UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Matemática y Lógica:
Una búsqueda de la verdad

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

SERGIO IVAN GONZÁLEZ MEDINA

TUTOR: DOCTOR ALEJANDRO RICARDO GARCIADIEGO DANTÁN

2006

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
   González
   Medina
   Sergio Ivan
   56 95 57 60
   Universidad Nacional Autonoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   097320654

2. Datos del tutor
   Dr
   Alejandro Ricardo
   Garciadiego
   Dantán

3. Datos del sinodal 1
   M en C
   Ana Maria
   Sánchez
   Mora

4. Datos del sinodal 2
   M en C
   Gonzalo
   Zubieta
   Russi

5. Datos del sinodal 3
   Dra
   Atocha
   Aliseda
   Llera

6. Datos del sinodal 4
   Mat
   María Concepción
   Ruiz
   Ruiz Funes

7. Datos del trabajo escrito

   Matemática y Lógica

   Una búsqueda de la verdad

   76 p

   2006

A mis padres

A mis hermanas

A mis amigos

A mis padres, por todo el cariño y apoyo que me han dado. Por sus enseñanzas y los cocos bien merecidos que me dieron. Si no hubiera sido por ustedes, creo que estos agradecimientos hubieran llegado años después. En verdad, gracias. Son la parte más importante de mi vida. Los amo.

A mis hermanas, porque siempre han estado junto a mi, y se han preocupado por mi bienestar. Por todos los buenos momentos que me han hecho pasar. Espero que sigamos juntos como hasta ahora.

A Nadia, porque todos los dias me hace reír con sus travesuras y su forma de ser.

A mi nuevo sobrino, por haber nacido y hacer tan feliz a mi hermana, a toda mi familia y a mi.

A mi asesor, por todo lo que me ha enseñado, tanto de historia, filosofía y matemáticas, como de la vida. Por haberme presionado para que hiciera un buen trabajo. Pero sobre todo, por brindarme su amistad. Gracias Alejandro.

A Silvia, Mau, Aldo, Laura, Claudia, Victor, Gaby y Daniel por esos buenos años en la facultad, por su amistad, por estar conmigo incondicionalmente, y por tantos momentos tan padres que hemos tenido.

A Mariana y Sandra, por todos los años que han estado ahí. Que les puedo decir amigas. Son tantos años, y tan poco espacio donde escribir.

A Oscar, Katia, Jaime, Mar, Alejandra y Alvaro, por todo lo que he aprendido con ustedes, particularmente, la lección, de que siempre hay que luchar por un mundo nuevo y libre. Estoy seguro que algún día va a pasar amigos.

Índice general

INTRODUCCIÓN

La divulgación de la ciencia es una actividad que trata de hacer llegar a la gente el conocimiento científico, de manera que sea entendible, con un lenguaje coloquial, sin tecnicismos, con analogías, sin que se pierda la esencia del tema que se trata. Lamentablemente, pocos científicos realizan esta actividad y, en el caso de las matemáticas, son todavía menos los que se preocupan por ella.

Esta actividad nace de la necesidad de algunas personas por transmitir el conocimiento científico a un público más general. Esa necesidad está dada por la inaccesibilidad al mismo; y, además, es alimentada, por un rechazo, casi general, por parte de la sociedad. En particular, en matemáticas, este hecho está más marcado. La razón es que ese tipo de conocimiento ha llegado a tal grado de especialización que cada vez los conceptos y el lenguaje son más complejos, lo que hace que el entendimiento de los mismos sólo sea por parte del especialista en el tema.

La divulgación de las matemáticas, y de la ciencia en general, es de suma importancia para una sociedad desde el punto de vista cultural, ya que una sociedad educada es una sociedad avanzada. Trata de despertar el interés por conocer, lo cual la hace igual de valiosa que cualquier lección de matemáticas. Más aún, la divulgación pretende formar un acercamiento entre la sociedad y la ciencia. En este sentido, el trabajo del divulgador es arduo, ya que éste debe ser entendido por el público al que está dirigido, de manera que el mismo no se sienta ajeno al contenido. Es por esto, que los trabajos de divulgación tienen que estar hechos con un lenguaje común, sin tecnicismos, en base a analogías, porque éstas, le permiten al publico identificarse con lo que lee, escucha o ve. Más importante, no sé tiene que perder la esencia del tema en el camino, porque entonces, no sé transmite algún tipo de conocimiento. Además, debe ser original y creativo. Así, la divulgación de la ciencia crea un puente entre las personas y la misma.

Sánchez Mora [2002, 307] plantea:

> La divulgación nace con la ciencia moderna para subsanar el distanciamiento que se crea respecto al resto de la cultura debido a la complejidad de los conceptos y al lenguaje especializado de la ciencia.
>
> La divulgación de la ciencia es una recreación del conocimiento científico que va desde la mera contextualización de la información hasta una forma innovadora cercana al arte. Esta recreación hace de la divulgación un discurso autónomo que si bien se nutre de la ciencia, le puede llegar a aportar elementos creativos y originales.

Hay que aclarar que no existe una única definición de qué es la divulgación de la ciencia, por la falta de teorización sobre la misma. En ese sentido, la experiencia de personas en esta materia, que han tratado de establecer las bases sobre lo que es esta actividad, sirve para darle sustento a este trabajo.

El objetivo de esta tesis es plantear un ejemplo de divulgación de la ciencia, en particular, de las matemáticas, de manera que el lector entienda la importancia de la lógica dentro del conocimiento humano, y en especial, dentro de las matemáticas, ya que fue detonador y manzana de la discordia, de una de las discusiones filosóficas más importantes de principios del siglo XX acerca de la fundamentación de las matemáticas, en donde fungen como protagonistas tres escuelas filosóficas: los logicistas, los formalistas y los intuicionistas. Éstas han intentado darle una fundamentación a la matemática sin poder establecer un acuerdo; esto es, por la diferencia de fondo que está de por medio: la lógica. Esto se verá con detenimiento en los capítulos subsecuentes.

Este trabajo está dirigido a personas que estudian el nivel bachillerato. Esto se hace con la intención de que, al ser leído por ellas, tengan la inquietud por saber más sobre matemáticas. En ese sentido, por estar en una etapa en la que deciden qué estudiar en su futuro, puedan tener como una opción real estudiar matemáticas. Lamentablemente, los estudiantes tienen una idea errónea de lo que es la materia. La enseñanza de las matemáticas a ese nivel, y a nivel básico, hace que los alumnos conciban que las matemáticas sólo son operaciones que hay que mecanizar, y conceptos y fórmulas que hay que memorizar. Esto, aunado a la fe ciega que le tienen al profesor por la figura de autoridad que representa, y a los libros de texto, porque se supone que tienen un conocimiento ya establecido, hace que no realicen ningún tipo de cuestionamiento, y menos se lo hacen al profesor. Él tiene la verdad, los alumnos por su ignorancia no pueden objetar. Santos Trigo [1993, 427-428] plantea:

> Las ideas que los profesores tienen acerca de las matemáticas moldean las actividades del salón de clases [...]
>
> El profesor y el libro de texto se convierten en la autoridad para el estudiante que le permiten determinar cuando un resultado o un problema es correcto.

Lo anterior conlleva una idea de que las matemáticas son una teoría ya terminada, que sólo tiene sentido para los que van a estudiar contaduría, ingeniería, economía, o matemáticas. Así pues, el alumno terminará por detestar la materia, con la esperanza de nunca más saber de ella. Por otro lado, hay que sumar la falta de preparación de los profesores, que en algunos casos piensan lo mismo que los alumnos acerca de la materia; o, en el peor de ellos, ni siquiera entienden los temas que imparten. Pero, esa discusión es demasiado compleja y amplia, y no la trataré en esta tesis.

En este trabajo no voy a adentrarme en la polémica filosófica de las tres escuelas; lo que pretendo es despertar la curiosidad del estudiante hacia el papel que puede jugar la lógica en una disciplina.

Este trabajo está escrito en forma de diálogo, donde no se hará uso de definiciones, ni de tecnicismos. Sólo plantearé situaciones de tipo cotidiano, y un lenguaje común; además, de ejemplos sencillos donde se hace uso de matemáticas. El lector no necesitará más conocimientos que los que tiene de sus estudios anteriores; y no necesita saber lógica para poder entender la parte donde se habla de eso.

La narrativa gira en torno de dos personas de edades distintas. Por un lado, está un adolescente de bachillerato llamado Juan, que se encuentra a disgusto con las matemáticas, porque su experiencia con ellas ha sido tormentosa. Por otro lado, está Ivan, matemático de formación y profesor. Las vidas de estos dos personajes se cruzan desde hace tiempo, porque además de ser vecinos, Ivan es amigo del hermano de Juan. Todo comienza, un día por la tarde cerca de casa de Ivan.

Aunque se dijera que toda esta vida no es más que un sueño y que el mundo físico es un puro fantasma; ese sueño o ese fantasma me parecerían suficientemente reales si al usar bien la razón no quedáramos nunca defraudados.

Leibniz

Capítulo 1

¿MAGIA, MEMORIA, CREENCIA O ...?

—Hola Iván.
—Hola Juan, ¿cómo estás?
—Bien ¿y tú?
—También, bien.
—¿Qué dices? ¿cómo está tu hermano? Porque ayer se puso una buena borrachera.
—Si, me di cuenta. Amaneció con una carita y un hedor, que parece que se tomo todo el alcohol del bar.
—Pues casi. Esta vez me tocó cuidarlo, y como tenía que dar una clase ahora, sólo me tomé dos tragos. Así que, ¡mírame! Ando fresco.
—Sí, se ve. Oye, pero que bueno que te encuentro.
—¿Por qué?
—Porque quiero ver si me puedes ayudar con algo que me dejo mi maestro de matemáticas.
—Sí, seguro. Es más, si tienes tiempo pásale a mi casa y de una vez lo vemos.
—¡Ah! pues orale, me parece bien. Vamos.
—Pasa. ¿Quieres algo de tomar? O, ¿ya comiste?
—No.
—Ah, pues comemos y me pláticas cuál es el problema y después lo resolvemos.
—Me parece perfecto.

—¿Qué quieres de tomar?
—Pues lo que sea; agua, refresco, ¿una cervecita? Lo que sea.
—Igual de borracho que tu hermanito, pero está bien, te puedo dar una.
—¿Qué? ¿por qué?
—¿Cómo por qué?. Yo no quiero que tu mamá me regañe de que le ando dando a su bebé de tomar.
—Bueno, está bien.
—Y, ¿cuál es le problema que tienes?
—Pues mi maestro nos habló de los cuadrados mágicos, ¿has oído hablar de ellos?
—Sí.
—Entonces nos explicó las reglas para hacer uno, y nos dejó de tarea que lo hiciéramos. Y ese es el problema, que no me sale. Ya lo intenté hacer de varias formas, y no.
—O sea, ¿que nada más les dijo las reglas que se tenían que cumplir y los dejó a su suerte?
—Pues sí. Y, en realidad, yo no sé para que nos sirve eso. Bueno, yo no sé para que nos sirven las matemáticas, sólo deberían enseñarnos a sumar, restar, multiplicar y dividir. Eso es lo único que nos sirve. Lo de las ecuaciones, la raíz cuadrada, las parábolas y demás cosas, que se las enseñen a los que van estudiarlas; como tú, por ejemplo.
—Qué mal que pienses así, pero entiendo tu postura. Creo que ésta va a ser una larga plática ¿tienes tiempo?
—¿Por qué? ¿es tan difícil el problema?
—Creo que sí. Pero, no el que te dejó tu maestro, si no la aversión que te está creando hacia las matemáticas.
—Entonces, ¿me vas a terapear?
—Pues más o menos. Mira, si lo que platiquemos hoy, no te gusta, te resuelvo tu problema y ahí lo dejamos. Si es al revés, pues le seguimos ¿te parece?
—Bueno.
—Yo no sé por qué dices que las matemáticas no sirven para nada, si se utilizan en varios ámbitos de la vida; desde realizar una cuenta para pagar o cobrar en un restaurante, en la gasolinera, en el mercado, etcetera, hasta

utilizarlas en la ingeniería, economía, computación, etcétera. Entonces, si sirven ¿no?
—Pues a lo mejor si, pero son muy difíciles, yo no podría estudiar una carrera donde se utilizaran las matemáticas. Por eso voy estudiar algo de humanidades o de sociales.
—Está bien, tú vas a estudiar lo que quieras, pero que tu decisión no se base en si la carrera tiene matemáticas o no. A fin de cuentas, en cualquier carrera vas a tener que pensar y trabajar. El problema es que la forma en que te enseñan las matemáticas ha hecho que pienses así, pero éstas son muy interesantes y útiles no solo para resolver problemas de ingeniería, economía y cuestiones que tienen que ver con el mundo físico, sino para responder preguntas que tienen respuesta en el mundo de las ideas. Es decir, en la mente.
—¡Orale! Ya te estás viajando.
—¡Oh! En verdad, es como cuando eras niño, y jugabas con tus soldaditos o tus carritos. Y estabas ahí, solito, tirado en el suelo, y en tu mente, con el uso de tu imaginación, estabas en el terreno de batalla o en una pista de carreras, en la batalla o en la carrera mas divertida, ¿o no?
—Si, así es. Pero, yo en las matemáticas no utilizo mi imaginación.
—Pues a lo mejor no, pero es porque tus maestros no te hacen pensar. A ver, ¿por qué la formula del area del triángulo es $\frac{BXH}{2}$?
—No, no sé.
—Ya ves, ¿te lo habías preguntado alguna vez? ¿alguno de los maestros que has tenido les dijo de dónde salía tal fórmula?
—No.
—Ahí esta. Mira, me acaba de llegar a la mente una historia que probablemente conoces y que me va a ayudar a mi objetivo
—¿Cuál es?
—*El Principito*. ¿Has leído el libro?
—Sí, creo que lo leí en la secundaria, o el año pasado en la prepa.
—¿Y recuerdas la moraleja?
—No.
—¿Cómo? Bueno, déjame contarte una parte del libro para que recuerdes

más o menos de lo que se trataba, y lleguemos al punto que quiero.

Al principio del libro el que narra la historia comienza a platicar de que cuando era niño dibujó una boa que se había tragado un elefante. Esto del dibujo le nació de ver una revista sobre la selva virgen, y en una de las láminas que presentaba el libro estaba una boa comiéndose a su presa. Lamentablemente, tuvo que realizar varios dibujos de lo mismo, porque las personas grandes no lo entendían. Cuando hizo su primer dibujo esas personas pensaban que en lugar de ser una boa que digería un elefante, era un sombrero. Después realizo otro dibujo en donde mostró el interior de la

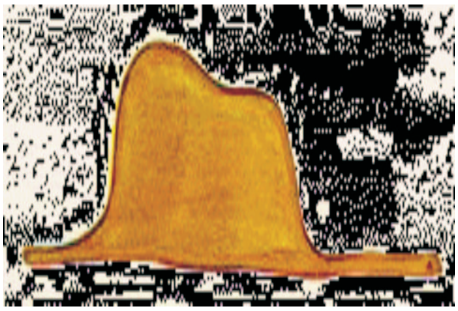

Figura 1.1: *El Principito*

boa. Entonces, las personas grandes le aconsejaron que se dedicara a otra cosa y dejara a un lado los dibujos de boas abiertas o cerradas. Y así creció,

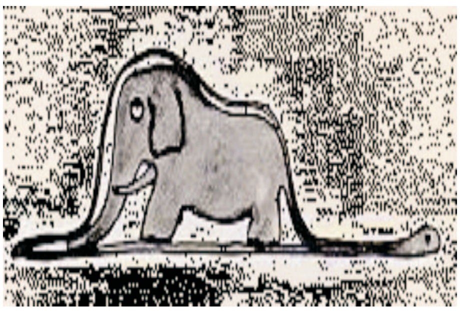

Figura 1.2: *El Principito*

sin que nadie lo entendiera. Y aunque tuvo contacto con muchas personas más grandes, su decepción era mucha. Cuando creía conocer a una persona lucida, la sometía a la experiencia de su primer dibujo que conservó siempre.

Quería saber si esa persona era comprensiva. Pero siempre le respondían "Es un sombrero". Así, vivió solo, sin nadie con quien hablar, hasta que un día, en alguna parte del desierto tuvo una avería. Como estaba solo, a mil millas de distancia del lugar habitado más próximo, decidió reparar el mismo la descompostura. Era una cuestión de vida o muerte, ya que sólo tenía agua para una semana aproximadamente. La primera noche que pasó en el desierto durmió en la arena. Se sentía peor que un naufrago en medio del océano. Y cual fue su sorpresa, cuando al amanecer lo despertó una vocecita que le decía:

—¡Por favor, píntame un cordero!

Él, sorprendido se pone de pie como de rayo. Se frota los ojos. Mira alrededor y ve a un extraordinario hombrecito que lo miraba con gravedad, y le dice:

—Pero, ¿tú que haces aquí?

Y él respondió, como si fuera algo muy importante.

—¡Por favor, píntame un cordero!

A lo que el narrador le contesto que no sabía dibujar.

Figura 1.3: Píntame un cordero!

—No importa, le respondió, ¡Píntame un cordero!

Entonces, él le mostró los únicos dos dibujo que había hecho. A lo que el hombrecito dijo:

—¡No!, ¡no! Yo no quiero un elefante en una serpiente. Las serpientes son peligrosas y el elefante ocupa mucho espacio. En mi casa es todo muy pequeño. Necesito un cordero. Píntame un cordero.

El narrador quedo estupefacto de la respuesta del hombrecito. Y le dibujó el cordero. El hombrecito miro el dibujo atentamente y dijo:
—¡No! Este cordero está muy enfermo. Haz otro.
El narrador volvió a dibujar. Esta vez hizo una dibujo parecido al anterior, pero con cuernos. A lo que el hombrecito responde:
—Esto no es un cordero, es un carnero. Tiene cuernos.
Entonces el narrador volvió a repetir su primer dibujo: fue rechazado igual que los anteriores. Ya desesperado de no complacer al hombrecito y de querer reparar el motor, hace otro dibujo rápidamente, se lo enseña y le agrega:
—Esta es la caja. El cordero que quieres está adentro.

