UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES ALGEBRAICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

JAIME LUGO GÓMEZ

Tutor: Dr. Enrique Javier Elizondo Huerta

2006

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

1.-Datos del Alumno ***Lugo*** ***Gómez*** ***Jaime*** ***55987344*** ***Universidad Nacional Autónoma de México*** ***Matemáticas*** ***400068563***
2. Datos del tutor Dr. Enrique Javier Elizondo Huerta
3.Datos del sinodal 1 Dr. Francisco Javier Portillo Bobadilla
4. Datos del sinodal 2 Dr. José Lino Samaniego Mendoza
5. Datos del sinodal 3 Dra. Adriana Ortiz Rodríguez
6. Datos del sinodal 4 M. en C. Victor Alberto Cruz Barriguete

7. Datos del trabajo escrito
Resolución de singularidades algebraicas
73 p
2006

Agradecimientos

A mi madre por que siempre a estado a mi lado y me a otorgado esta ilusión. A mi hermana por su apoyo incondicional, y el haberme apoyado en el momento más dificil. A ambas por su grandeza. A mi padre por darme camino. A mi hermano por ser parte de el. A mi familia por estar con ellos y el poder compartir los senderos de la vida. A la memoria de mis abuelos Guillermo Lugo Sanabria, Elvira Paez, Felix Gómez, y a mi abuela Beatriz Ibarra Paez. A mi amigo Victor Alberto Cruz por su apoyo y conocimiento. A Leonardo Espinosa por su apoya y enseñanza . A Guillermo Figueroa por estar en el momento más dificil. A mis parientes. A Viridiana E. Barragan por haberme mostrado el camino más vello de la vida. A una famila especial Gorge Barragan, Argelia Vidal, Israel Barragan. A los profesores de la Facultad de Ciencias en especial a José Lino Samaniego, Enrique Javier Elizondo, Adriana Ortiz, Francisco Portillo, Osacar Palmas, Eduado Arellano, Santiago López, Alegandro Illanes, Javier Paez, Ana Guzman, Luis Briseño, Alberto García. A los buenos amigos; Leonardo Faustinos, Edgar Ocampo, León Villalobos, Libertad, Yuval Matarazo, Ignacio Gónzales, Rocio del Pilar. A la Fundación UNAM por su apoyo. Gracias.

Índice general

Introducción

Los griegos conocían algunos métodos geométricos para solucionar algunos problemas algebraicos. Pero, la relación entre los puntos de un plano y del espacio con ecuaciones algebraicas se debió a los métodos de coordenadas cartesianas. Tales métodos, aparecieron independientemente con descartes y Femat, progresó la notación algebrica y el cálculo infinitesimal. Nacen así la geometría algebrica y la geometría diferencial.

La geometría algebrica comienza con el estudio de las curvas y supeficies algebricas y sus relaciones, posteriormente aparece el concepto general de variedad algebrica. Descartes definio la noción de curva y la generalizó. La idea de dimensión era intituiva, hasta que Fermat da una nueva notación. Como sabemos la geometría estudia los invariantes de estos objetos. El primer invariante que se conoció fue el de grado. La invarianza del grado de un curva plana al cmabiar de ejes, la conocía Descartes. También en el siglo XVIII, se sabía que el grado de un superficie era invariante bajo un cambio de ejes y bajo cierto tipo de transformaciones lineales.

Euler inició la geometría algebraica, relacionando la la *respresentación parametríca* de una curva con su ecuación cartesiana. La idea general de representación paramétrica de una curva fue idea deBarrow y Newtón. Pero la existenciade tal representación fue dada por Rieman.

Al estudiar las tangentes de una curva, fue inevitable pasar por alto las singularidades de una curva. Al comienzo sólo se les analizó y clasificó, posreriormente, surgió el problema general de la existencia de unmétodo para remover *puntos singulares*. Parallegar a esto, se necesitó la aparación de nuevas herramientas y terminos. Al mismo tiempo,apareció el problema de la evaluación del número de puntos de intersección de dos curvas algebraicas plana de diferentes grados.

A principios de siglo XX, el primero de tratar de ver tales cuestiones, pertenecientes a la Geometría Algebraica, fue Italia. Al comenzar a dar respuestas, se fundamentó y creció la tería de las superficies algebraicas con matemáticos como Castelnuevo, Enriques y Severi. Con tal estudio empezarón a relacionarse herramientas puramenta geométricas, topológicas y analíticas. Se sistematizarón definiciones de algunas ideas como la variedad algebraica. Sin embargo, algunas ideas y conexiones eran intuitivas.

La escuela americana fue la que fundamento firmemente por medio del álgebra, los huecos de la teoría desarrollada por los italianos. Algunos representantes de tal escuela fuerón Chow, Weil y Zariski. Tomarón algunas observaciones sobre curvas algebraicas, hechas por matem'aticos anteriores, como Dedekind y Weber. 'Estos notar'on que para argumentar su teor'ia de las curvas algebraicas, no era necesario usar todas las propiedades topol'ogicas del campo de los n'umeros compljos. basta, con usar su propiedad de ser un campo algebraicamente cerrado y que su caracter'istica era cero.

Ahora el lenguaje común y conocido de la Geometria Algebraica, se debe las técnicas de Álgebra Conmutativa introducidas por Serre y Grothendieck. En el presente, el desarrollo de la Geometría Algebraica es rápido y extenso. Uno de los poblemas que se sigue estudiando es la de remover singularidades.

El objetivo principal de la tesis es mostrar la existencia de un método que permite remover singularidades de curvas algebraicas sobre superficies suaves. También, busca explicare el comportamiento de tal método, que es un caso particular del Teorema de Hironaka. Por tanto se dan resultados que permitan la mejor comprensión de la demostracón del teorema, la cual involucra una parte considerable de la estructura moderna de la geometría algebraica. El teorema es indispensable para la Geometría birracional de superficies no singulares, que nos da una correspondencia birracional entre una curva de singularidades y una curva suave. La tesis se divide en cinco partes.

En el primer y segundo capítulos están los conceptos principales que permiten comprención de la tesis,como variedades afines y proyectivas. Se dan algunas definiciones como: singularidades, espacio tangente, anillo coordenado, entre otros. Algunos de los resultados de esta parte pertenecen al Álgebra Conmutativa, y otros son productos de tales resultados.

El capítulo tres trata de las aplicaciones entre variedades y el productoentre variedades afines.

El capítulo cuatro introduce la idea de explosiones. Se acompaña con algunos ejemplos, para familiarizar al lector con esta herramienta, pues es el instrumento principal para remover singularidaes de una curva.

El ultimo capítulo plantea el problema de resolución de singularidades de curvas algebraicas sobre superficies suaves. Siendo esto un caso particular del problema dado por H. Hironaka en *Resolution of singularities of algebraic varieti over a field of characteristic 0*. Se realizara un análisis cuidadoso, con el fin de obtener una mejor comprensión del método de desingularizar curvas.

Preliminares

En esta parte se darán la notación y resultados de álgebra conmutativa, así como otras nociones básicas para el desarrollo del trabajo.

Al referirnos a *anillos*, estaremos pensando en anillos conmutativos con unidad. Una aplicación entre anillos será un *homomorfismo* de anillos. Un *campo* es un anillo conmutativo en el que cada elemento distinto de cero, posee inverso respecto a la multiplicación.

Un dominio entero R posee un *campo de cocientes* K. Este es un campo que contiene a R como *subanillo*, y todo elemento de K se puede escribir (no necesariamente de forma única) como cociente de dos elementos de R. Todo homomorfismo inyectivo, de R en un campo L, se extiende de modo único a un homomorfismo de K en L (Véase [7]).

Para todo anillo R, denotamos $R[X]$ al *anillo de polinomios con coeficientes en* R. El *grado* de un polinomio $\sum a_i X^i \in R[X]$ es el mayor entero d tal que $a_d \neq 0$; el polinomio se llama *mónico* si $a_d = 1$.

El anillo de polinomios en n variables sobre R se designa por $R[X_1, ..., X_n]$. Los monomios de $R[X_1, ..., X_n]$ son las expresiones $X_1^{i_1} X_2^{i_2}, ..., X_n^{i_n}$, con i_j enteros no negativos; el grado del monomio es $i_1 + i_2 + ... + i_n$. F es *homogéneo, o una forma*, de *grado* d, si todos los monomios son de grado d. Todo polinomio F tiene expresión única de la forma $F = F_0 + ... + F_d$, donde F_i es una forma de grado i; si $F_d \neq 0$, d es el grado de F.

Un elemento a de un anillo R se llama *irreducible* si es de la forma $a = bc$, $b, c \in R$, con b o c unidades. Un dominio entero R es un *anillo de factorización única*, si todo elemento no nulo de R se descompone de manera única en producto de elementos irreducibles salvo unidades y el orden de los factores. Si R es un dominio de factorización única con un campo de fracciones K, entonces un elemento irreducible $F \in R[X]$ permanece irreducible en $K[X]$; de ello se sigue que si F y G son polinomios de $R[X]$ sin divisores comunes, entonces tampoco tienen divisores comunes en $K[X]$ (Véase[7]). Si R es un dominio de factorización única, entonces $k[X_1, ..., X_n]$ es un dominio de factorización única para cualquier campo k. El campo de fracciones de $k[X_1, ..., X_n]$ se indica por $k(X_1, ..., X_n)$ y se llama *campo de funciones racionales de n variables sobre k.*

Un ideal I de un anillo R es *propio* si $I \neq R$. Un ideal propio es *máximo* si no está contenido en ningún otro ideal propio distinto de él. Un ideal *primo* es un ideal I tal que si

$ab \in I$ entonces $a \in I$ o $b \in I$.

Un conjunto S de elementos de un anillo R genera el ideal $I = \{\sum a_i s_i \mid s_i \in S, a_i \in R\}$. Un ideal es de *generación finita* si está generado por un conjunto finito S si. Dicho ideal se denota $I = (f_1, \ldots, f_n)$. Un ideal es *principal* si está generado por un sólo elemento. Un ideal principal $I = (a)$ en un dominio de factorización única, es primo si y sólo si a es irreducible.

Sea I un ideal en un anillo R. El *anillo cociente* de R módulo I, designado por R/I, es el conjunto de las clases de equivalencia de los elementos de R con la relación de equivalencia dada por $a \sim b$ si: $a - b \in I$. La I-clase residual de a es la clase que contiene al elemento a; tambien se le designa por $\bar{a}$. La función $\pi\colon R \to R/I$ que manda cada elemento de R en su I-clase residual, es un homomorfismo de anillos.

Un ideal propio I de R es primo si y sólo si R/I es un dominio entero; y es máximo si y sólo si R/I es un campo. Observemos que todo ideal máximal es primo. (Véase [7])

Sea k un campo, e I un ideal propio en $k[X]$. El homomorfismo $\pi\colon k[X] \to k[X]/I$ se restringe a un homomorfismo de k en $k[X]/I$. Entonces k es un subanillo de $k[X]/I$; en particular $k[X]/I$ es un espacio vectorial sobre k (Véase[7]).

Sea R un anillo, $a \in R$, $F \in R[X]$, y a es una raíz de F, entonces $F(X) = (X - a)G$ con $G \in R[X]$. Un campo k es *algebraicamente cerrado* si cualquier $F \in k[X]$, no constante, tiene una raíz en k. Se tiene entonces que $F = \mu \prod (X - \lambda_i)^{e_i}$ con $\mu, \lambda_i \in k$, donde las λ_i son las distintas raíces de F, y e_i es la *multiplicidad* de la raíz λ_i. Un polinomio de grado d tiene d raíces en k, contando sus multiplicidades.

Definición 1. Un anillo se llama *noetheriano* o de *Noether* si todo ideal del anillo es de generación finita.

Los campos y los dominios de ideales principales son anillos noetherianos.

Definición 2. Si R es un dominio entero, llamaremos al anillo de las *series formales de potencias* con n variables $X_1, ..., X_n$ sobre R al conjunto $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ formado por todas las sucesiones $\{F_m\}_{m=0}^{\infty}$ en $R[X_1, \ldots, X_n]$ tales que F_m es una forma de grado m. Observamos que $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ adquiere estructura de anillo conmutativo con unidad con las operaciones dadas por;

$$\sum_{m=0}^{\infty} F_m + \sum_{m=0}^{\infty} G_m = \sum_{m=0}^{\infty} (F_m + G_m)$$

$$(\sum_{m=0}^{\infty} F_m)(\sum_{m=0}^{\infty} G_m) = \sum_{m=0}^{\infty} (\sum_{m=i+j} F_i G_j).$$

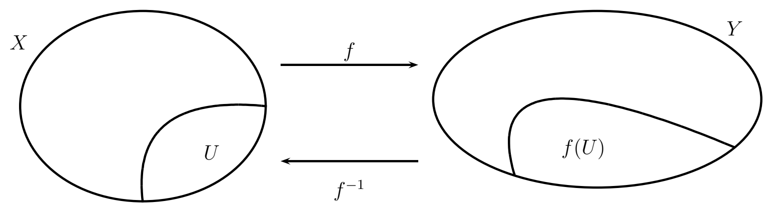
$$\sum_{i_1+...+i_n=0}^{\infty} a_{i_1,...,i_n} X_1^{i_1}...X_n^{i_n}$$

Definición 3. Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice que es *continua* si para cada subconjunto abierto U de Y, el conjunto $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de X.

Definición 4. Sean X y Y espacios topológicos; y $f : X \longrightarrow Y$ una biyección. Si la función f y la función inversa

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X$$

son ambas continuas, entonces se dice que f es un *homeomorfismo*.



Un homeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ proporciona una correspondencia biyectiva, no sólo entre X y Y, sino entre las colecciones de conjuntos abiertos de X y de Y.

Definición 5. Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Diremos que X es una *variedad n-dimensional* si para cada $a \in X$, existe una vecindad U abierta de a homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $\phi : U \longrightarrow W$ es el homeomorfismo, donde W es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces la pareja (U, ϕ) es llamada *una carta*. Al conjunto de cartas, $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ tal que $X = \cup_{i \in I} U_i$, donde I es un conjunto de índices, se llama un *atlas* para X.

Definición 6. Sea ϕ una función con valores complejos definida en un conjunto abierto $W \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que $\phi \colon W \to \mathbb{C}$ es *holomorfa* sobre W si para toda $a \in W$, existe una vecindad U de a, $U \subset W$, y una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 0}$ de números complejos tales que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

converge a $f(z)$ para cada $z \in U$.

Sean U y U' son subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}^n$. Definimos una aplicación *bi-holomorfa* de U a U' como una aplicación holomorfa con una inversa holomorfa.

Definición 7. Sea $W \subset \mathbb{C}$ un abierto. Denotamos $\mathcal{H}(W)$ el conjunto de *funciones holomorfas* sobre W.

Obs: El conjunto $\mathcal{H}(W)$ es una $\mathbb{C}$-álgebra (Ref[]). Sea $a \in \mathbb{C}$. Consideremos el conjunto de parejas (U, f) donde U es un abierto que contiene a a y $f \in \mathcal{H}(U)$. Decimos que $(U, f) \sim (V, g)$ si existe W vecindad de a con $W \subset U \cap V$ y tal que $f|_W = g|_W$. Es claro que $\sim$ es una relación de equivalencia. Una clase de equivalencia obtenida por esta relación se llama un *germen de función holomorfa en* a y se denota por f_a. Denotamos por $\mathcal{O}_a$ al conjunto de todos los gérmenes en a. Si $f_a \in \mathcal{O}_a$, definimos $f_a(a)$, como $f_a(a) = f(a)$, tomando a f como representante de f_a.

De la definición de relación de equivalencia, este valor no depende del representante de f_a. De la misma forma definimos los valores en a de la k-ésima derivada de f_a como $f_a^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, donde f es un representante de f_a.

Definición 8. Consideremos $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección numerable de espacios métricos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $f_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ una función de X_{n+1} en X_n. La sucesión $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ de espacios y funciones es llamada una *sucesión inversa*.

Definición 9. El *límite inverso* de una sucesión inversa $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ es el subespacio del espacio producto $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ definido como

$$X_\infty = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\} = \Big\{ \{x_n\} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \ \mid \ f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n \Big\}.$$

Capítulo 1

Variedades Afines

En el presente capítulo se darán los conceptos de variedad afín, espacio tangente de Zariski, dimensión de una variedad, punto suave, punto singular, anillo de coordenadas, anillo local de una variedad en un punto, espacio tangente y dimensión de una variedad. Tambien se darán algunos ejemplos.

Definición 10. Un *conjunto algebraico cerrado* X en $\mathbb{C}^n$ es el conjunto de ceros de un número finito de polinomios $f_1, ..., f_m$, es decir, el conjunto de todas las $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ tal es que $f_i(x) = 0$ para todo i, con $1 \leq i \leq m$. Denotamos a X por $V(f_1, ..., f_m)$.

Si $\mathcal{U} = (f_1, ..., f_m)$ es un ideal en el anillo de polinomios $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ entonces el conjunto de ceros de toda f_i es también el conjunto de ceros de toda $g \in \mathcal{U}$, donde $g = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i$ con $a_i \in \mathbb{C}$. Denotamos a X también por $V(\mathcal{U})$.

Proposición 1.

1. Si $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$ entonces $V(\mathcal{U}_1) \supseteq V(\mathcal{U}_2)$.

2. $V(\mathcal{U}_1) \cup V(\mathcal{U}_2) = V(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) = V(\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2)$.

3. $V(\sum_{\alpha\in I} \mathcal{U}_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I} V(\mathcal{U}_\alpha)$.

4. Si $\mathcal{M}_x$ es el ideal maximal $(X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n)$, entonces $V(\mathcal{M}_x) = \{x\}$.

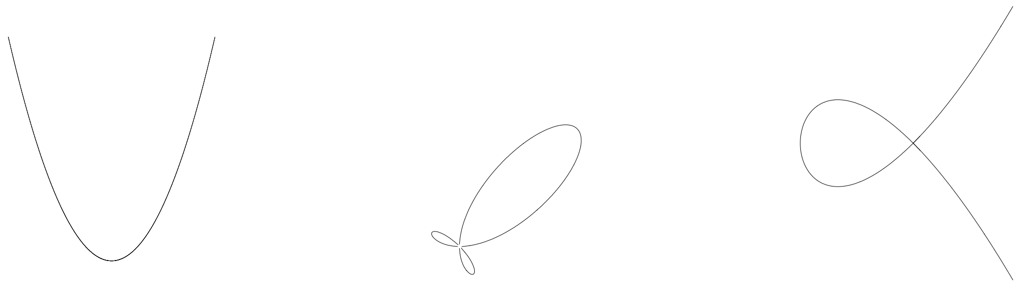
5. Si $\sqrt{\mathcal{U}} = \{f \in \mathbb{C}[X] \mid f^m \in \mathcal{U}$, para alguna $m \geq 1\}$ es el radical de $\mathcal{U}$, entonces
$$V(\sqrt{\mathcal{U}}) = V(\mathcal{U}).$$

Definición 11. Una *variedad afín* es un conjunto algebraico cerrado $V(\mathcal{B})$ de $\mathbb{C}^n$ si $\mathcal{B}$ es un ideal primo.

Ejemplo 1. 1. El espacio $\mathbb{C}^n$, el conjunto vacio; y un punto, son ejemplos de variedades algebraicas afines.

$$V(0) = \mathbb{C}^n$$
$$V(1) = \emptyset$$
$$V(X_1 - a_1, ..., X_n - a_n) = \{(a_1, ..., a_n)\}.$$

2. Una curva plana afín es el conjunto de ceros de un polinomio complejo no constante en el plano complejo $\mathbb{C}^2$, como se muestra en las siguientes figuras.



(a) $V(y - x^2)$ (b) $V(x^2y + xy^2 - x^4 - y^4)$ (c) $V(y^2 - x^2 - x^3)$

Figura 1.1: Tres ejemplos de gráficas

3. El conjunto de ceros de un polinomio en $\mathbb{C}^n$ es una hpersuperficie. El cono cuadrático es un típico ejemplo de una hipersuperficie.

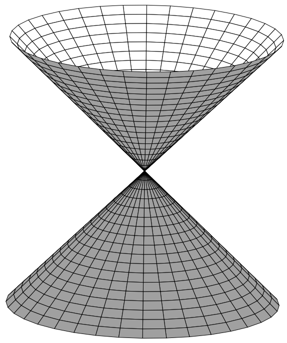


Figura 1.2: $V(x^2 + y^2 - z^2)$

4. Un hiperplano afín es el conjunto de los ceros de un polinomio lineal en $\mathbb{C}^n$.
Una variedad algebraica lineal afín es el conjunto de los ceros de una colección de polinomios lineales de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n - b$$

en $\mathbb{C}^n$. Si k hiperplanos son linealmente independientes, la variedad lineal es un espacio complejo de dimensión $n-k$.

5. El conjunto de todas las matrices de $n \times n$ puede ser identificado con el conjunto $\mathbb{C}^{n^2}$. Este espacio contiene algunas familias de objetos como variedades algebraicas afines. Por ejemplo, el subconjunto $SL(n,\mathbb{C})$ de matrices con determinante 1, forma una variedad algebraica afín en $\mathbb{C}^{n^2}$. En efecto la hipersuperficie definida por la eciación $\Delta - 1 = 0$, donde Δ denota el determinante

$$\Delta(x_{ij}) = \det \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

el cual es un polinomio en las n^2 variables x_{ij}, es una variedad algebraica afín

Definición 12. Se llama *topología de Zariski* a la topología cuyos cerrados son los conjuntos algebraicos

Como consecuencia de (2) y (3) de la Proposición 1 los subconjuntos $V(\mathcal{U})$ de $\mathbb{C}$ de $\mathbb{C}$ satisfacen la definición de está topología.

Los conceptos topológicos en esta tesis siempre se referirán a la topología de Zariski.

Ahora pasemos a las demostraciones de la Proposición 1.

Demostración.

