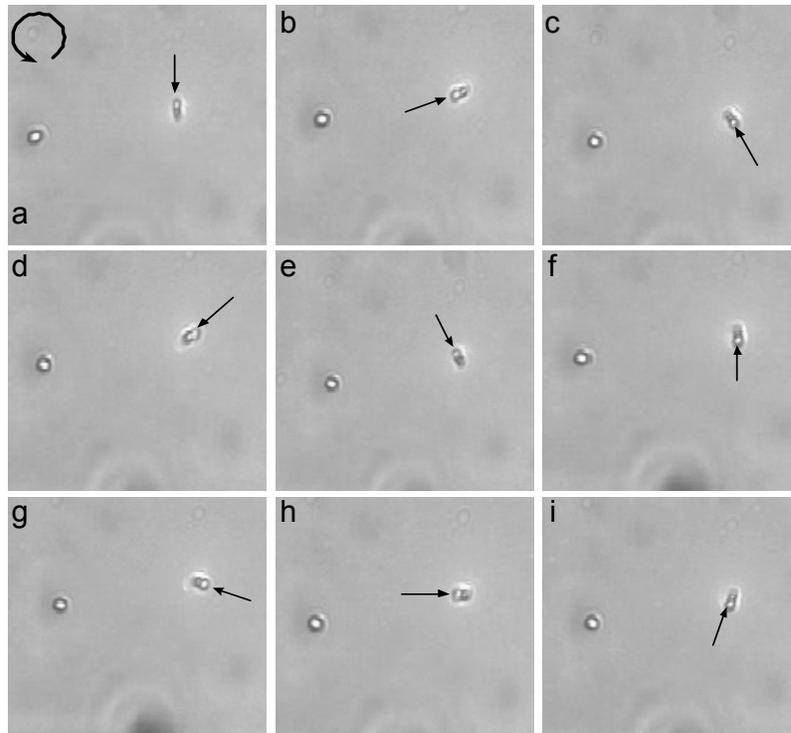


Figura 5-12: Partícula de calcita atrapada en un haz gaussiano circularmente polarizado. Las flechas indican un punto de referencia en la calcita. El tiempo entre cuadros es aproximadamente 1/10 segundos. (Ver video No. 5 CD anexo).

componente tangencial que causa que las partículas comiencen a rotar tan pronto como son iluminadas con un haz de esta clase.

Lo anterior fué estudiado por H. He y sus colaboradores [29] capturando partículas de cerámico superconductor absorbentes ($1\mu m - 2\mu m$ de tamaño) y metálicas ($1\mu m - 15\mu m$) en un sistema de pinzas ópticas. En este caso, el haz de captura fué un Laguerre-Gauss con índice radial $p = 0$, e índice azimutal $l = 3$, linealmente polarizado en un primer caso [29] y con diferentes estados de polarización en un experimento subsecuente [21].

Consideremos una partícula absorbente capturada en dos dimensiones en una trampa óptica con un haz LG de orden superior sumamente focalizado. Como se dedujo en la sección 2.6, cada fotón del haz con estado de polarización caracterizado por σ ($=\pm 1$ y 0 para polarización circular y lineal, respectivamente) y carga topológica $l \neq 0$, porta un momento angular total igual a $(l + \sigma)\hbar$. Cuando se suman las contribuciones de todos los fotones absorbidos por la partícula por unidad de tiempo, el torque de la ecuación (5.4) se generaliza para tomar la siguiente forma (resultado restringido al régimen paraxial):

$$\tau = \frac{P_{abs}}{\omega}(l + \sigma), \quad (5.5)$$

donde P_{abs} es la parte de la potencia total absorbida por la partícula. Por ejemplo, para partículas que absorben 25% de un haz LG ($l = 3$) linealmente polarizado de 633nm a 4mW de potencia que incide sobre ellas, la magnitud del torque óptico orbital es del orden de 10^{-18} Nm. El torque de la ecuación (5.5) es balanceado, como anteriormente, por el torque de arrastre de la ecuación (5.3), provocando que las partículas roten en sentido de la helicidad del haz con frecuencia y velocidad de rotación constantes.

En estos experimentos se observó que, para cualquier polarización del haz LG_0^3 , las partículas son atrapadas en la región central oscura del haz. Para el caso de luz linealmente polarizada se alcanzaron frecuencias de rotación entre 1Hz y 10Hz, mientras que para polarización circular se encontró que la frecuencia de rotación se incrementa cuando la helicidad del haz tiene la misma dirección que el sentido de rotación del campo incidente y disminuye en caso contrario.

