



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

“EL PÉNDULO ESFÉRICO COMO EJEMPLO DE UN  
SISTEMA HAMILTONIANO INTEGRABLE CLÁSICO”

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :  
F Í S I C O  
P R E S E N T A :

DANIEL VALERIO MARTÍNEZ



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

Tutor: Dr. Antonio Hernández Garduño

2006



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## *AGRADECIMIENTOS Y DEDICATORIAS*

*Doy gracias a mis padres: Adán Valerio de los Santos e Hilda Martínez Aldama por su apoyo incondicional. Padre se que nunca me has exigido pero sabes que siempre te he apoyado. Madre no tengo palabras para agradecerte en todo lo que me has ayudado y exigido.*

*Doy gracias a mis hermanos: Fátima y José Luis, ambos me han apoyado con lo poco o mucho que tienen para ayudarme a salir adelante. Gracias también a Rafael y sus hermanos.*

*Doy gracias a todos mis familiares que me han apoyado y que en verdad son muchos, pero en especial a las dos familias siguientes con las que he compartido muchas de mis vivencias, en ellos he encontrado el apoyo moral, algunas veces económico y en otras la crítica de mis acciones:*

*Familia Vega Aldama: tío Juan Vega Valdez, tía Gudelia Aldama Mendizabal, mis primos Juan Carlos, Ángel y Adriana.*

*Familia Lezama Martínez: tío Roberto Lezama Mendoza, tía Elvia Martínez Aldama, mis primos Alberto, Ángel, Juan Carlos y Guillermo.*

*Dedico esta tesis a la persona que mas afecto le he demostrado en mi vida: mi bisabuela Guillermina Bruno. También dedico esta tesis a mi abuela Guadalupe Aldama.*

*Doy gracias al Dr. Antonio Hernández Garduño, quien a lo largo de este tiempo en que realice la tesis y las notas del servicio social, han sido mas mis errores que aciertos.*

*Doy gracias en general a la Universidad Nacional Autónoma de México, quien me permitió ingresar y terminar una carrera, un sueño que no todos alcanzamos.*

# Índice general

1. Prefacio	2
2. Introducción	5
2.1. Variedades diferenciables	5
2.2. Teoría de Morse	13
2.3. Álgebra y geometría simpléctica	16
2.4. Grupos y álgebras de Lie	19
2.5. Función de momento	24
2.6. Dinámica Hamiltoniana	26
3. Dinámica y simetría del péndulo esférico	30
3.1. El pendulo esférico	30
3.2. Ecuaciones de Hamilton sobre la subvariedad $TS^2$	36
3.3. La función de momento $J$	43
4. Reducción de la simetría $S^1$	47
4.1. El espacio reducido $M_j$	48
4.2. La función hamiltoniana $H_j$	51
5. La función de Energía-Momento $\mathcal{E}\mathcal{M}$	54
5.1. Valores críticos	54
5.2. Topología de $H_j^{-1}(h)$	66
5.3. Topología de $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$	73
5.4. Topología de $(H _{TS^2})^{-1}(h)$	91
6. Conclusiones	100

# Capítulo 1

## Prefacio

Pareciera ser que en la actualidad, la mecánica clásica es una materia ya del pasado, es decir, que se ha dicho ya casi todo, pues se conocen muchas soluciones de los problemas mecánicos existentes. Pero esto no es del todo cierto, puesto que con los nuevos avances de la matemática esta área de la física ha resurgido, incorporándole principalmente elementos de la geometría diferencial, la cual a su vez reúne elementos avanzados de álgebra lineal.

Una muestra de ello es por ejemplo el concepto de **variedad simpléctica**, el cual es simplemente el espacio fase de un sistema mecánico, o el **espacio de configuración** que es el conjunto de posibles posiciones. En la mecánica clásica, la aplicación directa de las **leyes de Newton** al movimiento de sistemas mecánicos puede ser extendida por formulaciones más elegantes y sofisticadas, a saber, la **formulación Lagrangiana** y la **formulación Hamiltoniana**. En general, para un sistema de  $N$  partículas moviéndose en el espacio tridimensional euclidiano, elegimos el espacio de configuración como  $Q = \mathbb{R}^{3N}$ . En la formulación Lagrangiana, uno identifica el espacio de configuración  $Q$  y entonces se forma el espacio fase de velocidades  $TQ$ , también llamado el **haz tangente** de  $Q$ . Entonces la lagrangiana se mira como una función  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ . Asociado a cualquier espacio de configuración  $Q$  hay un espacio fase  $T^*Q$  llamado el **haz cotangente** de  $Q$ . Entonces la función hamiltoniana es una función definida de la siguiente manera,  $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ . La identificación entre estos espacios es mediante la transformada de Legendre. Matemáticamente esta transformación nos permite ir de un espacio de coordenadas y velocidades generalizadas  $(q_i, \dot{q}_i)$  a un espacio de coordenadas y momentos generalizados  $(q_i, \dot{p}_i)$ .

El ejemplo anterior es una muestra de cómo los elementos de geometría

diferencial se incorporan a la mecánica clásica y la hacen una teoría mas completa e interesante. Por lo tanto, parte de esta tesis es mostrar las actuales herramientas matemáticas que se utilizan en el área de la mecánica clásica.

En particular, estudiamos el péndulo esférico y sobre este sistema nosotros describimos su dinámica, su simetría, la reducción de este sistema a un sistema con un solo grado de libertad al cual llamamos el espacio fase reducido, y lo más importante de este sistema es la topología que encontramos dadas las funciones de energía y de energía-momento. En todos estos temas hacemos uso de conceptos geométricos para describir la mecánica del sistema.

Esta tesis tambien permitirá a los estudiantes de física tener una referencia rápida y concisa de las definiciones y proposiciones no solamente en el área de la mecánica clásica, sino varias de estas definiciones pueden ser extendidas a otras áreas de la física tales como la relatividad y la mecánica cuántica. Inclusive, toda esta herramienta matemática permite seguir estudiando el péndulo esférico, y llegar a mostrar como lo hace Cushman y Bates [7] la monodromía de dicho sistema.

En el capítulo de introducción damos todas aquellas definiciones y proposiciones que nos serán de utilidad para los siguientes capítulos. Algunas de estas proposiciones se demostrarán y en otras solamente daremos la referencia. Los tres capítulos restantes son totalmente dedicados al **péndulo esférico**.

En el capítulo 3 analizamos el péndulo esférico como se analiza en la mayoría de los textos de física (Ver por ejemplo [10]), es decir se calculan las ecuaciones de Euler-Lagrange o Hamilton en coordenadas esféricas. Después analizamos el sistema con toda nuestra estructura matemática definida en el capítulo de introducción, aquí no utilizamos coordenadas esféricas, mostramos explícitamente las ecuaciones de Hamilton, y al final de dicho capítulo se muestra que hay otra cantidad conservada llamada el momento angular  $J|TS^2$  aunada a la otra cantidad conservada llamada energía  $H|TS^2$ . Dado que  $H|TS^2$  y  $J|TS^2$  dan cero bajo el paréntesis de Poisson, entonces se tiene como resultado que el péndulo esférico es un sistema hamiltoniano completamente integrable.

En el capítulo 4 reducimos el espacio fase original a un espacio fase reducido  $M_j$  mediante espacios cocientes, los que a su vez identificamos como variedades semialgebraicas; es decir, hay un conjunto de polinomios que se anulan simultáneamente en todo punto de la variedad. Al final se da la función hamiltoniana  $H_j$ .

En el capítulo 5 se encuentran los puntos críticos de la función de energía-

momento. Para una cierta curva de nivel de la función de energía-momento describimos geoméricamente la topología de la fibra.

# Bibliografía

- [1] Abraham, R. y Marsden, J.E. *Foundations of Mechanics*. The Benjamin Cummings Publishing Company, 1985.
- [2] Arms, J.M., Marsden, J.E. y Moncrief, V. Symmetry and Bifurcations of Momentum Mappings. *Commun. Math. Phys.* 78, 455–478, 1981.
- [3] Barden, D. y Thomas, C. *An Introduction to Differential Manifolds*. Imperial College Press, 2003.
- [4] Brickell, F. y Clark, R.S. *Differentiable Manifolds. An introduction*. Van Nostrand Reinhold Company, Londres VNR, 1970.
- [5] Bulajich, R. y Lopez de Medrano, S. *Teoría de Singularidades. Una introducción elemental*. Aportaciones Matemáticas. SMM, 1995.
- [6] Chruściński, D. y Jamiolkowski, A. *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*. Birkhäuser, 2004.
- [7] Cushman, R.H. y Bates, L.M. *Global Aspects of Classical Integrable Systems*. Birkhäuser, 1997.
- [8] Do Carmo, M. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [9] Duistermaat, J.J. y Kolk, J.A.C. *Lie Groups*. Springer, 1999.
- [10] Fowles, G. R. *Analytical Mechanics*. Saunders golden sunburts series, 1986.
- [11] Friedberg, S.H. *Linear Algebra*. Prentice Hall, 1989.

- [12] Gidea, M. y Burns, K. *Differential Geometry and Topology*. Chapman & Hall, 2005.
- [13] Marsden, J.E. *Elementary Classical Analysis*. W. H. Freeman and Company.
- [14] Marsden, J.E. y Ratiu, T.S. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer, 1999.
- [15] Munkres, J.R. *Topology*. Prentice Hall, 2000.
- [16] Puta, M. *Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization*. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [17] Talpaert, Y. *Differential Geometry with Applications to Mechanics and Physics*. Marcel Dekker Inc., 2000.
- [18] Uspensky, J.V. *Theory of Equations*. McGraw-Hill, 1958.
- [19] Weyl, H. *The classical groups*. Princeton University Press, 1946.

# Capítulo 2

## Introducción

### 2.1. Variedades diferenciables

Introducimos a continuación nociones básicas sobre variedades diferenciables. En esta sección nos basamos principalmente en Gidea [12] y Talpaert [17].

**Definición 2.1.** *Una función  $f$  de un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  es **suave** si tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes para toda  $u \in U$ .*

**Definición 2.2.** *Un espacio topológico es un conjunto  $X$  junto con una colección  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $X$  satisfaciendo las siguientes propiedades: i) el conjunto vacío  $\emptyset$  y el espacio total  $X$  están en  $\mathcal{A}$ , ii) la unión de cualquier colección (posiblemente infinita) de conjuntos en  $\mathcal{A}$  es un conjunto en  $\mathcal{A}$  y iii) la intersección de cualquier colección finita de conjuntos en  $\mathcal{A}$  es un conjunto en  $\mathcal{A}$ .*

Los conjuntos en  $\mathcal{A}$  son llamados los conjuntos **abiertos** del espacio topológico. La colección  $\mathcal{A}$  es la **topología** sobre  $X$ .

**Ejemplo 2.1.1.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $\sim$  una relación de equivalencia sobre  $X$ . Definimos el conjunto cociente  $X/\sim$  como el conjunto de todas las clases de equivalencia sobre  $X$ , y la proyección canónica  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  tal que cada elemento  $x \in X$  lo manda a su clase de equivalencia  $[x] \in X/\sim$ . El conjunto de todas las  $U \subseteq X/\sim$  para las cuales  $\pi^{-1}(U)$  es un conjunto abierto en  $X$  define una topología sobre  $X/\sim$  llamada la topología cociente.

Una **base** para la topología  $\mathcal{A}$  de  $X$  es una colección  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  de conjuntos abiertos con la propiedad de que cada conjunto en  $\mathcal{A}$  puede ser obtenido como una unión de conjuntos en  $\mathcal{B}$ .

**Proposición 2.3.** Sean  $X$  y  $Y = X/\sim$  espacios topológicos como en el ejemplo anterior y sea  $\lambda$  la siguiente función  $\lambda : X \rightarrow Y : x \mapsto [x]$ . Sea  $W$  un espacio topológico y  $\pi : X \rightarrow W$  la función que es constante sobre cada conjunto  $\lambda^{-1}(\{y\})$ , para toda  $y \in Y$ . Entonces  $\pi$  induce una función  $\sigma : Y \rightarrow W$  tal que  $\sigma \circ \lambda = \pi$ . La función  $\sigma$  inducida es continua si y sólo si  $\pi$  es continua.

**Prueba.** Ver Munkres [15]. ■

**Definición 2.4.** Una variedad suave de dimensión  $m$  es un conjunto  $M$  junto con una colección de funciones  $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow M\}$ , con cada  $U_\alpha$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^m$ , satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. Cada función  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)$  es inyectiva
2. Si  $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ , entonces existe una función suave

$$\theta_{\alpha\beta} : \varphi_\beta^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta)$$

tal que  $\varphi_\beta = \varphi_\alpha \circ \theta_{\alpha\beta}$  .

3.  $M = \bigcup \varphi_\alpha(U_\alpha)$

Las funciones  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  son llamadas **parametrizaciones locales**, y  $\mathbb{R}^m$  es referido como el espacio de parámetros. Las coordenadas  $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  correspondiendo directamente a  $\varphi_\alpha^{-1}(p)$  con  $p \in V_\alpha$  son llamados las **coordenadas locales** de  $p$ , y la función inversa  $\varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$  es llamada un **sistema o carta coordenada**. Ver figura 2.1. La primera condición de la definición anterior implica que  $M$  es localmente homeomorfo al espacio euclidiano de dimensión  $m$ . La segunda condición dice que si las imágenes de  $\varphi_\alpha$  y  $\varphi_\beta$  se traslapan, entonces  $\varphi_\beta$  resulta de  $\varphi_\alpha$  por un cambio de coordenadas suave.

Cuando dos sistemas coordenados locales satisfacen la condición 2, entonces se dice que son **compatibles**.

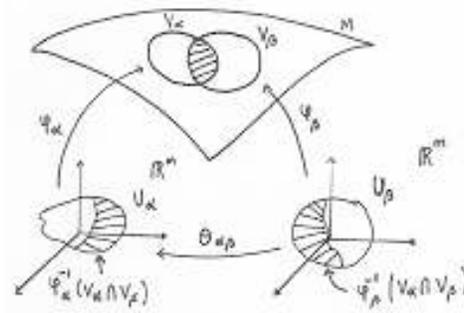


Figura 2.1: Variedad diferenciable.

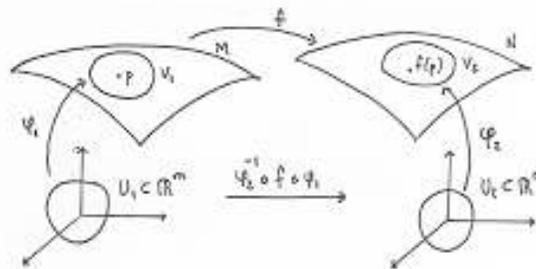


Figura 2.2: Función diferenciable.

**Definición 2.5.** Sea  $f : M \rightarrow N$  la función que va de la variedad  $M$  de dimensión  $m$  a la variedad  $N$  de dimensión  $n$ . Decimos que  $f$  es diferenciable si para cada punto  $p \in M$  existe una parametrización local  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  para  $M$  y  $p \in V_1$ , y una parametrización local  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  para  $N$  y  $f(p) \in V_2$  tal que  $\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1$  es diferenciable en  $\varphi_1^{-1}(p)$ . Ver figura 2.2.

La función  $\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1$  se define sobre  $\varphi_1^{-1}(f^{-1}(V_2 \cap f(V_1))) \subseteq U_1 \subseteq \mathbb{R}^m$  y toma valores en  $\varphi_2^{-1}(V_2 \cap f(V_1)) \subseteq U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Decimos que  $f$  es  $C^k$  diferenciable si  $\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1$  es  $C^k$  diferenciable para cualquier elección de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ .

Sea  $M$  una variedad suave de dimensión  $m$ . Una curva suave  $c$  en  $M$  es una función diferenciable  $c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ , con  $I$  un intervalo abierto. Esto es, dada una parametrización local  $\varphi : U \rightarrow V$  con  $V$  conteniendo alguna porción de  $c$ , se tiene que la curva  $\varphi^{-1}(c(t))$  es una curva diferenciable en

$U \subseteq \mathbb{R}^m$ . Fijemos un punto  $p \in M$  y consideremos dos curvas  $c_1$  y  $c_2$  pasando a través de  $p$  en  $t = 0$ . Sea  $\varphi : U \rightarrow V$  una parametrización local cerca de  $p$ . Entonces  $\varphi^{-1} \circ c_1$  y  $\varphi^{-1} \circ c_2$  son dos curvas suaves en  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ , pasando a través de  $\varphi^{-1}(p)$  en  $t = 0$ . Si estas curvas tienen el mismo vector tangente en este punto común, es decir, si  $(\varphi^{-1} \circ c_1)'(0) = (\varphi^{-1} \circ c_2)'(0)$ , entonces decimos que  $c_1$  y  $c_2$  son equivalentes en  $p$ .

**Definición 2.6.** *Un vector tangente  $v$  a una superficie suave  $M$  en un punto  $p$ , es una clase de equivalencia de curvas  $c$  en  $M$ , pasando a través del punto  $p$  en  $t = 0$ , y para las cuales  $(\varphi^{-1} \circ c)'(0)$  representa el mismo vector  $(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ , con respecto a alguna parametrización local  $\varphi : U \rightarrow V$  cerca de  $p$ .*

Denotamos el vector tangente  $v$  determinado por la clase de equivalencia de  $c$  por  $\frac{d}{dt}c(0) = c'(0)$ . Denotamos al conjunto de todos los vectores tangentes a  $M$  en  $p$  por  $T_pM$ . Dado un conjunto de vectores tangentes a  $M$  se tiene la siguiente:

**Proposición 2.7.** *El espacio tangente  $T_pM$  es un espacio vectorial de dimensión  $m$ . Una base de vectores de este espacio viene dada por  $\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}|_p$ , definida con respecto a alguna parametrización local  $\varphi$  cerca de  $p$ .*

**Prueba.** Ver Gidea [12]. ■

Ahora consideremos el **haz tangente**  $TM$ , el cual consiste de todos los espacios tangentes en puntos de  $M$  pegados de una manera natural, esto es  $TM = \bigcup T_pM = \bigcup \{p\} \times T_pM$ .

**Proposición 2.8.** *El haz tangente  $TM$  naturalmente tiene la estructura de una variedad de dimensión  $2m$ .*

**Prueba.** Ver Yves Talpaert [17, secc. 4.2]. ■

Dada una función suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , un punto  $p$  sobre  $M$ , y un vector tangente  $v$  a  $M$  en  $p$ , buscamos definir la derivada de  $f$  en la dirección de  $v$  en  $p$ . Sea  $c$  una de las curvas con  $c(0) = p$  tal que representa a  $v$ . La derivada de  $f$  en la dirección de  $v$  se define por  $v[f](p) = \frac{d}{dt}f(c(t))|_{t=0}$ .

La derivada de una función suave en un punto representa una aproximación lineal de la función cerca del punto. Sea  $f$  una función suave de la variedad  $M$  de dimensión  $m$  a la variedad  $N$  de dimensión  $n$ .

**Definición 2.9.** La derivada de  $f$  en un punto  $p \in M$  es la función  $(df)_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  definida por

$$(df)_p \left( \frac{d}{dt} c(0) \right) = \frac{d}{dt} (f \circ c)(0)$$

donde  $c : I \rightarrow M$  es una curva suave con  $c(0) = p$ , y  $\frac{d}{dt}(f \circ c)(0)$  representa a un vector tangente a  $N$  en  $f(p)$ , puesto que  $f \circ c : I \rightarrow N$  es una curva suave en  $N$  con  $(f \circ c)(0) = f(p)$ .

Aplicando  $(df)_p$  a los vectores de la base usual  $\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}|_p$  de  $T_pM$ , obtenemos los vectores  $(df)_p \left( \frac{\partial}{\partial x_1}|_p \right), \dots, (df)_p \left( \frac{\partial}{\partial x_m}|_p \right)$  en  $T_{f(p)}N$ . Expresamos estos vectores como combinaciones lineales de la base  $\frac{\partial}{\partial y_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}|_p$  de  $T_pM$  como

$$(df)_p \left( \frac{\partial}{\partial x_j}|_p \right) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i}|_{f(p)}$$

para toda  $j = 1, \dots, m$ . La matriz  $n \times m$  formada con estos coeficientes  $(Jf)_p = (a_{ij}), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$  es llamada la matriz Jacobiana de  $f$  en  $p$ . Los vectores  $(df)_p \left( \frac{\partial}{\partial x_j}|_p \right), j = 1, \dots, m$  forman una base de  $T_{f(p)}N$  si y sólo si  $m = n$  y la matriz  $(Jf)_p$  es invertible.

Dada dos variedades  $M$  y  $N$ , una función biyectiva de  $M$  a  $N$  se dice un difeomorfismo si  $f : M \rightarrow N$  y  $f^{-1} : N \rightarrow M$  son diferenciables. Las variedades  $M$  y  $N$  son difeomorfas si hay un difeomorfismo  $f$  de  $M$  a  $N$ .

**Definición 2.10.** Supongase que  $M$  es una variedad suave de dimensión  $m$ ,  $N$  es una variedad suave de dimensión  $n$ , y  $f : M \rightarrow N$  una función suave.

1. La función  $f$  se dice una **inmersión** si  $(df)_p$  es inyectiva en cada punto  $p$ . Esto es, el rango del jacobiano  $(Jf)_p$  es igual a  $m$  en cada punto  $p \in M$ .
2. La función  $f$  se dice un **encaje** si  $f$  es una inmersión y  $f$  define un homeomorfismo de  $M$  a  $f(M)$  (con la topología inducida de  $N$ ).
3. La función  $f$  es una **sumersión** si  $(df)_p$  es suprayectiva en cada punto  $p$ . Esto es, el rango del jacobiano  $(Jf)_p$  es igual a  $n$  en cada punto  $p \in M$ .

Notemos que para una inmersión se debe tener que  $\dim M \leq \dim N$  y que para una sumersión se debe tener que  $\dim M \geq \dim N$ .

**Ejemplo 2.1.2.** Sea  $M = \mathbb{R}^m$  y  $N = \mathbb{R}^n$ . Si  $m \leq n$ , la transformación

$$(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

es una inmersión (llamada la inmersión canónica), y también un encaje. Si  $m \geq n$ , la transformación

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mapsto (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

es una sumersión (llamada la sumersión canónica).

**Definición 2.11.** Una fibra de la función  $\varphi : X \rightarrow Y$  es la preimagen de un elemento  $y \in Y$ . Esto es,

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}.$$

**Proposición 2.12.** Sean  $M, N$  variedades de dimensiones  $m$  y  $n$  respectivamente y  $\varphi : M \rightarrow N$  una sumersión. Entonces:

1. Si  $m = n$ , cada fibra de  $\varphi$  es un conjunto de puntos discretos.
2. Si  $m \geq n$ , cada fibra tiene la estructura de una subvariedad regular de  $M$  de dimensión  $m - n$ .

**Prueba.** Ver Brickell [4, cap. 2]. ■

**Definición 2.13.** Sea  $f$  una función suave de la variedad  $M$  de dimensión  $m$  a la variedad  $N$  de dimensión  $n$ .

1. Un punto  $p$  en  $M$  se dice un **punto crítico** de  $f$  si la derivada  $(df)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  no es suprayectiva. Esto es, el rango de la matriz Jacobiana  $(Jf)_p$  es menor que la dimensión  $n$  de  $N$ . La imagen  $f(p)$  de un punto crítico es llamada un **valor crítico** de  $f$ .
2. Un punto  $p$  en  $M$  se dice un **punto regular** de  $f$  si éste no es crítico. Un punto  $q$  en  $N$  se dice un **valor regular** de  $f$  si su imagen inversa  $f^{-1}(q)$  no contiene puntos críticos.

Si la dimensión de  $M$  es más pequeña que la dimensión de  $N$ , entonces todos los puntos de  $M$  son puntos críticos para  $f$ . Por otro lado, si  $f(M)$  no es todo  $N$ , entonces todos los puntos de  $N \setminus F(M)$  son valores regulares, puesto que sus imágenes inversas son vacías.

**Proposición 2.14.** *(Imagen inversa de un valor regular) La imagen inversa  $f^{-1}(q)$  de un valor regular  $q \in N$  de una función suave  $f : M \rightarrow N$  es una subvariedad de dimensión  $m - n$  de  $M$ .*

**Prueba.** (Siguiendo a Gidea [12, secc. 1.10]) Para un punto dado  $p \in f^{-1}(q)$ , y utilizando el teorema de sumersión (ver [12, secc. 1.9]) podemos elegir parametrizaciones locales  $\varphi_1$  cerca de  $p$  y  $\varphi_2$  cerca de  $q$  tal que

$$\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$$

y las coordenadas locales de  $p$  y  $q$  son cero. Los puntos  $p' \in V \cap f^{-1}(q)$  tienen coordenadas locales  $(0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_m)$ . Por lo tanto podemos definir una parametrización local  $\varphi' : U \cap (0 \times \mathbb{R}^{m-n}) \rightarrow V \cap f^{-1}(q)$  sobre  $f^{-1}(q)$ , cerca de  $p$ , por

$$\varphi'(x_{n+1}, \dots, x_m) = \varphi_1(0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_m)$$

De esta forma obtenemos una estructura suave sobre  $f^{-1}(q)$ , inducida por la estructura suave sobre  $M$ , el cual hace que  $f^{-1}(q)$  sea una subvariedad de dimensión  $m - n$ . ■

**Definición 2.15.** *Una sección  $S$  de clase  $C^k$  del haz tangente  $TM$  es una función  $S$  de clase  $C^k$  de  $M$  en  $TM$  tal que la composición de  $S$  con la proyección del haz tangente  $\Pi_M : TM \rightarrow M : (x, X_x) \mapsto x$  es la identidad sobre  $M$ , es decir,  $\Pi_M \circ S = \text{id}_M$ .*

**Definición 2.16.** *Un campo vectorial (tangente) sobre  $M$  es una transformación*

$$X : M \rightarrow TM : x \mapsto X(x) = (x, X_x),$$

*el cual asigna a cada punto  $x \in M$  un vector tangente en el punto  $x$ .*

La colección de campos vectoriales diferenciables es denotada por  $\mathcal{X}(M)$ . De aquí en adelante cuando hablemos de campos vectoriales usaremos la definición 2.16.

**Observación** Un campo vectorial  $X$  sobre  $M$  es una sección de  $TM$ . En efecto, la transformación  $X : M \rightarrow TM$  tal que  $\Pi_m \circ X : M \rightarrow M : x \mapsto \Pi_m(X(x)) = x$ , donde  $\Pi_m$  es la proyección de  $TM$ , es la identidad sobre  $M$ . Si esta sección es diferenciable entonces el campo vectorial se dice también diferenciable.

**Definición 2.17.** Consideremos  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ . El producto de campos vectoriales  $X$  y  $Y$  es un operador definido por

$$\forall g \in C^\infty(M) : (XY)g = X(Yg).$$

El producto de campos vectoriales no es un campo vectorial diferenciable.

**Definición 2.18.** Sean  $X \in \mathcal{X}(M)$ ,  $M$  una variedad diferenciable e  $I$  un intervalo abierto. Una curva integral de  $X$  es una curva  $c : I \rightarrow M : t \mapsto c(t)$  tal que  $c'(t) = X(c(t))$ .

**Definición 2.19.** El flujo de  $X$  es la colección de funciones  $\varphi_t : M \rightarrow M$  tal que  $t \rightarrow \varphi_t(m)$  es la curva integral de  $X$  con condición inicial  $m$ .

**Definición 2.20.** Sean  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ . Definimos el **paréntesis de Lie** como la transformación

$$[\ ] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M) : (X, Y) \mapsto [X, Y] = XY - YX.$$

El paréntesis de campos vectoriales  $X$  y  $Y$  opera sobre  $C^\infty(M)$ , esto es

$$[X, Y] : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M) : g \mapsto [X, Y]g = X(Yg) - Y(Xg).$$

Además el paréntesis de campos vectoriales diferenciables también es un campo vectorial diferenciable.

**Definición 2.21.** Sean  $M$  una variedad suave,  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  y  $X$  un campo vectorial diferenciable sobre  $M$ , definimos la **derivada de Lie** de  $f$  a lo largo del campo vectorial  $X$  como

$$\mathcal{L}_X f(x) = X(x)(f) = df_x(X(x))$$

**Proposición 2.22.** Sean  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ ,  $f \in C^\infty(M)$ . Entonces

$$(\mathcal{L}_X)(f) = [X, Y](f)$$

y se satisface la identidad de Jacobi, a saber

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

**Prueba.** Ver Talpaert [17, secc. 3.2] ■

## 2.2. Teoría de Morse

Esta sección permite construir difeomorfismos alrededor de puntos críticos no degenerados de una variedad. La referencia principal viene dada por Cushman y Bates [7].

