UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LÍMITES INFINITOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A:

MARÍA BERENICE MENDOZA GÁMEZ

DIRECTORA DE TESIS: M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

México, D.F. 2006

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

1. Datos del alumno
   Mendoza
   Gámez
   María Berenice
   56 73 95 68
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   093535150
2. Datos del tutor
   M. en C.
   Elena
   de Oteyza
   de Oteyza
3. Datos del sinodal 1
   M. en C.
   Emma
   Lam
   Osnaya
4. Datos del sinodal 2
   Dr.
   Fernando
   Brambila
   Paz
5. Datos del sinodal 3
   M. en C.
   Alejandro
   Bravo
   Mojica
6. Datos del sinodal 4
   Dr.
   Carlos
   Hernández
   Garciadiego
7. Datos del trabajo escrito
   Límites infinitos
   75 p.
   2006

ÍNDICE

Introducción 2

Límites Infinitos 4

Límites al Infinito 25

Límites Infinitos con variable al infinito 41

Regla de L'Hôpital 55

Aplicaciones 69

Bibliografía 75

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se ha intentado abordar con detalle el concepto de límite infinito de funciones. Comúnmente los libros de texto tratan los límites infinitos de manera superficial. Más aún, los límites cuando la variable tiende a menos infinito, en ocasiones ni siquiera son tratados.

El trabajo está dividido en dos partes:

La primera de ellas se dedica al estudio de los límites en los que la variable se aproxima a un número real dado y los valores de la función tienden a infinito o menos infinito, es decir, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ o $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

En la segunda, se considera el caso en el que la variable tiende a infinito o menos infinito. Esta parte a su vez se dividió en dos, considerando primero el caso en el que el límite tiende a un número L, es decir, $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ y posteriormente cuando tiende a infinito o menos infinito, es decir, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Todas las demostraciones se desarrollan de manera formal, intentando lograr, en la medida de lo posible, que el presente trabajo no se limite a presentar una lista de "recetas" que permitan calcular límites.

Se ha incluido lo que consideramos, son todas las variantes que se puedan presentar, a fin de contar, al final, con la herramienta suficiente para poder resolver límites de los estilos mencionados.

Para facilitar la comprensión, cada definición está acompañada de una gráfica, asimismo se presenta, al menos un ejemplo que permita aplicar inmediatamente cada una de las definiciones y teoremas.

Cada uno de los ejemplos está acompañado de la gráfica de la función considerada, con el fin de verificar geométricamente el resultado obtenido.

Destaca el cálculo de límites de funciones de la forma $f(x)^{g(x)}$, que si bien pueden ser calculados la mayoría de las veces escribiendo la expresión como $e^{g(x) \ln f(x)}$, puede presentar dificultades cuando $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$. Se incluye, para tales casos, un teorema que facilita el cálculo.

También merece mención especial la regla de L'Hôpital, a la que se a dedicado parte de este trabajo. De los casos considerados, posiblemente resulte más interesante el que corresponde a la indeterminación ∞/∞ .

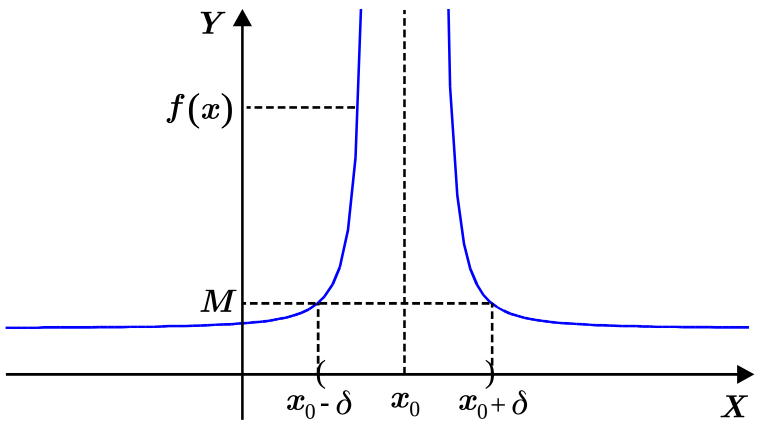
Las gráficas que aquí se presentan fueron generadas usando el programa Scientific Work Place y exportadas al programa Corel Draw, en donde fueron retocadas.

Por último, cabe mencionar que este trabajo se realizó dentro de uno de los seminarios de titulación que organizó el Departamento de Matemáticas y cuya realización se logró gracias al empeño del entonces coordinador de la carrera de matemáticas, el M. en C. Alejandro Bravo Mojica.

PRIMERA PARTE

En esta primera sección, consideraremos límites de funciones en los que la variable se aproxima a un punto $x_0 \in \rho$ y los valores de la función f crecen o decrecen indefinidamente.

Definición 1: Sea f una función definida en (a,b) excepto quizás en un punto $x_0 \in (a,b)$. Si para cada $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a,b)$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) > M$, decimos que f tiende a ∞ cuando x tiende a x_0 y escribimos: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.



Ejemplo 1: Sea $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$. Probar que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$.

Demostración: Dado $M > 0$, sea $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$

Si $0 < |x-1| < \delta$, entonces

$$|x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 < \delta^2$$

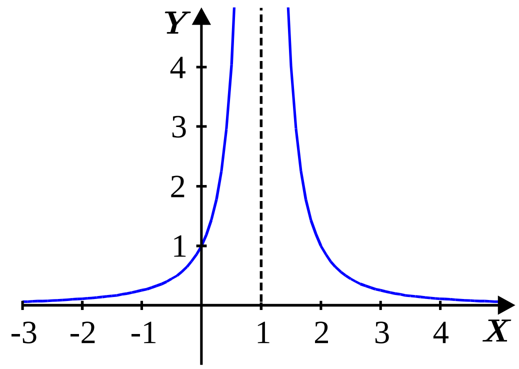
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(x-1)^2} > \frac{1}{\delta^2}.$$

Pero como $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$ entonces $\sqrt{M} = \dfrac{1}{\delta}$. Así $M = \dfrac{1}{\delta^2}$

entonces $\dfrac{1}{(x-1)^2} > \dfrac{1}{\delta^2} = M$.

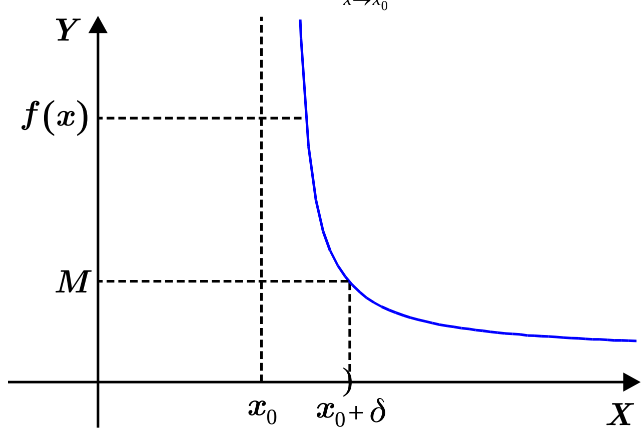
Esto significa que $\dfrac{1}{(x-1)^2} > M$ si $0 < |x-1| < \delta$

entonces por la definición 1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \infty$.



En particular, podemos considerar los casos en los que nos acercamos a x_0 solamente por un lado.

Definición 2: Sea f una función definida en (x_0, b). Si para cada $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0, b)$ y $|x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) > M$, decimos que f tiende a ∞ cuando x tiende a x_0 por la derecha y escribimos: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$.



Ejemplo 2: Sea $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$. Probar que $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \infty$.

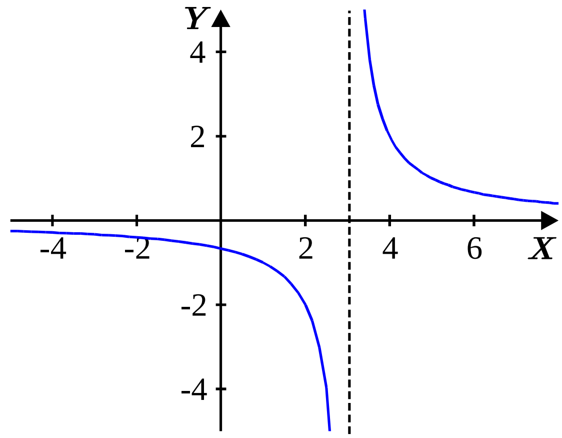
Demostración: Dado cualquier $M > 0$, sea $\delta = \dfrac{1}{M}$

Si $|x - 3| < \delta$, con $x > 3$ entonces

$$0 < x - 3 < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x-3} > \frac{1}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{x-3} > \frac{2}{\delta}.$$

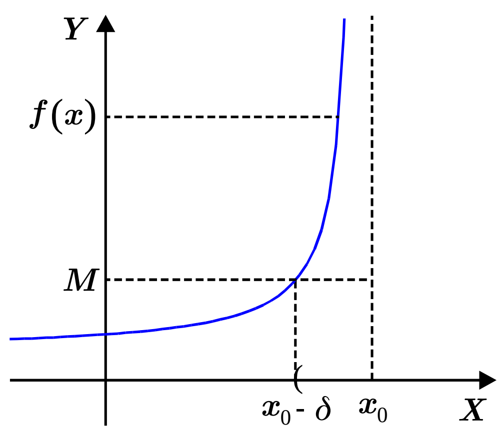
Como $\delta = \dfrac{1}{M}$ entonces $\dfrac{2}{x-3} > \dfrac{2}{\frac{1}{M}} = 2M > M$, es decir, $f(x) > M$ si $0 < x - 3 < \delta$,

entonces por la definición 2. $\lim_{x \to 3^+} \frac{2}{x-3} = \infty$.



□

Definición 3: Sea f una función definida en (a, x_0). Si para cada $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a, x_0)$ y $|x_0 - x| < \delta$ entonces $f(x) > M$, decimos que f tiende a ∞ cuando x tiende a x_0 por la izquierda y escribimos: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$.



Ejemplo 3: Sea $f(x) = -\frac{1}{x}$. Probar que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \infty$.

Demostración: Dado cualquier $M > 0$, sea $\delta = \frac{1}{M}$

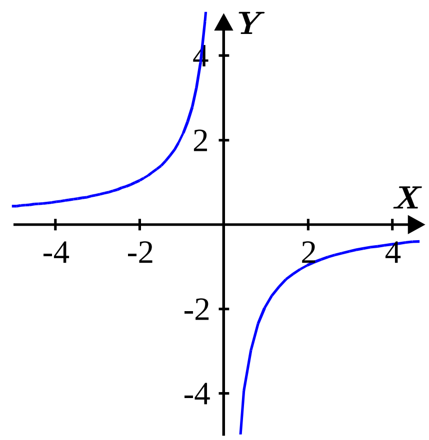
Si $|x| < \delta$, con $x < 0$ entonces

$0 < -x < \delta \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta}$.

Como $\delta = \frac{1}{M}$, entonces $M = \frac{1}{\delta}$

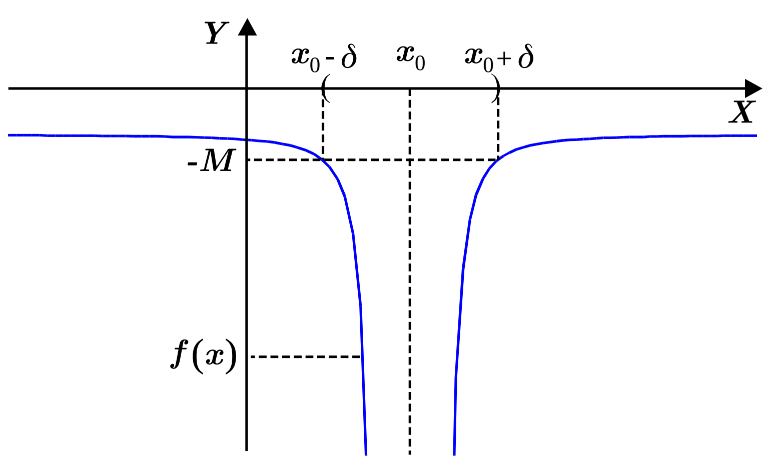
así $-\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = M$ si $|x| < \delta$ y $x < 0$

entonces por la definición 3. $\lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{x} = \infty$.



□

Definición 4: Sea f una función definida en (a,b) excepto quizás en un punto $x_0 \in (a,b)$. Si para cada $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a,b)$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) < -M$, decimos que f tiende a $-\infty$ cuando x tiende a x_0 y escribimos: $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.



Ejemplo 4: Sea $f(x) = \dfrac{x-4}{(x-2)^2}$. Probar que $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$.

Demostración: Dado cualquier $M > 0$, sea $\delta < 1$ y $\delta \le \dfrac{1}{\sqrt{M}}$

y $0 < |x-2| < \delta$, entonces $-1 < x-2 < 1$

$$\Rightarrow -3 < x-4 < -1$$

de donde $\dfrac{x-4}{(x-2)^2} < -\dfrac{1}{(x-2)^2}$.

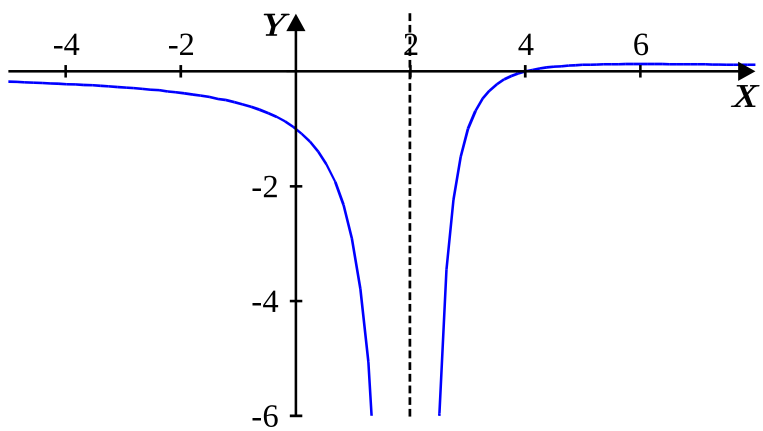
Como $0 < |x-2| < \dfrac{1}{\sqrt{M}}$ entonces $(x-2)^2 < \dfrac{1}{M}$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-2)^2} > M$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{(x-2)^2} < -M$$

de donde $\dfrac{x-4}{(x-2)^2} < -\dfrac{1}{(x-2)^2} < -M$

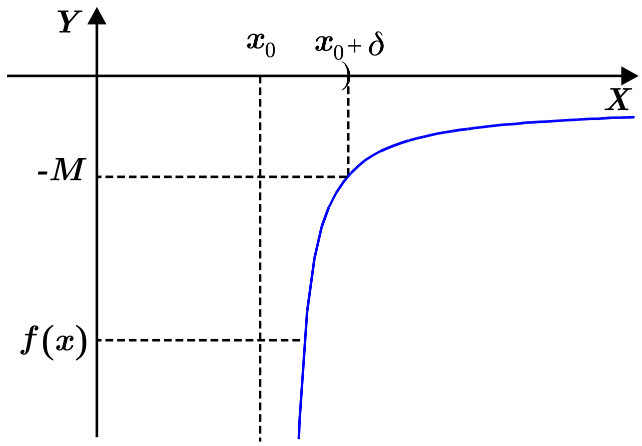
entonces por la definición 4. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x-4}{(x-2)^2} = -\infty$.



□

De la misma manera que antes tenemos los casos en los que nos acercamos al punto x_0, solamente por un lado.

Definición 5: Sea f una función definida en (x_0, b). Si para cada $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0, b)$ y $|x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) < -M$, decimos que f tiende a $-\infty$ cuando x tiende a x_0 por la derecha y escribimos: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.



Ejemplo 5: Sea $f(x) = -\frac{1}{x}$. Probar que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

Demostración: Dado cualquier $M > 0$, sea $\delta = \frac{1}{M}$

Si $|x - 0| < \delta$, con $x > 0$ entonces

$$0 < x < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta}$$

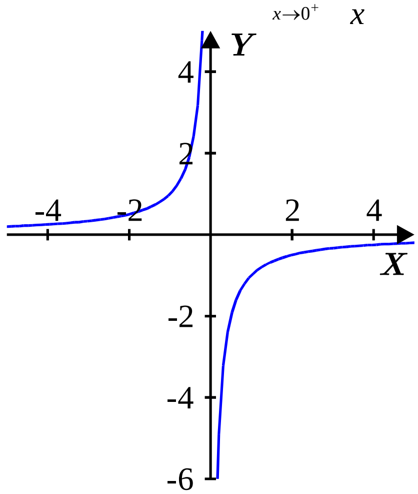
$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta} \; .$$

Como $\delta = \frac{1}{M}$, entonces $-\delta = -\frac{1}{M}$,

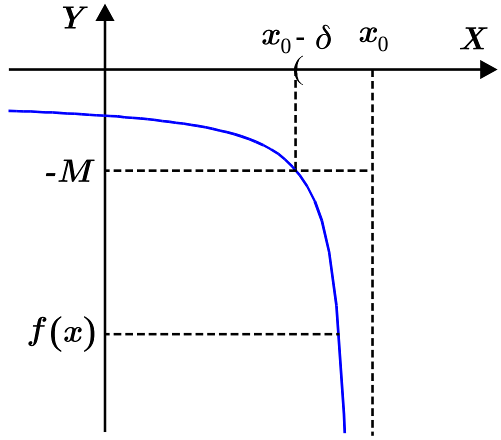
despejando: $-M = -\frac{1}{\delta}$ y como

$-\frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta}$ entonces $-\frac{1}{x} < -M$ si $|x| < \delta$ con $x > 0$,

entonces por la definición 5. $\lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$.