Este último aspecto fué analizado más profundamente por B. Simpson y sus colaboradores [48]. Partículas dieléctricas absorbentes de vidrio y Teflón fueron capturadas tridimensional-

mente y puestas en rotación iluminándolas con un haz LG con índice radial $p = 0$ y carga $l = 1$ para diferentes polarizaciones del haz (circular izquierda y derecha). Cuando el sentido de rotación del campo polarizado era el mismo que su helicidad las partículas rotaban más rápidamente (casi al doble) que la velocidad que adquirirían con polarización lineal. Para el caso contrario, el movimiento, en la mayoría de los casos, fué nulo. Se encontró, por tanto, que para haces altamente enfocados es posible asumir el resultado válido en la aproximación paraxial de que el momento angular total es simplemente la suma de las contribuciones de espín más orbital.

Además de haces LG, se ha propuesto el uso de haces Bessel escalares de orden superior; lo anterior resulta una herramienta muy útil en el análisis del flujo local de momento angular. Microesferas de sílica ($1\mu m$, $3\mu m$ y $5\mu m$ de diámetro) [58] y huecas ($2\mu m$ - $20\mu m$ de diámetro) [25] han sido capturadas en un arreglo de pinzas ópticas invertido (la observación se hace desde la parte inferior) usando haces Bessel de ordenes $l = 2$ y $l = 3$ linealmente polarizados. Las fuerzas de gradiente actúan de tal manera que las partículas son atraídas hacia las regiones de máxima (mínima) intensidad si su índice de refracción es mayor (menor) del índice del medio en que están inmersas. Para ambos casos el medio que las rodea es agua, por tanto las de sílica se concentran en los anillos brillantes del Bessel formando estructuras que son puestas en movimiento orbital alrededor del mínimo central.

Por su parte, las esferas huecas son atraídas hacia las regiones oscuras entre anillos y rotan alrededor del eje central debido a la helicidad del haz, aunque mas fácilmente ya que, a diferencia de las de alto índice, son mucho menos sensibles a las variaciones de intensidad alrededor del modo; irregularidades llamadas *hot spots*.

Para verificar las propiedades locales de la densidad de momento angular, se ha probado colocar una mezcla de partículas de alto y bajo índice (mayor o menor que el del medio circundante respectivamente) para ser atraídas hacia distintas regiones del modo y analizar el comportamiento correspondiente [25].

Con el propósito de examinar el flujo local de momento angular del haz Bessel vectorial de orden uno, proponemos como trabajo a futuro, un experimento de captura óptica de partículas descrito cualitativamente en la sección de conclusiones.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se estudiaron los modos Bessel vectoriales con polarización transversal eléctrica y transversal magnética en espacio libre, tanto desde el punto de vista teórico como experimental, realizando también un análisis de sus propiedades dinámicas así como una propuesta experimental para estudiarlas.

Específicamente, en el capítulo 1 se estudiaron los conceptos básicos de teoría electromagnética necesarios para la descripción de ondas viajeras, tales como ecuaciones de Maxwell, ecuación de onda, conservación de energía, momento lineal y momento angular de los campos eléctrico y magnético, así como polarización y presión de radiación.

En el capítulo 2 se analizaron los principios fundamentales de la teoría de haces de luz paraxiales; particularmente se obtuvieron las soluciones analíticas a la ecuación paraxial de Helmholtz, las cuales dan lugar a los modos estables en propagación del tipo Gauss y Laguerre-Gauss. Se encontró también que los haces Bessel satisfacen la ecuación escalar de Helmholtz en coordenadas cilíndricas circulares fuera de cualquier aproximación.

Adicionalmente, se discutieron los conceptos de flujo de energía (vector de Poynting), momento lineal y momento angular de haces escalares. Como conclusión relevante en esta parte encontramos que un haz escalar con dependencia azimutal en fase en un factor $\exp(il\phi)$ posee un momento angular total por fotón igual a $(l + \sigma)\hbar$, donde σ define su estado de polarización (0 para polarización lineal, ± 1 para circular).

Se generaron experimentalmente y se caracterizaron haces Gauss, Laguerre-Gauss y Bessel

escalar. De éstos dos últimos se generaron no sólo los ordenes más bajos sino también ordenes superiores (con índices azimutales $l = \pm 1$ y $l = \pm 2$).

Utilizando el hecho de que los haces tipo Bessel son soluciones exactas a la ecuación escalar de Helmholtz, en el capítulo 3 se obtuvieron las ecuaciones explícitas para los campos Bessel vectoriales de orden arbitrario l , las cuales corresponden a las soluciones rigurosas a la ecuación vectorial de onda con simetría circular cilíndrica. Resultó que el vector de campo eléctrico de estos haces varía en cada punto del espacio, además cuando tienen carga topológica distinta de cero ($l \neq 0$), estos haces son llamados *vórtices vectoriales*.