Sea  $M$  una variedad suave y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave. Supóngase que  $p \in M$  es un punto crítico de  $f$ . Definimos el **Hessiano** de  $f$  en  $p$  como sigue. Sea  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow M$  con  $\varphi(0) = p$  una parametrización local de  $M$ . Entonces el Hessiano de  $f$  en  $p$  es la forma bilineal simétrica sobre el espacio tangente  $T_p M$  dada por:

$$(\text{Hess}_p f)(v_p, w_p) = D^2(f \circ \varphi)(0)(v, w),$$

Aquí las curvas  $t \rightarrow \varphi(tv)$  y  $t \rightarrow \varphi(tw)$  representan los vectores tangentes  $v_p$  y  $w_p$  a  $M$  en  $p$ . Si tomamos una carta coordenada  $(U, \varphi)$  con  $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$  se tiene

$$D^2 f(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \text{Sim}_m(\mathbb{R}) : x \mapsto \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right).$$

**Definición 2.23.** *Supongase que  $x$  es un punto crítico de una función suave  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Si la matriz  $D^2 f(x)_{(m \times m)}$  es invertible, entonces  $x$  es un **punto crítico no degenerado** de  $f$ . Si todos los puntos críticos de  $f$  son no degenerados, entonces  $f$  es una **función de Morse**.*

Puesto que la matriz hessiana es simétrica, ésta puede ser diagonalizada por un cambio de coordenadas lineal y ortogonal, las cuales pueden ser además reescaladas para dar una matriz diagonal donde todas las entradas de la diagonal sean  $\pm 1$ . Los **invariantes** del Hessiano tales como su **no degeneración** (su invertibilidad), su **índice de Morse** (número de eigenvalores negativos) y su **signatura** (la diferencia de sus eigenvalores positivos y negativos), no dependen de la elección de la parametrización.

**Proposición 2.24.** *Sea  $p$  un punto crítico no degenerado de  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces hay un sistema de coordenadas local  $(y_1, \dots, y_m)$  sobre una vecindad de  $p$  tal que sobre esta vecindad*

$$f(y_1, \dots, y_m) = f(p) - y_1^2 - \dots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \dots + y_m^2, \quad (2.1)$$

donde  $\lambda$  es el índice del punto crítico  $p$ .

**Prueba.** Ver Barden [3, secc. 7.5]. ■

Entonces dependiendo de qué valores tome el índice de Morse tendremos un hiperboloide de revolución o una silla de montar.

**Corolario 2.25.** Si  $V$  es otro subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^m$  y  $\phi : V \rightarrow U$  es un difeomorfismo con  $\phi(q) = p$ , entonces  $g = f \circ \phi$  tiene un punto crítico no degenerado en  $q$  con el mismo índice que  $p$

**Prueba.** Por la regla de la cadena  $Dg(x) = Df(\phi(x))D\phi(x)$ , puesto que  $D\phi(x)$  es no singular en  $V$ ,  $Dg(x) = 0$  si y sólo si  $Df(\phi(x)) = 0$ . Si  $\psi : W \rightarrow U$  es un cambio de coordenadas tal que  $\psi(0) = p$  y  $H(f \circ \psi)(0)$  es diagonal entonces  $\phi^{-1} \circ \psi$  lleva el 0 a  $q$  y transforma  $Hg(0)$  a la forma diagonal identidad. Entonces los índices concuerdan en los dos puntos críticos. ■

**Definición 2.26.** Dado  $p$  un punto crítico no degenerado de índice  $k$  para una función  $f$  sobre  $M$ , la carta  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $\phi(p) = 0$  y

$$f \circ \phi^{-1}(y_1, \dots, y_m) = f(p) - y_1^2 - \dots - y_\lambda^2 + y_{\lambda k+1}^2 + \dots + y_m^2$$

es llamada una carta de Morse.

**Proposición 2.27.** (Lema de Morse). Supóngase que  $p$  es un punto crítico no degenerado de una función suave  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(p) = 0$ . Entonces hay un conjunto abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  con  $p \in U$  y un difeomorfismo  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $\varphi(p) = 0$  tal que

$$f \circ \varphi^{-1}(y) = \frac{1}{2}D^2f(p)(y, y), \forall y \in \varphi(U), \quad (2.2)$$

donde

$$D^2f(0)(y, y) := (y_1, y_2)(D^2f(0))(y_1, y_2)^T, \quad (2.3)$$

donde  $T$  significa la transpuesta de la matriz. Ver figura 2.3.

**Prueba.** Ver Cushman y Bates [7, apéndice E.2] ■

**Proposición 2.28.** Dadas las condiciones de la proposición 2.27 la siguiente igualdad de conjuntos se sigue:

$$\varphi(f^{-1}(\epsilon) \cap U_0) = (f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\epsilon) \quad (2.4)$$

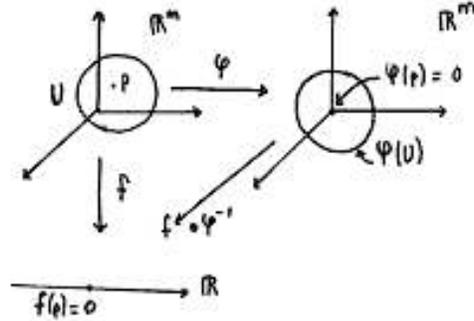


Figura 2.3: Lema de Morse.

**Prueba.**  $\subseteq$  Sea  $z \in \varphi(f^{-1}(\epsilon) \cap U_0)$ , entonces  $(x, y) \in (f^{-1}(\epsilon) \cap U_0)$  y  $\varphi(x, y) = z$ . Dado que  $(x, y) \in f^{-1}(\epsilon)$  entonces  $f(x, y) = \epsilon = f(\varphi^{-1}(z)) = (f \circ \varphi^{-1})(z)$ . Por lo tanto  $z \in (f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\epsilon)$ . En términos estrictamente de conjuntos tenemos la siguiente cadena de contenciones  $\varphi(f^{-1}(\epsilon) \cap U_0) \subseteq \varphi(f^{-1}(\epsilon)) \cap \varphi(U_0) = \varphi(f^{-1}(\epsilon)) = (\varphi \circ f^{-1})(\epsilon) = (f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\epsilon)$ .

$\supseteq$  Sea  $z \in (f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\epsilon)$ , es decir,  $(f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\epsilon) = \{z \in \varphi(U_0) : (f \circ \varphi^{-1})(z) = \epsilon\}$ . Dado que  $z \in \varphi(U_0)$  entonces  $z = \varphi(x, y)$  para algún  $(x, y) \in U_0$ . Además  $z = \varphi(x, y) = \varphi(f^{-1}(\epsilon))$ . Entonces  $(x, y) \in f^{-1}(\epsilon)$ . Por lo tanto  $(x, y) \in (U_0 \cap f^{-1}(\epsilon))$ . ■

### Lema de isotopía de Morse

El lema de isotopía de Morse nos da un criterio útil para determinar cuando dos conjuntos de nivel de una función suave son difeomorfos.

**Definición 2.29.** Sea  $M$  una variedad suave y  $N_1, N_2$  subvariedades suaves de  $M$ . Decimos que  $N_1$  es isotópica suavemente a  $N_2$  si existe una familia de difeomorfismos suaves de un parámetro  $\psi : [0, 1] \times M \rightarrow M$  tales que para cada  $t \in [0, 1]$  se tiene  $\psi_t : N_1 \rightarrow N_2$ .

**Proposición 2.30.** (Lema de Isotopía de Morse) Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave y propia. Si  $[a, b]$  es un intervalo cerrado no vacío contenido en el conjunto de valores regulares en la imagen de  $f$ , entonces  $f^{-1}(a)$  es isotópica suavemente a  $f^{-1}(b)$ , esto es, hay una familia de difeomorfismos

suaves de un parámetro  $\psi : [0, 1] \times M \rightarrow M$  tales que para cada  $t \in [0, 1]$ ,

$$\psi_t : f^{-1}(a) \rightarrow f^{-1}(a + t(b - a)), \quad (2.5)$$

donde  $\psi_t(x) := \psi(t, x)$ .

**Prueba.** Ver Cushman y Bates [7, Apéndice E.3]. ■

La idea de la prueba de la proposición anterior consiste en empujar el conjunto de nivel  $f^{-1}(a)$  hacia el conjunto de nivel  $f^{-1}(b)$  a lo largo de las curvas integrales del campo vectorial gradiente asociado a  $f$ .

**Proposición 2.31.** *Sea  $0$  un valor regular de la función suave  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  y supóngase que  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave. Si  $x \in f^{-1}(0)$  es un punto crítico de*

$$g|_{f^{-1}(0)} : f^{-1}(0) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

con **multiplicador de Lagrange**  $\lambda$ , esto es

$$Dg(x) + \lambda_1 Df_1(x) + \dots + \lambda_k Df_k(x) = 0 \quad (2.6)$$

entonces el Hessiano de  $g|_{f^{-1}(0)}$  en  $x$  es

$$(D^2g(x) + \lambda_1 D^2f_1(x) + \dots + \lambda_k D^2f_k(x))|_{T_x f^{-1}(0)} \quad (2.7)$$

donde  $T_x(f^{-1}(0)) = \ker Df(x)$

**Prueba.** Ver Cushman y Bates [7, apéndice E.2]. ■

La teoría de Morse es solamente una parte de la llamada **Teoría de singularidades**. Existen diversos libros respecto a esta teoría, pero como una introducción se puede ver el libro de aportaciones matemáticas de Bulajich y Lopez de Medrano [5].

## 2.3. Álgebra y geometría simpléctica

En esta sección hacemos una extensión de conceptos de álgebra lineal y de variedades diferenciables. La referencia principal de esta sección viene dada por Cushman y Bates [7, apéndice A].

Si  $B : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma bilineal, esto es, lineal en cada una de sus entradas, su matriz  $B_{ij}$  se define por  $B_{ij} = B(e_i, f_j)$ , es decir,  $B(v, w) = v^i B_{ij} w^j$  siendo las  $\{e_i\}$  una base para  $E$  y las  $\{f_j\}$  una base para  $F$ . Definimos la transformación lineal **asociada**  $B^b : E \rightarrow F^*$  por  $B^b(v)(w) = B(v, w)$ .

**Definición 2.32.** Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión finita y sea  $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal continua sobre  $V$ . La forma  $\omega$  se dice **no degenerada** si  $\omega(v, w) = 0$  para toda  $w \in V$  implica que  $v = 0$ .

La transformación lineal continua inducida  $\omega^b : V \rightarrow V^*$  se define por

$$\omega^b(v)(w) = \omega(v, w) \quad (2.8)$$

La no degeneración de  $\omega$  es equivalente a la inyectividad de  $\omega^b$ .

Si  $\{e^j\}$  denota la base para  $V^*$  dual a la base  $\{e_i\}$ , esto es,  $\langle e^j, e_i \rangle = \delta_i^j$ , y si escribimos  $v = v^i e_i$  y  $w = w^i e_i$ , entonces  $\omega(v, w) = v^i \omega_{ij} w^j$ .

**Definición 2.33.** Una **forma simpléctica**  $\omega$  sobre un espacio vectorial  $V$  es una forma bilineal antisimétrica no degenerada sobre  $V$ . El par  $(V, \omega)$  es llamado un **espacio vectorial simpléctico**.

Como puede verse en [6], una forma diferenciable de orden  $k$  o simplemente una  $k$ -forma es justamente un tensor antisimétrico del tipo  $(0, k)$ . Ésta es una clase importante de campos tensoriales sobre una variedad diferenciable las cuales juegan un rol importante en las aplicaciones físicas.

## Complementos ortogonales simplécticos

**Definición 2.34.** Sea  $(V, \omega)$  un espacio vectorial simpléctico y sea  $W$  un subespacio de  $V$ .

$$W^\omega = \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0, \forall w \in W\} \quad (2.9)$$

es llamado el **complemento ortogonal simpléctico** de  $W$ .

A continuación mostramos algunas propiedades.

**Proposición 2.35.** Sean  $U, W$  subespacios vectoriales de  $(V, \omega)$ .

1.  $W^\omega$  es cerrado.
2.  $U \subset W$  implica que  $W^\omega \subset U^\omega$ .
3.  $U^\omega \cap W^\omega = (U + W)^\omega$ .
4. Si  $V$  es de dimensión finita, entonces  $\dim W + \dim W^\omega = \dim V$ .

5. Si  $V$  es de dimensión finita,  $W^{\omega\omega} = W$ .

6. Si  $U$  y  $W$  son cerrados, entonces  $(U \cap W)^\omega = U^\omega \cap W^\omega$ .

**Definición 2.36.** Un subespacio  $W$  de un espacio vectorial simpléctico  $(V, \omega)$  es simpléctico si y sólo si  $\omega|_{W \times W}$  es no degenerada.

**Proposición 2.37.** Sea  $W$  un subespacio del espacio vectorial simpléctico  $(V, \omega)$ . Entonces

1.  $W$  es simpléctico si y sólo si  $W \cap W^\omega = \{0\}$ .

2. Si  $W$  es un subespacio simpléctico, entonces  $W^\omega$  también lo es.

**Prueba.** 1.  $\Rightarrow$  Supongamos que  $w_1 \in W \cap W^\omega$ . Entonces  $\omega(w_1, w) = 0$  para toda  $w \in W$ . Como  $\omega|_{W \times W}$  es no degenerada, entonces  $w_1 = 0$ . Por lo tanto  $W \cap W^\omega = \{0\}$ .

$\Leftarrow$  Supongamos que para algún  $w_1 \in W$  se tiene  $\omega(w_1, w) = 0 = \omega^\flat(w_1)(w)$ . Entonces para toda  $w \in W$  se tiene  $0 = \omega(w_1, w)$ , esto es,  $w_1 \in W^\omega$ . Por lo tanto  $w_1 \in W \cap W^\omega = \{0\}$ . Puesto que  $\dim W = \dim W^*$  entonces la función  $\omega^\flat : W \rightarrow W^*$  es biyectiva. Entonces  $\omega|_{W \times W}$  es no degenerada.

2. Puesto que  $W$  es simpléctico,  $\{0\} = W \cap W^\omega = (W^\omega)^\omega \cap W^\omega$ . Luego por el inciso anterior  $W^\omega$  es simpléctico. ■

La **geometría simpléctica** es una globalización del álgebra simpléctica. Ésta estudia las variedades simplécticas y los difeomorfismos. La relación con la mecánica se debe, en primera instancia, a que el **espacio fase** de un sistema mecánico es una **variedad simpléctica**, y el **tiempo de evolución** de un sistema dinámico conservativo es una **familia de un parámetro** de difeomorfismos simplécticos.

**Definición 2.38.** Una forma simpléctica o una estructura simpléctica sobre una variedad suave  $M$  es una 2-forma  $\omega$  no degenerada y cerrada sobre  $M$ , es decir, para cada  $x \in M$ ,  $\omega(x)$  es no degenerada y  $d\omega = 0$ .

**Definición 2.39.** Una **variedad simpléctica**  $(M, \omega)$  es un par consistiendo de una variedad suave  $M$  junto con una 2-forma  $\omega$  no degenerada y cerrada, en otras palabras,  $(T_p M, \omega(p))$  es un espacio vectorial simpléctico para cada  $p \in M$ .

Si  $(M_1, \omega_1)$  y  $(M_2, \omega_2)$  son variedades simplécticas, entonces la transformación suave  $f : M_1 \rightarrow M_2$  es una transformación simpléctica o canónica si  $f^*\omega_2 = \omega_1$ .

**Observacion.** En [3] se muestra que no toda variedad de dimensión par permite una estructura simpléctica. Por ejemplo la esfera  $S^{2n}$  no puede admitir una estructura simpléctica si  $n \geq 2$ .

En muchos problemas físicos, el espacio fase es el haz cotangente  $T^*Q$  del espacio de configuración  $Q$ . Sobre  $T^*Q$  hay una estructura simpléctica natural dada  $Q$  como una variedad suave de dimensión  $n$  y coordenadas locales  $\{q^1, \dots, q^n\}$ . Entonces  $\{dq^1, \dots, dq^n\}$  es una base de  $T_q^*Q$  (el haz cotangente anclado o teniendo base en  $q$ ) y escribiendo  $\alpha \in T_q^*Q$  como  $\alpha = p_i dq^i$  se tienen coordenadas locales  $\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\}$  sobre  $T^*Q$ .

Definimos la **forma simpléctica canónica**  $\omega$  sobre  $T^*Q$  por  $\omega = dp_i \wedge dq^i$ . Esta 2-forma  $\omega$  es localmente constante, esto es,  $\omega$  es independiente del punto base y por lo tanto  $d\omega = 0$ .

## 2.4. Grupos y álgebras de Lie

En esta sección definimos lo que es un grupo de Lie, el álgebra de Lie asociado al grupo de Lie, acciones sobre un grupo y propiedades de estas acciones. Las acciones de un grupo de Lie son importantes pues nos permiten identificar simetrías dentro de un sistema mecánico. Las principales referencias para esta sección vienen dadas por Marsden/Ratiu [14] y Puta [16].

**Definición 2.40.** *Un grupo de Lie es una variedad  $G$  que tiene una estructura de grupo consistente con su estructura de variedad, en el sentido de que la multiplicación de grupo  $\mu : G \times G \rightarrow G : (g, h) \mapsto gh$  es una transformación  $C^\infty$ .*

**Observación.** En el caso de un grupo matricial de Lie, éste es un conjunto no vacío de matrices invertibles con entradas en los reales o complejos, junto con la operación de multiplicación matricial. Tal conjunto  $G$  debe ser cerrado bajo dicha operación, inversión de matriz y la toma de límites dentro del conjunto de todas las matrices invertibles.

Las transformaciones  $L_g : G \rightarrow G, h \mapsto gh$  y  $R_h : G \rightarrow G, g \mapsto gh$ , son

llamadas las transformaciones de **traslación izquierda y derecha** respectivamente del grupo. Por lo tanto tenemos  $L_{g_1} \circ L_{g_2} = L_{g_1 g_2}$  y  $R_{h_1} \circ R_{h_2} = R_{h_2 h_1}$ . Si  $e$  denota el elemento identidad, entonces  $L_e = Id = R_e$ , y por lo tanto  $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$  y  $(R_h)^{-1} = R_{h^{-1}}$ .

**Ejemplo 2.4.1.** El grupo de isomorfismos lineales de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$  es un grupo de Lie de dimensión  $n^2$ , llamado **el grupo lineal general** y denotado por  $GL(n, \mathbb{R})$ . Éste es una variedad suave, puesto que es un subconjunto abierto del espacio vectorial de todas las transformaciones lineales  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$ . El grupo  $GL(n, \mathbb{R})$  es la imagen inversa de  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  bajo la función continua  $A \rightarrow \det A$  de  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  a  $\mathbb{R}$ .

Sea  $e$  el elemento identidad de  $G$ . Cualquier vecindad de  $e$  puede ser transformada mediante una traslación  $L_g$  en una vecindad de  $ge = g$ . Nosotros podemos introducir la transformación dada por  $dL_g : T_e G \rightarrow T_g G$  y por lo tanto a cada elemento de  $T_e G$  le podemos asociar un campo vectorial invariante sobre  $G$ .

**Definición 2.41.** *Un campo vectorial  $X$  sobre  $G$  se dice izquierdo invariante, si  $\forall g \in G$  se tiene  $dL_g X(e) = X(g)$ , esto es equivalente a decir que  $\forall h \in G$  se tiene  $dL_g X(h) = X(gh)$ .*

Se puede demostrar como en [14] que el paréntesis de cualesquiera dos campos vectoriales izquierdos invariantes es también un campo vectorial izquierdo invariante. Esto permite darle a  $T_e G$  la estructura de un álgebra de Lie.

Sea  $e$  el elemento identidad de  $G$ . Entonces para cada  $\xi \in T_e G$  definimos un campo vectorial  $X_\xi$  sobre  $G$  por  $X_\xi(g) = T_e L_g(\xi)$ . Entonces  $X_\xi(gh) = T_e L_{gh}(\xi) = T_e(L_g \circ L_h)(\xi) = T_h L_g(T_e L_h(\xi)) = T_h L_g(X_\xi(h))$  y por lo tanto  $X_\xi$  es un campo vectorial izquierdo invariante.

**Definición 2.42.** *Definimos el paréntesis de Lie en  $T_e G$  por*

$$[\xi, \eta] = [X_\xi, X_\eta](e) = X_{[\xi, \eta]}, \quad (2.10)$$

para cada  $\xi, \eta \in T_e G$  y donde  $[X_\xi, X_\eta]$  es el paréntesis de Jacobi-Lie de campos vectoriales.

**Definición 2.43.** *El espacio vectorial  $T_e G$  con esta estructura de álgebra de Lie es llamado el **álgebra de Lie** de  $G$  y se denota por  $\mathfrak{g}$ .*

**Observación.** Dado un grupo matricial de Lie  $G$ , el álgebra matricial de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  es el conjunto de matrices  $\{g'(0) : g \in C^\infty(M, \mathbb{R}), g(0) = I\}$ , donde la derivada de una función de valor matricial es dada por la matriz de las derivadas de cada entrada. Dicho en palabras, el álgebra de Lie de un grupo matricial de Lie como conjunto se define simplemente como el espacio tangente a la identidad en  $G$ .

**Ejemplo 2.4.2.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces  $T_e V \simeq V$  (isomorfo) y el campo vectorial izquierdo invariante definido por  $\xi \in T_e V$ , es el campo vectorial constante  $X_\xi(\eta) = \xi$  para toda  $\eta \in V$ . Por lo tanto, el álgebra de Lie de  $V$  es  $V$  misma.

**Ejemplo 2.4.3.** El álgebra de Lie de  $GL(n, \mathbb{R})$  es  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , denotado por  $\mathfrak{gl}(n)$ , el espacio vectorial de todas las transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^n$ , con el conmutador de paréntesis  $[A, B] = AB - BA$ .

**Ejemplo 2.4.4.** Sea  $G = SO(3) = \{A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) : A^t A = I, \det A = 1\}$  el grupo de rotaciones en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces el álgebra de Lie de  $SO(3)$ , denotado por  $\mathfrak{so}(3)$ , está dado por el siguiente conjunto

$$\mathfrak{so}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Identificamos el álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  con  $\mathbb{R}^3$  asociando a cada  $v = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3$  la matriz  $\hat{v} \in \mathfrak{so}(3)$  dada por

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} 0 & -v^3 & v^2 \\ v^3 & 0 & -v^1 \\ -v^2 & v^1 & 0 \end{bmatrix}$$

es decir,  $v \mapsto \hat{v}$  tal que  $\hat{v}w = v \times w$ , que es justamente el producto vectorial usual de  $\mathbb{R}^3$ . Entonces se tienen las siguientes identidades

$$\begin{aligned} u \hat{\times} v &= [\hat{u}, \hat{v}] \\ u \cdot v &= -\frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{u} \cdot \hat{v}). \end{aligned}$$

Sea  $X_\xi$  un campo vectorial izquierdo invariante sobre  $G$  correspondiente a  $\xi \in G$ . Entonces hay una curva integral única  $c_\xi : \mathbb{R} \rightarrow G$  de  $X_\xi$  comenzando en  $e$ , es decir,  $\dot{c}_\xi(t) = X_\xi(c_\xi(t)), c_\xi(0) = e$ . Afirmamos que  $c_\xi(t+s) = c_\xi(t)c_\xi(s)$ , lo cual significa que  $c_\xi(t)$  es un subgrupo de un solo parámetro de  $G$ .

**Definición 2.44.** La función exponencial  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  se define por  $\exp(\xi) = c_\xi(1)$ .

**Definición 2.45.** Sea  $G$  un grupo de Lie y sea  $M$  una variedad. Una **acción** (izquierda) de un grupo de Lie  $G$  sobre  $M$  es una transformación suave  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  tal que:

1.  $\Phi(e, x) = x \quad \forall x \in M$
2.  $\Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(gh, x), \quad \forall g, h \in M, x \in M$

Una **acción derecha** es una transformación  $\Psi : M \times G \rightarrow M$  que satisface  $\Psi(x, e) = x$  y  $\Psi(\Psi(x, g), h) = \Psi(x, gh)$ . Para toda  $g \in G$ , sea  $\Phi_g : M \rightarrow M$  dada por  $x \mapsto \Phi(g, x)$ , entonces  $\Phi_e = id_M$  y  $\Phi_{gh} = \Phi_g \circ \Phi_h$ .

De aquí en adelante sólo consideraremos acciones izquierdas.

**Definición 2.46.** Si  $\Phi$  es una acción de  $G$  sobre  $M$  y  $x \in M$ , la **órbita** de  $x$  se define como

$$\text{Orb}(x) = \{\Phi_g(x) : g \in G\} \subset M. \quad (2.11)$$

En dimensiones finitas se puede demostrar tal como en el libro de Marsden [14], que la órbita de  $x$ ,  $\text{Orb}(x)$ , es una variedad inmersa de  $M$ .

**Definición 2.47.** Para  $x \in M$ , el grupo de **isotropía** (estabilizador o simetría) de  $\Phi$  en  $x$  está dado por

$$G_x := \{g \in G : \Phi_g(x) = x\} \subset G \quad (2.12)$$

Una acción se dice

1. **Transitiva** si para toda  $x, y \in M$  hay una  $g \in G$  tal que  $gx = y$ ;
2. **Efectiva** si  $\Phi_g = id_M$  implica que  $g = e$ ; esto es,  $g \rightarrow \Phi_g$  es uno a uno;
3. **Libre** si ésta no tiene puntos fijos, esto es,  $\Phi_g(x) = x$  implica que  $g = e$ ;
4. **Propia** si la función  $\tilde{\Phi} : G \times M \rightarrow M \times M : (g, x) \mapsto (x, \Phi(g, x))$  es propia. En dimensiones finitas esto significa que si  $K \subset M \times M$  es compacto, entonces  $\tilde{\Phi}^{-1}(K)$  es compacto.

Una acción  $\Phi$  de  $G$  sobre una variedad  $M$  define una **relación de equivalencia** sobre  $M$  por la relación de pertenecer a la misma órbita; explícitamente, para  $x, y, \in M$ , decimos que  $x$  es equivalente a  $y$  y que lo denotamos por  $x \sim y$ , si existe una  $g \in G$ , tal que  $gx = y$ , esto es, si  $y \in Orb(x)$ . Ahora tomamos el cociente  $M/G$  como el conjunto de estas clases de equivalencia, esto es, el conjunto de órbitas, algunas veces llamado el **espacio orbital**. Entonces la función orbital

$$\pi : M \rightarrow M/G : x \mapsto Orb(x) \quad (2.13)$$

es suprayectiva.

De acuerdo a Abraham [1] el espacio orbital  $M/G$  es un espacio topológico si  $U \subseteq M/G$  es abierto si y sólo si  $\pi^{-1}(U)$  es un conjunto abierto de  $M$ .

**Proposición 2.48.** *Si  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  es una acción propia y libre, entonces  $M/G$  es una variedad suave y  $\pi : M \rightarrow M/G$  es una submersión suave.*

*Prueba.* Ver Abraham [1, secc. 4.4] ■

**Ejemplo 2.4.5.** Sea  $M = \mathbb{R}$ ,  $G = \mathbb{R}$  y la acción de  $G$  sobre  $M$  dada por

$$\Phi : G \times M \rightarrow M : (s, x) \mapsto x + s$$

Entonces para  $x \in \mathbb{R}$ , la órbita  $Orb(x) = \mathbb{R}$ . Por lo tanto,  $M/G$  es un simple punto, y la acción es transitiva, propia y libre.

**Definición 2.49.** *Sea  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  una acción. Para cada  $\xi \in G$ , la transformación  $\Phi^\xi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ , definida por  $\Phi^\xi(t, x) = \Phi(\exp(t\xi), x)$ , es una acción sobre  $M$ . En otras palabras,  $\Phi_{\exp(t\xi)} : M \rightarrow M$  es un flujo sobre  $M$ . El correspondiente campo vectorial sobre  $M$ , dado por*

$$\xi_M(x) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)}(x), \quad (2.14)$$

es llamado el **generador infinitesimal** de la acción correspondiente a  $\xi$ .

**Definición 2.50.** *Sea  $M$  una variedad suave,  $G$  un grupo de Lie y  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  una acción de  $G$  sobre  $M$ . Decimos que una función suave  $f : M \rightarrow M$  es **equivariante** con respecto de esta acción si para toda  $g \in G$  se tiene*

$$f \circ \Phi_g = \Phi_g \circ f.$$

**Proposición 2.51.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  una función suave equivariante. Entonces para cualquier  $\xi \in \mathfrak{g}$  tenemos*

$$Tf \circ \xi_M = \xi_M \circ f$$

**Prueba.** Por equivarianza se tiene  $f \circ \Phi_{\exp(t\xi)} = \Phi_{\exp(t\xi)} \circ f$ . Diferenciando con respecto a  $t$  en  $t = 0$  y usando la regla de la cadena se tiene:

$$Tf \circ \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)} \right) = \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)} \right) \circ f$$

esto es,  $Tf \circ \xi_M = \xi_M \circ f$ . ■

**Definición 2.52.** *Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  es una curva sobre la variedad  $M$ , definimos el levantamiento de  $\gamma$  a  $TM$  la cual es una curva sobre  $TM$  dada por*

$$\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow TM : t \mapsto \left( \gamma(t), \frac{d\gamma(t)}{dt} \right).$$

**Definición 2.53.** *Sea  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  una acción. Definimos el levantamiento izquierdo tangente de la acción del grupo  $G$  sobre  $TM$  por*

$$\bar{\Phi} : G \times TM \rightarrow TM : (g, \dot{\gamma}(0)) \mapsto \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi(g, \gamma(t)). \quad (2.15)$$

## 2.5. Función de momento

Para obtener **cantidades conservadas** en sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos con simetrías se utiliza el concepto de función de momento. Una formulación muy general de la relación entre simetrías y cantidades conservadas fue dada por Emmy Noether, quien mostró que asociado a cualquier grupo de simetrías de un sistema mecánico hay una cantidad conservada (posiblemente definida localmente). Este resultado es conocido como **Teorema de Noether**.