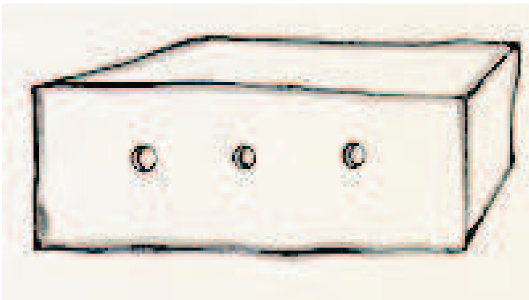

Figura 1.4: Píntame un cordero!

Y, para la sorpresa del narrador, al hombrecito se le iluminan los ojos y le dice:
—¡Así es como yo lo quería!
Y así, fue como el narrador conoce al Principito[Saint-Exupéry, 1943].

¿Qué tal? ¿ya recordaste la historia? ¿ya me puedes decir cual es la moraleja?
—Sí, ya recordé. Y ahora, pensándolo bien, creo que ya se que quiere decir el libro. Todo tiene que ver con la imaginación ¿no?
—Sí, ¿y qué más?
—Pues sí. Si en la imaginación se pueden concebir las cosas, entonces éstas pueden existir sin la menor duda.
—Pues en las matemáticas es lo mismo. Trabajas con ideas que se crean en la mente. No se hicieron solas. O son algo que está por ahí y alguien las descubre. ¿Estas de acuerdo en eso?

—Sí, creo. Pero, a lo mejor no todos podemos tener esas ideas
—¿Por qué no? Yo creo que sí, sólo se necesita pensar, preguntarse cosas, ejercitar la mente. A lo mejor, no todos tenemos las mismas ideas, porque la imaginación en cada mente es distinta, pero si se puede llegar a tener ese tipo de ideas. Es como el cuerpo humano, si no lo mueves, los músculos se atrofian. Para mi no fue tan fácil estudiar matemáticas. Cuando iba a entrar a la facultad yo iba con una idea de ellas y ya que estaba ahí, todo cambió. Deja te cuento mi historia.
Ingresé muy emocionado a la Facultad de Ciencias de la UNAM. Siempre había deseado estar ahí; desde que mi hermana me llevaba. Yo tenía doce años. El ambiente me era muy divertido y amigable. Cuando entré no fue distinto, sólo que se institucionalizó otra licenciatura, 'Ciencias de la Computación'. Creo que esta escuela, en particular, sobresale por su gente y ambiente, ya que hay una gran variedad de personas, y la mayoría son super alivianadas. Nadie se mete con nadie. Para que te des una idea, hubo una temporada en la que unos chavos, algunos eran de ahí otros no, todos los viernes realizaban actos de circo en el pulpo. El pulpo era como el parque central de la Facultad. Era un centro de reunion de mucha gente. Bueno, ahí hacían malabares, cuerda floja, llevaban hasta un monociclo. Entonces, veías a la gente conviviendo; algunas personas les pedían a los que hacían los actos, que les enseñaran, y lo hacían. Haz de cuenta, una cosa bien hipi, como un Woodstock (en cuanto a la atmósfera que se vivía), pero en pequeñito. Ya sabes, la convivencia entre todos, conocidos, desconocidos y gente externa a la Facultad. Todo mundo contento. Formándose un cigarrillo de tabaco o tomándose una cerveza, aunque eso estaba prohibido, pero yo creo que era tan tranquilo todo que no había problema. Y claro, no podia faltar como en Woodstock, la marihuana. Todo era muy agradable. En ninguna otra Facultad vi una cosa igual. Ni en la de Filosofía hay algo parecido.

Así como en el pulpo, en todos los espacios de esparcimiento y comida de la Facultad era lo mismo: En el Lagartijero, el Prometeo, la cafeteria, en las quecas del estacionamiento, con Harry el sucio. El lagartijero era un pequeño cuadro donde pegaba el sol y estaba entre edificios, y la gente aprovechaba para darse una pequeña bronceada; de ahí el nombre, porque las personas que se encontraban en ese lugar parecían lagartijas tomando el sol. El Prometeo era un espacio abierto enfrente de la biblioteca, donde había una fuente muy grande, y, en medio de ésta, se encontraba una escultura de un personaje que se llama así. Había banquitas y puestos ambulantes de comida. La cafetería era muy particular, porque era donde llegaba toda la gente, ya sea para comer, porque la comida era muy barata; o para tomarse un café, ya que había un espacio donde servían: capuchinos, americanos, lo típico, y además, vendían bebidas frías, pan y cigarrillos. La cafetería estaba ubicada al lado del Prometeo. La gente pasaba por este lugar, porque además, era el paso hacia los salones, ya que la entrada de atrás estaba por el Prometeo. Pero lo mejor de todo, era que todos se reunían para divertirse con todo tipo de juegos de mesa: Domino, cartas, juegos de estrategia, magic, etcétera. En especial había un juego de estrategia que es muy famoso entre la gente de la Facultad, incluso hasta salió en una película famosa sobre un matemático que ganó el premio nóbel. *Mente Brillante* se llamaba la película. El nombre del juego es *Go*. Un juego muy interesante. Y seguramente te preguntaras que onda, de qué se trata. Pues el *Go* es un juego que viene de Japón. Consta de un tablero cuadrado que está dividido a su vez en cuadrados pequeños, haz de cuenta un tablero de ajedrez. El tablero tiene trece por trece cuadrados, y se juega con fichas blancas y negras. Estas son como de nácar y tienen la forma de lunetas (los dulces). El chiste del juego es formar territorios dentro del tablero, de manera que al final tengas el mayor número de cuadros en tu poder. El jugador que tiene las fichas negras es el que comienza a tirar. Las fichas se ponen en las esquinas de los cuadros. Los turnos para tirar son intercalados. Si con tus fichas llegas a encerrar una o más fichas, ellas son tus prisioneros y al final, estos te servirán para cubrir esquinas de tu contrincante, y, por lo tanto, el número de cuadros en su poder va a ser menor. Bueno, a grandes rasgos así es el juego. Pareciera que el juego es simple y sencillo, pero cuando lo juegas, te das cuenta de que es muy complejo, y que si le tienes que echar coco para poder derrotar a tu contrincante. Si quieres algún día podemos jugar un rato. Y de las quecas y Harry, que te puedo decir. Las quecas eran buenas, un 'poco' grasositas, pero eso les daba el sabor. Harry es un señor que tiene un negocio familiar y vende de todo (tenían varios puestos), pero, en particular, el establecimiento en donde él trabajaba, estaba un 'poquito' sucio, de ahí el sobrenombre. Yo creo que la suciedad era lo que le daba el toque a la comida que vendía, porque si que lo hacía.

¡Ah! y se me olvidaba. En la cafetería también uno se reunía para estudiar. Era un lugar muy placentero; y no puedes hablar de la Facultad sin hablar de uno de los personajes más memorables, el famosísimo Cruz, o Eladio, o Maradona, o el Watchos. En realidad nadie sabe su verdadero nombre. Este hombre está mal de su cabeza, o por lo menos, así se comportaba. Se metía de pronto a cualquier salón donde estuvieran dando clases e interrumpía al maestro con preguntas sin sentido. Lo raro era que, algunas veces, sus participaciones no eran de una persona ignorante del tema que se trataba en ese momento. Las leyendas urbanas dicen que en realidad, él estudió alguna vez ahí y era inteligente, pero que un día se piró y se convirtió en lo que te platico. No sé si sea verdad o no, el chiste es que yo lo conocí así. Un día pasó algo muy gracioso: estábamos unos cuates y yo en la cafetería y de pronto empezamos a escuchar una persona que gritaba "Todos somos números naturales". Entonces volteamos, y en medio del Prometeo estaba Cruz. Es un personajazo.

Pero bueno, la emoción de entrar me duró muy poco. Según yo, había ingresado a esa Facultad, porque desde la primaria hasta la prepa me creía muy bueno para las matemáticas. Además, mi papá y mi hermana son matemáticos, y a mi siempre me llamaron la atención los libros que ellos leían, ya que tenían simbolitos raros que no entendía y que me intrigaban. Yo sólo conocía las fórmulas del área y perímetro de figuras, las 'x's' y las 'y's'. Y, aunque nunca me dijeron que estudiara eso, sí influyeron en mi decisión. Desde cuarto semestre del CCH ya sabía a qué me quería dedicar. Cuando pasé a quinto semestre, que es donde tienes que escoger el área de la carrera que tienes en mente estudiar, escogí el area de ciencias; así que, tome materias como: Cálculo diferencial e integral, cibernética y computación; en las cuáles me fue muy bien y así, una vez mas, reafirmé mi idea de estudiar matemáticas. Entonces, cuando entré a la Facultad creyendo saber mucho sobre aquello, me di cuenta de la triste realidad. Todo lo que había aprendido no eran matemáticas, en el sentido estricto de la materia, sino solamente, había aprendido formas de operar con números y propiedades de ciertas figuras. En realidad sólo había aprendido a mecanizar operaciones y a realizar talacha. Afortunadamente, no tuve problemas porque siempre tuve la ayuda de mi papá y mi hermana.

Recuerdo que en la primaria me enseñaban a seguir una serie de pasos para poder sumar, restar, multiplicar y dividir, es decir, nos mostraban el procedimiento y nos ponían a hacer cientos de ejercicios para reafirmarlo. Pero, lo que no se enseñaba era de dónde salían tales operaciones, por ejemplo, ¿qué es la multiplicación? Pues en realidad es una suma. Si te preguntan ¿cuanto es 2 x 2? Ah, pues 2 x 2 es igual a 2 + 2 que es 4 ¿y 2 x 3? Pues, 2 x 3 es el mismo dos sumado tres veces que es seis, y así con cualquier multiplicación. En realidad, la multiplicación es la forma abreviada de sumar. O cuando me enseñaban el área de ciertas figuras, por ejemplo, la del rectángulo y el cuadrado. Nos dicen que el área del rectángulo es base por altura y la del cuadrado es lado al cuadrado, pero lo que no dicen es de dónde salen tales fórmulas. No dicen que el cuadrado es un caso particular del rectángulo. Por eso, si el área del rectángulo es B x H, entonces, el cuadrado al tener sus lados iguales tendrá un area de B x H que es igual a B x B o H x H que es B^2 o H^2. E igualmente, te ponían varios ejercicios para que memorizaras bien las fórmulas.

En la secundaria te mencionaban el 'Teorema de Pitágoras' y te decían como usarlo; pero la demostración, por lo menos en mi caso, no la entendía ni el profesor; sólo la recitaba como si estuviera dando misa. O cuando te mostraban la fórmula del chicharronéro, un buen sobrenombre para recordarla, pero no para entender de donde salía. Acuérdate: Es la que sirve para encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado. El chiste es que sólo te decían: ésta es la fórmula; sirve para esto; aquí hay unos ejercicios, háganlos y apliquen la fórmula. Entonces, lo único que pasaba era un proceso de memorización y mecanización, mas no de razonamiento.

Así, la enseñanza de las matemáticas durante nuestra educación básica y el bachillerato, fue una etapa en dónde no se nos enseña a pensar, a cuestionarnos el ¿por qué? de las cosas. Sólo se nos enseña a memorizar fórmulas y procedimientos para después realizar mil ejercicios, si bien nos iba, ya que hay maestros que ni siquiera te ejercitan la memoria. Uno percibe que porque puede resolver los mil ejercicios sin equivocarse ya es un excelente matemático. Además, a eso le aunas que el profesor es el que tiene la verdad en la mano y no se equivoca. ¿Nunca te pasó que, cuando resolvías algún ejercicio de manera distinta que la del profesor, estaba mal, porque no lo habías hecho como él dijo? Pues a mi me sucedió en varias ocasiones, porque como mi papá me ayudaba algunas veces a hacer mi tarea, me enseñaba distintas formas de realizar los ejercicios. Entonces cuando llegaba con el profesor y le enseñaba mi tarea, me decía que estaba mal. Yo creo que lo hacía porque había cosas que él ni siquiera entendía. También tuve maestros que tomaban una muy mala actitud, a tal grado, que cuando teníamos una duda te contestaban: 'Son unos burros', 'búsquenlo en el libro', 'si no lo leen no van a poder resolver sus dudas', como eludiendo su responsabilidad de enseñar. Y pues todo esto lo único que acarrea, son personas que odian las matemáticas y que se quedan con una idea equivocada de ellas.

Pero, ¿qué pasaría si se cuestionara al profesor? Por ejemplo, cuando te enseñan que el área del triángulo es $\frac{BxH}{2}$, y tú como alumno le preguntaras, lo que yo te pregunté a ti anteriormente: ¿De donde sale eso profesor? ¿por qué es esa fórmula? Estoy seguro que varios profesores se meterían en problemas, porque ni si quiera saben la justificación de eso. Tal vez te dirían, —ya que así me pasó una vez también— 'porque así lo dice el libro', y entonces, en un acto de fe, tú se lo crees. Pero esa no es la respuesta. Mas bien, sería como sigue: Tracemos un rectángulo. El área de un rectángulo es B x H. Ahora, tracemos una diagonal del mismo, con lo cual vamos a obtener dos triángulos iguales como se ve en la figura 1.5, para diferenciarlos uno que sea rojo y otro amarillo. Tomemos el amarillo, y observemos que uno de sus lados es la base del rectángulo y que otro de sus lados es la altura. Y como sólo tomamos la mitad del rectángulo, entonces lo que vamos a obtener es la fórmula del área del triángulo que es $\frac{BxH}{2}$. Pero explicaciones como la anterior, sólo unos cuantos profesores las dan. Es por eso que cuando avanzas en tu educación en matemáticas, si tienes buena memoria y eres bueno mecanizando operaciones te creerás un buen estudiante en la materia, si no, pues tratarás sólo de pasarla y te perderás de desarrollar una forma distinta de razonar las cosas.

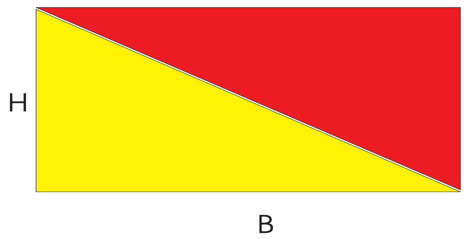

Figura 1.5: Triángulo

Y, me dirás pero, ¿qué tiene de especial esa forma de razonar? La cual es una muy buena pregunta.

Pensemos, por ejemplo, en tiras de rectángulos pintados de manera intercalada con dos colores únicamente. Cada una de estas tiras va a representar un número. Es decir, si la tira es de un rectángulo, esa va a representar el número uno; si la tira es de dos rectángulos, va a representar el número dos, y así, sucesivamente. Hagamoslo gráficamente. En la figura

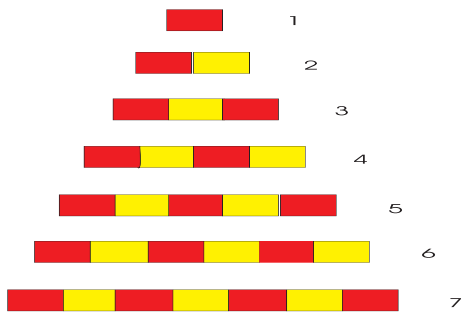

Figura 1.6: Tiras de colores

1.6 hay siete tiras, como dije, cada tira representa un número. Dependiendo del número de rectángulos que contenga la tira, se colorea cada rectángulo de cada tira con rojo y amarillo de manera intercalada. Así, la primera tira, que sólo tiene un rectángulo de color rojo representa el número uno. Luego, la siguiente tira, tiene dos rectángulos, uno rojo y otro amarillo, por lo cual representa el número dos; la siguiente tiene tres rectángulos, rojo, amarillo, rojo, por lo cual representa el número tres, y así, sucesivamente, hasta llegar a la tira con seis y siete rectángulos. La tira de seis comienza con un rectángulo rojo y termina con un amarillo, y representa el número seis.

La tira de siete comienza con un rectángulo rojo y termina con un rectángulo rojo, y representa el número siete.

Ahora, ¿qué se puede observar acerca de los números y los colores de los rectángulos? Ya vimos que las tiras representan los números con los que contamos, y sabemos que éstos se pueden catalogar en pares e impares. Pero ¿que relación hay entre los colores y qué el número sea par o impar? Sólo tenemos dos colores, y por lo que se observa en las tiras, en todas se comienza con rojo y se termina con el mismo color o se termina con amarillo. Se puede comenzar todas con amarillo, pero convengamos que se comienza en todas con el rojo. Entonces, que se comience con rojo y se termine con el mismo o con amarillo, ¿será casualidad o habrá una explicación sobre eso?

Observemos que la tira que representa el 1 comienza y termina con el color rojo. La tira que representa el 2 comienza con rojo y termina con amarillo. La tira que representa el 3 comienza con rojo y termina con rojo. La tira que representa al 4 comienza con rojo y termina con amarillo. Esto nos dice que la siguiente tira que representara el 5 comenzará con rojo y terminará con rojo. Entonces, se ha establecido un patron. Ahora, el 1, 3, 5, etcétera. —números impares— están representados por tiras que comienzan con el color rojo y terminan con el mismo. Y los números 2, 4, 6, etcétera. —números pares— están representados por tiras que comienzan con el color rojo y terminan con el color amarillo. Por lo tanto, podemos decir que los números pares están representados por tiras que comienzan con un color y terminan con otro. Y los números impares están representados por tiras que comienzan con un color y terminan con el mismo. Entonces, si te muestro una tira que tenga el mismo color al principio y al final ¿qué número representara la tira?
—Pues un número par.
—Exacto, un número par. ¿Y, en el otro caso?
—Un número impar.
—Pues claro, un número impar. Y así para cualquier tira ¿no?
—Sí.
—Entonces, si te muestro una tira con un número cualquiera de rectángulos, llamemosle a ese número n ¿me podrías decir si n es par o impar, no?
—Pues sí. Sólo tendría que fijarme en que color comienza y termina.