Se realizó un análisis detallado de los estados de polarización transversal eléctrico y magnético encontrando que el flujo de energía de los campos con índice azimutal más bajo ($l = 0$), es a lo largo de la dirección de propagación y no son portadores de momento angular.

En contraste, en el caso de vórtices vectoriales ($l \neq 0$) encontramos que el flujo de energía tiene componente azimutal, igual que en la situación escalar, y que tienen momento angular total debido a espín igual a cero, pero contribución orbital proporcional a $l\hbar$ por fotón.

Se generaron teóricamente los diagramas vectoriales que muestran la evolución en el tiempo del campo eléctrico para un vórtice vectorial de orden uno, de donde se dedujo que, aunque la contribución total al momento angular debida a espín es nula, su densidad local en las regiones centrales no lo es.

Al simular teóricamente un haz vectorial de orden dos, se mostró que esta clase de haces tienen un mínimo de intensidad en eje, por lo que ahí la densidad local de momento debida a espín es cero. Con esto se encontró, además, que los haces vectoriales tienen centro oscuro siempre que $l \neq 1$ en contraste con el caso escalar el que esto ocurre si $l \neq 0$.

En el capítulo 5 se reportó la generación experimental de haces Laguerre-Gauss y Bessel con polarizaciones radial y azimutal, ya ampliamente conocidos. Nuestro arreglo constó básicamente de un interferómetro Mach-Zehnder como en otros casos [38, 49, 52]. Se estudió su polarización encontrando que los patrones de intensidad coinciden perfectamente con las simulaciones teóricas.

Como aportación central se logró, por primera vez, la generación experimental de modos Bessel vectoriales de primer orden con polarizaciones transversal eléctrica y magnética. En este

caso se usó un arreglo interferométrico como anteriormente pero con modificaciones que dieron muy buenos resultados, pues al realizar una caracterización detallada del estado de polarización del haz producido encontramos excelente acuerdo con las simulaciones numéricas.

Para analizar las propiedades dinámicas del vórtice vectorial tipo Bessel que fué producido, se planteó usar un sistema de pinzas ópticas. Con este objetivo, en el capítulo 4, se estudiaron los fundamentos de la técnica de microcontrol de partículas. Se montó un arreglo convencional de captura y se logró la manipulación de microesferas de 2, 5, 8, 10 y $15\mu m$ con preciso control de posición espacial.

Adicionalmente, en este experimento se logró la captura de microorganismos vivos sin causarles daño, lo que muestra que las pinzas ópticas son una herramienta muy útil para el estudio de los ciclos de vida *in vivo* de seres vivos microscópicos.

Se estudiaron los diversos mecanismos mediante los cuales es posible transferir momento angular orbital y de espín en sistemas de captura óptica de partículas.

En un arreglo de pinzas posterior en el que se indujo polarización circular al haz de captura, se probó la transferencia de momento angular debido a espín a microtrozos de calcita.

Como punto final y línea de investigación a futuro de este trabajo de tesis, se propone examinar el flujo local de momento angular de un haz Bessel vectorial de orden uno, mediante un montaje experimental basado en un sistema de pinzas ópticas descrito cualitativamente a continuación.

El vórtice vectorial tipo Bessel de orden uno será generado conforme lo descrito en la sección 4.2.1 y corresponderá al haz de captura. Un sistema de lentes se usará para reducir el radio del spot central brillante del haz tal que su diámetro sea similar al de las partículas que serán capturadas. Mediante espejos adecuados, el haz será dirigido hacia la muestra cuya posición, a lo largo de la dirección de propagación, es sumamente crítica debido a que la reducción en las dimensiones del haz causa también una disminución en su distancia óptima de propagación (z_{\max}). El plano óptimo en z será aquél en el que, cualitativamente, la captura sea más eficaz.

A causa de las características adifraccionales de los haces Bessel, no será posible obtener trampas tridimensionales, esto es, el haz empujará a las partículas sobre el fondo de la muestra, pero las confinará transversalmente, con lo que lograremos una captura bidimensional.

Las muestras consistirán de una mezcla de microesferas huecas y trozos de calcita del orden de micras, dispersas en agua. Se espera que en las regiones centrales del haz, la transferencia de espín por birrefringencia provoque rotación de la calcita sobre su propio eje, mostrando que la densidad *local* de momento angular debida a espín es distinta de cero.

Por otro lado, las esferas huecas serán atraídas hacia las regiones oscuras entre anillos y puestas en movimiento orbital alrededor del eje del haz mostrando la transferencia de momento angular debida a la contribución orbital. La principal ventaja de usar esta clase de partículas, radica en que serán repelidas de la región central brillante, donde la mayor parte del momento angular se debe a espín además que son mucho menos sensibles a las irregularidades de intensidad presentes en los anillos brillantes, las cuales pueden representar una gran problema al intentar poner esferas individuales en rotación. El objetivo es desacoplar las contribuciones locales de espín y orbital colocando partículas adecuadas en regiones muy específicas del haz.