Las cantidades conservadas son llamadas **funciones de momento** y resultan ser transformaciones de Poisson desde el espacio fase del sistema mecánico al dual del álgebra de Lie del grupo de simetría. Los momentos lineal y angular asociados con invarianza traslacional y rotacional son los ejemplos más comunes. Para esta sección la referencia principal viene dada por Mircea [16].

**Definición 2.54.** Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica conexa y  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  una acción simpléctica del grupo de Lie  $G$  sobre  $M$ . Si para cada  $\xi \in \mathfrak{g}$  existe una función definida globalmente  $\hat{J}(\xi) : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\xi_M = X_{\hat{J}(\xi)}$$

entonces la transformación  $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ , dada por

$$\begin{aligned} J : x \in M &\mapsto J(x) \in \mathfrak{g}^* \\ J(x)(\xi) &= \hat{J}(\xi)(x) \end{aligned}$$

es llamado la función de momento para la acción simpléctica  $\Phi$ .

La definición anterior define una transformación que manda vectores en  $\mathfrak{g}$  a funciones suaves sobre  $M$ . En otras palabras, dada una función de momento  $J$  es equivalente a dar una transformación lineal  $\hat{J} : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$  tal que  $X_{\hat{J}(\xi)} = \xi_M$ .

**Proposición 2.55.** Sean  $(M, \omega, G)$  como en la definición 2.54. Sea  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función que es invariante bajo la acción del grupo  $G$ , esto es,  $H(\Phi_g(x)) = H(x)$  para toda  $x \in M$  y  $g \in G$ . Entonces  $\hat{J}(\xi)$  es una constante del movimiento para la dinámica generada por  $H$ .

**Prueba.** Sucesivamente podemos escribir

$$\begin{aligned} \{H, \hat{J}(\xi)\}_\omega(x) &= (X_{\hat{J}(\xi)}(H))(x) = (\xi_M(H))(x) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)}^* H(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(\Phi_{\exp(t\xi)}(x)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(x) = 0. \end{aligned}$$

■

En esta prueba hemos supuesto que conocemos el paréntesis de Poisson.

**Proposición 2.56.** (Noether) Sea  $\Phi$  una acción simpléctica de  $G$  sobre  $(M, \omega)$  con función de momento  $J$ . Supóngase que  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  es  $G$  invariante bajo esta acción. Entonces  $J$  es una constante del movimiento para  $H$ , es decir,  $J \circ \phi_t = J$ , donde  $\phi_t$  es el flujo de  $X_H$ .

**Prueba.** (Siguiendo a Puta [16, secc. 3.3]) Para cada  $\xi \in \mathfrak{g}$  se tiene  $\{H, \hat{J}(\xi)\}_\omega = 0$  o equivalentemente  $\hat{J}(\xi)(\phi_t(x)) = \text{constante}$ . Puesto que  $\phi_0(x) = x$ , se sigue que  $\hat{J}(\xi)(\phi_t(x)) = \hat{J}(\xi)(x)$  y por lo tanto  $J \circ \phi_t = J$ . ■

**Definición 2.57.** Sea  $G$  un grupo de Lie conmutativo y  $M$  una variedad suave. Una acción simpléctica con función de momento  $J$  invariante bajo la acción del grupo para toda  $x \in M$  y  $g \in G$  se dice una **acción hamiltoniana**.

En el caso de que  $G$  no sea un grupo de Lie conmutativo, la definición de una acción hamiltoniana requiere de más condiciones como puede ver por ejemplo en el libro de Puta [16].

## 2.6. Dinámica Hamiltoniana

La **energía** es usualmente usada como una cantidad conservada en física. En un sistema cerrado la energía es constante conforme el sistema físico evoluciona en el tiempo. Para cualquier sistema físico, cada cantidad conservada conocida proporciona una ecuación que puede ser muy útil en el análisis del sistema. Pero la energía es más que una cantidad conservada: ésta, como función diferenciable con valores reales, determina un campo vectorial que define la dinámica del sistema.

Esta función de energía la llamamos la **función Hamiltoniana**  $H$  y el correspondiente campo vectorial sobre el espacio fase lo llamamos un **campo vectorial Hamiltoniano** y lo denotamos como  $X_H$ . El campo vectorial corresponde a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden sobre el espacio fase. La solución de estas ecuaciones diferenciales es el **flujo Hamiltoniano**. Físicamente el flujo Hamiltoniano representa los posibles movimientos físicos. La referencia principal de esta sección viene dada por Puta [16].

**Definición 2.58.** Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica y  $H \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  una función de valor real suave definida sobre  $M$ . El campo vectorial  $X_H$  determinado por la condición

$$i_{X_H}\omega = -dH$$

es llamado un campo vectorial Hamiltoniano con función de energía  $H$ .

La expresión  $i_{X_H}\omega$  denota la 1-forma diferencial obtenida al insertar el campo vectorial  $X_H$  dentro de la primera entrada de la 2-forma  $\omega$ . Éste es algunas veces llamado el producto interior de  $X_H$  y  $\omega$ . La terna  $(M, \omega, H)$  se denomina un sistema mecánico Hamiltoniano.

**Proposición 2.59.** Sean  $\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\}$  coordenadas canónicas sobre  $M$ , entonces en estas coordenadas

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \quad (2.16)$$

**Prueba.** Sea  $X_H$  definido por la fórmula anterior. Por demostrar que  $i_{X_H}\omega + dH = 0$ . Por construcción tenemos

$$\begin{aligned} i_{X_H}dq^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ i_{X_H}dp_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} i_{X_H}\omega &= \sum_{i=1}^n i_{X_H}(dp_i \wedge dq^i) = \sum_{i=1}^n (i_{X_H}dp_i)dq^i - \sum_{i=1}^n (i_{X_H}dq^i)dp_i \\ &= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q^i}dq^i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i = -dH \end{aligned}$$

■

**Proposición 2.60.** (Ecuaciones de Hamilton) La curva  $(q(t), p(t))$  es una curva integral de  $X_H$  si y sólo si las ecuaciones de Hamilton se siguen, es decir:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (2.17)$$

con  $i = 1, \dots, n$ .

**Proposición 2.61.** (Conservación de la energía) Sea  $(M, \omega, H)$  un sistema mecánico Hamiltoniano y sea  $c(t)$  una curva integral para  $X_H$ . Entonces  $H(c(t))$  es constante en  $t$ . Más aún, si  $\phi_t$  es el flujo de  $X_H$ , entonces  $H \circ \phi_t = H$  para toda  $t$ .

**Prueba.**

$$\begin{aligned} \frac{d(H(c(t)))}{dt} &= dH(c(t)) \dot{c}(t) = dH(c(t))X_H(c(t)) \\ &= -\omega(X_H(c(t)), X_H(c(t))) = 0 \end{aligned}$$

Sea  $c(t)$  una curva integral de  $X_H$  con condición inicial  $x$ , es decir,

$$\frac{d(c(t))}{dt} = X_H(c(t)), \quad c(0) = x$$

Entonces tenemos  $H \circ \phi_t(x) = H(c(t)) = H(c(0)) = H(x)$ . ■

## Paréntesis de Poisson

El paréntesis de Poisson nos da la posibilidad de escribir las ecuaciones de Hamilton en una forma equivalente y nos lleva a sistemas mecánicos más generales.

Una **estructura de Poisson** sobre una variedad  $M$  es una transformación bilineal

$$\{, \} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

tal que el paréntesis es antisimétrico:

$$\{f, g\} = -\{g, f\},$$

obedece la identidad de Jacobi:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0,$$

y es una derivación de  $C^\infty(M)$  en su primer argumento:

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\},$$

para toda  $f, g, h \in C^\infty(M)$ .

Una **variedad de Poisson** es una variedad diferenciable  $M$  tal que el álgebra de funciones suaves sobre ésta, es equipada con una transformación bilineal llamada el paréntesis de Poisson, transformando a ésta en un álgebra o estructura de Poisson. Toda variedad simpléctica es una variedad de Poisson pero no a la inversa.

**Definición 2.62.** Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica y  $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ . El paréntesis de Poisson de  $f$  y  $g$  es la función  $\{f, g\}_\omega$  dada por

$$\{f, g\}_\omega = \omega(X_f, X_g). \quad (2.18)$$

Donde  $X_f, X_g$  son los campos vectoriales hamiltonianos correspondientemente a las funciones hamiltonianas  $f, g$ .

**Proposición 2.63.** Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica. En coordenadas canónicas  $\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\}$  se tiene

$$\{f, g\}_\omega = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right)$$

**Prueba.** Ver Puta [16, secc. 2.2]. ■

**Definición 2.64.** Sea  $(M, \omega, H)$  un sistema mecánico hamiltoniano. Una función suave  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  se dice una constante del movimiento o una **primera integral** si ésta satisface la condición  $\{f, H\}_\omega = 0$ .

**Definición 2.65.** Un sistema hamiltoniano  $(M, \omega, H)$  es completamente integrable si y sólo si éste posee  $n = (\dim M)/2$  integrales de movimiento independientes,  $f_1 = H, f_2, \dots, f_n$  y  $\{f_i, f_j\} = 0$  para toda  $i, j = 1, \dots, n$ .

**Definición 2.66.** Sea  $(P, \{, \})$  una variedad de Poisson y  $C \in C^\infty(P, \mathbb{R})$  una función suave no constante tal que  $\{C, f\} = 0$  para cada  $f \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ . Entonces  $C$  es llamada una función **Casimir**.

# Bibliografía

- [1] Abraham, R. y Marsden, J.E. *Foundations of Mechanics*. The Benjamin Cummings Publishing Company, 1985.
- [2] Arms, J.M., Marsden, J.E. y Moncrief, V. Symmetry and Bifurcations of Momentum Mappings. *Commun. Math. Phys.* 78, 455–478, 1981.
- [3] Barden, D. y Thomas, C. *An Introduction to Differential Manifolds*. Imperial College Press, 2003.
- [4] Brickell, F. y Clark, R.S. *Differentiable Manifolds. An introduction*. Van Nostrand Reinhold Company, Londres VNR, 1970.
- [5] Bulajich, R. y Lopez de Medrano, S. *Teoría de Singularidades. Una introducción elemental*. Aportaciones Matemáticas. SMM, 1995.
- [6] Chruściński, D. y Jamiolkowski, A. *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*. Birkhäuser, 2004.
- [7] Cushman, R.H. y Bates, L.M. *Global Aspects of Classical Integrable Systems*. Birkhäuser, 1997.
- [8] Do Carmo, M. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [9] Duistermaat, J.J. y Kolk, J.A.C. *Lie Groups*. Springer, 1999.
- [10] Fowles, G. R. *Analytical Mechanics*. Saunders golden sunburts series, 1986.
- [11] Friedberg, S.H. *Linear Algebra*. Prentice Hall, 1989.

- [12] Gidea, M. y Burns, K. *Differential Geometry and Topology*. Chapman & Hall, 2005.
- [13] Marsden, J.E. *Elementary Classical Analysis*. W. H. Freeman and Company.
- [14] Marsden, J.E. y Ratiu, T.S. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer, 1999.
- [15] Munkres, J.R. *Topology*. Prentice Hall, 2000.
- [16] Puta, M. *Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization*. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [17] Talpaert, Y. *Differential Geometry with Applications to Mechanics and Physics*. Marcel Dekker Inc., 2000.
- [18] Uspensky, J.V. *Theory of Equations*. McGraw-Hill, 1958.
- [19] Weyl, H. *The classical groups*. Princeton University Press, 1946.

# Capítulo 3

## Dinámica y simetría del péndulo esférico

En esta sección siguiendo a Cushman y Bates [7] trataremos el péndulo esférico como un sistema hamiltoniano constreñido, se derivarán las ecuaciones de Hamilton y se mostrará que hay un eje de simetría el cual da lugar a un momento angular conservado.

### 3.1. El pendulo esférico

En esta sección obtendremos las ecuaciones de Hamilton para el péndulo esférico directamente en coordenadas esféricas. Este procedimiento es muy usual en la literatura. Una vez obtenido estas ecuaciones se puede ver que hay una coordenada cíclica, es decir, la función lagrangiana y la función hamiltoniana no dependen explícitamente de esta coordenada.

En física, la cinemática es la rama de la mecánica clásica que se interesa en el movimiento de los objetos sin importar las causas que lo producen. La base principal de la cinemática es la elección de un sistema coordenado que describa la posición y orientación del objeto. La cinemática permite estudiar estos objetos desde diferentes sistemas coordenados mediante la transformación de estas coordenadas. La elección más útil de un sistema coordenado puede estar determinado por las constricciones del movimiento, como lo será en este caso, o por la naturaleza geométrica de las fuerzas que ocasionan el movimiento del objeto. En mecánica clásica un sistema se puede definir como holonomico si todas las constricciones del sistema son holonomicas. Para que

### CAPÍTULO 3. DINÁMICA Y SIMETRÍA DEL PÉNDULO ESFÉRICO 30

una restricción sea holonómica debe poder ser expresada como una función:  $f(x_1, \dots, x_n, t) = 0$ .

En cambio la dinámica, es la rama de la mecánica clásica que se interesa en las fuerzas o interacciones que afectan el movimiento de los objetos. Una de las tareas fundamentales de la dinámica es predecir todas las formas posibles en la que un sistema mecánico puede moverse, dada una situación o condición inicial se tiene un movimiento particular. El estudio de esta dinámica puede estar basada en las leyes de Newton o en formulaciones más elegantes y útiles como son las ecuaciones de Euler-Lagrange y las ecuaciones de Hamilton. Estas últimas son las que mostraremos en esta sección.

El péndulo esférico es un sistema mecánico donde una masa  $m$  es atada a una cuerda inextensible, la cual es libre de moverse en cualquier dirección alrededor de un punto fijo.

#### Leyes de Newton

Las leyes de movimiento de Newton son las siguientes:

1. Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento uniforme en una línea recta, a menos que este sea obligado por una fuerza a cambiar este estado.
2. El cambio en el movimiento es proporcional a la fuerza aplicada y el movimiento es en la dirección de la fuerza. Matemáticamente esta ley se expresa como  $m \frac{dv}{dt} = F(t, x, v)$ , donde  $m$  es la masa del objeto.
3. A toda acción hay una reacción de igual magnitud y en dirección opuesta.

Si la fuerza  $F$  es derivable del gradiente de una función escalar, es decir,  $F = -\nabla U(x)$  y si la función potencial no depende explícitamente del tiempo, entonces se tiene una constante de movimiento importante llamada la energía  $E$ , donde  $E = (1/2)mv^2 + U$ . El primer término de la energía es llamada la energía cinética y la segunda es llamada la energía potencial.

#### Ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de movimiento para un sistema de  $N$  partículas por la segunda ley de Newton vienen dadas por  $F_i = m_i \ddot{x}_i$  con  $i = 1, \dots, N$ . La

CAPÍTULO 3. DINÁMICA Y SIMETRÍA DEL PÉNDULO ESFÉRICO 31

energía cinética para este sistema de partículas viene expresada como  $T = \sum_{i=1}^{3N} (1/2)m_i \dot{x}_i^2$ . En particular nosotros deseamos hacer una transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas generalizadas. Supongamos que las coordenadas cartesianas  $x_i$  son funciones de las coordenadas generalizadas  $q_k$ . Esta relación es escrita como

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_k, t),$$

entonces

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t},$$

donde  $k = 1, \dots, n$  y  $n$  siendo el número de coordenadas generalizadas del sistema. Para cada  $\dot{x}_i$  se tiene

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}.$$

Ahora multiplicamos la ecuación anterior por  $\dot{x}_i$  y derivamos con respecto a  $t$  se tiene

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$$

o

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{\dot{x}_i^2}{2} \right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{\dot{x}_i^2}{2} \right).$$

Si ahora multiplicamos la ecuación anterior por cada una de las masas  $m_i$  del sistema de partículas y recordamos que  $m_i \ddot{x}_i = F_i$  se tiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} \right) = F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} \right).$$

Entonces sumando sobre  $i$  obtenemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_i \left( F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_k}.$$

Si definimos

$$Q_k = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

como la fuerza generalizada se tiene entonces las ecuaciones siguientes:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k}.$$

Estas son ecuaciones de movimiento en coordenadas generalizadas. Estas ecuaciones son conocidas como las **ecuaciones de movimiento de Lagrange**. En el caso de que el movimiento sea conservativo tal que  $Q_k = -(\partial U/\partial q_k)$ , entonces las ecuaciones de Lagrange pueden ser expresadas como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k}.$$

Si definimos la función  $\mathcal{L}$  llamada la **función lagrangiana** tal que  $\mathcal{L} = T - U$ , las ecuaciones anteriores se reescriben como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0,$$

donde hemos asumido que  $U = U(q_k)$  y  $(\partial U/\partial \dot{q}_k) = 0$ .

## Ecuaciones de Hamilton

Definimos los momentos generalizados  $p_i$  como

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}.$$

Consideremos la siguiente función de las coordenadas generalizadas:

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - \mathcal{L}.$$

Supongamos que la función lagrangiana tiene la siguiente forma  $\mathcal{L} = T(q_k, \dot{q}_k) - U(q_k)$ . Ahora, por el teorema de Euler para funciones homogéneas [10] obtenemos

$$\sum_k \dot{q}_k p_k = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T.$$

Por lo tanto

$$H = 2T - (T - U) = T + U.$$

Esto es, la función  $H$  es igual a la energía total para el tipo de sistemas que estamos considerando.

Supongamos que nosotros consideramos las  $n$  ecuaciones  $p_k = (\partial \mathcal{L}/\partial \dot{q}_k)$  como soluciones de las  $\dot{q}_k$  en términos de las  $p_k$  y las  $q_k$ , es decir  $\dot{q}_k = \dot{q}_k(p_k, q_k)$ . Con estas ecuaciones podemos expresar la función  $H$  como

$$H(p_k, q_k) = \sum_k p_k \dot{q}_k(p_k, q_k) - \mathcal{L}.$$

### CAPÍTULO 3. DINÁMICA Y SIMETRÍA DEL PÉNDULO ESFÉRICO 33

Calculando la variación de la función  $H$  correspondiente a las variaciones  $\delta p_k, \delta q_k$  se tiene

$$\begin{aligned}\delta H &= \sum_k \left( p_k \delta \dot{q}_k + \dot{q}_k \delta p_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \delta q_k \right) \\ &= \sum_k \left( \dot{q}_k \delta p_k - \dot{p}_k \delta q_k \right).\end{aligned}$$

Por otro lado, la variación de  $H$  debe ser dada por la ecuación

$$\delta H = \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k \right)$$

Por lo tanto, de las últimas dos ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_k} &= \dot{q}_k \\ \frac{\partial H}{\partial q_k} &= -\dot{p}_k.\end{aligned}$$

Estas ecuaciones de movimiento son llamadas las **ecuaciones de Hamilton**.

La función lagrangiana para una partícula sujeta al campo gravitacional viene dada por:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

Las coordenadas generalizadas son un conjunto de cantidades (no necesariamente miden longitudes) que especifican completamente el estado del sistema. En el caso del péndulo esférico las coordenadas generalizadas vienen dadas por  $(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ , donde  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , y  $r = l$  es una restricción holonomica para nuestro sistema mecánico. Cualquier punto de nuestro sistema en términos de las coordenadas y velocidades generalizadas viene dada por

$$\begin{aligned}x &= l \cos \varphi \sin \theta \\ y &= l \sin \varphi \sin \theta \\ z &= l \cos \theta\end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. DINÁMICA Y SIMETRÍA DEL PÉNDULO ESFÉRICO 34

y

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -l \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \dot{\varphi} + l \cos \varphi \cos \theta \dot{\theta} \\ \dot{y} &= l \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \dot{\varphi} + l \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \dot{\theta} \\ \dot{z} &= -l \operatorname{sen} \theta \dot{\theta}. \end{aligned}$$

Entonces la función lagrangiana del péndulo esférico viene dada por

$$\mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \left( l^2 (\operatorname{sen} \theta)^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \right) - mgl \cos \theta.$$

En principio, conociendo la función lagrangiana del péndulo esférico podemos calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange y con ello determinar la dinámica de dicho sistema. Pero nuestro objetivo es mostrar las ecuaciones de Hamilton en estas coordenadas. Por lo tanto necesitamos antes determinar los momentos generalizados  $p_\theta, p_\varphi$  como a continuación lo hacemos.

$$\begin{aligned} p_\theta &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} \\ p_\varphi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 (\operatorname{sen} \theta)^2 \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

La función hamiltoniana  $H$  viene dada por

$$H(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) = \left[ p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} \right] - \mathcal{L}(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi).$$

Despejando  $\dot{\theta}, \dot{\varphi}$  de  $p_\theta, p_\varphi$  respectivamente, se tiene la función hamiltoniana del péndulo esférico dada por:

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_\theta^2}{ml^2} + \frac{p_\varphi^2}{ml^2 (\operatorname{sen} \theta)^2} - \frac{ml^2 (\operatorname{sen} \theta)^2 p_\varphi^2}{2m^2 l^4 (\operatorname{sen} \theta)^4} - \frac{ml^2 \dot{\theta}^2 p_\theta^2}{2m^2 l^4} + mgl \cos \theta \\ &= \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\varphi^2}{2ml^2 (\operatorname{sen} \theta)^2} + mgl \cos \theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Hamilton vienen dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2 (\operatorname{sen} \theta)^2} \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\varphi^2 \cos \theta}{ml^2 (\operatorname{sen} \theta)^3} + mgl \operatorname{sen} \theta \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned}$$

La ecuación  $\dot{p}_\varphi = 0$  muestra que  $p_\varphi$  es una constante, esta constante más adelante la denotaremos como  $j$ . Se puede observar también que tanto la función lagrangiana como la función hamiltoniana no dependen de la coordenada generalizada  $\varphi$ , por lo tanto se tiene que  $\varphi$  es una coordenada cíclica, tal como se indicó al inicio de la sección. Esta coordenada cíclica aparece cuando se tiene una simetría en el sistema, esto es, la función lagrangiana y la función hamiltoniana para el sistema es invariante bajo alguna transformación tal como una rotación. Como se verá y se probará más adelante, la transformación viene dada por la acción del grupo  $S^1$  sobre el haz tangente  $TS^2$ .

De aquí en adelante, el péndulo esférico es analizado con toda nuestra herramienta matemática definida en el capítulo de introducción. Aunque podemos hacer este estudio en coordenadas esféricas o en cualesquiera otras coordenadas generalizadas, nosotros utilizaremos las coordenadas generalizadas  $(x, y) \in T^*\mathbb{R}^3$ .

### 3.2. Ecuaciones de Hamilton sobre la subvariedad $TS^2$

Sea  $\langle, \rangle$  el producto interior Euclidiano y  $\times$  el producto vectorial usual sobre  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $\xi := (q_i, \dot{p}_i) = (x_i, y_i) := (x, y)$ , con  $i = 1, 2, 3$ , coordenadas canónicas sobre  $T^*\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3)^* \simeq \mathbb{R}^6$ . La 2-forma simpléctica canónica en  $T^*\mathbb{R}^3$  viene dada por  $w = \sum_{i=1}^3 (dx_i \wedge dy_i)$ . Dada la variedad simpléctica  $(T^*\mathbb{R}^3, \omega)$  y  $f, g \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^3)$  podemos definir un paréntesis de Poisson  $\{, \}_{T^*\mathbb{R}^3}$  sobre  $C^\infty(T^*\mathbb{R}^3)$  de la siguiente forma:

$$\{f, g\}_{T^*\mathbb{R}^3} = \omega(X_f, X_g) = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \{\xi_i, \xi_j\}_{T^*\mathbb{R}^3}, \quad (3.1)$$

donde se tienen paréntesis de Poisson respecto a las coordenadas canónicas:

$$\{x^i, x_j\} = 0; \quad \{y^i, y_j\} = 0; \quad \{x^i, y_j\} = \delta_j^i.$$

Por lo tanto, la matriz  $(\{\xi_i, \xi_j\}_{T^*\mathbb{R}^3})$  viene dada por:

$$(\{\xi_i, \xi_j\}_{T^*\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

En términos del paréntesis de Poisson, las ecuaciones del campo vectorial hamiltoniano  $X_H$  se reescriben como:

$$\dot{x} = \{x, H\}_{T\mathbb{R}^3}, \quad \dot{y} = \{y, H\}_{T\mathbb{R}^3}.$$

Antes de analizar el espacio fase constreñido, que representa el péndulo esférico, analizaremos el siguiente sistema hamiltoniano  $(H, T\mathbb{R}^3, \omega)$ , donde la función hamiltoniana  $H$  es igual a

$$H : T^*\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{m}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + m g x_3 = \frac{m}{2}\langle y, y \rangle + m g \langle x, e_3 \rangle,$$

donde  $e_i$  con  $i = 1, \dots, 6$  es la base usual de  $\mathbb{R}^6 \cong T^*\mathbb{R}^3$ . Eligiendo unidades apropiadas de masa y longitud, podemos asumir que el hamiltoniano toma la forma

$$H : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}\langle y, y \rangle + \langle x, e_3 \rangle, \quad (3.3)$$

donde la transformada de Legendre nos permite identificar el haz cotangente  $T^*\mathbb{R}^3$  con coordenadas y momentos generalizados  $(q_i, \dot{p}_i)$ , con el haz tangente  $T\mathbb{R}^3$  con coordenadas y velocidades generalizadas  $(q_i, \dot{q}_i)$ .

Como se pudo observar en la sección pasada, la función hamiltoniana es la suma de la energía cinética más la energía potencial, entonces podemos ver que  $\frac{1}{2}\langle y, y \rangle$  representa la energía cinética de la partícula y  $\langle x, e_3 \rangle$  la energía potencial. Tenemos por lo tanto una partícula con posición  $(x_1, x_2, x_3)$  y con vector de velocidad  $(y_1, y_2, y_3)$ .

Utilizando el paréntesis de Poisson definido en (3.1) así como la proposición 2.63 se tiene que las ecuaciones de Hamilton para este sistema son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial x_1}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{\partial x_1}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = y_1, & \dot{y}_1 &= \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{\partial y_1}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = 0 \\ \dot{x}_2 &= y_2, & \dot{y}_2 &= 0 \\ \dot{x}_3 &= y_3, & \dot{y}_3 &= -1. \end{aligned}$$

La solución a las ecuaciones de Hamilton es:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_1 t + a_2, & y_1(t) &= a_1 \\ x_2(t) &= b_1 t + b_2, & y_2(t) &= b_1 \\ x_3(t) &= -\frac{t^2}{2} + c_1, & y_3(t) &= -t, \end{aligned}$$

siendo  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1$  constantes. **Las curvas integrales de  $X_H$  dan el movimiento de una partícula en  $\mathbb{R}^3$  bajo una fuerza gravitacional vertical constante.**

Ahora constreñimos el movimiento de la partícula a la esfera  $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ . Usando la proposición 2.14 y las siguientes definiciones construiremos la variedad simpléctica  $TS^2$ .

**Definición 3.1.** Sean  $\{c_i\}_{i=1}^k$  funciones suaves sobre una variedad simpléctica  $(M, \omega)$  y supóngase que  $a \in \mathbb{R}^k$  es un valor regular de la función:

$$\mathcal{C} : M \rightarrow \mathbb{R}^k : p \mapsto (c_1(p), \dots, c_k(p)), \quad (3.4)$$

entonces por la proposición 2.14 se tiene que  $N = \mathcal{C}^{-1}(a)$  es una subvariedad suave de  $M$ , llamada la variedad constreñida definida por las funciones de constricción  $\{c_i\}_{i=1}^k$ .

**Definición 3.2.** Si la matriz formada por los paréntesis de Poisson de las funciones de constricción  $(\{c_i, c_j\}(p))$  es invertible para toda  $p \in N$ , entonces decimos que  $N$  es una subvariedad cosimpléctica de  $M$ .

Sea  $T_0\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3 - \{0\}) \times \mathbb{R}^3 = (x, y)$ , con  $x \neq 0$  y sean  $c_1$  y  $c_2$  las funciones de constricción dadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} c_1 : T_0\mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle x, x \rangle - 1 \\ c_2 : T_0\mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Entonces si consideramos la siguiente función

$$\mathcal{C} : T_0\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (c_1(x, y), c_2(x, y)), \quad (3.6)$$

por la definición 3.1 tenemos que  $TS^2 = \mathcal{C}^{-1}(0)$  es una subvariedad suave de  $T_0\mathbb{R}^3$ , cuya dimensión es 4 de acuerdo a la proposición 2.14.