—Muy bien. Vienes muy vivo este día.
—Claro. Si no soy tan tonto.
—Bueno, te diré.
—Calmate.
—Ja ja, no es cierto. Ahora, si observas bien, las tiras de número par, se pueden dividir en dos, tres, cuatro, etcétera, partes iguales, dónde cada parte tiene sólo rojo y amarillo. Es decir, que si tenemos una tira de n rectángulos, para las tiras de numero par, vamos a tener $2{\cdot}n$ rectángulos ¿no?
—No, ¿por qué?
—Sí, mira. Cada tira de número par la separamos cada dos colores, es decir, rojo-amarillo, rojo-amarillo. En el caso de la tira con dos rectángulos, pues la separamos rojo y amarillo. Así, lo que vamos a tener es que el número de rectángulos va a ser, el número de colores, que son dos, por el número de partes en las que se puede dividir cada tira que representa un número par. Por ejemplo, la tira con cuatro rectángulos, se divide en dos partes, cada parte con rojo-amarillo. Entonces, el número que representa esta tira se puede escribir como 2 por el número de partes, que en este caso son dos, por lo que vamos a obtener el número 4. Por lo que, para una tira de número par de n rectángulos vamos a tener que el número que representa va a ser 2 por el número de partes, que es n, por lo tanto vamos a tener $2{\cdot}n$. Con lo que podemos decir que un número par, en general, se puede escribir de la forma $2{\cdot}n$. ¿Ahora, si estás de acuerdo?
—Pues creo que sí. Déjame pensarlo bien.
—Bueno ¿entonces cómo puedes representar de forma general un número impar?
—No sé.
—Veamos un caso particular. Si dos es la tira con amarillo y rojo, y tres es la tira con rojo, amarillo, rojo, ¿que hicimos? Solo pegarle un rojo ¿no?
—Pues sí, Ah, ya sé. Entonces, si $2{\cdot}n$ es la forma general de representar los números pares y le pegamos uno, pues vamos a tener $2{\cdot}n{+}1$ ¿no?
—Exactamente. Le diste al clavo. Te digo que vienes imparable. Por lo tanto, hemos encontrado una representación general de los números pares e impares.

Ahora, ya que estamos encarrerados, analicemos el ejercicio que te dejo tu profesor, ¿te parece?

—Sí, seguro.

—Bueno. A ver, ¿de que se trata el asunto? El cuadrado mágico, es un cuadrado dividido en cuadros iguales más pequeños, así, éste puede estar formado de 3 x 3 o 4 x 4 o 5 x 5, y así sucesivamente, cuadros iguales. ¿Estás de acuerdo?

—Sí.

—En tu caso es de 3 x 3. Entonces, tu cuadrado mágico está dividido en nueve cuadrados iguales. Luego, dentro de esos cuadrados tú acomodas una lista de ciertos números que se te dan, tales que, sumen, tanto de manera vertical, horizontal y diagonal el mismo número, y sin que se repita ningún dígito en algún cuadro. ¿Estoy bien?

—Sí, así son las reglas.

—Y se supone que eso es lo que califica a tu cuadrado de mágico. Pero ¿realmente es mágico? En la primaria a mí me hacían creer que sí, ahora lo quieren hacer contigo, pero no es cierto. No hay ningún tipo de magia. Aunque a veces parezca que así es. Analicemos el ejercicio para encontrar

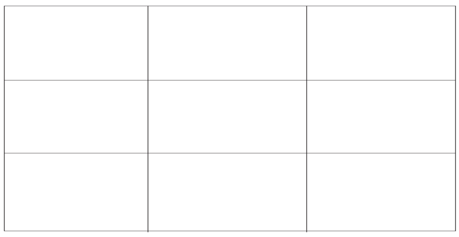

Figura 1.7: Cascaron del cuadrado mágico

el truco. Construiremos un cuadrado mágico con los siguientes dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, tales que, la suma horizontal, vertical y diagonal sea igual a 15. Para esto tenemos que formar tercias de números que sumen 15 y acomodarlos dentro de los cuadros de adentro. Primero, observemos la siguiente figura: ¿Qué observas en la figura?

—Pues en ella se ve que los números que están como en parejas, porque supongo que la línea los une y el símbolo de 'más' quiere decir que se suman, da como resultado 10 para cada pareja. ¿O me equivoco?

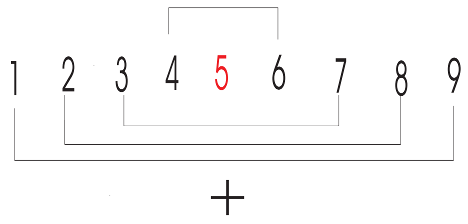

Figura 1.8: Agrupación de trios

—No, estás en lo correcto. Eres muy buen observador. ¿Y, qué más?
—Ah! también veo que el cinco es el único número que no tiene pareja, y que sumado con cada una de las parejas formadas da como resultado quince.
—Entonces ¿cuáles son las tercias que se tienen que formar para obtener el resultado que queremos?
—Las tercias son las siguientes:
$1 + 9 + 5 = 15$
$2 + 8 + 5 = 15$
$3 + 7 + 5 = 15$
$4 + 6 + 5 = 15$
—Muy bien. Oye ¿y habrá otras tercias que sumen quince?
—Pues yo creo que sí. Déjame ver.
—Piénsale, piénsale.
—Sí, sí hay. Ya encontré otras dos. Déjame ver si hay más.
—Ok.
—Ya, creo ya encontré todas.
—A ver, dime cuáles encontraste.
—Las otras tercias que encontré son:
$2 + 9 + 4 = 15$
$3 + 8 + 4 = 15$
$2 + 7 + 6 = 15$
$1 + 8 + 6 = 15$
—¿Y cómo sacaste las otras tercias?
—Pues pensé en todas las combinaciones que se pueden hacer sin repetir números, porque si repites números, entonces violas las reglas.

—Orale! que bien. Pero, ¿serán necesarias las demás tercias? ¿No bastaba con los primeras que encontraste?
—No sé, puede ser.
—Pues intentémoslo con las primeras tercias que encontramos. ¿Cómo quedarían acomodados los números?
—Bueno, primero, acomodamos el cinco en el cuadro del centro.
—¿Por qué en ese cuadro?
—Porque el cinco aparece en todas las tercias que formamos, y el cuadro

	5	

Figura 1.9: Agrupación de trios

del centro es el único en dónde aquel se podría sumar con los otros números de las tercias en que aparece. Si fuera en otro, el número de tercias que se podrían colocar en donde apareciera el cinco sería a lo mas tres
—Muy bien pensado. Luego, acomodamos las primeras tercias que formamos, de manera que no te queden dos números que sumen más de quince en una tercia de cuadros. Es por eso que el nueve, en este caso, no podría estar en ninguna de las esquinas, porque al ser el mayor de los números no puede estar en medio de dos tercias, para que no pase lo que mencioné anteriormente. Y creo que, o más bien, ahora me doy cuenta que con las primeras tercias que encontramos se puede formar todo el cuadrado, ya que al acomodarlas de manera adecuada salen las otras que encontré.
—Estoy de acuerdo contigo.
—Entonces el cuadrado queda como sigue:
—Oye ¿y habrá otras maneras de colocar las tercias dentro del cuadrado?
—Pues, supongo que sí. Claro. De principio puedes intercambiar las filas superior e inferior. También lo puedes hacer con las columnas de la derecha y la izquierda. O lo puedes hacer de las dos maneras al mismo tiempo. El

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Figura 1.10: Cuadrado mágico

chiste es dejar el cinco siempre en medio y el nueve y el uno en la columna de en medio.
—Ok. me parece bien. En realidad, con la primera forma estaba bien, pero en matemáticas siempre te tienes que preguntar si la solución que encontraste es la única o existen otras. O sea, no te tienes que quedar con resolver el problema, sino ver el provecho que le puedas sacar. Bueno. Entonces ¿el cuadrado mágico, tiene una explicación o no?
—Pues claro que sí. Efectivamente, hay una razón que explica como formar este tipo de cuadrados.
—Pues sí. Te tiene que quedar claro que en las matemáticas no hay magia. Todo tiene una razón de ser, un por qué y una justificación. Nada sale por debajo de la manga. ¿Que tal? ¿entendiste bien como se resolvió tu problema?
—Sí. Me quedó todo bien claro.
—Bueno. Y, después de todo lo que hemos platicado, ¿tu idea de las matemáticas es la misma?
—No, porque la forma en que analizamos los problemas que planteaste fue de una manera totalmente distinta a la que me han enseñado en la escuela. Por lo menos, ahora me nació un interés, no se de dónde, pero pasó. Generalmente, cuando me ponen a resolver ejercicios o problemas de matemáticas me da mucha flojera y no pongo ningún interés, y ahora fue distinto. Incluso, sentí que ahora si pensé mucho. Además, sentí que las cosas salieron de una manera fluida, como que con las preguntas que me hacías me llevaste al resultado, lo que nunca me ha pasado con mis maestros. Ellos sólo me dan la teoría y me dicen haz tales ejercicios y ya.
—Pues sí. Es lo que te digo, la forma de enseñar no es buena. Pero bueno, me

da gusto que por lo menos aprendiste algo. Y, probablemente las matemáticas seguirán sin gustarte, pero, si quiero que te des cuenta de que ellas, en realidad te hacen pensar.
—Pues no sé, en estos momentos siguen sin gustarme, pero lo que me enseñaste ahora me gustó. Y, por lo que platicamos y la forma en que me enseñaste las cosas, me doy cuenta de que sí tienes razón, acerca de que la mala enseñanza nos aleja a la mayoría de las personas de las matemáticas.
—Ya sé. Te propongo algo.
—¿Qué?
—Sigamos teniendo este tipo de charlas. Te podría platicar tantas cosas que son interesantes, y así, te puedes ir inmiscuyendo más en la materia. ¿Como ves?
—Pues sí, me gustaría. A lo mejor, en una de esas, me acaban gustando.
—Ya está.

—Bueno, ahora te quiero contar una cosa para que te vayas con algo que pensar, e incluso, llegues y se lo cuentes a tu profesor, a ver que dice.
—¿Qué es?
—Es una historia famosa en el ámbito filosófico y matemático por el absurdo que plantea. Esta historia te hará pensar mucho. La historia se llama Aquiles y la tortuga, y comienza así: Sucedió una vez que Aquiles, héroe de velocidad legendaria, se encontró con una tortuga en su camino. La tortuga, que tenía la mente mucho mas rápida que los pies, lo retó a una carrera. Divertido, Aquiles aceptó. La tortuga solicitó cierta ventaja pues a la vista estaba que era mucho más lenta que el semidios. Aquiles aceptó encantado, y la tortuga inició la carrera mientras aquél se entretenía amarrándose la correa de las sandalias. Salió luego disparado de la raya de salida. En un santiamén, recorrió la mitad de la distancia que lo separaba de la tortuga, pero ésta se encontraba más adelante. En otro abrir y cerrar de ojos había recorrido otro pedazo del recorrido, pero, sin alcanzar a la tortuga. En otro instante, había cubierto otra parte del recorrido. Pero, por muy aprisa que corriese, siempre había, entre el pélida y la tortuga, una distancia que salvar, ésta no se encontraba inmóvil, y por más lento que fuera, siempre avanzaba una distancia, así, Aquiles nunca alcanzaría a la tortuga, pues ésta se encuentra

en constante movimiento.

¿Qué te parece la historia?
—Interesante, pero sin sentido. Es muy tonto lo que plantea.
—¡Calmate! listín. Estoy de acuerdo que es absurda, pero hay que analizar el fondo de la historia. Hay veces que ciertas cosas se nos hacen tontas, pero que tienen un trasfondo interesente. Contéstame la siguiente pregunta: ¿Podrá Aquiles alcanzar a la tortuga?
—En la vida real claro que la alcanza, pero no como está planteada la historia.
—¿Por qué?
—Porque la historia plantea, que por más que corra Aquiles para alcanzar a la tortuga, siempre habrá una distancia que los separe, ya que la tortuga también está en movimiento.
—Así es. Cuando Aquiles llega a un punto donde se encontraba la tortuga, ésta, está más adelante, pues como ya dije, no está inmóvil. No se, si te acuerdes, o has oído de la historia de la tortuga y la liebre, donde, a diferencia de Aquiles y la tortuga, la liebre pierde, pero, no por una cuestión de no alcanzarla, si no porque la liebre después de haber rebasado a la tortuga y haberla dejado muy atrás, ya casi llegando a la meta, se queda dormida junto a un árbol, de manera que no se da cuenta de que la tortuga la alcanza y además cruza primero por la meta. Cuando la liebre despierta y cruza la meta queda anonadada, porque se da cuenta de que la tortuga le había ganado. Después de ver esta historia, y de alguna manera, compararla con la historia de Aquiles y la tortuga te pregunto: ¿realmente se moverá la tortuga de tal manera que Aquiles no la alcance?
—Pues sí, porque si estuviera inmóvil, entonces Aquiles la alcanzaría. Pero, pensándolo bien, si la tortuga estuviera en movimiento, llegaría un punto donde Aquiles la tendría que alcanzar, por lo menos en la meta. Lo cual por lo que se plantea no pasaría.
—Así es. Pero, ahí dejemosla, piénsalo. Lo que quiero que veas es que hay planteamientos que pueden ser contradictorios o absurdos, como el anterior. En realidad, lo que hace la persona que escribió la historia es un cierto uso del lenguaje, de manera que, realmente piensas que Aquiles nunca alcanza a la tortuga, con el propósito de demostrar que el movimiento es imposible. Así

pues, a este tipo de planteamientos se le llaman paradojas. Y se han planteado desde hace mucho tiempo. En matemáticas, han aparecido, a veces sin querer, de manera muy frecuente causando grandes problemas en ciertas teorías. Si quieres algún día hablamos sobre ellas. Es un tema muy interesante.

Ahora, si quieres podemos ver la paradoja de Aquiles y la tortuga de otra manera.
—Sí, está bien. A ver si así me cae bien el veinte.
—Mira. Para que Aquiles llegue a la meta tendría que alcanzar a la tortuga, porque se supone que la tortuga siempre va más adelante que él. El problema es que para eso primero recorre la mitad del recorrido, pero para llegar a la mitad debe llegar a la mitad de la mitad, pero antes debe llegar a la mitad de la mitad de la mitad, y antes, a la mitad de la mitad de la mitad de la mitad, y así sucesivamente.
—Ok, creo que se me aclara la mente, pero déjame pensarlo bien. De lo que ya me di cuenta es que la historia es absurda. Pero, la solución para ese absurdo todavía no me queda tan clara.
—Esta bien, no te preocupes. Este tipo de cuestiones no son tan fáciles de resolver, requieren de mucho seso, así que razonalo muy bien. Ahora, para que tu mente siga trabajando quiero que veamos otra paradoja que es interesante y que es un poco más sencilla. Ésta no tiene nada que ver con la anterior, pero te va a servir para que te des cuenta que hay distintos tipos de absurdos o contradicciones. Y, como dato cultural, la siguiente paradoja es muy parecida a una que hizo que se cayera una teoría completa, pero luego te cuento los detalles. La historia se da en una cierta población donde hay un barbero que afeita única y exclusivamente a aquellas personas del pueblo que no se afeitan a sí mismas. La pregunta es: ¿quién afeita al barbero?

—A ver, déjame pensar. El barbero sólo afeita a aquellas personas que no se afeitan a sí mismas, así que, si él se afeita a sí mismo, formaría parte de los que se afeitan a sí mismos, y por tanto, no podría afeitarse a sí mismo, entonces hay una contradicción. Y, si no se afeita a sí mismo, entonces forma parte de los que no se afeitan a sí mismos, y por tanto, se afeita a sí mismo, lo cual es también una contradicción.
—Muy bien.

—O sea, que lo que se plantea es algo así, como que es y no es al mismo tiempo. Lo cual es totalmente absurdo.
—Así es. Ya viste lo absurdo del planteamiento. Entonces, ¿cuál es la solución a tal contradicción?
—¡Calma!, estamos chupando tranquilos. ¿Me lo dejas de tarea?
—Sí, claro. Deja te doy una pista. No siempre se puede plantear algo en términos de ese algo. Por ejemplo, una agrupación de personas, como tal, no es una persona. Entonces, en el caso del barbero, primero lo definimos como un elemento de un conjunto y después lo volvemos a definir en relación a los otros elementos del conjunto del cual ya forma parte. Piénsalo. Lo importante es encontrar donde está lo absurdo y arreglarlo.
—Ok. Entonces, ¿en las matemáticas hay este tipo de errores?
—Sí. Yo supe de ellas en un curso que tomé en la facultad, y en verdad, es muy interesante el tema, y más porque interviene la lógica y tienen repercusión en las matemáticas.
—Pues estaría bien que me contaras de otras paradojas para que yo encuentre el absurdo y trate de solucionar el problema
—Ah, pues está perfecto. Es más, si quieres, te puedo hablar sobre una discusión bien interesante que tuve en el curso que te mencioné con dos cuates y que trata de un tema en donde uno de los protagonistas son las paradojas, ¿cómo ves?
—Órale, me parece bien. Esto ya me gustó. Oye, pero ya es un poco tarde, ¿lo podemos dejar para mañana o uno de estos días?
—¡Que tarde! Está bien. Pues mañana nos vemos o ¿pasado mañana?
—Mañana en la tarde está bien.
—Ok. Para ya acabar, te voy a decir en que me quiero enfocar. En la discusión que te mencioné que tuve, el tema que tratamos fue el de la fundamentación de las matemáticas, es decir, la forma en que los matemáticos tratan de dar las bases para el proceso de hacer matemáticas. Y, aunque este tema es muy extenso y se requiere un gran estudio, voy a tratar de exponertelo de la manera más entendible que pueda. Además, te voy a platicar sobre un concepto, que en parte dio pie a aquel planteamiento, ese es, el de número.
—Bueno, entonces nos vemos mañana.

—Oye, ¡espérame! voy por algo.

—Ojalá sea una botellita de vino, de esas que tiene en su cava, que me va a regalar.

—Ya, mira, este es un trabajo sobre lógica que quiero que leas, porque ella tiene mucho que ver con la fundamentación de las matemáticas

—Juan pensando: Chin, no era lo que estaba pensando.