Definición 6: Sea f una función definida en (a, x_0). Si para cada $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a, x_0)$ y $|x_0 - x| < \delta$ entonces $f(x) < -M$, decimos que f tiende a $-\infty$ cuando x tiende a x_0 por la izquierda y escribimos: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.



Ejemplo 6: Sea $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$. Probar que $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$.

Demostración: Dado cualquier $M > 0$, sea $\delta = \dfrac{1}{M}$.

Si $|x-3| < \delta$, con $x < 3$ entonces

$0 < 3 - x < \delta \quad \Rightarrow \quad 0 > x - 3 > -\delta$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x-3} < -\frac{1}{\delta} \quad .$$

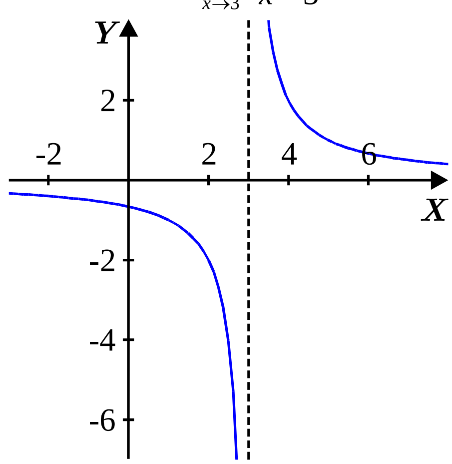
Como $\delta = \dfrac{1}{M}$, entonces $-\delta = -\dfrac{1}{M}$

despejando: $-M = -\dfrac{1}{\delta}$

y como $\dfrac{1}{x-3} < -\dfrac{1}{\delta}$ entonces

$\dfrac{2}{x-3} < -\dfrac{2}{\delta} = -2M < -M$ si $|x-3| < \delta$ con $x < 3$

entonces por la definición 6. $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{2}{x-3} = -\infty$.



Teorema 1. Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$, entonces

a) $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=\infty$.

b) $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\infty$.

c) Sea $c\in$ P, entonces i) $\lim_{x\to x_0} cf(x)=\infty$, si $c>0$.

ii) $\lim_{x\to x_0} cf(x)=-\infty$, si $c<0$.

d) $\lim_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$, si $f(x)\neq 0$.

Demostración:

a) Sabemos que $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ y $Dom\, f+g=Dom\, f\cap Dom\, g$.
Por hipótesis $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ significa que a cada número $M_1>0$ le corresponde un número $\delta_1>0$ tal que si $x\in Dom\, f$ y $0<|x-x_0|<\delta_1$ entonces $f(x)>M_1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$ significa que a cada número $M_2>0$ le corresponde un número $\delta_2>0$ tal que si $x\in Dom\, g$ y $0<|x-x_0|<\delta_2$ entonces $g(x)>M_2$.
Sea $M>0$, tomamos $M_1=\dfrac{M}{2}=M_2$ y sea $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, así si $x\in Dom\, f+g=Dom\, f\cap Dom\, g$ y $0<|x-x_0|<\delta$ entonces $f(x)>\dfrac{M}{2}$ y $g(x)>\dfrac{M}{2}$ de donde $(f+g)(x)=f(x)+g(x)>\dfrac{M}{2}+\dfrac{M}{2}=M$
$\therefore \lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=\infty$.

$\square$

b) Sabemos que $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ y $Dom\, f\cdot g=Dom\, f\cap Dom\, g$.
Por hipótesis $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ significa que a cada número $M_1>0$ le corresponde un número $\delta_1>0$ tal que si $x\in Dom\, f$ y $0<|x-x_0|<\delta_1$ entonces $f(x)>M_1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$ significa que a cada número $M_2>0$ le corresponde un número $\delta_2>0$ tal que si $x\in Dom\, g$ y $0<|x-x_0|<\delta_2$ entonces $g(x)>M_2$.
Sea $M>0$, tomamos $M_1=\sqrt{M}=M_2$ y sea $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, así si $x\in Dom\, f\cdot g=Dom\, f\cap Dom\, g$ y $0<|x-x_0|<\delta$ entonces $f(x)>\sqrt{M}$ y $g(x)>\sqrt{M}$ de donde $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)>\sqrt{M}\cdot\sqrt{M}=M$ $\therefore \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\infty$.

□

c)i) Supongamos $c > 0$. Sabemos que $(cf)(x) = cf(x)$ y $x \in Dom\, f$.

Por hipótesis $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ significa que a cada número $M > 0$ le corresponde un número $\delta > 0$ tal que si $x \in Dom\, f$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) > M$.

Sea $N > 0$ y tomamos $M = \dfrac{N}{c} > 0$ entonces si $0 < |x - x_0| < \delta$ se tiene que $(cf)(x) = cf(x) > cM = N$ $\therefore \lim_{x \to x_0} cf(x) = \infty$.

□

c)ii) Supongamos $c < 0$. Sabemos que $(cf)(x) = cf(x)$ y $x \in Dom\, f$.

Por hipótesis $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ significa que a cada número $M > 0$ le corresponde un número $\delta > 0$ tal que si $x \in Dom\, f$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) > M$.

Sea $N > 0$ y tomamos $M = -\dfrac{N}{c} > 0$ entonces si $0 < |x - x_0| < \delta$ se tiene que $(cf)(x) = cf(x) < cM = -N$ $\therefore \lim_{x \to x_0} cf(x) = -\infty$.

□

d) Sea $[f(x)]^{-1} = \dfrac{1}{f(x)}$ con $f(x) \neq 0$.

Por hipótesis $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ significa que a cada número $M > 0$ le corresponde un número $\delta > 0$ tal que si $x \in Dom\, f$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) > M$.

Sea $\varepsilon > 0$, tomamos $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$ y $\exists$ $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) > M$ lo que significa que $\dfrac{1}{f(x)} < \dfrac{1}{M} = \varepsilon$ y como $\dfrac{1}{f(x)} > 0$, entonces $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$ $\therefore \lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

□

Teorema 2. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ y $c \in$ P, entonces

i) $\lim_{x\to x_0} cf(x) = -\infty$, si $c > 0$

ii) $\lim_{x\to x_0} cf(x) = \infty$, si $c < 0$

Demostración:

i) Supongamos $c > 0$. Sabemos que $(cf)(x) = cf(x)$ y $x \in Dom\ f$.
Por hipótesis $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ significa que a cada número $M > 0$ le corresponde un número $\delta > 0$ tal que si $x \in Dom\ f$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) < -M$.
Sea $N > 0$ y tomamos $M = \frac{N}{c}$ entonces si $0 < |x - x_0| < \delta$ se tiene que $(cf)(x) = cf(x) < c(-M) = -cM = -N$ $\therefore \lim_{x\to x_0} cf(x) = -\infty$.

□

ii) Supongamos $c < 0$. Sabemos que $(cf)(x) = cf(x)$ y $x \in Dom\ f$.
Por hipótesis $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ significa que a cada número $M > 0$ le corresponde un número $\delta > 0$ tal que si $x \in Dom\ f$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) < -M$.
Sea $N > 0$ y tomamos $M = -\frac{N}{c} > 0$, entonces si $0 < |x - x_0| < \delta$ se tiene que $(cf)(x) = cf(x) > c(-M) = -cM = N$ $\therefore \lim_{x\to x_0} cf(x) = \infty$.

□

Corolario 1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \lim_{x\to x_0}\left(-f(x)\right) = -\infty$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Por hipótesis $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$. Como $-1 < 0$, aplicando el Teorema 1c)ii) se tiene que

$$\lim_{x\to x_0}(-1)f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(-f(x)\right) = -\infty.$$

□

$\Leftarrow$) Por hipótesis $\lim_{x\to x_0}\left(-f(x)\right) = -\infty$. Como $-1 < 0$, aplicando el Teorema 2ii) se tiene que

$$\lim_{x\to x_0}(-1)(-f(x)) = \lim_{x\to x_0} -(-f(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

□

Corolario 2. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, entonces

a) $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = -\infty$

b) $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \infty$

c) $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0$, si $f(x)\neq 0$

Demostración:

a) Como $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ entonces por el Teorema 2ii) $\lim_{x\to x_0}\left(-f(x)\right) = \infty$.
Análogamente se tiene que $\lim_{x\to x_0}\left(-g(x)\right) = \infty$ entonces $\lim_{x\to x_0}\left(-f(x)-g(x)\right) = \infty$ por el Teorema 1a), pero $\lim_{x\to x_0}\left(-f(x)-g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} -(f+g)(x) = \infty$ aplicando el corolario1
$\lim_{x\to x_0} -(f+g)(x) = \infty \iff \lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = -\infty$ entonces $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = -\infty$.

□

b) Como $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ por el Teorema 2ii) $\lim_{x\to x_0}\left(-f(x)\right) = \infty$.
Análogamente se tiene que $\lim_{x\to x_0}\left(-g(x)\right) = \infty$ entonces $\lim_{x\to x_0}\left[-f(x)\right]\left[-g(x)\right] = \infty$ por el Teorema 1b), pero $\lim_{x\to x_0}\left[-f(x)\right]\left[-g(x)\right] = \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \infty$.

□

c) Como $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ por el Teorema 2ii) $\lim_{x\to x_0}\left(-f(x)\right) = \infty$.

Por el Teorema 1d) $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{-f(x)} = 0$ y por las propiedades de límite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{-\left(-f(x)\right)} = -\lim_{x\to x_0}\frac{1}{-f(x)} = -0 = 0 .$$

□

Corolario 3. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, entonces

a) i) $\lim_{x\to x_0}\left[f(x) - g(x)\right] = \infty$

ii) $\lim_{x\to x_0}\left[g(x) - f(x)\right] = -\infty$

b) $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = -\infty$

Demostración:

a) i) $\lim_{x\to x_0}\left[f(x) - g(x)\right] = \lim_{x\to x_0}\left[f(x) + \left(-g(x)\right)\right]$. Como $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ por el Teorema 2ii)
$\lim_{x\to x0}\left(-g(x)\right) = \infty$, entonces $\lim_{x\to x_0}\left[f(x) + \left(-g(x)\right)\right] = \infty$ por el Teorema 1a), pero
$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) + \left(-g(x)\right)\right] = \lim_{x\to x_0}\left[f(x) - g(x)\right] = \infty$.

□

a) ii)
$\lim_{x\to x_0}\left[g(x) - f(x)\right] = \lim_{x\to x_0}\left[g(x) + \left(-f(x)\right)\right] = \lim_{x\to x_0}\left[\left(-f(x)\right) + g(x)\right] = \lim_{x\to x_0} -\left[f(x) - g(x)\right]$
pero por el corolario 1 y el corolario 3a)i)
$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) - g(x)\right] = \infty \iff \lim_{x\to x_0} -\left[f(x) - g(x)\right] = -\infty$.

□

b) Como $\lim_{x\to x0} g(x) = -\infty$, por el Teorema 2ii) $\lim_{x\to x_0}\left(-g(x)\right) = \infty$, por el Teorema 1b)
$\lim_{x\to x_0}\left[\left(f(x)\right)\cdot\left(-g(x)\right)\right] = \infty$ pero $\lim_{x\to x_0}\left[\left(f(x)\right)\cdot\left(-g(x)\right)\right] = \lim_{x\to x_0} -\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \infty$ y
por el corolario 1 $\lim_{x\to x_0} -\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \infty \iff \lim_{x\to x_0} -\left[-\left(f(x)\cdot g(x)\right)\right] = -\infty$
$\therefore \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = -\infty$.

□

Teorema 3: Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ y $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0$, $\operatorname{Im} g \subset Dom\, f$, y si existe un número $c>0$ tal que $g(t)\neq x_0$ siempre que $0<\left|t-t_0\right|<c$ entonces $\lim\limits_{t\to t_0}(f\circ g)(t)=L$.

Demostración:

Dado $\varepsilon>0$, como el $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, $\exists$ $\eta>0$ tal que si $x\in Dom\, f$ y $0<\left|x-x_0\right|<\eta$ entonces $\left|f(x)-L\right|<\varepsilon$, por hipótesis si $0<\left|t-t_0\right|<c$ entonces $g(t)\neq x_0$ de donde, si $0<\left|t-t_0\right|<c$ entonces $0<\left|g(t)-x_0\right|$.

Además, como $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0$ entonces para η, existe $\delta_1>0$ tal que si $t\in Dom\, g$ y $0<\left|t-t_0\right|<\delta_1$ entonces $\left|g(t)-x_0\right|<\eta$.

Sea $\delta=\min\{c,\delta_1\}$, entonces si $0<\left|t-t_0\right|<\delta$ entonces $0<\left|t-t_0\right|<\delta_1$ y $0<\left|t-t_0\right|<c$ entonces $0<\left|g(t)-x_0\right|$ y $\left|g(t)-x_0\right|<\eta$, es decir, $0<\left|g(t)-x_0\right|<\eta$ si $0<\left|t-t_0\right|<\delta$, como $\operatorname{Im} g\subset Dom\, f$ entonces $\left|f(g(t))-L\right|<\varepsilon$ de donde $\lim\limits_{t\to t_0} f\left(g(t)\right)=L$.

□

Teorema 4: Si f es continua en μ_0, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\mu_0$ e $\operatorname{Im} g\subset Dom\, f$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0}(f\circ g)(x)=f(\mu_0)$.

Demostración:

Como f es continua en μ_0, para cada $\varepsilon>0$ $\exists$ $\eta>0$ tal que si $\mu\in Dom\, f$ y $\left|\mu-\mu_0\right|<\eta$ entonces $\left|f(\mu)-f(\mu_0)\right|<\varepsilon$.

Además como $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\mu_0$ para $\eta>0$ $\exists$ $\delta>0$ tal que si $x\in Dom\, g$ y $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ entonces $\left|g(x)-\mu_0\right|<\eta$.

Ahora si $x\in Dom\, f\circ g$ y $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ entonces $x\in Dom\, g$ y por hipótesis $\left|g(x)-\mu_0\right|<\eta$ y además $g(x)\in Dom\, f$ y $\left|f\left(g(x)\right)-f(\mu_0)\right|<\varepsilon$.

Por lo que se ha mostrado que para cualquier número $\varepsilon>0$ $\exists$ $\delta>0$ tal que si $x\in Dom\, f\circ g$ y $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ entonces $\left|(f\circ g)(x)-f(\mu_0)\right|<\varepsilon$, es decir, $\lim\limits_{x\to x_0}(f\circ g)(x)=f(\mu_0)$.

□

Teorema 5: Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq 1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, se cumple lo siguiente:

a) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) > 1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ entonces $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \infty$.

b) Si $0 < \lim_{x\to x_0} f(x) < 1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ entonces $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = 0$.

c) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) > 1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ entonces $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = 0$.

d) Si $0 < \lim_{x\to x_0} f(x) < 1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ entonces $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \infty$.

Demostración:

Se usará el hecho de que $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$. Así,

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot\ln f(x)}.$$

Escribimos

$\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = \lim_{\mu\to\mu_0} e^{\mu}$ donde $g(x)\ln f(x) = \mu$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x) = \mu_0$ donde μ_0 puede ser $\pm\infty$.

a) Por hipótesis $\lim_{x\to x_0} f(x) > 1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$. Entonces por el Teorema 4 $\lim_{x\to x_0} \ln f(x) > 0$, de donde $\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot\ln f(x) = \infty$, así,

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = \lim_{\mu\to\infty} e^{\mu} = \infty$$

con $g(x)\cdot\ln f(x) = \mu$. $\therefore \lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \infty$.

□

b) Por hipótesis $0 < \lim_{x\to x_0} f(x) < 1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to x_0} \ln f(x) < 0$

Así $\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot\ln f(x) = -\infty$ de donde $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = \lim_{\mu\to-\infty} e^{\mu}$ con $g(x)\cdot\ln f(x) = \mu$. $\therefore \lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{\mu\to-\infty} e^{\mu} = 0$.

□

c) Por hipótesis $\lim_{x\to x_0} f(x) > 1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, entonces $\lim_{x\to x_0} \ln f(x) > 0$

Así $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot \ln f(x) = -\infty \quad \therefore \lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = \lim\limits_{\mu\to -\infty} e^{\mu}$ con $g(x)\cdot\ln f(x) = \mu$. $\therefore \lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)} = \lim\limits_{\mu\to -\infty} e^{\mu} = 0$.

□

d) Por hipótesis $0 < \lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x) < 0$

Así $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot \ln f(x) = \infty \quad \therefore \lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = \lim\limits_{\mu\to \infty} e^{\mu}$ con $g(x)\cdot\ln f(x) = \mu$. $\therefore \lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)} = \lim\limits_{\mu\to \infty} e^{\mu} = \infty$.

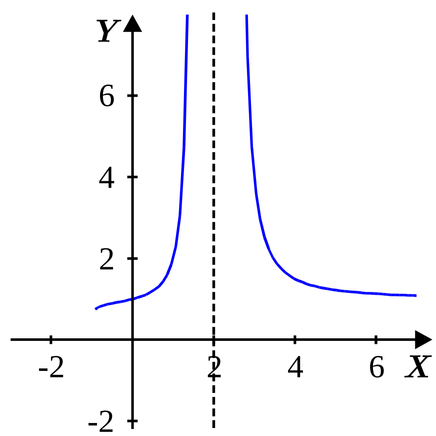
□

Ejemplos. Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 2} (x+1)^{\frac{1}{(x-2)^2}}$.