1. Sea $x \in V(\mathcal{U}_2)$, esto implica que $f(x) = 0$ para toda $f \in \mathcal{U}_2$. Como $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$ entonces $f(x) = 0$ para $f \in \mathcal{U}_1$ lo cual implica que $x \in V(\mathcal{U}_1)$ por lo tanto $V(\mathcal{U}_2) \subseteq V(\mathcal{U}_1)$.

2. Sea $x \in V(\mathcal{U}_1) \cup V(\mathcal{U}_2)$ si y sólo si $f(x) = 0$ para toda $x \in V(\mathcal{U}_1)$ y para toda $x \in V(\mathcal{U}_2)$ equivalentemente $f \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ es decir $x \in V(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$.
Ahora demostraremos que $V(\mathcal{U}_1) \cup V(\mathcal{U}_2) = V(\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2)$ como $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son ideales tenemos que $\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1$ y también $\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_2$, entonces

$$V(\mathcal{U}_2) \subseteq V(\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2),$$
$$V(\mathcal{U}_1) \subseteq V(\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2),$$

y tomando la unión de conjuntos tenemos que $V(\mathcal{U}_2) \cup V(\mathcal{U}_1) \subseteq V(\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2)$.
Ahora si $x \in V(\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2)$, esto implica que existen f, g en $\mathcal{U}_1\,\mathcal{U}_2$ tal que $fg \in \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2$,

$fg(x) = 0$, pues $x \in V(\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2)$, $f(x)g(x) = 0$. Así $f(x) = 0$ o $g(x) = 0$, si $f(x) = 0$ tenemos que $x \in V(\mathcal{U}_1)$ análogamente para $g(x)$, entonces $x \in V(\mathcal{U}_1) \cup V(\mathcal{U}_2)$ con lo que podemos decir que

$$V(\mathcal{U}_1) \cup V(\mathcal{U}_2) = V(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) = V(\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2).$$

3. Como $V(\sum_{\alpha\in I}\mathcal{U}_\alpha) = V(\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{U}_\alpha)$. Sea $x \in V(\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{U}_\alpha)$ si y sólo si $f(x) = 0$ para toda $f \in \mathcal{U}_\alpha$, $\alpha \in \{1,\ldots\}$. Entonces $x \in V(\mathcal{U}_\alpha)$ para toda α, es decir $x \in \bigcap_{\alpha\in I} V(\mathcal{U}_\alpha)$.

4. Tenemos que $\mathcal{M}_x$ es ideal maximal, entonces $k[X_1, ..., X_n]/\mathcal{M}_x = L$ es un campo así:

$$k[X_1,\ldots,X_n] \xrightarrow{\pi} L$$
$$f \to f + \mathcal{M}_x$$

donde π es inyectiva

Ya que L es el cociente, donde L es una extensión del campo k. Como k es algebraicamente cerrado, π es suprayectiva, entonces $L = k$ así tenemos la siguiente relación

$$\begin{gathered} a_1 \to x_1 + \mathcal{M}_x \\ \vdots \\ a_n \to x_n + \mathcal{M}_x \end{gathered}$$

donde

$$\begin{gathered} a_1 + \mathcal{M}_x = x_1 + \mathcal{M}_x \\ \vdots \\ a_n + \mathcal{M}_x = x_n + \mathcal{M}_x. \end{gathered}$$

Esto implica que $(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n) \in \mathcal{M}_x$, pero $(X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$ es maximal. Por lo tanto $\mathcal{M}_x = (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$. Así

$$\begin{aligned} V(\mathcal{M}_x) &= V(X_1 - a_1, ..., X_n - a_n) \\ &= \{(a_1, ..., a_n)\} \\ &= \{x\}. \end{aligned}$$

5. Sea $x \in V(\mathcal{U})$ entonces $f(x) = 0$ para toda $f \in \mathcal{U}$, así para toda $m > 0$ implica que $f^m(x) = 0$. Es decir $f^m \in \mathcal{U}$ y por lo tanto $x \in V(\sqrt{\mathcal{U}})$.

Ahora consideremos $f \in V(\sqrt{\mathcal{U}})$ por lo que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m \in \mathcal{U}$ entonces $f^m(x) = 0$, para toda $x \in V(\sqrt{\mathcal{U}})$. Lo cual nos lleva a que.

$$V(\sqrt{\mathcal{U}}) = V(\mathcal{U}).$$

□

Ejemplo 2. Si $f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ es un polinomio irreducible, entonces el ideal principal (f) es un ideal primo, de aquí tenemos que $V(f)$ es una *variedad afín*. Tales variedades son llamadas *hipersuperficies afines*.

Ejemplo 3. Sean $g_2, \ldots, g_n \in \mathbb{C}[X_1]$ polinomios. Consideremos el conjunto

$$X = \{(a, g_2(a), \ldots, g_n(a)) |\, a \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^n.$$

Entonces $X = V(X_2 - g_2(X_1), \ldots, X_n - g_n(X_1))$. El ideal $\mathcal{U} = (X_2 - g_2, \ldots, X_n - g_n)$ es primo ya que es el núcleo del homomorfismo

$$\begin{gathered}\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] \to \mathbb{C}[X_1]\\ X_1 \mapsto X_1\\ X_i \mapsto g_i(X_1),\ i \geq 2.\end{gathered}$$

Por lo tanto X es una variedad afín y se le conoce como *curva racional*.

Definición 13. Sea $k \subset \mathbb{C}$ un subcampo y $\mathcal{B}$ un ideal primo. Un *punto k-genérico* $x \in V(\mathcal{B})$ es un punto tal que todo polinomio $f(X_1, \ldots, X_n)$ con coeficientes en k que se anula en x está en el ideal $\mathcal{B}$, de aquí que se anula en todo $X = V(\mathcal{B})$.

Ejemplo 4. En el ejemplo 3, si los coeficiente de g_i son racionales, se tiene que el punto $(\pi, g_2(\pi), \ldots, g_n(\pi))$ es un punto $\mathbb{Q}$-genérico de la curva racional.

Proposición 2. Si $\mathbb{C}$ tiene grado de trascendencia infinito sobre k, entonces cualquier variedad $V(\mathcal{B})$ tiene un punto k-genérico.

Demostración. Sean $f_1, \ldots, f_m$ generadores de $\mathcal{B}$. Podríamos aumentarle a k los coeficientes de todas las f_i. Sean $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \cap k[X_1, \ldots, X_n]$, y $k[X_1, ..., X_n]/\mathcal{B}_0 = L$ el campo de cocientes. Así, tenemos que L es una extensión de k de grado de trascendencia finita. Y cualquier campo es isomorfo a un subcampo de $\mathbb{C}$, es decir, existe un monomorfismo ϕ tal que

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d, "\phi"] \\ k \arrow[r] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Si $\bar{X}_i$ es la imagen de X_i en L y $a_i = \phi(\bar{X}_i)$, entonces afirmamos que $a = (a_1, \ldots, a_n)$ es un punto k-genérico. Es decir, $f_i \in \mathcal{B}_0$, $1 \leq i \leq m$. Así, $f_i(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n) = 0$ en L. Por lo tanto $f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0$ en $\mathbb{C}$ y $a = (a_1, ..., a_n)$ es un punto de X. Pero si $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ y $f \notin \mathcal{B}$, entonces $f \notin \mathcal{B}_0$, de aquí $f(X_1, \ldots, X_n) \neq 0$ en L. Por lo tanto $f(a_1, \ldots, a_n) = \phi(f(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n)) \neq 0$ en $\mathbb{C}$. □

Teorema 1 (De los ceros de Hilbert). Sea $\mathcal{B}$ un ideal primo, entonces $\mathcal{B}$ es precisamente el ideal de los polinomios $f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ que se anulan sobre $V(\mathcal{B})$, es decir, $\mathcal{B} = I(V(\mathcal{B}))$. Más generalmente, si $\mathcal{U}$ es cualquier ideal, entonces $\sqrt{\mathcal{U}} = I(V(\mathcal{U}))$.

Demostración. Tomemos una $f \in \mathbb{C}[X]$, y consideremos un campo k finitamente generado sobre $\mathbb{Q}$ que contenga a los coeficientes de f y sea $a \in V(\mathcal{B})$ un punto k-genérico. Si $f \notin \mathcal{B}$, entonces $f(a) \neq 0$. Así, f no es idénticamente nula en $V(\mathcal{B})$; la segunda afirmación se reduce a la primera.

Corolario 1. Existe una biyección entre el conjunto de ideales $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{U} = \sqrt{\mathcal{U}}$ y los subconjuntos algebraicos $X \subset \mathbb{C}$ dados por $\mathcal{U} \longrightarrow V(\mathcal{U})$ y $X \longrightarrow I(X)$. En esta biyección, las variedades afines corresponden a ideales primos y son precisamente los conjuntos algebraicos cerrados que son irreducibles.

Corolario 2. Si $X = V(\mathcal{B})$ es una variedad afín, el anillo $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/\mathcal{B}$ es canónicamente isomorfo a el anillo de funciones algebraicas $X \longrightarrow \mathbb{C}$ los cuales son restricciones de polinomios, a la variedad.

Definición 14. Este anillo es llamado el anillo coordenado afín de X y se denota por R_X.
Entenderemos anillo afín por anillo coordenado afín.

1.1. Espacio Tangente y Anillo Coordenado

Nuestro principal objetivo en esta sección es tener una primera idea de la estructura de variedades afines. Entonces, como las variedades más simples son las lineales, es útil tratar de aproximar localmente una variedad en general con una línea. De aquí que daremos las siguientes definiciones.

Definición 15. Sean $X = V(\mathcal{B})$ una variedad afín y $a = (a_1, \ldots, a_n) \in X$. El *espacio tangente de Zariski* a X en a es el subespacio lineal de $\mathbb{C}^n$ generado por

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(a)(X_i - a_i) = 0$$

para todo $f \in \mathcal{B}$.
Denotemos este espacio por $T_{a,X}$. Notemos que para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$\{a \in X | \dim T_{X,a} \geq k\}$$

es un subconjunto cerrado de Zariski de X.
Si $f_1, \ldots, f_l$ son generadores de $\mathcal{B}$

$$\dim T_{X,a} = n - \text{rango} \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq n}}$$

de aquí

$$\{a \in X | \dim T_{X,a} \geq k\}$$

es igual a

$$V\left(\mathcal{B} + \text{ideal de } (n-k+1) \times (n-k+1) \text{ de los menores de } \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)\right).$$

Más precisamente, podemos decir que $\dim T_{X,a}$ es una función semicontinua por arriba en la topología de Zariki.
En el estudio de las variedades, necesitamos tener alguna forma de ver las cosas de una manera más local, y para esto daremos la siguiente definición.

Definición 16. Definimos el *anillo local* $a \in X$, denotado por $\mathcal{O}_{a,X}$ como el conjunto de todas las funciones racionales sobre X que están definidas en a.

Definición 17. Si $X = V(\mathcal{B}) \subset \mathbb{C}^n$ es una variedad afín y $a \in X$, entonces tenemos que las siguientes definiciones son equivalentes para el *anillo local* $\mathcal{O}_{a,X}$ de X en a.

- El anillo de funciones racionales $\frac{f(X_1,\ldots,X_n)}{g(X_1,\ldots,X_n)}$ con $g(a) \neq 0$ módulo las $f \in \mathcal{B}$.
- La localización R_X con respecto al conjunto multiplicativo $\{g | g(a) \neq 0\}$.
- El anillo de gérmenes de funciones $f : U \to \mathbb{C}$, donde U es una vecindad de Zariski de a en X, definida por funciones racionales f/g, donde $g(a) \neq 0$.

Observemos que $\mathcal{O}_{a,X}$ es un anillo, y que el conjunto de funciones f/g que se anulan en a forman un ideal máximo, cualquier f/g que no es cero en a es invertible, es decir, $g/f \in \mathcal{O}_{a,X}$.

Ahora, R_X y todos los anillos locales $\mathcal{O}_{x,X}$ tienen el mismo campo de cocientes, el cual se denota por $\mathbb{C}(X)$ y se llama *campo de funciones racionales de* X.

Un hecho importante es que el anillo local $\mathcal{O}_{x,X}$ determina el anillo coordenado afín R_X.

Proposición 3. Tenemos que

$$R_X = \bigcap_{x \in X} \mathcal{O}_{x,X}.$$

Demostración. Como $R_X \subseteq \bigcap_{x\in X} \mathcal{O}_{x,X}$ pues la intersección de $\mathcal{O}_{x,X}$ es la más pequeña de los anillos locales.
Veámos que $\bigcap_{x\in X} \mathcal{O}_{x,X} \subseteq R_X$. Sea $f \in \mathcal{O}_{x,X}$ para toda $x \in X$. Consideremos el ideal en $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ definido por:

$$\mathcal{U} = \{g \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n] \mid \text{si } \bar{g} = (g \bmod \mathcal{B}) \in R_X, \, \bar{g}f \in R_X\}.$$

Como $f \in \mathcal{O}_{x,X}$ tenemos la forma $f = h_x/g_x$, donde, $h_x, g_x \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, $g_x(x) \neq 0$. Así, $g_x \in \mathcal{U}$. De aquí que $x \notin V(\mathcal{U})$ para toda $x \in X$. Como, $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$, tenemos que

$V(\mathcal{B}) \supset V(\mathcal{U}) = X$ por lo tanto $V(\mathcal{U}) = \emptyset$. Pero por el Teorema 1, tenemos que el $1 \in I(V(\mathcal{U})) = \sqrt{\mathcal{U}}$. Entonces $1 \in \mathcal{U}$ y por lo tanto $f \in R_X$. Así se sigue la afirmación. $\square$

1.2. Dimensión de una Variedad Afín y Puntos Singulares

Definición 18. Definimos la *dimensión de una variedad afín* X como

$$\dim X := \min(\dim T_{X,a}).$$

Definición 19. Un punto $a \in X$ es llamado un *punto suave de* X si $\dim X = \dim T_{X,a}$. Es *singular* si $\dim T_{X,a} > \dim X$. Denotamos $\operatorname{Sing}(X)$ como el conjunto de puntos singulares de X.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 5. Consideremos la curva cúbica X definida por $X_1^2 = X_2^3$ en $\mathbb{C}^2$. Éste es el lugar de los puntos $(a^3, a^2), a \in \mathbb{C}$. Entonces la $\dim \mathrm{X} = 1$. También:

1. $T_{X,(0,0)} = \mathbb{C}^2$, de aquí que $(0,0)$ es un punto singular.

2. Si $a \neq 0, T_{X,(a^3,a^2)}$, es la línea definida por $2(X_1 - a^3) = 3a(X_2 - a^2)$ entonces (a^3, a^2) es un punto suave.

Lema 1. Sea R un dominio entero sobre un campo k y $\mathcal{B} \subset R$ un ideal primo. Entonces el grado de trascendencia de R es mayor o igual que el grado de trascendencia de $R/\mathcal{B}$ sobre k y son iguales si $\mathcal{B} = \{0\}$ o ambos son infinitos.

Demostración. Sea $\mathcal{B} \neq 0$, y el grado de trascendencia de R es $n \leq \infty$. Si la conclusión es falsa, existen n elementos $x_1, \ldots, x_n$ en R tal que sus imágenes $\bar{x}_i$ en $R/\mathcal{B}$ son *algebraicamente independientes.* Sea $p \in \mathcal{B}$, tal que $p \neq 0$, entonces $p, x_1, \ldots, x_n$ no puede ser algebraicamente independientes sobre k, entonces existe un polinomio $P(Y, X_1, \ldots, X_n)$ sobre k tal que $P(p, x_1, \ldots, x_n) = 0$. Como R es un dominio entero. Así, podemos decir que P es irreducible. El polinomio P no puede ser igual a αY, con $\alpha \in k$ y por lo tanto $p \neq 0$. De esta manera, P no es un múltiplo de Y. Pero entonces $P(0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = 0$ que está en $R/\mathcal{B}$ no es una relación trivial sobre los $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$. $\square$

Como consecuencia, cada variedad afín X tiene una descomposición en conjuntos localmente cerrados suaves. Es decir, cada elemento de la descomposición es abierto en su cerradura. Equivalentemente, es la intersección de un abierto y un cerrado de X.
Construimos esta descomposición de la siguiente forma.

1. Sea U un conjunto abierto de Zariski de puntos suaves, entonces $X \setminus U$ es un cerrado.

2. Descompongamos $X \setminus U$ en las componentes:

$$X \setminus U = X_1^{(1)} \cup ... \cup X_k^{(1)}.$$

Donde cada $X_i^{(1)}$ es una variedad de menor dimensión que X. Sean $U_i^{(1)}$ los conjuntos abiertos de Zariski en $X_i^{(1)}$ de puntos suaves en $X_i^{(1)}$ (aun que singulares sobre X).

3. Descomponiendo $X \setminus (U \cup U_1^{(1)} \cup ... \cup U_k^{(1)})$ en las componentes

$$X \setminus (U \cup U_1^{(1)} \cup ... \cup U_k^{(1)}) = X_1^{(2)}, ..., X_l^{(2)}.$$

Cada $X_i^{(2)}$ es una subvariedad afín propia de un $X_j^{(1)}$ de aquí tiene dimensión a lo más $\dim X - 2$. Sean $U_i^{(2)}$ conjuntos abiertos de Zariski en $X_i^{(2)}$ de puntos suaves en $X_i^{(2)}$. Como la dimensión es un entero positivo, el proceso termina y tenemos a X escrito como la unión finita de subvariedades suaves localmente cerradas.
Así tenemos que cada variedad irreducible $(n-1)$-dimensional $X \subset \mathbb{C}^n$ es una hipersuperficie, es decir, se tiene que $X = V(f)$, con f irreducible. De hecho tomamos alguna g distinta de cero que se anule en X, y escribimos $g = \prod g_i$, donde cada g_i es irreducible. Entonces

$$X \subset \cup V(g_i),$$

como X es irreducible, $X \subset V(g_i)$, para algún i. Pero

$$\dim X = n - 1 = \dim V(g_i), \text{ entonces}$$

$$X = V(g_i).$$

Proposición 4. Si X es una subvariedad afín propia de Y, entonces $\dim X < \dim Y$.

(omitiremos su prueba véase [1]). A continuación daremos un procedimiento simple para construir una variedad afín con un punto suave en el origen.

1.3. Construcción de una Variedad con un Punto Suave en el Origen

Teorema 2. Sean $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ polinomios sin termino constante y términos lineales independientes. Entonces

$$\mathcal{B} = \left\{ g \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] | g = \sum \frac{h_i}{k} f_i,\ h_i, k \in \mathbb{C}[X],\ k(0) \neq 0 \right\}$$

es un ideal primo en $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, $X = V(\mathcal{B})$ que tiene dimensión $n - r$ y el origen es un punto suave de X. Más aún, se tiene que $V(f_1, \ldots, f_r) = X \cup Y$ donde Y es un conjunto algebraico cerrado y el $0 \notin Y$.

Demostración. El punto central de la prueba consiste en observar la relación entre los siguientes tres anillos:

$$\mathbb{C}[X_1,...,X_n] \subset \mathbb{C}[X_1,...,X_n]_{(x_1,...,x_n)} \subset \mathbb{C}[[X_1,...,X_n]],$$

donde $\mathbb{C}[X_1,...,X_n] = R_{\mathbb{C}^n}$, $\mathbb{C}[X_1,...,X_n]_{(x_1,...,x_n)}$ es el anillo local del origen en $\mathbb{C}^n$ denotado por $\mathcal{O}_{0,\mathbb{C}^n}$ y $\mathbb{C}[[X_1,...,X_n]]$ es el anillo de series formales de potencias en $X_1,...,X_n$. $R_{\mathbb{C}^n}$ está determinado por $\mathcal{O}_{0,\mathbb{C}^n}$. Así, tenemos la primera contención. La segunda es una consecuencia de la expansión

$$\left(1-\sum X_i a_i\right)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum X_i a_i\right)^n$$

para toda $a_i \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$.

De aquí que en cada uno de estos anillos cualquier elemento f puede ser extendido de manera única como

$$f = \sum_{|\alpha|<k} c_\alpha X^\alpha + \text{residuo R},$$

donde $c_\alpha \in \mathbb{C}$ y R pertenece al ideal generado por los monomios X^α con$|\alpha| = k$.

Ahora, sean $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ los ideales generados por $f_1,\dots,f_r$ en $\mathbb{C}[X]_{(X)}$ y $\mathbb{C}[[X]]$ respectivamente. Notemos que el ideal $\mathcal{B}$ en el Teorema 2 es por definición $\mathcal{B}'\cap\mathbb{C}[X]$, de aquí, si $\mathcal{B}'$ es primo también $\mathcal{B}$ lo es. Mostraremos que

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}''\cap\mathbb{C}[X]_{(X)}. \tag{1.1}$$

Si $\mathcal{B}''$ es primo, también lo son $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}$.

Pero

$$\mathcal{B}''\cap\mathbb{C}[X]_{(X)} = \{g\in\mathbb{C}[X]_{(X)} | g = \sum h_i f_i,\ h_i\in\mathbb{C}[[X]]\},$$

entonces

$$\mathcal{B}''\cap\mathbb{C}[X]_{(X)} \subset \bigcap_{N=1}^{\infty}\{g\in\mathbb{C}[X]_{(X)} | g = \sum h_i f_i + L\}$$

donde L son los residuos que se anulan de orden mayor que N para alguna $h_i\in\mathbb{C}[X]$ de grado $\leq N$, por lo tanto

$$\mathcal{B}''\cap\mathbb{C}[X]_{(X)} = \bigcap_{N=1}^{\infty}\left(\mathcal{B}' + (X_1,\dots,X_n)^N\mathbb{C}[X]_{(X)}\right).$$

Ahora consideremos el siguiente teorema que se debe a Krull.

Teorema 3 (Krull). Sean R un anillo de Noether y $\mathcal{M}$ un ideal de R. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{M}^n = 0$ si y sólo si ningún elemento de la forma $1-\pi$ con $\pi\in\mathcal{M}$ es divisor de cero en R.