—Entonces, primero quiero que platiquemos sobre eso, y ya después le entramos a lo otro. Así que, mejor nos vemos pasado mañana para que te dé tiempo de leerlo, ¿está bien?

—Bueno. Pues ya me voy, porque si no, ya sabes como se pone mi mamá.

—Pues, cuídate.

—Igual, adios.

La Naturaleza se ha hecho con una fama que tendríamos que reservar en realidad para nosotros mismos; la rosa por su fragancia, el ruiseñor por su canción, y el Sol por su resplandor. Los poetas están totalmente equivocados. Tendrían que dirigir sus poemas a sí mismos y convertirlos en odas de congratulación por la excelencia de la mente humana.

Alfred North Whitehead

Capítulo 2

UNA DISCUSIÓN LÓGICA

Dos dias después.

—Hola Iván, perdón por no haber llegado a tiempo, es que esta lloviendo horrible y hay un trafico tremendo, pero ya estoy aquí.
—Sí, me imaginé que estabas atorado en el tránsito. Lo bueno es que ya llegaste. ¿Tienes hambre? ¿Quieres algo de comer?
—No, gracias. Ahora sí comí en mi casa, porque aquí siempre me dices de cosas.
—Ay, de cuando acá tan sensible.
—No es cierto, estoy jugando. Pero, si quieres sacar una botella, de esas de vino tinto que tienes por ahí guardadas, no me molesta, eh.
—Ah! ¿y tú cómo sabes sobre eso?
—Ya ves.
—Aah, ¿con qué has estado husmeando?
—¿La verdad? Sí.
—Qué mal. Pero está bien, te voy a dar chance. Efectivamente, tengo unos vinos muy buenos. Voy por uno.
—Ok.
—Oye, te noto raro, como cabizbajo, ¿te pasa algo?.
—¿De verdad? ¿se me nota?
—Pues sí, si no, no te lo estaría diciendo.
—Es que me enojé con mi novia, y quedamos mal, pero no importa. Olvidemos el asunto.
—Estás seguro. ¿No quieres platicarlo? Generalmente, cuando te desahogas

te sientes mejor.
—Es que me da pena contarte mis broncas con mi novia, podrías pensar que nos comportamos como unos niños.
—Pues a la mejor sí. No, no es cierto. Es que cuando uno está enamorado, pues se comporta de una manera infantil y totalmente visceral. Así que no te preocupes. Alguna vez a mi me pasó.
—Está bien. Te voy a contar. Todo empieza con una discusión tonta acerca de que es mejor: *La guerra de las Galaxias* (de George Lucas) o *El señor de los anillos* (de Peter Jackson). Dos historias que, ahora que lo pienso, son muy diferentes en cuanto al tiempo. La historia de la segunda es mucho más vieja que la de la primera. Es más, supongo que Lucas tuvo influencias de Tolkien para escribir su guión. Pero, bueno, el chiste es, que ella decía que *El señor de los anillos* es mejor película que La guerra de las Galaxias, y yo decía lo contrario. Lo que le planteé es que la historia era mejor por la manera en como se maneja la dicotomía entre el bien y el mal. Por un lado, están los defensores de la justicia y el honor como son los 'jedis', y por el otro, están los perturbadores de la paz y el orden como son los 'sith'. Los primeros luchan por mantener en paz a la república; los otros lo hacen por implantar un imperio. Y todo se desarrolla en el plano galáctico, con personajes impactantes como: Darth Vader, Obi Wan y Anakin; super poderosos como: Yoda y el emperador; chuscos como: Jarjar Bings y c-3PO; graciosos como: AR2-ITO y Chubaca. Y claramente, no podían faltar los héroes y las bellas de la película como: La Princesa Leyia, Luke, Han Solo y La princesa Amidala. En realidad, crear todo un universo galáctico es de reconocerse, y de la forma que lo hizo, mucho más. Luego, le dije: además si nos vamos a los efectos especiales, George Lucas revolucionó la manera de hacer efectos especiales. Entonces, ella me dijo: Si a esas nos vamos, el mundo que creó Tolkien, y que está muy bien adaptado por Jackson es igual o mejor que el que creó Lucas. Igualmente con personajes espectaculares como: los élfos y orcos; también con super poderosos como: Los magos Gandalf, Saruman y El señor obscuro; los también graciosos: Enanos, Hobbits y Golum. El héroe y las mujeres guapas (porque así tienen que ser las élfas) Aragon, Arwen y La bruja blanca. Y pues, los efectos especiales de la película

no le piden nada a la tuya. Ahora, la historia es estupenda, igual que en *La guerra de las Galaxias*, *El señor de los anillos* plantea una lucha entre el bien y el mal, en donde el bien está representado por los humanos, hobitts, enanos, magos y élfos, cada uno con sus defectos y virtudes; y el mal por los orcos, magos malos, orientales, africanos, piratas. y por supuesto, *El señor de los anillos*. Esta historia se desarrolla, en el plano terrenal, en donde hay criaturas sensacionales, escenarios muy variados y hasta el autor creó un lenguaje para alguno de los personajes. Así que si quieres aprender élfico, compra la edición especial completa (en libro) de la historia. En pocas palabras, tu película es buena, pero la mía es mejor.

En fin, no se cuando la discusión derivó en que yo no la entendía a ella, la trataba mal, no le ponía atención. En realidad, creo que sólo buscaba un pretexto para sacar el malestar que tenía. Entonces, traté de solucionar las cosas. Lo cual no me fue fácil, porque nuestra relación ya lleva un tiempo considerable.
—¿Cuánto tiempo?
—Casi dos años.
—Pues sí es mucho tiempo para unos chavos.
—El chiste es que, según yo, la relación ya está un poco viciada, y aunque nos queremos mucho, creo que llegamos ya a un punto culminante.
—Pero, ¿por qué tan drástico? En las parejas es normal tener discusiones. Imagínate una relación sin peleas. Si las reconciliaciones son lo mejor.
—Pues sí, pero creo que ya me estoy aburriendo. Ya no es como al principio. Además, para estarme peleando tan seguido, porque no creas que son espaciadas las peleas, al contrario. Y la verdad ya me cansé.
—Pues, si crees que lo mejor es terminar la relación, es tu decisión. Pero, si te recomiendo que lo pienses bien, porque a veces hacemos las cosas sin pensar. Reflexiona. Cuando estás con tu novia ¿te sientes a gusto?
—Sí.
—¿Puedes platicar con ella de lo que sea? ¿Salen seguido a pasear?
—Más o menos, hasta donde mi economía me lo permite.
—Y, ¿cuando la ves te sudan las manos y sientes mariposas en el estómago?
—Pues ya no tan seguido como antes, pero todavía me pasa algunas veces.

—Mira, como veo las cosas, te puedo decir que pasas por una etapa de resistencia de la relación, es decir, donde tienes que tomar una decisión. O terminas la relación de manera sana para que después no termines mal con la chica, o sigues con ella, pero en el entendido de que tienes que platicar largo y tendido sobre lo que cada uno siente, y llegar a un acuerdo en cuanto a como van a llevar la relación de ahí para adelante. Eso sí, tienes que tener muy claro que si decides lo segundo, lo tienes que hacer en la mejor disposición, al igual que ella. En otro caso, entre más rápido lo hagas mejor, porque si dejas pasar el tiempo van a terminar peor, y a la mejor ya ni siquiera se van a poder ver. Pero bueno, esta es mi humilde opinion. Piénsalo y si te sirve bien, sino desechala. A fin de cuentas vas a hacer lo que mejor te parezca.
—Voy a pensarlo y a ver qué pasa. Ya te platicaré. Y pues gracias. Oye, pero siempre me dejas pensando. Ahora hasta de mi novia.
—Está bien ¿no?. Para que quieres eso que traes encima del cuello. No está de adorno, ¡eh!
—Sí ¿verdad?
—Y, mira, que bien que te peleaste con tu novia.
—Ay, que amable.
—No, es cierto. Lo digo porque lo que discutieron de las películas me va a servir para que analicemos el texto que leíste.
—Ah, ¿si? ¿Cómo?
—Bueno, primero, te pregunto, ¿quién crees que tuvo la razón?
—Pues creo que yo.
—¿Por qué? ¿en qué te basas para decir eso?
—Porque mi argumentación demuestra que es mejor
—¿En verdad? No lo creo. De acuerdo a lo que me contaste, en realidad, tienen una argumentación parecida, la cual es ambigua y subjetiva.
—Pero, ¿por qué?
—Porque, su conocimiento es subjetivo. Hablas de mejor historia, igual que ella. Hablan de que la película está buena, pero te pregunto: ¿Qué es que una película sea buena? o ¿qué es qué una película sea mejor que otra?
—Pues una película es buena si tiene una historia entretenida, que te guste.
—Pero, para mí una buena película es la que tiene un mensaje para el

espectador. Entonces, lo que para ti es bueno, para mi no lo es. Pasa lo mismo para poder decir que es mejor ¿no? Para mi algo puede ser mejor que otra cosa, pero para ti es al contrario. Así que, ¿cómo fundamentas tu posición? Estás de acuerdo que hay ambigüedad en tu argumentación

—Sí, creo que sí.

—Estás de acuerdo también que este caso es totalmente subjetivo, porque a mí me puede gustar *El señor de los anillos* y *La Guerra de las Galaxias* no. Pero, a fin de cuentas, son gustos. No hay un razonamiento. No hay objetividad. Entonces, ¿cómo le hacemos?

—No sé.

—¿Cómo lo hacen en los festivales reconocidos de cine?

—No sé, creo que tienen ciertos criterios para calificar la película.

—Exacto, entonces, habría que establecer los criterios para poder calificar las películas y en base a eso ya podrás fundamentar tu postura ¿no?

—Sí, está bien.

—Bueno, ¿cuáles serían los criterios? Primero, podríamos analizar el guión. Podemos establecer que el guión debe manejar un tema trascendente en la sociedad y que sea consistente desde el punto de vista lógico. Luego, podemos analizar la fotografía. Ésta debe de tener cierta calidad, no sé de foto entonces no podría establecer algo concreto, pero digamos que sea nítida y con luz. Y la música. Sobre esto podemos establecer que sea determinante en la historia o que esté muy relacionada con ella. Por ejemplo, en la película de *Naranja Mecánica*, la música es muy importante, y aunque, no es original porque se trata de la novena sinfonía de Beethoven, es determinante en la historia. A lo mejor, si hubieran adaptado una música contemporánea del filme no sería lo mismo. Así, ya tenemos tres criterios que pueden definir si una película es buena o no, con lo que podremos fundamentar nuestra posición acerca de tal o cual filme.

—Ahora, ya tengo los elementos para poder darle una base solida a mi argumentación

—Pues sí, mientras se establezcan los criterios bajo los cuales vas a demostrar que algo es bueno o mejor. En este sentido, la discusión de la que hablamos la última vez, sobre la fundamentación de las matemáticas está dada bajo el mismo planteamiento. En ese caso, cada grupo tenia sus propios criterios bajo los cuales pensaban fundamentar las matemáticas, con la diferencia de la forma en como concebían la lógica dentro de ellas. Y así, como en tu caso, los criterios que establecían o que ya estaban establecidos los utilizaban para darle objetividad, y por lo tanto, una mayor validez a sus argumentos.

Así como en las matemáticas interviene la lógica, también, lo hace en la discusión sobre las películas que tuviste con tu novia. Por ejemplo, un razonamiento que utilizaste fue: *La Guerra de las Galaxias* tiene una buena historia, unos efectos especiales impresionantes, por lo tanto, es mejor que *El señor de los anillos*. O sea que tu razonamiento está dado por ciertas hipótesis que tú supones verdaderas y concluyes que tu afirmación es verdadera.
—A ver, más despacio
—Mira, lo que quieres demostrar es que la película que tu dices es mejor que la otra ¿no?
—Sí.
—Bueno, entonces, para eso supones que la película tiene una buena historia y buenos efectos especiales. Ahora, digo que supones, porque tendrías que demostrar primero que es verdad lo que afirmas, es decir, que la historia es buena y los efectos también. Así, llegas a la conclusión de que lo que dices es verdadero, ¿no es cierto?
—Sí.
—Entonces, si estructuramos tu argumento utilizando las premisas que acabo de mencionar y planteándolo con una estructura lógica, quedaría de la siguiente manera: Si *La guerra de las Galaxias* tiene una buena historia y unos buenos efectos especiales, entonces, la película es mejor que *El señor de los anillos*. ¿Estas de acuerdo?
—Sí.
—Ahora, al conjuntar todo lo que te he dicho, vamos a tener que para que tu planteamiento sea válido, tus hipótesis tienen que ser validas. por lo que tienes que demostrar que la película tiene una buena historia y unos buenos efectos especiales. Esto lo haces, como lo vimos hace un rato, con ciertos criterios. Una vez que demostraste que son verdaderas esas dos cosas. puedes llegar a que tu conclusión es válida. Si te fijas, la lógica hace fuerte tu argumentación.

Es por eso que las personas, cuando quieren darle validez a algo dicen: 'La lógica nos dice que' '...' También, cuando se quieren hacer los interesantes, dicen: 'es lógico ¿no?' o, 'por lógica' '...' En realidad, las personas se manejan con cierta lógica, pero no tienen el conocimiento acerca de lo que se trata. Lo cual sería importante, o ¿tú que opinas?
—Creo que la lógica es importante, porque te sirve para reforzar tus razonamientos y argumentaciones. Ya sea en una discusión como la que tuve con mi novia o en las matemáticas.
—Pues sí, y más en las matemáticas, por ser una materia que trata sobre ideas y planteamientos que requieren de validez de verdad. Además, de que te va a servir para que tus creencias e ideas se conviertan en afirmaciones. Y hay todavía más. Veamos.

Tanto tú como tu novia en su argumentación utilizaban palabras como: 'Mucho', 'mejor', 'bueno', etcétera. Ese tipo de palabras, como lo mencioné anteriormente, son ambiguas; estos vocablos no tienen una definición estricta, cada uno de nosotros le da su propio significado; lo que para ti es mucho para mi puede ser poco; lo que para ti es mejor, para mi no necesariamente lo es; lo que para ti es bueno para mi puede ser malo. Por ejemplo, si te digo: 'En la escuela donde estudias hay muchas mujeres', y aquí te pregunto ¿cuánto es muchas?
—No sé, como mil.
—Ah, si. Según mi apreciación, hay quinientas, y para mi, eso es muchas, así como para ti muchas son mil mujeres. Entonces, para definir cuánto es 'muchas' hay distintas definiciones ¿verdad?
—Sí, tienes razón. Otro ejemplo es cuando te digo: 'Los mujeres son mejores que los hombres' o viceversa. Y la pregunta que surge es la siguiente: ¿Qué es 'mejor'? ¿Me podrías definir que es 'mejor'?
—No, no tengo una definición precisa.
—Claro que no, porque no la hay. En todo caso tendríamos que llegar a un acuerdo en los criterios para evaluar que es mejor, como le hicimos con las películas. Y aún así, eso solo serviría entre nosotros, porque para otros puede ser diferente. ¿Estás de acuerdo?
—Sí, completamente.

—En ese sentido, la lógica también se encarga de terminar con las ambigüedades que tienen los lenguajes con los que habla la gente en general, en pocas palabras, el lenguaje coloquial.
—Y, ¿cómo le haces para eso?
—Mira, para eso, se creó un lenguaje universal. Haz de cuenta, que se hizo un alfabeto y una simbología que entendiera toda la comunidad matemática.
—Pero, ¿por qué es universal?
—Es universal, en el sentido, de que cualquier persona que estudie matemáticas lo adquiera, para que después lo entienda y lo utilice. Lo cual no siempre pasa, tú ya te has enfrentado a eso ¿no?
—Sí, a veces no entiendo que significan algunas letras o símbolos.
—Ya lo sabía. Así les pasa a la mayoría de estudiantes. Pero bueno, no me quiero desviar del tema. El punto es que el lenguaje se crea para no meterse en problemas sobre no tener una definición específica de las palabras. Si te das cuenta, ese lenguaje se creó, por ejemplo, como lo que te escribías con tu novia en la secundaria, o a la mejor lo sigues haciendo.
—¿Qué?
—Te quiero mucho, ¿no lo ponían como T.Q.M.? ó Eres super buena onda ¿no lo ponían E.S.B.O.? y cosas por el estilo.
—Sí, eso hacía en la secundaria.
—Y, eso era el lenguaje con el que se comunicaban, y era universal, porque entre los chavos así se entendían. En ese caso, yo no lo entendía, hasta que me explicaron el significado. Y así como ustedes, en lógica es parecido. La diferencia es que en ella se hizo así por aquello de las ambigüedades y la universalidad, y ustedes lo hicieron por la flojera de no escribir tanto, o ¿no?
—Sí, la verdad es que sí.

Por otro lado, si queremos que un enunciado o afirmación sea verdadero hay que realizar un análisis de él. ¿Te acuerdas de tus clases de español?
—Sí, ¿por qué?
—En ellas para enseñarte la estructura de los enunciados los analizaban, es decir, los descomponían en partes: El sujeto y el predicado. A su vez, el sujeto se componía de artículo y sustantivo; y el predicado se componía de verbo, objeto directo e indirecto, etcétera. ¿No?