Solución:

Como $\lim\limits_{x\to 2}(x+1) = 3$ y $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2} = \infty$ entonces $\lim\limits_{x\to 2} (x+1)^{\frac{1}{(x-2)^2}} = \infty$.



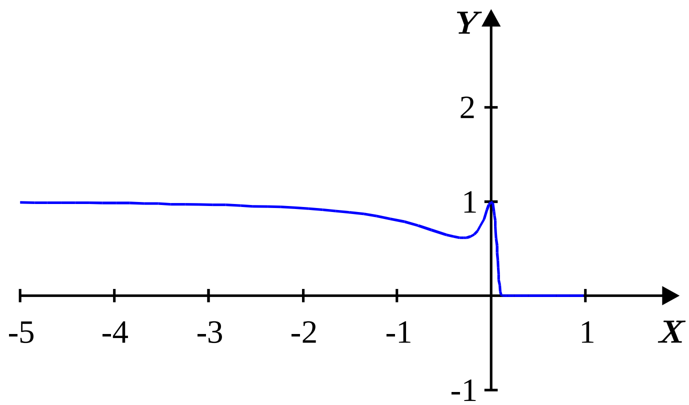
□

b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{x}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^4}}$.

Solución:

Como $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}(1-x)=\frac{2}{3}$ y $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{x}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^4}=\infty$ entonces

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{x}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^4}}=0$.

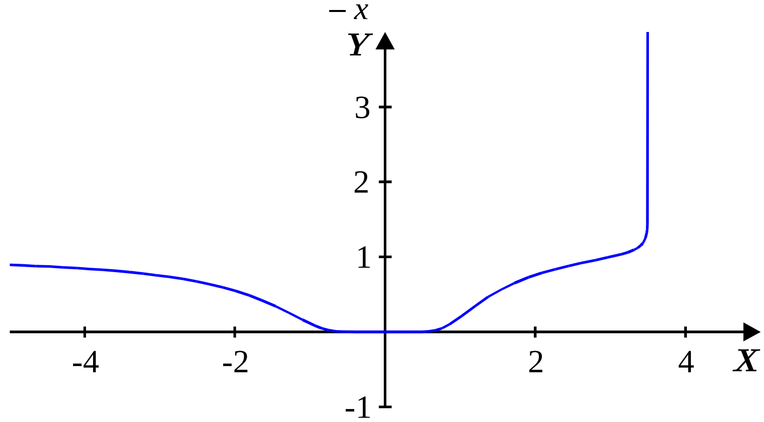


□

c) $\lim\limits_{x\to 0}(7-2x)^{\frac{1}{-x^2}}$.

Solución:

Como $\lim\limits_{x\to 0}(7-2x)=7$ y $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{-x^2}=-\infty$ entonces $\lim\limits_{x\to 0}(7-2x)^{\frac{1}{-x^2}}=0$.



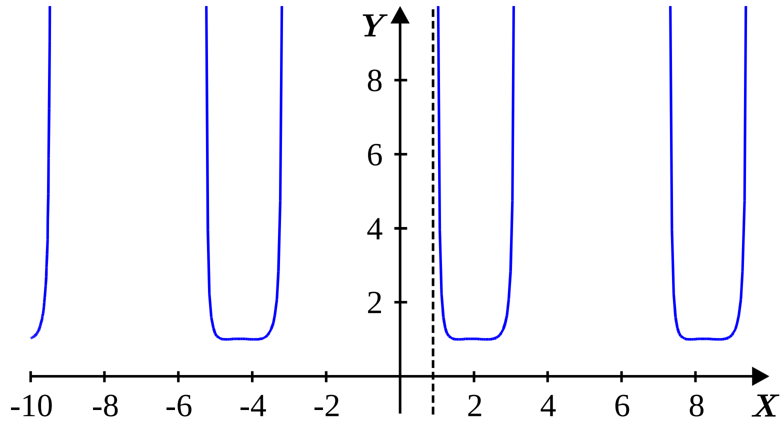
□

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{sen}x)^{-\left[\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}$.

Solución:

Como $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\text{sen}x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} -\left[\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^2 = -\infty$

entonces $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\text{sen}x)^{-\left[\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2} = \infty$.



□

Para el caso en el que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, podemos proceder de la siguiente manera:

$$\text{Sea} \quad f(x)^{g(x)} = \left(f(x)+1-1\right)^{\frac{g(x)(f(x)-1)}{(f(x)-1)}} = \left(\left(1+f(x)-1\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{g(x)\left(f(x)-1\right)}$$

Sea $\alpha(x) = f(x) - 1$ por lo que se tiene

$$\left(\left(1+f(x)-1\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{g(x)(f(x)-1)} = \left(\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right)^{g(x)\cdot\alpha(x)}$$

y como el $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$ se tiene que $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - 1 = 0$. Así

$$\lim_{x \to x_0} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = \lim_{\mu \to 0} (1 + \mu)^{\frac{1}{\mu}} = e \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left((1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right)^{g(x)\cdot\alpha(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{g(x)\cdot\alpha(x)}.$$

Ahora tenemos tres incisos:

i) Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\alpha(x) = L$ entonces $\lim\limits_{x \to x_0} e^{g(x)\alpha(x)} = e^{L}$.

Demostración:

Por hipótesis $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\alpha(x) = L$ entonces

$$\lim_{x \to x_0} e^{g(x)\alpha(x)} = e^{\lim_{x \to x_0} g(x)\alpha(x)} = e^{L}.$$

□

ii) Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\alpha(x) = \infty$ entonces $\lim\limits_{x \to x_0} e^{g(x)\alpha(x)} = \infty$.

Demostración:

Por hipótesis $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\alpha(x) = \infty$ y hacemos $\mu = g(x)\alpha(x)$ así tenemos

$$\lim_{x \to x_0} e^{g(x)\alpha(x)} = \lim_{\mu \to \infty} e^{\mu} = \infty.$$

□

iii) Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\alpha(x) = -\infty$ entonces $\lim\limits_{x \to x_0} e^{g(x)\alpha(x)} = 0$.

Demostración:

Por hipótesis $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\alpha(x) = -\infty$ y hacemos $\mu = g(x)\alpha(x)$ así tenemos

$$\lim_{x \to x_0} e^{g(x)\alpha(x)} = \lim_{\mu \to -\infty} e^{\mu} = 0.$$

□

Ejemplos. Calcular los siguientes límites

i) $\lim\limits_{x \to 2} (2x - 3)^{\frac{1}{x-2}}$.

Solución:

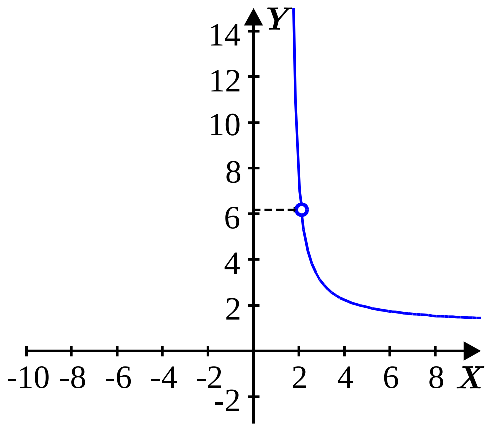
$$f(x) = 2x - 3, \qquad g(x) = \frac{1}{x-2},$$

$\lim\limits_{x \to 2} 2x - 3 = 1, \qquad \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} = \infty,$ y sea $\alpha(x) = 2x - 4$, entonces

$$\lim_{x \to 2} \alpha(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to 2}(2x-4) \cdot \left(\frac{1}{x-2}\right) = \lim_{x \to 2} 2(x-2) \cdot \left(\frac{1}{x-2}\right) = \lim_{x \to 2} 2 = 2\,.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to 2}(2x-3)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \to 2} e^{(2x-4)\cdot\left(\frac{1}{x-2}\right)} = \lim_{\mu \to 2} e^{\mu} = e^{2}\,.$$



□

ii) $\lim\limits_{x \to 1}\left(x^{2} - 2x + 2\right)^{\frac{1}{(1-x)^4}}$.

Solución:

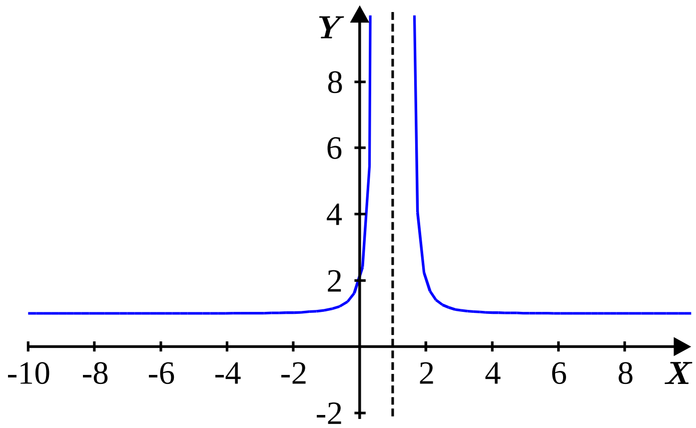
$$f(x) = x^{2} - 2x + 2, \qquad g(x) = \frac{1}{(1-x)^4},$$

$\lim\limits_{x \to 1} x^{2} - 2x + 2 = 1, \qquad \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(1-x)^4} = \infty\,,$ y sea $\alpha(x) = (1-x)^2$, entonces

$$\lim_{x \to 1} \alpha(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to 1}(1-x)^2 \cdot \left(\frac{1}{(1-x)^4}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = \infty\,.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to 1}\left(x^{2} - 2x + 2\right)^{\frac{1}{(1-x)^4}} = \lim_{x \to 1} e^{(1-x)^2\cdot\left(\frac{1}{(1-x)^4}\right)} = \lim_{\mu \to \infty} e^{\mu} = \infty\,.$$



□

iii) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{(\cos x-1)^2}}$.

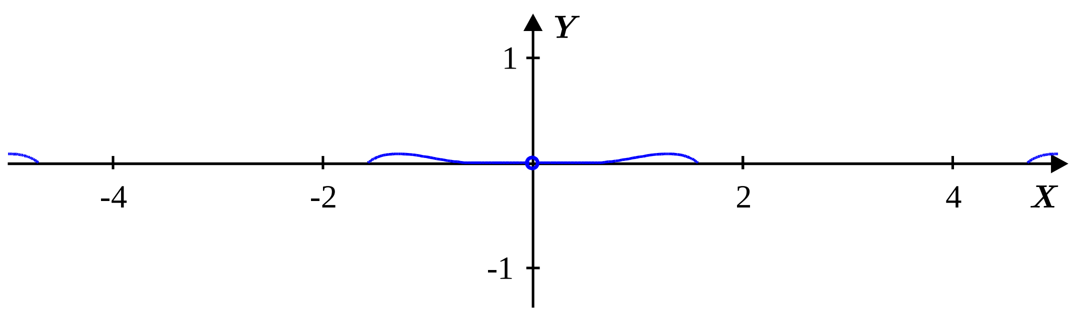
$f(x)=\cos x,\qquad g(x)=\dfrac{1}{(\cos x-1)^2},$

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1,\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(\cos x-1)^2}=\infty,$ y sea $\alpha(x)=\cos x-1,$ entonces

$\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\left(\dfrac{1}{(\cos x-1)^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x-1}=-\infty$ ya que $\cos x-1<0$

para cualquier x. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{(\cos x-1)^2}}=\lim_{x\to 0}e^{(\cos x-1)\cdot\left(\frac{1}{(\cos x-1)^2}\right)}=\lim_{\mu\to-\infty}e^{\mu}=0\,.$$



□

Teorema 6: Si $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ y $\exists\, c>0$ tal que $f(x)\le cg(x)\quad \forall x\in V(x_0)$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$.

Demostración: Sea $M>0$, P.d. $\exists\ \delta>0$ tal que si $0<|x-x_0|<\delta$ entonces $g(x)>M$.

Sea $M_1=cM>0$. Como $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ $\exists\ \delta_1>0$ tal que si $0<|x-x_0|<\delta_1$ entonces $f(x)>M_1$.

Como $f(x)\le cg(x)$ $\forall x\in V(x_0)$, $\exists\ \delta_2>0$ tal que si $0<|x-x_0|<\delta_2$ entonces $f(x)\le cg(x)$.

Tomamos $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, entonces si $0<|x-x_0|<\delta$ se tiene que $0<|x-x_0|<\delta_1$ y $0<|x-x_0|<\delta_2$ de donde $cg(x)\ge f(x)>M_1$ y $g(x)\ge \frac{M_1}{c}=M$

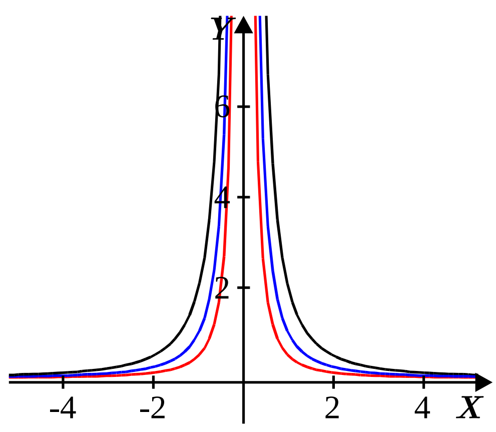
$\therefore\ \lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$.

□

Ejemplo: Sea $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $c=4$ y $g(x)=\frac{1}{2x^2}$

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$ y $\frac{2}{x^2}\ge\frac{1}{x^2}$ $\forall x$ entonces $\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x^2}=\infty$.

En la figura siguiente aparecen: $f(x)$ en azul, $g(x)$ en rojo y $cg(x)$ en negro.



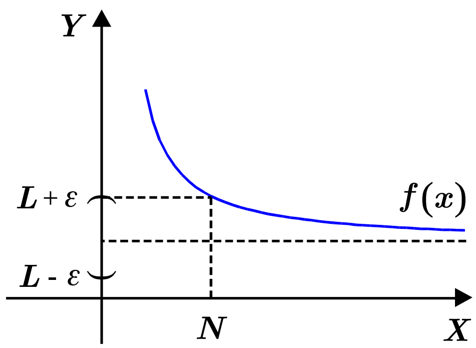
□

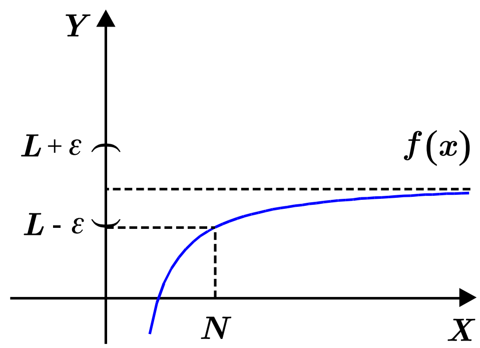
SEGUNDA PARTE

En esta sección, consideraremos límites de funciones en los que la variable crece o decrece indefinidamente. Abordaremos los casos en los que el límite de la función existe o bien, el límite de la función es ∞ o $-\infty$.

Definición 7: Sea f una función definida en (a,∞). Un número L es el límite de la función f cuando x crece indefinidamente, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número real $N > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x \in (a,\infty)$ y $x > N$.

La notación para este caso es: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$



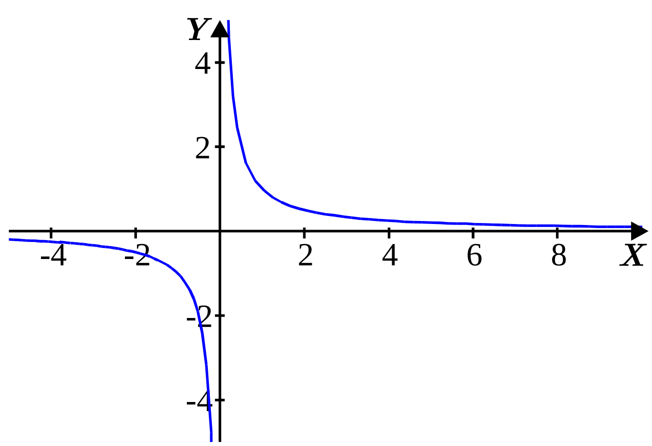


Ejemplo 7: Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Probar que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Entonces

$$x > N \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{N} = \varepsilon \quad \text{de donde} \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon .$$

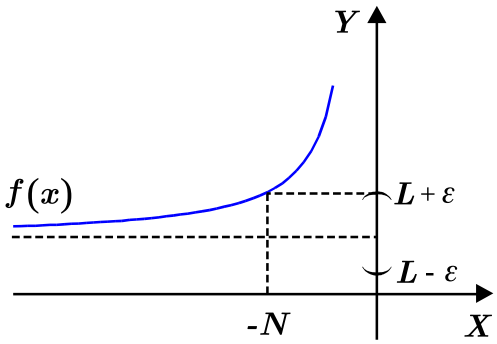
$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 .$$

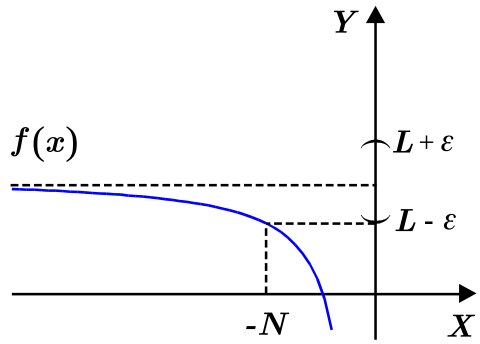


□

Definición 8: Sea f una función definida en $(-\infty, b)$ Un número L es el límite de la función f cuando x decrece indefinidamente, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número real $N > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x \in (-\infty, b)$ y $x < -N$.