El Teorema 3 afirma que si R es cualquier anillo local de Noether con ideal maximal $\mathcal{M}$, y si $\mathcal{U}$ es cualquier ideal, entonces $\mathcal{U}$ es cerrado en la topología $\mathcal{M}$-ádica, es decir,

$$\mathcal{U} = \bigcap_{N=1}^{\infty} \left(\mathcal{U} + \mathcal{M}^N\right).$$

En nuestro caso tomamos $R = \mathbb{C}[X]_{(X)}$ y $\mathcal{U} = \mathcal{B}'$ tal que:

$$\mathcal{B}' = \bigcap_{N=1}^{\infty} \left(\mathcal{B}' + (X_1, \ldots, X_n)^N \mathbb{C}[X]_{(X)}\right)$$

esto prueba la igualdad (1.1).

□

Para probar que $\mathcal{B}''$ es primo usaremos el siguiente teorema.

Teorema 4 (Teorema formal de la función implícita). Sea

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + (\text{términos de orden superior}) \in \mathbb{C}[[X]]$$

y supongamos que $a_1 \neq 0$. Entonces f se puede factorizar de la siguiente forma:

$$f(X) = u\left(X_1, \ldots, X_n\right)\left(X_1 - g\left(X_2, \ldots, X_n\right)\right)$$

donde $u(0) \neq 0$, $g(0) = 0$,
y cualquier otra serie de potencias $k(X)$ puede ser escrita de manera única como

$$k(X) = a\left(X_1, \ldots, X_n\right) f(X_1, \ldots, X_n) + b(X_2, \ldots, X_n).$$

Este Teorema es un caso particular del Teorema de Preparación de Weierstrass que se enuncia y se demuestra más adelante.

Una observación es que la última parte puede ser reescrita como: El anillo residual $\mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_n]]/(f)$ que es isomorfo al subanillo $\mathbb{C}[[X_2, \ldots, X_n]]$.
Como el anillo cociente $\mathbb{C}[[X_1, ..., X_n]]/f$ son las clases de equivalencia de los polinomios en $(X_1, ..., X_n)$ variables módulo el polinomio $f(X_1, ..., X_n) = 0$, entonces las clases dependen de $(n-1)$ variables, ya que el polinomio nos permite expresar una variable en términos de las $(n-1)$ variables restantes, por lo tanto, el cociente es isomorfo al subanillo $\mathbb{C}[[X_2, ..., X_n]]$.
Aplicando inducción sobre esta afirmación, deducimos el siguiente teorema.

Teorema 5. Si $f_i(X) = \sum a_{ij} X_j +$ (términos de orden superior) y $\det(a_{ij}) \neq 0$ con $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r$, entonces el anillo residual $\mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_n]]/(f_1, \ldots, f_r)$ es isomorfo al subanillo $\mathbb{C}[[X_{r+1}, \ldots, X_n]]$.

Demostración. Aplicando a las $f_1, \ldots, f_r$ dadas anteriormente un ordenamiento adecuado de variables. Y dado que $\mathbb{C}[[X_{r+1}, \ldots, X_n]]$ es un dominio entero, se sigue que $\mathcal{B}''$ es un ideal primo, de aquí que $\mathcal{B}$ lo es.
Ahora para calcular la $\dim(V(\mathcal{B}))$ notemos primero que

$$\mathbb{C}[X]/\mathcal{B} \subset \mathbb{C}[[X]]/\mathcal{B}'' \cong \mathbb{C}[[X_{r+1}, \ldots, X_n]],$$

entonces $X_{r+1}, \ldots, X_n$ son algebraicamente independientes en $\mathbb{C}[X]/\mathcal{B}$. Por lo tanto tenemos que $\dim(V(\mathcal{B})) \geq n - r$. Por otra parte, el espacio tangente de Zariski a $V(\mathcal{B})$ en el origen está definido por los términos lineales de $f_1, \ldots, f_r$, entonces tenemos que

$$\dim \mathrm{T}_{V(\mathcal{B}),0} = n - r.$$

Esta igualdad implica la desigualdad $\dim(V(\mathcal{B})) \leq n - r$ y además, que el origen es un punto suave de $V(\mathcal{B})$.
Finalmente, si $g_1, \ldots, g_s$ son generadores de $\mathcal{B}$, tenemos que para cada g_i existe una h_i con $h_i(0) \neq 0$ y $h_i g_i \in (f_1, \ldots, f_s)$. Si $h = \Pi_{i=1}^{s} h_i$, se sigue que $h\mathcal{B} \subset (f_1, \ldots, f_r)$. Así:

$$V(\mathcal{B}) \subset V(f_1, \ldots, f_r) \subset V(h\mathcal{B}) = V(h) \cup V(\mathcal{B}).$$

Como $0 \notin V(h)$, se sigue que $V(f_1, \ldots, f_r)$ se descompone en $V(\mathcal{B})$ más un conjunto algebraicamente cerrado Y donde el $0 \notin Y$. □

Corolario 3. Sean $X = V(\mathcal{B})$ una variedad en $\mathbb{C}^n$ de dimensión $n - r$ y $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un punto suave en X. Dado que la $\dim T_{a,X} = n - r$, existen polinomios $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{B}$ tales que los términos lineales de cada f_i determinan a $T_{a,X}$. Entonces

$$\mathcal{B} = \Big\{ g \in \mathbb{C}[X] | g = \sum \frac{h_i}{k} f_i, \quad h_i, k \in \mathbb{C}[X], k(a) \neq 0 \Big\}. \tag{1.2}$$

Demostración. Sea $\mathcal{B}'$ el ideal de la derecha en la ecuación (1.2), aplicando el Teorema 2 alrededor del origen a, entonces $\mathcal{B}'$ es primo y $X' = V(\mathcal{B}')$ es una variedad de dimensión $n - r$. Pero como $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$, entonces $X \subseteq X'$. Como la $\dim X = \dim X'$, esto prueba que $X = X'$, de aquí que $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. □

Teorema 6 (Preparación de Weierstrass). Sean k un campo y $F(X_1, ..., X_n)$ una serie de potencias no invertible (es decir, no es unidad en $\mathbb{K}[[X_1, ..., X_n]]$) con coeficientes en k. Supongamos que $F(X_1, ..., X_n)$ contiene términos de la forma aX_n^k con coeficientes en a distintos de cero, y denotamos por $s \geq 1$ al menor de todos los exponentes h que tienen esta propiedad. Entonces, para toda serie de potencias $G(X_1, ..., X_n)$ existe una serie de potencias $U(X_1, ..., X_n)$ y una serie de potencias $R_i(X_1, ..., X_{n-1})$ en $X_1, ..., X_{n-1}$ con $0 \leq i \leq s - 1$ tal que

$$G(X_1, ..., X_n) = U(X_1, ..., X_n)F(X_1, ..., X_n) + \sum_{i=0}^{s-1} R_i(X_1, ..., X_{n-1})X_n^i \tag{1.3}$$

las series de potencias U y R_i son únicamente determinadas de manera única por G y F.

Demostración. Para toda serie de potencias $P(X_1, ..., X_n)$ denotamos por $r(P)$ a la suma de todos los términos en P que no tienen a X_n^s como factor, y denotamos por $h(P)$ al factor de X_n^s en $P - r(P)$. En otras palabras, tenemos

$$P = r(P) + X_n^s h(P) \tag{1.4}$$

donde $r(P)$, $h(P) \in K[[X_1, ..., X_n]]$ y donde, por lo tanto, $r(P)$ es un polinomio en X_n, de grado menor o igual a $s-1$, con coeficientes en $\mathbb{K}[[X_1, ..., X_{n-1}]]$. Notemos que si el anillo de series de potencias $\mathbb{K}[[X_1, ..., X_n]]$ es pensado como un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$, entonces ambas operaciones r y h son transformaciones lineales en correspondiente espacio vectorial. Por la definición del entero s, y como colorario al siguiente teorema $h(F)$ es una unidad en $\mathbb{K}[[X_1, ..., X_n]]$, y $r(F)$ visto como un polinomio en X_n, tiene todos sus coeficientes en el ideal máximo del anillo $\mathbb{K}[[X_1, ..., X_{n-1}]]$. Denotaremos a este ideal máximo por $\mathcal{M}$. $\square$

Teorema 7. Si $f = (f_1, ..., f_q, ...)$ es una serie de potencias en $X_1, ..., X_n$, con coeficientes en un anillo A (conmutativo y con unidad) entonces f es una unidad en $A[[X_1, ..., X_n]]$ si y sólo si el elemento f_0 de A es una unidad en A.

Demostración. Si $fg = 1$, con $g = (g_0, g_1..., g_q, ...)$, entonces $f_0 g_0 = 1$, y por lo tanto, f_0 es una unidad en A. Recíprocamente, si f_0 es una unidad en A, entonces podemos encontrar sucesivamente formas $g_0, g_1, ..., g_q, ...$, donde g_q es cero o una forma de grado q, tal que $f_0 g_0 = 1$, $g_1 f_0 + g_0 f_1 = 0, ..., g_q f_0 + g_{q-1} f_1 + ... + g_0 f_q = 0$. De hecho tenemos que $g_0 = f_0^{-1}$. Asumiendo que $g_0, g_1, ..., g_{q-1}$ han sido determinados y que cada g_i es cero o una forma de grado i $(0 \leq i \leq q-1)$, escogemos $g_q = -f_0^{-1}(g_{q-1} f_1 + ... + g_0 f_{q-1})$, y es claro que g_q es entonces cero o una forma de grado q. Entonces ahora tenemos

$$fg = (l_0, l_1, ..., l_q, ...); \quad \text{donde } l_q = \sum_{i+j=q} f_i g_j$$

y por lo tanto, $fg = 1$. $\square$

La dificultad de encontrar series de potencias $U, R_0.R_1, ..., R_{s-1}$ que satisfacen la ecuación (1.3) es equivalente a encontrar una serie de potencias U que cumple la siguiente relación

$$h(G) = h(UF). \tag{1.5}$$

Observemos que si (1.3) se cumple, entonces $h(G - UF) = 0$, de aquí (1.3) se cumple por linealidad de h. Recíprocamente, si suponemos que tenemos una serie de potencias U que satisface (1.5), entonces $h(G - UF) = 0$, y por (1.4), $G - UF = r(G - UF)$, es decir, $G - UF$ es un polinomio en X_n, de grado menor o igual a $s-1$, con coeficientes en $\mathbb{K}[[X_1, ..., X_{n-1}]]$, y por lo tanto se sigue (1.3).
Tenemos que $UF = U_r(F) + X_n^S U h(F)$, y (1.5) se puede escribir como

$$h(G) = h(U_r(F)) + Uh(F) \tag{1.6}$$

y ahora nuestro problema es equivalente a encontrar una serie de potencias U que satisface (1.6). Como $h(F)$ es una unidad en $\mathbb{K}[[X_1, ..., X_n]]$ construiremos la serie de potencias

$$V = Uh(F). \tag{1.7}$$

Sea

$$M = -r(F)[h(F)]^{-1}. \tag{1.8}$$

Entonces por (1.7), $U_r(F) = -MV$, y así (1.6) es equivalente a

$$h(G) = -h(MV) + V. \tag{1.9}$$

Para toda serie de potencias P, denotamos por $m(P)$ a la serie de potencias $h(MP)$. Notemos que nuevamente m es una operación lineal sobre las series de potencias. Por lo tanto, si P, considerado como una serie de potencias en X_n sobre $\mathbb{K}[[X_1, ..., X_{n-1}]]$, tiene todos sus coeficientes en alguna potencia $\mathcal{M}^{i+1}$. Del ideal máximo $\mathcal{M}$, entonces, $m(P)$ tiene todos sus coeficientes en $\mathcal{M}^{j+1}$. Por conveniencia sea $H = h(G)$.

Con estas notaciones la condición (1.9) puede ser escrita como sigue:

$$V = H + m(V). \tag{1.10}$$

Como m es lineal, la condición (1.10) implica que $V = H + m(H + m(V)) = H + m(H) + m^2(V)$, y, repitiendo este procedimiento varias veces, tenemos

$$V = H + m(H) + m^2(H) + ... + m^q(H) + m^{q+1}(V) \tag{1.11}$$

para cualquier entero $q \geq 0$.

La propiedad de la operación m que resaltamos muestra que $m^j(H)$ es al menos de orden $q + 1$. Entonces la suma infinita $H + m(H) + m^2(H) + ... + m^q(H) + ...$ converge, y , si una serie de potencias V que satisface (1.10) existe, entonces tiene que ser la serie

$$V = H + m(H) + m^2(H) + ... + m^q(H) + ..., \tag{1.12}$$

y ésto prueba la unicidad de V, y por lo tanto de U y de las R_i.

Ahora probemos que la serie V dada por (1.12) satisface la condición (1.10). Primero escribamos $V = H + m(H) + m^2(H) + ... + m^q(H) + W_q$. W_q considerada como una serie de potencias en X_n, y los coeficientes de W_q están todos en m^{q+1}. Entonces, como m es lineal,

$$V - H - m(V) = H + ... + m^q(H) + W_q - H - m(H) - ... - m^{q+1}(H) - m(W_q)$$

$$= w^q - m^{q+1}(H) - m(w_q).$$

Entonces todos los coeficientes de $V - H - m(V)$ están en $\mathcal{M}^{q+1}$. Como esto es valido para toda q, entonces tenemos $V - H - m(V) = 0$, y por lo tanto la condición (1.10) se cumple, esto prueba la existencia de V y por lo tanto a U y de las R_i. $\square$

1.4. Uniformización Analítica

En esta sección estudiaremos la estructura topológica y analítica de las variedades afines.

Definición 20. Una variedad analítica compleja M de dimensión n es un espacio topológico junto con una colección $\mathfrak{U}$ de cartas coordenadas, es decir, homeomorfismos

$$\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha,$$

donde $U_\alpha \subset M$, $V_\alpha \subset \mathbb{C}^n$, y $\bigcup U_\alpha = M$, es decir una cubierta abierta tal que $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ es analítica en donde está definida:

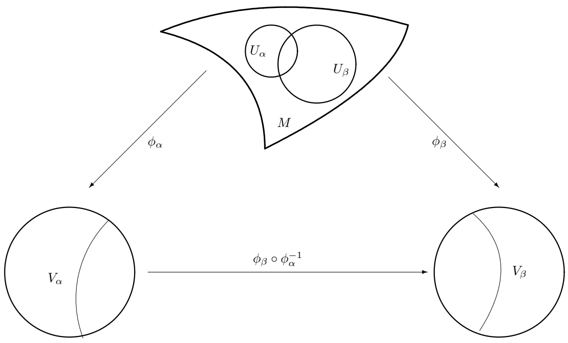


Figura 1.3: Variedad

Definición 21. Sean M_1, M_2 dos variedades analíticas complejas, una aplicación holomorfa $F : M_1 \longrightarrow M_2$ es una aplicación continua tal que para todas las cartas $\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$, $U_\alpha \subset M_1$, $\phi_\beta : U_\beta \longrightarrow V_\beta$, $U_\beta \subset M_2$, la aplicación $\phi_\beta \circ F \circ \phi_\alpha^{-1}$ es analítica donde ésta definida.

Por otro lado es un hecho que el conjunto abierto de Zariski X_0 de puntos suaves en X tiene una estructura natural de variedad analítica suave. Esto es consecuencia de los Teoremas 2 y 4.

Teorema 8 (Teorema de la función implícita). Sea

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + (\text{términos de orden superior})$$

una serie convergente con $a_1 \neq 0$. Entonces existe una única serie de potencias $g(X_2, ..., X_n)$ y una $\epsilon > 0$ tal que si $|a_1|, ..., |a_n| < \epsilon$

$$f(a_1, ..., a_n) = 0 \text{ si y sólo si } a_1 = g(a_1, ..., a_n).$$

Teorema 9. Sean

$$f_k(X) = \sum_{l=1}^{n} C_{k,l} X_l + (\text{términos de orden superior}), 1 \leq k \leq r$$

series de potencias convergentes y supongamos que $\det C_{k,l} \neq 0$, con $1 \leq k, l \leq r$. Así, existe una única serie convergente de potencias $g_i(X_{r+1}, ..., X_n)$, $1 \leq i \leq r$ y un $\epsilon > 0$ tal que si $|a_1|, ..., |a_n| < \epsilon$, se tiene que $f_i(a_1, ..., a_n) = 0$; $1 \leq i \leq r$ si y sólo si $a_i = g_i(a_{r+1}, ..., a_n)$ con $1 \leq i \leq r$.

Del Corolario 3 y Teorema 9 obtenemos el siguiente Corolario.

Corolario 4. Sea $a = (a_1, ..., a_n)$ un punto suave en una variedad $X \subset \mathbb{C}^n$ de dimensión r. Consideremos $x_{i_1}, ..., x_{i_r}$ coordenadas en una variedad de a tal que $dx_{i_1}, ..., dx_{i_r}$ son funciones lineales independientes en $T_{a,X}$. Entonces existe una $\epsilon > 0$ y para toda $j \in J = 1, ..., n_{i_r, ..., i_n}$ una serie de potencias convergente $g_j(x_{i_1}, ..., x_{i_r})$, tal que si $|t_1|, ..., |t_n| < \epsilon$, para toda $j \in J$ tenemos que

$$(a_1 + t_1, ..., a_n + t_n) \in X \text{ si y sólo si}, t_i = g_j(t_{i_1}, ..., t_{i_r}),$$

para toda $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i_1, ..., i_r\}$.

Si $U_a = X \cap (a_1 + t_1, ..., a_n + t_n), |t_i| < \epsilon$ y V_α es la proyección de U_α en el plano coordenado $(i_1, ..., i_r)$ isomorfo a $\mathbb{C}^r$, entonces podemos cubrir los puntos suaves X_0 de X por las cartas

$$\phi_a : U_a \longrightarrow V_a$$

donde $U_a \subset X_0$ y $V_a \subset \mathbb{C}^r$. El Colorario 4 prueba que ϕ_a es un homeomorfismo y que $\phi_b \circ \phi_a^{-1}$ es analítica donde esté definida, es decir, X_0 es una variedad compleja analítica, suave.

En general no se puede decir que, en puntos singulares, las variedades algebraicas sean variedades analíticas suaves. Obs: Tomemos el caso de una hipersuperficie $V(f) \subset \mathbb{C}^n$ que tenga una singularidad aislada en el origen. La mejor manera de visualizar su topología es intersecando $V(f)$ con un pequeño disco B_ϵ alrededor del cero, esto es

$$V(f) \cap B_\epsilon = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \sum |x_i|^2 \leq \epsilon\}.$$

Entonces como $\partial B_\epsilon \cong \mathbb{S}^{2n-1}$ para ϵ suficientemente pequeño, $V(f) \cap \partial B_\epsilon$ es una subvariedad real de ∂B_ϵ de dimensión $2n-3$ y $V(f) \cap B_\epsilon$ es homeomorfo al cono sobre $V(f) \cap \partial B_\epsilon$. Para ser explícitos, tomemos $\epsilon = 1$ y usemos la proyección estereográfica para poner coordenadas en la frontera de B.

Sea H el hiperplano y $x_1 = 0$, entonces la frontera de B_ϵ es la esfera $\sum x_i^2 = 1$, por lo cual $P_t \in H$ si y sólo si $t = \frac{1}{1-a_1}$. Así, $P_t = \left(0, \frac{a_2}{1-a_1}, \ldots, \frac{a_n}{1-a_1}\right)$.

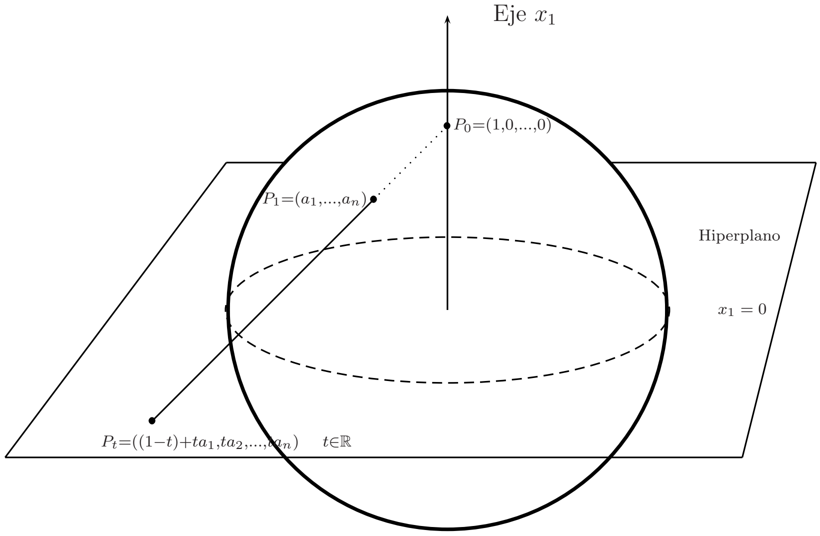


Figura 1.4: Proyección estereográfica

En la figura (1.4) se muestra que la proyección estereográfica está dada por un isomorfismo entre $\partial B \subset \mathbb{C}^2$ y $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ y se expresa en coordenadas complejas x, y como:

$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{\mathrm{Im}(x)}{1-x}, \frac{\mathrm{Re}(y)}{1-x}, \frac{\mathrm{Im}(y)}{1-\mathrm{Re}(x)} \right) = (u, v, w).$$

Ejemplo 6. Sea $L_1 = \{\bar{x} \mid x = 0\}$ y $L_2 = \{\bar{y} \mid y = 0\}$. Entonces

$$L_1 \cap \partial B \text{ es el círculo } u = 0, u^2 + v^2 = 1 \text{ en } \mathbb{R}^3 \cup (\infty) \text{ así que },$$

$$L_2 \cap \partial B \text{ es el círculo } \{v = w = 0\} \cup \{\infty\}, \text{ donde } u \in \mathbb{R}\,.$$

Observamos que el interior de $L_i \cap B$ es justo un cono sobre $L_i \cap \partial B$, y se sigue que para la variedad reducible $X = L_1 \cap L_2 = V(x, y)$ con dos componentes suaves que pasan por 0, donde $X \cap \partial B$ son dos círculos enlazados en la 3-esfera $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ y $X \cap B$ es un cono sobre estos dos círculos enlazados.