—Sí.
—Ah, pues en lógica se tiene que realizar un análisis para poder decidir si un enunciado es verdadero o falso.
—Y, ¿cómo es ese análisis?
—Bueno, primero, planteas un enunciado. Algo que pienses que es verdadero.
—Muy bien. Déjame pensar. Ya lo tengo: 'Todo lo que sube tiene que bajar'
—Ah, esa afirmación está buena, pero mejor dime otra; después la retomaremos, nos va a servir para otra cosa.
—Ok. Entonces, 'Los humanos y los perros son vertebrados'
—Ok. Veamos. Por un lado, tenemos que ver que sea verdad que los humanos sean vertebrados. Por otro, que los perros también lo son. Así, el enunciado o afirmación lo dividimos en dos partes. Al ver la definición de vertebrado, nos damos cuenta, que tanto los humanos, como los perros son vertebrados, ya que los dos cuentan con una estructura ósea. Entonces, el enunciado es verdadero, porque las dos partes en que dividimos el enunciado son verdaderas. Ahora, si alguno no fuera vertebrado entonces el enunciado o afirmación sería falso, porque dices que 'los humanos *y* los perros' tienen cierta propiedad, por lo que, si uno no la cumple entonces, la afirmación es falsa, porque una de las partes no es verdadera. Pero, por ejemplo, si en lugar de tener 'Y' tuviéramos 'O' ¿cómo quedaría?
—'Los humanos o los perros son vertebrados'
—Bien. Entonces todo cambia, ya que, o los humanos son vertebrados, o los perros lo son. Por lo que, si alguna de las dos partes del enunciado es verdadera, entonces el enunciado es verdadero.
—¡Ok!
—¿Si entiendes?
—Sí. O sea que en un enunciado donde unes dos sujetos por una 'Y', las dos partes en las que se divide el enunciado deben de ser verdaderas para que el enunciado en su conjunto sea verdadero. Y en el caso, donde en lugar de una 'Y' tienes una 'O', solo alguna de las partes debe de ser verdadera para que todo sea verdadero.
—Así es.
—Vientos. Y, ¿luego?

—Ahora, piensa en un enunciado o afirmación que sea como una condición.
—¿Cómo?
—Sí, como cuando tu mamá te dice: '*Si* pasas todas tus materias, *entonces* te doy un regalo'
—¡Ah! Ok. Y, ¿no podemos usar ese?
—Sí, pero el chiste es que tu pienses uno y lo analicemos.
—Bueno. Déjame pensaaaar. Ya se. Cuando salgo con mi chava y quiero que mi papá me preste su carro le digo: 'Si me prestas tu carro, entonces lo lavo y encero'.
—Ándale. Ahí tenemos un enunciado. En éste hay dos partes. Por un lado, está la condición o hipótesis. Le podemos llamar así, porque lo planteas como una suposición, de que *si* te presta el carro. Por otro lado, está lo que implica tu hipótesis, o la consecuencia de la misma, ya que si se cumple lo primero, *entonces* habría una consecuencia, que es que lo laves y enceres. Establezcamos, que a la condición o hipótesis le llamemos antecedente, y a la consecuencia le llamemos consecuente, ¿está bien?
—Sí.
—Bien. Una vez separado el enunciado, se puede ver que este tipo de enunciados es falso sólo si el consecuente es falso. Ya que, si no lavas y enceras el carro, la condición no tiene sentido, y sobra por demás decir, que te iría mal con tu papá. En cambio, si la hipótesis es verdadera o falsa, y la implicación es verdadera, el enunciado completo sería verdadero. Porque, si te presta el carro va a pasar lo otro; si no, va a pasar lo otro. A fin de cuentas, los papas siempre ganan ¿no?
—Así es.
—¿Entendiste el punto?
—Sí. creo que sí. Por lo menos tiene sentido.
—Bien, síguelo pensando. Haz como en la primaria: Planteate varios enunciados y los analizas. Ahora, quiero regresar a la bonita afirmación que me dijiste hace rato.
—¿Cuál?
—"La ley de la gravitación universal", ¿te acuerdas?
—Ah, si; que me dijiste que después la retomabamos.

—Llegó el momento. 'Todo lo que sube tiene que bajar' me dijiste. Ésta es una afirmación fuertísima por lo que implica. Hablar de un todo es difícil, porque significa que tienes que demostrar que cualquier cosa que sube, efectivamente, cae, ya que si hay al menos una que no lo haga, entonces la afirmación se viene abajo. En ese sentido, hablar de generalidades no es fácil, aunque nosotros lo hacemos de manera continua. Piénsalo bien, cuando tienes una conversación, ¿a poco no somos bien exagerados?
—¿Por qué?
—Porque usamos frases como: '*Todos* los hombres son iguales', '*Todas* las mujeres son chillonas' o '*Todos* los fumadores se van a morir de cancer'. Éstas son afirmaciones que realizamos de manera cotidiana, pero que no tienen sustentabilidad, porque es fácil encontrar un contraejemplo para las mismas.
—¿Qué es un contraejemplo?
—Un contraejemplo es un caso que va en contra de alguna afirmación, con lo cual demuestras que la afirmación es falsa. Por ejemplo, en el caso de la afirmación 'Todos los fumadores se van a morir cancer' Yo tengo un tío que era fumador y no se murió de cancer, falleció en un accidente automovilístico. Entonces, mostré un ejemplo de una persona que era fumadora y no murió de cancer, por lo que ya no se cumple tal afirmación, y por lo tanto, es falsa. ¿Cómo ves?
—Tienes razón. A menudo yo hablo así, a la ligera.
—Igual yo, pero es que estamos acostumbrados a generalizar, lo cual no es correcto. Igualmente pasa cuando hablamos de existencia: 'Los extraterrestres si existen' o 'Los fantasmas existen'. Para que estas afirmaciones en lógica sean verdaderas se necesitaría mostrar a un extraterrestre, por lo menos uno, no dos o cien, con uno es más que suficiente para que nuestra afirmación sea verdadera. De lo contrario sera falsa. Así pues, el uso de generalidades y existencias en las afirmaciones es de las cosas que cuestan más trabajo demostrar, por lo que te deberías de fijar en esos detalles cuando hables o escribas algo.
—Tienes razón.
—Por último, tenemos que hablar sobre otro tipo de afirmaciones o enunciados.

—¿Cuáles?
—Los que tienen una negación. Por ejemplo, la negación del enunciado 'todos los hombres son iguales' sería 'No todos los hombres son iguales'. En este caso, el enunciado sería falso si todos los hombres fueran iguales, por lo que sería verdadero, si al menos mostramos uno que no sea igual a los demás. ¿Si entiendes?
—Sí. O sea que en la negación, ésta es falsa cuando lo contrario es verdadero; y, al revés, cuando lo contrario es falso, entonces la negación es verdadera. En el ejemplo anterior, si la afirmación 'Todos los hombres son iguales' es verdadera, entonces la negación es falsa, y al contrario, si la afirmación es falsa, entonces la negación es verdadera
—Así es. Muy bien. Hagamos un recuento. Hasta ahora hemos visto que la lógica se encarga de analizar enunciados o afirmaciones para conocer su verdad o falsedad. También, los distintos tipos de enunciados que se pueden presentar cuando se quiere demostrar la verdad o falsedad de los mismos. Están los que tienen forma de 'esto o eso' y 'esto y eso'. Los que tienen la forma de una condición. Los que hablan de generalidad o existencia. Y las negaciones. Además, vimos que hay un lenguaje para librarnos de ambigüedades e inexactitudes. ¿Vamos bien?
—Eso creo
—Está bien, tienes que digerirlo. Si tienes alguna pregunta no dudes en hacerla.
—Ok.

—Una vez que hemos puesto sobre la mesa de lo que se trata la lógica y algunos de sus elementos básicos, debemos hablar y ponernos de acuerdo acerca de algo que es importante tanto en lógica como en matemáticas: Las variables. ¿Que es una variable? Pues algo que cambia, contestarás. En la prepa nos hablaban de variables x y y; y constantes 1, 2, 3, etcétera. Pero había veces que no nos quedaba muy claro. No nos daban ejemplos concretos con los que nos pudiéramos dar cuenta de lo que se hablaba. Por ejemplo, el número de personas que entra a un ántro en un fin de semana varia. No permanece igual o constante. Entonces, si fuéramos los dueños y quisiéramos saber cuanta cantidad de licor tenemos que comprar para

venderlo, tendríamos que tomar en cuenta tal cambio. Entonces, en este caso, el número de personas sería una variable a tomarse en cuenta en nuestro problema. Si el número fuera el mismo cada día del fin de semana, entonces tendríamos que el número sería una constante, porque no se modifica. Pero, ¿qué son la x y la y?
—Son variables, pero todavía no me queda muy claro el concepto.
—Ok. Mira, sólo son representaciones. Cuando en matemáticas nos dan la siguiente expresión: $x + 5$, y nos dicen que la x es una variable, lo único que se afirma es que esa letra es un número cualquiera. Lo mismo seria si en lugar de x fuera $\diamondsuit$. Solamente es la representación de un número. En este caso la expresión toma sentido cuando a la letra la cambiamos por un número, por ejemplo, 1, ya que ahora tendríamos algo concreto: $1 + 5$, donde reconocemos al 1 y 5 como números y entonces la expresión nos dice algo, pero recuerda que es una variable, entonces puede ser cualquier otro numero: 2, 3, 4, ..., etcétera. También podríamos tener el siguiente enunciado: '*x es un animal*' donde x puede ser cualquier animal. Recuerda que sólo es una representación. En este caso también, como en el enunciado anterior toma sentido cuando a la letra la cambiamos por algo que conocemos cómo un animal, por ejemplo, 'El rinoceronte'. Entonces el enunciado ya tiene sentido para nosotros porque ahora leemos: 'El rinoceronte es un animal', que es un enunciado que nos dice algo que sabemos.

Así pues, podemos decir que una variable es un elemento que puede ser cualquier cosa mientras sea coherente con lo que se quiere plantear. Es decir, no puedes tener el enunciado 'x es un animal' y cambiar la x por 1, 2, 3, ... etcétera, porque el enunciado no tendría sentido. Por otro lado, las constantes van a ser cosas que no cambian, solamente son una. En ese sentido, van a ser algo conocido: Un valor u objeto ya establecido. Por ejemplo, cuando se habla de la constante de gravedad en la Tierra, se dice que la magnitud de la gravedad siempre es la misma, ya sea en Europa o Asia, en México o Argentina, el valor siempre va a ser 9.18 ¿o no?
—Sí, sí. Totalmente de acuerdo.

—Una vez que las expresiones tienen sentido, en la lógica se puede verificar su verdad o falsedad. En el ejemplo 'x es un animal' cuando cambiamos x por la frase 'El rinoceronte', entonces podemos decir si el enunciado es verdadero o falso, en ese caso el enunciado era verdadero. Si la x se cambia por el número 5, entonces el enunciado es falso.

Bueno, pues ahora con los elementos que hemos definido podemos formar nuevos elementos, porque como en toda materia, los elementos que se definen no están aislados, siempre hay una relación entre ellos. En este sentido, podemos hablar de cómo relacionar las variables y lo que forman tales relaciones. Y aquí hago un paréntesis. La distinción entre un enunciado y una definición, está en que la segunda establece que va a representar tal o cual objeto, y en el primero se hace uso de ese objeto y se realiza una afirmación del mismo. ¿Está claro?
—Más o menos, ¿me puedes dar un ejemplo?
—Mira. Definamos un cuadrado: 'El cuadrado es una figura geométrica que tiene cuatro lados'. Esta es nuestra definición, porque lo que hacemos es decir cuáles son los elementos básicos que conforman nuestra figura. Ahora, demos el siguiente enunciado o afirmación: 'El area del cuadrado es B x H'. En este enunciado nosotros realizamos una afirmación acerca de lo que definimos. ¿Ahora si?
—Creo que si.
—Bueno. entonces sigamos con lo que estábamos. Por ejemplo, tomemos como una variable el enunciado 'Los triángulos tienen tres lados', —aunque debes de tener en cuenta que puede ser el enunciado que tú quieras, es una variable— y como otra variable 'Todo triángulo se puede inscribir en un círculo'. Ahora utilizando la conjunción de enunciados, como lo platicamos antes, podemos unir las dos variables y vamos a tener el siguiente enunciado "Los triángulos tienen tres lados y todo triángulo se puede inscribir en un círculo". Esta conjunción, si nos damos cuenta, es un enunciado formado por dos enunciados o variables. Este tipo de afirmaciones formadas por dos o más variables son otro elemento de la lógica y van a ser muy importantes, ya que en matemáticas los enunciados que se analizan generalmente son de esta forma. Estos enunciados a su vez pueden ser una variable y pueden estar formados también por afirmaciones con formas como las que vimos anteriormente, o una combinación de estas.

—Bueno, ahora piensa en que todo juego o teoría, o en la vida misma, hay reglas. Éstas permiten que el juego no se salga de control, o que la teoría no caiga en errores, o que las sociedades no terminen en caos. Así que la lógica no podía ser una excepción. Aquí las reglas son las que nos permiten probar la verdad o falsedad de los enunciados, sin éstas, la teoría no seria confiable.
—Entonces, ¿sería como en una planta nuclear?
—¿Cómo?
—En una planta de ese tipo hay ciertas reglas, las cuales, si no se siguen al pie de la letra, puede pasar una tragedia, como la de Chernobil. Por lo que en este caso no se pueden romper aquellas.
—Ándale, algo así. Podemos retomar la discusión que tuviste con tu novia, o me puedes platicar cómo convences a tu mamá, papá o alguien para salirte con la tuya. Sí, mejor platícame sobre eso, de lo otro ya hablamos, ¿te parece?
—No sé, me puedes copiar las tácticas de convencimiento. Lo mejor en la mayoría de los casos es poner cara de puchero, la gente siempre se conduele.
—No, a eso no me refiero, hablo de los argumentos.
—Sí, sí. Ya sé, sólo cotorreaba. Lo que pasa es que ahorita no se me viene nada a la mente.
—¡Piénsale!, ¡piénsale! Por ejemplo, cuando te quieres comprar algo que es muy caro, pero cómo la mayoría de los chavos de tu edad en una situación de clase media, eres un mantenido, y pues no tienes las posibilidades de adquirir cosas muy caras. Hagamos de cuenta que quieres que te compren una moto. ¿Qué le dices a tu mamá para que te la compre?
—Ok. A ver. Primero, comienzo a tantear el terreno. Ya sabes, le digo: Ay, que bonita moto! ¿No crees que ya es tiempo de que tenga un medio para transportarme?
—A lo cual te va a contestar: Sí, ¡cómo no! ¿Y tu nieve de que la quieres?
—Exacto! ¿cómo lo supiste?
—Porque ya pasé por eso. Mi madre me decía eso. ¿Y luego?
—Bueno, después de hacer un poco de berrinche, si eso no funciona, entonces le digo muy seriamente: ¡Mamá, tenemos que hablar! Y ella me dice: Si quieres, pero digas lo que digas, no te voy a comprar nada. Pero mamá, hablemos! Si después de que te diga mis argumentos no te convenzo, pues

ya, no pasa nada, pero primero escúchame. A lo que contesta: Está bien.
—¿Y comienzas a terapearla?
—Pues sí, aunque es difícil hacerlo, Bueno, ella empieza a decirme que es peligroso, caro y que en este momento no la necesito. Que es un gasto innecesario. Y que además, en este momento soy irresponsable, inmaduro y poco confiable. Lo cual, la lleva a decir que no. Y me dice también, que cuando esté más grande y la pueda pagar me la compre. Que así, la voy a disfrutar más porque me va a costar. Las cosas cuando no te cuestan no las valoras. Ya cuando seas más responsable, seguro y consciente podrás hasta comprarte un carro, si tú quieres.
—Y, ¿no crees que tendría razón?
—Pues no
—¿Por qué?
—Porque, y cómo se lo diría a ella, si bien soy un adolescente, déjame adquirir responsabilidad teniendo la moto, y si quieres te la voy pagando con algo de lo que me dan en la semana. Además, ¿cómo voy a aprender? La experiencia se obtiene en la práctica y la madurez se adquiere en base a la misma. Al igual que la responsabilidad y la conciencia. Y pues, esto es lo que le diría a mi madre. ¿Qué te parece?
—Realicemos el análisis de tu argumentación, a ver a ti que te parece.

Hiciste algunas afirmaciones importantes, una fue: 'La experiencia en cualquier cosa se obtiene de la práctica'. Primero, digamos que por experiencia nos referimos a conocimiento sobre algo, porque hay veces que puedes tener practica, pero eso no te da experiencia. Por ejemplo, puedes tener dos años manejando un carro, y ser un cafre, lo cual quiere decir que sabes meter las velocidades, pero no que seas un experto manejando.