La notación para este caso es: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$





Ejemplo 8: Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$. Probar que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

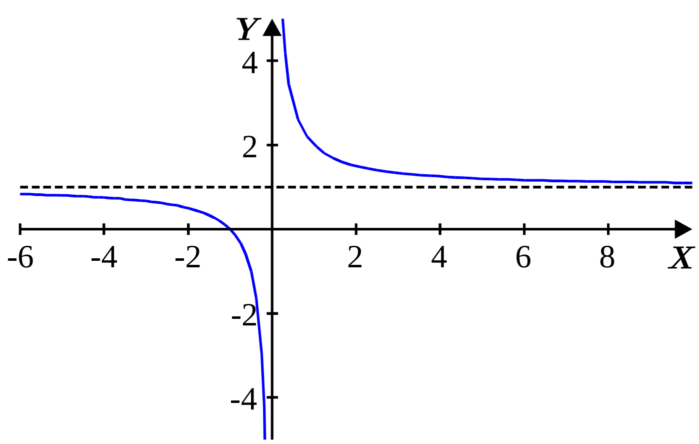
Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Entonces

$$x < -N \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{-N} \Rightarrow -\frac{1}{x} < \frac{1}{N} \quad \text{pero} \quad -\frac{1}{x} = 0 - \frac{1}{x}$$

y como $x < 0$

$$0 - \frac{1}{x} = \left|0 - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x} - (1-1)\right| = \left|\frac{1}{x} - 1 + 1\right| = \left|1 + \frac{1}{x} - 1\right|$$

$$= \left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < \frac{1}{N} = \varepsilon \qquad \therefore \lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x} = 1.$$



□

Teorema 7: Si c es un número real y $\lim_{x\to\infty} f(x) = L,\quad \lim_{x\to\infty} g(x) = M$ entonces las siguientes propiedades son válidas.

a) $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x) = L + M$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right) = L\cdot M$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(cf(x)\right) = c\left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right) = c\cdot L$

d) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lim_{x\to\infty} f(x)} = \dfrac{1}{L}$ si $L \neq 0$

Demostración:

a) Sabemos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = M$ y $Dom\ f+g = Dom\ f \cap Dom\ g$ entonces tenemos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon_1 > 0$ $\exists$ un $N_1 > 0$ tal que si $x \in Dom\ f$ y $x > N_1$ entonces $|f(x)-L| < \varepsilon_1$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = M$ significa que para cada $\varepsilon_2 > 0$ $\exists$ un $N_2 > 0$ tal que si $x \in Dom\ g$ y $x > N_2$ entonces $|g(x)-M| < \varepsilon_2$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon_2$, así si $x \in Dom\ f+g = Dom\ f \cap Dom\ g$ y $N = \max\{N_1, N_2\}$, si $x > N$ entonces

$$|f(x)+g(x)-(L+M)| = |f(x)-L+g(x)-M| \le$$

$$\le |f(x)-L| + |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\left(f(x)+g(x)\right) = L+M = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$.

□

b) Sabemos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = M$ y $Dom\ f\cdot g = Dom\ f \cap Dom\ g$ entonces tenemos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon_1 > 0$ $\exists$ un $N_1 > 0$ tal que si $x \in Dom\ f$ y $x > N_1$ entonces $|f(x)-L| < \varepsilon_1$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = M$ significa que para cada $\varepsilon_2 > 0$ $\exists$ un $N_2 > 0$ tal que si $x \in Dom\ g$ y $x > N_2$ entonces $|g(x)-M| < \varepsilon_2$.

Como $\lim_{x\to\infty} g(x) = M$ para $\varepsilon' = 1$ $\exists$ $N_3 > 0$ tal que si $x \in Dom\, g$ y $x > N_3$ entonces $|g(x) - M| < 1$.

Así, como $|g(x)| - |M| \le |g(x) - M| < 1$ entonces $|g(x)| < |M| + 1$.

Sea $\varepsilon > 0$, así si $x \in Dom\, f \cdot g = Dom\, f \cap Dom\, g$, $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, $x > N$ entonces

$$
\begin{aligned}
|f(x)\cdot g(x) - L\cdot M| &= |f(x)\cdot g(x) - g(x)L + g(x)L - L\cdot M| \\
&= |g(x)(f(x) - L) + L(g(x) - M)| \\
&\le |g(x)(f(x) - L)| + |L(g(x) - M)| \\
&= |g(x)||f(x) - L| + |L||g(x) - M|
\end{aligned}
$$

Sea $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2(|M|+1)}$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2(|M|+1)}$ y sea $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2|L|}$ entonces

$|g(x) - M| < \varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2(|L|+1)}$, por lo que tenemos

$$|g(x)||f(x) - L| + |L||g(x) - M| < (|M|+1)\frac{\varepsilon}{2(|M|+1)} + |L|\frac{\varepsilon}{2|L|} = \frac{\varepsilon}{2} + \cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

de donde $|f(x)\cdot g(x) - L\cdot M| < \varepsilon$.

$$\therefore \lim_{x\to\infty}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot M = \left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right).$$

□

c) Sabemos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, y también que $\lim_{x\to\infty} c = c$ entonces

$\lim_{x\to\infty}(cf(x)) = \left(\lim_{x\to\infty} c\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)$ por el inciso b), entonces

$\left(\lim_{x\to\infty} c\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right) = c\cdot L = c\cdot\lim_{x\to\infty} f(x)$ $\quad\therefore \lim_{x\to\infty}(cf(x)) = c\left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)$

□

d) Sabemos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ si $L \neq 0$, así $\exists\ N_1 > 0$ tal que si $x > N_1$, $x \in Dom\ f$ entonces $f(x) \neq 0$.

Sea $\varepsilon_1 < \frac{|L|}{2}$, $\exists\ N_2 > 0$ tal que si $x > N_2$, $x \in Dom\ f$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon_1$ pero

$$|L| - |f(x)| \leq |L - f(x)| = |f(x) - L| < \varepsilon_1 < \frac{|L|}{2},$$

de donde $|L| - |f(x)| < \frac{|L|}{2}$, así $\frac{|L|}{2} < |f(x)|$, de donde $\frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|L|}$.

Ahora sea $\varepsilon_2 = |L|^2 \frac{\varepsilon}{2}$, $\exists\ N_3 > 0$ tal que si $x > N_3$, $x \in Dom\ f$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon_2$.

Sea $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ si $x > N$, $x \in Dom\ f$, entonces $f(x) \neq 0$ de donde $\frac{1}{f(x)} < \frac{2}{|L|}$ y $|f(x) - L| < |L|^2 \frac{\varepsilon}{2}$ entonces

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| = \left|\frac{L - f(x)}{f(x)\cdot L}\right| = \frac{|L - f(x)|}{|f(x)\cdot L|} = \frac{1}{|f(x)\cdot L|}|f(x) - L| = \frac{1}{|f(x)||L|}|f(x) - L| <$$

$$< \frac{2}{|L|}\cdot\frac{1}{|L|}|f(x) - L| < \frac{2}{|L|^2}\frac{|L|^2\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \therefore \lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L} = \frac{1}{\lim_{x\to\infty} f(x)}$$

□

Teorema 8: $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$ $\qquad \alpha \in$ P.

Demostración:

Podemos expresar $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} = \lim_{x\to\infty} e^{\alpha \ln x}$ lo que se reduce a calcular $\lim_{x\to\infty} \alpha \ln x$.

Caso 1: Si $\alpha > 0$

Sea $M > 0$, si $x > e^{M/\alpha}$ entonces $\ln x > \ln e^{M/\alpha} = \frac{M}{\alpha}$ de donde $\alpha \ln x > M$, así $\lim_{x\to\infty} \alpha \ln x = \infty$ $\quad \therefore\ \lim_{x\to\infty} e^{\alpha \ln x} = \infty$.

□

Caso 2: Si $\alpha < 0$

Sea $M > 0$, si $x > e^{-M/\alpha}$ entonces $\ln x > \ln e^{-M/\alpha} = -\dfrac{M}{\alpha}$ de donde $\alpha \ln x < -M$,

así $\lim_{x\to\infty} \alpha \ln x = -\infty$ $\quad\therefore\quad \lim_{x\to\infty} e^{\alpha \ln x} = 0.$

□

El resultado anterior nos será útil para probar el siguiente:

Teorema 9:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \infty & \text{si } n > m \text{ y } \dfrac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty & \text{si } n > m \text{ y } \dfrac{a_n}{b_m} < 0 \\ 0 & \text{si } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \end{cases}$$

Demostración:

Al factorizar en el numerador $a_n x^n$ y en el denominador $b_m x^m$ se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n \left(1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\dfrac{1}{x} + \cdots + \dfrac{a_1}{a_n}\cdot\dfrac{1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{a_n}\cdot\dfrac{1}{x^n}\right)}{b_m x^m \left(1 + \dfrac{b_{m-1}}{b_m}\cdot\dfrac{1}{x} + \cdots + \dfrac{b_1}{b_m}\cdot\dfrac{1}{x^{m-1}} + \dfrac{b_0}{b_m}\cdot\dfrac{1}{x^m}\right)}$$

como

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n}\cdot\frac{1}{x^n}}{1+\frac{b_{m-1}}{b_m}\cdot\frac{1}{x}+\cdots+\frac{b_1}{b_m}\cdot\frac{1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{b_m}\cdot\frac{1}{x^m}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n}\cdot\frac{1}{x^n}}{1+\frac{b_{m-1}}{b_m}\cdot\frac{1}{x}+\cdots+\frac{b_1}{b_m}\cdot\frac{1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{b_m}\cdot\frac{1}{x^m}}\right)$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{1}{x}+\cdots+\lim_{x\to\infty}\frac{a_1}{a_n}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}+\lim_{x\to\infty}\frac{a_0}{a_n}\cdot\frac{1}{x^n}}{\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{b_{m-1}}{b_m}\cdot\frac{1}{x}+\cdots+\lim_{x\to\infty}\frac{b_1}{b_m}\cdot\frac{1}{x^{m-1}}+\lim_{x\to\infty}\frac{b_0}{b_m}\cdot\frac{1}{x^m}}$$

$$=\frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}}{1+\frac{b_{m-1}}{b_m}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\cdots+\frac{b_1}{b_m}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{b_m}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^m}}$$

$$=\frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot 0+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\cdot 0+\frac{a_0}{a_n}\cdot 0}{1+\frac{b_{m-1}}{b_m}\cdot 0+\cdots+\frac{b_1}{b_m}\cdot 0+\frac{b_0}{b_m}\cdot 0}=\left(\frac{1}{1}\right) = 1$$

entonces se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n}\cdot\frac{1}{x^n}\right)}{b_mx^m\left(1+\frac{b_{m-1}}{b_m}\cdot\frac{1}{x}+\cdots+\frac{b_1}{b_m}\cdot\frac{1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{b_m}\cdot\frac{1}{x^m}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}.$$

Caso 1: Si $n > m$ entonces $n - m > 0$

Subcaso 1: $\dfrac{a_n}{b_m} > 0$ por el teorema anterior

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} = \frac{a_n}{b_n} \lim_{x\to\infty} x^{n-m} = \infty$$

Subcaso 2: $\dfrac{a_n}{b_m} < 0$ por el teorema anterior

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} = \frac{a_n}{b_n} \lim_{x\to\infty} x^{n-m} = -\infty$$

Caso 2: Si $n < m$ entonces $n - m < 0$ así

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x\to\infty} x^{n-m}$$

Por el teorema anterior

$$\frac{a_n}{b_m} \lim_{x\to\infty} x^{n-m} = \frac{a_n}{b_m} \cdot 0 = 0$$

Caso 3: Si $n = m$ entonces $n - m = 0$ así

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_m} (1) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_m} = \frac{a_n}{b_m}$$

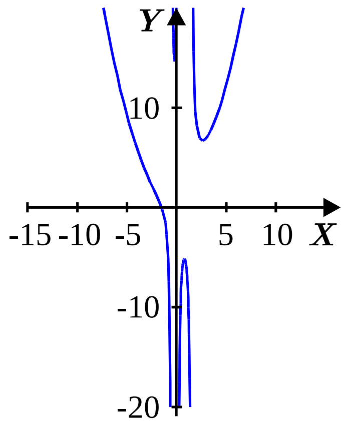
$\square$

Ejemplos:

Caso 1: $n > m$

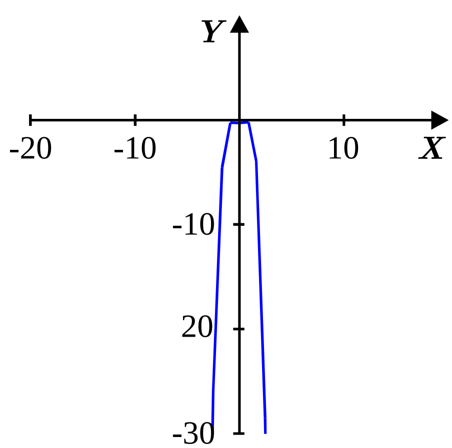
Subcaso 1: $\frac{a_n}{b_m} > 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^5 - 2x^4 + 7x^3 + 10x^2 - 9x + 21}{8x^3 - 9x^2 - 5x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{8} x^2 = \infty .$$



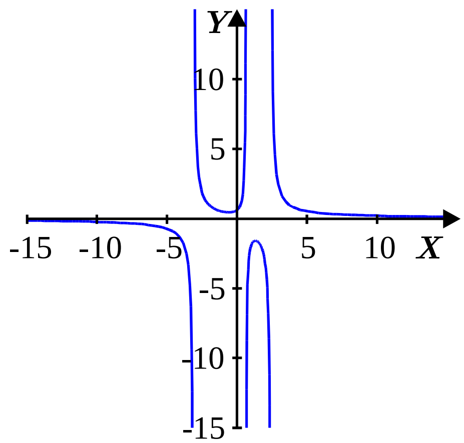
Subcaso 2: $\frac{a_n}{b_m} < 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^7 - 2x^2 + 3}{-7x^3 + 4x^2 - 9x - 12} = \lim_{x\to\infty} -\frac{6}{7} x^4 = -\infty .$$



Caso 2: $n < m$

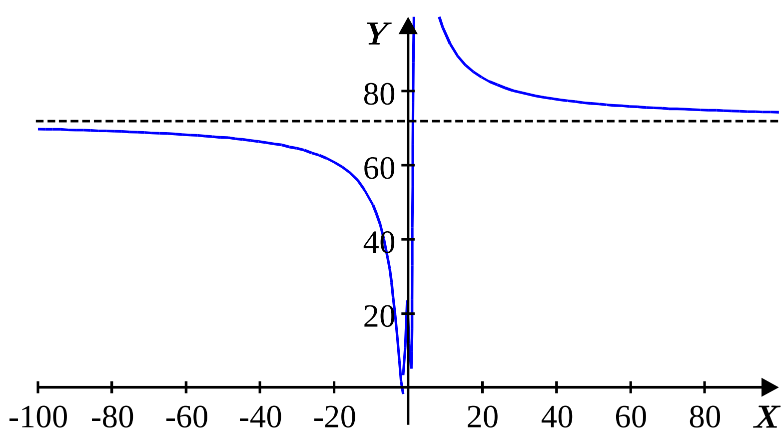
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^{2}-x+3}{x^{3}-8x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1}x^{-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0\,.$$



□

Caso 3: $n = m$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^{3}(3x-2)^{2}}{x^{5}+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(8x^{3}+36x^{2}+54x+27\right)\left(9x^{2}-12x+4\right)}{x^{5}+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(8x^{3}\right)\left(9x^{2}\right)}{x^{5}}=72$$



□

Teorema 10: Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{t\to\infty} g(t) = x_0$, $\operatorname{Im} g \subset Dom\, f$, y si existe un número $M > 0$ tal que $g(t) \neq x_0$ siempre que $t > M$ entonces $\lim_{t\to\infty}(f \circ g)(t) = L$.

Demostración:

Dado $\varepsilon > 0,$ como el $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, $\exists$ $\eta > 0$ tal que si $x \in Dom\, f$ y $0 < |x - x_0| < \eta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$, por hipótesis $g(t) \neq x_0$ si $t > M$ entonces $0 < |g(t) - x_0|$.

Además $\lim_{t\to\infty} g(t) = x_0$ entonces para esa $\eta > 0$, $\exists$ $N_1 > 0$ tal que si $t \in Dom\, g$ y $t > N_1$ entonces $|g(t) - x_0| < \eta$.

Sea $N = \max\{M, N_1\}$ y $t \in Dom\, g$ si $t > N$ entonces $0 < |g(t) - x_0| < \eta$ y como $\operatorname{Im} g \subset Dom\, f$ entonces $|f(g(t)) - L| < \varepsilon$ de donde $\therefore \lim_{t\to\infty} f(g(t)) = L$.

□

Teorema 11: Si f es continua en μ_0, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \mu_0$ e $\operatorname{Im} g \subset Dom\, f$ entonces $\lim_{x\to\infty}(f \circ g)(x) = f(\mu_0)$.