Como línea de investigación a futuro adicional, se piensa también lograr la generación de haces vectoriales tipo Bessel de órdenes superiores ($l > 1$).

Para concluir, cabe destacar que los resultados de esta tesis han sido publicados y presentados en congresos tanto nacionales como internacionales bajo las siguientes referencias:

■ Trabajo publicado en la revista especializada en óptica *Optics Letters*:

A. Flores-Pérez, J. Hernández-Hernández, R. Jáuregui-Renaud, K. Volke-Sepúlveda, “Experimental generation and analysis of higher-order TE and TM Bessel modes in free-space,” *OPTICS LETTERS* **31** (11), 1732-1734 (2006).

■ Presentación en sesión mural del XLVIII Congreso Nacional de Física: “Generación experimental de haces Laguerre-Gauss y haces Bessel con polarización transversal eléctrica y transversal magnética”

■ Presentación en sesión oral de la SPIE 51th Annual Meeting 2006. San Diego, Estados Unidos, 13-18 agosto 2006

K. Volke-Sepúlveda, A. Flores-Pérez, J. Hernández-Hernández, S. Hacyan, R. Jáuregui, “Transverse electric (TE) and transverse magnetic (TM) vector vortices in free-space: analysis and experimental generation,” *Laser Beam Shaping VII, SPIE Proceedings* **6290**, en prensa (2006).

■ Presentación en sesión mural del XLIX Congreso Nacional de Física “Vórtices vectoriales con polarización transversal eléctrica y transversal magnética en espacio libre”.

Apéndice A: Alineación de elementos ópticos

A.1 Alineación del haz láser

Una vez que la cavidad emisora está fija en la mesa óptica, un par de diafragmas son alineados a exactamente la misma altura que el rayo emitido por la fuente. Este par de diafragmas se colocan a la misma distancia de una referencia lateral, por ejemplo la orilla de la mesa, y alejados entre sí lo más posible en la dirección de propagación del haz. En seguida, la posición de la fuente emisora es modificada hasta lograr que el haz luminoso entre justo en las aperturas de ambos diafragmas *simultáneamente*. En caso de que la montura del láser lo permita, también la alineación vertical se regula para obtener un haz perfectamente centrado en cada diafragma.

Posteriormente de que el haz de salida es alineado de esta forma, se interponen en la trayectoria óptica los demás elementos ópticos necesarios como lentes, espejos, filtros, etc.

Cuando es necesario que la trayectoria de este haz sea desviada por reflexiones especulares el procedimiento a seguir es análogo. Se interpone en la trayectoria del haz el espejo requerido y el rayo que emerge de este elemento es alineado siguiendo el método anteriormente descrito, aunque en este caso, es la orientación del espejo lo que cambia dejando absolutamente fija la posición de la fuente.

A.2 Alineación de lentes

Lo fundamental en la alineación de una lente es hacer que su eje óptico coincida con el eje del haz de luz para evitar desviaciones indeseables en el haz.

Colocando ambos diafragmas alineados con el haz y muy distantes entre sí en dirección de propagación, la lente (o cualquier dispositivo refractor) es colocada entre los diafragmas centrandola con respecto del haz. Posteriormente la orientación de la lente es modificada hasta lograr que los reflejos generados por las reflexiones y los rayos transmitidos por refracción de la luz en el elemento óptico coincidan todos en las aperturas de los diafragmas, como antes, simultáneamente.

A.3 Alineación de elementos en los experimentos para la generación de haces de luz vectoriales.

La alineación de la cavidad emisora y de las lentes en el arreglo de telescopio ha sido comentada en las secciones A.1 y A.2.

En lo correspondiente a la alineación del holograma se procedió como sigue:

El patrón de difracción generado por el holograma tiene el aspecto mostrado en la figura A-1. Para alinear los hologramas, se colocó un diafragma centrado respecto al haz de salida en un extremo del patrón de difracción. Si en ese extremo el modo de orden superior está alineado pero en el otro extremo no, el holograma se rota en dirección perpendicular a la de propagación de manera que los modos queden centrados respecto a los diafragmas (ver Fig. A-1). Cuando el holograma no está alineado respecto a la mesa óptica los rayos que salen del cubo no tienen la misma altura haciendo imposible la alineación de los haces de salida del cubo divisor.