Ahora, para poder analizar la afirmación escribámosla en alguna de las formas que se hace en lógica. Por ejemplo, 'Si tienes practica en cualquier cosa, entonces obtienes experiencia' que quiere decir lo mismo que tu afirmación ¿no?
—Sí.
—Bien. Ahora, también afirmaste que: 'La madurez se adquiere en base a la experiencia' La cual se podría escribir como: 'Si tienes experiencia, entonces

adquieres madurez' ¿estás de acuerdo?
—Sí.
—Bueno. Luego. Como ya vimos la forma condicional está dada en dos partes. Por un lado, '*Si* tienes practica en cualquier cosa', y por el otro, '*entonces*, obtienes experiencia'. Luego, es verdadero que tienes práctica en algo. Dame un ejemplo.
—Ah, pues en basquetbol.
—Ok. Y por otra parte, también es verdadero que si tienes práctica en cualquier cosa, entonces obtienes experiencia, ya que si no fuera así, entonces, quiere decir que nunca has jugado, por lo que entonces no tienes la práctica. Lo cual es una contradicción ¿no?
—Sí, es verdad.
—Por lo tanto, si es verdadero todo el enunciado y la condición del enunciado, ¿estás de acuerdo en que la consecuencia es verdadera?
—Pues, creo que sí
—¿Cómo qué creo?
—No es cierto. En realidad, tiene sentido lo que dices. Porque si el enunciado completo y la condición es verdadera, no le queda a la consecuencia más que ser verdadera. A ver, si fuera falsa la consecuencia, entonces el enunciado completo seria falso, pero ya vimos que es verdadero, por lo cual caeríamos en una contradicción ¿no?
—¡Míralo!, creo que si entendiste. Y de paso descubriste otra forma de demostrar ciertas afirmaciones. ¿Te diste cuenta?
—No. ¿Cómo?
—¿Viste que negaste la consecuencia de la afirmación y llegaste a una contradicción?
—¿Ah, sí? En realidad, no.
—Pues, cuando haces eso, no le queda a la afirmación más que ser verdadera. Veamos otro enunciado, para que te des cuenta de lo que hiciste. 'Si cometes un delito, entonces te meten a la cárcel'. Si negamos la consecuencia como lo hiciste en el enunciado anterior, ¿qué tendríamos?
—Déjame pensar. Si niego la consecuencia diría que no te meten a la cárcel, pero si no te meten en ella, entonces no cometiste ningún delito, —bueno, en

una situación ideal, ¿verdad?—
—Sí, tienes razón. Pero sigamos. Por tanto, si no cometiste ningún delito, entonces hay una contradicción en la condición, ya que el enunciado dice que cometiste un delito, así que no puede ser que lo hayas hecho y no al mismo tiempo. Y entonces ¿que puedes concluir?
—Pues que el enunciado es verdadero.
—Así es. ¿Qué tal? ¿ya entendiste?
—¡Órale! Sí.
—Bueno, revisemos ahora la otra afirmación. 'Si tienes experiencia. entonces adquieres madurez'. Esta afirmación es ambigua, porque ¿qué es la madurez? ¿cuándo una persona es madura? Puedes tener ciertas experiencias y eso no te hace maduro. En ese sentido, o cambias tu afirmación, o precisas con tu mamá que es madurez. Pero, te das cuenta de que para que nuestra argumentación sea solida tienes que manejar enunciados verdaderos y no ambiguos.
—Sí. Porque si no, es mas fácil que me refuten y que pierda la discusión o no convenza a la otra persona.
—Así es, por eso no convences a tu mamá. Ja ja. No es cierto. Bueno, entonces para mostrarte otra importante regla de demostración utilizaré el siguiente ejemplo: 'Si llueve, entonces el piso está mojado'. Esta es una afirmación muy simple.
—Pero, con los techos el piso no se moja.
—Ok, pero veámoslo en el sentido más general, sin la condición de que existen los techos, y enfocandonos sólo en la lluvia.
—Está bien.
—Bueno, regresando al punto. Será lo mismo decir que: 'Si el piso no está mojado, entonces no llueve'
—Si, nada mas que lo dices negando las partes de la implicación e intercambiándolas.
—Ok. Así que si demuestro que el segundo enunciado es verdadero, entonces el primero lo será, porque es lo mismo ¿no? ¡Checa! Sera lo mismo decir: 'Si no bebes agua por varios días, entonces mueres' que: 'Si no mueres, entonces bebes agua por varios días'
—Sí, ¿o no? Sí, yo creo que sí, porque afirman lo mismo, nada mas que

escritos de manera distinta.
—Así es. Luego, de regreso al enunciado que analizábamos. Es claro que el enunciado es verdadero, porque, por un lado, el enunciado completo es verdadero, ya que si no está mojado el piso, quiere decir que no llueve, de lo contrario, estaríamos diciendo que el piso no está mojado aunque llueve, lo cual seria muy extraño. Y, por otra parte. que el piso no está mojado es verdad, por lo tanto, no llueve. Por lo que, mi afirmación es verdadera. ¿Estás de acuerdo?
—Sí, totalmente.
—Entonces, cómo nuestro enunciado es verdadero, podemos decir que el primer enunciado también es verdadero, ¿no?
—Sí, ya habíamos quedado en eso.
—Pues, ya está.

Así pues, tenemos tres reglas: La primera que te dice que si el enunciado es verdadero y la condición es verdadera, entonces a la consecuencia no le queda más que ser verdadera. La segunda que te dice que si sustituyes a tu enunciado original por otro sin cambiar la esencia del mismo, y ese es verdadero, entonces el original será verdadero. Y la tercera que te dice que si tienes un enunciado de la forma 'Si ..., entonces', niegas la consecuencia y llegas a contradecir la condición, entonces la afirmación es verdadera. Éstas nos van a servir para demostrar que una afirmación o enunciado es verdadero, en caso de que sea así. ¿Qué te parece?
—La verdad, no está tan simple, pero creo que sí entendí.
—En realidad, para tener la película completa sobre la materia tendrías que dedicarle años de estudio y aún así no terminarías. Pero, lo único que quiero es que tengas una idea de la importancia de la lógica tanto en la vida diaria, como en las matemáticas.
—Ok. Pues si está interesante. Je je, y ya iba a decir "muy", pero me contuve. Para que veas que si entiendo.
—Que bueno. Si no eres tan sonso, a veces tienes tus destellos de inteligencia. Ja ja.
—¡Oye! ¿qué te pasa? Tú has de ser muy inteligente ¿no?
—No, claro que no. Hay algo que siempre he dicho: Todos somos tontos, pero

con el tiempo a algunos se les quita un poco.

—Ja ja. Esta bueno ese.

—No es cierto. Pero bueno. Ya sólo quiero ver un ejemplo más, para hablar un poco sobre las inconsistencias del ser humano en sus ideas.

Retomemos la paradoja del barbero, ¿te acuerdas?

—Sí. Ahí hay una contradicción, entonces podemos decir que hay una inconsistencia ¿no?

—Así es. Y la argumentación es que, en la paradoja, el barbero se afeita y no se afeita a si mismo, o sea, que no puede pasar y no pasar algo a la vez. Por lo que hay una contradicción, y por lo tanto, hay una inconsistencia en la idea. Así, podemos ver, con este ejemplo, la falta del uso de lógica en las ideas, y por lo tanto, la importancia de la misma.

—Sí, es verdad. Pensándolo bien, en la escuela se deberían de dar cursos de lógica, creo que si es de utilidad.

—Así es, y si además, se dieran buenos cursos de matemáticas, creo que habría una sociedad más pensante y desarrollada.

Pero bueno, vamos a dejarla ahí, creo que esto es suficiente para que pasemos a los fundamentos de la matemática. Y ahora si, te voy a platicar de los cuates con los que discutía sobre este tema. ¿Cuándo puedes venir?

—Pues, si quieres mañana, o mejor, pasado mañana, porque quiero aprovechar para platicar con mi novia. ¿Cómo ves?

—Está bien, me parece perfecto. Bueno, pues ojalá se arreglen las cosas con tu chava.

—Pues sí. Entonces, así le hacemos.

—Ok. Cuídate, nos vemos.

—Adios.

La matemática pura es un campo de estudio en el cual no sabemos de que estamos hablando, ni tampoco si lo que estamos diciendo es verdadero

Bertrand Russell

Capítulo 3

UNA DISCUSIÓN INTERMINABLE

—Hola ¿cómo estás?

—Bien ¿y tú?

—También. ¿Qué tal?, cómo te fue con tu novia antier?

—Padrísimo. Primero, fuimos a tomar un café para platicar, y aunque empezó medio ruda la cosa, al final acabamos encontentándonos, y pues ya sabes, después de una riña, la reconciliación es lo mejor. Luego, fuimos a comer a los tacos Copacabana, y después al cine. Algo relajado.

—Que bueno.

—Oye, le platiqué de nuestras charlas y le agradó mucho. Dice que quisiera venir un día conmigo.

—Pues dile que cuando quiera. Ya sabes que para eso estoy.

—Bueno, le voy a decir.

—Con esto recuerdo que cuando iba a la Facultad había un maestro que era muy seguido por los estudiantes. Su cubículo siempre estaba lleno de ellos. Ese maestro era muy dedicado y enseñaba muy bien, además de que era muy buena onda.

—Que bien. En la prepa yo no conozco maestros así, por lo menos en el tiempo que he estado ahí.

—Algún día se presentará. Siempre hay maestros dedicados que se interesan mucho por sus alumnos. Por ejemplo, mi papá, que es maestro, hasta la fecha sigue viendo a los alumnos que les dio clase por allá de los 70. ¡Imagínate!

—Órale. Eso está bueno.

—Pues sí. Lamentablemente, la mayoría de profesores no se preocupan por lo que enseñan y lo que aprenden sus alumnos. Y te lo digo por experiencia. Recuerdo que de todos mis profesores, desde el kínder hasta la prepa —porque en la Facultad ya fue distinto— sólo tres o cuatro se preocupaban por que sus alumnos aprendieran. Lo cual es muy triste, porque cuando eres alumno confías en que tus profesores realmente van a propiciar un buen aprendizaje, y cuando te das cuenta de que no es así, ya estas en la Facultad dándote de topes por todas las lagunas mentales que tienes, gracias a la falta de una buena enseñanza. Afortunadamente eso se puede corregir trabajando mucho por tu cuenta. Pero también hay los profesores dedicados que se preocupan por que sus alumnos piensen y tengan una buena enseñanza. Desafortunadamente son los menos. En este sentido, yo creo que hay varios factores que propícian el problema de los malos maestros.

—A ver ¿cuáles?

—Por un lado, está la inercia en la que se encuentra la sociedad en el ámbito educativo. Es decir, si hay un problema en el proceso educativo en una de las partes (los profesores), entonces van a salir personas con los mismos esquemas, y si son también profesores, entonces van a enseñar lo que aprendieron, creando así un círculo vicioso. Por otro lado, los malos salarios que se les pagan a los maestros crean una falta de dedicación hacia la enseñanza. ¿Por qué trabajar tanto si me pagan una miseria? Una pregunta que tiene una respuesta inmediata. Como dice Paulo Freire [1990, 3] La educación es una práctica de la libertad. Y pues ahí lo dejo, porque este tema me podría llevar mucho tiempo y no estamos aquí para hablar sobre eso. Pero piénsalo. Cuando tienes una conciencia sobre la problemática social del lugar donde habitas puedes tener el criterio para realizar un análisis y una critica sobre la sociedad en la que vives.

—Está bien. Creo que tienes razón.

—Bueno, cambiando de tema. Y de regreso a mis tiempos en la Facultad. ¿Te acuerdas que antier te mencioné de mis cuates de la escuela?

—Sí, pues por eso estoy aquí ¿no?, para que me platiques de ellos.

—Bien. Pues van a venir para que los conozcas y hables con ellos.

—Y ¿a qué hora van a llegar?
—En un rato, como también trabajan y les avisé de un día para otro, no podían llegar a la misma hora que tú. Pero voy a contarte un poco de ellos y de cómo fue que nos conocimos, en lo que llegan.
—Está bien. Oye, pero ¿no tienes algo de comer?
—Cómo siempre de gorrón.
—Oh, pues tengo hambre. Estoy creciendo.
—Hasta cínico. Déjame ver que tengo. Mira, me encontré un pedazo de queso. Ah, y ahí tengo una botella de agua ¿que te parece?
—Excelente, voy a venir más seguido.
—A ver quien te abre. No es cierto, ya sabes que puedes venir cuando quieras.
—Gracias. En verdad, por todo.
—No hay bronca. Bueno, como te iba diciendo. Todo empezó en un Seminario de Filosofía de las Matemáticas, al cual entré porque me interesaba saber las concepciones que tenían los grandes matemáticos sobre algunos temas. En ese caso, se me hacía muy interesante la pregunta: ¿Qué es un número? Y los temas que traía a colación tal cuestión: el infinito, los conjuntos, etcétera. Dentro de ese seminario nos encontrábamos tres personajes totalmente distintos, pero con ciertas afinidades en el fondo. Uno de ellos se llama Israel, caracterizado por ser una persona muy inteligente, culta y sencilla. Pero, como todo ser humano, tiene un defecto, 'es rojo' —sin ofender a los camaradas socialistas—. En realidad es una buena persona. Es socialista, pero eso no tiene nada que ver con sus defectos o virtudes. Bueno, el otro se llama Ramiro; este otro personaje se caracterizaba por ser un ñoño. Si pensabas que Israel era culto e inteligente, éste le dice quítate que ahí te voy. Nadamás checa esto. Ya había acabado la carrera de filosofía. Estaba haciendo la carrera de matemáticas y por si fuera poco, realizaba un posgrado de filosofía de la ciencia.
—Óoorale!! Ése sí que es un ñoño.
—Pues sí. Y además, es re' buena onda, muy agradable. Con los dos puedes platicar muy a gusto de lo que sea. En el seminario éramos los que más participábamos. Teníamos discusiones muy interesantes, y algunas veces muy apasionadas. Incluso había momentos en los que el profesor nos decía que

dejáramos hablar a los demás. En particular, hubo una vez que tuvimos una discusión como ninguna. Esa vez se caracterizó porque los tres tomamos una postura distinta, siendo que generalmente los tres estábamos de acuerdo o dos los estaban y uno no. Yo creo que hasta hubo enojo, sin llegar a manifestarlo de manera explícita. Lo digo porque, en verdad, se sentía un ambiente tenso. A la mejor el tema lo ameritaba, ya que es uno de esos, como los de política, en donde hay distintas posturas, y que puedes tener ciertas coincidencias, pero no es posible convencer a las otras personas por su convicción y manera de ver las cosas. Ahora, imagínate una discusión así en matemáticas, donde se supone que se trata sobre verdades únicas y absolutas; donde no puede haber matices, o es negro o no lo es. Tu pensarías que es más fácil, pero créeme, no es así. Tan no es así, que la discusión sigue hasta la fecha en la comunidad matemática.
—Y, ¿de qué se trata?
—Pues mira, vamos a retomar la pregunta de qué es un número; un concepto, que a simple vista, todos piensan conocer, ya que todo mundo lo utiliza. Por ejemplo, hace unos días que vimos las tiras de colores, ¿te acuerdas?
—Sí.
—Cuando revisamos tales tiras llegamos a la representación general de los números pares e impares. Pero, ¿realmente sabes qué es un número?
—Pues es algo que nos sirve para contar ¿no?
—No, la pregunta es qué es un número; no para qué sirve. A lo mejor crees que la pregunta es muy fácil de responder, porque se supone que desde que has comenzado a aprender matemáticas te los han presentado, pero estoy seguro de que no te han dicho lo que es.
—Ahora que lo pienso tienes razón, creo que no sé lo que son.
—Entonces, sí tiene sentido la pregunta ¿verdad?
—Sí. Está interesante, aunque uno al escucharla cree que es muy sencilla de contestar. Lo que no puedo creer es que hasta la fecha no la puedan responder
—Así es. Y el problema es que si quieres tener las bases de una materia, ¿no necesitarías definir lo que es número? siendo que es uno de los conceptos que más se utiliza en matemáticas.
—Sí, estoy de acuerdo.

—Veamos un ejemplo. Si yo te doy un cuadrado de lados que tienen magnitud uno, y trazo la diagonal del mismo. ¿Qué vamos a tener?
—Dos triángulos ¿no?
—Ok. Y en ese caso ¿cuánto vale la diagonal?
—Ah. Déjame pensar... Ya sé. Aplicamos el teorema de Pitágoras y me da...

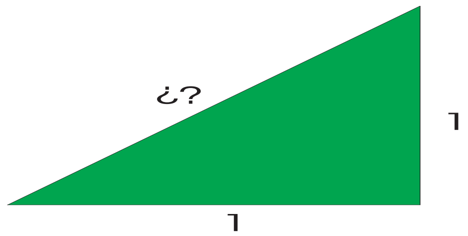

Figura 3.1: Raíz de dos

¡Raíz cuadrada de dos!
—Estoy de acuerdo. Bueno, y ese número, ¿cómo lo defines? ¿qué es raíz de dos.
—Pues una raíz cuadrada.
—Sí, ya sé, pero como número, ¿qué es? ¿cuál es la definición? Porque la raíz cuadrada también es un número ¿no?
—Sí.
—Es más, ese número, en realidad se llama irracional. Ahí está, ya te lo presenté, pero de qué sirve que lo conozcas si no sabes qué es. Es como si en la materia de Español te dijeran cuáles son los verbos, pero que no te dijeran qué son.
—Pero no puedo creer que los matemáticos, y aun más, los grandes matemáticos, no puedan responder tal pregunta.
—Para que veas que no es tan simple. Y más por la implicaciones filosóficas que conlleva tal cuestión. En ese sentido, es todavía más difícil contestarla dentro del contexto de la fundamentación de las matemáticas, ya que cada grupo de los que te voy a hablar tenía su propia respuesta.
—Y, ¿no puede cada grupo tener su propia concepción? ¿Por qué tienen que tener la misma?
—Porque la matemática al ser una ciencia tiene que ser objetiva, no tiene que

haber ambigüedades. Acuérdate de que hablamos de eso cuando platicamos sobre la importancia de la lógica. Además, si los matemáticos quieren hablar sobre afirmaciones verdaderas y universales, no es posible que cada uno tenga su propia idea. Se perdería el sentido de universalidad y de verdad ¿no?

—Pues sí.

—Y todavía más, ¿cómo podrías fundamentar las matemáticas si tu teoría es subjetiva?

—Es razonable lo que dices, pero se requiere de mucho trabajo intelectual.

—Aunque no lo creas, entre más complicado más divertido es.

—Sí, cómo no.

—Bueno, sigamos con la platica para que te des cuenta de lo interesante que es todo esto. La discusión que yo sostuve con mis compañeros ya es vieja. Se puede decir que todo viene desde la época de los griegos. El análisis histórico se puede realizar desde aquel tiempo. Aunque la teoría se empezó a escribir a finales del siglo XIX y principios del XX. En la discusión están inmiscuidos tres grupos. Cada grupo tenía en sus filas a matemáticos muy reconocidos. De aquellos que han hecho grandes contribuciones en su disciplina, e incluso en filosofía. Es decir, los grandes genios de la historia. Para que te des una idea del grado de la discusión, piensa en los tres partidos politicos. PRI, PAN PRD. Ellos se disputan en el plano politico el poder. Los otros, en el plano de las matemáticas, tratan de dar las bases para justificar los resultados en matemáticas; en concreto, en la aritmética.

—Ahora entiendo por qué ustedes tomaron tres posturas distintas. Supongo que cada uno tomó partido por un grupo.

—Así es. Por eso te digo que el tema ameritaba una discusión como la que tuvimos.

—Bueno, ¿y en qué estriba la disputa?

—Pues, esencialmente en cuanto a cuál es el papel de la lógica dentro de las matemáticas. Porque he de decirte, haciendo un paréntesis, que como ya te diste cuenta en los ejemplos que vimos en conversaciones anteriores, las matemáticas y la lógica están estrechamente relacionadas, lo cual no era entendido por esos grupos —y por mí tampoco—. En este sentido, la pregunta ¿qué es un número? nos va ayudar para nuestro análisis, ya que vamos a ver cómo cada grupo concebía tal concepto desde su perspectiva.

Uno de los grupos mantenía la postura de que las matemáticas son una rama de la lógica. Por lo tanto, las matemáticas se podían fundamentar sobre aquella. Por ejemplo, un triángulo rectángulo se podía definir desde la lógica.