**Observación.** Algunas veces hablaremos de  $TS^2$  como una variedad simpléctica o como una variedad cosimpléctica; como variedad simpléctica  $TS^2$  es de dimensión 4 dado que  $S^2$  es una variedad de dimensión 2 y por la proposición 3, el haz tangente  $TS^2$  es una variedad de dimensión 4, como variedad cosimpléctica,  $TS^2$  es una variedad de codimensión 2 con respecto a  $T\mathbb{R}^3$ .

Dada las funciones de constricción  $c_1$  y  $c_2$  en (3.5) éstas satisfacen los siguientes paréntesis de Poisson:

$$\begin{aligned} \{c_1, c_1\} &= 0 = \{c_2, c_2\} \\ \{c_1, c_2\} &= \sum_{i,j} \frac{\partial c_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial c_2}{\partial \xi_j} \{\xi_i, \xi_j\}_{T\mathbb{R}^3} \\ &= \frac{\partial c_1}{\partial x_1} \frac{\partial c_2}{\partial y_1} - \frac{\partial c_1}{\partial y_1} \frac{\partial c_2}{\partial x_1} \\ &\quad + \frac{\partial c_1}{\partial x_2} \frac{\partial c_2}{\partial y_2} - \frac{\partial c_1}{\partial y_2} \frac{\partial c_2}{\partial x_2} \\ &\quad + \frac{\partial c_1}{\partial x_3} \frac{\partial c_2}{\partial y_3} - \frac{\partial c_1}{\partial y_3} \frac{\partial c_2}{\partial x_3} \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 = 2\langle x, x \rangle = -\{c_2, c_1\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz formada por los paréntesis de Poisson de las funciones de constricción es:

$$\left( \{c_i, c_j\} \right)_{T_0\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 & 2\langle x, x \rangle \\ -2\langle x, x \rangle & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que  $x \neq 0$ , el determinante de  $(\{c_i, c_j\})_{T_0\mathbb{R}^3}$  es distinto de cero y por lo tanto esta matriz es invertible para toda  $(x, y) \in T_0\mathbb{R}^3$  y su inversa es:

$$(C)_{T_0\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2\langle x, x \rangle} \\ \frac{1}{2\langle x, x \rangle} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto de la definición 3.2 se tiene que  $TS^2$  es una variedad cosimpléctica de  $T_0\mathbb{R}^3$ . Definida nuestra variedad cosimpléctica lo siguiente es determinar una forma simpléctica para ésta y para ello hacemos uso de la siguiente:

**Proposición 3.3.** Si  $N$  es una subvariedad cosimpléctica de una variedad simpléctica  $(M, \omega)$ , entonces  $\omega|_N$  es una forma simpléctica sobre  $N$ .

**Prueba.** (Siguiendo a Cushman y Bates [7]) Para toda  $p \in N$  sea  $V_p$  el espacio generado por los vectores linealmente independientes  $\{X_{c_1}(p), \dots, X_{c_k}(p)\}$ , donde las  $\{c_i\}_{i=1}^k$  son funciones suaves definidas de la variedad simpléctica  $(M, \omega)$  a  $\mathbb{R}$  y a las cuales llamamos funciones de constricción. Además cada  $\{X_{c_i}(p)\}$  satisface  $\omega(X_{c_i}(p), v) = dc_i(p) \cdot v$  para toda  $v \in T_p N$ . Sea  $\gamma(t)$  una curva regular sobre la variedad simpléctica con  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) = v$ , entonces para toda  $v \in T_p N$  se tiene

$$dc_i(p) \cdot v = \left. \frac{d}{dt}(c_i \circ \gamma(t)) \right|_{t=0} = \frac{d}{dt}(a_i) = 0$$

donde  $a_i = cte$  y  $1 \leq i \leq k$ . Por lo tanto  $\omega(p)(X_{c_i}(p), v) = 0$  para toda  $v \in T_p N$ , y por la definición 2.34 de complemento ortogonal simpléctico tenemos que  $X_{c_i}(p) \in (T_p N)^\omega$ . Como que  $X_{c_i}$  es arbitrario se tiene  $V_p \subseteq (T_p N)^\omega$  y por las propiedades de la proposición 2.35 tenemos  $((T_p N)^\omega)^\omega = T_p N \subseteq V_p^\omega$ . Dado que la matriz  $(\{c_i, c_j\}(p)) = \omega(p)(X_{c_i}(p), X_{c_j}(p))$  es invertible,  $V_p$  es un subespacio simpléctico de  $(T_p M, \omega(p))$  de dimension  $k$ , el cual debe ser par. Por la proposición 2.7 sabemos que  $T_p M$  es un espacio vectorial de dimensión  $m$  y dado que  $X_{c_i}$  es un espacio vectorial de dimensión  $k$  entonces

$$\begin{aligned} \dim T_p N &= \dim T_p M - \dim \mathcal{L}\{dc_1(p), \dots, dc_k(p)\} \\ &= \dim T_p M - k \\ &= \dim T_p M - \dim V_p \\ &= \dim V_p^\omega \end{aligned}$$

Por lo tanto  $T_p N = V_p^\omega$ . Luego  $T_p N$  es un subespacio simpléctico de  $(T_p M, \omega(p))$ , esto es,  $\omega|_N$  es no degenerada. Puesto que  $d(\omega|_N) = (d\omega)|_N = 0$ , entonces  $\omega|_N$  es una forma simpléctica sobre  $N$  ■

Por la proposición anterior se tiene que  $\omega|_{TS^2}$  es una forma simpléctica sobre la variedad  $TS^2$ . Por lo tanto tiene sentido definir:

**Definición 3.4.** *El péndulo esférico es el sistema constreñido*

$$(TS^2, \omega|_{TS^2}, H|_{TS^2}).$$

Por la sección anterior, nosotros podemos calcular el campo vectorial  $X_{HTS^2}$  conociendo la forma simpléctica lo cual es relativamente fácil. Sin embargo usaremos el método que se describe a continuación.

Volviendo al caso de un sistema hamiltoniano constreñido general, y usando la notación de la definición 3.1, considere la matriz  $\{C^{ij}\}$  formada por los paréntesis de Poisson de las funciones de constricción. Supongamos que las funciones de constricción son tales que la matriz  $\{C^{ij}\}$  es invertible en  $N$  (y por lo tanto en una vecindad de  $N$ ). Sea  $C_{ij}$  dicha matriz inversa. Sea  $F$  una función suave sobre  $M$  y  $F|_N$  su restricción a  $N$ . Entonces se tiene la siguiente:

**Proposición 3.5.** *Sea  $X_{F|N}$  el campo vectorial hamiltoniano definido por*

$$\omega_N(X_{F|N}(z), v) = d_z(F|_N) \cdot v$$

para toda  $v \in T_zN$  y donde  $\omega_N$  es  $\omega$  restringida a vectores tangentes a  $N$ . Entonces para toda  $z \in N$ ,

$$X_{F|N}(z) = X_F(z) - \sum_{i,j=1}^k \{F, c^i\} C_{ij}(z) X_{c^j}(z). \quad (3.7)$$

**Prueba.** Ver Marsden [14, prop. 8.5.1]. ■

La prueba de esta proposición se basa en darse cuenta que a) el miembro derecho de (3.7) es tangente a  $N$  y b) para todo  $v \in T_zN$  se tiene que  $d_z F \cdot v = d_z F^* \cdot v$ , donde  $F^* = F - \sum \{F, c^i\} C_{ij} c^j$ .

Ahora haciendo uso de la proposición 3.5 calcularemos a continuación el campo vectorial  $X_{H|TS^2}$ . Dada la función  $H$  como en (3.3) y las funciones de constricción  $c_1(x, y)$  y  $c_2(x, y)$  como en (3.5), calculamos cada uno de los

CAPÍTULO 3. DINÁMICA Y SIMETRÍA DEL PÉNDULO ESFÉRICO 41

términos de (3.7) obteniendo:

$$\begin{aligned}
 X_H(x, y) &= (y_1, y_2, y_3, 0, 0, -1) = (y, -e_3); \\
 \{H, c_1\}(x, y) &= \sum_{i,j} \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \frac{\partial c_1}{\partial \xi_j} \{\xi_i, \xi_j\}_{T\mathbb{R}^3} \\
 &= \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial c_1}{\partial y_1} - \frac{\partial H}{\partial y_1} \frac{\partial c_1}{\partial x_1} \\
 &\quad + \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial c_1}{\partial y_2} - \frac{\partial H}{\partial y_2} \frac{\partial c_1}{\partial x_2} \\
 &\quad + \frac{\partial H}{\partial x_3} \frac{\partial c_1}{\partial y_3} - \frac{\partial H}{\partial y_3} \frac{\partial c_1}{\partial x_3} \\
 &= -y_1 2x_1 - y_2 2x_2 - y_3 2x_3 = -2\langle x, y \rangle; \\
 \{H, c_2\}(x, y) &= -\langle y, y \rangle + \langle x, e_3 \rangle; \\
 X_{c_1}(x, y) &= (0, 0, 0, -2x_1, -2x_2, -2x_3) = (0, -2x); \\
 X_{c_2}(x, y) &= (x_1, x_2, x_3, -y_1, -y_2, -y_3) = (x, -y).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Entonces para toda  $(x, y) \in TS^2$  se tiene

$$\begin{aligned}
 X_{H|TS^2}(x, y) &= X_H - \left[ \{H, c_1\} C_{12} X_{c_2} + \{H, c_2\} C_{21} X_{c_1} \right] \\
 &= (y, -e_3) - \left[ -2\langle x, y \rangle \left( -\frac{1}{2\langle x, x \rangle} \right) (x, -y) \right] + \\
 &\quad - \left[ (\langle x, e_3 \rangle - \langle y, y \rangle) \left( \frac{1}{2\langle x, x \rangle} \right) (0, -2x) \right] \\
 &= (y, -e_3) + \left[ -\frac{x\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle}, \frac{y\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \right] + \\
 &\quad - \left[ \frac{0}{2\langle x, x \rangle}, \frac{(\langle x, e_3 \rangle - \langle y, y \rangle)(-2x)}{2\langle x, x \rangle} \right] \\
 &= (y, -e_3) + (0, (\langle x, e_3 \rangle - \langle y, y \rangle)x).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el **campo vectorial hamiltoniano**  $X_{H|TS^2}(x, y)$  para toda  $(x, y) \in TS^2$  viene dado por

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= y \\
 \dot{y} &= -e_3 + (\langle x, e_3 \rangle - \langle y, y \rangle)x.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

### 3.3. La función de momento $J$

Sea  $G = \text{SO}(2)$  el grupo de rotaciones, donde

$$\text{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\text{sen } t \\ \text{sen } t & \cos t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Se puede demostrar siguiendo la definición 2.40 que  $\text{SO}(2)$  es un grupo matricial de Lie. Es claro que podemos identificar  $\text{SO}(2)$  con el círculo unitario en el plano,  $S^1$ .

Para cada  $t \in [0, 2\pi]$  sea  $\phi$  la acción izquierda del grupo  $\text{SO}(2)$  (ver definición 2.45) sobre  $\mathbb{R}^3$  de la siguiente forma

$$\phi(t, x) = (x_1 \cos t - x_2 \text{sen } t, x_1 \text{sen } t + x_2 \cos t, x_3).$$

Utilizando la observación asociada a la definición 2.43 se tiene que el álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(2)$  del grupo  $\text{SO}(2)$  viene dada por

$$\mathfrak{so}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}.$$

En efecto, sea  $c_t$  la curva dada por

$$c_t : \theta \rightarrow c_t(\theta) = \begin{pmatrix} \cos t\theta & -\text{sen } t\theta \\ \text{sen } t\theta & \cos t\theta \end{pmatrix}.$$

Esta curva pasa por el elemento identidad cuando  $\theta = 0$  y

$$\left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} c_t(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix},$$

como esperábamos.

Por la definición 2.44 se tiene que la función exponencial  $\exp : \mathfrak{so}(2) \rightarrow \text{SO}(2)$  viene dada por

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = c_t(1) = \begin{pmatrix} \cos t & -\text{sen } t \\ \text{sen } t & \cos t \end{pmatrix}.$$

La función exponencial será de utilidad cuando calculemos el generador infinitesimal de la acción.

CAPÍTULO 3. DINÁMICA Y SIMETRÍA DEL PÉNDULO ESFÉRICO 43

Por la definición 2.53 la acción izquierda  $\phi$  del grupo  $S^1$  induce un levantamiento de esta acción a  $T\mathbb{R}^3$  dada por

$$\Phi : S^1 \times T\mathbb{R}^3 \rightarrow T\mathbb{R}^3 : (t, (x, y)) \mapsto (R_t x, R_t y) \quad (3.10)$$

donde

$$R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \\ \operatorname{sen} t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es claro que  $R_t$  restringida a  $\mathbb{R}^2$  es justamente  $\operatorname{SO}(2)$ .

Dada la acción (3.10), por la ecuación (2.14) se tiene que el generador infinitesimal de la acción  $\Phi$  es aquel campo vectorial  $\mathbf{Y}$  cuyas curvas integrales satisfacen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x \times e_3 \\ \frac{dy}{dt} &= -y \times e_3. \end{aligned} \quad (3.11)$$

En efecto, dado un punto en  $T\mathbb{R}^3$ , la acción del grupo nos lleva a otro punto de  $T\mathbb{R}^3$  dada por

$$\begin{aligned} \Phi(t, (x, y)) &= \left( x_1 \cos t - x_2 \operatorname{sen} t, x_1 \operatorname{sen} t + x_2 \cos t, x_3, \right. \\ &\quad \left. , y_1 \cos t - y_2 \operatorname{sen} t, y_1 \operatorname{sen} t + y_2 \cos t, y_3 \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para toda  $\xi \in \mathfrak{so}(2)$  que es isomorfo a  $\mathbb{R}$  se tiene

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &:= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(t\xi, (x, y)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp \begin{pmatrix} 0 & -t\xi \\ t\xi & 0 \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \begin{pmatrix} \cos t\xi & -\operatorname{sen} t\xi \\ \operatorname{sen} t\xi & \cos t\xi \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [x_1 \cos t\xi - x_2 \operatorname{sen} t\xi, x_1 \operatorname{sen} t\xi + x_2 \cos t\xi, x_3 \\ &\quad , y_1 \cos t\xi - y_2 \operatorname{sen} t\xi, y_1 \operatorname{sen} t\xi + y_2 \cos t\xi, y_3] \\ &= [-x_2\xi, x_1\xi, 0, -y_2\xi, y_1\xi, 0]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

CAPÍTULO 3. DINÁMICA Y SIMETRÍA DEL PÉNDULO ESFÉRICO 44

Por otro lado, es fácil ver que si desarrollamos las ecuaciones de (3.11) obtenemos el campo vectorial (3.13).

Por la definición 2.54, el mapeo de momento  $J : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de la acción  $\Phi$  del grupo  $S^1$  sobre  $T\mathbb{R}^3$  viene dado por

$$J : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x_1y_2 - x_2y_1 = \langle x \times y, e_3 \rangle. \quad (3.14)$$

En efecto, nosotros mostramos que para toda  $\xi \in \mathfrak{so}(2)$  se tiene que

$$\xi(x, y) = -\xi x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \xi y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \xi y_1 \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} J(x) \cdot \xi &= \left( y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + y_3 dx_3 \right) \cdot \left( -\xi x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \xi y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \xi y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \\ &= -\xi x_2 y_1 + \xi x_1 y_2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dado que  $\xi \in \mathfrak{so}(2)$  es arbitrario se tiene lo deseado.

Lo siguiente que demostraremos es que tanto para  $H$ ,  $TS^2$  y  $J$  definidos anteriormente se tiene que cada uno de ellos es invariante bajo la acción  $\Phi$  del grupo  $S^1$ . En efecto

$$\begin{aligned} \Phi^* H(x, y) &:= H \circ \Phi(x, y) = \frac{1}{2} \left[ (y_1 \cos t - y_2 \sin t)^2 + (y_1 \sin t + y_2 \cos t)^2 + \right. \\ &\quad \left. + y_3^2 \right] + x_3 \\ &= \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + x_3 = H(x, y) \\ c_1 \circ \Phi(x, y) &= (x_1 \cos t - x_2 \sin t)^2 + (x_1 \sin t + x_2 \cos t)^2 + \\ &\quad + x_3^2 - 1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = c_1(x, y) \\ c_2 \circ \Phi(x, y) &= (x_1 \cos t - x_2 \sin t)(y_1 \cos t - y_1 \sin t) + \\ &\quad + (x_1 \sin t + x_2 \cos t)(y_1 \sin t + y_2 \cos t) + x_3 y_3 \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = c_2(x, y) \\ J \circ \Phi(x, y) &= (x_1 \cos t - x_2 \sin t)(y_1 \sin t + y_2 \cos t) + \\ &\quad - (x_1 \sin t + x_2 \cos t)(y_1 \cos t - y_2 \sin t) \\ &= x_1 y_2 - x_2 y_1 = J(x, y) \end{aligned}$$

Dado que  $H$  es invariante bajo la acción  $\Phi$  se tiene por la proposición 2.55 que  $J$  es una constante del movimiento para la dinámica generada por  $H$ . De

la misma manera,  $J|TS^2$  es una constante de movimiento para la dinámica generada por  $H|TS^2$  y dada por el campo vectorial (3.9). Entonces  $J|TS^2$  es una primera integral del péndulo esférico. Por lo tanto, por la definición 2.65 se tiene que el sistema hamiltoniano  $(TS^2, \omega|TS^2, H|TS^2)$  es un sistema hamiltoniano **completamente integrable**.

# Capítulo 4

## Reducción de la simetría $S^1$

En esta sección reduciremos nuestro sistema Hamiltoniano hasta obtener un sistema Hamiltoniano con un grado de libertad sobre un espacio fase reducido el cual es singular.

Sea  $\tau_i : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $i = 1, \dots, 6$  el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} \tau_1 &= x_3 & \tau_4 &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ \tau_2 &= y_3 & \tau_5 &= x_1^2 + x_2^2 \\ \tau_3 &= y_1^2 + y_2^2 & \tau_6 &= x_2 y_1 - x_1 y_2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Es fácil verificar que las  $\tau_i$  satisfacen la siguiente relación polinomial

$$\tau_4^2 + \tau_6^2 = \tau_3 \tau_5 \quad \tau_3 \geq 0, \tau_5 \geq 0. \tag{4.2}$$

Dada la relación polinomial anterior se observa que el cambio de variables (4.1) es singular. En efecto, el jacobiano de dicha transformación viene dada por

$$\frac{\partial(\tau_1, \dots, \tau_6)}{\partial(x_1, \dots, y_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2y_1 & 2y_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & -y_1 & 0 & -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es cero. Esto quiere decir que las variables  $\tau_i$  no nos van a servir para describir todo  $T\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6$ . Sin embargo son justo las variables adecuadas para describir  $T\mathbb{R}^3/S^1$ , como veremos a continuación.

**Observación.** De acuerdo a Cushman y Bates [7] y por el teorema de Weyl [19] se demuestra que las  $\tau_i$  con  $i = 1, \dots, 6$  generan el álgebra de polinomios invariantes bajo la acción  $\Phi$  del grupo  $S^1$ .

Una variedad algebraica es esencialmente un conjunto de ceros de un conjunto de polinomios. Una variedad algebraica también es una variedad suave de dimensión  $m$ . Una variedad semialgebraica es un conjunto dado por una colección de ecuaciones o desigualdades polinomiales.

Sea  $W$  la variedad semialgebraica definida por

$$\begin{aligned} W &= \{(\tau_1(x, y), \dots, \tau_6(x, y)) \in \mathbb{R}^6 : (x, y) \in \mathbb{R}^6\} \\ &= \{(\tau_1, \dots, \tau_6) \in \mathbb{R}^6 : \tau_4^2 + \tau_6^2 = \tau_3\tau_5, \tau_3 \geq 0, \tau_5 \geq 0\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

De acuerdo a Cushman y Bates [7, secc. IV.2] se tiene la siguiente:

**Proposición 4.1.** *La variedad semialgebraica  $W$  es homeomorfa al espacio orbital  $T\mathbb{R}^3/S^1$ .*

## 4.1. El espacio reducido $M_j$

Dado que  $TS^2$  es invariante bajo la acción  $\Phi$  entonces el espacio orbital  $TS^2/S^1$  es la variedad semialgebraica  $V$  definida por

$$\begin{aligned} V &= \{(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6) \in \mathbb{R}^6 : \\ &\quad \tau_4^2 + \tau_6^2 = \tau_3\tau_5, \tau_1^2 + \tau_5 = 1, \tau_1\tau_2 + \tau_4 = 0, \tau_3 \geq 0, \tau_5 \geq 0\}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde las expresiones  $\tau_1^2 + \tau_5 = 1$  y  $\tau_1\tau_2 + \tau_4 = 0$  definen elementos del haz tangente de la esfera. Entonces la variedad semialgebraica  $V$  está contenida en la variedad semialgebraica  $W$  como lo muestra el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} TS^2 & \subseteq T\mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\pi} W \\ \lambda_1 \downarrow & \lambda_0 \downarrow & \nearrow \sigma \\ V = TS^2/S^1 & \subseteq T\mathbb{R}^3/S^1 & \end{array}$$

La  $\pi$  en el diagrama anterior es la función

$$\pi : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6 : (x, y) \mapsto (\tau_1(x, y), \dots, \tau_6(x, y)), \quad (4.5)$$

y la  $\sigma$  en el diagrama anterior es el homeomorfismo de la proposición 4.1.

Dado que  $J|TS^2$  es la función de momento de la acción  $\Phi$  de  $S^1 \times TS^2$ , el espacio fase reducido

$$V_j = (J|TS^2)^{-1}(j)/S^1 \quad (4.6)$$

es la subvariedad semialgebraica de  $V$  definida por  $\tau_6 = j$ . Esto es así porque sabemos que  $\tau_6$  es el momento angular. Eliminando  $\tau_4$  y  $\tau_5$  de (4.4) se obtiene la variedad semialgebraica  $M_j$  dada por

$$M_j = \{(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in (J|TS^2)^{-1}(j)/S^1 : \tau_3(1 - \tau_1^2) = \tau_1^2\tau_2^2 + j^2, |\tau_1| \leq 1, \tau_3 \geq 0\}. \quad (4.7)$$

Sea  $\mu$  la proyección dada por

$$\mu = (J|TS^2)^{-1}(j)/S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6) \mapsto (\tau_1, \tau_2, \tau_3). \quad (4.8)$$

La inversa de la función de proyección  $\mu|V_j$  está dada por

$$\nu : M_j \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow (J|TS^2)^{-1}(j)/S^1 : (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \mapsto (\tau_1, \tau_2, \tau_3, -\tau_1\tau_2, 1 - \tau_1^2, j^2). \quad (4.9)$$

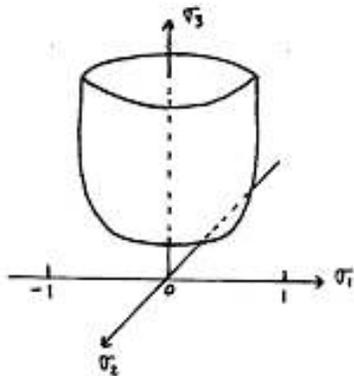
La función  $\mu$  es continua con inversa continua y por lo tanto  $\mu$  es un homeomorfismo, entonces  $M_j$  es homeomorfo como variedad semialgebraica a  $V_j$  y sirve como un modelo del espacio reducido.

El siguiente diagrama resume las relaciones entre los diferentes objetos introducidos en esta sección. Aquí las  $\lambda_i$  son las proyecciones canónicas (funciones orbitales) y  $H_j$  es la función hamiltoniana que se definirá adelante.

$$\begin{array}{ccc} (J|TS^2)^{-1}(j) & \xrightarrow{i} & TS^2 & \subseteq T\mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\pi} & W \\ \lambda_2 \downarrow & & \lambda_1 \downarrow & \lambda_0 \downarrow & \nearrow \sigma & \\ (J|TS^2)^{-1}(j)/S^1 = V_j & \longrightarrow & TS^2/S^1 & \subseteq T\mathbb{R}^3/S^1 & & \\ \mu \downarrow & & & & & \\ M_j & \xrightarrow{H_j} & \mathbb{R} & & & \end{array} \quad (4.10)$$

Cuando  $j \neq 0$ ,  $M_j$  es difeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , siendo la gráfica de la función

$$\tau_3 = \frac{\tau_1^2\tau_2^2 + j^2}{1 - \tau_1^2}, \quad |\tau_1| < 1$$

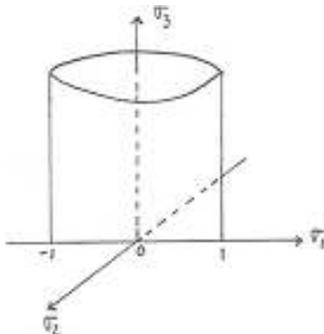
Figura 4.1: Variedad semialgebraica  $M_j$ .

Cuando  $j = 0$ ,  $M_0$  no es la gráfica de una función, puesto que ésta contiene las líneas verticales  $\{(\pm 1, 0, \tau_3) \in \mathbb{R}^3 : \tau_3 \geq 0\}$ . Además  $M_0$  no es suave puesto que los puntos  $p_{\pm} = (\pm 1, 0, 0)$  son puntos singulares. Sin embargo  $M_0$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ . Además  $M_0$  se puede obtener como un espacio orbital de la acción del grupo  $\mathbb{Z}_2$  sobre la variedad  $TS^1$  definida por

$$\varphi : \mathbb{Z}_2 \times TS^1 \rightarrow TS^1 : (x, y) \mapsto (x, -y)$$

Geoméricamente este espacio orbital  $TS^1/\mathbb{Z}_2$  de la acción  $\varphi$  se obtiene por oprimiendo primero la sección cero del cilindro  $TS^1$  a un intervalo cerrado, el cual forma un dobléz y luego pegando o identificando este cilindro oprimido a lo largo del dobléz hasta que los extremos se junten. Entonces  $M_0$  es el espacio fase  $TS^1$  del péndulo matemático con puntos identificados por la acción  $\mathbb{Z}_2$ . Esta identificación es necesaria puesto que nosotros no podemos distinguir velocidades positivas y negativas en el péndulo esférico.

**Observación.** El argumento anterior muestra que la reducción singular del péndulo esférico produce una representación geométrica fiel del límite  $j \rightarrow 0$ . En [7] se muestra que esta reducción singular también produce un modelo simpléctico exacto.

Figura 4.2: Gráfico a  $M_0$ .

## 4.2. La función hamiltoniana $H_j$

En el capítulo anterior se mostró que la función hamiltoniana  $H$  definida en (3.3) es invariante bajo la acción  $\Phi$ , entonces ésta induce la función

$$H_j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \mapsto \frac{1}{2}(\tau_3 + \tau_2^2) + \tau_1. \quad (4.11)$$

Por Cushman y Bates [7] se tiene que el campo vectorial Hamiltoniano sobre  $C^\infty(M_j)$  para la función hamiltoniana reducida  $H_j|_{M_j}$  viene dada por

$$X_{H_j|_{M_j}} = \tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_1} + (\tau_1(\tau_1 - \tau_3 - \tau_2^2) - 1) \frac{\partial}{\partial \tau_2} + 2\tau_1\tau_2(-\tau_1 + \tau_3 + \tau_2^2) \frac{\partial}{\partial \tau_3}$$

Siguiendo [7] proponemos el siguiente cambio de variables. Sea

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \tau_1 & \sigma_4 &= \tau_4 \\ \sigma_2 &= \tau_2 & \sigma_5 &= \tau_5 \\ \sigma_3 &= \tau_3 + \tau_2^2 & \sigma_6 &= \tau_6. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Usando este nuevo cambio de variables se tiene entonces que la variedad semialgebraica  $M_j$  obtenida en (4.7) se expresa como

$$M_j = \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathbb{R}^3 : \sigma_3(1 - \sigma_1^2) - \sigma_2^2 - j^2 = 0, |\sigma_1| \leq 1, \sigma_3 - \sigma_2^2 \geq 0\}. \quad (4.13)$$

Por otro lado, la transformación del campo vectorial  $X_{H_j|M_j}$  involucra derivadas parciales, la transformación para cada una de estas derivadas viene dada por

$$\frac{\partial}{\partial \tau_i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_j}{\partial \tau_i} \frac{\partial}{\partial \sigma_j},$$

para toda  $i = 1, 2, 3$  y  $j = 1, 2, 3$ . Entonces aplicando esta fórmula se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau_1} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \\ \frac{\partial}{\partial \tau_2} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_2} + 2\sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_3} \\ \frac{\partial}{\partial \tau_3} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_3}. \end{aligned}$$

Entonces sustituyendo tanto las variables  $\tau_i$  como las parciales de éstas en el campo vectorial Hamiltoniano  $X_{H_j|M_j}$  se tiene

$$\begin{aligned} X_{H_j|M_j} &= \tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \left( \tau_1(\tau_1 - \tau_3 - \tau_2^2) - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \\ &+ 2\tau_1\tau_2 \left( -\tau_1 + \tau_3 + \tau_2^2 \right) \frac{\partial}{\partial \tau_3} \\ &= \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_1} + \left( \sigma_1(\sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_2^2 + \sigma_2^2) - 1 \right) \left( \frac{\partial}{\partial \sigma_2} + 2\sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_3} \right) + \\ &+ 2\sigma_1\sigma_2 \left( -\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_2^2 - \sigma_2^2 \right) \frac{\partial}{\partial \sigma_3} \\ &= \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_1} + \left( (1 - \sigma_1^2) + \sigma_1\sigma_3 \right) \frac{\partial}{\partial \sigma_2} + \\ &+ \left( -2\sigma_2 + 2\sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \right) \frac{\partial}{\partial \sigma_3} \\ &= \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_1} - \left( (1 - \sigma_1^2) + \sigma_1\sigma_3 \right) \frac{\partial}{\partial \sigma_2} - 2\sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_3}. \end{aligned}$$

Así, el campo vectorial hamiltoniano reducido en  $M_j$  viene dado por

$$X_{H_j|M_j} = \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_1} - \left( (1 - \sigma_1^2) + \sigma_1\sigma_3 \right) \frac{\partial}{\partial \sigma_2} - 2\sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_3}. \quad (4.14)$$

**Observación.** Hemos entonces obtenido, como nos habíamos propuesto al inicio de esta sección, la dinámica en  $M_j$ , que es un *espacio fase reducido* de dimensión dos y que por lo tanto describe a un sistema físico con un grado de libertad.