Una vez que el holograma se ha colocado correctamente, los haces de interés se llevan hacia el cubo divisor (polarizador o no polarizador) orientando los espejos de la manera anteriormente descrita (sección A.1). Para introducir polarizaciones circulares ortogonales en los ordenes ± 1 de holograma con $l = 1$, los ejes de los polarizadores y de las placas de $\lambda/4$ se orientaron como en la figura A-2. Los ejes de las láminas están paralelos en cada brazo, sin embargo, el eje de transmisión del polarizador está a $+45^\circ$ (-45°) lo que induce en el haz una polarización circular derecha (izquierda).

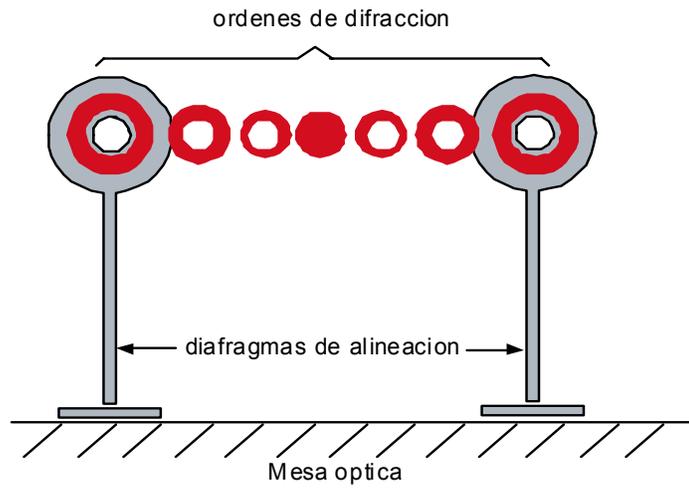


Figura A-1: Esquema en la que se muestran los diferentes ordenes de difracción alineados respecto a la mesa óptica.

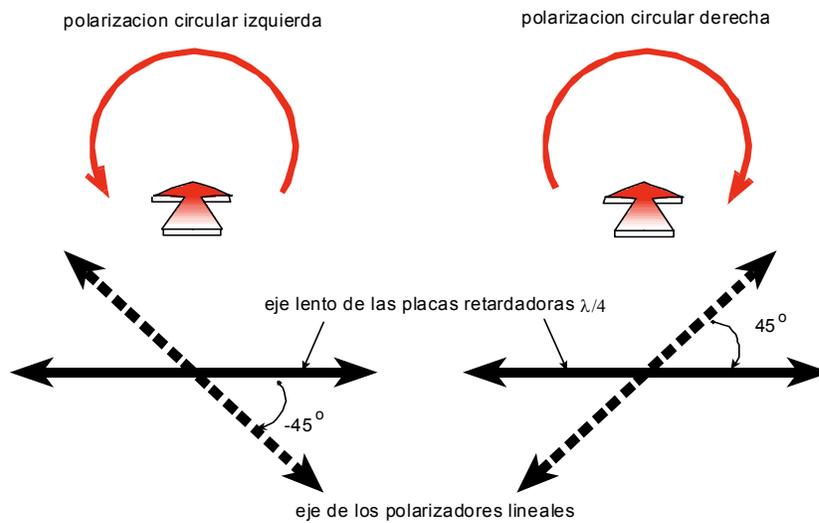


Figura A-2: Esquema de la orientación de los ejes de las placas de $\lambda/4$ y de los polarizadores para inducir polarizaciones circulares ortogonales en cada brazo del interferómetro.

Para la alineación de los cubos (divisor polarizador y no polarizador) haremos referencia a la figura A-3. La figura muestra esquemáticamente los ordenes de difracción tomados en cada brazo del interferómetro representados con los rayos con flecha doble (1) y con flecha simple (2). En el experimento para la generación de haces LG y BB radial y azimutalmente polarizados los rayos 1 y 2 son los ordenes ± 1 del holograma con carga topológica $l = 1$, mientras que para la generación de haces Bessel TE y TM de orden superior, los rayos 1 y 2 son los ordenes 1 y 0, respectivamente, del holograma con carga topológica $l = 2$. Cuando ambos rayos atraviesan el cubo, parte es reflejada y parte es transmitida. El rayo (a) consiste de la parte reflejada (transmitida) de 1 (2) mientras que el rayo (b) está formado por lo que se ha transmitido (reflejado) de 1 (2). La posición óptima del cubo se logra cuando todos esos haces reflejados y transmitidos viajan juntos una gran distancia (representados por rayos con flecha simple y doble intercaladas); en nuestro caso esa distancia fué 1.5m aproximadamente. Para superponer los haces lejos del cubo se rotó la base del mismo en un ajuste más robusto, mientras que para hacerlo cerca se usaron los tornillos de movimiento fino dispuestos en la montura.