Demostración:

Como f es continua en μ_0, para cada $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\eta > 0$ tal que si $\mu \in Dom\, f$ y $|\mu - \mu_0| < \eta$ entonces $|f(\mu) - f(\mu_0)| < \varepsilon$.

Además como $\lim_{x\to\infty} g(x) = \mu_0$ para $\eta > 0$, $\exists$ $N > 0$ tal que si $x \in Dom\, g$ y $x > N$ entonces $|g(x) - \mu_0| < \eta$.

Ahora si $x \in Dom\, f \circ g$ y $x > N$ entonces $x \in Dom\, g$ y $|g(x) - \mu_0| < \eta$ y además $g(x) \in Dom\, f$ y $|f(g(x)) - f(\mu_0)| < \varepsilon$.

Por lo que se ha demostrado que para cualquier número $\varepsilon > 0$ si $x \in Dom\, f \circ g$ y $x > N$ entonces $|(f \circ g)(x) - f(\mu_0)| < \varepsilon$, es decir,
$\lim_{x\to\infty}(f \circ g)(x) = f(\mu_0)$.

Teorema 12: Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \neq 1$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = \pm\,\infty$, se cumple lo siguiente:

a) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) > 1$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ entonces $\lim_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)} = \infty$.

b) Si $0 < \lim_{x\to\infty} f(x) < 1$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ entonces $\lim_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)} = 0$.

c) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) > 1$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ entonces $\lim_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)} = 0$.

d) Si $0 < \lim_{x\to\infty} f(x) < 1$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ entonces $\lim_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)} = \infty$.

Demostración:

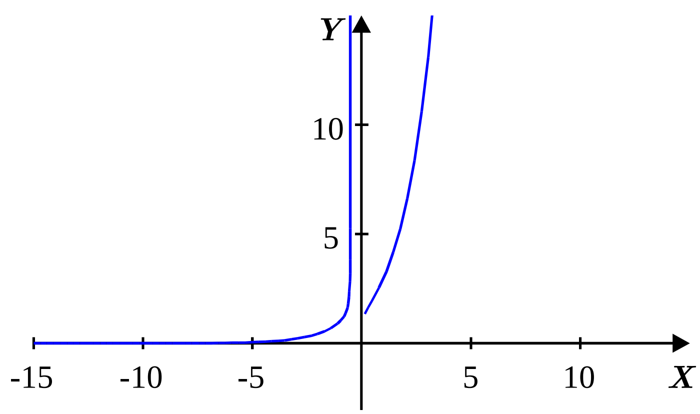
La demostración es análoga a la demostración del Teorema 5.

Ejemplos. Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^{x}$.

Solución:

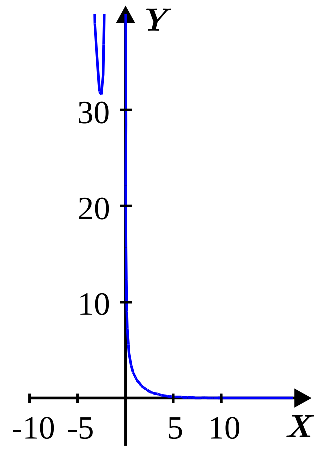
Como $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x}\right) = 2$ y $\lim_{x\to\infty} x = \infty$ entonces $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^{x} = \infty$.



b) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x}\right)^{x+1}$.

Solución:

Como $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x}\right) = \dfrac{1}{2}$ y $\lim_{x\to\infty} x+1 = \infty$ entonces $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x}\right)^{x+1} = 0$.

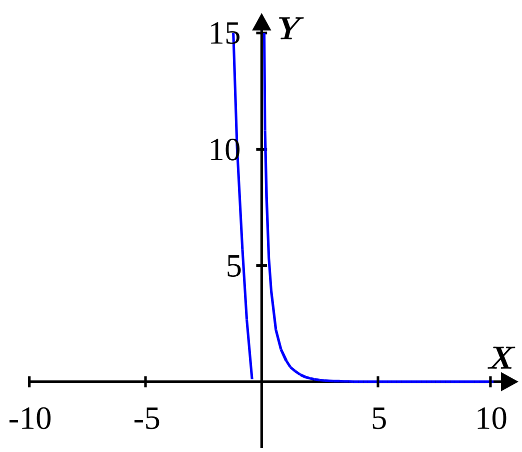


□

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{x}\right)^{1-x}$.

Solución:

Como $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{x}\right)=5$ y $\lim_{x\to\infty} 1-x=-\infty$ entonces $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{x}\right)^{1-x}=0$.



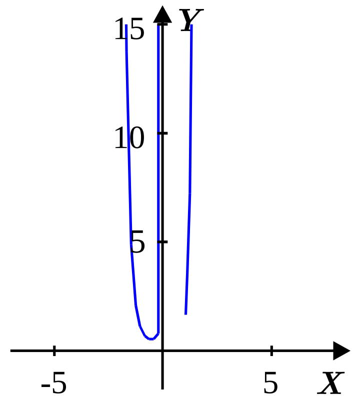
□

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{7x}\right)^{1-x^2}$.

Solución:

Como $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{7x}\right)=\frac{1}{7}$ y $\lim_{x\to\infty} 1-x^2=-\infty$ entonces

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{7x}\right)^{1-x^2}=\infty$.



Y para el caso en el que $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$, sea $\alpha(x)=f(x)-1$, entonces

i) Si $\lim_{x\to\infty} g(x)\alpha(x)=L$ entonces $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\lim_{x\to\infty} e^{g(x)\alpha(x)}=e^{L}$

ii) Si $\lim_{x\to\infty} g(x)\alpha(x)=\infty$ entonces $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\lim_{x\to\infty} e^{g(x)\alpha(x)}=\infty$

iii) Si $\lim_{x\to\infty} g(x)\alpha(x)=-\infty$ entonces $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\lim_{x\to\infty} e^{g(x)\alpha(x)}=0$

Demostración:

La demostración es análoga a la que hicimos para cuando x se aproxima a un número real x_0, por eso la omitimos.

En los siguientes ejemplos escribiremos: $f(x)^{g(x)} = \left(\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right)^{g(x)\cdot\alpha(x)}$.

Ejemplos. Calcular los siguientes límites

i) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$.

Solución:.

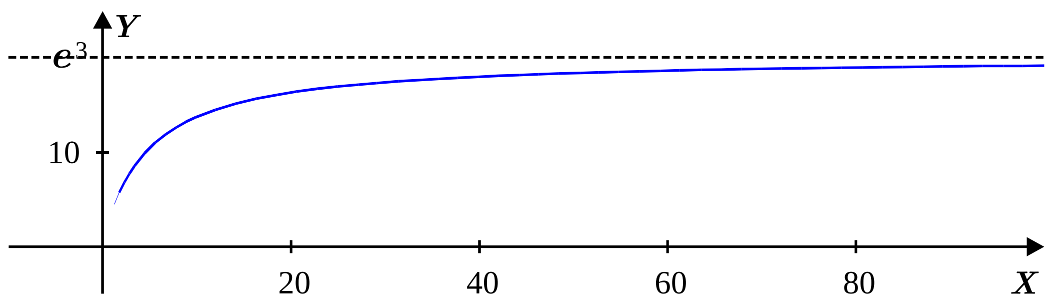
$f(x)=1+\frac{3}{x}$, $\qquad g(x)=x$

$$\lim_{x\to\infty} 1+\frac{3}{x}=1, \qquad \lim_{x\to\infty} x=\infty \qquad \text{y} \quad \text{sea} \quad \alpha(x)=\frac{3}{x}, \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{x\to\infty}\alpha(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}\cdot x=3.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3}{x}\cdot x}=\lim_{\mu\to 3}e^{\mu}=e^{3}.$$



□

ii) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x}\right)^{x^{2}}$.

Solución:

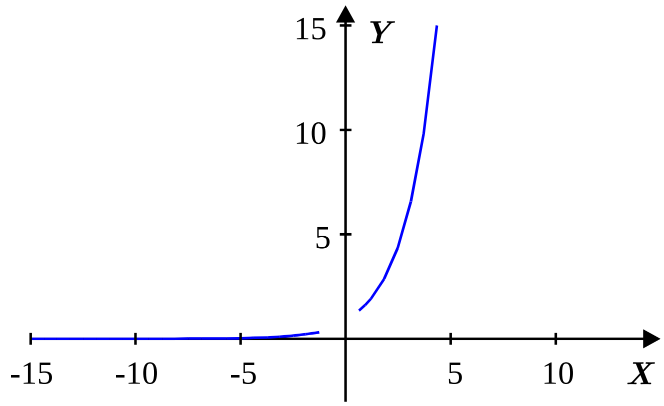
$$f(x)=\frac{3x+2}{3x}, \qquad g(x)=x^{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{3x}=1, \qquad \lim_{x\to\infty}x^{2}=\infty, \qquad \text{y} \quad \text{sea} \quad \alpha(x)=\frac{2}{3x}, \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{x\to\infty}\alpha(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3x}\cdot x^{2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^{2}}{3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3}=\infty.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2}{3x}\cdot x^{2}}=\lim_{\mu\to\infty}e^{\mu}=\infty.$$



□

iii) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^{x^3}$.

Solución:

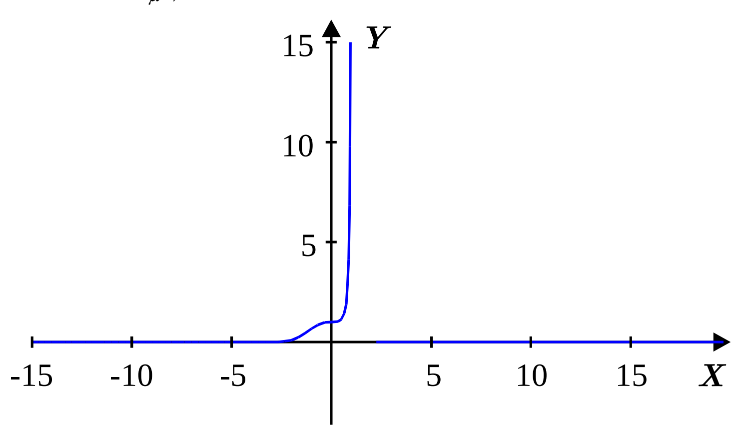
$$f(x)=\frac{x-2}{x-1}, \qquad\qquad g(x)=x^3,$$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{x-1}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}x^3=\infty,\qquad$ y $\quad$ sea $\qquad \alpha(x)=\dfrac{-1}{x-1},\quad$ entonces

$$\lim_{x\to\infty}\alpha(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x-1}\cdot x^3=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{x}=\lim_{x\to\infty}-x^2=-\infty.$$

Por lo tanto

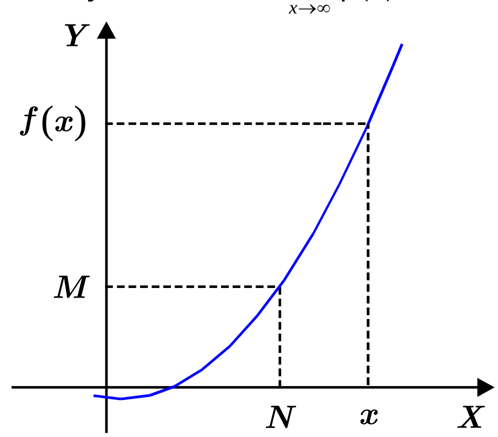
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^{x^3}=\lim_{x\to\infty}e^{\left(\frac{-1}{x-1}\right)\cdot x^3}=\lim_{\mu\to-\infty}e^{\mu}=0.$$



□

Por último, analizamos el caso en el que los valores de la función crecen o decrecen indefinidamente a medida que los valores de la variable crecen o decrecen.

Definición 9: Sea f una función definida en (a,∞). Decimos que f tiende a ∞ cuando x tiende a ∞ si para cada número $M > 0$ hay un número $N > 0$ tal que $f(x) > M$ siempre que $x \in (a,\infty)$ y $x > N$ y escribimos: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.



Ejemplo 9: Sea $f(x) = x+1$. Probar que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Demostración: Sea $M > 0$,

P.d. $\exists$ $N > 0$ tal que si $x \in Dom\, f$, $x > N$

entonces $f(x) > M$

sea $N > \max\{M-1,0\}$.

Si $\max\{M-1,0\} = M-1$

entonces $M-1 > 0$

$\therefore$ si $x > N$ entonces $x > M-1$

lo que implica que $x+1 > M$

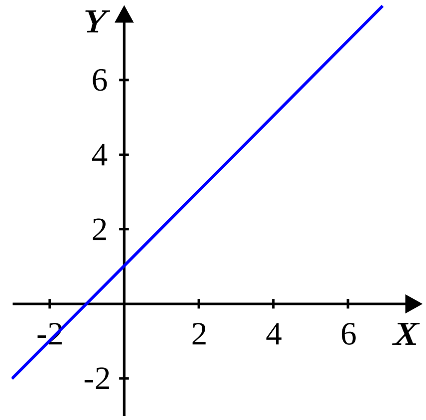
Si $\max\{M-1,0\} = 0$ entonces $0 > M-1$

lo que implica que $1 > M$

$\therefore$ si $x > N$ entonces $x > 0$

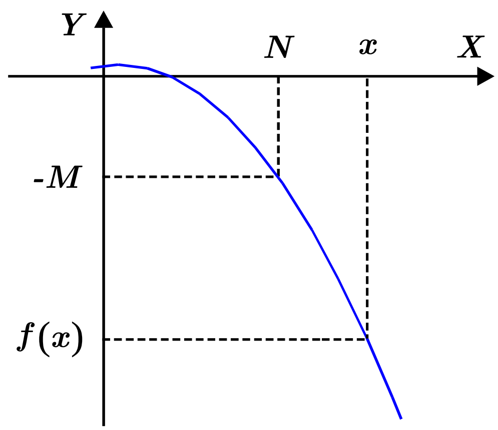
esto significa que $x+1 > 1 > M$

entonces por la definición 9. $\lim_{x\to\infty} x+1 = \infty$.



□

Definición 10: Sea f una función definida en (a, ∞). Decimos que f tiende a $-\infty$ cuando x tiende a ∞ si para cada número $M > 0$ hay un número $N > 0$ tal que $f(x) < -M$ siempre que $x \in (a, \infty)$ y $x > N$ y escribimos: $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.



Ejemplo 10: Sea $f(x) = -3x$. Probar que $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

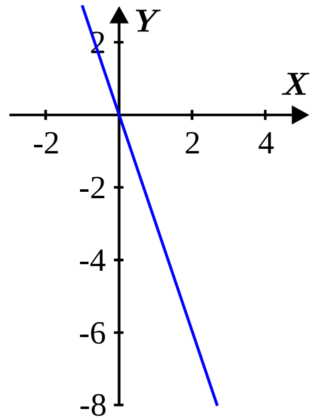
Demostración: Dado $M > 0$, sea $N = \frac{M}{3}$

Si $x > N$, entonces $x > \frac{M}{3}$

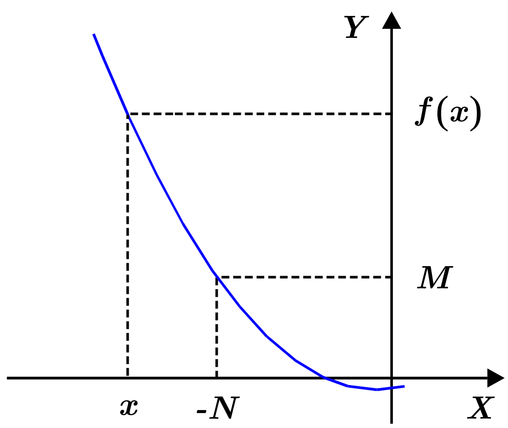
esto significa que $3x > M$

multiplicando por -1 tenemos $-3x < -M$

entonces por la definición 10, $\lim_{x \to \infty} -3x = -\infty$.



Definición 11: Sea f una función definida en $(-\infty, b)$. Decimos que f tiende a ∞ cuando x tiende a $-\infty$ si para cada número $M > 0$ hay un número $N > 0$ tal que $f(x) > M$ siempre que $x \in (-\infty, b)$ y $x < -N$ y escribimos: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$.



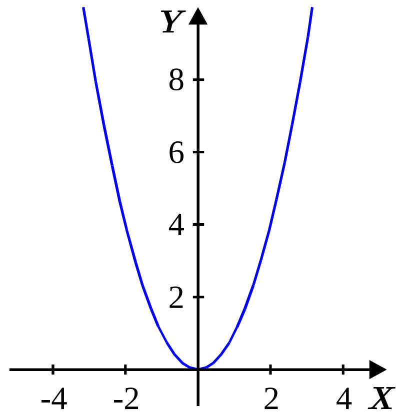
Ejemplo 11: Sea $f(x) = x^2$. Probar que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$.

Demostración: Dado $M > 0$, sea $N = \sqrt{M}$

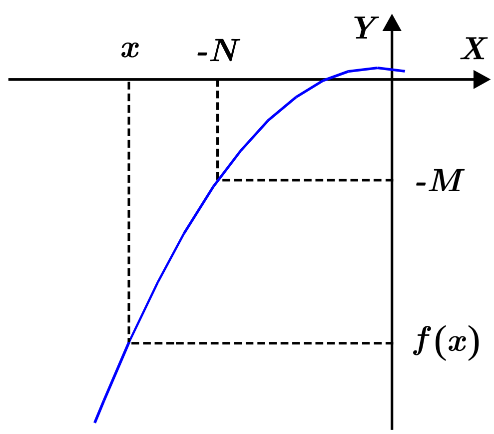
Si $x < -N$, entonces $x < -\sqrt{M}$

esto significa que $x^2 > M$,

entonces por la definición 11, $\lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty$.