# Bibliografía

- [1] Abraham, R. y Marsden, J.E. *Foundations of Mechanics*. The Benjamin Cummings Publishing Company, 1985.
- [2] Arms, J.M., Marsden, J.E. y Moncrief, V. Symmetry and Bifurcations of Momentum Mappings. *Commun. Math. Phys.* 78, 455–478, 1981.
- [3] Barden, D. y Thomas, C. *An Introduction to Differential Manifolds*. Imperial College Press, 2003.
- [4] Brickell, F. y Clark, R.S. *Differentiable Manifolds. An introduction*. Van Nostrand Reinhold Company, Londres VNR, 1970.
- [5] Bulajich, R. y Lopez de Medrano, S. *Teoría de Singularidades. Una introducción elemental*. Aportaciones Matemáticas. SMM, 1995.
- [6] Chruściński, D. y Jamiolkowski, A. *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*. Birkhäuser, 2004.
- [7] Cushman, R.H. y Bates, L.M. *Global Aspects of Classical Integrable Systems*. Birkhäuser, 1997.
- [8] Do Carmo, M. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [9] Duistermaat, J.J. y Kolk, J.A.C. *Lie Groups*. Springer, 1999.
- [10] Fowles, G. R. *Analytical Mechanics*. Saunders golden sunburts series, 1986.
- [11] Friedberg, S.H. *Linear Algebra*. Prentice Hall, 1989.

- [12] Gidea, M. y Burns, K. *Differential Geometry and Topology*. Chapman & Hall, 2005.
- [13] Marsden, J.E. *Elementary Classical Analysis*. W. H. Freeman and Company.
- [14] Marsden, J.E. y Ratiu, T.S. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer, 1999.
- [15] Munkres, J.R. *Topology*. Prentice Hall, 2000.
- [16] Puta, M. *Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization*. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [17] Talpaert, Y. *Differential Geometry with Applications to Mechanics and Physics*. Marcel Dekker Inc., 2000.
- [18] Uspensky, J.V. *Theory of Equations*. McGraw-Hill, 1958.
- [19] Weyl, H. *The classical groups*. Princeton University Press, 1946.

# Capítulo 5

## La función de Energía-Momento $\mathcal{E}\mathcal{M}$

En esta sección estudiaremos la función de energía-momento

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\mathcal{M} : TS^2 \subseteq T\mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (h, j) = \left( \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + x_3, x_1y_2 - x_2y_1 \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Estudiaremos al conjunto de valores críticos, dado que nos permitirá identificar los puntos de equilibrio (pueden ser relativos) del péndulo esférico. A simple vista podemos ver que los puntos  $(0, 0, \pm 1, 0, 0, 0) \in T_{(0,0,\pm 1)}S^2$  son puntos de equilibrio absolutos, los demás puntos serán puntos de equilibrio relativos. También estudiaremos las fibras de la función  $\mathcal{E}\mathcal{M}$ , ésta (la fibra) mostrará al conjunto de todas las posiciones y velocidades con energía y momento angular dado.

### 5.1. Valores críticos

Comenzamos por encontrar al conjunto  $\Sigma$  de valores críticos de la función  $\mathcal{E}\mathcal{M}$ , es decir, la imagen del conjunto de puntos de  $\mathcal{E}\mathcal{M}$  donde su derivada no tenga rango máximo.

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2 : z \mapsto (f_1(z), f_2(z))$  una función diferenciable. Sea  $\Sigma_f := \{ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : (x_0, y_0) \text{ es valor críticos de } f \}$ . Sea  $y$  un valor regular de  $f_2$ . Entonces por la proposición 2.14

$$A_y := f_2^{-1}(y) = \{z \in \mathbb{R}^n : f_2(z) = y\},$$

es una subvariedad de  $\mathbb{R}^n$ , cuya dimensión es  $n - 1$ . Puesto que  $y$  es un valor regular se tiene que  $Df_2|_{A_y}(z) \neq 0$ .

**Proposición 5.1.** *Si  $y_0$  es un valor regular de  $f_2$  entonces el punto  $(x_0, y_0)$  está en  $\Sigma_f$  si y sólo si  $x_0$  es un valor crítico de  $f_1|_{A_{y_0}}$ .*

Para la prueba de la proposición 5.1 necesitamos el siguiente:

**Lema 5.2.** *Sean  $A, B$  espacios vectoriales de dimensión finita y sea  $T : A \rightarrow B$  una transformación lineal. Entonces*

$$\dim \ker T + \dim \operatorname{im} T = \dim A.$$

**Prueba.** Éste es un resultado estándar de álgebra lineal; véase e.g. [11]. ■

**Prueba de la proposición 5.1.**  $\Rightarrow$  Haremos la demostración por contrapositiva, es decir, si suponemos que  $x_0$  es un valor regular de  $f_1|_{A_{y_0}}$  entonces queremos concluir que  $(x_0, y_0) \notin \Sigma_f$ . Dado que  $x_0$  es un valor regular de  $f_1|_{A_{y_0}}$  para toda  $z_0 \in A_{y_0}$  tal que  $f_1|_{A_{y_0}}(z_0) = x_0$  tenemos que  $D(f_1|_{A_{y_0}})(z_0) \neq 0$ . Puesto que  $y_0 = f_2(z_0)$  es constante para toda  $z_0 \in A_{y_0}$  entonces  $D(f_2|_{A_{y_0}})(z_0) = 0$ . Dado que  $D(f_1|_{A_{y_0}})(z_0) \neq 0$  existe  $v_1 \in T_{z_0}A_{y_0}$  tal que  $D(f_1|_{A_{y_0}})(z_0) \cdot v_1 \neq 0$ . Entonces  $Df(z_0) \cdot v_1 = (Df_1(z_0) \cdot v_1, Df_2(z_0) \cdot v_1) = (a, 0)$  para alguna  $a \neq 0$ . Como  $y_0$  es un valor regular de  $f_2$ , entonces  $Df_2(z_0) \neq 0$ , por lo que existe  $v_2 \in T_{z_0}\mathbb{R}^n$  tal que  $Df_2(z_0) \cdot v_2 \neq 0$ . Entonces  $Df(z_0) \cdot v_2 = (Df_1(z_0) \cdot v_2, Df_2(z_0) \cdot v_2) = (b, c)$ , con  $c \neq 0$ . Por lo tanto  $Df_1(z_0) \cdot v_1$  y  $Df_2(z_0) \cdot v_2$  son linealmente independientes. Por lo tanto cualquier  $z_0 \in f^{-1}(x_0, y_0)$  es un punto regular. Entonces  $(x_0, y_0)$  es un valor regular.

$\Leftarrow$  Por demostrar que si  $z \in f^{-1}(x_0, y_0)$  entonces  $\dim(\operatorname{im} Df(z)) < 2$ . Por el lema 5.2 es suficiente demostrar que  $\dim(\ker Df(z)) \geq n - 1$ . Por hipótesis  $Df_1(z) \cdot v = 0$  para todo  $v \in T_zA_{y_0}$ . Por otro lado, como  $f_2|_{A_{y_0}}$  es constante entonces  $Df_2(z) \cdot v = 0$  para toda  $v \in T_zA_{y_0}$ . Entonces  $T_zA_{y_0} \subset \ker(Df(z))$ . Por la proposición 2 se tiene que  $\dim T_zA_{y_0} = n - 1$ . Por lo tanto  $\dim \ker(Df(z)) \geq n - 1$ . ■

Entonces por la proposición anterior, dada  $j^0$  un valor regular, encontrar los valores críticos  $(h^0, j^0)$  de  $\mathcal{E}\mathcal{M}$  equivale a encontrar el valor crítico  $h^0$  de la función  $H|M_{j^0}$ . En el caso de que  $j^0$  no sea un valor regular, los valores críticos  $(h^0, j^0)$  se derivarán directamente de la función  $\mathcal{E}\mathcal{M}$  de acuerdo a la definición de punto crítico. De la ecuación (4.13), o más explícitamente de

(4.7), sabemos que  $M_j$  con  $j \neq 0$  representa una variedad que es difeomorfa a  $\mathbb{R}^2$ . Entonces la función  $H|M_j$  se define como

$$H_j := H|M_j : M_j \rightarrow \mathbb{R} : (\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \frac{\sigma_2^2 + j^2}{2(1 - \sigma_1^2)} + \sigma_1 \quad (5.2)$$

Por la definición 2.13 se tiene que  $(\sigma_1^0, \sigma_2^0)$  es un punto crítico de  $H|M_j^0$  si

$$(\mathbf{D}(\mathbf{H}|M_j^0))|_{(\sigma_1^0, \sigma_2^0)} = \left( 1 + \frac{\sigma_1^0((\sigma_2^0)^2 + j^2)}{(1 - (\sigma_1^0)^2)^2} \quad \frac{\sigma_2^0}{1 - (\sigma_1^0)^2} \right) = (0 \quad 0)$$

Entonces  $(\sigma_1^0, \sigma_2^0)$  es un punto crítico si  $\sigma_2^0 = 0$  y  $(1 - (\sigma_1^0)^2)^2 + \sigma_1^0 j^2 = 0$ . Despejando a  $j^2$  de la última igualdad se tiene

$$j^2 = \frac{(1 - (\sigma_1^0)^2)^2}{-\sigma_1^0} \quad (5.3)$$

De la ecuación (4.13) sabemos que  $\sigma_1 \in (-1, 1)$ , entonces para que  $j^2$  esté definida se requiere que  $\sigma_1^0 \in (-1, 0)$ . Sustituyendo  $\sigma_2^0 = 0$  y  $j^2$  se tiene que  $h^0$  es un valor crítico de  $H|M_j$  si

$$\begin{aligned} h(\sigma_1^0) &= \frac{(\sigma_2^0)^2 + j^2}{2(1 - (\sigma_1^0)^2)} + \sigma_1^0 \\ &= -\frac{(1 - (\sigma_1^0)^2)^2}{2\sigma_1^0(1 - (\sigma_1^0)^2)} + \sigma_1^0 \\ &= -\frac{1}{2\sigma_1^0} + \frac{3\sigma_1^0}{2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Entonces para  $j \neq 0$ ,  $h^0$  es un valor crítico de  $H|M_j$  si tiene la siguiente parametrización

$$h^0(s) = -\frac{1}{2s} + \frac{3}{2}s, \quad s \in (-1, 0).$$

Como se menciona al inicio de esta sección, los puntos  $(\pm 1, 0)$  son también valores críticos de la función  $\mathcal{E}\mathcal{M}$ , hecho cuya demostración se hace a continuación.

Definida  $\mathcal{E}\mathcal{M}$  como en (5.1), su derivada  $D(\mathcal{E}\mathcal{M})$  está dada por

$$\mathbf{D}(\mathcal{E}\mathcal{M}) = \begin{pmatrix} DH \\ DJ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & -y_1 & 0 & -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

La derivada  $D(\mathcal{E}\mathcal{M})$  no es suprayectiva si ésta tiene rango 0 o rango 1. En el caso de que tenga rango cero debe pasar que ambos renglones deben ser nulos, lo cual no ocurre para  $DH$ . Para que  $D(\mathcal{E}\mathcal{M})$  no sea suprayectiva debe tener rango uno, es decir, si  $DH$  y  $DJ$  son linealmente dependientes, entonces los puntos críticos deben satisfacer que  $0 = \alpha DH + \beta DJ$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , y  $\alpha$  o  $\beta$  distintos de cero. Desarrollando la ecuación anterior e igualando término a término se tienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha 0 + \beta y_2 & , & & 0 &= \alpha y_1 - \beta x_2 \\ 0 &= \alpha 0 - \beta y_1 & , & & 0 &= \alpha y_2 + \beta x_1 \\ 0 &= \alpha 1 + \beta 0 & , & & 0 &= \alpha y_3 + \beta 0. \end{aligned}$$

De la tercera ecuación del lado izquierdo se obtiene que  $\alpha = 0$  y  $\beta \neq 0$ . Dado que  $\beta \neq 0$  entonces se tiene del lado izquierdo que  $y_1 = 0 = y_2$  y del lado derecho se tiene  $x_1 = 0 = x_2$ , pero además como  $(x, y) \in TS^2$  y por los resultados anteriores se tiene que  $x_3 = \pm 1$  y  $x_3 y_3 = 0$ , de donde se tiene que  $y_3 = 0$ . Por lo tanto  $(0, 0, \pm 1, 0, 0, 0) \in TS^2$  son puntos críticos de la función de energía momento  $\mathcal{E}\mathcal{M}$  cuyos valores críticos son  $(h, j) = (\pm 1, 0)$ .

Hemos entonces probado la siguiente:

**Proposición 5.3.** *Los valores críticos de la función de energía momento  $\mathcal{E}\mathcal{M}$  tienen la siguiente forma:*

1. Si  $j \neq 0$  ( $j$  un valor regular), entonces  $(h, j) = \left(-\frac{1}{2\sigma_1} + \frac{3}{2}\sigma_1, \pm\left(\frac{1-\sigma_1^2}{\sqrt{-\sigma_1}}\right)\right)$  con  $\sigma_1 \in (-1, 0)$ .
2. Si  $j = 0$  entonces  $(h, j) = (\pm 1, 0)$ .

A continuación vamos a volver a obtener los valores críticos de la función de energía-momento, esta vez siguiendo el argumento de Cushman y Bates en [7, secc. IV.3]. En comparación con nuestro argumento que nos llevó a la proposición 5.3, el método que se sigue en [7] es más complicado, pero tiene la ventaja de ser más geométrico y será de utilidad para describir la topología de las fibras de las funciones de energía y de energía-momento.

Sea  $\Pi_h : \frac{1}{2}\sigma_3 + \sigma_1 = h$  un plano y  $M_j : \sigma_2^2 + j^2 = \sigma_3(1 - \sigma_1^2)$  la variedad semialgebraica definida en la sección 4.2.

**Definición 5.4.** *Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $p \in A \cap B$  tal que existe  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto con  $p \in U$  y  $A \cap U, B \cap U$  subvariedades de  $\mathbb{R}^n$ .*

Decimos que  $p$  es un punto en la intersección de  $A$  y  $B$  con multiplicidad simple si  $\dim(T_p A + T_p B) = \min(n, \dim T_p A + \dim T_p B)$ . Decimos que  $p$  es un punto de multiplicidad mayor que uno si no es de multiplicidad simple.

**Proposición 5.5.** Sean  $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables y sean  $u, v \in \mathbb{R}$  valores regulares de  $F$  y  $G$  respectivamente. Entonces  $p \in F^{-1}(u) \cap G^{-1}(v)$  es de multiplicidad simple si y sólo si  $(\nabla F, \nabla G)$  son linealmente independientes en  $p$ .

**Prueba.** Haremos la demostración por contrapositiva, es decir,  $p \in F^{-1}(u) \cap G^{-1}(v)$  es de multiplicidad mayor que uno si y sólo si  $(\nabla F, \nabla G)$  son linealmente dependientes en  $p$ . Supongamos que  $(\nabla F, \nabla G)$  son linealmente dependientes en  $p$ . Dado que  $F$  y  $G$  son funciones diferenciables y  $u, v$  valores regulares de  $F$  y  $G$  respectivamente, entonces  $\nabla F$  y  $\nabla G$  son distintos de cero. Sean  $A = F^{-1}(u)$  y  $B = G^{-1}(v)$  subvariedades de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $p \in A \cap B$  es de multiplicidad mayor que uno si  $\dim(T_p A + T_p B) < \min(n, \dim T_p A + \dim T_p B)$ . Esto se satisface si y sólo si los planos  $T_p A$  y  $T_p B$  coinciden y por lo tanto si y sólo si los gradientes son linealmente dependientes y que por hipótesis hemos asumido. Por lo tanto  $p \in F^{-1}(u) \cap G^{-1}(v)$  es de multiplicidad mayor que uno. ■

**Corolario 5.6.** Sea  $j \neq 0$ . Entonces un punto  $p \in \Pi_h \cap M_j$  es de multiplicidad mayor que uno si y sólo si  $p$  es punto crítico de  $\mathcal{E}\mathcal{M}$ . Esto ocurre si y sólo si  $h = H(p)$  es un valor crítico de  $H|M_j$ .

**Prueba.** Dado que  $j \neq 0$ , entonces  $\Pi_h$  y  $M_j$  son subvariedades de  $\mathbb{R}^3$ , parametrizadas por  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  y tanto  $\nabla H(p)$  como  $\nabla J(p)$  son distintos de cero. Tenemos que  $p \in \Pi_h \cap M_j$  es de multiplicidad mayor que uno si  $\dim(T_p \Pi_h + T_p M_j) < 3$ . Esto es así si y sólo si los planos  $T_p \Pi_h$  y  $T_p M_j$  coinciden, lo cual ocurre si y sólo si  $\nabla H(p) \parallel \nabla J(p)$ , lo cual ocurre si y sólo si  $D\mathcal{E}\mathcal{M}(p)$  tiene rango menor que 2. Esto último equivale a que  $p$  sea un punto crítico de  $\mathcal{E}\mathcal{M}$ . Si  $p$  es punto crítico de  $\mathcal{E}\mathcal{M}$ , entonces  $\mathcal{E}\mathcal{M}(p) = (h^0, j^0)$  es un valor crítico de  $\mathcal{E}\mathcal{M}$ . Luego por la proposición 5.1 tenemos que  $h^0$  es un valor crítico de  $H|M_{j^0}$ . ■

**Observación** Como conjuntos, cualquier elemento de  $(H|M_j)^{-1}(h)$  equivale a intersectar el plano  $\Pi_h$  con la variedad semialgebraica  $M_j$  en el punto

$\sigma^0 = (\sigma_1^0, \sigma_2^0, \sigma_3^0)$ . En efecto, de la definición de  $\Pi_h$  podemos despejar a  $\sigma_3$  y sustituirla en  $M_j$  para obtener

$$M_j : \sigma_2^2 + j^2 = 2(h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2), \quad |\sigma_1| \leq 1.$$

Entonces

$$\Pi_h \cap M_j = \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathbb{R}^3 : \sigma_3 = 2(h - \sigma_1), \quad \sigma_2^2 + j^2 - 2(h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) = 0\}.$$

Si definimos

$$Q(\sigma_1, \sigma_2) := \sigma_2^2 + j^2 - 2(h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2), \quad (5.5)$$

entonces

$$\Pi_h \cap M_j = \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathbb{R}^3 : \sigma_3 = 2(h - \sigma_1), \quad Q(\sigma_1, \sigma_2) = 0\}.$$

Por otro lado

$$(H|M_j)^{-1}(h) := \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{\sigma_2^2 + j^2}{2(1 - \sigma_1^2)} + \sigma_1 = h\}.$$

Entonces es clara la igualdad de conjuntos.

Podemos ver de la observación anterior que hemos definido el polinomio  $Q$  tal que  $Q(\sigma_1, \sigma_2) = 0$  equivale a intersectar  $\Pi_h$  y  $M_j$ , de nuestro curso de álgebra elemental, dado un polinomio  $P$  de una sola variable nosotros sabemos qué significa que dicho polinomio tenga raíces con multiplicidad (ver Uspensky [18]). Esta multiplicidad la podemos extender a polinomios de  $n$  variables (ver Marsden [13]).

**Definición 5.7.** Sea  $Q(x_1, \dots, x_n)$  una función suave. Decimos que una raíz  $(x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$  de  $Q$  tiene multiplicidad mayor que uno si el polinomio de Taylor de  $Q$  evaluado en  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  no tiene ni término constante ni término lineal.

**Proposición 5.8.** Sean  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables y  $\frac{\partial F(p)}{\partial x_n} \neq 0$ . Sea  $Q(x_1, \dots, x_{n-1}) = G(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n(x_1, \dots, x_{n-1}))$  donde  $x_n : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función implícitamente definida por  $F(x_1, \dots, x_n) = 0$  y  $p = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0))$ . Entonces  $p$  es de multiplicidad simple si y sólo si  $x_n^0 = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0) \in F^{-1}(u) \cap G^{-1}(v)$  es una raíz simple de  $Q$ .

**Prueba.** Sea  $p \in F^{-1}(u) \cap G^{-1}(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = u, G(x) = v\}$ . Supongamos que  $\frac{\partial F(p)}{\partial x_n} \neq 0$ . Sea  $p = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ . Entonces por el teorema de la función implícita (ver Marsden [13]) existe  $x_n : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable, definida en una vecindad de  $(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$  tal que  $x_n^0(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0) = x_n^0$  y  $F(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n(x_1, \dots, x_{n-1})) = u$ .

Definimos  $Q(x_1, \dots, x_{n-1}) = G(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n(x_1, \dots, x_{n-1}))$ . Entonces  $x_n^0$  es raíz de  $Q$ , es decir,  $Q(x_n^0) = G(p) = 0$ . Además, sea  $Q = G \circ \psi$ , donde  $\psi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_{n-1})^T \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n(x_1, \dots, x_{n-1}))^T$ , donde  $T$  significa la transpuesta. Entonces la derivada de  $Q$  está dada por  $DQ = DG \cdot D\psi$ , donde

$$(DF) = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) = \left( A, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right),$$

$$(DG) = \left( \frac{\partial G}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial G}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial G}{\partial x_n} \right) = \left( B, \frac{\partial G}{\partial x_n} \right),$$

$$(D\psi) = \begin{pmatrix} Id_{(n-1) \times (n-1)} \\ Dx_n \end{pmatrix}$$

$$(Dx_n) = - \left( \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial (x_1, \dots, x_{n-1})} \in M_{1 \times (n-1)}.$$

Por lo tanto

$$DQ = \left( B, \frac{\partial G}{\partial x_n} \right) \left( Id_{(n-1)}, Dx_n \right)^T = B + \frac{\partial G}{\partial x_n} Dx_n = B - \frac{\partial G}{\partial x_n} \left( \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)^{-1} A$$

$\Leftrightarrow$  Sea  $\bar{\alpha} = \frac{\partial G}{\partial x_n} \left( \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)^{-1}$ . Entonces

$$\bar{\alpha} \nabla F + \nabla G = \left( \bar{\alpha} A, -\frac{\partial F}{\partial x_n} \right) + \left( B, \frac{\partial G}{\partial x_n} \right) = (\bar{\alpha} A + B, 0) = (DQ, 0)$$

Si  $DQ = 0$  entonces  $\nabla F \parallel \nabla G$ , por lo tanto si  $\nabla F(p) \not\parallel \nabla G(p)$  entonces  $DQ(x_n^0) \neq 0$ , es decir, si  $p$  es un punto de multiplicidad simple entonces  $x_n^0$  es raíz simple de  $Q$ .

$\Leftrightarrow$  Supongamos que  $\nabla F(p) \parallel \nabla G(p)$ . Entonces existe  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  tal que  $\alpha \nabla F(p) + \beta \nabla G(p) = 0$ . Si  $\beta = 0$ , entonces  $\nabla F(p) = 0$  lo cual es una

contradicción dado que  $p$  es un punto regular; análogamente  $\alpha \neq 0$ . Entonces podemos suponer que

$$(0, 0) = \alpha \nabla F + \nabla G = \left( \alpha A + B, \alpha \frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{\partial G}{\partial x_n} \right)$$

De la segunda entrada obtenemos que  $\alpha = \bar{\alpha}$ , donde  $\bar{\alpha} = \frac{\partial G}{\partial x_n} \left( \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)^{-1}$ , y sustituyendo este resultado en la primera entrada se tiene  $0 = \bar{\alpha} A + B = DQ$ . Por lo tanto  $\nabla F(p) \parallel \nabla G(p)$  implica que  $DQ(x_n^0) = 0$ . ■

**Definición 5.9.** Sean  $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables. Sean  $u, v \in \mathbb{R}$  valores (posiblemente críticos) de  $F$  y  $G$  respectivamente. Sea  $p \in F^{-1}(u) \cap G^{-1}(v)$ . Denotamos  $p = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ . Supongamos que  $\frac{\partial F(p)}{\partial x_n} \neq 0$ . Sea  $Q : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como en la proposición 5.8. Decimos que  $p$  es de multiplicidad simple si  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$  es raíz simple de  $Q$ .

**Observación.** De la definición anterior, si  $u, v$  son valores regulares de  $F$  y  $G$  respectivamente, entonces  $F^{-1}(u)$  y  $G^{-1}(v)$  son subvariedades de  $\mathbb{R}^n$  y por lo tanto tiene sentido aplicar la definición 5.4. En ese caso quisiéramos ver que un punto en la intersección de  $F^{-1}(u)$  y  $G^{-1}(v)$  es de multiplicidad mayor que uno independientemente de si usamos la definición 5.4 ó 5.9.

Considere el polinomio (5.5) el cual se obtiene de despejar a  $\sigma_3$  de la definición de  $\Pi_h$  y sustituyéndola en la definición de  $M_j$ . Entonces  $Q = 0$  equivale a que el plano  $\Pi_h$  y la variedad semialgebraica  $M_j$  se intersequen. Por la definición 5.9 se tiene que una raíz de multiplicidad mayor que uno de  $Q$  corresponde a un punto en  $\Pi_h \cap M_j$  de multiplicidad mayor que uno. Dichas raíces se pueden caracterizar de manera más simple con el polinomio  $P$  que aparece en la siguiente

**Proposición 5.10.** Una raíz  $(\sigma_1^0, \sigma_2^0) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}$  del polinomio  $Q$  definido en (5.5) tiene multiplicidad mayor que uno si y sólo si

$$\sigma_2^0 = 0 \tag{5.6}$$

y el polinomio

$$P(\sigma_1) = (h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) - \frac{1}{2}j^2 \tag{5.7}$$

tiene una raíz múltiple  $\sigma_1^0$ .

**Prueba.** El polinomio de Taylor de  $Q$  de orden 2 en las variables  $\sigma_1, \sigma_2$  es de la siguiente forma

$$Q(\sigma_1, \sigma_2) = Q(\sigma_1^0, \sigma_2^0) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial Q}{\partial \sigma_i}(\sigma_1^0, \sigma_2^0)(\sigma_i - \sigma_i^0) + \dots + R(\sigma_1^0, \sigma_2^0)$$

donde  $R(\sigma_1^0, \sigma_2^0)$  es el residuo. La raíz  $(\sigma_1^0, \sigma_2^0)$  tiene multiplicidad mayor que uno si y sólo si

$$(\sigma_2^0)^2 + j^2 - 2(h - \sigma_1^0)(1 - (\sigma_1^0)^2) = 0 \quad (5.8)$$

y

$$(2(1 - (\sigma_1^0)^2) + 4\sigma_1^0(h - \sigma_1^0), 2\sigma_2^0) = (0, 0). \quad (5.9)$$

Las dos ecuaciones anteriores corresponden al término constante y al término lineal respectivamente del polinomio de Taylor para  $Q$ . De (5.9) es claro que la igualdad en la segunda entrada se da si  $\sigma_2^0 = 0$ . Sustituyendo este resultado en (5.8) obtenemos

$$j^2 - 2(h - \sigma_1^0)(1 - (\sigma_1^0)^2) = 0 \quad (5.10)$$

Dado que  $\sigma_1$  debe ser una raíz múltiple derivamos (5.10) y al derivar se obtiene justamente el término de la primera entrada del lado izquierdo de la ecuación (5.9). Si definimos

$$P(\sigma_1) = -\frac{1}{2}Q(\sigma_1, \sigma_2 = 0) = (h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) - \frac{1}{2}j^2,$$

se tiene demostrada la proposición. ■

**Proposición 5.11** (Cushman y Bates). Sean  $\sigma_2$  y  $P(\sigma_1)$  definidos como en (5.6) y (5.7) respectivamente. Entonces  $\Sigma$  está parametrizada por  $h(s) = \frac{3}{2}s - \frac{1}{2s}$  y  $j(s) = \pm\left(\frac{1-s^2}{\sqrt{-s}}\right)$ , para  $s \in [-1, 0) \cup \{1\}$ .