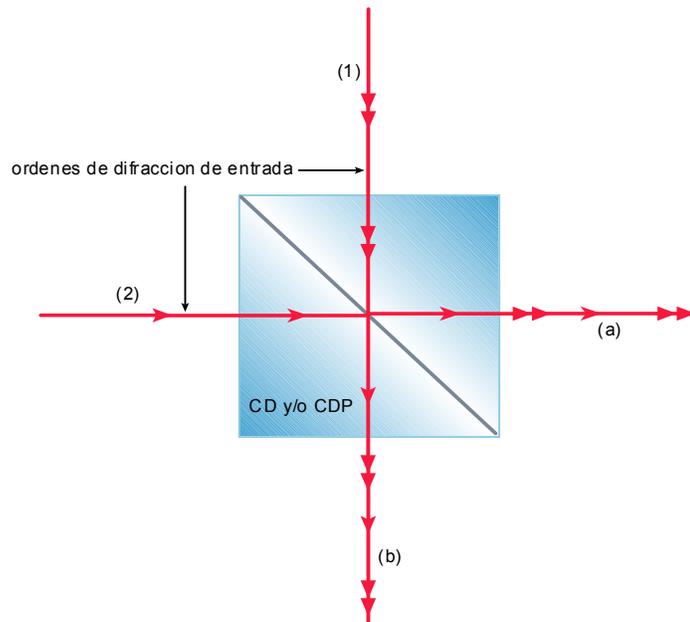


Figura A-3: Figura esquemática de los modos generados por el holograma dentro del cubo divisor no polarizador (CD) y polarizador (CDP) (visto desde arriba).

Logrado lo anterior, para la generación de los haces Bessel necesarios, se interpuso en el rayo de salida ((a), Fig. A-3) una lente cónica ó axicón; éste fué colocado a una distancia aproximada de 11cm de la cara más cercana del cubo. Si a la salida y muy cerca del mismo (aproximadamente a 5cm) se observa un pequeño punto brillante centrado con los modos del holograma, mientras que lejos (1.5m aprox.) lo que se observa es un anillo brillante homogéneo que encierra una región oscura, entonces los ejes del axicón y de los haces son muy cercanos y sólo es necesario un reajuste muy fino. Cuando en el interferómetro se deja pasar sólo uno de los modos LG de orden l , entonces a su paso por el axicón se generará el correspondiente haz BB del mismo orden l (ver sección 2.5.3). De esta manera se generaron haces Bessel de ordenes ± 1 en el experimento para haces radial y azimutal, y de ordenes 0 y 2 para haces de orden superior.

A.4 Alineación de elementos en los experimentos de micro-manipulación óptica (pinzas ópticas)

A.4.1 Alineación del cubo divisor polarizador y del objetivo de microscopio (Edmund 60x N.A. 0.85 y objetivo de inmersión Zeiss 100x N.A. 1.3)

Habiendo alineado el haz láser que proviene del arreglo de periscopio de la manera en que se ha especificado en la sección A.1, la alineación del cubo divisor (o espejo de línea que posteriormente fué colocado) y del objetivo de microscopio para los experimentos de manipulación óptica, implican el uso extra de un espejo metálico.

Se montó el cubo¹ verticalmente con las caras aproximadamente paralelas a la mesa y un par de diafragmas alineados con el haz de salida del periscopio. El espejo fué colocado en la superficie de la mesa óptica reflejando el haz que emerge del cubo; cuando éste no está bien alineado, la luz no regresa por el mismo camino por el que incidió y por tanto el reflejo no reingresa a las aperturas de los diafragmas. Fué necesario entonces modificar la orientación del cubo hasta lograr que el haz reflejado regresara exactamente por la misma trayectoria incidente es decir, hasta que no se detectaran reflejos fuera de las aperturas diafragmáticas.

¹La alineación del espejo de línea infrarroja que posteriormente fué colocado, es totalmente equivalente a la del cubo divisor.

En seguida se montó el objetivo de microscopio y el espejo fué colocado en la apertura posterior del mismo. Si el cubo y el haz de entrada se encuentran alineados pero se observan reflejos que no ingresan a las aperturas de los diafragmas, el objetivo se encuentra desalineado y hay que modificar su orientación con los tornillos de ajuste fino dispuestos en la montura hasta que nuevamente los reflejos reingresen a las aperturas de los diafragmas.

Dado que las pinzas ópticas se realizaron con un láser infrarrojo (1064nm, 1W de potencia) es necesario resaltar que la radiación de esta parte del espectro es invisible, puede provocar quemaduras en piel y daños oculares irreparables; por lo que es muy importante extremar precauciones usando gafas protectoras y evitando cualquier reflejo no confinado en postes y elementos ópticos.

Como hemos dicho, la longitud de onda de 1064nm es imperceptible para nuestros ojos, esto hizo necesario el uso de tarjetas reveladoras y visor de IR para poder mirar la trayectoria del haz; lo que provocó una notable complicación en la alineación de cualquiera de los elementos utilizados.