Definición 12: Sea f una función definida en $(-\infty, b)$. Decimos que f tiende a $-\infty$ cuando x tiende a $-\infty$ si para cada número $M>0$ hay un número $N>0$ tal que $f(x)<-M$ siempre que $x\in(-\infty,b)$ y $x<-N$ y escribimos: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.



Ejemplo 12: Sea $f(x)=\frac{x}{5}-2.$ Probar que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$

Demostración: Sea $M>0,$

P.d. $\exists$ $N>0$ tal que si $x\in Dom\, f$, $x<-N$

entonces $f(x)<-M$

sea $N>\max\{5(M-2),0\}.$

Si $\max\{5(M-2),0\}=5(M-2)$

entonces $5(M-2)>0$

esto significa que $M-2>0 \quad\Rightarrow\quad M>2$

$\therefore$ si $x < -N$ entonces $x < -5(M-2)$

lo que implica que $\frac{x}{5} < -M + 2$

entonces $\frac{x}{5} - 2 < -M$

Si $\max\{5(M-2), 0\} = 0$ entonces $0 > 5(M-2)$

lo que implica que $0 > M - 2 \quad \Rightarrow \quad 2 > M$

$\therefore$ si $x < -N < 0 < -5(M-2)$

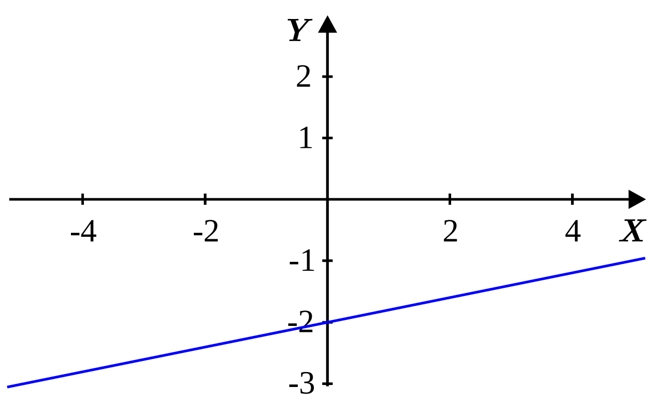
entonces $x < -5(M-2)$

$$\frac{x}{5} < -(M-2)$$

$$\frac{x}{5} < -M + 2$$

esto significa que $\frac{x}{5} - 2 < -M$

entonces por la definición 12. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{5} - 2 = -\infty$.



□

Teorema 13. Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$, entonces

a) $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=\infty$.

b) $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\infty$.

c) Si $c\in$ P, entonces i) $\lim_{x\to\infty} cf(x)=\infty$, si $c>0$.

ii) $\lim_{x\to\infty} cf(x)=-\infty$, si $c<0$.

d) Si además $f(x)\neq 0$ para cualquier $x\in(a,\infty)$, entonces $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$.

Demostración:

a) Por hipótesis $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ significa que para cada $M_1>0$ $\exists$ $N_1>0$ tal que si $x\in Dom\, f$ y $x>N_1$ entonces $f(x)>M_1$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ significa que para cada $M_2>0$ $\exists$ $N_2>0$ tal que si $x\in Dom\, g$ y $x>N_2$ entonces $g(x)>M_2$. Sea $M>0$, tomamos $M_1=\frac{M}{2}=M_2$. Así, si $x\in Dom\, f+g=Dom\, f\cap Dom\, g$ y $N=\max\{N_1,N_2\}$, $x>N$ entonces $f(x)>\frac{M}{2}$ y $g(x)>\frac{M}{2}$ de donde $(f+g)(x)=f(x)+g(x)>\frac{M}{2}+\frac{M}{2}=M$ $\therefore \lim_{x\to\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=\infty.$

□

b) Por hipótesis $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ y $Dom\, f\cdot g=Dom\, f\cap Dom\, g$, entonces tenemos que $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ significa que para cada $M_1>0$ $\exists$ $N_1>0$ tal que si $x\in Dom\, f$ y $x>N_1$ entonces $f(x)>M_1$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ significa que para cada $M_2>0$ $\exists$ $N_2>0$ tal que si $x\in Dom\, g$ y $x>N_2$ entonces $g(x)>M_2$. Sea $M>0$, tomamos $M_1=\sqrt{M}=M_2$. Así, si $x\in Dom\, f\cdot g=Dom\, f\cap Dom\, g$ y $N=\max\{N_1,N_2\}$, $x>N$ entonces $f(x)>\sqrt{M}$ y $g(x)>\sqrt{M}$ de donde $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)>\sqrt{M}\cdot\sqrt{M}=M$ $\therefore \lim_{x\to\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\infty.$

□

c)i) Supongamos $c > 0$. Por hipótesis $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ significa que para cada número $M_1 > 0$ $\exists$ $N > 0$ tal que si $x \in Dom\, f$ y $x > N$ entonces $f(x) > M_1$.

Sea $M > 0$, tomamos $M_1 = \frac{M}{c} > 0$, entonces si $x > N$ se tiene que $(cf)(x) = cf(x) > cM_1 = M$ $\therefore \lim_{x\to\infty} cf(x) = \infty$.

□

c)ii) Supongamos $c < 0$. Por hipótesis $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ significa que para cada número $M_1 > 0$ $\exists$ $N > 0$ tal que si $x \in Dom\, f$ y $x > N$ entonces $f(x) > M_1$.

Sea $M > 0$, tomamos $M_1 = -\frac{M}{c} > 0$, entonces si $x > N$ se tiene que $(cf)(x) = cf(x) < cM_1 = -M$ $\therefore \lim_{x\to\infty} cf(x) = -\infty$.

□

d) Por hipótesis $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ significa que a cada número $M > 0$ $\exists\, N > 0$ tal que si $x \in Dom\, f$ y $x > N$ entonces $f(x) > M$.

Sea $\varepsilon > 0$, tomamos $M = \frac{1}{\varepsilon}$ y $\exists$ $N > 0$ tal que si $x > N$ entonces $f(x) > M$ lo que significa que $\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M} = \varepsilon$ y como $\frac{1}{f(x)} > 0$, entonces $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$ $\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

□

Teorema 14. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ y $c \in$ P, entonces

i) $\lim_{x\to\infty} cf(x) = -\infty$, si $c > 0$

ii) $\lim_{x\to\infty} cf(x) = \infty$, si $c < 0$

Demostración:

i) Supongamos $c > 0$. Sabemos que $(cf)(x) = cf(x)$ y $x \in Dom\, f$.

Por hipótesis $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ significa que para cada número $M_1 > 0$ $\exists$ $N > 0$ tal que si $x \in Dom\, f$ y $x > N$ entonces $f(x) < -M_1$.

Sea $M > 0$ y tomamos $M_1 = \frac{M}{c}$ entonces si $x > N$ se tiene que $(cf)(x) = cf(x) < c(-M_1) = -cM_1 = -M$ $\therefore \lim_{x\to\infty} cf(x) = -\infty$.

□

ii) Supongamos $c < 0$. Sabemos que $(cf)(x) = cf(x)$ y $x \in Dom\ f$.
Por hipótesis $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ significa que para cada número $M_1 > 0$ $\exists$ $N > 0$ tal que si $x \in Dom\ f$ y $x > N$ entonces $f(x) < -M_1$.
Sea $M > 0$ y tomamos $M_1 = -\frac{M}{c} > 0$, entonces si $x > N$ se tiene que $(cf)(x) = cf(x) > c(-M_1) = -cM_1 = M$ $\therefore \lim_{x\to\infty} cf(x) = \infty$.

□

Corolario 4. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} - f(x) = -\infty$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Por hipótesis $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, puesto que $-1 < 0$, aplicando el Teorema 13c)ii) se tiene que $\lim_{x\to\infty}(-1) f(x) = \lim_{x\to\infty} - f(x) = -\infty$.

□

$\Leftarrow$) Por hipótesis $\lim_{x\to\infty} - f(x) = -\infty$, puesto que $-1 < 0$, aplicando el Teorema 14ii) se tiene que $\lim_{x\to\infty}(-1)(- f(x)) = \lim_{x\to\infty} -(- f(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

□

Corolario 5. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$, entonces

a) $\lim_{x\to\infty}\left[f(x) + g(x)\right] = -\infty$

b) $\lim_{x\to\infty}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = \infty$

c) Si además $f(x) \neq 0$ para cualquier $x \in (a, \infty)$, entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Demostración:

a) Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ entonces por el Teorema 14ii) $\lim_{x\to\infty} - f(x) = \infty$.
Análogamente se tiene que $\lim_{x\to\infty} - g(x) = \infty$ entonces $\lim_{x\to\infty} - f(x) - g(x) = \infty$ por el Teorema 13a), pero $\lim_{x\to\infty} - f(x) - g(x) = \lim_{x\to\infty} - (f+g)(x) = \infty$.
Aplicando el corolario 4 tenemos que
$\lim_{x\to\infty} - (f+g)(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} (f+g)(x) = -\infty$ entonces $\lim_{x\to\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty$.

□

b) Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ por el Teorema 14ii) $\lim_{x\to\infty} - f(x) = \infty$.
Análogamente se tiene que $\lim_{x\to\infty} - g(x) = \infty$ entonces $\lim_{x\to\infty} [-f(x)][-g(x)] = \infty$ por el Teorema 13b), pero $\lim_{x\to\infty} [-f(x)][-g(x)] = \lim_{x\to\infty} [f(x) \cdot g(x)] = \infty$.

□

c) Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, por el Teorema 14ii) $\lim_{x\to\infty} - f(x) = \infty$.
Por el Teorema 13d) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{-f(x)} = 0$ y por las propiedades de los límites $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{-f(x)} = 0$.

□

Corolario 6. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$, entonces

a) i) $\lim_{x\to\infty} [f(x) - g(x)] = \infty$

ii) $\lim_{x\to\infty} [g(x) - f(x)] = -\infty$

b) $\lim_{x\to\infty} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty$

Demostración:

a) i) $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)+\left(-g(x)\right)\right]$ como $\lim_{x\to\infty} g(x)=-\infty$, por el Teorema 14ii)
$\lim_{x\to\infty} -g(x)=\infty$ entonces $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)+\left(-g(x)\right)\right]=\infty$ por el Teorema 13a), pero
$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)+\left(-g(x)\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=\infty$.

□

a) ii) $\lim_{x\to\infty}\left[g(x)-f(x)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[g(x)+\left(-f(x)\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\left(-f(x)\right)+g(x)\right]=\lim_{x\to\infty} -\left[f(x)-g(x)\right]$
pero por el corolario 4 y el corolario 6a)i)
$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=\infty \iff \lim_{x\to\infty} -\left[f(x)-g(x)\right]=-\infty$.

□

b) Como $\lim_{x\to\infty} g(x)=-\infty$ por el Teorema 14ii) $\lim_{x\to\infty} -g(x)=\infty$, por el Teorema 13b)
$\lim_{x\to\infty}\left[\left(f(x)\right)\cdot\left(-g(x)\right)\right]=\infty$, pero $\lim_{x\to\infty}\left[\left(f(x)\right)\cdot\left(-g(x)\right)\right]=\lim_{x\to\infty} -\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\infty$ y por el corolario 4 $\lim_{x\to\infty} -\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\infty \iff \lim_{x\to\infty} -\left[-\left(f(x)\cdot g(x)\right)\right]=-\infty$
$\therefore \lim_{x\to\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=-\infty$.

□

Teorema 15: Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ y $\exists\, c>0$ tal que $f(x)\le cg(x)$ $\forall x>k$, con $k>0$ entonces $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$.

Demostración: Sea $M>0$. P.d. $\exists$ $N>0$ tal que si $x>N$ entonces $g(x)>M$.

Sea $M'=cM$. Como $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ $\exists$ $N_1>0$ tal que si $x>N_1$ entonces $f(x)>M'$

Sea $N=\max\{N_1,k\}$ entonces si $x>N \Rightarrow x>N_1$ y $x>k$ entonces $f(x)>M'$

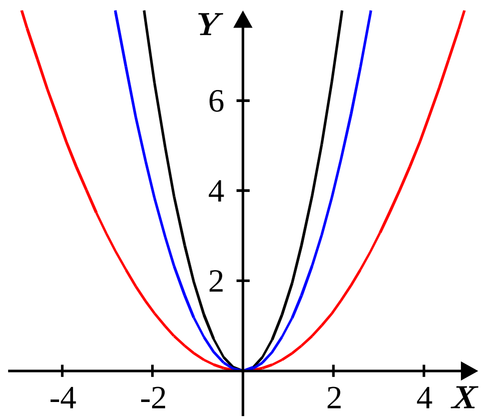
y $f(x)\le cg(x)$ de donde $M'<f(x)\le cg(x)$ y $g(x)>\dfrac{M'}{c}=M$ $\therefore$ $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$.

□

Ejemplo: Sea $f(x)=x^2$, $c=5$ y $g(x)=\frac{x^2}{3}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} x^2=\infty$ y $\frac{5}{3}x^2 \geq x^2$ $\forall x$ entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{3}=\infty$.

En la figura siguiente aparecen: $f(x)$ en azul, $g(x)$ en rojo y $cg(x)$ en negro.



□

Teorema 16: Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ y $\exists\, c>0$ tal que $f(x)\leq cg(x)$ $\forall x<-k$, con $k>0$ entonces $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\infty$.

Demostración: Sea $M>0$. P.d. $\exists$ $N>0$ tal que si $x<-N$ entonces $g(x)>M$.

Sea $M'=cM$. Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\exists$ $N_1>0$ tal que si $x<-N_1$ entonces $f(x)>M'$

Sea $N=\max\{N_1,k\}$ entonces si $x<-N$ $\Rightarrow x<-N_1$ y $x<-k$ por lo tanto

$f(x)>M'$ y $f(x)\leq cg(x)$ entonces $M'<f(x)\leq cg(x)$ y $M=\frac{M'}{c}<g(x)$

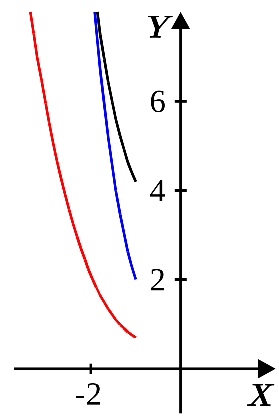
$\therefore$ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\infty$.

□

Ejemplo: Sea $f(x)=1-x^3$ $c=7$ y $g(x)=\frac{1}{2}-\frac{x^3}{5}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} 1-x^3=\infty$ y $\frac{7}{2}-\frac{7}{5}x^3\geq 1-x^3$ si $x<-1$ entonces $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}-\frac{x^3}{5}=\infty$.

En la figura siguiente aparecen: $f(x)$ en azul, $g(x)$ en rojo y $cg(x)$ en negro.



□

Teorema 17: Si $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c>0$ entonces i) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=-\infty$.

Demostración:

Sea $\varepsilon>0$, $\exists\ N_1>0$, tal que si $x>N_1$ entonces $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-c\right|<\varepsilon$ así

$-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}-c<\varepsilon$ de donde $(c-\varepsilon)<\frac{f(x)}{g(x)}<(c+\varepsilon)$ si $x>N_1$.

i) $\Rightarrow$) Como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ entonces dado $M'>0\ \exists\ N_2>0$, tal que si $x>N_2$ entonces $f(x)>M'$. Esto implica que $f(x)>0$ si $x>N_2$ y como $c>0$ entonces $\exists\ N_3>0$, tal que si $x>N_3$ entonces $g(x)>0$

Sean $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Si $x > N$ entonces como $(c-\varepsilon) < \dfrac{f(x)}{g(x)} < (c+\varepsilon)$ y $g(x) > 0$ en particular $f(x) < (c+\varepsilon)g(x)$. Además $c+\varepsilon > 0$, entonces por el Teorema 15, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

$\Leftarrow$) Como $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ entonces dado $M_1 > 0 \ \exists \ S > 0,$ tal que si $x > S$ entonces $g(x) > M_1$. Esto implica que $g(x) > 0$ si $x > S$. Entonces como $(c-\varepsilon) < \dfrac{f(x)}{g(x)} < (c+\varepsilon)$ en particular, $(c-\varepsilon)g(x) < f(x)$.

Elegimos $\varepsilon < c,$ así $c - \varepsilon > 0$ entonces $g(x) < \dfrac{1}{c-\varepsilon} f(x)$ y por el Teorema 15 tenemos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

El inciso ii) se demuestra de manera similar.

□

Observación:

Análogamente pueden establecerse los siguientes resultados:

a) Si $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c > 0$ entonces i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$

ii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$.

b) Si $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c > 0$ entonces i) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to -\infty} g(x) = \infty$

ii) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to -\infty} g(x) = -\infty$.

c) Si $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c < 0$ entonces i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$

ii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

d) Si $\lim_{x\to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c < 0$ entonces i) $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to \infty} g(x) = -\infty$

ii) $\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to \infty} g(x) = \infty$.

e) Si $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c < 0$ entonces i) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to -\infty} g(x) = -\infty$

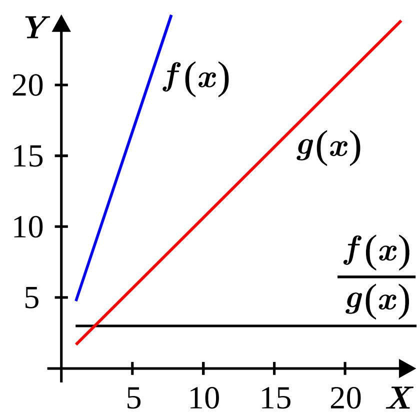
ii) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to -\infty} g(x) = \infty$.