1.5. Anillo Local de una Variedad Afín en un Punto Suave

En esta sección estudiaremos el anillo local $\mathcal{O}_{x,X}$ en el caso de que x sea un punto suave en X.

Notamos en el Teorema 2 la importancia de la expansión en series de potencias en $\mathbb{C}^n$. El hecho de que x es suave en X implica que toda función $f \in \mathcal{O}_{x,X}$ tiene una expansión en series de potencias en coordenadas locales en X. Para ser más precisos, digamos que $X \subset \mathbb{C}^n$, $x = (0, ..., 0)$, $\dim X = r$ y $X = V(f_1, \ldots, f_{n-r})$ cerca del cero donde las df_i son independientes en cero. Supongamos que $y_1, \ldots, y_r$ son sólo funciones racionales:

$$y_i = \frac{a_i\,(X_1, \ldots, X_n)}{b_i\,(X_1, \ldots, X_n)}, \quad a_i(0) = 0, b_i \neq 0$$

con $dy_1, \ldots, dy_r$ funciones lineales independientes en $T_{x,X}$, es decir, $y_1, \ldots, y_r$, $f_1, \ldots, f_{n-r}$ todos tienen términos linealmente independientes en cero.

Fijémonos en los anillos del Teorema 2 y en sus cocientes por $f_1, \ldots, f_{n-r}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{0,\mathbb{C}^n} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_n]] \arrow[d] \\
\mathcal{O}_{x,X} = \mathcal{O}_{0,\mathbb{C}^n}/(f_1, \ldots, f_{n-r}) \arrow[r] & \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_n]]/(f_1, \ldots, f_{n-r}) \cong \mathbb{C}[[Y_1, \ldots, Y_r]]
\end{tikzcd}$$

Figura 1.5: Diagrama

(Donde el isomorfismo de $\mathbb{C}[[X]]/(f)$ y $\mathbb{C}[[y]]$ está dado por el Teorema 5).

Así, cualquier $f \in \mathcal{O}_{x,X}$ tiene una expansión natural en series de potencias en $y_1, \ldots, y_r$. La relación algebraica de estos dos anillos está dada por la siguiente proposición.

Proposición 5. Con las anteriores notaciones, los cocientes $\mathcal{O}_{x,X}/\mathcal{M}_{x,X}^k$ y

$$\mathbb{C}[[y_1, ..., y_r]]/(y_1, ..., y_r)^k$$

son isomorfos para toda k, así la completación formal de $\mathcal{O}_{x,X}$ es:

$$\hat{\mathcal{O}}_{x,X} := \lim_{\leftarrow} \mathcal{O}_{x,X}/\mathcal{M}_{x,X}^k$$

de $\mathcal{O}_{x,X}$ y el anillo formal de las series de potencias $\mathbb{C}[[y_1, ..., y_r]]$ son isomorfos.

Donde, $\mathcal{M}_{x,X}$ es el ideal de $f \in \mathcal{O}_{x,X}$ tal que $f(x) = 0$. De hecho, nosotros vimos en la prueba del Teorema 2 que

$$\mathcal{O}_{O,\mathbb{C}^n}/(\mathcal{M}_{0,\mathbb{C}^n})^k \cong \mathbb{C}[[X_1, ...X_n]]/(X)^k$$

es isomorfo al espacio vectorial de las expresiones $\sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha X^\alpha$.

Dividiendo ambos anillos por el ideal generado por $(f_1, ..., f_{n-r})$, continúan isomorfos. El isomorfismo de $\hat{\mathcal{O}}_{x,X}$ con $\mathbb{C}[[Y_1, ..., Y_n]]$ se sigue de tomar límites inversos y notar que $\mathbb{C}[[y_1, \ldots, y_r]]$ es ya completo.

Teorema 10. Si $x \in X$ es un punto suave, entonces $\mathcal{O}_{x,X}$ es un dominio de factorización única (Véase [2]).

Lema 2. Sean $a, b \in \mathcal{O}_{x,X}$. Entonces, si $a/b \in \hat{\mathcal{O}}_{x,X}$ se tiene que $a/b \in \mathcal{O}_{x,X}$

Demostración. Usando el resultado del Teorema 3, tenemos que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}[a\mathcal{O}_{x,X} + \mathcal{M}_{x,X}^k] = a\mathcal{O}_{x,X}.$$

Si $a/b \in \hat{\mathcal{O}}_{x,X}$, entonces $b = ac$ para alguna $c \in \hat{\mathcal{O}}_{x,X}$, haciendo $c = \lim c_n$, donde $c_n \in \mathcal{O}_{x,X}$ y $c - c_n \in \hat{\mathcal{M}}_{x,X}^k$, entonces, $b = ac_n + a(c - c_n) \in a\mathcal{O}_{x,X} +$(residuos que se anulan de orden n), es decir, $b \in \bigcap_{k=1}^{\infty}[a\mathcal{O}_{x,X} + \mathcal{M}_{x,X}^k] = a\mathcal{O}_{x,X}$. Así $a/b \in \mathcal{O}_{x,X}$. Ahora, como $\mathcal{O}_{x,X}$ es de Noether, la propiedad del dominio de factorización única equivale a lo siguiente:

$$\text{si } f/gh \text{ entonces } f = f_1 f_2 \text{ donde } f_1/g \text{ y } f_2/h. \tag{1.13}$$

Empecemos con $f, g, h \in \mathcal{O}_{x,X}$ tal que f/gh. En $\hat{\mathcal{O}}_{x,X}$, sea d el máximo común divisor de f y g y $f = \mathrm{d}f'$, $g = \mathrm{d}g'$. Escribamos $f' = \lim f'_n$, $g' = \lim g'_n$ donde $f'_n, g'_n \in \mathcal{O}_{x,X}$ y $f' - f'_n, g' - g'_n \in \hat{\mathcal{M}}_{x,X}^n$. Entonces

$$fg'_n - gf'_n = f(g'_n - g) + g(f' - f'_n) \in f\hat{\mathcal{M}}_{x,X}^n + g\hat{\mathcal{M}}_{x,X}^n.$$

Por lo tanto

$$fg'_n - gf'_n \in \mathcal{O}_{x,X} \cap [(f, g)\mathcal{M}_{x,X}^n \hat{\mathcal{O}}_{x,X}].$$

Pero si $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_{x,X}$ es algún ideal,

$$\mathcal{O}_{x,X} \cap \mathcal{U}\hat{\mathcal{O}}_{x,X} \subset \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\mathcal{U} + \mathcal{M}_{x,X}^k\right) = \mathcal{U}$$

por el teorema de Krull, de aquí, en particular

$$fg'_n - gf'_n = -fs_n + gr_n, \quad s_n, r_n \in \mathcal{M}_{x,X}^n$$

es decir

$$f(g'_n + s_n) = g(f'_n + r_n) \tag{1.14}$$

por lo tanto en $\hat{\mathcal{O}}_{x,X}$

$$f'(g'_n + s_n) = g'(f'_n + r_n)$$

y como f' y g' son primos relativos,

$$f'_n + r_n = kf \text{ para alguna } k \in \hat{\mathcal{O}}_{x,X}.$$

Ahora, tomemos n suficientemente grande para que $f' \notin \hat{\mathcal{M}}^n_{x,X}$, es decir, $f'_n = f' \neq 0$ en $\mathcal{O}_{x,X}/\mathcal{M}^n_{x,X}$. Entonces K no puede estar en $\hat{\mathcal{M}}^n_{x,X}$. Así, h tiene una unidad más en $\hat{\mathcal{O}}_{x,X}$ y por tanto

$$f'_n + r_n/f' \qquad \text{y} \qquad f'/f.$$

De aquí

$$f'_n + r_n/f \in \hat{\mathcal{O}}_{x,X}.$$

Aplicando el Lema 2 se sigue que $f'_n + r_n/f$ está en $\mathcal{O}_{x,X}$, es decir, $f = d_n(f'_n + r_n)$. Entonces tenemos por (14) que $g = d_n(g'_n + s_n)$ y además $(f'_n + r_n) \, / \, (g'_n + s_n) \, h$. Pero en $\hat{\mathcal{O}}_{x,X}$, $f'_n + r_n$ y $g'_n + s_n$ difieren de f' y g' sólo por unidades y por ello son primos relativos. Por lo tanto en $\hat{\mathcal{O}}_{x,X}$ se tiene que $f'_n + r_n/h$. Por Lema 2 , $f'_n + r_n/h \in \mathcal{O}_{x,X}$. Esto prueba (13) con $f_1 = d_n$, $f_2 = f'_n + r_n$. □

El significado geométrico de la propiedad del dominio de factorización única es la siguiente generalización del Teorema 2 y del Colorario 3.

Corolario 5. Sean $X = V(\mathcal{B})$ una variedad afín de dimensión r en $\mathbb{C}^n$ y $x \in X$ un punto suave. Si $f(X)$ representa un elemento irreducible de $\mathcal{O}_{x,X}$, entonces

$$\mathcal{B}' = \{g \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n] \mid kg \in \mathcal{B} + (f), \text{algún } k \in \mathbb{C}[X], \text{ con } k(x) \neq 0\}$$

es un ideal primo y $X' = V(\mathcal{B}')$ es una subvariedad de X de dimensión $r - 1$, que contiene a x. Recíprocamente, cualquier subvariedad $X' \subset X$ que contiene a x y de dimensión $r - 1$ es obtenida en esta forma por un elemento irreducible f de $\mathcal{O}_{x,X}$, caracterizado por la propiedad: $I(X')\mathcal{O}_{x,X} = f\mathcal{O}_{x,X}$. Finalmente, para cualquier $f \in R_X$, las componentes de $V(f)$ que pasan por x tienen dimensión $r - 1$ (esta afirmación es cierta también para puntos singulares) y existe una correspondencia uno a uno con los factores irreducibles de f en $\mathcal{O}_{x,X}$.

Definición 22. Un elemento $f \in \mathcal{O}_{x,X}$ tal que $f\mathcal{O}_{x,X}I = I(X')\mathcal{O}_{x,X}$ es llamada una *ecuación local de X' en x.*

Supongamos ahora que toda variedad afín X es suave. El anillo afín R_X es también undominio de factorización única, ya que cada $f \in R_X$ tendría esencialmente una única descomposición

$$f = (\text{unidad})\Pi f_i^{r_i}, \text{ con } f_i \text{ irreducible},$$

que corresponde a la descomposición única de conjuntos algebraicos

$$V(f) = \cup Z_i, \quad \dim Z_i = r - 1$$

dada por una biyección entre las clases de equivalencia de irreducibles de f' y subvariedades $Z \subset X$ de dimensión $r - 1$.

Definición 23. Sea X una variedad afín suave de dimensión r.

1. *a*) Sea $\mathrm{Div}(X)$ el *grupo abeliano libre sobre el conjunto de subvariedades* $Z \subset X$ de dimensión $r-1$. Lo llamamos el *grupo* de *divisores* en X.

   b) Si $f \in R_X$ del Corolario 5 que

$$V(f) = Z_1 \cap \ldots \cap Z_k$$

en la descomposición de $V(f)$ en sus componentes irreducibles, entonces la dimensión de cada Z_i es $r-1$ para toda i. Así, podemos definir el *orden de anulación de* f *en cada* Z_i de la siguiente manera.
Elegimos $x \in Z_i$ y una ecuación local $f_i \in \mathcal{O}_{x,X}$ de Z_i. Escribimos,

$$f = \frac{k}{g} f_i^{r_i} \text{ tal que } k, g \in R_X \text{ con } k, g \neq 0 \text{ en } Z_i.$$

Definiendo el conjunto

$$r_i = \mathrm{ord}_{z_i}(f)$$

donde r_i es independiente de x y f_i, y que $r_i > 0$.

Capítulo 2

Variedades Proyectivas

Los resultados más importantes de la geometría algebraica son "globales", de modo que dejan de cumplirse si quitamos puntos a las variedades. Ya que esto sucede si nos olvidamos de las soluciones imaginarias de una ecuación polinomial real. Ahora veremos que por el sólo hecho de tratar con variedades afines ya estamos "olvidando puntos". Nos referimos a los puntos infinitos en el sentido de la geometría proyectiva. Resulta que el marco natural de la geometría algebraica no es el espacio afín, sino el espacio proyectivo. A continuación mencionaremos la teoría básica sobre los espacios proyectivos.

2.1. Espacio Proyectivo

Definición 24. Un n-espacio proyectivo sobre k, designado por $\mathbb{P}^n(k)$ o simplemente por $\mathbb{P}^n$, se define como el conjunto de todas las rectas del espacio afín $\mathbb{A}^{n+1}(k)$, (el conjunto de eneadas sobre el campo k), o denotado por $\mathbb{A}^{n+1}$ que pasan por el $\{(0,0,...,0)\}$. Todo punto $x = (x_1, ..., x_{n+1}) \neq (0, ..., 0)$ determina una sola de dichas rectas, a saber $\{(\lambda x_1, ..., \lambda x_{n+1}) \mid \lambda \in k\}$. Dos de estos puntos x y y determinan la misma recta si y sólo si existe un $\lambda \in k$, no nulo, tal que $y_i = \lambda x_i$, para $i = 1, ..., n+1$; si se da este caso, diremos que x y y son equivalentes. Entonces $\mathbb{P}^n$ se puede identificar con el conjunto de clases de equivalencia de puntos de $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{(0,0,0)\}$.

Llamaremos puntos a los elementos de $\mathbb{P}^n$. Si un punto $P \in \mathbb{P}^n$ está determinado como antes por un punto $(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1}$; diremos que $(x_1, ..., x_{n+1})$ es un conjunto de coordenadas homogéneas para P. Nótese que la i-ésima coordenada x_i no está bien definida, pero nos permite saber si la i-ésima coordenada es cero o no; y si $x_i \neq 0$, los cocientes x_j/x_i están bien definidos (ya que son invariantes respecto a la equivalencia). Sea $U_i = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$. Cada $P \in U_i$ posee un único conjunto de coordenadas homogéneas de la forma $P = (x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_{n+1})$.

Las coordenadas $(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n+1})$ son llamadas *coordenadas no homogéneas* de P respecto a U_i (o a X_i). Si definimos:

$$\varphi_i : \mathbb{A}^n \longrightarrow U_i$$

por medio de $\varphi_i(a_1, ..., a_n) = (a_1, ..., a_{i-1}, 1, a_{i+1}, ..., a_n)$, entonces φ_i establece una correspondencia uno a uno entre los puntos de $\mathbb{A}^n$ y los puntos de U_i. Notemos que el espacio proyectivo se puede escribir como union de abiertos de la siguiente manera

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$$

por lo tanto $\mathbb{P}^n$ posee una cubierta formada por $n+1$ conjuntos, cada uno de los cuales se puede considerar como un n-espacio afín.

Sea $H_\infty = \mathbb{P}^n \setminus U_{n+1} = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \mid x_{n+1} = 0\}$. Donde H_∞ es el *hiperplano al infinito.* La correspondencia $(x_1, ..., x_n, 0) \longleftrightarrow (x_1, ..., x_n)$ prueba que H_∞ se puede identificar con $\mathbb{P}^{n-1}$. De donde $\mathbb{P}^n = U_{n+1} \cup H_\infty$ es la unión de un n-espacio afín y un conjunto que da todas las direcciones del n-espacio afín.

Ahora pasemos a los siguientes ejemplos para aclarar lo comentado.

Ejemplo 7.

1. $\mathbb{P}^0$ es un punto.

2. $\mathbb{P}^1 = \{(x, 1) \mid x \in k\} \cup \{(1, 0)\}$, $\mathbb{P}^1$ es la recta afín y, además, un *punto del infinito.* $\mathbb{P}^1$ es la *recta proyectiva sobre k.*

3. $\mathbb{P}^2 = \{(x, y, 1) \mid (x, y) \in \mathbb{A}^2\} \cup \{(x, y, 0) \in (x, y) \in \mathbb{P}^1\}$. Aquí H_∞ se denomina la *recta del infinito.* $\mathbb{P}^2$ es el *plano proyectivo sobre k.*

4. Consideremos una recta $Y = mX + b$ en $\mathbb{A}^2$. Si identificamos $\mathbb{A}^2$ con $U_3 \subset \mathbb{P}^2$, a los puntos de la recta corresponden los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{P}^2$ con $y = mx + bz$ y $z \neq 0$. (Debemos hacer homogénea la ecuación a fin de que las soluciones sean invariantes respecto a la equivalencia). $\{(x, y, z) \in \mathbb{P}^2 \mid y = mx + bz\} \cap H_\infty = \{(1, m, 0)\}$. Por lo tanto todas las rectas con la misma pendiente pasan por el mismo punto al infinito.

5. Consideremos la curva $Y^2 = X^2 + 1$. El conjunto $\mathbb{P}^2(k)$ correspondiente vendrá dado por la ecuación homogénea $Y^2 = X^2 + Z^2$, $Z \neq 0$. Así el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{P}^2 \mid y^2 = x^2 + z^2\}$ corta a H_∞ en los dos puntos $(1, 1, 0)$ y $(1, -1, 0)$. Éstos son los puntos en que las rectas $Y = X$ y $Y = -X$ cortan a la curva.

2.2. Conjuntos Algebraicos Proyectivos

En esta parte definiremos los conjuntos algebraicos proyectivos de forma paralela al caso afín.

Definición 25. Un *conjunto algebraico en* $\mathbb{P}^n$ es un subconjunto de la forma

$$V(f_1,...,f_N)=\{P\in\mathbb{P}^n \mid f_1(a_0,...,a_n)=...=f_N(a_0,...,a_n)=0\}$$

donde $(a_0,..,a_n)$ son coordenadas homogéneas de P y $f_1,...,f_N$ son polinomios homogéneos en $\mathbb{C}[X_0,...,X_n]$.

Si $\mathcal{U}$ es el ideal generado por $f_1,...,f_N$, entonces $V(f_1,...,f_N)$ tambíen se escribe como $V(\mathcal{U})$. Notemos que $\mathcal{U}$ es un ideal homogéneo, es decir, si un polinomio g está en $\mathcal{U}$, y $g=\sum g_i$, con g_i homogéneo de grado i, entonces cada g_i está en $\mathcal{U}$.

Proposición 6.

1. Si $\mathcal{U}_1\subseteq\mathcal{U}_2$, entonces $V(\mathcal{U}_1)\supseteq V(\mathcal{U}_2)$.

2. $V(\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2)=V(\mathcal{U}_1)\cup\ V(\mathcal{U}_2)=V(\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2)$.

3. $V(\sum\mathcal{U}_{\alpha\in I})=\bigcap_{\alpha\in I}V(\mathcal{U}_\alpha)$.

   En esta parte omitiremos las pruebas, ya que son análogas al caso afín.

   Los conjuntos $V(\mathcal{U})$ satisfacen ser cerrados de una topología que se llama topología de Zariski, y llamar a $V(\mathcal{B})$ una variedad si $\mathcal{B}$ es un ideal primo homogéneo.

4. Todos los ideales homogéneos están contenidos en el ideal máximo homogéneo $(X_0,...,X_n)$ y $V(X_0,...,X_n)=\emptyset$.

5. Si $\mathcal{B}$ es el ideal primo homogéneo, $\mathcal{B}\neq(X_0,...,X_n)$ y f es un polinomio homogéneo tal que $f\notin\mathcal{B}$, entonces existe una $x\in V(\mathcal{B})$ tal que $f(x)\neq 0$.

Corolario 6. Para todo ideal homogéneo $\mathcal{U}$, y para todo polinomio homogéneo f de grado $d\geq 1$, $f\in\sqrt{\mathcal{U}}$ si y sólo si f se anula en todos los puntos de $V(\mathcal{U})$.

Demostración.
Supongamos que $f\in\sqrt{\mathcal{U}}$ entonces f se anula en $V(\sqrt{\mathcal{U}})$, por (4) tenemos que $f\in V(\mathcal{U})$ por lo tanto f se anula en $V(\mathcal{U})$.
Como f se anula en $V(\mathcal{U})$ entonces f se anula en $I(V(\mathcal{U}))$ pero $I(V(\mathcal{U}))=\sqrt{\mathcal{U}}$ por lo tanto $f\in\sqrt{\mathcal{U}}$. □

Corolario 7. $V(\mathcal{U}) = \emptyset$ si y sólo si $\sqrt{\mathcal{U}} = (X_0, ..., X_n)$.

Demostración.
Si $\sqrt{\mathcal{U}} = (X_0, ..., X_n)$ entonces hay una $f \in (X_0, ..., X_n)$ tal que $f \notin \sqrt{\mathcal{U}}$ así existe un $x \in V(\sqrt{\mathcal{U}})$ tal que $f(x) \neq 0$ donde esto es una cotradicción.
Ahora aplicando V a $\sqrt{\mathcal{U}} = (X_0, ..., X_n)$ tenemos que $V(\sqrt{\mathcal{U}}) = V(X_0, ..., X_n)$ pero por (4) $V(\mathcal{U}) = V(X_0, ..., X_n)$, donde por (5) $V(X_0, ..., X_n) = \emptyset$ por lo tanto $V(\mathcal{U}) = \emptyset$.

□

Si $X \subset \mathbb{P}^n$ es una subvariedad correspondiente al ideal homogéneo primo $\mathcal{B}$, entonces tenemos que $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/\mathcal{B}$ es el anillo de coordenadas homogéneas de X.

Recordemos que una *forma* de grado n es un polinomio cuyos monomios tienen todos grado n. Todo polinomio F se descompone de forma única como $F = F_0 + F_1 + F_2, ...,$ donde F_i es una forma de grado i. Observemos ahora que $F(P) = 0$ si y sólo si $F_i(P) = 0$ para todo i. En efecto, si $a = (a_0, ..., a_n)$ son coordenadas homogéneas de P y $\lambda \in k$ es no nulo, entonces

$$F(\lambda a) = \sum_i F_i(a)\lambda^i = 0\,, \text{para todo}\,, \lambda \in k \setminus \{0\}$$

esto sólo es posible si todos los coeficientes de este polinomio (en λ) son nulos. (Aquí usamos que k es infinito).