Otro de ellos decía que las matemáticas podían ser deducidas por medio de un sistema de hechos que eran evidentes, es decir, mediante resultados que no necesitaban justificación. Por ejemplo, un hecho que es evidente es cuando avanzas cierta distancia, después te detienes y llega un chistosito que te dice que avances cero metros, entonces la distancia que recorriste es aquella cierta distancia ¿no?
—Sí, porque si me dicen que avance cero metros quiere decir que me quedo hasta donde me detuve.
—Ok. En matemáticas eso quiere decir que si a cualquier número le sumas cero, el resultado va a ser el mismo número ¿no?
—Sí, estoy de acuerdo.
—Bueno, pues hechos como ése son evidentes para la mente y no necesitan justificación. Entonces, tal grupo plantea, supuestamente, que con un sistema de hechos de ese tipo se pueden fundamentar las matemáticas. O sea, un triángulo equilátero se puede justificar o deducir mediante un sistema como el antes mencionado. Además de utilizar a la lógica como parte de las matemáticas, estableciendo una relación entre las dos materias.

Por último, estaba el grupo que planteaba que las matemáticas se podían fundamentar siempre y cuando se pudieran concebir en la mente. Por ejemplo, si tú puedes concebir un triángulo isósceles, entonces puedes justificar su existencia, utilizando a la lógica como una mera herramienta. Espera, creo que tocaron. Ojalá y sean esos cuates.
—Sí, pásale.
—Hola, que bueno que ya llegaron, los estábamos esperando.
—Perdón por la tardanza Iván, pero ya sabes como es Israel de impuntual
Isra: ¡Oh!, ya te pedí disculpas. Además, tú también a veces llegas tarde.
Iván: Ya, ya, no se empiecen a pelear. No pueden estar bien un día. Miren, los voy a presentar. Ellos son Israel y Ramiro. Él es Juan, hermano de un cuate de por aquí.

Israel y Ramiro: Hola, mucho gusto.
Juan: igualmente.
Iván: No quieren una copa de vino, o mejor un fuerte, o una chela. Ustedes pidan.
Israel: Bueno, yo quiero una cervecita.
Ramiro: Yo también.
Iván: Bueno. Le estaba empezando a platicar a Juan de lo que se trata la discusión entre los logicistas, formalistas e intuicionistas. Y que fue una discusión muy interesante, efusiva y polémica, ¿se acuerdan?
Isra y Ramiro: Sí, como no, inolvidable.
Isra: Y, ¿cómo ves Juan, los viajes de los matemáticos?
Juan: No, pues se escucha muy interesante. Aunque supongo que sí está muy viajado el rollo.
Iván: Así es. Pero le dije que el concepto de número va a servir para que entienda el fondo de la discusión.
Ramiro: Pues sigue en lo que estaban, por nosotros no se preocupen, estamos aquí para que Iván cuente bien cómo estuvieron las cosas, porque luego se ensalza, y se pone como el que tiene siempre la razón ¿o no?
Iván: ¿Qué te pasa? No les hagas caso, sólo están molestando.
Juan: Está bien, no te preocupes. Se ve que son bien bromistas.
Iván: Bueno, ¿en qué estábamos? Ah, sí. Pues como te iba diciendo; los logicistas, los formalistas y los intuicionistas son los protagonistas de, yo creo, una de las más importantes discusiones de la historia en cuanto a la fundamentación de una ciencia se refiere. Y la lógica es la manzana de la discordia en cuanto a su papel dentro de la misma. Cómo dato cultural te voy a mencionar a los personajes principales de la película.

En el primer grupo se encuentran: Gottlob Frege, Alfred N. Whitehead y el famoso Bertrand Russell. Cada uno de éstos por su cuenta realizó trabajos de un alto nivel intelectual, tanto de filosofía como de matemáticas. Russell incluso escribía divulgación de la ciencia. Por el segundo grupo se encuentra su máximo representante: Hilbert. Él escribió trabajos sobre geometrías no euclidianas y análisis matemático.
Juan: ¿Qué son esas materias?

Iván: No te espantes. En este momento no quiero agobiarte con eso. Y por último, dentro del tercer grupo destacan Henri Poincaré y Brouwer; el primero tenía un genio muy particular, lo cual le permitía desarrollar trabajos importantes sobre geometrías no euclidianas, análisis matemático, teoría de la gravitación, etcétera. Era un personaje muy versátil. Brouwer realizo trabajos sobre topología.

Pues como puedes ver, los principales personajes de esos grupos eran individuos muy inteligentes y con una gran productividad intelectual, lo cual fue una gran aportación de conocimiento a la humanidad.
Juan: Me hubiera gustado conocerlos. ¿En esta época ya no hay individuos de ese nivel, verdad?
Iván: Pues probablemente sí, nada más que no se notan porque el número de matemáticos es más grande, y el grado de especialización ha aumentado de manera considerable. Por ejemplo, hay un resultado que es muy famoso por su difícil demostración, pero además por la historia que se maneja alrededor de él. Éste fue planteado por Fermat. Se dice que él propuso un resultado muy importante, el cual escribió en el margen de un libro, en donde, además, decía que el espacio era muy pequeño y que por eso no incluía la demostración, sugiriendo que ya la tenia. Cuando se encontró tal libro (siglo XVII), creó una gran expectativa dentro de la comunidad matemática. Entonces, algunos de sus miembros se dieron a la tarea de tratar de demostrar tal descubrimiento. Así, después de casi trescientos años y de muchos matemáticos que fracasaron en el intento, a mediados del siglo XX, dos japoneses creyeron haberlo demostrado, llevándose un revés cuando los especialistas en el tema encontraron un error en la demostración. Pero su trabajo no fue en vano, ya que un inglés, de apellido Weyl, recopiló ese trabajo hasta que en 1996 mostró al mundo la demostración terminada, sin ningún error. Esto lo que muestra es que sí hay personas con un nivel intelectual similar al de los personajes de los que te hablo. Además, hay que tomar en cuenta también que el conocimiento matemático ha avanzado tanto y tan profundamente en los últimos cien años, que ahora es intelectualmente imposible seguir con cuidado todos los nuevos resultados.

Hay un ensayo de Poincaré que se llama 'Creación Matemática', en el cual

plantea una tripartición de los individuos en cuanto al quehacer matemático. Él decía que hay tres tipos de personas: las que memorizan los resultados matemáticos y no pueden realizar ninguna actividad matemática; las que aprenden las matemáticas y sólo reproducen resultados y no crean ninguno nuevo; y las que pueden crear nuevos resultados en la materia. En mi experiencia te puedo decir que varios matemáticos son del segundo rubro. Lo cual no necesariamente tendría que ser de esa manera —y vuelvo a lo mismo—. Si las matemáticas, desde que eres pequeño, se enseñaran de una manera distinta, haciendo pensar al individuo, entonces podría haber más posibilidades de que surgieran más personas que pudieran hacer matemáticas. De lo que si estoy seguro es que existen las personas con una capacidad intelectual mayor que todas las demás, es decir, los genios. ¿Cómo ves?
Isra: Bueno, y así, en la historia puedes encontrar a unos cuantos matemáticos de ese tamaño. Hay algunos que entre los diecinueve y veinte años ya habían creado un nuevo resultado o ya eran doctos en algún tema. ¿Qué tal eh?
Juan: Orale. O sea que me quedan como dos años para realizar alguna creación matemática. Que siendo sincero, no lo creo.
Ramiro: Oh, no digas eso. Si te gustan las matemáticas y le hechas ganas, en una de esas nos das la sorpresa y te vemos exponiendo algún resultado nuevo en un congreso internacional.
Juan: Pues, puede ser. Regresando al tema. Lo que está muy bueno es lo del teorema de Fermat por la forma en que se dieron los hechos en ese momento y todo lo que tuvieron que pasar los matemáticos de tres siglos para llegar a su demostración. Pero bueno, ya quiero saber los detalles de la discusión, ¿Cómo estuvo? ¿En qué acabó? ¿Alguno quedó convencido por otro? ¿Después de eso siguen pensando lo mismo? Ya, díganme.
Iván: Calma, no desesperes. Imagínate un día nublado, porque era temporada de lluvias. Todo empezó a las 8:00 de la mañana de un martes. Bueno, 8:15, porque generalmente llegaba tarde a la clase. Los artículos a discutir eran tres, todos hablaban de los fundamentos, solo se diferenciaban en la forma en como trataban el tema. Tanto Isra, Ramiro y yo ya llevábamos una postura clara acerca de cada grupo. Tuvimos todo el fin de semana y el lunes para poder discernir la información. Esto se vio porque cada uno se veía convencido

y nunca titubeó en la argumentación. Además, creo, y no me dejarán mentir, que a los tres nos gusto mucho el tema ¿no?
Isra y Ramiro: Sí.
Isra: Además, como era un seminario de filosofía de las matemáticas, el tema principal era, precisamente, intentar responder la pregunta ¿qué es un número? Entonces, para contestar a dicha interrogante uno tenia que ver temas como el infinito y otros más, que estaban relacionados y servían de ejemplos para entender las diferencias de los tres grupos, y todo en su conjunto nos daba un panorama para tratar de dar respuesta a tal pregunta. Así, lo interesante y filosófico del seminario era que había tres maneras distintas de concebir lo que es un número.
Iván: Te sigo platicando. Llegué a la clase y el profesor ya había comenzado. Estaba dando una somera introducción, y entonces, llegaron dos preguntas clave: ¿qué pensaron sobre los artículos? y ¿qué tienen que ver con el concepto de número? Los tres nos quedamos mirando para ver quién iba a comenzar la discusión. En ese momento, Isra levanta la mano y dice: la manera de fundamentar el concepto de número se convierte en una coyuntura. Pero, de acuerdo a mi experiencia y remontándonos un poco a la historia, Peano (matemático muy importante en su época) estableció un lenguaje y los axiomas que contribuyen al desarrollo de la aritmética. En este sentido, el fundamento para el concepto de número puede estar dado por el grupo que plantea que un conjunto de axiomas sirve como base para el desarrollo de alguna teoría, además de la utilización del lenguaje propuesto por Peano. Incluso, en esta facultad, la manera en que se enseña matemáticas es de esa forma: te dan ciertas definiciones y un grupo de axiomas, de tal grupo se deducen resultados y sus consecuencias.
Juan: No inventes. Ya me mareaste. A ver, ¿quién es Peano?
Iván: Ok. Peano fue un matemático que introdujo un lenguaje muy conveniente en el sentido de que era entendible, podía ser universal y no era ambiguo. Y además, creó una lista de axiomas para deducir ciertos resultados. Estaría bien que leyeras un poco sobre cada uno de los personajes de los que estamos hablando para que tengas una idea de qué hacían y cuáles fueron sus contribuciones.

Juan: Ok. Síganme contando.
Ramiro: En eso, yo levanté la mano y dije: pero ese planteamiento servirá sólo para deducir algunos resultados, ya que, como se dice en los artículos que leímos, no es posible deducir toda la matemática de un grupo de axiomas, así le agregues, como planteaba Hilbert, más axiomas a tu conjunto. Acuérdate de lo que demostró Gödel. Por más axiomas que le agregues a tu conjunto, no es posible deducir todos los resultados planteados. En otras palabras, tu conjunto axiomático nunca va a ser completo.
Juan: ¿Cómo es eso en español?
Ramiro: Por ejemplo, si quisieras darme el número más grande de todos los números no podrías, porque por más grande que me des tal número, si le sumo uno, sera más grande que el que me diste. Por tanto, no podrás darme el número más grande de todos. Así pasa con lo que planteaba Hilbert.
Juan: Ya entendí.
Ramiro: Bien. Entonces dije: mejor pensemos en lógica, que sí permitiría una fundamentación del concepto de número, ya que con su lenguaje, sin ambigüedades, y las reglas que te permiten inferir los resultados, es posible definir tal concepto y utilizarlo para que junto con sus axiomas se puedan deducir los resultados matemáticos. Es decir, la matemática se puede fundamentar en la lógica, lo que nos sugiere, como dice en los artículos, que ésta es una rama de aquélla.
Iván: En ese momento todos hicimos una expresión de 'estás loco'. Y entonces le dije: no es posible que pienses así. No puedes decir eso, simplemente porque al igual que en lo que planteaba Hilbert, Russell encontró problemas en el trabajo de Frege días antes de su publicación. Él, en una posdata que escribió en su libro, dice: "Un científico apenas puede encontrarse con algo más indeseable que el ver cómo el fundamento de su obra se desploma precisamente cuando la obra está acabada. Yo he sido puesto en esta situación por una carta del señor Bertrand Russell cuando la obra estaba ya a punto de salir a la prensa".[1]
Juan: Qué mala onda. Y, ¿cuáles eran esos problemas?
Iván: ¿Te acuerdas de la historia de el barbero? Que era un absurdo lo que

[1]Ver, Scientific American. *Matemáticas en el mundo moderno.* Traducción de Miguel de Guzmán Ozamiz. Editorial Blume, España, 1974. Pag. 239

planteaba. Pues en el trabajo de Frege encontraron contradicciones como la había en esa historia. Entonces, le dije: así que, no puedes pensar en tal cosa y menos afirmarla.
Isra: Así es, dije. Lo único que puedo aceptar de la lógica es que hay una relación muy estrecha entre las matemáticas y ella. En lo que proponía Hilbert utilizaba a la lógica para validar los resultados, no la ponía por encima de las matemáticas. Los axiomas que utilizaba eran totalmente matemáticos.
Iván: En ese sentido, más bien diría que la lógica es una mera herramienta que utilizan las matemáticas para tener un lenguaje sin ambigüedades y validar sus resultados. Por ejemplo, en el caso de la fundamentación de número. Primero, habría que concebir lo qué es tal concepto en la mente. Si eso es posible, entonces podré definirlo y utilizarlo para futuros resultados. Así, como lo planteaba Poincaré. Si puedes concebir cualquier hecho matemático en la mente, entonces es posible demostrarlo utilizando la lógica para eso.
Ramiro: A lo cual, le dije: pero ustedes quisieran darle una construcción al infinito, lo cual les crea ciertos problemas, en la forma de utilizarlo. Y así, nos tendríamos que reducir a las matemáticas finitas haciendo a un lado las matemáticas que han dado paso a teorías como el cálculo diferencial e integral, las ecuaciones diferenciales, etc., sin las cuales, por ejemplo, en la ingeniería no se podría realizar el trabajo que se hace, tendrían que hacerlo vía ensayo-error. Imagínate eso en un puente.
Juan: Bueno, por lo que entendí, ahí si le doy la razón a Ramiro. Si se redujera la teoría en matemáticas, también se reducirían sus aplicaciones ¿no?
Ramiro: Exacto, ésa es la idea. Y después, dije: pensemos en el número dos. Yo definiría al dos con el lenguaje y las reglas de la lógica de manera que fuera parte de ella y lo pudiera utilizar. Lo cual no quiere decir que el concepto sea parte de la lógica. Lo único que quiere decir es que lo puedes definir utilizándola. En ese sentido no es parte de la lógica como tal. Además de que el símbolo 2, en este caso, ni siquiera existe dentro del lenguaje de la lógica. Isra lo definiría utilizando un lenguaje que me libre de ambigüedades, con un sentido totalmente matemático. Para que así después lo pueda utilizar en problemas posteriores.
¿Cómo con un sentido matemático?

Ramiro: Sí; por ejemplo, cuando se mencionó el axioma de que cualquier número al sumarle cero da el mismo número. Éste, viene de una idea estrictamente matemática, porque en ella intervienen los conceptos de suma y de igualdad, los cuales no nacieron de la lógica.
Juan: O sea, que ideas como el teorema de Pitágoras tienen un sentido matemático porque tratan estrictamente sobre conceptos matemáticos, y por ejemplo, ideas como "*Si..., entonces*"tienen un sentido lógico porque nacieron de conceptos lógicos.
Ramiro: Así es.

Por otro lado, Iván pensaría en tal concepto. Si lo puede concebir, entonces lo puede definir utilizando el lenguaje de la lógica, pero con un sentido totalmente matemático, para que así éste sea parte de la matemática y pueda ser utilizado en problemas posteriores.

Así, también podríamos discutir sobre las operaciones con los números, como la suma, la resta, la multiplicación y la division, ya que, fue en la aritmética de los números donde se comenzó a trabajar sobre la fundamentación de las matemáticas. Y así, con la definición de número, cada uno de los grupos trató de sustentar sus argumentos de acuerdo a la lógica, los axiomas o la mente.
Iván: Estoy de acuerdo contigo, dije. Sólo quisiera mencionar algo que me parece importante las matemáticas no son algo terminado, no están ahí y hay que descubrirlas, más bien son una creación de la mente del ser humano, y en ese sentido adolecen de ser falibles. Es por eso que los matemáticos tienen la necesidad de encontrar la manera en que los resultados que las componen puedan llegar a ser verdades absolutas, de tal forma que sean indestructibles. De ahí es que creo que nació tal discusión. Y en este sentido, ahora que hemos estado aquí, cada uno defendiendo una postura, no hay 'el trabajo' que pueda lograr darle esa fundamentación que tanto hubieran querido darle los tres grupos de los que estamos hablando.
Isra: Tienes razón. Por otro lado, regresando al fondo del asunto entre los tres grupos, puedo decir que el problema fundamental entre ellos es la lógica, ya que cada uno concibe a la lógica dentro de las matemáticas de manera distinta: como una herramienta; como que hay una relación muy estrecha

entre ellas; o, como que una está sobre la otra.Y siendo objetivo, tendría que decir que si bien la lógica no está por encima de las matemáticas, sí es muy importante que haya una relación entre ellas, ya que, de la manera que lo veamos, ésta le proporciona a aquéllas la validez de verdad que requieren, si es que algún día quieren llegar a ser infalibles.
Iván: Entonces, después de que cada quien planteó sus ideas y dio sus argumentos, llegamos a la conclusión de que no existe 'la manera' de fundamentar la matemática; sino, más bien, existe una relación muy estrecha entre las distintas formas de querer hacerlo. Esto es, que tanto la lógica, como la mente y un conjunto axiomático conforman una fundamentación muy importante sobre las matemáticas. En ese sentido, ya no debería existir tal discusión; en lugar de eso debería de haber un acuerdo, como el de nosotros, para que en un futuro sea posible hablar de una fundamentación tal que posiblemente, y sólo posiblemente, las matemáticas lleguen a tener una estructura indestructible.
Juan: Exacto. Eso es lo que estaba pensando. Si de alguna manera los tres grupos tenían el mismo objetivo, porque no juntar las tres ideas y de ahí sacar una sola.
Iván: Pues sí. Entonces, los tres llegamos a un acuerdo, y aunque hay particularidades que pensamos que son importantes y están sobre cada una de las otras, en lo general pudimos establecer lo que te dije anteriormente. ¿Cómo ves?
Juan: Pues está bueno, aunque tengo que asimilar varias cosas, como lo de número, pero sobre todo la diferencia esencial de los tres grupos.
Iván: No te preocupes; en realidad, esto es sólo una embarrada. Podríamos escribir un libro entero en lo que se refiere a la lógica y los fundamentos. Mira: en lo que se refiere a la primera, tendríamos que definir algunos axiomas lógicos, adquirir el lenguaje y la simbología, y tener los elementos y las reglas que anteriormente vimos. Lo cual nos llevaría mucho tiempo. Imagínate, en la facultad había tres cursos sobre esa materia. Y, después, para lo otro, necesitaríamos saber sobre historia de las matemáticas, y tener un conocimiento amplio sobre ellas.
Juan: No, pues sí estaría pesadito.