Ejemplo: Sea $f(x)=3x+\frac{7}{4}; x>1$ y $g(x)=x+\frac{7}{12}; x>1$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\frac{7}{4}}{x+\frac{7}{12}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{12x+7}{4}}{\frac{12x+7}{12}}=\lim_{x\to\infty}\frac{12(12x+7)}{4(12x+7)}=3$$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ de donde

$\lim_{x\to\infty} 3x+\frac{7}{4}=\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} x+\frac{7}{12}=\infty$.



□

REGLA DE L'HÔPITAL

Enunciaremos a continuación los teoremas, de Rolle y del Valor Medio de Cauchy. El primero es necesario para probar el teorema del Valor Medio de Cauchy. Este último será usado para probar la regla de L'Hôpital. Para no distraernos del objetivo de este trabajo, ambos serán aceptados sin demostración.

Teorema Rolle.

Sea f una función continua en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en cada punto del intervalo abierto (a,b). Supongamos también que $f(a) = f(b)$. Entonces existe por lo menos un punto c en el intervalo abierto (a,b) tal que $f'(c) = 0$.

Teorema del Valor Medio de Cauchy.

Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivables en todo el intervalo abierto (a,b). Entonces para un cierto c de (a,b), tenemos $f'(c)[g(b)-g(a)] = g'(c)[f(b)-f(a)]$.

Teorema I: Regla de L`Hôpital $\left(0/0\right)$

Supongamos que f y g tienen derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ en cada punto x de un intervalo abierto (a,b) y que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$. Supongamos también que $g'(x) \neq 0$ para cada x en (a,b). Si el límite $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe y tiene el valor L, entonces el límite $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ también existe y tiene el valor L.

Demostración:

Como f y g pueden no estar definidas en a definimos dos funciones auxiliares que están definidas en a.

Sean $$\begin{array}{l} F(x)=f(x) \text{ si } x\neq a, \quad F(a)=0 \\ G(x)=g(x) \text{ si } x\neq a, \quad G(a)=0 \end{array}$$

F y G son ambas continuas en a.

En efecto, $\lim_{x\to a} F(x)=\lim_{x\to a} f(x)=0=F(a)$ y $\lim_{x\to a} G(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0=G(a)$. Si $a<x<b$, F y G tienen derivada en todos los puntos del intervalo abierto (a,x).

Por lo tanto, el teorema del Valor Medio de Cauchy se puede aplicar para F y G en el intervalo $[a,x]$ y se obtiene $[F(x)-F(a)]G'(c)=[G(x)-G(a)]F'(c)$ donde c es un punto que satisface $a<c<x$.

Teniendo en cuenta que $F(a)=G(a)=0$ se tiene que $f(x)g'(c)=g(x)f'(c)$.
Además $g'(c)$ es distinto de cero, ya que por hipótesis, g' no se anula en ningún punto de (a,b), y $g(x)$ también es distinto de cero, ya que si $g(x)=0$, entonces $G(x)=G(a)=0$ y por el teorema de Rolle, existe un punto x_0 tal que $a<x_0<x$ donde $G'(x_0)=0$, lo que contradice la hipótesis de que $g'(x)$ no se anula en (a,b).
Así, se puede dividir entre $g'(c)$ y $g(x)$, con lo que: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

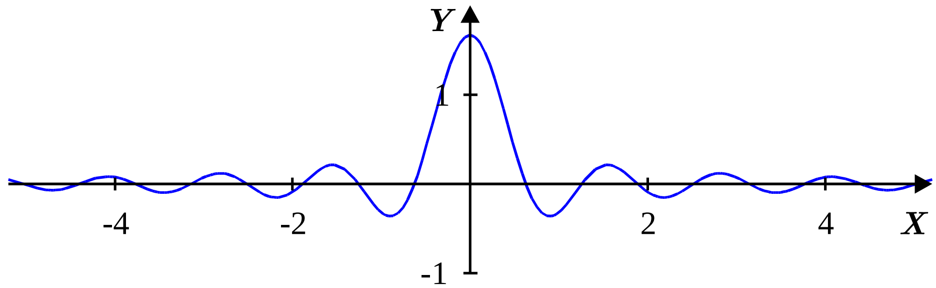
Cuando $x\to a$, el punto $c\to a$ (puesto que $a<c<x$) y el cociente de la derecha tiende a L.

Por lo tanto, $f(x)/g(x)$ tiende también a L. Por lo tanto está demostrado.

□

Ejemplo I: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}(5x)}{3x}$.

Por la regla de L'Hôpital (teorema I), $\lim_{x\to 0}\dfrac{(\text{sen}(5x))'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\dfrac{5\cos 5x}{3}=\dfrac{5}{3}$.



Teorema II: Regla de L`Hôpital $\left(\frac{0}{0}\right)$

Supongamos que f y g tienen derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ $\forall x$ mayor que un cierto número fijo $M>0$. Supongamos también que $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ y que $g'(x)\neq 0$ para $x>M$. Si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tiende a un límite cuando x tiende a ∞, entonces $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene límite y ambos son iguales, es decir, $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ implica que $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

Demostración:

Sean $F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$ y $G(t)=g\left(\frac{1}{t}\right)$ entonces $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{F(t)}{G(t)}$ si $t=\frac{1}{x}$ y $t\to 0^+$ cuando $x\to\infty$.

Puesto que $\frac{F(t)}{G(t)}$ toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ cuando $t\to 0^+$, usando la regla de L'Hôpital (teorema I), se considera el cociente de las derivadas $\frac{F'(t)}{G'(t)}$.

Aplicando la Regla de la Cadena tenemos que $F'(t)=-\frac{1}{t^2}f'\left(\frac{1}{t}\right)$ y $G'(t)=-\frac{1}{t^2}g'\left(\frac{1}{t}\right)$, $G'(t)\neq 0$ si $0<t<\frac{1}{M}$. Si $x=\frac{1}{t}$ y $x>M$, se tiene $\frac{F'(t)}{G'(t)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Entonces si $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ tiende a L cuando $x \to \infty$, entonces $\dfrac{F'(t)}{G'(t)}$ tiende a L cuando $t \to 0^+$ y por la regla de L'Hôpital (teorema I), $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0^+} \dfrac{F'(t)}{G'(t)} = L$ entonces $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \dfrac{F(t)}{G(t)} = L$. Por lo tanto está demostrado.

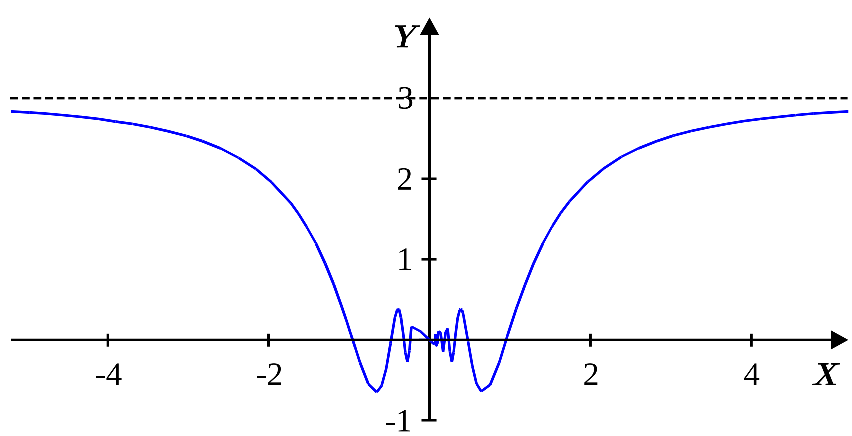
□

Ejemplo II: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{k}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$.

Por la regla de L'Hôpital (teorema II),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\operatorname{sen}\left(\dfrac{k}{x}\right)\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{k\left(\cos\dfrac{k}{x}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} k\cos\left(\frac{k}{x}\right) = k.$$

En la figura siguiente aparece la gráfica cuando $k = 3$



□

Teorema III: Regla de L`Hôpital $\left(\infty/\infty\right)$

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas y derivables para todos los valores de $x \neq a$ en una vecindad del punto $a,$ y que la derivada $g'(x) \neq 0.$ Supongamos también que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$ $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ y que existe el límite $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L,$ entonces existe también el $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Demostración:

En la vecindad considerada del punto a, elijamos dos puntos x_0 y x de tal modo que $x_0 < x < a$ $\left(ó \quad x_0 > x > a\right).$

Por el Teorema del Valor Medio de Cauchy tenemos:

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{g(x_0)-g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{donde} \quad x < c < x_0, \ \text{entonces}$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x) - \dfrac{f(x_0)f(x)}{f(x)}}{g(x) - \dfrac{g(x_0)g(x)}{g(x)}} = \frac{f(x)\left[1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}\right]}{g(x)\left[1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}\right]} \quad \text{por transitividad tenemos}$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)\left[1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}\right]}{g(x)\left[1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}\right]} \qquad \text{despejando} \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)\left[1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}\right]}{g'(c)\left[1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}\right]}$$

Por otro lado, por hipótesis $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L,$ además, puesto que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$ se tiene que $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x_0)}{f(x)} = 0$ y $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x_0)}{g(x)} = 0.$

Aplicando límite tenemos que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot\frac{\left[1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}\right]}{\left[1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}\right]}.$$

Si $x\to a$ como $x<c<a$ entonces $c\to a$, de donde:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot\frac{\left[1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}\right]}{\left[1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}\right]}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot\frac{[1-0]}{[1-0]}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=L.$$

Así, se deduce que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$ de donde $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$. Por lo tanto está demostrado.

$\square$

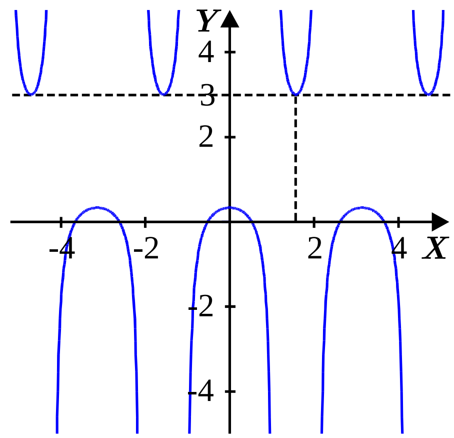
Ejemplo III: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x}$.

Por la regla de L'Hôpital (teorema III),

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\operatorname{tg}x)'}{(\operatorname{tg}3x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{3\cdot\dfrac{1}{\cos^2 3x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{3}{\cos^2 3x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\cdot\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1\cdot\cos^2 3x\right)'}{\left(3\cdot\cos^2 x\right)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\cdot 3\cos 3x\cdot\operatorname{sen}3x}{-3\cdot 2\cos x\cdot\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x\cdot\operatorname{sen}3x}{\cos x\cdot\operatorname{sen}x}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \cdot \left(\frac{-1}{1}\right) = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos 3x)'}{(\cos x)'} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} = -3 \cdot \left(\frac{-1}{1}\right) = 3.$$



□

Teorema IV: Regla de L`Hôpital $\left(\infty/\infty\right)$

Supongamos que f y g tienen derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ $\forall x$ mayor que un cierto número fijo $M > 0$. Supongamos también que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y que $g(x) \neq 0$ para $x > M$. Si $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ tiende a L cuando x tiende a ∞, entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tiene límite y ambos son iguales, es decir, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración:

Sean $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ y $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$ entonces $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(t)}{G(t)}$ si $t = \frac{1}{x}$ y $t \to 0^+$ cuando $x \to \infty$.

Puesto que $\frac{F(t)}{G(t)}$ toma la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ cuando $t \to 0^+$, usando la regla de L'Hôpital (teorema II), se considera el cociente de las derivadas $\frac{F'(t)}{G'(t)}$.

Aplicando la regla de la cadena tenemos que $F'(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)$ y $G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)$, por hipótesis $G'(t) \neq 0$ si $0 < t < \frac{1}{M}$.

Si $x = \frac{1}{t}$ y $x > M$, se tiene $\frac{F'(t)}{G'(t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Entonces si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tiende a L cuando $x \to \infty$, tenemos que $\frac{F'(t)}{G'(t)}$ tiende a L cuando $t \to 0^+$ y por la regla de L'Hôpital (teorema III), $\lim_{t \to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = L$, entonces $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = L$ de donde $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Por lo tanto está demostrado.

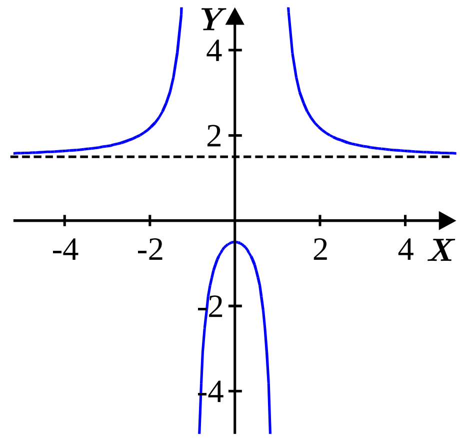
□

Ejemplo IV: $\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + b}{cx^2 - d}$.

Por la regla de L'Hôpital (teorema IV),

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left(ax^2 + b\right)'}{\left(cx^2 - d\right)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{2ax}{2cx} = \frac{a}{c}.$$

En la figura siguiente aparece la gráfica cuando $a = 3,\ b = 1,\ c = 2,\ d = 2.$



□

Teorema V: Regla de L`Hôpital

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas y derivables para todos los valores de $x \neq a$ en una vecindad del punto a, y que la derivada $g'(x) \neq 0$. Supongamos también que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ y que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, entonces también el $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Demostración:

Como $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, se tiene que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 0$, y tenemos las hipótesis para aplicar la Regla de L`Hôpital (teorema I), entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$

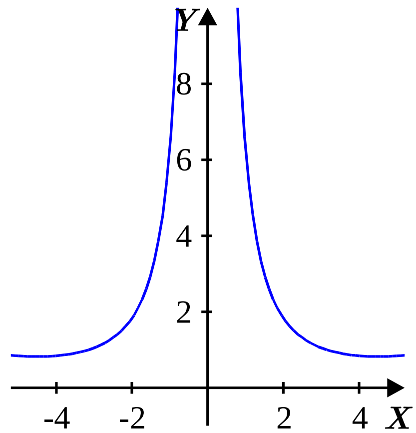
$\therefore \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty.$ Por lo tanto está demostrado.

□

Ejemplo V: $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{x-\operatorname{sen} x}$.

Por la regla de L'Hôpital (teorema V),

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{(x-\operatorname{sen} x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}=\infty \quad \text{dado que} \quad 1-\cos x\geq 0\,.$$



□

Teorema VI: Regla de L`Hôpital

Supongamos que f y g tienen derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ $\forall x$ mayor que un cierto número fijo $M>0$. Supongamos también que $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ y que $g'(x)\neq 0$ para $x>M$. Si $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ tiende a ∞ cuando x tiende a ∞, entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ también tiende a ∞, es decir, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty=\lim_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración:

Sean $F(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ y $G(t)=g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{F(t)}{G(t)}$ si $t=\dfrac{1}{x}$ y $t\to 0^{+}$ cuando $x\to\infty$.

$\frac{G(t)}{F(t)} = \frac{g(x)}{f(x)}$ como por hipótesis $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ se tiene que $\lim_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$, aplicando la regla de L'Hôpital (teorema II), tenemos que $\lim_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{f(t)} = 0$ de donde $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$. Por lo tanto está demostrado.

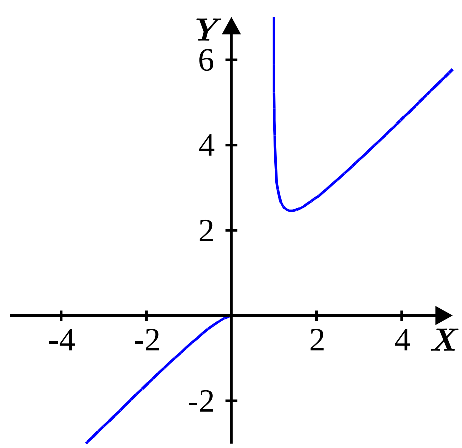
□

Ejemplo VI: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$.

Por la regla de L'Hôpital (teorema VI),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right)\cdot\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{\frac{x-1}{x}}\right)\cdot\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x(x-1)}}{\frac{2}{x^3}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2} = \infty.$$



□

Teorema VII: Regla de L`Hôpital

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas y derivables para todos los valores de $x \neq a$ en una vecindad del punto a, y que la derivada $g'(x) \neq 0$. Supongamos también que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ y que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, entonces también el $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Demostración:

En este caso $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, se tiene que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 0$, y tenemos las hipótesis para aplicar la Regla de L`Hôpital (teorema III), entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ de donde $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$. Por lo tanto está demostrado.