Teniendo en cuenta, además, que los anillos de polinomios son noetherianos, vemos que un conjunto algebraico $X = V(\mathcal{U})$ es el conjunto de ceros del ideal generado por $\mathcal{U}$, o también el conjunto de ceros de un número finito de formas.

Para cada conjunto $X \subset \mathbb{P}^n$, definimos el ideal

$$I(X) = \{F \in \mathbb{C}[X_0, ..., X_n] \mid F(P) = 0 \,\text{para todo}\, P \in X\}.$$

Teorema 11. Un ideal $I \subset \mathbb{C}[X_0, ..., X_n]$ es homogéneo si y sólo si está generado por un conjunto (finito) de formas.

Demostración. Supongamos que $I = (F^1, ..., F^r)$, donde cada F^i es una forma. Sea $F \in I$. Entonces $F = \sum_i A^i F^i$, para ciertos polinomios A^i. La forma de menor grado en que se descompone F ha de ser $F_m = \sum_i A^i_m - d_i F^i$, donde d_i es el grado de F^i. Por lo tanto $F_m \in I$. Ahora $F - F_m \in I$ y, repitiendo el argumento, llegamos a que todas las formas de F están en I. □

Definición 26. Un conjunto algebraico $X \subset \mathbb{P}^n$ es reducible si existen conjuntos algebraicos X_1, X_2 distintos de X y tal que $X = X_1 \cup X_2$. En caso contrario diremos que X es irreducible.

A los conjuntos algebraicos irreducibles los llamaremos también *variedades proyectivas.*

Como en el caso afín tenemos que todo conjunto algebraico se descompone de forma única como la unión de un número finito de variedades proyectivas no contenidas unas en otras. Así mismo un conjunto algebraico $V \neq \emptyset$ es irreducible si y sólo si $I(X)$ es un ideal primo. El argumento es el mismo que en el caso afín, usando además lo siguiente.

Teorema 12. Un ideal homogéneo $I \subsetneq \mathbb{C}[X_0, ..., X_n]$ es primo si y sólo si para todo par de formas F, G tales que $FG \in I$, tenemos que $F \in I$ o $G \in I$.

Demostración. Supongamos que $F \notin I$ y $G \notin I$. Sean F_m la forma de menor grado de F que no está en I y G_n la forma de menor grado de G que no está en I. Entonces

$$(FG)_{mn} = \sum_{u+v=m+n} F_u G_v \in I$$

Por la elección de m y n, todos los sumandos tienen un factor en I salvo $F_m G_n$, luego $F_m G_n \in I$, en contradicción con la hipótesis. □

Como en el caso afín, definimos una curva proyectiva plana como un conjunto algebraico de $\mathbb{P}^2$ (irreducible salvo que indiquemos lo contrario) definido por una única ecuación. Así mismo podemos dividir las curvas planas en rectas, cónicas, cúbicas, según su grado.

2.3. Relaciones Afines y Proyectivas

Ahora nos ocuparemos de la conección entre variedades afines y proyectivas. Para ello nos apoyaremos en la siguiente definición que da una relación entre polinomios y formas.

Definición 27. Para cada forma $F \in k[X_0, ..., X_n]$ definimos el siguiente polinomio como $F_* = F(1, X_1, ..., X_n) \in k[X_0, ..., X_n]$. Recíprocamente, si $f \in k[X_0, ..., X_n]$ se expresa como $f = f_0 + f_1 + ... + f_d$ donde f_i es una forma de grado i, definimos la forma

$$f^* = X_0^d f_0 + X_0^{d-1} f_1 + ... + f_d \in k[X_0, ..., X_n].$$

Al paso de f a f^* y de F a F_* lo llamaremos *homogenizar un polinomio y deshomogenizar un forma*, respectivamente. En particular las variedades afines se corresponden biunívocamente con las variedades proyectivas no contenidas en el hiperplano al infinito.

Proposición 7. Identifiquemos $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{P}^n \setminus H_0$ y sea $Y_i = X_i/X_0$, $1 \leq i \leq n$ coordenadas afines en $\mathbb{C}^n$. Esta identificación es un homeomorfismo de $\mathbb{C}^n$ en la topología de Zariski con $\mathbb{P}^n \setminus H_0$ dentro de la restricción de la topología de Zariski. Por lo tanto:

1. Si $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}[X_0, ..., X_n]$ es un ideal primo homogéneo que define la variedad proyectiva X, entonces la variedad afín $X \setminus X \cap H_0$ es $V(\mathcal{B}')$, donde

$$\mathcal{B}' = \{f(1, Y_1, ..., Y_n) \mid f \in \mathcal{B}\}.$$

2. Si $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_n]$ es un ideal primo definiendo la variedad afín X, entonces el cerrado de Zariski $\overline{X}$ en $\mathbb{P}^n$ es $V(\mathcal{B}')$, donde $\mathcal{B}'$ es el ideal generado por la homogenización

$$f^*(X) = \sum a_{i_1,\ldots,i_n} X_0^{(d-\sum i_k)} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$$

de los polinomios

$$f(Y) = \sum a_{i_1,\ldots,i_n} Y_1^{i_1} \cdots Y_n^{i_n}$$

en $\mathcal{B}$ donde d es el grado de f.

Notemos que f^* está definido por

$$f^*(X_0, \ldots, X_n) = X_0^d f\left(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}\right).$$

Demostración. Notemos primero que el conjunto abierto $\mathbb{C}^n_f = \{a \in \mathbb{C}^n \mid f(a) \neq 0\}$, $f \in \mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_n]$ es una base para la topología de Zariski de $\mathbb{C}^n$. Segundo, el conjunto abierto $\mathbb{P}^n_f = \{a \in \mathbb{P}^n \mid f(a) \neq 0\}$ con f homogéneo es una base en $\mathbb{P}^n$. Pero si $f \in \mathbb{C}[X]$ es homogéneo y $g(Y) = f(1, Y_1, \ldots, Y_n)$, entonces $\mathbb{P}^n_f \setminus (H_0 \cap \mathbb{P}^n_f) = \mathbb{C}^n_g$; y si $f \in \mathbb{C}[Y]$ y $f^*(X)$ es su homogenización, $\mathbb{P}^n_{f^*} \setminus (H_0 \cap \mathbb{P}^n_{f^*}) = \mathbb{C}^n_f$ con lo que concluimos que (1) y (2) son ciertas. □

Ahora daremos algunos ejemplos para hacer más clara la teoría vista de variedades proyecctivas.

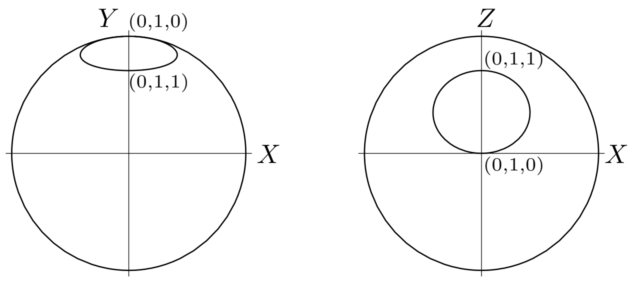
Las variedades afines se corresponden biunívocamente con las variedades proyectivas no contenidas en el hiperplano infinito.

Ejemplo 8. Un error podría hacer creer que $(f_1, ..., f_n)^* = (f_1^*, ..., f_n^*)$. Para ver que esto es falso basta considerar $V = V(Y-X^2, Y+X^2)$, que claramente es el punto $(0, 0)$, luego su cerradura proyectiva es $(0, 0, 1)$. Sin embargo, $V(YZ-X^2, YZ+X^2) = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0)\}$.

Ejemplo 9. En la práctica, identificaremos cada variedad afín con su cerradura proyectiva. Así, por ejemplo, si decimos que la parábola $Y = X^2 + 1$ tiene un punto en el infinito hay que entender que su cerradura proyectiva, dada por $YZ = X^2 + Z^2$, corta a la recta infinita $Z = 0$ en un único punto. Ciertamente, éste es $(0, 1, 0)$.
Si ahora consideramos como recta infinita la recta $Y = 0$, la parte finita de la curva pasa a ser $Z = X^2 + Z^2$, que es una elipse. Como curva en $\mathbb{R}^2$ tiene todos sus puntos finitos, si bien en $\mathbb{C}^2$ corta a la recta del infinito en dos puntos imaginarios.

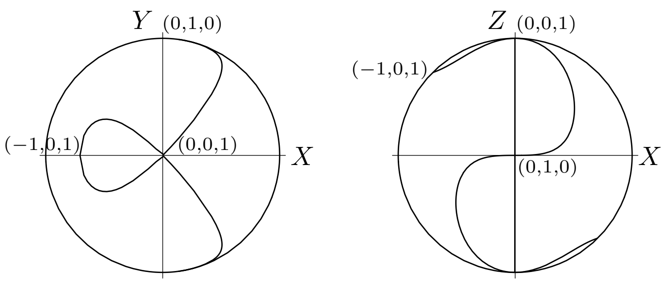
Ejemplo 10. Veamos otra prueba de la irreducibilidad de la curva V dada por $Y^2 = X^3$. Tenemos que su cerradura proyectiva V^* es $Y^2Z = X^3$ y deshomogenizando respecto de Y obtenemos el polinomio $Z - X^3$. Como $Z = X^3$ es irreducible (por ser una gráfica), concluimos que su cerradura proyectiva también es irreducible, pero ésta es V^*, luego V también es irreducible.

Ejemplo 11. Una forma de visualizar el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}^2$ es la siguiente: identificaremos cada punto con la terna de coordenadas homogéneas $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}$ de norma euclidiana 1 y $Z \geqslant 0$. Esto nos da un único punto de la semiesfera unidad, excepto para los puntos infinitos con $Z = 0$ para los que tenemos dos posibilidades (dos puntos antípodas en el ecuador de la esfera). Después podemos proyectar ortogonalmente esta terna sobre el plano XY, con lo que tenemos una correspondencia entre el plano proyectivo y el círculo unidad, biyectiva salvo por que cada punto infinito se corresponde con dos puntos opuestos de la circunferencia unidad. Por ejemplo, las dos figuras siguientes muestran la curva $Y = X^2 + 1$, de modo que la diferencia entre una parábola y una elipse es una cuestión del punto de vista proyectivo. La parábola corresponde al punto de vista de la izquierda, donde unos de los puntos está en la circunferencia unidad, mientras que la elipse corresponde al punto de vista de la derecha



Las siguientes figuras muestran dos vistas de la curva

$$Y^2 = X^2(X + 1)$$



Su cerradura proyectiva es $Y^2 Z = X^2(X + Z)$. Las dos ramas infinitas de la curva se anulan en el punto al infinito $(0, 1, 0)$, que se vuelve finito si tomamos como recta infinita $Y = 0$. La parte finita es entonces la curva $Z = X^3 + ZX^2$, que también puede verse como la gráfica de la función.

$$Z = \frac{X^3}{1 - X^2}.$$

Ahora hay dos puntos infinitos, que son el $(0, 0, 1)$ y $(-1, 0, -1)$ que corresponden con las asíntotas de la función anterior.

Ahora pasemos a algunas definiciones para una variedad proyectiva $X = V(\mathcal{B}) \subset \mathbb{P}^n$.

Definición 28.

1. Si $X_0 = X \setminus X \cap H$ es un abierto de X, $H = V(\sum A_i X_i)$, entonces R_{X_0} es el anillo de funciones racionales $f(X_0, \ldots, X_n)/(\sum a_i X_i)^d$ donde f es homogéneo de grado d, módulo el ideal de $f/(\sum a_i X_i)^d$ con $f \in \mathcal{B}$.

2. Para todo $x \in X$, podemos definir a $\mathcal{O}_{x,X}$ de las siguientes formas equivalentes.

   a) Como el anillo de funciones racionales
   $$f(X_0, \ldots, X_n)/g(X_0, \ldots, X_n), \quad f, g$$
   homogéneos del mismo grado y $g(x) \neq 0$ módulo el ideal de los f/g, $f \in \mathcal{B}$.

   b) Como el anillo de gérmenes de funciones de U en $\mathbb{C}$, donde una vecindad de Zariski de x en X definida sobre funciones racionales f/g, con f, g homogéneos $g(x) \neq 0$.

   c) Como el anillo local $\mathcal{O}_{x,X \setminus X \cap H}$ de x sobre las variedades afines $X \setminus X \cap H$ para un hiperplano H tal que $x \notin H$.

3. Definamos el campo $\mathbb{C}(X)$ de tres formas equivalentes

   a) Como el anillo de funciones racionales
   $$f(X_0, \ldots, X_n)/g(X_0, \ldots, X_n)$$
   y f, g homogéneos del mismo grado y $g \notin \mathcal{B}$, módulo el ideal de f/g, $f \in \mathcal{B}$.

   b) Como los cocientes del campo $\mathcal{O}_{x,X}$ con algún $x \in X$.

   c) Como el campo de funciones de cualquiera de las variedades afines $X \setminus X \cap H$. Llamaremos a este el *campo de funciones de X*.

4. Definimos la $\dim X$ como $\min_{x \in X} \dim T_{x,X}$.

5. Decimos que x es un *punto suave* si y sólo si $\dim T_{x,X} =$ dimX, y un *punto singular* si y sólo si $\dim T_{x,X} > \dim X$. Como en el caso afín X es la unión ajena de conjuntos, cada uno de los cuales es un subconjunto localmente cerrado de Zariski $Y \subset X$ de puntos suaves de $\overline{Y}$ y donde k=dim $\overline{Y} < \dim X$ para todas, pero el estrato abierto que consiste de los puntos suaves en X por si mismo. Más aún, en la topología clásica inducida $\mathbb{P}^n$, aquella donde X es un espacio topológico y los conjuntos son variedades analíticas de dimensión k.

2.4. Variedades Cuasiproyectivas

Si bien los resultados globales de la geometría algebraica se aplican a las variedades proyectivas, las variedades afines son una herramienta muy útil para obtener resultados locales. Más en general, conviene introducir una noción más general de variedad que incluya tanto las variedades afines, como las proyectivas, como los conjuntos que resultan de eliminar un conjunto algebraico en una variedad. Esto nos permitirá descartar, por ejemplo, las singularidades de una función racional. Para ello necesitamos definir una topología en los espacios proyectivos:

Definición 29. Se llama *topología de Zariski en* $\mathbb{P}^n$ a la topología que tiene por cerrados a los conjuntos algebraicos. En lo sucesivo consideraremos a todos los subconjuntos de $\mathbb{P}^n$ como espacios topológicos con esa topología.

De las Propiedades (1) y (2), de la Proposición 6, tenemos que, efectivamente, los conjuntos algebraicos determinan una topología (como en el caso afín). Ahora bien, hemos de tener presente en todo momento que no cumplen la propiedad de Hausdorff. Concretamente, si $V \subset \mathbb{P}^n$ es una variedad y U_1, U_2 son abiertos en V no vacíos, entonces $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, pues en caso contrario podríamos descomponer V en unión de los subconjuntos algebraicos propios: $V = (V \setminus U_1) \cup (V \setminus U_2)$. Así, ningún par de puntos en una variedad puede tener entornos ajenos. Más aún, con esto hemos probado que todo abierto no vacío en una variedad intersecta a cualquier otro abierto no vacío, es decir, es denso.

Definición 30. Se definen *variedades cuasiproyectivas* (o, simplemente, *variedades*) a los subconjuntos abiertos de las variedades proyectivas.

En particular todas las variedades proyectivas son variedades afines. Más concretamente, las variedades proyectivas son las variedades cerradas (en $\mathbb{P}^n$). En efecto, si V es una variedad cerrada, entonces es abierto en una variedad proyectiva W y, al ser denso y cerrado, tenemos $V = W$.
Más aún, si V es una variedad, entonces $\overline{V}$ es una variedad (proyectiva). En efecto, V es abierto en una variedad proyectiva W, pero entonces es denso en W, el cual es cerrado en $\mathbb{P}^n$, luego $W = \overline{V}$.
Dicho de otro modo: hemos definido una variedad V como un abierto en una variedad proyectiva. Ahora acabamos de ver que la única variedad proyectiva en la cual V es abierto es $\overline{V}$.
Las variedades afines también son variedades. En efecto, en primer lugar observemos que $\mathbb{A}^n$ puede identificarse con un abierto en $\mathbb{P}^n$, luego los espacios afines son variedades. En general, si V es una variedad afín entonces V^* es una variedad proyectiva y $V = V^* \cap \mathbb{A}^n$ es abierto en V^*, luego Ves una variedad en el sentido que acabamos de introducir. Más aún, tenemos que $V^* = \overline{V}$.

Observemos que si X es un conjunto algebraico en $\mathbb{A}^n$, entonces $X = X^* \cap \mathbb{A}^n$ y X^* es cerrado en $\mathbb{P}^n$, luego X es cerrado en $\mathbb{A}^n$. Recíprocamente, todo cerrado en $\mathbb{A}^n$ es algebraico. Así, podemos definir directamente la topología de Zariski en $\mathbb{A}^n$ como la que tiene por cerrados a los conjuntos algebraicos, sin hacer referencia a ninguna inmersión de $\mathbb{A}^n$ en $\mathbb{P}^n$.

Todo abierto en una variedad es una variedad. Un cerrado X en una variedad V es una variedad si y sólo si no se puede descomponer como unión de dos subconjuntos cerrados propios. En efecto, tenemos que

$$X = V \cap \overline{X} = \mathbb{A} \cap \overline{V} \cap \overline{X} = \mathbb{A} \cap \overline{X},$$

donde $\mathbb{A}$ es abierto en $\mathbb{P}^n$, luego X es abierto en $\overline{X}$. Por lo tanto X es una variedad si y sólo si lo es $\overline{X}$, es decir, $\overline{X}$ es irreducible, y donde $\overline{X}$ es unión de cerrados si y sólo si lo es X.

Conviene tener presente que una variedad en sentido general es casi lo mismo que una variedad proyectiva: si una variedad proyectiva 'típica' es una esfera, una variedad cuasiproyectiva típica puede ser una esfera menos una circunferencia y menos tres puntos.

La esfera completa se recupera al tomar la cerradura de la variedad.

El hecho de que los anillos de polinomios son Noetherianos (el teorema de Hilbert) se traduce en que las variedades satisfacen la propiedad de compacidad (salvo los que no son espacios de Hausdorff).

Capítulo 3

Aplicaciones y Productos de Variedades

En este capítulo nos ocuparemos de las aplicaciones entre variedades, para esto necesitamos definir funciones entre variedades. El siguiente paso en la teoría es estudiar los productos de variedades afines. Podemos considerar como variedad afín a cualquier producto de variedades afines sin más que identificar $\mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n$ con $\mathbb{A}^{m+n}$ de forma natural. Aquí la topología de Zariski en el producto no es la topología producto. Nos gustaría generalizar esto a variedades cualesquiera, no necesariamente afines.

3.1. Producto de Variedades

El siguiente paso es estudiar la teoría de espacios de productos $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$, $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^m$ y $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Para fijar notación, sean X_i y Y_j coordenadas para el primero y segundo factor respectivamente. Nosotros introducimos la topología de Zariski en estos productos al considerar los ceros de polinomios $f(X,Y)$ en ambos conjuntos de variables. Ahora como consecuencia de lo anterior, daremos las siguientes definiciones.

Definición 31.

1. En $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$, los conjuntos cerrados son $V(f_1,...,f_N), f_i \in \mathbb{C}[X_1,...,X_n,Y_1,...,Y_m]$.

2. En $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^m$, los conjuntos cerrados son $V(f_1,...,f_N), f_i \in \mathbb{C}[X_1,...,X_n,Y_0,...,Y_m]$ donde las f_i son homogéneas en toda Y; es decir

$$f_i = \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_n \\ \sum b_i = d}} (\text{coef.}) X_1^{a_1}...X_n^{a_n} Y_0^{b_0}...Y_m^{b_m}$$

donde d es el grado en Y.

3. En $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, los conjuntos cerrados son $V(f_1, ..., f_N), f_i \in \mathbb{C}[X_0, ..., X_n, Y_0, ..., Y_m]$ donde f_i son las homogéneas separables en toda X y Y, es decir;
$$f_i = \sum_{\substack{a_0,...,a_m=d \\ b_0,...,b_n=e}} (\text{ coef.}) X_0^{a_0} ... X_n^{a_n} Y_0^{b_0} ... Y_m^{b_m}$$
donde (d, e) *es el bi-grado*.

Notemos que en el inciso (1) simplificamos redefiniendo la topología de Zariski en $\mathbb{C}^{n+m}$. En el inciso (2) observemos que en la topología de Zariski los subconjuntos son homeomorfos al caso (1).

Proposición 8.
$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^m \supset \mathbb{C}^n \times (\mathbb{P}^m \setminus H_i) \approx \mathbb{C}^{n+m}$$
donde $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{P}^m \setminus H_i)$ induce una topología.

Demostración. Una base para conjuntos abiertos son los conjuntos donde
$$f(X_1, ..., X_n; \frac{Y_0}{Y_i}, ..., \frac{Y_i}{Y_i}, ..., \frac{Y_m}{Y_i}) \neq 0$$
Donde f es homogénea en el segundo conjunto de variables. Una base en el anillo de polinomios son los conjuntos $g(X_1, ..., X_n; \frac{Y_0}{Y_i}, ..., \frac{Y_i}{Y_i}, ..., \frac{Y_m}{Y_i}) \neq 0$, donde g es algún polinomio. Éstos son los mismos conjuntos si g es obtenido de f poniendo la variable apropiada igual a uno, y f es obtenido homogenizando a g en el segundo conjunto de variables. $\square$

Proposición 9.
$$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \supset (\mathbb{P}^n - H_i) \times (\mathbb{P}^m - H_j) \approx \mathbb{C}^{n+m}$$
donde $(\mathbb{P}^n \setminus H_i) \times (\mathbb{P}^m \setminus H_j)$ induce una topología.