**Prueba.** Para toda  $(h, j) \in \Sigma$  y  $\sigma_1$  una raíz múltiple, el polinomio  $P$  definido en (5.7) se puede factorizar como

$$(\sigma_1 - s)^2(\sigma_1 - t) = \sigma_1^3 - (2s + t)\sigma_1^2 + (2st + s^2)\sigma_1 - ts^2 \quad (5.11)$$

para algún  $s \in [-1, 1]$  y  $t \in \mathbb{R}$ . Igualando coeficiente a coeficiente (5.7) y (5.11) se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} h &= 2s + t, \\ -1 &= 2st + s^2, \\ -\frac{1}{2}j^2 + h &= -ts^2. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Si  $s = 0$ , entonces la segunda igualdad nos lleva a que  $0 = 1$ , lo cual es una contradicción. Entonces  $s \neq 0$ . Despejando a  $t$  de dicha igualdad y sustituyendola en la primera igualdad se tiene

$$h(s) = 2s - \frac{1}{2s} - \frac{s^2}{2s} = \frac{3}{2}s - \frac{1}{2s}$$

Sustituyendo  $t$  y  $h$  en la tercera igualdad de (5.12) se tiene

$$\begin{aligned} j^2 &= 2\left(\frac{3}{2}s - \frac{1}{2s} + s^2\left(-\frac{1}{2s} - \frac{s}{2}\right)\right) \\ &= 3s - \frac{1}{s} - s - s^3 = 2s - \frac{1}{s} - s^3 \\ &= -\frac{1}{s}(1 - 2s^2 + s^4) = -\frac{1}{s}(1 - s^2)^2. \end{aligned}$$

Dado que  $j$  debe ser real entonces  $s \in [-1, 0) \cup \{1\}$ . ■

La siguiente proposición resume los resultados obtenidos hasta ahora acerca del conjunto de valores críticos de la función de energía-momento:

**Proposición 5.12.** *Sea  $\mathcal{E}\mathcal{M}$  la función de energía-momento definida en (5.1) y sea  $(h, j) \in \text{im } \mathcal{E}\mathcal{M}$ . Sea  $\Sigma$  el conjunto de valores críticos de  $\mathcal{E}\mathcal{M}$  y sea  $M_j$  la variedad semialgebraica definida en la sección 4.2. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Si  $j \neq 0$  entonces  $h$  es un valor crítico de  $H|M_j$ . Si  $j = 0$  entonces  $h = \pm 1$ .*
2. *El punto  $(h, j)$  es un valor crítico de  $\mathcal{E}\mathcal{M}$ .*
3. *Existe un punto  $\sigma^0 \in \Pi_h \cap M_j$  con multiplicidad mayor que uno.*
4. *Existe  $(\sigma_1^0, \sigma_2^0)$  tal que el polinomio de Taylor de  $Q(\sigma_1, \sigma_2)$  evaluado en  $(\sigma_1^0, \sigma_2^0)$  no tiene término constante o lineal, donde  $(\sigma_1, \sigma_2) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}$ .*

5. Existe  $(\sigma_1^0, \sigma_2^0)$  tal que  $\sigma_2^0 = 0$  y  $P(\sigma_1) = (h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) - \frac{1}{2}j^2$  tiene una raíz  $\sigma_1^0$  de multiplicidad mayor que uno.

De acuerdo a la proposición 5.11, el conjunto de valores críticos determina la siguiente curva, que denotamos por  $\pm\mathcal{B}$ , excepto si  $s = 1$ , en cuyo caso  $h(1) = 1$  y  $j(1) = 0$ .

**Proposición 5.13.** *La curva  $\pm(\mathcal{B})$  tiene la siguiente expresión*

$$j = \pm \frac{2}{9}(3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3})\sqrt{h + \sqrt{h^2 + 3}} = \pm(\mathcal{B}(h)) \quad (5.13)$$

para  $h \geq -1$ .

**Prueba.** Tomamos la expresión de  $h(s)$  obtenida en la proposición 5.11 y multiplicando a ambos lados por  $2s$  e igualando a cero se tiene la ecuación de segundo grado  $3s^2 - 2hs - 1 = 0$ , cuya solución es  $s = \frac{h \pm \sqrt{h^2 + 3}}{3}$ . Sustituyendo la expresión anterior de  $s$  en  $j(s)$ , igualmente obtenida en la proposición 5.11 y elevando al cuadrado se tiene

$$j^2 = -\frac{3}{h \pm \sqrt{h^2 + 3}} \left( 1 - \left( \frac{h \pm \sqrt{h^2 + 3}}{3} \right)^2 \right)^2,$$

dado que  $j^2$  es una cantidad mayor o igual a cero, tomamos la raíz negativa de  $s$ , entonces se tiene

$$j^2 = -\frac{3}{h - \sqrt{h^2 + 3}} \left( 1 - \left( \frac{h - \sqrt{h^2 + 3}}{3} \right)^2 \right)^2.$$

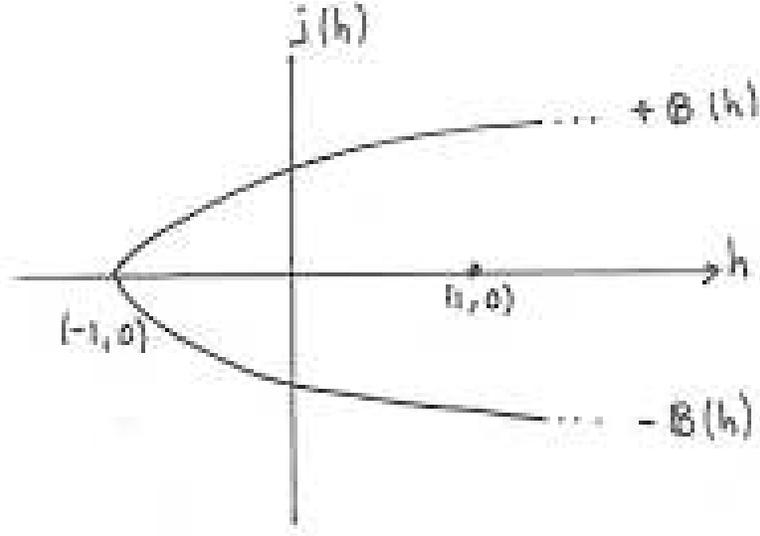
Desarrollando y agrupando términos obtenemos

$$j^2 = -\frac{3}{h - \sqrt{h^2 + 3}} \left( \frac{2}{9} \right)^2 \left( 3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3} \right)^2.$$

Multiplicando esta última expresión por  $\frac{h + \sqrt{h^2 + 3}}{h + \sqrt{h^2 + 3}}$  se tiene

$$j = \pm \frac{2}{9}(3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3})\sqrt{h + \sqrt{h^2 + 3}} = \pm(\mathcal{B}(h)),$$

tal como lo deseábamos. ■


 Figura 5.1: Valores críticos de la función  $\mathcal{E}\mathcal{M}$ .

**Observación** . La curva  $\mathcal{B}(h)$  tiene dos ramas; una rama está parametrizada por  $+\mathcal{B}$  y la otra rama está parametrizada por  $-\mathcal{B}$ . Puesto que  $j = 0$  cuando  $h = -1$ , en este punto las ramas se unen de forma continua, es decir,

$$\lim_{h \rightarrow -1} j(h) = \lim_{h \rightarrow -1} \pm(\mathcal{B}(h)) = \pm(\mathcal{B}(-1)) = 0.$$

También en este punto se tiene que las ramas no se unen de forma suave, es decir

$$\begin{aligned} \left. \frac{dj}{dh} \right|_{h=-1} &= \pm \frac{2}{9} \left[ \left( 3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3} \right) \left( \frac{\sqrt{h^2 + 3} + h}{2\sqrt{h^2 + 3}\sqrt{h + \sqrt{h^2 + 3}}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \sqrt{h + \sqrt{h^2 + 3}} \right) \left( -2h + \sqrt{h^2 + 3} + \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + 3}} \right) \right] \Big|_{h=-1} \\ &= \pm \frac{2}{9} \left[ \frac{(0)(1)}{(2)(2)} + \frac{(1)(4 + 2 + 3)}{2} \right] = \pm 1. \end{aligned}$$

El punto  $(1, 0) \in \Sigma$  es un punto aislado dado que no está en  $\pm(\mathcal{B})$  y por lo tanto es un valor crítico aislado de  $\mathcal{E}\mathcal{M}$ .

**Observación.** El punto crítico  $(0, 0, -1, 0, 0, 0)$  físicamente representa a una partícula que está en equilibrio estable; por otro lado, el punto crítico  $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$  representa a una partícula que se encuentra en equilibrio inestable. En ambos casos la energía total es puramente energía potencial. Los demás puntos que están sobre la curva  $(h, \pm(\mathcal{B}(h)))$  determinan puntos de equilibrio relativos, tal como se indicó al inicio de este capítulo. Es claro que los puntos en  $TS^2$  con velocidad cero tienen momento angular cero. Por otro lado, sabemos que si un punto en  $TS^2$  tiene momento angular cero, eso no implica que su velocidad sea cero. Esto es claro en coordenadas esféricas. Si  $\varphi = \varphi_0 = \text{constante}$ , entonces el movimiento se reduce al movimiento de un péndulo simple (o péndulo plano) cuyo movimiento se da en este plano  $\varphi = \varphi_0$ . Por otro lado, si tomamos  $\theta = \theta_0 = \text{constante}$ , se puede ver en [10] que solamente están permitidos valores de  $\theta$  comprendidos entre el polo sur y justo antes del ecuador, pues por ejemplo, para que el péndulo permanezca sobre el ecuador, es decir  $\theta = \pi/2$ , el cuadrado de su velocidad angular debe ser infinita. Para  $\theta = \text{constante}$  el sistema es llamado algunas veces el péndulo conical. Para valores de  $\theta$  cercanos a una constante  $\theta_0$  el péndulo oscila alrededor de  $\theta_0$  obteniéndose un movimiento de precesión.

Más adelante se mostrará que los valores críticos  $(\pm 1, 0)$  de la función  $\mathcal{E}\mathcal{M}$  son especiales porque los correspondientes puntos críticos  $p = (\pm 1, 0, 0)$  de la función hamiltoniana  $H_0$  son puntos singulares del espacio reducido  $M_0$ .

## 5.2. Topología de $H_j^{-1}(h)$

A continuación describiremos la topología de las fibras de la función hamiltoniana  $H_j(h) : M_j \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

**Proposición 5.14.** *El punto  $(h, j)$  es un valor crítico de la función de energía-momento definida en (5.1) si y sólo si la línea*

$$l_h : \frac{1}{2}\sigma_3 + \sigma_1 = h \text{ y } \sigma_2 = 0 \quad (5.14)$$

*interseca a la curva*

$$\mathcal{F} : \sigma_3(1 - \sigma_1^2) = j^2, \sigma_2 = 0, |\sigma_1| \leq 1, \sigma_3 \geq 0 \quad (5.15)$$

*en un punto  $\sigma^0 = (\sigma_1^0, 0, \sigma_3^0)$  con multiplicidad mayor que uno.*

**Prueba.** De la definición de  $l_h$  podemos despejar a  $\sigma_3$  y sustituirla en la definición de  $\mathcal{F}$  para obtener la ecuación  $2(h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) = j^2$ . Si definimos el polinomio  $P(\sigma_1) = (h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) - \frac{1}{2}j^2$ , entonces  $P(\sigma_1) = 0$  equivale a intersecar  $l_h$  y  $\mathcal{F}$ . Por la definición 5.9 el punto  $(\sigma_1^0, 0, \sigma_3^0)$  es de multiplicidad simple si y sólo si  $\sigma_1^0$  es una raíz simple de  $P$ . Aquí por supuesto tenemos dos casos:

1. Si  $j = 0$ , entonces  $P(\sigma_1) = (h - \sigma_1)(1 - \sigma_1)(1 + \sigma_1)$ . Si  $h \neq \pm 1$  entonces  $P(\sigma_1)$  tiene sólo raíces simples. Si  $h = \pm 1$  entonces  $\sigma_1^0 = \pm 1$  es una raíz múltiple de  $P(\sigma_1)$ .
2. Si  $j \neq 0$  tomamos la derivada  $\frac{dP}{d\sigma_1}\big|_{\sigma_1^0} = -(1 - \sigma_1^2) + 2\sigma_1(h - \sigma_1)\big|_{\sigma_1^0} = 0$  si y sólo si  $-1 + (\sigma_1^0)^2 - 2\sigma_1^0 h + 2(\sigma_1^0)^2 = 0$  si y sólo si  $h(\sigma_1^0) = \frac{3}{2}\sigma_1^0 - \frac{1}{2\sigma_1^0}$ . Sustituyendo  $h(\sigma_1^0)$  en  $P = (h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) - \frac{1}{2}j^2 = 0$  tenemos que  $j(\sigma_1^0) = \pm \left(\frac{1 - (\sigma_1^0)^2}{\sqrt{-\sigma_1^0}}\right)$ . Por lo tanto  $\sigma_1^0$  es una raíz múltiple de  $P(\sigma_1)$  si y sólo si  $h$  y  $j$  tienen las parametrizaciones anteriores y que justamente coinciden con los valores críticos de la función  $\mathcal{E}\mathcal{M}$  obtenidos por ejemplo en la proposición 5.3. ■

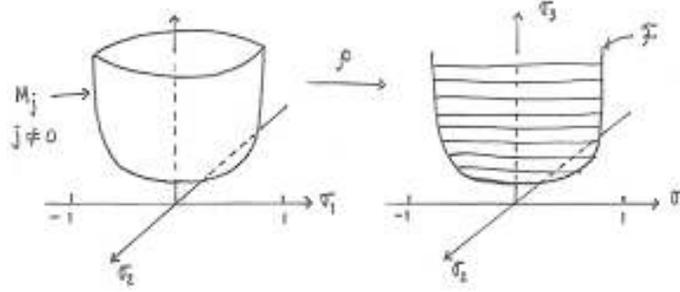
Sea  $\rho$  la proyección siguiente:

$$\rho : M_j \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \mapsto (\sigma_1, 0, \sigma_3). \quad (5.16)$$

Notemos que si  $(\sigma_1, 0, \sigma_3) \in \rho(M_j)$  entonces  $\sigma_3(1 - \sigma_1^2) \geq j^2$ ,  $|\sigma_1| \leq 1$ ,  $\sigma_3 \geq 0$ .

La curva  $\mathcal{F}$  definida en (5.15) es la frontera de la imagen de la proyección de  $M_j$  bajo la función  $\rho$ . En efecto, geoméricamente la frontera de la desigualdad anterior es justamente cuando se da la igualdad, es decir  $\sigma_3(1 - \sigma_1^2) = j^2$ . Por otra parte, la función  $\rho$  proyecta todo punto de  $M_j$  sobre el plano formado por  $(\sigma_1, \sigma_3)$ , en particular todo punto sobre la frontera de  $M_j$  (digamos la "silueta" de  $M_j$ ) bajo la proyección de  $\rho$  debe satisfacer que  $\sigma_3(1 - \sigma_1^2) = j^2$ , pero esto es nuevamente la definición de la curva  $\mathcal{F}$  definida en (5.15). Ver figura 5.2.

Observemos que si  $p$  es un punto en el interior de  $\rho(M_j)$  entonces la fibra  $\rho^{-1}(p)$  consiste en dos puntos, mientras que si  $p$  está en la frontera de  $\rho(M_j)$ ,


 Figura 5.2: La imagen del mapeo de proyección  $\rho$ .

entonces la fibra consiste en un solo punto. En efecto, por definición tenemos:

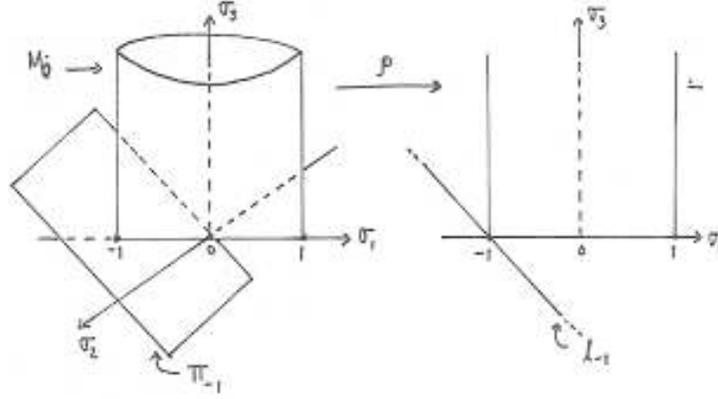
$$\begin{aligned}
 \rho^{-1}(p) &= \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in M_j \subseteq \mathbb{R}^3 : \rho(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = p\} \\
 &= \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in M_j : \sigma_3(1 - \sigma_1^2) - j^2 \geq 0\} \\
 &= \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in M_j : \sigma_2^2 \geq 0\}.
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

**Observación.** El punto  $\sigma_1^0$  es una raíz de multiplicidad 2 en el intervalo  $[-1, 1]$  para el polinomio  $P(\sigma_1)$  definido en (5.7); sin embargo, no olvidemos que  $P(\sigma_1)$  es un polinomio de grado 3 y por lo tanto tiene otra raíz, dicha raíz aquí no la mostramos pero de acuerdo a la ecuación (5.11) sabemos que se encuentra en el intervalo  $(1, \infty)$ .

**Proposición 5.15.** Sea  $\mathcal{B}(h)$  la función definida por la proposición 5.13. La topología de las fibras del Hamiltoniano reducido  $H_j$  son:

Condiciones sobre $(h, j)$	Topología de $H_j^{-1}(h)$
1. $j = \pm\mathcal{B}(h)$ , $h \geq -1$	Un punto
2. $ j  < \mathcal{B}(h)$ , $h > -1$ , $(h, j) \neq (1, 0)$	$S^1$ suave
3. $(1, 0)$	$S^1$ topológico con un punto singular conical

**Prueba.** Caso 1. Cuando  $h = -1$ , se tiene por la proposición 5.13 que  $j = 0$ . Entonces por la proposición 5.14 la línea  $l_{-1}$  interseca a la curva  $\mathcal{F}$  en el punto  $(\sigma_1, 0, \sigma_3)$  tal que  $\frac{1}{2}\sigma_3 + \sigma_1 = -1$  y  $\sigma_3(1 - \sigma_1^2) = 0$ . Despejando a  $\sigma_3$  de la primera de las ecuaciones anteriores y sustituyendo en la segunda obtenemos la siguiente ecuación:  $-2(1 + \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) = 0$ . Es claro que  $\sigma_1 = \pm 1$  son


 Figura 5.3: Topología de  $H_j^{-1}(h)$  con  $h = -1$  y  $j = 0$ .

las soluciones de dicha ecuación. Si tomamos  $\sigma_1 = 1$  y lo sustituimos en la definición de  $l_{-1}$  se tiene que  $\sigma_3 = -4$ , lo cual no puede ocurrir dado que  $\sigma_3 \in M_0$  y por lo tanto  $\sigma_3 \geq 0$ . Entonces tomamos el valor de  $\sigma_1 = -1$  y sustituyendo en  $l_{-1}$  obtenemos que  $\sigma_3 = 0$ . Por lo tanto  $H_0^{-1}(-1) = (-1, 0, 0)$ , el cual es un punto singular de la variedad semialgebraica  $M_0$ . Ver figura 5.3.

Cuando  $|j| = \mathcal{B}(h)$  y  $h > -1$ , por la proposición (5.14) la línea  $l_h$  interseca a la curva  $\mathcal{F}$  en un punto no singular que denotamos por  $p_{h,j}$ . Entonces  $\rho(H_j^{-1}(h)) = p_{h,j}$ . Dado que todo punto en  $\mathcal{F}$  viene de un solo punto bajo la proyección  $\rho$ , tenemos que  $H_j^{-1}(h)$  es un punto. Ver figura 5.4.

2. Cuando  $|j| < \mathcal{B}(h)$ ,  $h > -1$  y  $(h, j) \neq (1, 0)$ , la línea  $l_h$  interseca a  $\rho(M_j)$  en un segmento de línea cerrada  $L_{h,j}$  cuyos puntos extremos están sobre  $\mathcal{F}$ . Para todo punto en el interior de  $L_{h,j}$ , la fibra de  $\rho$  consiste de dos puntos (pues  $2(h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) - j^2 = \sigma_2^2 > 0$ ) mientras que sobre los puntos extremos de  $L_{h,j}$ , la fibra de  $\rho$  consiste de un solo punto (pues  $\sigma_2 = 0$ ). Entonces

$$\rho^{-1}(L_{h,j}) = \{(\sigma_1, \pm\sigma_2, \sigma_3) \in M_j : \sigma_2 = \sqrt{2(h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) - j^2}\}.$$

Es claro geoméricamente que  $\Pi_h \cap M_j = \rho^{-1}(L_{h,j})$ . Como  $H_j^{-1}(h) = \Pi_h \cap M_j$  concluimos que  $H_j^{-1}(h) = \rho^{-1}(L_{h,j})$ , el cual es un círculo topológico. Dado que  $(h, j)$  es un valor regular de  $\mathcal{E}\mathcal{M}$  y por la proposición 5.1, el valor de  $h$

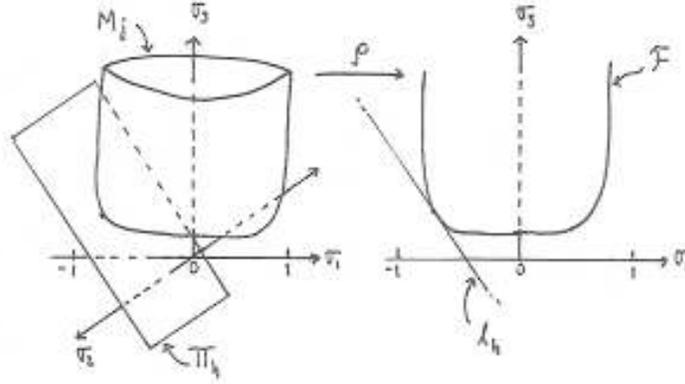


Figura 5.4: Topología de  $H_j^{-1}(h)$  con  $|j| = \mathcal{B}(h)$  y  $h > -1$ .

es un valor regular para la función hamiltoniana  $H_j$ . Por lo tanto  $H_j^{-1}(h)$  es un círculo suave. Ver figura 5.5.

3. Cuando  $h = 1$ , la línea  $l_1$  interseca  $\rho(M_0)$  en un segmento de línea cerrada  $L_{1,0}$ . Por lo tanto  $H_0^{-1}(1) = \rho^{-1}(L_{1,0})$  es un círculo topológico.

Como variedad semialgebraica en  $\mathbb{R}^3$ , el conjunto de nivel  $H_0 = 1$  se define por

$$\begin{aligned}\sigma_2^2 &= \sigma_3(1 - \sigma_1^2) \\ 1 &= \frac{1}{2}\sigma_3 + \sigma_1.\end{aligned}$$

Eliminando  $\sigma_3$  de las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma_2^2 &= 2(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) = 2(1 - \sigma_1)^2(1 + \sigma_1) \\ &= 2(1 - \sigma_1)^2(2 - (1 - \sigma_1)) = 4(1 - \sigma_1)^2 - 2(1 - \sigma_1)^3.\end{aligned}\quad (5.18)$$

Por lo tanto  $H_0^{-1}(1)$  tiene una singularidad cónica en  $(1, 0, 0)$ . En efecto, sea  $\alpha(\sigma_1) = (\sigma_1, \pm\sqrt{4(1 - \sigma_1)^2 - 2(1 - \sigma_1)^3}, 2(1 - \sigma_1))$  una curva en  $\mathbb{R}^3$ . Un cálculo sencillo puede demostrar que el límite cuando  $\sigma_1 \rightarrow 1$  por la derecha o por la izquierda se tiene entonces que  $\alpha \rightarrow (1, \pm 2, -2)$  respectivamente. Por lo tanto tenemos una singularidad en el punto  $(1, 0, 0) \in M_0$ . Decimos que tiene una singularidad cónica en este punto pues podemos ajustar un

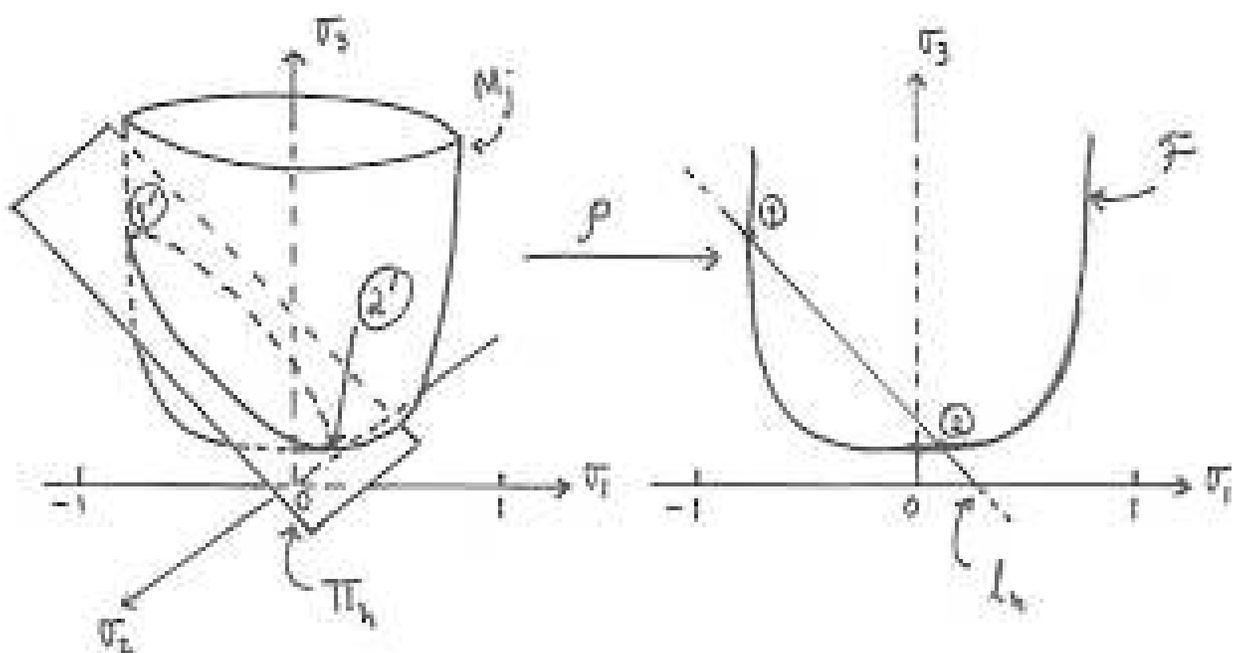


Figura 5.5: Topología de  $H_j^{-1}(h)$  con  $|j| < \mathcal{B}(h)$ ,  $h > -1$  y  $(h, j) \neq (1, 0)$ .

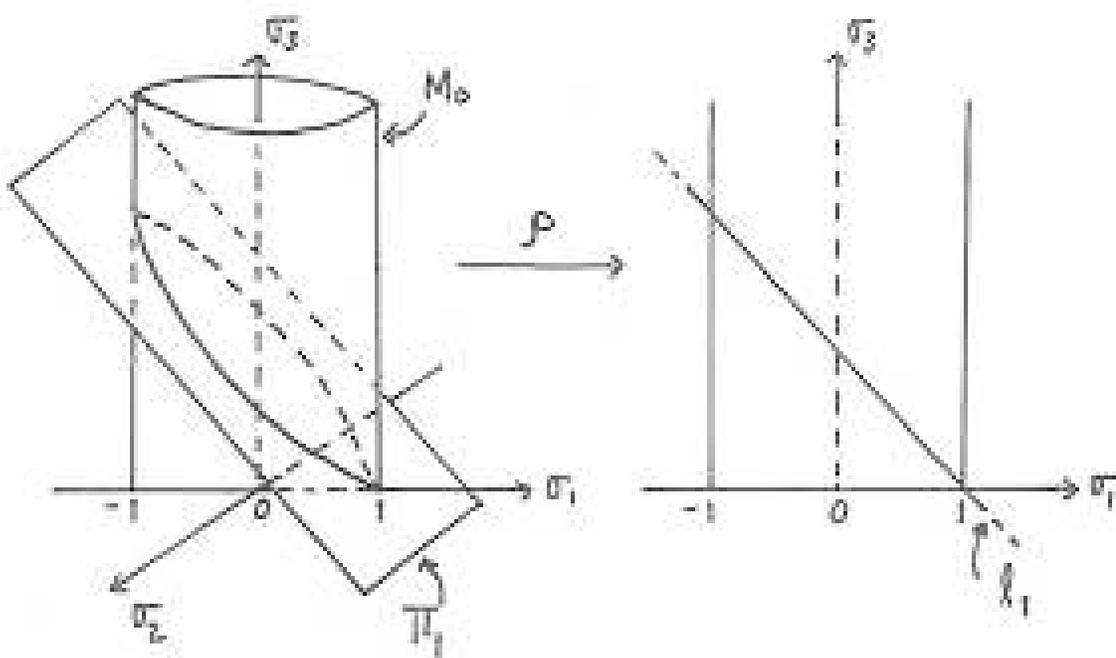


Figura 5.6: Topología de  $H_j^{-1}(h)$  con  $h = 1$  y  $j = 0$ .

cono tangente a  $H_0^{-1}(1)$  en  $(1, 0, 0)$  tal que este punto es el vértice del cono. En los demás puntos,  $H_0^{-1}(1)$  es suave. Ver figura 5.6. ■

### 5.3. Topología de $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$

A continuación describiremos la topología de las fibras de la función de energía-momento del péndulo esférico.