Bibliografía

- [1] Abramowitz, M. *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, USA
- [2] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw and J. P. Woerdman. "Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes", *Physical Review A*, **45**, 8185-8189 (1992)
- [3] L. Allen, M. Padgett and M. Babiker, "The orbital angular momentum of light", *Progress in Optics* **39**, 291-372 (1999).
- [4] Arfken, G. Weber, H. *Mathematical methods for physicists*. 4th ed. Academic Press, USA
- [5] J. Arlt and K. Dholakia, "Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon", *Optics Communications*, **177**, 297-301 (2000).
- [6] Ashkin, A. "Optical trapping and manipulation of neutral particles using lasers". *Optics & Photonics News*. 41-46 (1999).
- [7] Ashkin, A. "Acceleration and trapping of particles by radiation pressure". *Phys. Rev. Lett.* **24**, 156-159 (1970).
- [8] Ashkin, A. "Applications of laser radiation pressure" *Science* **210**, 1081-1088 (1980).
- [9] Ashkin, A. "Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles". *Opt. Lett.* **11**, 288-290 (1986)
- [10] Ashkin, A. "Optical trapping and manipulation of single cells using infrared laser beams" *Nature*, **330**, 769-771 (1987).
- [11] Born, M. & Wolf, E. *Principles of Optics*. 6th Ed. Pergamon Press (1980).

- [12] G. F. Brand. "Phase singularities in beams". Am. J. Phys. **67**, 1 (1999)
- [13] P. Ceperley. "Rotating waves". Am. J. Phys. **60**, 10 (1992).
- [14] Chu,S. "The manipulation of neutral particles". Rev. Mod. Phys., 685-706 (1998).
- [15] L.W. Davis. "Theory of electromagnetic beams", Phys. Rev. A **19**,1177-1179 (1979).
- [16] R. Dorn, S. Quabis, G. Leuchs "Sharper Focus for a Radially Polarized Light Beam", Physical Review Letters **91**, 23 (2003).
- [17] J. Durnin, J. J. Miceli, and J. H. Eberly, "Diffraction-free beams," Phys. Rev. Lett. **58**, 1499–1501 (1987).
- [18] Eyges, L. *The classical electromagnetic field*, Dover, New York (1980).
- [19] A. Flores-Pérez, J. Hernández-Hernández, R. Jáuregui-Renaud, K. Volke-Sepúlveda, "Experimental generation and analysis of higher-order TE and TM Bessel modes in free-space," Optics Letters **31**, 1732-1734 (2006).
- [20] Fowles, G.*Introduction to Modern Optics*, Dover, New York
- [21] M. Friese, J. Enger, H. Rubinsztein-Dunlop and R. Heckenberg, "Optical angular-momentum transfer to trapped absorbing particles", Phys. Rev. A, **54**, 2 (1996).
- [22] M. Friese and H. Rubinsztein-Dunlop, "Optically driven micromachine elements". App. Phys. Lett. **78**, 4 (2001).
- [23] M. Friese, A. Nieminen, R. Heckenberg and H. Rubinsztein-Dunlop,"Optical torque controlled by elliptical polarization". Opt. Lett. **23**, 1 (1998).
- [24] M. Friese, A. Nieminen, R. Heckenberg and H. Rubinsztein-Dunlop, "Optical alignment and spinning of laser-trapped microscopic particles", Letters to Nature, **394**, July (1998).
- [25] V. Garcés-Chávez, K. Volke-Sepúlveda, S. Chávez-Cerda, W. Sibbett and K. Dholakia "Transfer of orbital angular momentum to an optically trapped low-index particle" Physical Review A, **66**, (2002).