Iván: Así es. Pero sí es necesario, porque para tomar cualquier postura, por ejemplo, la logicista, necesitas plantear una serie de axiomas de la lógica, ya que estos van a servir, con la ayuda de las reglas y de las formas en que se escriben los enunciados, para poder deducir resultados de la matemática. Claramente, todo está escrito con el lenguaje lógico para que no haya inexactitudes. Pero, como ya vimos, suele haber ciertos tropiezos (las paradojas lógicas) que te pueden llevar a realizar adaptaciones y nuevos conceptos y que, aun así, no te garantizan que esta materia pueda fundamentar, ya no hablemos de toda la matemática, sino una parte de ella.
Juan: Y de igual manera es con los otros grupos ¿no?
Ramiro: Así es. En el caso de los que están por armar un conjunto de axiomas, para después, con ayuda de las reglas, parte del lenguaje y algunos elementos de la lógica, deducir resultados de la matemática y, cada vez que se necesite, anexar un nuevo axioma a la lista. Es algo así como cuando quieres rellenar un hoyo profundo en la pared de tu casa; vas a ponerle cemento, si te das cuenta de que se sigue sumiendo el cemento, le introduces más, y así hasta que quede bien relleno. Lamentablemente ellos se llevaron un baño de agua fría cuando les demostraron que no era posible realizar tal cosa. Es decir, siempre habrá problemas que no podrás resolver. Igualmente, los que piensan que la intuición y la mente son la base de las matemáticas, y que sólo utilizan el lenguaje y las reglas que vimos anteriormente para demostrar lo que pueden concebir y construir. En ese sentido, se quedan en el camino de poder darle una fundamentación a las matemáticas, ya que hay ciertas ideas que les cuesta trabajo utilizar por su difícil concepción.
Isra: En fin, cada grupo tenía una manera de tratar a la lógica. Ésta dependía de su perspectiva en cuanto a cómo fundamentar las matemáticas. En ese sentido, la lógica sí juega un papel importante en el desarrollo de la discusión entre esos tres grupos, la cual ha traído, más allá de la polémica, grandes avances en cuanto a resultados dentro de la misma matemática, incluso de la lógica.
Juan: Oigan, ¿creen que algún día se acabe tal discusión? ¿qué se lleguen a poner de acuerdo?
Ivan: La verdad, no lo creo, en principio por las diferencias de concepto que

se manejan, y además, por la forma en que está educado el matemático, ya que la manera en que se hacen las matemáticas es la forma en la que te las enseñan, y por lo tanto, —como tendemos a repetir esquemas— es como las enseñamos y las reproducimos o hacemos. Es como en la vida: si te educan de cierta manera, adoptas esa forma, porque no conoces otra, y así es como vas a educar. En matemáticas, si te las enseñan con un enfoque intuicionista, es como vas a realizarlas y a enseñarlas. Además, los matemáticos son —o somos— soberbios, y creemos que tenemos la verdad en la mano, lo cual dificulta poder establecer un acuerdo.

Juan: Pues está canijo. Deberían de encontrar un punto de encuentro, en el sentido, de que si los tres grupos buscan la fundamentación de las matemáticas, cada uno puede poner un granito de arena de lo que piensa y sacar una propuesta conjunta, que funcione para el objetivo establecido.

Iván: Pues sí, debería de ser algo así, pero créeme que es difícil, porque la diferencia es de fondo, no de forma. Y pues bueno, así están las cosas. Lo único que espero es que las personas se acerquen a las matemáticas, que así como tú, tengan la inquietud de conocer más sobre ellas. Porque el día que pase eso, creo que habrá una sociedad más avanzada.

Juan: Sí, creo que tienes razón; por lo menos a mí ya no me dan miedo; ahora más bien me da curiosidad por saber más.

Iván: Qué bueno, eso me da mucho gusto. Pero creo que ya es suficiente por ahora. Creo que ya tienes suficientes cosas en qué pensar, así que es hora de que te despejes. De matemáticas, lógica y discusiones, es todo.

Juan: Pues ha sido un gusto platicar con ustedes, espero hacerlo en otra ocasión.

Isra y Ramiro: Igualmente.

Ramiro: Nos gusta mucho platicar con chavos como tú, que se interesen por las matemáticas. Así que cuando quieras.

Juan: Pues, en realidad, yo no estaba en lo más mínimo interesado por ellas, pero con las pláticas que he tenido con Iván, me ha nacido un poco el interés, lo cual está bien ¿no? Y no sé si de aquí en adelante ya me vayan a gustar las matemáticas; lo que sí les puedo decir es que mi vision ha cambiado. Como le dije a Iván hace poco: 'En una de ésas me gustan' y las estudiaré con agrado.

Ramiro: Pues nosotros nos tenemos que ir. Fue un placer conocerte y esperamos encontrarte de nuevo por acá.
Juan: Igualmente. Y yo creo que sí nos veremos pronto.
Isra: Bueno, pues nos vemos Iván, siempre un gustazo.
Iván: Ya saben, cuando quieran. Pero nos hablamos la proxima semana para ver si nos vamos a tomar un café ¿no?
Ramiro: Perfecto. Cuídense. Adiós.
Iván y Juan: Adiós.
Iván: Y tú, ¿no te vas a ir?
Juan: ¿Qué? ¿Ya me corres?
Iván: Sí, ya vete a despejar un rato.
Juan: Es que quedé de ver a mi chava aquí
Iván: Pues creo que ya llegó porque están tocando. Voy a abrir.
Lola: Hola.
Iván: Hola, tú debes ser la novia de Juan.
Lola: Así es. Yo soy Lola.
Iván: Mucho gusto, yo me llamo Iván. Pásale.
Lola: Gracias.
Hola flaca, ¿cómo estas?
Lola: Bien, ¿y tú?
Juan: También. ¿Ya conociste a Iván?
Iván: Sí, ya me presenté.
Juan: Pues él fue quien me resolvió el problema del cuadrado mágico que nos dejó el profe.
Lola: Qué bueno, porque nos las estábamos viendo duras.
Iván. Sí, me di cuenta. Oye, ¿pero le has hablado de lo que hemos charlado aquí?
Juan: Sí, ¿verdad?
Lola: Así es.
Iván: ¿Y qué piensas?
Lola: Pues tienes razón en lo que le has dicho, porque a mí tampoco me gustan las matemáticas, y después de que platiqué con Juan me di cuenta de que la razón de mi aversión a ellas es por la forma de enseñar.

Iván: Pues sí. Ahora, déjenme decirles que también sería buenísimo que se hiciera más divulgación de la ciencia.
Lola: ¿Cómo es eso?
Iván: Se ve que no leen, ni escuchan estaciones de radio, ni ven canales culturales.
Juan: Si leemos, pero sólo libros. Lo que sí casi no vemos son canales culturales y no oímos programas de radio educativos.
Iván: Ya ven. Eso está muy mal. Y si a eso le aunan que casi no se hace divulgación y mucho menos se le hace promoción, pues peor. Pero miren. La divulgación de la ciencia es una actividad que realizan los científicos o algunas personas interesadas en la ciencia para transmitir conocimiento científico de una manera que cierto público lo pueda entender. Es decir, que no tendrían que ser matemáticos para entender un trabajo de divulgación de la matemáticas sobre algún tema.
Juan: O sea, que hay personas que te explican ciertos conceptos de manera que nosotros lo podamos entender ¿Y cómo lo hacen?
Iván: Así es. Y hay varias formas. Puede ser en forma de cuento, con imágenes, con ejemplos de la vida cotidiana. Miren. Primero, se elige un tema, después; se trata de explicar con un lenguaje coloquial, es decir sin simbolitos, ni fórmulas, ni tecnicismos. Como cuando te hablé sobre lógica, ¿te acuerdas?
Juan: Sí.
Iván: ¿A poco te introduje símbolos o algún termino técnico?
Juan: No.
Iván: Y le entendiste ¿no? ¿O sólo me diste el avión?
Juan: No, cómo crees. Ja ja. No es cierto. Sí te entendí.
Iván: Pues algo así por estilo se hace para realizar un trabajo de divulgación.
Juan: Oye, está bueno eso.
Lola: ¿Y se hacen trabajos sobre cualquier ciencia?
Iván: Así es. Entonces, yo les recomiendo que busquen en periódicos, libros, en la tele o en la radio algún trabajo de divulgación. Si esta bien hecho puede que les guste y se interesen por seguir buscando más trabajos de esos. Y en una de esas hasta les interesa estudiar alguna ciencia.
Lola: Qué bien. Pues voy a buscar algunos títulos.

Iván: Yo te recomiendo que busquen trabajos de autores como Carl Sagan o Isaac Asimov. Ellos son muy buenos realizando esa actividad.
Juan: Perfecto. Voy a buscarlos, y después te comento mis impresiones.
Iván: Me parecería estupendo.
Juan: Bueno, pues nos vamos, porque quedamos de ir al cine y ya casi es la hora de la función. ¿Quieres ir?
Iván: No, como crees. No me gusta hacer mal tercio. Mejor disfruten ustedes solos. Pero nos vemos luego.
Lola y Juan: Ok.
Juan: Muchas gracias por todo.
Iván: No hay de qué. Y espero que tú también vengas, Lola.
Lola: Sí, claro que sí.
Iván: Bueno. Pues un gusto conocerte.
Lola: Igualmente.
Juan: Nos vemos, Iván.
Iván: Adiós.

El tiempo paso. Iván se fue al extranjero a realizar un posgrado y Juan, por azares de la vida, estaba estudiando la carrera de matemáticas.

¿Qué onda Iván? ¿qué milagro? Tiene como tres años que no te veo.
—¿Qué paso Juan? Es que me fui a estudiar un posgrado al extranjero y acabo de llegar. ¿Y tú? ¿qué has hecho?
—¿Qué crees? Te voy a sorprender demasiado
—¿Por qué? ¿qué hiciste?
—Estoy estudiando matemáticas.
—¿En verdad? No puedo creerlo, y ¿en qué estuvo?
—No sé, de alguna manera, después de las pláticas que tuvimos comencé a estudiar matemáticas por mi parte y en la escuela encontré un profesor que si enseñaba bien, entonces me asesoraba con él sobre las cosas que no entendía y así, conforme pasaba el tiempo, me interesaban cada vez más, y entonces cuando tuve que decidir cual carrera estudiar me decidí por esa. En realidad, yo creo que la decisión, en gran medida, la tomé por una cuestión de orgullo, para demostrarme a mi mismo que yo podía y también, para que cuando termine de estudiar comience a dar clases a nivel medio superior y las enseña

de forma adecuada, como lo que platicabamos aquellos dias.
—Pues ahora si estoy impactado. Me parece excelente que hayas tomado tal decisión
—Sí, ahora te puedo decir que fue una decisión acertada. Ahora ya podemos platicar de varias cosas. Incluso te había buscado para platicar sobre lo de los fundamentos ¿te acuerdas?
—Claro que me acuerdo. Entonces, ya que tienes más idea, ¿estás de acuerdo con la conclusión a la que llegamos mis cuates y yo aquella vez?
—Esa es otra cosa que te va a sorprender. No, no estoy de acuerdo, mas bien, estoy convencido de que el formalismo es la manera en la que se deben fundamentar las matemáticas
—Efectivamente, no lo puedo creer. Pero si tienes tiempo lo podemos platicar ahora. Me has picado la cresta y esto no se puede quedar así. Lo ves, aquella ves te dije que esta discusión no tenia fin. Pero bueno, ¿tienes tiempo?
—Claro, vamos. Es que mira, con lo que he leído y con lo que se ahora te puedo decir...

REFLEXIONES

Creo que después de la platica con Juan tengo que hacer una reflexión sobre lo que hablamos, porque podría escribir sobre eso. Sí, claro. Es que en realidad manejamos conceptos muy interesantes. Por un lado, lo que hice fue que se entendiera lo que eran la matemática y la lógica para que así se asimilara de alguna manera la importancia de las mismas. Lo cual estuvo hecho de manera adecuada para el fin que yo tenia (que se entendiera la importancia de las matemáticas y de la lógica), ya que no tuve que utilizar ninguna definición o tecnicismo. Además, los ejemplos y analogías que utilicé servían para que el entendimiento fuera natural, es decir, como los ejemplos eran sobre hechos reales que le pasaron o le estaban pasando en ese momento a Juan, entonces le caía mas rápido el veinte sobre la idea que quería que entendiera. Es este sentido, el mostrar lo que son las paradojas y mencionar algunas fue de mucha utilidad, porque con ellas lo que quería mostrar era las contradicciones que pueden surgir del lenguaje común, ya sea con o sin intención, y en ese sentido, comenzar a introducir a Juan dentro de la importancia de la lógica.

Además, hablar de los fundamentos de la matemática y sobre la pregunta de que es un número tenia mucho que ver, porque esos temas me sirvieron muy bien de escenografía para que se fijara bien la idea sobre la importancia de las matemáticas y de la lógica, además de dejar la espinita en cuanto a lo que encierra la discusión sobre los fundamentos y la definición de número.

Por otro lado, los ejemplos matemáticos como el del cuadrado mágico, la demostración de la formula del área del triángulo, y en especial, la forma de como definir en general un número par e impar con el uso de tiras de colores fueron de mucha utilidad, porque con ellos mostré que las matemáticas no son memorizar ni mecanizar, sino razonar. Y en particular, el último me sirvió para mostrar que definir lo que es un número no es fácil, que solo sabemos para que sirve y que tiene distintas representaciones, como la de las tiras de colores, pero que en realidad, no podemos responder a la pregunta sobre lo que es tal cosa.

Así, con Juan logre lo que pretendía. Entonces yo creo que sí podría escribir algo utilizando los conceptos que trate con él. Esto lo puedo hacer en forma de divulgación, para que así, más chavos como Juan puedan entender sobre ello.

Sí, lo voy a hacer.

Bibliografía

[1] A. Dou. 1970 *Fundamentos de la Matemática*. Barcelona: Editorial Labor.

[2] R. Bunn. 1980 ”Los fundamentos de las matemáticas”, contenido en Ivor Grattan-Guinness (editor). Cap. 5, 283-327.

[3] Euclides. 1992 *Elementos de Geometría*, Tomos I-II. Version de J. D. Garcia Bacca, México: UNAM.

[4] P. Freire. 1992 *La Pedagogía del oprimido*. México: Siglo XXI editores, cuadragesimoprimera edición. Pag. 3.

[5] A. R. Garcíadiego. 1992 ”Las paradojas semanticas”, contenido en: A. R. Garcíadiego. *Bertrand Russell y los origenes de las paradojas de la teoría de conjuntos*. Madrid: Alianza editorial. Cap. V, 167-187.

[6] A. R. Garcíadiego. 1990 ”The Set Theoretic Paradoxes: their influence at the turn of the Century”. *Reports of the San Sebastian Internatinal Symposium*, 245-250.

[7] I. Grattan-Guinnes. 1992 ”Pierce: entre la lógica y las matemáticas”. *Mathesis* 8_1, 55-72.

[8] W. I. McLaughlin. 1995 ”Una resolución a las paradojas de Zenon”. Investigación y Ciencia, 62-68.

[9] J. R. Newman. 1976 *Sigma: El mundo de las matemáticas*. Ediciones Grijalbo, Tercera edición.

[10] P. H. Nidditch. 1983 *El desarrollo de la Lógica Matemática.*. Coleccion Teorema. Ediciones Catedra, Tercera edición.

[11] L. Olivé. 1975 ”Sobre las paradojas de la teoria de conjuntos”. Revista *Teoría*, México, 37-49.

[12] G. Peano. 1979 *Los Principios de la Lógica Matemática.* Oviedo, España. Pentalfa ediciones. Introducción, versión castellana.

[13] B. Russell. 1901 ”Recent work on the principles of mathematics”. *The international Monthly* 4.

[14] A. M. Sánchez, J. Tonda y N. Chávez (Coordinadores). 2002 *Antolología de la divulgación de la ciencia en México*. Dirección General de Divulgación de la Ciencia, UNAM.

[15] A. M. Sánchez. 2000 *La divulgación de la ciencia como literatura.* Dirección General de Divulgación de la Ciencia, UNAM, segunda edición.

[16] M. Santos. 1993 ”La naturaleza de las matemáticas y sus implicacione didácticas”. *Mathesis* 9_4, 419-431.

[17] Scientific American. 1974 *Matemáticas en el Mundo Moderno*. Versión de M. de Guzman, Editorial Blume.

[18] L. S. Shively, PH. D.. 1980 *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental, Decimaprimera edición.

[19] C. Torres. *Las paradojas: de Groucho Marx a la Teoría de Conjuntos*. Inédito.