**Definición 5.16.** Sean  $N_1, N_2$  variedades algebraicas en  $M_1, M_2$ , respectivamente, donde  $M_i$  es variedad diferenciable. Decimos que  $f : N_i \rightarrow \mathbb{R}$  es suave si existe  $F \in C^\infty(M_i)$  tal que  $F|_{N_i} = f$ . En ese caso denotamos  $f \in C^\infty(N_i)$ . Sea  $\pi : N_1 \rightarrow N_2$  suprayectiva. Decimos que  $\pi$  es suave si para toda  $f \in C^\infty(N_2)$  se tiene que  $f \circ \pi \in C^\infty(N_1)$ .

Sea  $\pi_j : (J|_{TS^2})^{-1}(j) \rightarrow M_j$  la función de reducción dada por  $\pi_j := \mu \circ \lambda_2$ , donde  $\mu$  y  $\lambda_2$  se muestran en (4.10). Por la definición 5.16 tenemos que  $\pi_j$  es suave si para toda  $f \in C^\infty(M_j)$  se tiene que  $f \circ \pi_j \in C^\infty(J^{-1}(j))$ .

**Lema 5.17.** La función  $\xi : C^\infty(M_j) \rightarrow C^\infty(J^{-1}(j)) : f \mapsto \pi_j^* F := F \circ \pi_j$  está bien definida, donde  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  es cualquier función tal que  $F|_{M_j} = f$ .

**Prueba.** (Siguiendo a Cushman y Bates [7, prueba 3.5]). Sea  $f$  una función suave sobre el espacio reducido  $M_j$ . Por definición, hay una función suave  $F$  sobre  $\mathbb{R}^3$  tal que  $F|_{M_j} = f$ . Entonces  $(\mu \circ \lambda_2)^* F$  es una función suave sobre  $T\mathbb{R}^3$  siguiendo el diagrama (4.10). Por lo tanto  $((\mu \circ \lambda_2)^* F)|_{J^{-1}(j)}$  es una función suave sobre  $J^{-1}(j)$ . Supóngase que  $F^1$  es una función suave tal que  $F^1|_{M_j} = f$ . Entonces  $\mu^*(F - F^1)$  se anula sobre  $V_j = \lambda_2(J^{-1}(j))$ , es decir,

$$\mu^*(F - F^1)|_{V_j} = (F - F^1) \circ \mu|_{V_j} = (F - F^1)|_{M_j} = f - f = 0$$

Por consiguiente,  $\lambda_2^*(\mu(F - F^1))$  se anula sobre  $J^{-1}(j)$ , es decir,

$$\lambda_2^*(\mu(F - F^1))|_{J^{-1}(j)} = (\mu^*(F - F^1)) \circ \lambda_2|_{J^{-1}(j)} = \mu^*(F - F^1)|_{V_j} = 0$$

Entonces  $((\mu \circ \lambda_2)^* F^1)|_{J^{-1}(j)} = ((\mu \circ \lambda_2)^* F)|_{J^{-1}(j)}$ . Por lo tanto la función

$$\xi : C^\infty(M_j) \rightarrow C^\infty(J^{-1}(j)) : f \rightarrow ((\mu \circ \lambda_2)^* F)|_{J^{-1}(j)}$$

está bien definida. Como  $\pi_j = (\mu \circ \lambda_2)|_{J^{-1}(j)}$ , se sigue que  $\xi = \pi_j^*$ . ■

**Proposición 5.18.** *Sea  $\pi_j$  la función de reducción definida anteriormente. Entonces*

1. *Como conjuntos se tiene*

$$\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j) = \pi_j^{-1}(H_j^{-1}(h)). \quad (5.19)$$

2. *La función de reducción*

$$\pi_j : J^{-1}(j) \rightarrow M_j \subseteq \mathbb{R}^3 : (x, y) \rightarrow (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (5.20)$$

*es suave y tiene fibras*

$$\pi_j^{-1}(m) = \begin{cases} S^1 & \text{si } M_j \text{ es suave en } m, \\ \text{un punto} & \text{si } M_j \text{ no es suave en } m. \end{cases}$$

**Prueba.**

1. De manera clara se tiene que  $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j) = H^{-1}(h) \cap J^{-1}(j)$ . También se puede ver del diagrama obtenido en (4.10) que la función de reducción  $\pi_j$  es suprayectiva y además  $\pi_j^* H_j := H_j \circ \pi_j = H|_{J^{-1}(j)}$ . Por lo tanto  $\pi_j^{-1}(H_j^{-1}(h)) = (H_j \circ \pi_j)^{-1}(h) = (H|_{J^{-1}(j)})^{-1}(h) = H^{-1}(h) \cap J^{-1}(j)$ .
2. Por demostrar que dada  $f \in C^\infty(M_j)$  se tiene  $f \circ \pi_j \in C^\infty(J|_{TS^2})^{-1}(j)$ . Supongamos que  $f \in C^\infty(M_j)$ . Entonces existe  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  tal que  $F|_{M_j} = f$ . La función de reducción  $\pi_j$  está definida por  $\pi_j = \bar{\pi}_j|(J|_{TS^2})^{-1}(j)$  con  $\bar{\pi}_j = \mu \circ \lambda_2$ . Por el lema 5.17,  $\bar{\pi}_j^* F \in C^\infty(J^{-1}(j))$ . Entonces existe  $\phi \in C^\infty(T\mathbb{R}^3)$  tal que  $\bar{\pi}_j^* F = \phi|_{J^{-1}(j)}$ . Para demostrar que  $\pi_j^* f$  es suave basta demostrar que  $\pi_j^* f = \phi_1|(J|_{TS^2})^{-1}(j)$ , para alguna  $\phi_1 \in C^\infty(TS^2)$ . Sea  $\phi_1 = \phi|_{TS^2}$ . Entonces se tiene la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \phi_1|(J|_{TS^2})^{-1}(j) &= \phi_1|(J^{-1}(j) \cap TS^2) = (\phi|_{J^{-1}(j)})|(J^{-1}(j) \cap TS^2) \\ &= (\bar{\pi}_j^* F)|(J^{-1}(j) \cap TS^2) = \bar{\pi}_j^* F|(J|_{TS^2})^{-1}(j) \\ &= F \circ \bar{\pi}_j|(J|_{TS^2})^{-1}(j) = F|_{M_j} \circ \bar{\pi}_j|(J|_{TS^2})^{-1}(j) \\ &= f \circ \bar{\pi}_j|(J|_{TS^2})^{-1}(j) = f \circ \pi_j = \pi_j^* f. \end{aligned}$$

Queda entonces demostrado que la función de reducción  $\pi_j$  es suave.

Ahora queremos demostrar que  $\pi_j^{-1}(m)$  es homeomorfo a  $S^1$  si  $M_j$  es diferenciable en  $m$  y homeomorfo a un punto en caso contrario. Observemos que  $M_j$  es suave en  $m$  si y sólo si  $m \neq (\pm 1, 0, 0)$ . En efecto, la variedad semialgebraica  $M_j$  se puede ver como la gráfica de la función :

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_2^2 + j^2}{1 - \sigma_1^2},$$

con  $|\sigma_1| \leq 1$ . Si tomamos  $\sigma_1 \neq \pm 1$  entonces esta función está bien definida. Si además nos tomamos  $\sigma_2 \neq 0$  y por lo tanto  $\sigma_3 \neq 0$  entonces:

$$D(\sigma_3) = \left( \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_2} \right) = (a, b)$$

con  $b \neq 0$ . Por lo tanto la variedad semialgebraica es suave en  $m$  si y sólo si  $m \neq (\pm 1, 0, 0)$ . De hecho sabemos de la sección 4.2 que si  $j \neq 0$  entonces  $M_j$  es difeomorfa a  $\mathbb{R}^2$  y, si  $j = 0$  entonces los únicos puntos singulares de la variedad semialgebraica  $M_0$  son  $(\pm 1, 0, 0)$ .

**Lema 5.19.** *Sea  $m \in M_j$  y  $m \neq \{(\pm 1, 0, 0)\}$ . Entonces  $\lambda_2^{-1}(\mu^{-1}(m)) = \pi_j^{-1}(m)$  es homeomorfa a  $S^1$ .*

**Prueba.** Por definición:

$$\pi_j^{-1}(m) = \{(x, y) \in TS^2 \cap J^{-1}(j) : \sigma_1 = x_3, \sigma_2 = y_3, \sigma_3 = \|y\|^2\}.$$

Sea  $\Psi$  la siguiente función:

$$\Psi_{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, j)} : S^1 \rightarrow \pi_j^{-1}(m) : \theta \mapsto (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3). \quad (5.21)$$

Sea  $m = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  un punto en  $M_j$ . Dado que  $\sigma_1 = x_3$  es un parámetro, entonces  $x_1$  y  $x_2$  quedan definidas por este parámetro de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2) = (\sqrt{1 - \sigma_1^2} \cos \theta, \sqrt{1 - \sigma_1^2} \sin \theta).$$

Por otro lado, las variables  $y_1$  y  $y_2$  quedan definidas por las ecuaciones  $\langle x, y \rangle = 0$  y  $x_1 y_2 - x_2 y_1 = j$ , es decir:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \sigma_1^2} \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_3 y_3 \\ j \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sigma_1^2}} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma_1 \sigma_2 \\ j \end{pmatrix}.$$

Entonces es claro que la función  $\Psi$  está bien definida y es diferenciable y por lo tanto continua. Claramente  $\Psi$  es un encaje de  $S^1$  a  $\mathbb{R}^6$  y por lo tanto es un homeomorfismo sobre su imagen. Solamente nos falta por demostrar que la imagen de  $\Psi$  cae en  $\pi_j^{-1}(m)$ . Para toda  $(x, y) \in \Psi(S^1)$  se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= (1 - \sigma_1^2)(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) + \sigma_1^2 = 1 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 &= \sqrt{1 - \sigma_1^2} \cos \theta \frac{-\sigma_1 \sigma_2 \cos \theta - j \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{1 - \sigma_1^2}} \\ &\quad + \sqrt{1 - \sigma_1^2} \operatorname{sen} \theta \frac{-\sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sen} \theta + j \cos \theta}{\sqrt{1 - \sigma_1^2}} + \sigma_1 \sigma_2 \\ &= -\sigma_1 \sigma_2 \cos^2 \theta - j \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sen}^2 \theta \\ &\quad + j \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \sigma_1 \sigma_2 = 0 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 &= \sqrt{1 - \sigma_1^2} \cos \theta \left( \frac{-\sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sen} \theta + j \cos \theta}{\sqrt{1 - \sigma_1^2}} \right) \\ &\quad - \sqrt{1 - \sigma_1^2} \operatorname{sen} \theta \left( \frac{-\sigma_1 \sigma_2 \cos \theta - j \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{1 - \sigma_1^2}} \right) \\ &= -\sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + j \cos^2 \theta \\ &\quad + \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + j \operatorname{sen}^2 \theta = j \\ x_3 &= \sigma_1 \\ y_3 &= \sigma_2 \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 &= \left( \frac{-\sigma_1 \sigma_2 \cos \theta - j \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{1 - \sigma_1^2}} \right)^2 \\ &\quad + \left( \frac{-\sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sen} \theta + j \cos \theta}{\sqrt{1 - \sigma_1^2}} \right)^2 + \sigma_2^2 \\ &= \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 + j^2}{1 - \sigma_1^2} + \sigma_2^2 = \frac{\sigma_2^2 + j^2}{1 - \sigma_1^2} = \sigma_3 \end{aligned}$$

■

(Continuación de prueba de proposición 5.18.) Resta demostrar que si  $m = (\pm 1, 0, 0)$  entonces  $\pi_j^{-1}(m)$  es un punto. Pero en este caso se tiene que  $\sigma_1 = x_3 = \pm 1$ , entonces  $x_1 = x_2 = 0$ . Además  $\sigma_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$ . Entonces  $\pi_j^{-1}(\pm 1, 0, 0) = \{(0, 0, \pm 1, 0, 0)\}$ .



Basados en la proposición 5.18 vamos a demostrar la siguiente:

**Proposición 5.20.** *Sea  $\mathcal{B}$  la función definida en la proposición 5.13. La topología de las fibras de la función de energía-momento viene dada por:*

Condiciones sobre $(h, j)$	Topología de $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$
1. $(h, j) = (-1, 0)$	Un punto
2. $ j  = \mathcal{B}(h)$ , $h > -1$	$S^1$ suave
3. $ j  < \mathcal{B}(h)$ , $-1 < h$ y $(h, j) \neq (1, 0)$	$T^2$ Un toro de dimensión dos suave
4. $(h, j) = (1, 0)$	$T^*$ ( $T^2$ con un círculo longitudinal pinchado en un punto)

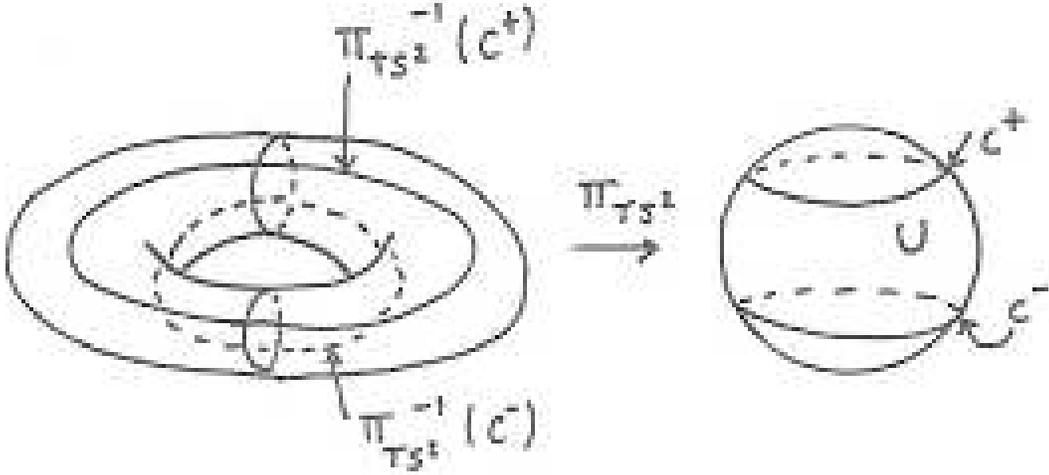
**Prueba.** 1. Si  $h = -1$  entonces  $\mathcal{B}(h) = 0$ . Entonces, por la proposición 5.15,  $H_{j=0}^{-1}(h = -1)$  es un punto. En la prueba de dicha proposición se muestra que dicho punto es  $(-1, 0, 0)$ , el cual es un punto donde  $M_0$  no es suave. Entonces, por la proposición 5.18, tenemos que  $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(-1, 0) = \pi_j^{-1}(\{(-1, 0, 0)\})$  es un punto. (De la prueba de la proposición 5.18 podemos ver que dicho punto es  $(0, 0, -1, 0, 0, 0)$ .)

**Observación.** Otra manera de ver este caso es la siguiente. No es difícil probar que cuando  $(h, j) = (-1, 0)$  entonces  $\sigma_1 = -1$  y  $\sigma_3 = 0$ . De las definiciones de  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , esto implica que  $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (0, 0, -1, 0, 0, 0)$ .

2. En este caso seguimos en el inciso 1 de la proposición 5.15, con  $h > -1$  y  $j = \pm\mathcal{B}(h) \neq 0$ . Por lo tanto  $H_j^{-1}(h)$  es un punto  $p_{h,j}$ . De la proposición 5.18, la fibra  $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j) = \pi_j^{-1}(H_j^{-1}(h)) = \pi_j^{-1}(\{p_{h,j}\}) = S^1$ . Aquí usamos que, como  $j \neq 0$  entonces  $M_j$  es suave en todos sus puntos y en particular en  $p_{h,j}$ .

3. Por demostrar que  $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j) = T^2$  si  $(h, j) \neq (1, 0)$  y  $-1 < h$ . Para ello trataremos de ver a  $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$  como un tipo de haz sobre su imagen bajo la siguiente proyección:

$$\pi_{TS^2} : TS^2 \subset T\mathbb{R}^3 \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 : (x, y) \rightarrow x \quad (5.22)$$


 Figura 5.7: Imagen de  $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$  bajo  $\pi_{TS^2}$ .

La fibra  $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j) \subset TS^2 \subset T\mathbb{R}^3$  se define por

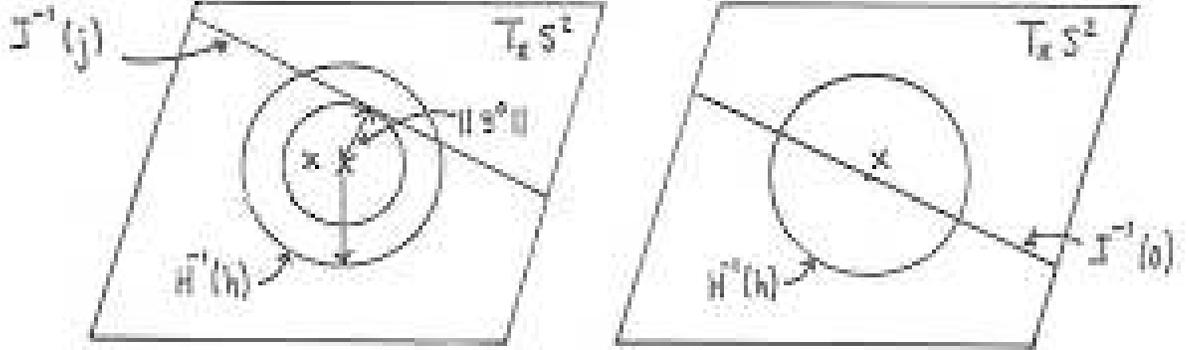
$$\begin{aligned}
 1 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\
 0 &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\
 h &= \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + x_3 \\
 j &= x_1y_2 - x_2y_1.
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Supongamos que  $(x, y) \in \mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$  y  $x \neq (0, 0, \pm 1)$ . Entonces sobre  $T_xS^2$ , la imagen inversa  $J^{-1}(j)$  es la línea afín

$$j = x_1y_2 - x_2y_1, \tag{5.24}$$

con  $x_1 \neq 0$  o  $x_2 \neq 0$ . Tomando la segunda ecuación de (5.23), que es la que define a  $T_xS^2$ , junto con la ecuación (5.24) podemos obtener a  $y_1$  y  $y_2$  parametrizadas por  $x_1, x_2, x_3, y_3$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= -\frac{1}{1-x_3^2}(jx_2 + x_1x_3y_3) \\
 y_2 &= -\frac{1}{1-x_3^2}(-jx_1 + x_2x_3y_3).
 \end{aligned} \tag{5.25}$$


 Figura 5.8: Geometría de  $H^{-1}(h)$  y  $J^{-1}(j)$  en un espacio tangente fijo  $T_x S^2$ .

La línea parametrizada por  $y_3$  en el plano tangente en  $x$  a la esfera viene dada por:

$$\left\{ \left( -\frac{jx_2 + x_1x_3y_3}{1 - x_3^2}, -\frac{-jx_1 + x_2x_3y_3}{1 - x_3^2}, y_3 \right) : y_3 \in \mathbb{R} \right\}, \quad (5.26)$$

cuya norma es:

$$\|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \frac{j^2 + y_3^2}{1 - x_3^2} := N_{y_3}. \quad (5.27)$$

Ahora  $N_{y_3}$  tiene un extremo en  $y_3 = 0$ , es decir:

$$\frac{dN_{y_3}}{dy_3} = \frac{2y_3}{1 - x_3^2} = 0,$$

si y sólo si  $y_3 = 0$ . La segunda derivada es claramente positiva, por lo que este extremo es un mínimo. Entonces si  $x_3 \neq \pm 1$ , el punto más cercano de  $J^{-1}(j)$  al origen de  $T_x S^2$  viene dado por el vector

$$y^0 = \left( \frac{-jx_2}{1 - x_3^2}, \frac{jx_1}{1 - x_3^2}, 0 \right).$$

Dado que  $\|y\|^2 \geq \|y^0\|^2$  para toda  $y \in J^{-1}(j) \cap T_x S^2$ , se tiene entonces:

$$\begin{aligned} 2(H(x, y) - x_3) &= 2(h - x_3) = \|y\|^2 \\ &\geq \|y^0\|^2 = 2(H(x, y^0) - x_3) \\ &= 2 \left( \frac{(x_1^2 + x_2^2)j^2}{2(x_1^2 + x_2^2)^2} \right) = \frac{j^2}{1 - x_3^2} \end{aligned}$$

Sea  $U$  el conjunto de todas las  $x \in S^2$  tal que satisfacen la desigualdad anterior, es decir,

$$2(h - x_3)(1 - x_3^2) - j^2 \geq 0 \quad (5.28)$$

y además  $\pi_{TS^2}(\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)) = U \subseteq S^2$ .

**Observación.** Otra manera de obtener la desigualdad anterior es la siguiente. De la sección 4.1 sabemos que cada punto de la variedad semialgebraica  $W$  debe satisfacer  $\tau_4^2 + \tau_6^2 = \tau_3\tau_5$  con  $\tau_3 \geq 0$  y  $\tau_5 \geq 0$ . Sustituyendo cada una de las  $\tau_i$  con  $i = 1, \dots, 6$  en términos de las  $(x, y)$  (ver (4.1)) se tiene que cada punto de la variedad  $W$  debe satisfacer  $(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1y_1 + x_2y_2)(x_1y_2 - x_2y_1)$ . Utilizando las ecuaciones (5.23) en esta última expresión y despejando a  $y_3^2$  se tiene que

$$0 \leq y_3^2 = 2(h - x_3)(1 - x_3^2) - j^2, \quad (5.29)$$

la cual es justamente la desigualdad obtenida en (5.28).

Ahora consideremos el polinomio  $P(x_3)$  definido de la siguiente forma:

$$P(x_3) = (h - x_3)(1 - x_3^2). \quad (5.30)$$

Como  $P(x_3)$  es un polinomio cúbico entonces, como ilustra el dibujo 5.9, tiene tres raíces. Las raíces son simples si  $h \neq 1$ . Es claro que el conjunto  $P^{-1}([j^2/2, \infty))$  es la unión disjunta de un intervalo cerrado  $[x_3^-, x_3^+]$  y un intervalo semiabierto. (Esta unión deja de ser disjunta cuando  $j = 0$  y  $h = 1$ ; este caso lo discutimos abajo en 4.) Es claro que el intervalo  $[x_3^-, x_3^+]$  está contenido en el intervalo  $[-1, 1]$ . Entonces  $[x_3^-, x_3^+]$  es el conjunto de todas las  $x_3 \in [-1, 1]$  las cuales satisfacen la desigualdad (5.28).

**Lema 5.21.** *Sea  $\mathcal{B}(h)$  la función definida en la proposición 5.13 y además  $|j| < \mathcal{B}(h)$ . Entonces el intervalo  $[x_3^-, x_3^+]$  no puede degenerar a un punto pues  $0 < \frac{1}{2}j^2 < \max P(x_3) = \frac{\mathcal{B}^2(h)}{2}$ .*

**Prueba.** Sea  $P(x_3)$  el polinomio dado por (5.30), entonces la derivada de  $P(x_3)$  se anula en  $x_3^0 \in [x_3^-, x_3^+]$  si

$$\left. \frac{d(P(x_3))}{dx_3} \right|_{x_3^0} = \left. \frac{d}{dx_3}(x_3^3 + hx_3^2 - x_3 + h) \right|_{x_3^0} = 3(x_3^0)^2 - 2hx_3^0 - 1 = 0,$$

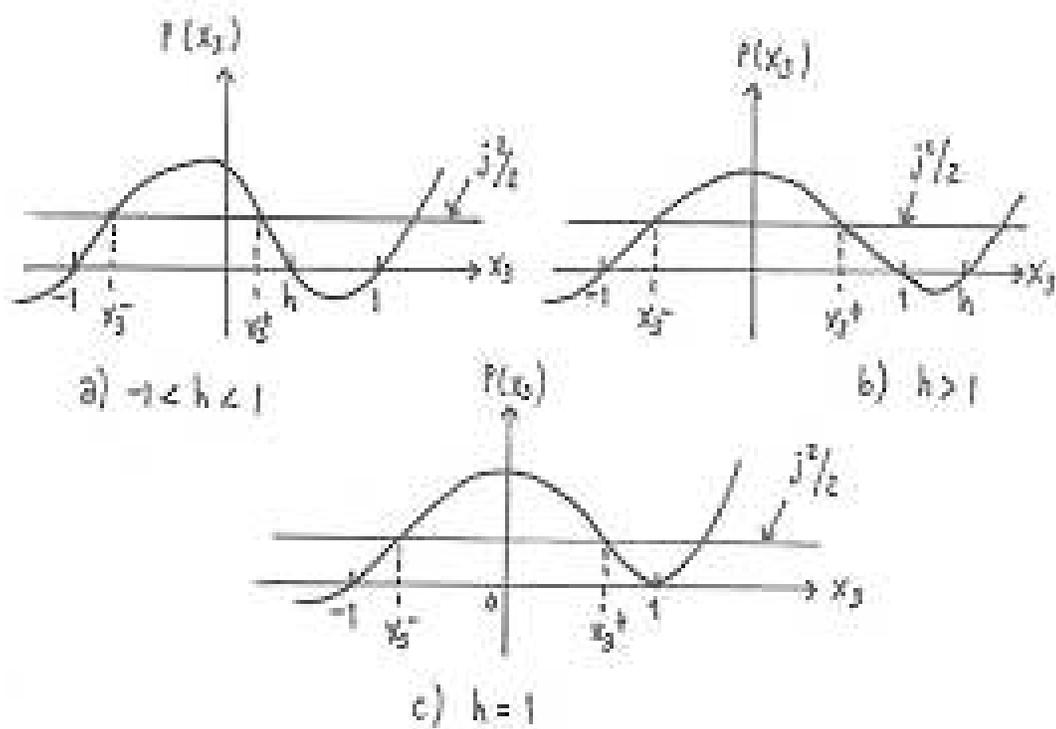


Figura 5.9: El polinomio  $P(x_3)$ .

La solución de esta ecuación de segundo grado es

$$x_3^0 = \frac{h \pm \sqrt{h^2 + 3}}{3} := \pm x_3.$$

Dicho polinomio tiene un máximo local si

$$\left. \frac{d^2(P(x_3))}{dx_3^2} \right|_{\pm x_3} = 6 \frac{h \pm \sqrt{h^2 + 3}}{3} - 2h = \pm 2\sqrt{h^2 + 3} < 0.$$

Por lo tanto, tomando la raíz negativa se tiene que el valor máximo local que alcanza el polinomio  $P(x_3)$  viene dado por:

$$\text{máx } P(x_3) := P(-x_3) = \frac{2}{27} (2h + \sqrt{h^2 + 3}) (3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3}).$$

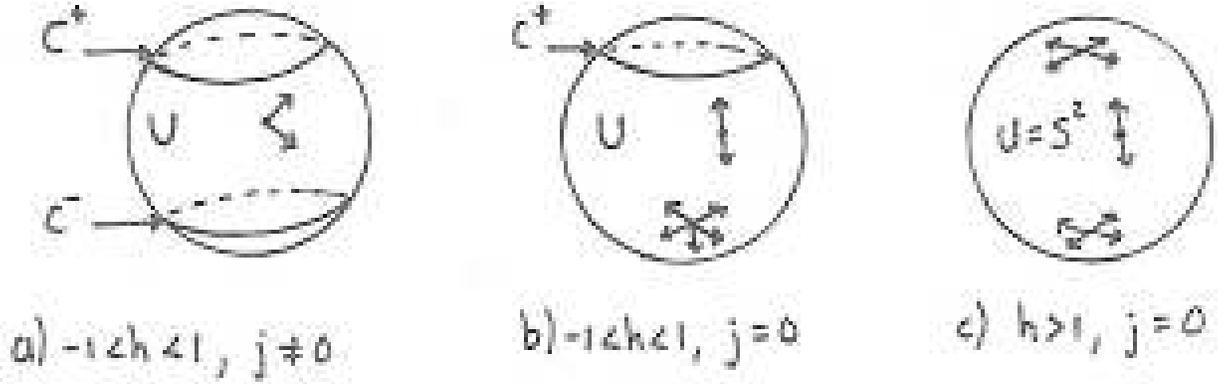
Por otro lado, sea  $\mathcal{B}(h)$  dado por la ecuación (5.13), entonces elevando al cuadrado dicha expresión y dividiendo entre dos se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{B}^2(h)}{2} &= \frac{2}{81} \left(3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3}\right)^2 \left(h + \sqrt{h^2 + 3}\right) \\ &= \frac{2}{81} \left(3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3}\right) \left[ \left(3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3}\right) \left(h + \sqrt{h^2 + 3}\right) \right] \\ &= \frac{2}{81} \left(3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3}\right) \left(6h + 3\sqrt{h^2 + 3}\right) \\ &= \frac{2}{27} \left(3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3}\right) \left(2h + \sqrt{h^2 + 3}\right) = \text{máx } P(x_3). \end{aligned}$$

Dado que por hipótesis se tiene que  $|j| < \mathcal{B}(h)$  entonces en particular se tiene que  $\frac{1}{2}j^2 < \frac{\mathcal{B}^2(h)}{2}$ . ■

**Caso  $j \neq 0$ .** En lo que sigue consideremos el caso  $j \neq 0$ . Entonces el intervalo  $[x_3^-, x_3^+]$  está propiamente contenido en  $[-1, 1]$ . Por lo tanto  $U$  es la región anular cerrada de  $S^2$  acotada por dos círculos;  $C^+$  si  $x_3 = x_3^+$  y  $C^-$  si  $x_3 = x_3^-$ . Ver figura 5.10. Dado que nuestro objetivo es ver a  $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$  como un haz sobre  $U$ , debemos determinar la fibra  $\pi_{TS^2}^{-1}(x) \in \mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$  para las  $x \in U$ .