Demostración. Análoga a la Proposición 8. $\square$

Para generalizar esto a variedades cualesquiera, no necesariamente afines introduciremos la aplicación de Segre que nos proporciona una estructura del producto de variedades

3.2. Aplicación de Segre

Sea
$$\sigma : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$$
de manera que manda a la pareja $([X], [Y])$ al punto en $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ cuyas coordenadas son los productos de las coordenadas en $[X]$ y $[Y]$, es decir,
$$\sigma([X_0, ..., X_n], [Y_0, ..., Y_n]) = [..., X_i Y_j, ...]$$
donde las coordenadas en la imagen son los productos de coordenadas X_i y Y_j. La *imagen* de la aplicación de Segre es una variedad algebraica, llamada *variedad de Segre*, y

denotada por $\sum_{n,m}$; si las coordenadas en el contradominio son $Z_{i,j}$, vemos que $\sum_{n,m}$ está definida por los polinomios cuadrátricos $Z_{i,j}Z_{k,l} - Z_{i,l}Z_{k,j}$.

La *superficie de Segre* es $\sum_{1,1} = \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$, esto es, la imagen de la aplicación

$$\sigma : ([X_0, X_1], [Y_0, Y_1]) \longrightarrow [X_0Y_0, X_0Y_1, X_1Y_0, X_1Y_1].$$

Esta variedad está dada por el polinomio cuadrático $Z_0Z_3 - Z_1Z_2$. Las imágenes de $\mathbb{P}^1 \times \{\text{pto}\}$ y de $\{\text{pto}\} \times \mathbb{P}^1$ están dadas por las líneas $Z_1 = \lambda Z_0, Z_3 = \lambda Z_2$ y $Z_2 = \lambda Z_0$, $Z_3 = \lambda Z_1$. Observemos que el polinomio $Z_0Z_3 - Z_1Z_2$ está dado por el determinante

$$\det A = \begin{bmatrix} Z_0 & Z_1 \\ Z_2 & Z_3 \end{bmatrix}$$

donde describe las dos familias de líneas: una familia está dada por una relación lineal entre los renglones de su matriz, y la otra por una relación lineal entre las columnas.

Proposición 10. Sea $Z_{i,j}{}_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}^{nm+n+m}$ y $\mathcal{U}$ el ideal homogéneo generado por los polinomios cuadráticos $Z_{ij}Z_{kl} - Z_{il}Z_{kj}$. Entonces la aplicación.

$$s : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow V(\mathcal{U})$$

$$(x, y) \longmapsto \text{el punto}\, z_{ij} = x_iy_j$$

es un homeomorfismo, y $V(\mathcal{U})$ es una variedad proyectiva.

Demostración. Probemos la inyectividad de s. Supongamos que $s(x, y) = s(x', y')$, entonces $x_iy_j = \lambda x'_iy'_j$ para algún $\lambda \neq 0$, y para toda i, j. Ahora para algún i_0 y j_0, $x_{i_0} \neq 0$ y $y_{j_0} \neq 0$. Así $x'_{i_0}y'_{j_0} \neq 0$, de aquí $x'_{i_0} \neq 0$ y $y'_{j_0} \neq 0$. Si $\mu = x_{i_0}/x'_{i_0}$, $\nu = y_{j_0}/y'_{j_0}$, tenemos que $\lambda = \mu\nu$ y $x_iy_{j_0} = \lambda x'_iy'_{j_0} = \mu\nu x'_iy'_{j_0} = \mu x'_iy_{j_0}$. Entonces, $x_i = \mu x'_i$, para toda i lo cual implica que $x = x'$. Análogamente para $y = y'$. Por lo tanto es inyectiva. Para probar la suprayectividad de s, supongamos que $(z_{ij})_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}}$ satisfacen $z_{ij}z_{kl} = z_{il}z_{kj}$ y donde no todas son no cero. Digamos que $z_{i_0j_0} \neq 0$. Sea $x_i = z_{ij_0}/z_{i_0j_0}$, y $y_j = z_{i_0j}/z_{i_0j_0}$. Por lo tanto

$$(z_{i_0j_0})^2 x_iy_j = z_{ij_0}z_{i_0j} = z_{ij}z_{i_0j_0}$$

es decir, $s(x, y)$ es un punto con coordenadas homogéneas equivalentes a z_{ij}. Por lo tanto la función es un homeomorfismo. Notemos que la topología de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ tiene una base consistente de los conjuntos $f(x, y) \neq 0$, f homogéneo de bi-grado (d, d) es decir del mismo grado que X y que Y. Sabemos que una base está dada por $f \neq 0$, f de bi-grado (d, e). Si decimos que $d \geqslant e$. Entonces

$$\{(x, y) \mid f(x, y) \neq 0\} = \bigcup_{j=0}^{m} \{(x, y) \mid (Y_j^{d-e} f)(x, y) \neq 0\}$$

donde $Y_j^{d-e}f$ tiene bi-grado (d,d). Una polinomial $f(x,y)$ de bi-grado (d,d) se puede escribir como $F(...,X_iY_j,...)$ donde F es homogéneo de grado d. Por lo tanto, el conjunto abierto de $f\neq 0$ en $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m$ es $V(\mathcal{U})\cap$ (el conjunto abierto $F\neq 0$), y la aplicación es un homeomorfismo. Finalmente, para probar que $V(\mathcal{U})$ es una variedad es suficiente probar que $V(\mathcal{U})$ es irreducible en la topología de Zariski. $\square$

De manera general, una variedad producto es irreducible, y por lo tanto es una variedad en virtud del siguiente Lema.

Lema 3. Sean X y Y espacios topológicos irreducibles y dotemos de una topología a $X\times Y$ tal que que induce la topología dada sobre las imagenes $\{x\}\times Y$ de Y y $X\times\{y\}$ de X. Entonces $X\times Y$ es irreducible.

Demostración. Sea $X\times Y=S\cup T$. Para toda $x\in X$, $\{x\}\times Y=S\cap(\{x\}\times Y)\cup T\cap(\{x\}\times Y)$. Así, Y es irreducible, para toda x, $\{x\}\times Y$, está contenida en S o T. Si $s_y\colon X\to X\times Y$ es la aplicación $x\mapsto(x,y)$. Entonces

$$\begin{aligned}\bigcap_y s_y^{-1}(S) &= \{x\mid (x,y)\in S,\text{ para toda } y\}\\ &= \{x\mid \{x\}\times Y\subset S\}.\end{aligned}$$

Donde llamamos a este el conjunto cerrado S'. Similarmente tomemos

$$T'=\bigcap_y s_y^{-1}(T)=\{x\mid \{x\}\times Y\subset T\}.$$

tal que $S'\cup T'=X$. Así X es irreducible, con lo cual tenemos que $X=S'$ o $X=T'$. Por lo tanto $X\times Y=S$ o $X\times Y=T$.

$\square$

De ahora en adelante cuando hablemos de $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m$ nos referiremos a ésta como una variedad proyectiva.

Proposición 11.

1. Si $x\in\mathbb{P}^n$ y $X_1,...,X_n$ son coordenadas afines en una vecindad de x, y $y\in\mathbb{P}^m$ y $Y_1,...,Y_m$ son coordenadas afines en una vecindad de y, entonce $\mathcal{O}_{(x,y),\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m}$ es el anillo de funciones de gérmenes $f(X,Y)/g(X,Y)$, donde $g(x,y)\neq 0$, para una vecindad de (x,y) a $\mathbb{C}$.

2. Si $x\in\mathbb{P}^n$, $y\in\mathbb{P}^m$, entonces el espacio tangente $T_{(x,y),\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m}$ es canónicamente isomorfo a $T_{x,\mathbb{P}^n}\times T_{y,\mathbb{P}^m}$. En particular, la imagen es una variedad no singular de dimensión n.

3. La aplicación s es bi-holomorfa de la variedad compleja $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ en la imagen de s.

Ahora estamos en condiciones de definir las aplicaciones más generales que aparecen en la teoría básica sobre variedades algebraicas.

Definición 32. Sean $X \subset \mathbb{P}^n$ y $Y \subset \mathbb{P}^m$ dos variedades. Decimos que una correspondencia Z de X a Y es una relación inducida por un subconjunto algebraico $Z \subset X \times Y$. Así diremos que Z es una aplicación racional si Z es irreducible y existe un conjunto abierto de Zariski $X_0 \subset X$ tal que cada $x \in X_0$ está relacionado con un único punto de Y a través de Z. El conjunto Z es llamado aplicación birracional si tenemos que $Z^{-1} \subset Y \times X$ es racional, donde

$$Z^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in Z\}$$

es decir, Z y Z^{-1} son ambas aplicaciones racionales.

Definición 33. Sea $Z \subset X \times Y$ una aplicación racional de X a Y, $x \in X$ y $Z[x] = \{y \in Y \mid (x, y) \in Z\}$. Entonces Z es *regular en* x si Z es univaluada ($Z[x]$ es un sólo punto) y $(X_1, ..., X_n)$ y $(Y_1, ..., Y_m)$ son coordenadas afines alrededor de x y de y respectivamente, en alguna vecindad de Zariski U de x, Z es la gráfica de la aplicación:

$$U \longrightarrow Y$$

dada por

$$Y_i = \frac{a_i(X_1, ..., X_n)}{b_i(X_1, ..., X_n)}$$

(donde a_i, b_i son polinomios tal que b_i no se hace cero en U). Z es llamado regular si lo es en todos los puntos x.

Teorema 13 (De eliminación). La proyección

$$p_2 : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^m$$

es cerrada, es decir, si $Z \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ es un conjunto algebraico cerrado, entonces también lo es $p_2(Z)$ (Para la prueba véase [7]).

Observemos que un polinomio $g(z_1, ..., z_n)$ que no se anula en ningún punto de X es una unidad en R_X, y el campo es algebraicamente cerrado.

Si el campo no es algebraicamente cerrado, podríamos tener una función sobre $\mathbb{R}$, por ejemplo consideremos $h = \frac{1}{(x^2+1)}$ y sea $f(x) = 1$ y $g = (x^2 + 1)$ donde g tiene sus ceros fuera del campo. Por lo tanto no sería una función regular.
Pasemos ahora a algunos ejemplos sobre las definiciones de las aplicaciones racionales y regulares.

Ejemplo 12.

Sea la aplicación

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

dada por

$$\varphi(x, y) = [x, y].$$

Notemos que esta aplicación está definida exactamente en $\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$, y manda líneas que pasan por el origen en $\mathbb{C}^2$ a puntos de $\mathbb{P}^1$, y podemos ver que no hay manera de que éste pueda ser extendido de manera continua a todo $\mathbb{C}^2$. Así, podemos pensar a φ como una aplicación racional de $\mathbb{P}^2$ a $\mathbb{P}^1$ y puede ser descrito geométricamente como la proyección desde el punto $P = [0, 0, 1] \in \mathbb{P}^2$ a una línea.

2. Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva y $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^m$ cualquier aplicación regular. Entonces, la gráfica $\tau_\varphi \subset X \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ es un subconjunto cerrado.

   Observemos que no se da el caso de que una aplicación $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^m$ es regular si y sólo si la gráfica τ_φ es un subconjunto cerrado. Por ejemplo, consideremos la aplicación

$$\mu : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$\mu : [X_0, X_1] \longrightarrow [X_0^3, X_0X_1^2 - X_0^3, X_1^3 - X_0^2X_1]$$

   su imágen es la curva cúspide $Z_0Z_2^2 = Z_1^3$. En vista de que la aplicación μ es uno a uno, podemos definir una aplicación inversa de conjuntos $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$; sin embargo, esta aplicación no es regular, pero su gráfica es el subconjunto de $X \times \mathbb{P}^1$ que es a su vez la gráfica de μ y ésta última es un subconjunto cerrado de $X \times \mathbb{P}^1$.

Corolario 8. Si X es una variedad $r-$dimensional y $(f_1, ..., f_k)$ son funciones polinomiales sobre x, entonces cada componente de $X \cap V(f_1, ..., f_k)$ tienen dimensión mayor o igual que $r - k$.

Ahora tenemos el siguiente resultado concerniente a las aplicaciones regulares

$$\varphi : X^r \longrightarrow Y^r$$

que son birracionales, o equivalentemente que $\varphi^* : \mathbb{C}(Y) \longrightarrow \mathbb{C}(X)$ es un isomorfismo, o bien que φ es inyectivo en un subconjunto abierto de Zariski.

Teorema 14 (Principal de Zariski. (Caso Suave)). Sean $\varphi : X^r \longrightarrow Y^r$ una aplicación birracional regular. Donde $X_1, ..., X_n$ y $Y_1, ..., Y_m$ son coordenadas afines de X y Y respectivamente. Sea $x \in X$ y supongamos que $y = \varphi(x)$ es suave en Y. Entonces cualquiera de los siguientes incisos se cumple.

1. φ^{-1} es una correspondencia regular en y. Más precisamente, existe un polinomio $d(Y_1, ..., Y_m)$ tal que $d(y) \neq 0$ y una inversa ψ

$$\psi : Y' = \{y \in Y \mid d(y) \neq 0\} \longrightarrow X$$

de φ definida por

$$X_i = \frac{a_i(Y_1, ..., Y_m)}{d(Y_1, ..., Y_m)}.$$

2. Existe una subvariedad $E \subset X$ que contiene a x de dimensión $r-1$ tal que la

$$\dim \overline{\varphi(E)} \leq r-2.$$

Dicho E es llamado un divisor excepcional. En particular, $\varphi^{-1}(y)$ tiene una componente de dimensión positiva que pasa por x.

Demostración. Como φ^* induce un isomorfismo de $\mathbb{C}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}(X)$ cada función X_i en X es igual a $\frac{a_i(Y)}{b_i(Y)} \circ \varphi$ para algunos polinomios $a_i, b_i (b_i \neq 0\,, \text{sobre Y})$. Usando el hecho de que $\mathcal{O}_{y,Y}$ es un dominio de factorización única tenemos que:

$$X_i = \frac{a_i(Y)}{b_i(Y)} \circ \varphi, \text{con}\, a_i, b_i \text{ primos relativos, en}\, \mathcal{O}_{y,Y}.$$

Entonces, hay dos posibilidades: $b_i(y) \neq 0$ para toda i, o $b_i(y) = 0$ para alguna i.
En el primer caso, sea $d = \prod b_i$ y definamos ψ por

$$X_i = \frac{a_i(Y) \circ \prod_{j \neq i} b_j(Y)}{d(Y)}.$$

En el segundo caso, digamos que $b_1(y) = 0$. Sea $\beta(Y_1, ..., Y_m)$ un polinomio que representa un factor irreducible b_1 en $\mathcal{O}_{y,Y}$. Y sea E una componente de $X \cap V(\beta \circ \varphi)$ que pasa por x. Entonces por el colorario (8) la $\dim E = r-1$. Pero si $b_1 = b_1' \beta$, entonces en X, $a_1 \circ \varphi = X_1\ (b_1' \circ \varphi)\ (\beta \circ \varphi)$, así $a_1 \circ \varphi = 0$ en E. Por lo tanto $a_1 = \beta = 0$ en $\overline{\varphi(E)}$. Ahora $\beta\, \mathcal{O}_{y,Y}$ es un ideal primo, de aquí $\mathcal{B} = \{f \in \mathbb{C}[Y] \mid f \in \beta \mathcal{O}_{y,Y}\}$ es un ideal primo en $\mathbb{C}[Y]$. Más aún $a_1 \notin \mathcal{B}$ por que a_1 y b_1 son primos relativos, así $a_1 \neq 0$ en $V(\mathcal{B})$. Por lo tanto encontraremos que

$$Y \supsetneq V(\mathcal{B}) \supsetneq \overline{\varphi(E)}$$

y así la dim $\overline{\varphi(E)} \leq r-2$. □

La versión más fuerte del Teorema Principal de Zariski sólo asume que $\mathcal{O}_{y,Y}$ es enteramente cerrado en $\mathbb{C}(Y)$.

3.3. Propiedades Globales de Zariski

Ahora volveremos a variedades proyectivas y correspondencias $Z \subset X \times Y$. Para esto primero consideremos las proyecciones naturales

$$p_1 : Z \longrightarrow X$$
$$p_2 : Z \longrightarrow Y.$$

Trataremos a estas proyecciones como en el caso afín puesto que estas aplicaciones son localmente proyecciones de $\mathbb{C}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ y de $\mathbb{C}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{C}^m$. Entonces digamos que $p_1(Z) = X$, $p_2(Z) = Y$ y asumamos que Z es irreducible. Entonces:

$$f(x, y) = \text{máx}\{\dim W \mid W \text{es una componente de } p_1^{-1}p_1(x, y) \text{ sobre } (x, y)\}$$

$$= \text{máx}\{\dim W \mid W \text{es una componente de } Z[x] \text{ sobre y}\}$$

es una función semicontinua superior sobre Z.

Usando el hecho de que $p_1 : Z \longrightarrow X$ es una aplicación cerrada, se sigue que

$$f(x) = \text{máx}\{\dim W \mid \text{W es una componente de } Z[x]\}$$

es una función semicontinua superiormente sobre X. Entonces, como $p_1 : Z \longrightarrow X$ es suave sobre un subconjunto abierto y denso, el valor de $f(x)$ es $\dim Z - \dim X$ casi en todas partes. Por lo tanto hemos descompuesto a X en dos partes.

1. Un conjunto abierto de Zariski X_0 diferente del vacio donde todas las componentes de $Z[x]$ tienen dimensión $\dim Z - \dim X$.

2. Un conjunto cerrado de Zariski F donde alguna componente de $Z[x]$ tiene dimensión más grande; estos puntos son llamados los *puntos fundamentales de* Z.

Notemos que la codimensión en X de todas las componentes de F es al menos dos. De hecho, consideremos $F^* = \{(x, y) \mid f(x, y) > \dim Z - \dim X\} \subset Z$, y mediante la restricción de

$$p_1 : F^* \longrightarrow F$$

entonces toda componente de F^* tiene dimensión a lo más $\dim Z - 1$ mientras que todas las fibras de la restricción de p_1 tienen dimensión al menos $\dim Z - \dim X + 1$, entonces todas las componentes de F tienen dimensión a lo más $\dim X - 2$.

En el caso que trataremos más tarde, el conjunto fundamental, que corresponderá al conjunto de puntos que tienen fibras no triviales tendrá dimensión cero, y por lo tanto será un conjunto finito.

Similarmente para $Z_1 : Y \longrightarrow X$, obtenemos un abierto no vacío $Y_0 \subset Y$ tal que para toda $y \in Y_0$, todas las componentes de $Z^{-1}[y]$ tienen dimensión $\dim Z - \dim Y$. Por lo tanto, si $x \in X_0$, $y \in Y_0$ obtenemos.

$$\dim X + \dim W_1 = \dim Y + \dim W_2.$$

Donde W_1 es cualquier componente de $Z[x]$ y W_2 es cualquier componente de $Z^{-1}[y]$.

Ahora. consideremos más en general a una aplicación racional $Z : X \longrightarrow Y$. Hemos visto que X tiene un subconjunto cerrado F de puntos fundamentales donde $\dim Z[x] \geq 1$ y que la $\operatorname{codim} F \geq 2$. Y por otro lado el conjunto

$$X_{reg} = \{x \in X \mid Z \text{ es regular en x}\}$$

es un subconjunto abierto de Zariski de X diferente del vacío y disjunto de F. Entonces en el caso proyectivo el Teorema Principal de Zariski se enuncia de la siguiente manera.

Teorema 15. Sean X y Y variedades proyectivas y sea $Z \subset X \times Y$. Entonces

$$X \setminus F \setminus \text{las singularidades de X} \subset X_{reg}$$

es decir Z es regular en cada punto suave no fundamental.

Demostración. Aplicando el Teorema 15 a la restricción $p_1 : Z \longrightarrow X$. Obtenemos lo requerido. □

Capítulo 4

Explosión

En la explosión de un punto $p \in \mathbb{A}^n$ la idea es no alterar a $\mathbb{A}^n$ excepto en el punto p, el cual es reemplazado por el conjunto de todas las líneas a través de p, una copia de $\mathbb{P}^{n-1}$. Para hacer esto, debemos escoger un sistema coordenado de $\mathbb{A}^n$ donde el punto p es el origen. Sea B el conjunto de todos los pares (x, l), donde $x \in \mathbb{A}^n$ y $l \in \mathbb{P}^{n-1}$ es una línea a través del origen de $\mathbb{A}^n$ que contiene a x. Esto es

$$B = \{(x, l) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \mid x \in l\} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}.$$

La explosión de $\mathbb{A}^n$ en p es por definición la proyección natural del factor afín

$$B \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^n,$$

$$(x, l) \longmapsto x.$$

Para ver que la explosión $B \to \mathbb{A}^n$ tiene las propiedades deseadas consideremos las fibras de esta aplicación. La fibra de π sobre un punto x es a través del origen simplemente el único punto (x, l), donde l es la única línea a través de x y el origen. De cualquier manera, la fibra sobre el origen es una copia entera de $\mathbb{P}^{n-1}$, es el conjunto $\{(p, \mathbb{P}^{n-1})\} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$, desde el origen está en cada línea a través de él. El morfismo explosión $B \longrightarrow \mathbb{A}^n$ colapsa este $\mathbb{P}^{n-1}$ a un punto y es biyectivo en cada parte (véase la figura 4.1).