- [26] R. C. Gauthier and S. Wallace, "Optical levitation of spheres: analytical development and numerical computations of the force equations" J. Opt. Soc. Am. B, **12**, 9 (1995).
- [27] Griffiths, D. *Introduction to Electrodynamics*. 3rd Ed. Prentice Hall, USA (1999).
- [28] Guenther, R. *Modern Optics*, John Wiley & Sons, USA, 1990.
- [29] H. He, M. Friese, R. Heckenberg and H. Rubinsztein-Dunlop, "Direct observation of transfer of angular momentum to absorptive particles from a laser beam with a phase singularity", Phys. Rev. Lett. **75**, 5 (1995).
- [30] Hecht, E. *Optics*, Addison Wesley, USA, 1998
- [31] Hernández, J. *Micromanipulación y separación de partículas con haces de luz*, Tesis de licenciatura, Universidad Veracruzana-UNAM. Febrero 2006.
- [32] E. Higurashi, R. Sawada and T. Ito, "Optically induced angular alignment of birefringent micro-objects by linear polarization". App. Phys. Lett., **73**, 21 (1998).
- [33] Iizuka, K. *Elements of Photonics, V. 1*, John Wiley & Sons, USA 2002.
- [34] J. Arlt, K. Dholakia, L. Allen & M. J. Padgett. "The production of multiringed Laguerre-Gaussian modes by computer generated holograms". J. Mod. Opt. **45**, 6 (1998).
- [35] J. Arlt, K. Dholakia, J. Soneson and E. Wright. "Optical dipole traps and atomic waveguides based on Bessel light beams". Phys. Rev. A **63**, May (2001).
- [36] Jackson, J. *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, (1999).
- [37] M. Lax, W. Louisell and W. McNight. "From Maxwell to paraxial wave optics". Phys. Rev. A, **11**, 1365-1370 (1975).
- [38] D. McGloin, V. Garcés-Chávez and K. Dholakia "Interfering Bessel beams for optical micromanipulation", Optics Letters, **28**, 8 (2003).
- [39] Milonni, P. y Eberly, J. *Lasers*. John Wiley & Sons. USA (1988)
- [40] D. N. Moothoo, J. Arlt, R. S. Conroy, F. Akerboom, A. Voit and K. Dholakia "Beth's experiment using optical tweezers" Am. J. Phys. **68**, 11, (2000).

- [41] L. Novotny, M. Beversluis, K. Youngworth, T. Brown, "Longitudinal field modes probed by single molecules", *Physical Review Letters*. **86**, 23 (2001).
- [42] O'Neil, A. and M. J. Padgett, "Axial and lateral trapping efficiency of Laguerre-Gaussian modes in inverted optical tweezers" *Opt. Comm.* **193**, 45-50 (2001).
- [43] Reitz, J. Milford, F. *Foundations of electromagnetic theory*, Addison Wesley, 4th ed. USA
- [44] Rossi, B. *Optics*. Addison-Wesley Pub. Co. USA (1957).
- [45] Stratton, J. *Electromagnetic Theory*, Mc. Graw Hill, USA, 1941.
- [46] Saleh, B. *Fundamentals of Photonics*, John Wiley & Sons, USA, 1991
- [47] Siegman, A. *Lasers*, University Science Books, USA
- [48] N. Simpson, K. Dholakia, L. Allen and M. Padgett, "Mechanical equivalence of spin and orbital angular momentum of light: an optical spanner", *Opt. Lett.* **22**, 1 (1997).
- [49] S. Tidwell, D. Ford, W. Kimura. "Generating radially polarized beams interferometrically". *App. Opt.*, **29**, 15 (1990).
- [50] Tijonov, A. *Ecuaciones de la Física Matemática*, Mir, Moscú, 1983.
- [51] Tipler, P. *Modern Physics*, Freeman & Company, USA, 2000.
- [52] K. Toussaint, S. Park, J. Jureller and N. Scherer, "Generation of optical vector beams with a diffractive optical element interferometer", *Optics Letters*, **30**, 21 (2005).
- [53] Volke Sepúlveda, K. *Light Beams with Angular Momentum and Applications in Optical Tweezers*, Tesis doctoral INAOE, Puebla, Méx.
- [54] K. Volke-Sepúlveda, V. Garcés-Chávez, S. Chávez-Cerda, J. Arlt and K. Dholakia "Optical angular momentum of a high order Bessel light beam" *J. Opt. B: Quantum Semiclass Opt.* **4**, (2002).
- [55] J. Turunen, A. Vasara, A.T. Friberg, "Holographic generation of diffraction-free beams", *Applied Optics*, **27**,3959-3961, (1988).

- [56] S. J. van Enk and G. Nienhuis, "Eigenfunction description of laser beams and orbital angular momentum of light", *Opt. Commun.* **94**, 147-158 (1992).
- [57] A. Vasara, J. Turunen, A. T. Friberg, "Realization of general non diffracting beams with computer-generated holograms". *Journal of the Optical Society of America A*, **6**, 1748-1754, (1989).
- [58] K. Volke Sepúlveda, V. Garces Chavez, S. Chavez Cerda, J. Arlt and K. Dholakia, "Orbital angular momentum of a high order Bessel light beam", *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **4**, (2002).
- [59] M. Padgett, J. Arlt and N. Simpson. "An experiment to observe the intensity and phase structure of Laguerre-Gaussian laser modes", *Am. J. Phys.* **64**, 1 (1996).
- [60] *The photonics design and applications handbook*, 2002
- [61] R. Horák, Z. Bouchal, J. Bajer. "Nondiffracting stationary electromagnetic field", *Optics Communications*, **133**, 315-327 (1997).
- [62] Z. Bouchal and M. Olivik. "Non diffractive vector Bessel beams", *Journal of Modern Optics*, **42**, 8 (1995).