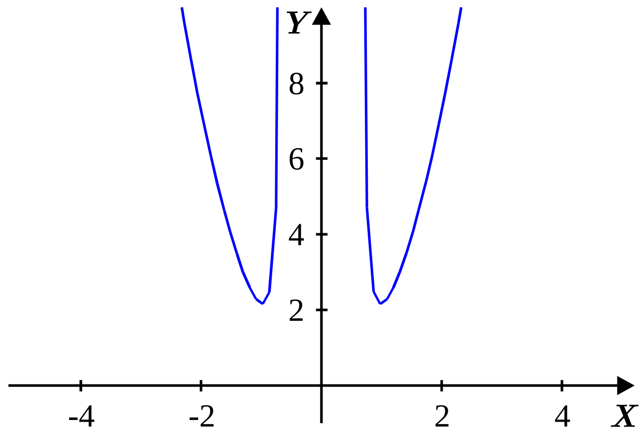
$\square$

Ejemplo VII: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\frac{1}{x^4}}+1}{e^{\frac{1}{x^2}}-1}$.

Por la regla de L'Hôpital (teorema VII),

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{\frac{1}{x^4}}+1\right)'}{\left(e^{\frac{1}{x^2}}-1\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{4}{x^5}\cdot e^{\frac{1}{x^4}}}{-\frac{2}{x^3}\cdot e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3\cdot e^{\frac{1}{x^4}}}{2x^5\cdot e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{\frac{1}{x^4}}}{x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}}}{x^2\cdot} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{\frac{1-x^2}{x^4}}}{x^2\cdot} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^2} e^{\frac{1-x^2}{x^4}} = \infty.$$



□

Teorema VIII: Regla de L`Hôpital

Supongamos que f y g tienen derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ $\forall x$ mayor que un cierto número fijo $M > 0$. Supongamos también que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y que $g'(x) \neq 0$ para $x > M$. Si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tiende a ∞ cuando x tiende a ∞, entonces $\frac{f(x)}{g(x)}$ también tiende a ∞, es decir, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$.

Demostración:

Sean $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ y $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$ entonces $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(t)}{G(t)}$ si $t = \frac{1}{x}$ y $t \to 0^+$ cuando $x \to \infty$.

Si tenemos $\frac{G(t)}{F(t)} = \frac{g(x)}{f(x)}$ como por hipótesis $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ se tiene que $\lim_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$

Aplicando el Teorema IV de la Regla de L`Hôpital tenemos que

$\lim_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{f(t)} = 0$ de donde $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$.

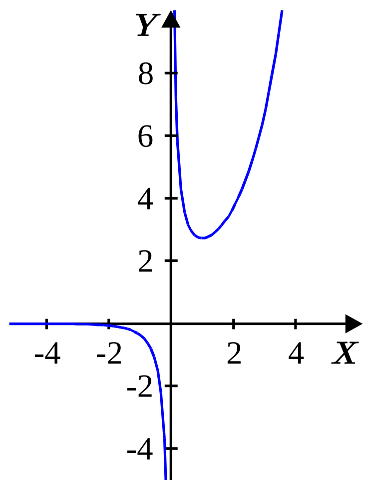
Por lo tanto está demostrado.

□

Ejemplo VIII: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}$.

Por la regla de L'Hôpital (teorema VIII),

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\lim_{x\to\infty}e^x=\infty.$$

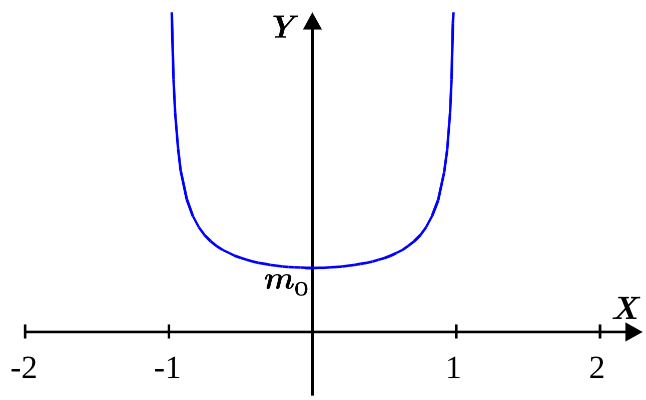


□

APLICACIONES

1.-Según la teoría de la relatividad de Einstein, la masa m de un cuerpo que se mueve con una velocidad v es $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$ en donde m_0 es la masa inicial y c es la velocidad de la luz. ¿Qué sucede con m cuando $v \to c^-$?

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{pero} \quad \lim_{v \to c^-} \frac{v^2}{c^2} = 1 \quad \text{entonces} \quad \lim_{v \to c^-} \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \lim_{\frac{v^2}{c^2} \to 1^-} \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \infty.$$



2.-Un problema importante de la ciencia pesquera consiste en calcular el número de peces que desovan actualmente en los ríos y emplear esta información para predecir el número de peces maduros o "reclutas" que volverán a los ríos durante el siguiente periodo de reproducción. Si S es el número de peces hembra y R el número de reclutas, la función hembra-recluta de Beverton y Holt es $R(s) = s/(\alpha S + \beta)$, en donde α y β son constantes positivas. Demuestre que esta función predice un reclutamiento aproximadamente constante cuando el número de hembras es suficientemente grande.

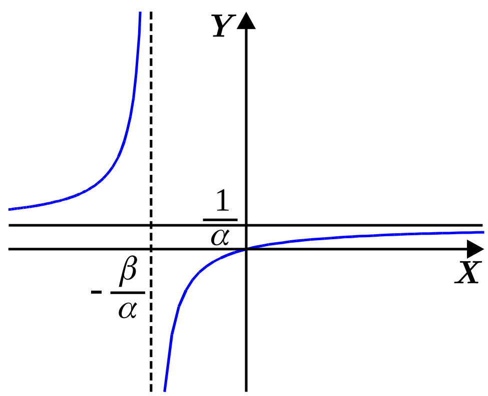
S = número de peces hembra

R = número de reclutas

Función hembra-recluta de Beverton y Holt es $R(S)=\dfrac{S}{(\alpha S+\beta)}$ con α y β constantes

Si el número de peces hembra es muy grande

$$\lim_{S\to\infty} R(S)=\lim_{S\to\infty}\frac{S}{(\alpha S+\beta)}=\lim_{S\to\infty}\frac{1}{\frac{(\alpha S+\beta)}{S}}=\frac{1}{\lim\limits_{S\to\infty}\left(\frac{(\alpha S+\beta)}{S}\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{S\to\infty}\left(\frac{\alpha S}{S}+\frac{\beta}{S}\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{S\to\infty}\left(\alpha+\frac{\beta}{S}\right)}=\frac{1}{\alpha}.$$



3.-En un individuo, hay dos géneros de cromosomas de sexo, el X y Y. Un individuo XX es femenino y un XY es masculino. Sean A y a dos genotipos en un cierto lugar del cromosoma X los cuales no corresponden a un lugar del cromosoma Y. Por tanto, los masculinos solo pueden ser del genotipo A o a, mientras que los femeninos pueden ser de una de estos tres genotipos AA, Aa y aa. La teoría muestra que bajo la suposición de panmixia (apareamiento aleatorio) la frecuencia de A y a oscila de generación en generación . La oscilación es disminuida para que la frecuencia rápidamente converge a cierto límite. Para la comodidad de la presentación nos brincamos la prueba y nos confinamos a un ejemplo numérico.

Sea q_1 la frecuencia inicial del genotipo masculino a y sean q_2, q_3 las frecuencias correspondientes de las generaciones subsecuentes. Entonces

$$q_n = 0.40 + 0.20\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{para} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Para este ejemplo particular obtenemos:

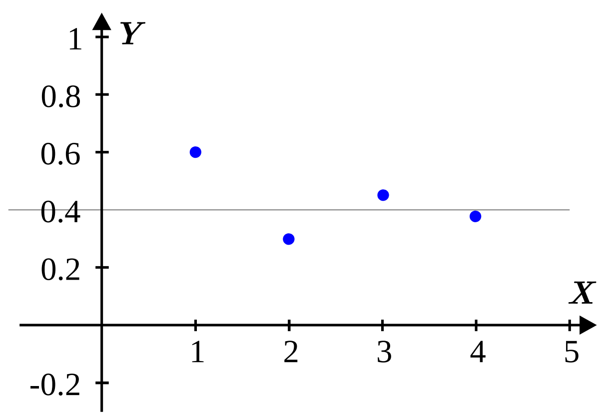
$$q_1 = 0.40 + 0.20 = 0.60$$

$$q_2 = 0.40 + 0.20\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.30$$

$$q_3 = 0.40 + 0.20\left(\frac{1}{4}\right) = 0.45$$

$$q_4 = 0.40 + 0.20\left(-\frac{1}{8}\right) = 0.375, \text{ etc.}$$

Así $\lim_{n\to\infty} q_n = 0.40$.



□

4.-Neel y Schull estudiaron el caso de retinoblastoma bajo la influencia de la mutación, herencia y selección. El retinoblastoma es un tipo de cáncer de los ojos en los niños. Aparentemente la enfermedad depende de un gen sencillo dominante, llamado A. Sea a el gen normal. Se cree que la mutación de a en A ocurre en una velocidad de $m = 2\times 10^{-5}$ en cada generación. Se excluye la posibilidad de mutaciones inversas $(A$ en $a)$. Con cuidados médicos, aproximadamente 70% de las personas afectadas sobreviven. Se supone que los sobrevivientes reproducen la mitad de la frecuencia normal. La proporción de producción neta de personas afectadas es $r = 0.35$.

Como A es extremadamente raro prácticamente todas las personas afectadas son de genotipo *Aa*. Podemos ignorar a los individuos del genotipo *AA*. Solo la mitad de los niños de los individuos afectados son entonces los que se supone recibirán el gen patógeno A, pero esta reducción es compensada por el hecho de que cada persona afectada compartirá la reproducción con su compañero no afectado. Empezando con casos de herencia cero, en una primera generación se obtiene para n generaciones consecutivas un porcentaje de

m debido a la mutación en la n-ésima generación

mr debido a la mutación en la $(n-1)$-ésima generación

mr^2 debido a la mutación en la $(n-2)$-ésima generación

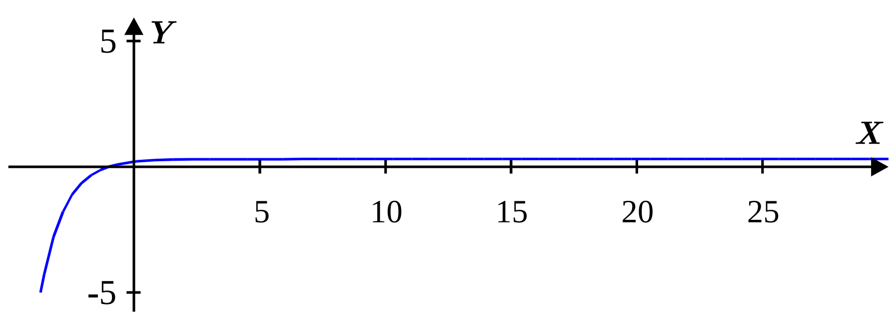
mr^n debido a la mutación en la generación original (la cual es numerada cero).

Para el porcentaje total p_n de ocurrencia en la n-ésima generación obtenemos

$$p_n = m + mr + mr^2 + \cdots + mr^n = m \cdot \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty \quad \text{obtenemos}$$

$$P = \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{m}{1-r} = \frac{2\times 10^{-5}}{1-(0.35)} = 3.08\times 10^{-5}$$

Por lo tanto la frecuencia de personas afectadas con retinoblastoma será finalmente de 3.8×10^{-5}, esto es un 50% mayor que el porcentaje de mutaciones.
Para poder apreciar gráficamente el comportamiento de la función hemos utilizado $m = 0.2$.



□

5.-El isótopo de Cosie ^{137}Cs pierde 2.3% de su masa anualmente por decaimiento radiactivo. ^{137}Cs es un peligroso agente contaminante contenido en la lluvia radioactiva. Asumimos que cada año la misma masa M de ^{137}Cs es liberada para el medioambiente. ¿Cuál es el total de la masa que será acumulada después de n años, cuando el equilibrio es alcanzado $(n \to \infty)$?

La masa liberada el primer año es M. El factor de masa que se gana cada año es el siguiente

$$q = 1 - 0.023 = 0.977$$

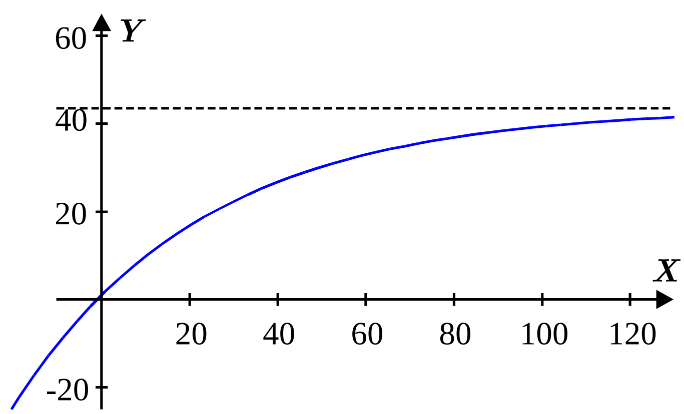
El total de la masa acumulada en n años será

$$M_n = M + Mq + Mq^2 + \cdots + Mq^n = \frac{M\left(1 - q^{n+1}\right)}{1 - q}$$

El equilibrio es para $n \to \infty$, por lo que tenemos que

$$\text{Equilibrio} = \lim_{n\to\infty} \frac{M\left(1 - q^{n+1}\right)}{1 - q} = \frac{M}{1 - q} = \frac{M}{0.023} = 43.5M .$$

En la figura siguiente aparece la gráfica cuando $M = 1$



6.- Un tanque contiene 5000 litros de agua pura. El agua de mar que contiene 30 g de sal por litro de agua es bombeada dentro del tanque con una velocidad de 25 litros por minuto.

Mostrar que la concentración de sal después de t minutos (en gramos por litros) es

a) $C(t)=\dfrac{30t}{200+t}$

b) ¿Qué pasa con la concentración para $t\to\infty$?

a) Cada litro tiene $30g$ de sal, entonces en $t=1$ minuto vaciamos 25 litros de agua en el tanque con 5000 litros y la concentración de sal es la siguiente $30g$ por cada litro.

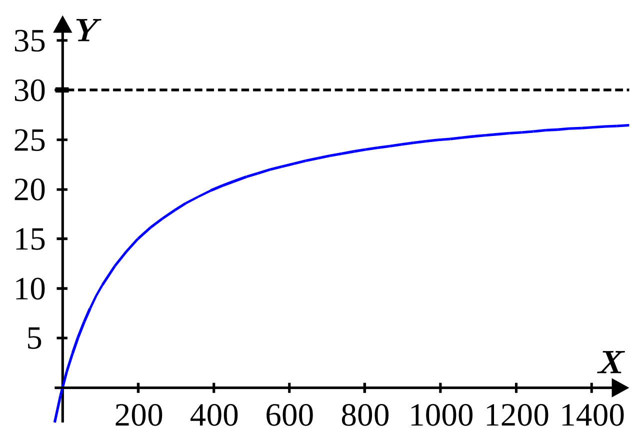
En un minuto tenemos $30g\times 25lts$ y en el tanque tenemos $5000lts+25lts$ de agua en un minuto.

Así la cantidad de sal en t minutos es $25\cdot 30\cdot t$ y la cantidad de agua del tanque es $5000+25\cdot t$ entonces la concentración es

$$C(t)=\frac{(25)(30t)}{5000+25t}=\frac{(25)(30t)}{(25)(200+t)}=\frac{30t}{200+t}.$$

b)

$$\lim_{t\to\infty}C(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{30t}{200+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\frac{200+t}{30t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to\infty}\frac{200+t}{30t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to\infty}\frac{200}{30t}+\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{30t}}=\frac{1}{0+\frac{1}{30}}=\frac{1}{\frac{1}{30}}=30.$$



□

BIBLIOGRAFIA

- Apostol, Tom M.- *Calculus.*- Vol. 1. Editorial Reverté, S.A. Segunda Edición 1984.
- Batschelet, Edward.-*Introduction to Mathematics for life Scientists*.-Third Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. New York 1979.
- Bers, Lipman y Karal Frank.- *Cálculo.*- Editorial Interamericana S.A. de C.V. Segunda Edición, 1985.
- Courant, Richard y Fritz John.- *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático.*- Vol. 1. Editorial Limusa, S.A. de C.V. 1997. Décima Tercera Edición.
- Croft, Anthony y Davison Robert y Hargreaves Martin.-*Engineering Mathematics a Modern Foundation for Electronic, Electrical and Systems Engineers*.-Second Edition. Addison-Wesley.
- Demidovich, B.-*Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*.- Editorial Mir. Moscú.
- Haaser, Norman B. y La Salle Joseph P. y Sullivan Joseph A.- *Análisis Matemático.*- Vol. 1. Editorial Trillas. México 1990.
- Kuratowski, Kazimierz.- *Introducción al Cálculo.*- Editorial Limusa S.A. de C.V. Séptima Edición 1990.
- Piskunov, N.- *Cálculo Diferencial e Integral*.- Tomo I. Editorial Mir. Moscú. Sexta Edición 1983.
- Reza, Malek-Madani.-*Advanced Engineering Mathematics with Mathematica and Matlab*.-Volume One. Addison-Wesley.
- Spivak, Michael.- *Cálculo Infinitesimal.*- Editorial Reverté, S.A. Segunda Edición 1992.
- Stewart, James.-*Calculus*.-Fourth Edition. Brooks/Cole Publishing Company.
- Zill, Dennos G.- *Cálculo con Geometría Analítica*.- Grupo Editorial Iberoamericana S.A. de C.V.