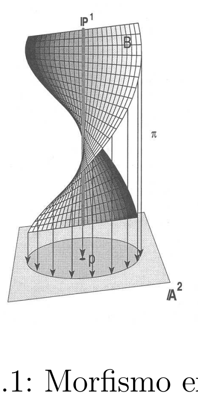


Figura 4.1: Morfismo explosión

Nosotros pretendemos que el conjunto B es una variedad cuasi-proyecctiva. En efecto si $(x_1,...,x_n)$ son las coordenadas de $\mathbb{A}^n$ y $[y_1 : ... : y_n]$ son las coordenadas de $\mathbb{P}^{n-1}$, entonces $(x_1,...,x_n;y_1 : ... : y_n)$ son coordenadas para $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$. Ahora, un punto $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{A}^n$ está en la línea l, representado por $[y_1 : ... : y_n]$ en $\mathbb{P}^{n-1}$, si y sólo si el vector $(x_1,...,x_n)$ es un múltiplo (posiblemente cero) de el vector $(y_1,...,y_n)$ esto es, x pertenece a l si y sólo si la matriz

$$\begin{bmatrix} x_1 & ... & x_n \\ y_1 & ... & y_n \end{bmatrix}$$

tiene rango menor que o igual a uno. Esto se tiene precisamente cuando todas las matrices menores de 2×2 tienen determinante cero. Es decir, el punto $x = (x_1,...,x_n)$ está en $[y_1 : ... : y_n]$ si y sólo si las coordenadas $(x_1,...,x_n;y_1,...,y_n)$ satisfacen las ecuaciones polinomiales $x_iy_j - x_jy_i = 0$ para toda i y j. Así

$$B = V(x_iy_j - x_jy_i \mid 0 \leq i < j \leq n) \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}.$$

El morfismo explosión $B \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^n$ es una proyección, morfismo birracional. En efecto, ya que B es una subvariedad cerrada de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ y π es la restricción de la proyección natural de $\mathbb{A}^n$, la aplicación π es proyectiva por definición. La aplicación

$$\mathbb{A}^n \setminus \{p\} \xrightarrow{\pi^{-1}} B \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1},$$

$$(x_1,...,x_n) \mapsto (x_1,...,x_n;x_1,...,x_n),$$

es un morfismo de variedades quasi-proyectivas, inverso a π en el conjunto abierto denso $\mathbb{A}^n \setminus \{p\}$.
Podemos pensar que esta variedad es obtenida al remover el origen de $\mathbb{A}^n$ y remplazarlo por el conjunto de todas las líneas a través de p en $\mathbb{A}^n$.

Definición 34. Sea $V \subset \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica afín y p un punto de V. La explosión de V en p es la cerradura de Zariski de la preimagen

$$\pi^{-1}(V \setminus \{p\}) \cap B$$

junto con la proyección natural de π a V. Denotamos la explosión de V en p por $B_p(V)$.

$B_p(\mathbb{A}^n) \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^n$ es un isomorfismo si nos restringimos al conjunto abierto $B_p(\mathbb{A}^n) \setminus \pi^{-1}(p)$, la restricción de π a $B_p(V) \setminus \pi^{-1}(p)$ es un isomorfismo sobre $V \setminus \{p\}$. Un ejemplo de esta explosión puede verse en la figura 4.2.

4.1. Generalidades Sobre la Explosión

Al referirnos al estudio de la geometría de superficies, estamos pensando en superficies no singulares.

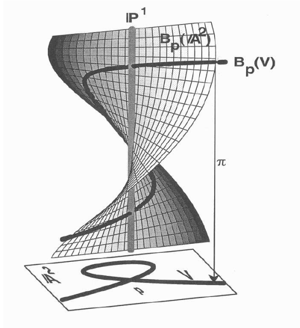


Figura 4.2: Explosión

Ahora consideremos X_1 y X_2, dos superficies no singulares, y sea $Z \subset X_1 \times X_2$ una aplicación birracional entre ellas. Al menos que estemos en el caso de curvas, Z no necesariamente es birregular. Sin embargo como ya observamos en el Capítulo 3, el conjunto fundamental definido por la aplicación es de dimensión cero y por lo tanto finito. Esto quiere decir que el conjunto

$$F_1 = \{x \in X_1 \mid \dim Z[x] \geqslant 1\}$$

es cero dimensional y finito, y de hecho la restricción $Z : X_1 - F_1 \to X_2$ es regular. Los puntos $x \in F_1$ son llamados *puntos fundamentales* en X_1 de Z y las componentes E de sus imágenes $Z[x]$ son *llamadas las curvas excepcionales de* X_2.

Por simetría F_2 es el conjunto de puntos fundamentales $x \in X_2$ tal que $\dim Z^{-1}[x] \geqslant 1$, cada uno de los cuales es explotado en X_1 a un conjunto de curvas excepcionales en X_1. Lo más que podemos decir acerca de Z es que determina una correspondencia birregular entre $X_1 - F_1 - Z^{-1}[F_2]$ y $X_2 - F_2 - Z[F_1]$.

Así deseamos obtener un panorama general de la totalidad de las superficies no sigulares birracionalmente equivalentes unas con otras. La mejor forma de hacer esto, es comenzar con un campo K finitamente generado sobre el conjunto $\mathbb{C}$ de grado de trascendencia dos sobre los complejos. Entonces llamaremos un modelo suave de K a una superficie no singular $X^2 \subset \mathbb{P}^n$ junto con un isomorfismo α sobre $\mathbb{C}$ de $\mathbb{C}(X)$ con K. Ahora bien, a los dos modelos suaves (X_1, α_1), (X_2, α_2) de K, el isomorfismo

$$\mathbb{C}(X_1) \xleftarrow[\alpha_1]{\approx} K \xrightarrow[\alpha_2]{\approx} \mathbb{C}(X_2)$$

induce una correspondencia birracional entre X_1 y X_2.
Ahora introduzcamos un orden parcial en el conjunto de todos los modelos con la siguiente definición.

Definición 35. El modelo (X_1, α_1) domina a (X_2, α_2) o bien $(X_1, \alpha_1) \geq (X_2, \alpha_2)$ si la correspondecia birracional inducida $Z : X_1 \to X_2$ no tiene puntos fundamentales, y por lo tanto es regular.

En particular, si $(X_1, \alpha_1) \geq (X_2, \alpha_2)$ y $(X_1, \alpha_1) \leq (X_2, \alpha_2)$ entonces la correspondencia birracional $Z : X_1 \to X_2$ es birregular y así decimos que los modelos son equivalentes:

$$(X_1, \alpha_1) \sim (X_2, \alpha_2).$$

Una observación es que la operación de explotar un punto x de X, introduce una forma canónica de ir de una clase de equivalencia de modelos (X, α) y un conjunto de puntos correspondientes $x \in X$, a otra clase de equivalencia. Para esto, necesitamos comprobar dos afirmaciones.

Proposición 12.

1. Si X es una variedad proyectiva (de cualquier dimensión) y $U \subset X$ es el conjunto de puntos suaves, entonces para toda $x \in U$, $B_x(X)$ es suave en todos los puntos sobre U.

2. Si X_1 y X_2 son dos variedades (de cualquier dimensión) y $Z \subset X_1 \times X_2$ es una correspondencia birracional bajo la cual $U_1 \subset X_1$ y $U_2 \subset X_2$ se corresponden birregularmente, entonces para todos los puntos suaves $x_1 \in U_1$, $x_2 = Z[x_1] \in U_2$, la correspondencia birracional inducida Z' de $B_{x_1}(X_1)$ y $B_{x_2}(X_2)$ es birregular entre las imágenes inversas de U_1 y U_2.

Antes de probar esto, regresemos nuevamente a la definición de $B_x(\mathbb{P}^n)$, introduzcamos esta vez coordenadas afines apropiadas:

Sean $(X_0, ..., X_n)$ y $(Y_1, ..., Y_n)$ coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}^n$ y en $\mathbb{P}^{n-1}$
y

$$x = (1, 0, ..., 0),\ p_x(a_0, ..., a_n) = (a_1, ..., a_n).$$

Entoces $B_x(\mathbb{P}^n)$ (es el lugar de los ceros en $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ de $X_iY_j - X_jY_i$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$). Así podemos cubrir a $B_x(\mathbb{P}^n)$ por $2n$ afines:

$$U_i = B_x(\mathbb{P}^n) \cap [\mathbb{P}^n \setminus V(X_i) \times \mathbb{P}^{n-1} \setminus V(Y_i)],\ 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$V_j = B_x(\mathbb{P}^n) \cap [\mathbb{P}^n \setminus V(X_0) \times \mathbb{P}^{n-1} \setminus V(Y_j)],\ 1 \leqslant j \leqslant n.$$

I Bajo la proyección $p_1 : B_x(\mathbb{P}^n) \longrightarrow \mathbb{P}^n$, U_i va isomorfamente al afín $\mathbb{P}^n \setminus V(X_i)$ de $\mathbb{P}^n$. Con todos los U_i, cubrimos la parte de $B_x(\mathbb{P}^n)$ que es isomorfa a $\mathbb{P}^n \setminus \{x\}$.

II Las coordenadas afines en el espacio ambiente $\mathbb{C}^{2n-1}$ que contienen a V_j son:

$$Z_1 = \frac{X_1}{X_0}, ..., Z_n = \frac{X_n}{X_0}$$

$$W_1 = \frac{Y_1}{Y_j}, ..., W_n = \frac{Y_n}{Y_j}, \text{sin } W_j.$$

En estas coordenadas, V_j es definido por las $(n-1)$ ecuaciones:

$$Z_1 = Z_j W_1, ..., Z_n = Z_j W_n$$

es decir

$$V_j \cong \mathbb{C}^n$$

bajo la aplicación

$$x \longmapsto (Z_j(x), W_1(x), ..., W_n(x)).$$

III Esto significa que resolviendo las ecuaciones

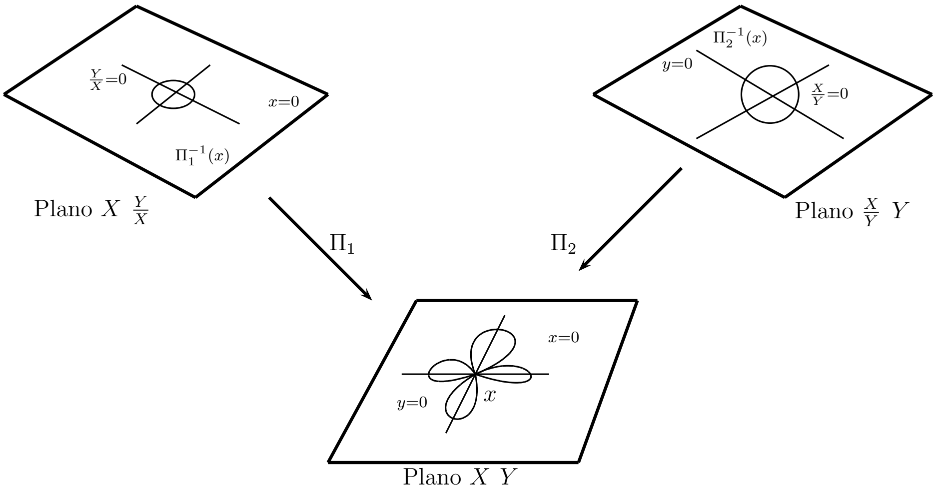
$$W_1 = \frac{Z_1}{Z_j}, ..., W_n = \frac{Z_n}{Z_j}$$

tenemos que $Z_j, Z_1/Z_j, ..., Z_n/Z_j$ son coordenadas en V_j.
Así en el proceso de la explosión, el espacio afín $\mathbb{P}^n \setminus V(X_0)$ con coordenadas $(Z_1, ..., Z_n)$ es remplazado por n-espacios afines V_j con coordenadas $(Z_j, \frac{Z_1}{Z_j}, ..., \frac{Z_n}{Z_j})$ de manera apropiada.

IV Sea $E \cong \{x\} \times \mathbb{P}^{n-1}$ la imagen inversa de x en $B_x(\mathbb{P}^n)$. Como $\{x\} = V(Z_1, ..., Z_n)$, tenemos que

$$\begin{aligned} E \cap V_j &= V(Z_j \frac{Z_1}{Z_j}, ..., Z_j, ..., Z_j \frac{Z_n}{Z_j}) \\ &= V(Z_j). \end{aligned}$$

Así, $E \cap V_j$ tiene coordenadas afines $Z_1/Z_j, ..., Z_n/Z_j$. De esta manera, E es exactamente el espacio proyectivo con coordenadas homogéneas $(Z_1, ..., Z_n)$ y puede ser canónicamente identificado con el espacio proyectivo de subespacios de dimensión uno de $T_{x,\mathbb{P}^n}$. Para el caso $n = 2$ tenemos la siguente figura.



Ahora pasemos a la prueba de la Proposición 12.

Demostración. (Prop 12) Para probar la parte (1) de la Proposición 12 notemos primero que $B_x(\mathbb{P}^n) \setminus E$ es birregular a $\mathbb{P}^n \setminus \{x\}$, así $B_x(X) \setminus E_{x,X}$ es birregular a $X \setminus \{x\}$. Por lo tanto $B_x(X) \setminus E_{x,X}$ es suave en los puntos que corresponden a U. Entonces el hecho es mostrar que $B_x(X)$ es suave tambien en todos los puntos de $E_{x,X}$. Para ver como es $B_x(X)$ cerca de estos puntos, usemos las coordenadas anteriores, y sea $r = \dim X$ donde X está definida cerca de x por $f_1 = ... = f_{n-r} = 0$ y de tal manera que df_i son formas linealmente independientes en cero. Ahora, expandamos cada f_i de la siguiente forma:

$$f_i(Z_1, ..., Z_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}Z_j + f_i'(Z_1, ..., Z_n)$$

donde todo término de f_i' es de grado mayor o igual a 2.

Entonces las funciones:

$$f_i(Z_k\frac{Z_1}{Z_k}, ..., Z_k\frac{Z_n}{Z_k}) = Z_k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{Z_j}{Z_k} + Z_k^2 f_i''(Z_k, \frac{Z_1}{Z_k}, ..., \frac{Z_n}{Z_k})$$

se anulan en $B_x(X) \cap V_k$. Como $B_x(X)$ es por definición la cerradura de Zariski de $X \setminus \{x\}$ en $B_x(\mathbb{P}^n)$, $Z_k \neq 0$ en $B_x(X) \cap V_k$. Por lo tanto

$$f_i^* = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{Z_j}{Z_k} + Z_k f_i''(Z_k, \frac{Z_1}{Z_k}, ..., \frac{Z_n}{Z_k})$$

se anula en $B_x(X) \cap V_k$, y por lo tanto las funciones lineales $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(Z_j/Z_k)$ se anula en $E_{x,X} \cap V_k$. En otras palabras $E_{x,X}$ está contenido en el subespacio lineal L de E con ecuaciones homogéneas $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}Z_j = 0$. Como $x \in X$ es suave, el rango de $(a_{ij}) = n - r$,

así $\dim L = r-1$. Pero $\dim E_{x,X} = r-1$ también, de ahí que $E_{x,X} = L$.
Además para toda $y \in E_{x,X} \cap V_j$, las diferenciales de las $n-r$ funciones lineales de las $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(Z_j/Z_k)$ que definen a L son funciones lineales independientes en $T_{y,E}$. Pero estas diferenciales son precisamente las restricciones de $T_{y,B_x(\mathbb{P}^n)}$ a $T_{y,E}$ de las diferenciales df_i^*. Por lo tanto las diferenciales df_i^* son funciones linealmente independientes en $T_{y,B_x(\mathbb{P}^n)}$. Como $\dim B_x(X) = r$, entonces tenemos que $B_x(X)$ es suave en y y está definida localmente por las ecuaciones $f_i^* =, ..., = f_{n-r}^* = 0$.

Ya que $T_{x,X}$ es el subespacio de $T_{x,\mathbb{P}^n}$ definido por $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} dZ_j = 0$, para toda i; identificamos canónicamente espacios proyectivos de dimensión uno de subespacios de $T_{x,X}$ isomorfos a subespacios lineales de E definidos por $\sum_j a_{ij} Z_j = 0$, para toda i y como $x \in X$ es suave, el cono tangente de X en x es igual al espacio de Zarizki tangente a X en el punto x. Recordemos también que $B_x(X)$ como espacio topológico está descrito intrínsecamente como la únión de una parte abierta $X \setminus \{x\}$ y otra parte cerrada que es el espacio proyectivo asociado a $T_{x,X}$; así reformulando esto, uno encuentra que esta topología puede ser descrita como sigue:

Si $y_n \in X \setminus \{x\}$, satisface que $y_n \longrightarrow x$ cuando $n \longmapsto \infty$, y $D : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una derivación que representa un elemento de $Y_{x,X}$, entonces $y_n \longrightarrow \mathbb{C}D$ en $B_x(X)$ (o en $B_x(\mathbb{P}^n)$) cuando $n \longrightarrow \infty$ si y sólo si existe $\epsilon_n \in \mathbb{C}$, $\epsilon_n \longrightarrow 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{O}_{x,X}$, $Df = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x)}{\epsilon_n}$.

La parte (2) de la proposición es un colorario de esto: en la notación de (2), notemos que la diferencial $dZ(x_1) : T_{x_1,X_1} \xrightarrow{\approx} T_{x_2,X_2}$ induce un isomorfismo $\overline{dZ}$ de E_{x_1,X_1} con E_{x_2,X_2} y por como está descrita la topología en $B_{x_i}(X_i)$ tenemos entonces que

$$\begin{gathered} si\, y_n \in X_1 - \{x_1\}, \text{donde } y_n \longrightarrow x_1 \text{ cuando } n \longrightarrow \infty, \text{ entonces} \\ (y_n \text{ tiene un límite en } B_{x_1}(X_1)) \text{ si y sólo si } (Z[y_n] \text{ posee un límite en } B_{x_2}(X_2)) \\ \text{y si estos límites existen se corresponden adecuadamente bajo } \overline{dZ}. \end{gathered}$$

Por lo tanto Z' es almenos una aplicación biyectiva entre las imágenes inversas de U_i en $B_{x_i}(X_i)$. Entonces por (1) y por el teorema principal de Zariski Z' es regular.

□

Proposición 13. Sea $x \in X^r \subset \mathbb{P}^n$ un punto suave, y escojamos una proyección

$$p_l : X^r \longrightarrow \mathbb{P}^r$$

que es suave en x. Entonces p_l se levanta a una correspondencia birregular:

$$B_x(X) \longrightarrow B_{p(x)}(\mathbb{P}^n)$$

que es suave en todos los puntos de $E_{x,X}$.

En particular, si $Z_1, ..., Z_r$, son coordenadas analíticas de X en una vecindad pequeña de x, es decir una vecindad con una topología usual, entonces en cada punto y de $B_x(X)$ sobre x, $Z_1/Z_j, ..., Z_r/Z_j$ para alguna j, son coordenadas analíticas en una vecindad de y.

Capítulo 5

Resolución de Singularidades de Curvas en una Superficie Suave

En este capítulo se mostrará un caso particular del Teorema de Hironaka. Y veremos algunos ejemplos para entender el proceso de desingularizació de curvas.

5.1. Teorema Fundamental para las Curvas Algebraicas

A continuación presentaremos el Teorema Fundamental y cuya demostración es un extracto de la prueba de Hironaka del caso general.

Teorema 16. Sea X una superficie proyectiva suave y $C \subset X$ un conjunto algebraico cerrado de dimensión uno, es decir, posiblemente reducible pero ninguna componente es un punto. Entonces existe una sucesión de explosiones:

$$\begin{array}{rc} & X_n \\ \pi_n & \downarrow \\ x_{n-1} \in & X_{n-1} \\ & \downarrow \\ & . \\ & . \\ & . \\ \pi_2 & \downarrow \\ x_1 \in & X_1 \\ \pi_1 & \downarrow \\ x_0 \in & X \end{array}$$

donde $\pi = \pi_1 \circ ... \circ \pi_n$, $X_{i+1} = B_{x_i}(X_i)$ y $\pi_{i+1} \colon X_{i+1} \to X_i$ es la proyección natural tal que si

$$F = \{x_0, \pi_1(x_1), \pi_1(\pi_2(x_2)), \ldots, \pi_1(\ldots(\pi_{n-1}(x_{n-1}))\ldots)\}$$

es el conjunto fundamental de la correspondencia π^{-1}, y

$$\tilde{C} \text{ es la cerradura de Zariski de } \pi^{-1}(C \setminus (C \cap F))$$

es la llamada transformación propia de C sobre X_n, entonces $\tilde{C}$ es suave.

Observación 1. Observemos primero que el problema es únicamente local. De hecho como C es una curva entonces el número de puntos singulares es finito, supongamos que son los puntos $\{y_1, \ldots, y_t\}$. Si pudiéramos explotar X en y_1 y en puntos cercanos de y_1 en las superficies resultantes hasta que obtengamos una superficie X_{n_1} sobre X en donde la transformada propia $\tilde{C}_1$ de C es suave en todos los puntos sobre y_1, entonces $\tilde{C}_1$ tendría singularidades sólo en los puntos $\{y'_2, \ldots, y'_t\}$ que corresponden birregularmente a $\{y_2, \ldots, y_t\}$.

Entonces haciendo una inducción sobre t podemos resolver eventualmente las singularidades de C.

Fijemos por lo tanto un punto singular y sobre C y sean Z_1, Z_2 coordenadas analíticas en X en una vecindad de y. Por hipótesis X es una superficie suave en y entonces como observamos en el Capítulo 1, el anillo $\mathcal{O}_{y,X}$ es un dominio de factorización única, de ahí que el ideal $I(C)_y$ de todas las $f \in \mathcal{O}_{y,X}$ tal que $f \equiv 0$ en C es principal. Así, cualquier función $f \in \mathcal{O}_{y,C}$ cuyo divisor sea $(f) = \sum C_i$, cerca del punto y, (donde C_i son las componentes de C) es un generador de $I(C)_y$. Llamamos a tal f una *ecuación local* de C en y. El primer paso es definir dos invariantes que midan que tan mala es la singularidad y de C.

Definición 36 (Multiplicidad). Sea f una ecuación local de C en y y expandamos a f de la forma siguiente

$$f = f_\mu(Z_1, Z_2) + f_{\mu+1}(Z_1, Z_2) + \ldots$$

$$f \text{ homogéneo de grado } k$$

$$f_\mu \neq 0.$$

Entonces $\mu = \mu_y(C)$ es la multiplicidad de C en y. Intrínsecamente esto significa que $f \in \mathfrak{M}^\mu_{y,X}$ pero $f \notin \mathfrak{M}^{\mu+1}_{y,X}$, donde $\mathfrak{M}^\mu_{y,X}$ es el anillo local de X en y y como cualquiera dos ecuaciones locales difieren por una unidad en $\mathcal{O}_{y,X}$, esta μ es independiente de la elección de f. Generalmente, cualquier función analítica f puede ser usada para definir una μ bajo la condición de que f se anule en orden uno sobre cada componente de C y, además, no se anule fuera de C.

Definición 37 (Invariante ν). Sea μ la multiplicidad de f, después de un cambio lineal de coordenadas, asumamos que $f_\mu(1, 0) \neq 0$. Entonces por el Teorema de Preparación de Weierstrass, podemos escribir a f como

$$f = (\text{unidad})(Z_1^\mu + a_1(Z_2)Z_1^{\mu-1} + \ldots + a_\mu(Z_2)) \tag{5.1}$$

donde $a_i(Z_2)$ son series de potencias convergentes en Z_2 cuya multiplicidad (es el grado del término de menor orden) que es mayor o igual a i. Ahora, sea $\tilde{Z}_1 = Z_1 + \frac{a_1(Z_2)}{\mu}$. En términos de las nuevas coordenadas $\tilde{Z}_1, Z_2$ y elevando con su respectiva potencia en la relación (5.1) tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl}
Z_1^{\mu} & = & \left(\tilde{Z}_1 - \dfrac{a_1(Z_2)}{\mu}\right)^{\mu} \\
& = & \tilde{Z}_1^{\mu} - \tilde{Z}_1^{\mu-1}a_1(Z_2) \\
& + & \tilde{Z}_1^{\mu-2}a_1(Z_2)^2\dfrac{(\mu-1)^2}{2!\mu} - \tilde{Z}_1^{\mu-3}a_1(Z_2)^3\dfrac{(\mu-1)(\mu-2)}{3!\mu^2} + \cdots \\
& + & \left(-\dfrac{a_1(Z_2)}{\mu}\right)^{\mu} \\
Z_1^{\mu-1} & = & \left(\tilde{Z}_1 - \dfrac{a_1(Z_2)}{\mu}\right)^{\mu-1} \\
& = & \tilde{Z}_1^{\mu-1} - \tilde{Z}_1^{\mu-2}a_1(Z_2)\dfrac{\mu-1}{\mu} + \tilde{Z}_1^{\mu-3}a_1(Z_2)^2\dfrac{(\mu-1)(\mu-2)}{2!\mu^2} \\
& - & \tilde{Z}_1^{\mu-4}a_1(Z_2)^3\dfrac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{3!\mu^3} + \cdots \\
& + & \left(-\dfrac{a_1(Z_2)}{\mu}\right)^{\mu-1} \\
Z_1^{\mu-2} & = & \left(\tilde{Z}_1 - \dfrac{a_1(Z_2)}{\mu}\right)^{\mu-2} \\
& = & \tilde{Z}_1^{\mu-2} - \tilde{Z}_1^{\mu-3}a_1(Z_2)\dfrac{\mu-2}{\mu} + \tilde{Z}_1^{\mu-4}a_1(Z_2)^2\dfrac{(\mu-2)(\mu-3)}{2!\mu^2} \\
& - & \tilde{Z}_1^{\mu-5}a_1(Z_2)^3\dfrac{(\mu-2)(\mu-2)(\mu-4)}{3!\mu^3} + \cdots \\
& + & \left(-\dfrac{a_1(Z_2)}{\mu}\right)^{\mu-2} \\
. & & \\
. & & \\
. & & \\
Z_1^{0} & = & 1
\end{array}$$

Ahora si multiplicamos Z_1^{μ} por $a_1(Z_2)$ y lo sumamos a $Z_1^{\mu-1}$ el coeficiente de $Z_1^{\mu-1}$ es cero, donde

$$\begin{aligned}
b_2(Z_2) &= a_2(Z_2)^2\frac{(\mu-1)}{2!\mu} - a_1(Z_2)\frac{\mu-1}{\mu} + 1\\
b_3(Z_2) &= -a_1(Z_2)^3\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{3!\mu^2} + a_1(Z_2)^2\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2!\mu^2} - a_1(Z_2)\frac{(\mu-2)}{\mu} + 1\\
&\vdots\\
b_\mu(Z_2) &= \left(-\frac{a_1(Z_2)}{\mu}\right)^\mu + \left(-\frac{a_1(Z_2)}{\mu}\right)^{\mu-1} + \cdots + 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en términos de estas nuevas coordenadas $\tilde{Z}_1, Z_2$, se tiene que

$$f = (\text{unidad})(\tilde{Z}_1^\mu + b_2(Z_2)\tilde{Z}_1^{\mu-2} + \cdots + b_\mu(Z_2))$$

así el coeficiente de $Z_1^{\mu-1}$ es cero, y donde la multiplicidad de los $b_i \geq i$. Definimos

$$v = \min_{2\leq i\leq\mu}\left[\frac{\text{mult}(b_i(Z_2))}{i}\right].$$

Entonces, $v \in \frac{1}{\mu!}\mathbb{Z}$, y $v \geq 1$. Donde v es independiente del sistema analítico de coordenadas, definamos $v_y(C)$ como la mínima v sobre todos los sistemas coordenados Z_1, Z_2.

De hecho, v nos indica, después de explotar en y, si tenemos uno o varios puntos en la proyección del cono tangente de C.

5.2. Interpretacion de v

$$\begin{aligned}
X_1 &= B_y(X)\\
\pi_1 &: X_1 \to X \quad \text{la proyección,}\\
C_1 &= \text{la cerradura de Zariski de } \pi_1^{-1}(C\setminus\{y\}) \text{ y}\\
\{y(1),\ldots,y(k)\} &= C_1 \cap E_{y,X} \text{ es la proyección del cono tangente de } C\,.
\end{aligned}$$

Lema 4. 1. Si $v_y(C) = 1$, entonces $k > 1$ y para toda i

$$\mu_{y(i)}(C_1) < \mu_y(C).$$

2. Si $v_y(C) > 1$, entonces $k = 1$ y se cumple una de las siguientes relaciones

$$\mu_{y(1)}(C_1) < \mu_y(C)$$

o

$$\mu_{y(1)}(C_1) = \mu_y(C) \text{ pero } v_{y(1)}(C_1) \leq v_y(C) - 1.$$

Demostración de (1) y (2). Sea C definida localmente por

$$f = f_\mu + f_{\mu+1} + \cdots = 0.$$

para todo punto de $E_{y,X}$ tenemos las siguientes coordenadas locales $\{Z_1, \frac{Z_2}{Z_1}\}$ o $\{Z_2, \frac{Z_1}{Z_2}\}$. En estas coordenadas, f se transforma

$$\begin{aligned} f &= f_\mu(Z_1, Z_1\frac{Z_2}{Z_1}) + f_{\mu+1}(Z_1, Z_1\frac{Z_2}{Z_1}) + \cdots \\ &= Z_1^\mu f_\mu(1, \frac{Z_2}{Z_1}) + Z_1^{\mu+1} f_{\mu+1}(1, \frac{Z_2}{Z_1}) + \cdots \\ &= Z_1^\mu [f_\mu(1, \frac{Z_2}{Z_1}) + Z_1 f_{\mu+1}(1, \frac{Z_2}{Z_1}) + \cdots] \end{aligned}$$

Definamos

$$f_1^* = f_\mu(1, \frac{Z_2}{Z_1}) + Z_1 f_{\mu+1}(1, \frac{Z_2}{Z_1}) + \cdots$$

y para las coordenadas $Z_2, \frac{Z_1}{Z_2}$. Análogamente tenemos

$$f = Z_2^\mu f_\mu(\frac{Z_1}{Z_2}, 1) + Z_2 f_{\mu+1}(\frac{Z_1}{Z_2}, 1) + \cdots$$

Para los puntos de las primeras coordenadas notemos que $V(Z_1)$ es $E_{y,X}$, y como por definición de $E_{y,X}$ no es una componente de C_1, f_1^* debe anularse en C_1. Entonces de aquí f y f_1^* se anulan en orden uno sobre todas las componentes de C_1, ya que cada una de estas es birregular a las componentes de C casi en todas partes, f_1^* es una ecuación local de C_1. Análogamente en coordenadas $\{Z_2, \frac{Z_1}{Z_2}\}$. Entonces, f_2^* es una ecuación local de C_1. En particular, $C_1 \cap E_{y,X}$ está definida por

$$Z_1 = f_\mu(1, \frac{Z_2}{Z_1}) = 0$$

o

$$Z_2 = f_\mu(\frac{Z_1}{Z_2}, 1) = 0.$$

Identificando $E_{y,X}$ con $\mathbb{P}^1$, con coordenadas homogéneas Z_1, Z_2 tenemos que $C_1 \cap E_{y,X}$ corresponde a las raíces de la ecuación homogénea $f_\mu(Z_1, Z_2) = 0$. De esta manera $k = 1$ si y sólo si f_μ es una μ-ésima potencia de una forma lineal.

Ahora, sean Z_1, Z_2 coordenadas en donde

$$f = (\text{unidad})[Z_1^\mu + b_2(Z_2)Z_1^{\mu-2} + \cdots + b_\mu(Z_2)], \tag{5.2}$$

y $v_y(C) = \text{mín}\left(\frac{\text{mult} b_i}{i}\right)$. Entonces

$$f_\mu = (\text{constante})[Z_1^\mu + (\text{términos de grado 2 de } b_2)Z_1^{\mu-2} + \cdots + b_\mu(Z_2)]$$

de aquí f_μ es una μ-ésima potencia si y sólo si para toda i, b_i comienza con términos de grado mayor que i si y sólo si $v_y(C) > 1$.

Esto prueba la primera parte de 1 y 2.

Ahora si $v = 1$, digamos que $y(i)$ es el punto dado por ($Z_1 = 0$ y $\frac{Z_2}{Z_1} = \alpha$.) como $k > 1$, $\frac{Z_2}{Z_1} = \alpha$ tenemos que $\frac{Z_2}{Z_1} = \alpha$ es una raíz de $f_\mu(1, \frac{Z_2}{Z_1}) = 0$ con multiplicidad $\mu' < \mu$ y usando el algoritmo de Euclides sobre f_1^* llegamos a la siguiente expresión

$$f_1^* = f_\mu\left(1, \frac{Z_2}{Z_1}\right) + Z_1 f_{\mu+1}\left(1, \frac{Z_2}{Z_1}\right) + \cdots$$

como $\frac{Z_2}{Z_1} = \alpha$ es raíz de f_μ entonces

$$f_1^* = \left(\frac{Z_2}{Z_1} - \alpha\right)^M f_\mu\left(1, \frac{Z_2}{Z_1}\right) + Z_1 f_{\mu+1}\left(1, \frac{Z_2}{Z_1}\right)$$

donde $M < \mu$, por lo tanto, haciendo $M = \mu'$ y $f_\mu(1, \frac{Z_2}{Z_1}) = A$, $f_{\mu+1}(1, \frac{Z_2}{Z_1}) = B$ obtenemos $f_1^* = (\frac{Z_2}{Z_1} - \alpha)^{\mu'} A + Z_1 B$ con $A(y) \neq 0$. De aquí que si f_1^* es expandido en series de potencias sobre las coordenadas $\frac{Z_2}{Z_1} - \alpha$ y Z_1 cerca de y, entonces los términos de grado menor tienen orden a lo mas μ', es decir $\mu_{y(i)}(C_1) \leq \mu' < \mu$. Así hemos probado 1.
Ahora, si $v > 1$. Entonces $f_\mu = (\text{constante}) Z_i^\mu$ y el único punto $y(1)$ sobre y en C_1 es el punto $Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = 0$, usando la ecuación 9 encontramos

$$f_2^* = (\text{unidad})\left[(\frac{Z_1}{Z_2})^\mu + \frac{b_2(Z_1)}{Z_2^2}(\frac{Z_1}{Z_2})^{\mu-2} + \cdots + \frac{b_\mu(Z_1)}{Z_2^\mu}\right]. \tag{5.3}$$

Esto pasa ya que multiplicando por un uno a la relación 5.3 tenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} f &= (\text{unidad})\left[\frac{Z_1^\mu Z_2^\mu}{Z_2^\mu} + \frac{b_2(Z_2)}{Z_2^\mu} Z_1^{\mu-2} + \cdots + \frac{b_\mu(Z_2)}{Z_2^\mu}\right] \\ f &= (\text{unidad})\left[Z_2^\mu\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^\mu + \frac{b_2(Z_2)}{Z_2^2}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{\mu-2} + \cdots + \frac{b_\mu(Z_2)}{Z_2^\mu}\right] \\ &= Z_2^\mu(\text{unidad})\left[\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^\mu + \frac{b_2(Z_2)}{Z_2^2}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{\mu-2} + \cdots + \frac{b_\mu(Z_2)}{Z_2^\mu}\right] \end{aligned}$$

por lo tanto $f_2^* = (\text{unidad})\left[\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^\mu + \frac{b_2(Z_2)}{Z_2^2}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{\mu-2} + \cdots + \frac{b_\mu(Z_2)}{Z_2^\mu}\right]$.
Si $\mu_{y(1)}(C_1) < \mu$ entonces no hay nada que probar. Tomemos $\mu_{y(1)}(C_1) = \mu$. Entonces podemos definir v si escribimos a f_2^* de la siguiente manera

$$f_2^* = (\text{unidad})\left[\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^\mu + b_2'(Z_2)\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{\mu-2} + \cdots + b_\mu'(Z_2)\right]$$

donde $b_i'(Z_2) = \frac{b_2(Z_2)}{Z_2^i}$. Entonces

$$\begin{aligned} v_{y(1)}(C_1) &\leq \min_{2\leq i\leq \mu}\left[\frac{\text{mult} b_i'(Z_2)}{i}\right] \\ &= \min_{2\leq i\leq \mu}\left[\frac{\text{mult} b_i(Z_2)-i}{i}\right] \\ &= \min_{2\leq i\leq \mu}\left[\frac{\text{mult} b_i(Z_2)}{i}-1\right] \end{aligned}$$

por definición $v_y(C) = \min_{2\leq i\leq\mu} \frac{\text{mult} b_i(Z_2)}{i}$. Por lo tanto $v_{y(1)}(C_1) = v_y(C) - 1$.
Esto prueba la parte 2, y por lo que se concluye el Teorema. □

Ahora por último daremos algunos ejemplos, para hacer visible la teoría desarrollada.

Ejemplo 13.

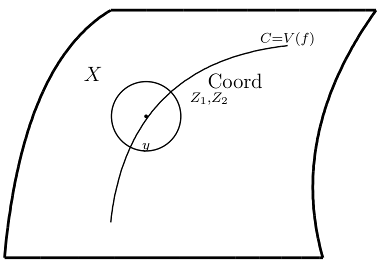
1. Si $y \in C$ es un punto suave. Entonces $\mu = 1$, y el cono tangente proyectivizado a $E_{y,C}$ consiste de un solo punto $y^{(1)}$. Éste corresponde al subespacio $T_{y,C} \subset T_{y,X}$. Como μ puede únicamente disminuir, entonces $\mu_{y(1)}(C_1) = 1$, es decir, $y^{(1)}$ sigue siendo suave en C_1. Más aún, C_1 y $E_{y,X}$ se intersectan transversalmente sobre $B_y(X)$, de hecho, si C tiene una ecuación local

$$f = Z_1 + f_2 + f_3 + \cdots$$

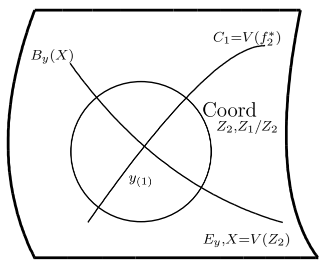
entonces $y^{(1)}$ es el punto $Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = 0$ y en este punto $E_{y,X}$ es $Z_2 = 0$ y C_1 tiene la ecuación

$$\begin{aligned} f_2^* &= \frac{Z_1}{Z_2} + Z_2 f_2\left(\frac{Z_1}{Z_2}, 1\right) + \cdots \\ &= \frac{Z_1}{Z_2} + f_2(0,1)Z_2 + \text{términos de orden superior.} \end{aligned}$$

Así, las líneas tangentes a $E_{y,X}$ y C_1 en $y^{(1)}$ son distintas.



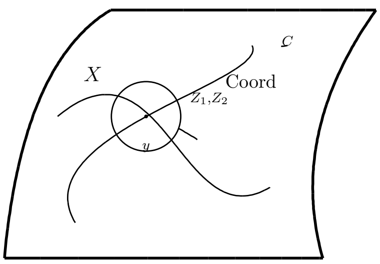
Antes



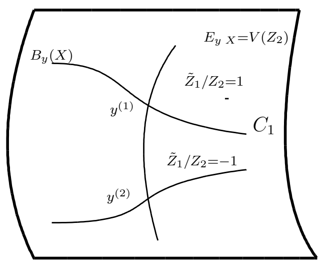
Después

2. Digamos que $y \in C$ es un punto ordinario doble, es decir, las tangentes en C son distintas. Entonces $\mu = 2$ y el cono tangente proyectivizado $E_{y,C}$ consiste de dos puntos $y^{(1)}, y^{(2)}$, entonces por (2) el invariante v debe ser igual a 1. De hecho, C tiene la ecuación local
$$f = Z_1^2 - Z_2^2 + f_3 + f_4 + \cdots$$
en coordenadas adecuadas. Aplicando el Teorema de preparación de Weierstass:
$$f = (\text{unidad})[Z_1^2 + a_1(Z_2)Z_1 + a_2(Z_2)]$$
donde la $\text{mult}(a_1(Z_2)) \geq 2$; y $a_2(Z_2) = -Z_2^2 +$ términos de orden superior, entonces
$$f = (\text{unidad})[\tilde{Z}_1^2 + b_2(Z_2)]$$
donde $b_2(Z_2) = -Z_2^2 + \beta_3 Z_2^3 + \beta_4 Z_2^4 + \cdots$. En las coordenadas $\tilde{Z}_1, Z_2$

$E_{y.C}$ es igual a los dos puntos que cumplen
$$Z_2 = 0, \frac{\tilde{Z}_1}{Z_2} = 1, Z_2 = 0 \, y \, \frac{\tilde{Z}_1}{Z_2} = -1$$
donde $y^{(1)}$ es $Z_2 = 0, \frac{\tilde{Z}_1}{Z_2} = 1$ y $y^{(2)}$ es el otro par. Entonces C_1 es la curva
$$\left(\frac{\tilde{Z}_1}{Z_2} + 1\right)\left(\frac{\tilde{Z}_1}{Z_2} - 1\right) + \beta_3 Z_2 + \beta_4 Z_2^2 + \cdots = 0$$
donde en particular C_1 es suave en $y^{(1)}$ y $y^{(2)}$ e interseca $E_{y,X}$ transversalmente en dos puntos.



Antes



Después

3. Veamos ahora dobles puntos $y \in C$ con sólo una línea tangente. Sus ecuaciones locales se ven
$$f = (\text{unidad})[\tilde{Z}_1^2 + b_2(Z_2)]$$

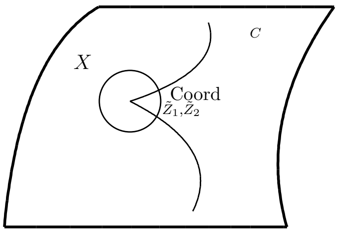
donde la mult $b_2 \geq 3$. Sea $k = \text{mult } b_2 = 2v$. Entonces $b_2(Z_2) = \eta(Z_2)Z_v^k$, con $\eta(0) \neq 0$. Así $\eta(Z_2) = \zeta(Z_2)^k$ para alguna función analítica ζ. Así, si $\tilde{Z}_2 = \zeta(Z_2)Z_2$, $\tilde{Z}_1$ y $\tilde{Z}_2$ son coordenadas locales en donde f es

$$f = (\text{unidad})[\tilde{Z}_1^2 + \tilde{Z}_2^k].$$

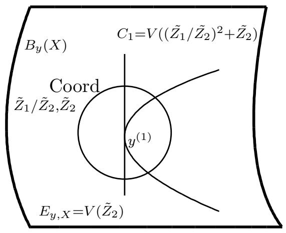
Entonces, salvo isomorfismos analíticos, tenemos un sólo tipo de puntos dobles para cada k. El caso más simple es $k = 3$, la cúspide. Aquí $E_{y,C}$ es sólo un punto $y^{(1)}$ dado por $\tilde{Z}_2 = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_2} = 0$ y C_1 es la curva

$$\left(\frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_2}\right)^2 + \tilde{Z}_2 = 0.$$

Espero que la teor'ia y el m'etodo de explosi'on para estudiar singularidades en variedades algebraicas, desarrollados en esta Tesis sirva para motivar a los estudiantes de nuestra Facultad as'i como a los de otras instituciones a entrar en este mundo fascinante del estudio de las singularidades en variedaes algebraicas.



Antes



Después

.

Bibliografía

[1] C.T.J. Dodson and Philip E. Parker. A Users Guide to Algebraic Topology. Klumer Academic Publishers. 1997.

[2] Fultón William. Introducción a la Geometría Algebraica. Editorial Reverte 1969.

[3] Harstshorne Robin. Algebraic Geometry. Springer (1977).

[4] Klaus Fritzsche, Hans Gravert. From Holomorphic Functions to Complex Manilfolds. Springer 2002.

[5] Kunz Ernst. Intrducctión to Conmmutative y Algebraic Geometry. Birkaurer Bostón 1985.

[6] Karen E. Smith, Laurin Kahanpaa, Pekka Kekalainen, William Traves. An Invitatión to Algebraic Geometry. Springer. 1998.

[7] Lang S. Algebra. Addison Wesley. 1993.

[8] Marcos Sebastian. Introducao à Geometría analítica complexa, Projeto Euclides, 2004

[9] Munford David. Geometría Algebraic Geometri I. Complex Projective Varieties. Springer, Heidelberg (1976).

[10] Munkres. Topologia segunda Edicion Prentice Hall. 2000.

[11] Miranda R. Agebraic Curves y Riemann Surfaces. American Mathematical Society.1995.

[12] Prieto C. Topología Básica. Fondo de Cultura Economico. 2004

[13] Shafarevich.I.R. Basic Algebraic Geometry. Springer-Verlang., Berlin Heidelberg. New York 1977.

[14] Zariski Oscar, Pierre Samuel. Conmmutative Algebra volumen I. Springer-Verlang, New York Heidelberg Berlin (1960).