Si se tiene la igualdad en (5.28) entonces  $x_3 = x_3^-$  ó  $x_3 = x_3^+$ . Esto es,  $x$  está sobre la frontera  $\partial U$  de  $U$ . En este caso  $y_3 = 0$  y por lo tanto  $y$  debe ser


 Figura 5.10: Descripción de  $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$  como un haz sobre  $U$ .

igual a  $y^0$ . Entonces la fibra  $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(x, y)$  sobre  $x \in \partial U$  es un simple vector  $y^0$  cuya tercera componente es nula. Por otro lado se tiene que si  $x$  es un punto interior de  $U$ , es decir  $x \in U \setminus \partial U$ , entonces la fibra de la proyección  $\pi_{TS^2}$  consiste de dos puntos, pues de la expresión (5.29) se tiene que  $y_3^2 > 0$ .

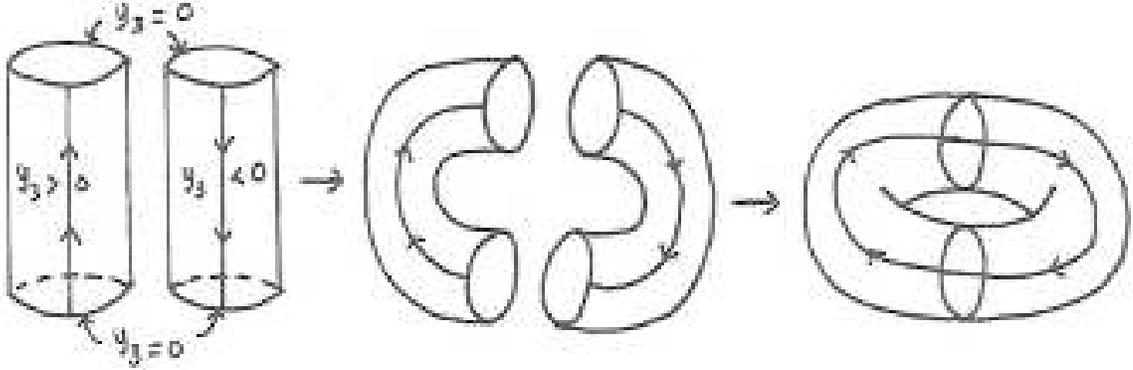
Lo siguiente que haremos es mostrar que  $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$  es homeomorfa al **toro**  $T^2$ . Sean las funciones  $\Psi_{\pm}$  definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm} : S^1 \times [x_3^-, x_3^+] &\rightarrow \mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j) \\ (\theta, x_3) &\mapsto (\bar{x}_1(\theta, x_3), \bar{x}_2(\theta, x_3), \bar{x}_3(\theta, x_3), \bar{y}_1(\theta, x_3), \bar{y}_2(\theta, x_3), \pm \bar{y}_3(\theta, x_3)), \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(\theta, x_3) &= \sqrt{1 - x_3^2} \cos \theta \\ \bar{x}_2(\theta, x_3) &= \sqrt{1 - x_3^2} \sin \theta \\ \bar{x}_3(\theta, x_3) &= x_3 \\ \bar{y}_1(\theta, x_3) &= -\frac{j \sin \theta \pm x_3 \bar{y}_3(\theta, x_3) \cos \theta}{\sqrt{1 - x_3^2}} \\ \bar{y}_2(\theta, x_3) &= -\frac{-j \cos \theta \pm x_3 \bar{y}_3(\theta, x_3) \sin \theta}{\sqrt{1 - x_3^2}} \\ \bar{y}_3(\theta, x_3) &= \sqrt{2(h - x_3)(1 - x_3^2) - j^2}. \end{aligned}$$

Es claro que  $\text{im } \psi_+ \cup \text{im } \psi_- = \mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$ . También es claro que si  $x$  está en la frontera de  $U$  el vector velocidad  $y$  se reduce al vector velocidad  $y^0$  dado


 Figura 5.11: Construcción de  $T^2$  con  $j \neq 0$  y  $-1 < h < 1$ .

anteriormente y, en la frontera  $S^1 \times \{x_3^-, x_3^+\}$  las imágenes bajo  $\psi_+$  y  $\psi_-$  de un punto en dicha frontera son las mismas, es decir,  $\Psi_+(\theta, x_3^\pm) = \Psi_-(\theta, x_3^\pm)$  para todo  $\theta \in S^1$ . Geométricamente se tiene que  $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$  consiste de dos cilindros que se intersecan en la frontera. Por lo tanto obtenemos finalmente el toro. Ver dibujo 5.11.

**Observación.** Las funciones  $\Psi_\pm$  se pueden interpretar como secciones globales de la función  $\pi_{TS^2}$ . En efecto, si definimos los homeomorfismos  $\sigma_\pm : U \subset S^2 \longrightarrow S^1 \times [x_3^-, x_3^+]$  de la siguiente manera:

$$\sigma_\pm : (\pm\sqrt{1-x_3^2} \cos \theta, \pm\sqrt{1-x_3^2} \sin \theta, x_3) \mapsto (\theta, x_3),$$

entonces  $\Psi_+ \circ \sigma_+$  y  $\Psi_- \circ \sigma_-$  son secciones globales de  $\pi_{TS^2}$ , es decir,  $\pi_{TS^2} \circ \Psi_\pm \circ \sigma_\pm = id|_U$ .

**Caso  $j = 0$ ,  $-1 < h < 1$ .** En este caso el intervalo  $[x_3^-, x_3^+]$  es justamente el intervalo  $[-1, h]$  (Ver figura 5.9). Entonces  $U$  es la región cerrada de  $S^2$  acotada por el círculo  $C^+$  donde justamente  $x_3 = h$ , es decir,  $x_1^2 + x_2^2 = 1 - h^2$  y contiene al polo sur. Ver figura 5.10. Utilizando la expresión (5.29) se tiene que  $y_3 = 0$  si  $x_3 = h$ , i.e.  $x \in \partial U$ , y entonces el vector  $y$  dado por la ecuación (5.26) viene expresada por  $y = (0, 0, 0)$ . Por lo tanto la fibra de proyección  $\pi_{TS^2}$  en un punto de la frontera de  $U$  consiste en un punto. Por otro lado,

si  $x$  está en el interior de  $U$  excepto el punto  $(0, 0, -1)$  entonces la fibra de proyección  $\pi_{TS^2}$  consiste de dos puntos, donde el vector  $y$  viene dado por:

$$y = \left( \pm \frac{x_1 x_3 y_3^{(h, x_3)}}{1 - x_3^2}, \pm \frac{x_2 x_3 y_3^{(h, x_3)}}{1 - x_3^2}, \pm y_3^{(h, x_3)} \right),$$

donde  $y_3^{(h, x_3)} := \sqrt{2(h - x_3)(1 - x_3^2)}$ .

Si  $x_3 = -1$  entonces por la igualdad en (5.29) se tiene que  $y_3 = 0$  y por la tercera ecuación de (5.23) se tiene que  $y_1^2 + y_2^2 = 2(h + 1)$ . Por lo tanto,  $\pi_{TS^2}^{-1}(0, 0, -1)$  es un círculo en  $T_{(0, 0, -1)}S^2$  de radio  $\sqrt{2(h + 1)}$ .

Lo siguiente es mostrar que  $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$  es homeomorfa a  $T^2$ . La construcción de este homeomorfismo será similar al caso anterior.

Sean las funciones  $\Psi_{\pm} : S^1 \times [-1, h] \rightarrow \mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$  definidas de la siguiente manera:

$$\Psi_{\pm}(\theta, x_3) = \left\{ \begin{array}{ll} (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \pm \bar{y}_1, \pm \bar{y}_2, \pm \bar{y}_3) & \text{si } x_3 \in (-1, h] \\ (0, 0, -1, \pm \sqrt{2(h + 1)} \cos \theta, \pm \sqrt{2(h + 1)} \sin \theta, 0) & \text{si } x_3 = -1 \end{array} \right\},$$

donde:

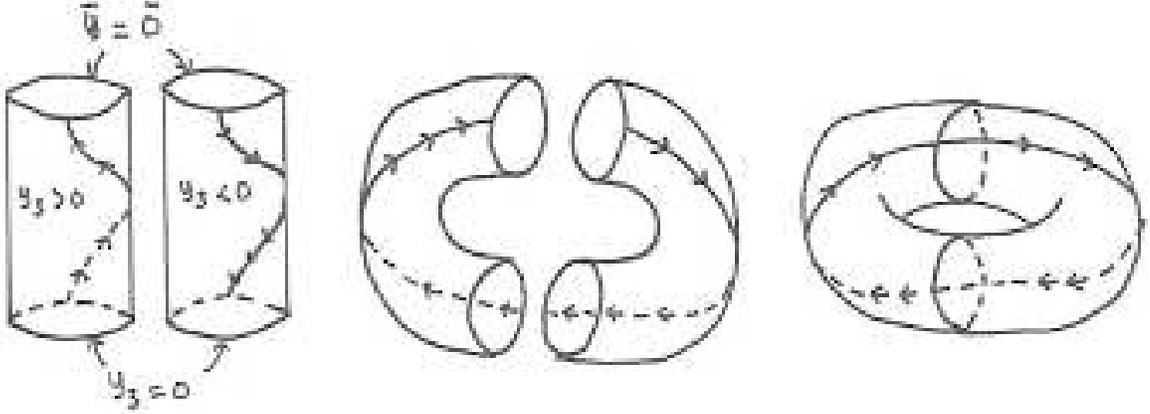
$$\begin{aligned} \bar{x}_1(\theta, x_3) &= \sqrt{1 - x_3^2} \cos \theta \\ \bar{x}_2(\theta, x_3) &= \sqrt{1 - x_3^2} \sin \theta \\ \bar{x}_3(\theta, x_3) &= x_3 \\ \bar{y}_1(\theta, x_3) &= -\frac{\sqrt{1 - x_3^2} \cos \theta x_3 \bar{y}_3(\theta, x_3)}{1 - x_3^2} = -x_3 \sqrt{2(h - x_3)} \cos \theta \\ \bar{y}_2(\theta, x_3) &= -\frac{\sqrt{1 - x_3^2} \sin \theta x_3 \bar{y}_3(\theta, x_3)}{1 - x_3^2} = -x_3 \sqrt{2(h - x_3)} \sin \theta \\ \bar{y}_3(\theta, x_3) &= \sqrt{2(h - x_3)(1 - x_3^2)}. \end{aligned}$$

De nuevo es claro que  $\text{im } \psi_+ \cup \text{im } \psi_- = \mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$ . Si  $x_3 = h$ , es decir,  $x \in C^+$  entonces:

$$\Psi_+(\theta, h) = (\sqrt{1 - h^2} \cos \theta, \sqrt{1 - h^2} \sin \theta, h, 0, 0, 0)$$

y

$$\Psi_-(\phi, h) = (\sqrt{1 - h^2} \cos \phi, \sqrt{1 - h^2} \sin \phi, h, 0, 0, 0).$$


 Figura 5.12: Construcción de  $T^2$  con  $j = 0$  y  $-1 < h < 1$ .

Entonces  $\Psi_+(\theta, h) = \Psi_-(\phi, h)$  si  $\theta = \phi$  para toda  $\theta \in S^1$ .

Por otro lado, si  $x_3 = -1$  entonces

$$\Psi_+(\theta, -1) = (0, 0, -1, \sqrt{2(h+1)} \cos \theta, \sqrt{2(h+1)} \operatorname{sen} \theta, 0)$$

y

$$\Psi_-(\phi, -1) = (0, 0, -1, -\sqrt{2(h+1)} \cos \phi, \sqrt{2(h+1)} \operatorname{sen} \phi, 0).$$

Entonces  $\Psi_+(\theta, -1) = \Psi_-(\phi, -1)$  si

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\cos \phi \\ \operatorname{sen} \theta &= -\operatorname{sen} \phi. \end{aligned}$$

Ambas condiciones se satisfacen si  $\theta = \phi + \pi$ . Entonces geoméricamente hemos encontrado de nuevo que  $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$  es la intersección de dos cilindros, excepto que en este caso, en la frontera inferior nosotros debemos *torcer* uno de los cilindros un ángulo  $\pi$  para poder identificar los puntos. Por lo tanto habiendo hecho la identificación de los puntos en la frontera de ambos cilindros podemos pegarlos y obtener el toro  $T^2$  tal como lo deseábamos. Para una mayor ilustración de este caso, nosotros dibujamos una trayectoria de la dinámica sobre este toro. Ver figura 5.12.

**Caso  $j = 0$  y  $h > 1$ .** En este caso el intervalo  $[x_3^-, x_3^+]$  es justamente el intervalo  $[-1, 1]$  (ver figura 5.9). Entonces  $U = S^2$ . Si  $x \in U \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$  entonces  $\pi_{TS^2}^{-1}(x)$  son dos vectores de signos opuestos distintos de cero, los cuales vienen dados por:

$$y = \left( \pm \frac{x_1 x_3 y_3^{(h, x_3)}}{1 - x_3^2}, \pm \frac{x_2 x_3 y_3^{(h, x_3)}}{1 - x_3^2}, \pm y_3^{(h, x_3)} \right),$$

donde  $y_3^{(h, x_3)} := \sqrt{2(h - x_3)(1 - x_3^2)}$ . Por otro lado, si  $x = (0, 0, -1)$  entonces la fibra  $\pi_{TS^2}^{-1}(x)$  es el círculo  $C^-$  dado por  $y_1^2 + y_2^2 = 2(h + 1)$ , y si  $x = (0, 0, 1)$  entonces la fibra  $\pi_{TS^2}^{-1}(x)$  es el círculo  $C^+$  dado por  $y_1^2 + y_2^2 = 2(h - 1)$ . Esto completa la descripción de  $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$  como un haz sobre  $U$ .

De nuevo vamos a mostrar que también en este caso se tiene que  $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$  es homeomorfa a  $T^2$ . Sean las funciones  $\Psi_{\pm} : S^1 \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$  definidas de la siguiente forma:

$$\Psi_{\pm}(\theta, x_3) = \left\{ \begin{array}{ll} (0, 0, 1, \mp \sqrt{2(h - 1)} \cos \theta, \mp \sqrt{2(h - 1)} \sin \theta, 0) & \text{si } x_3 = 1 \\ (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \pm \bar{y}_1, \pm \bar{y}_2, \pm \bar{y}_3) & \text{si } x_3 \in (-1, 1) \\ (0, 0, -1, \pm \sqrt{2(h + 1)} \cos \theta, \pm \sqrt{2(h + 1)} \sin \theta, 0) & \text{si } x_3 = -1 \end{array} \right\},$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(\theta, x_3) &= \sqrt{1 - x_3^2} \cos \theta \\ \bar{x}_2(\theta, x_3) &= \sqrt{1 - x_3^2} \sin \theta \\ \bar{x}_3(\theta, x_3) &= x_3 \\ \bar{y}_1(\theta, x_3) &= -\frac{\sqrt{1 - x_3^2} \cos \theta x_3 \bar{y}_3(\theta, x_3)}{1 - x_3^2} = -x_3 \sqrt{2(h - x_3)} \cos \theta \\ \bar{y}_2(\theta, x_3) &= -\frac{\sqrt{1 - x_3^2} \sin \theta x_3 \bar{y}_3(\theta, x_3)}{1 - x_3^2} = -x_3 \sqrt{2(h - x_3)} \sin \theta \\ \bar{y}_3(\theta, x_3) &= \sqrt{2(h - x_3)(1 - x_3^2)}. \end{aligned}$$

En este caso tanto en la función  $\Psi_+$  como en la función  $\Psi_-$  estamos dando explícitamente las imágenes de la frontera del cilindro  $S^1 \times [-1, 1]$ . Es claro también que  $\text{im } \psi_+ \cup \text{im } \psi_- = \mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$ . Lo único que resta por demostrar es que hagamos la identificación de los puntos de la frontera para poder construir el toro. Si  $x_3 = 1$  entonces

$$\Psi_+(\theta, 1) = (0, 0, 1, -\sqrt{2(h - 1)} \cos \theta, -\sqrt{2(h - 1)} \sin \theta, 0)$$

y

$$\Psi_-(\phi, 1) = (0, 0, 1, \sqrt{2(h-1)} \cos \phi, \sqrt{2(h-1)} \operatorname{sen} \phi, 0).$$

Como  $h > 1$  entonces es claro que  $\Psi_+(\theta, 1) = \Psi_-(\phi, 1)$  si

$$\begin{aligned} -\cos \theta &= \cos \phi \\ -\operatorname{sen} \theta &= \operatorname{sen} \phi. \end{aligned}$$

Ambas condiciones se satisfacen si  $\theta = \phi + \pi$ .

Por otro lado, si  $x_3 = -1$  entonces

$$\Psi_+(\theta, -1) = (0, 0, -1, \sqrt{2(h+1)} \cos \theta, \sqrt{2(h+1)} \operatorname{sen} \theta, 0)$$

y

$$\Psi_-(\phi, -1) = (0, 0, -1, -\sqrt{2(h+1)} \cos \phi, -\sqrt{2(h+1)} \operatorname{sen} \phi, 0).$$

Como  $h > 1$  entonces es claro que  $\Psi_+(\theta, -1) = \Psi_-(\phi, -1)$  si

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\cos \phi \\ \operatorname{sen} \theta &= -\operatorname{sen} \phi. \end{aligned}$$

De nueva cuenta, ambas condiciones se satisfacen si  $\theta = \phi + \pi$ . Entonces geoméricamente hemos mostrado de nuevo que  $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$  es la intersección de dos cilindros, y que a diferencia de los dos casos anteriores nosotros tenemos que rotar uno de los cilindros un ángulo  $\pi$ . Por lo tanto obtenemos el toro. Para una mayor ilustración de este caso dibujamos una trayectoria de la dinámica en el toro. Ver figura 5.13.

4. Por demostrar que si  $(h, j) = (1, 0)$  entonces la fibra de la función  $\mathcal{E}\mathcal{M}(h, j)$  es  $T^*$ , donde  $T^*$  es un toro  $T^2$  con un círculo longitudinal pinchado en un punto. Al ser  $h = 1$  se tiene que  $x_3 = 1$  es una raíz doble del polinomio  $P(x_3)$  dado por (5.30), además de la ecuación (5.29) se tiene que  $y_3 = \pm \sqrt{2(1-x_3)(1-x_3^2)}$ . Sea

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{1-x_3^2} \cos(\theta) \\ x_2 &= \sqrt{1-x_3^2} \operatorname{sen}(\theta), \end{aligned} \tag{5.31}$$

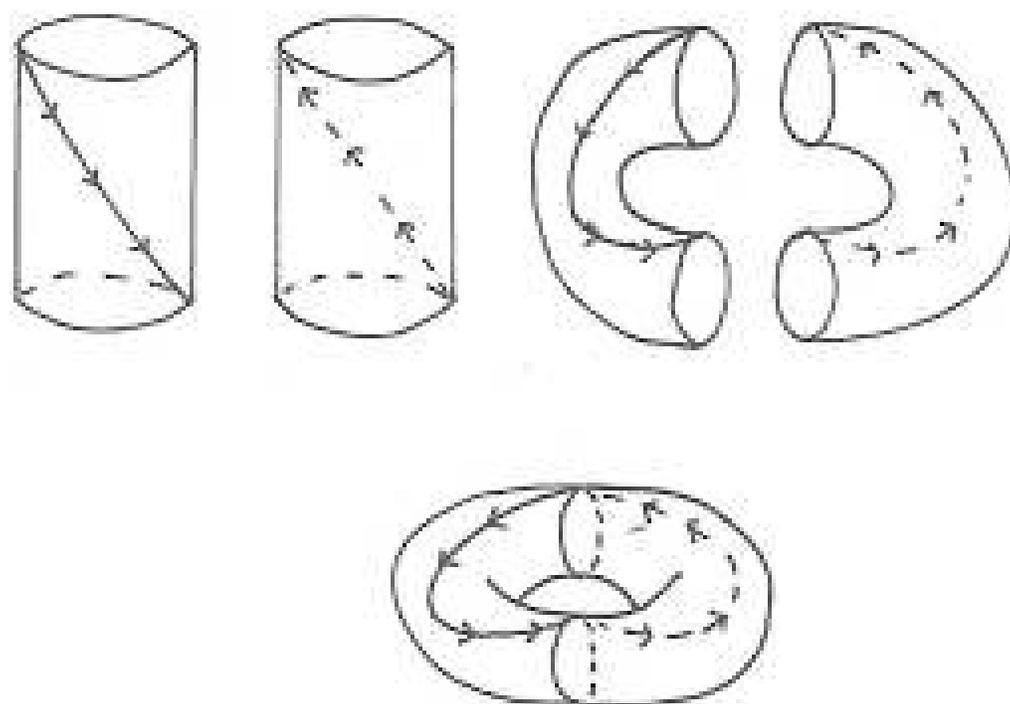


Figura 5.13: Construcción de  $T^2$  con  $j = 0$  y  $h > 1$ .

donde por supuesto se tiene que  $x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2$ . Entonces sustituyendo (5.31) en (5.25) se tiene

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{1-x_3^2} \left( \sqrt{1-x_3^2} \cos(\theta) x_3 y_3 \right) \\ y_2 &= -\frac{1}{1-x_3^2} \left( \sqrt{1-x_3^2} \operatorname{sen}(\theta) x_3 y_3 \right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Si  $x_3 \neq \pm 1$  entonces las ecuaciones para  $y_1, y_2$  dadas en (5.32) se reducen a

$$\begin{aligned} y_1 &= \pm x_3 \cos(\theta) \sqrt{2(1-x_3)} \\ y_2 &= \pm x_3 \operatorname{sen}(\theta) \sqrt{2(1-x_3)}. \end{aligned}$$

Entonces si  $x_3 \in (-1, 1)$  se tiene que  $\pi_{TS^2}|_{\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(1,0)}$  es  $S^2$  menos los polos. Este conjunto lo identificamos con el cilindro  $S^1 \times (-1, 1)$ .

Pero veamos qué pasa en los polos. Para ver qué ocurre en el polo norte, tomemos  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeña, y sea  $x_3 = 1 - \epsilon$ ; entonces las ecuaciones (5.31) y (5.32) se transforman en:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{1-(1-\epsilon)^2} \cos(\theta) \\ x_2 &= \sqrt{1-(1-\epsilon)^2} \operatorname{sen}(\theta) \\ y_1 &= -\frac{1}{1-(1-\epsilon)^2} \left( \sqrt{\epsilon(2-\epsilon)} \cos(\theta) (1-\epsilon) y_3 \right) \\ y_2 &= -\frac{1}{1-(1-\epsilon)^2} \left( \sqrt{\epsilon(2-\epsilon)} \operatorname{sen}(\theta) (1-\epsilon) y_3 \right) \\ y_3 &= \pm \sqrt{2\epsilon^2(2-\epsilon)}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Tomando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  se tiene:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (0, 0, 1, 0, 0, 0). \quad (5.34)$$

Ahora veamos qué pasa en el polo sur, es decir tomamos  $x_3 = -1 + \epsilon$ , sustituyendo esta expresión en (5.31) y (5.32) y tomando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  se tiene:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (0, 0, -1, 2 \cos(\theta), 2 \operatorname{sen}(\theta), 0). \quad (5.35)$$

Entonces hemos mostrado que la fibra sobre  $x \in S^2 - (0, 0, \pm 1)$  consiste de dos vectores de signos opuestos con tercera componente distinta de cero, mientras

que la fibra sobre  $x = (0, 0, -1)$  es el círculo  $C^-$  dado por  $y_1^2 + y_2^2 = 4$ , y la fibra sobre  $x = (0, 0, 1)$  es el vector velocidad cero. Por lo tanto todos los puntos de  $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(1, 0)$  excepto el polo norte con vector de velocidad cero son regulares. Entonces  $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(1, 0)$  menos el polo norte con vector de velocidad cero es una variedad diferenciable la cual podemos identificar con la esfera menos los polos.

Geométricamente tomamos un círculo de radio  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeña cerca del polo norte y junto con el círculo  $C^-$  formamos un par de cilindros ( $y_3 > 0, y_3 < 0$ ).

Lo siguiente que demostraremos es que cuando  $x$  es justamente el polo sur, entonces los cilindros se pegan de manera suave. Dado la función de energía momento en (5.1) la derivada de esta función es:

$$(\mathbf{D}(\mathcal{E}\mathcal{M}))|_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & -y_1 & 0 & -x_2 & x_1 & 0. \end{pmatrix}$$

Si  $(x, y) \in \mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(1, 0)$  y  $-1 < x_3 < 1$  entonces la derivada de la función  $\mathcal{E}\mathcal{M}$  tiene rango máximo, pues al menos  $x_1$  o  $x_2$  es distinto de cero y por lo tanto se tienen dos renglones linealmente independientes. Si  $x_3 = -1$  entonces la derivada de la función de energía-momento viene dada por:

$$(\mathbf{D}(\mathcal{E}\mathcal{M}))|_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \cos(\theta) & 2 \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ 2 \cos(\theta) & 2 \operatorname{sen}(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

De nuevo se observa que ambos renglones son linealmente independientes y por lo tanto tienen rango máximo también cuando  $x$  es justamente el polo sur. Por lo tanto hemos mostrado que en dicho punto, es decir, en el polo sur, los cilindros se pegan de manera suave. ■

## 5.4. Topología de $(H|TS^2)^{-1}(h)$

Lo primero que haremos, es demostrar que la función  $H|TS^2$  es una función de Morse, es decir, por la definición 2.23 necesitamos mostrar que los puntos críticos de  $H|TS^2$  son no degenerados.

Como una subvariedad de  $T\mathbb{R}^3$  con coordenadas  $(x, y)$ , la subvariedad  $TS^2$  se construyó como la imagen inversa del valor regular cero de la función definida en (3.6), es decir,  $TS^2 = \mathcal{C}^{-1}(0)$  donde

$$\mathcal{C} : T_0\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (c_1(x, y), c_2(x, y)),$$

y

$$\begin{aligned} c_1 : T_0\mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle x, x \rangle - 1 \\ c_2 : T_0\mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Sobre  $T\mathbb{R}^3$  consideremos la siguiente función:

$$H : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + x_3. \quad (5.36)$$

Utilizando los multiplicadores de Lagrange definidos en (2.6), la función  $H|_{TS^2}$  tiene un punto crítico  $p = (x_0, y_0)$  si este punto satisface:

$$[DH(x, y) + \lambda_1 Dc_1(x, y) + \lambda_2 Dc_2(x, y)]|_{(x_0, y_0)} = 0. \quad (5.37)$$

Calculando cada uno de los términos de la ecuación (5.37) se tiene

$$\begin{aligned} DH &= (0, 0, 1, y_1, y_2, y_3) \\ Dc_1 &= (2x_1, 2x_2, 2x_3, 0, 0, 0) \\ Dc_2 &= (y_1, y_2, y_3, x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Sustituyendo, desarrollando e igualando entrada a entrada cada uno de estos términos en la ecuación (5.37) se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1 &= 0, & y_1 + \lambda_2 x_1 &= 0, \\ 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 y_2 &= 0, & y_2 + \lambda_2 x_2 &= 0, \\ 1 + 2\lambda_1 x_3 + \lambda_2 y_3 &= 0, & y_3 + \lambda_2 x_3 &= 0, \end{aligned} \quad (5.39)$$

Tomando el conjunto de ecuaciones del lado derecho de (5.39), multiplicando por  $x_1$  la primera ecuación, por  $x_2$  la segunda ecuación, por  $x_3$  la última ecuación y sumando todas estas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= (x_1 y_1 + \lambda_2 x_1^2) + (x_2 y_2 + \lambda_2 x_2^2) + (x_3 y_3 + \lambda_2 x_3^2) \\ &= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) + \lambda_2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \lambda_2 \end{aligned} \quad (5.40)$$

Como  $\lambda_2 = 0$  se tiene entonces que  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$  para que se satisfaga el conjunto de ecuaciones del lado derecho de (5.39).

Tomando  $\lambda_2 = 0$  y suponiendo por un momento que  $\lambda_1 = 0$ , en la tercera igualdad del lado izquierdo de (5.39) tenemos  $0 = 1$  lo cual no puede ocurrir. Por lo tanto  $\lambda_1 \neq 0$  y entonces las dos primeras ecuaciones del lado izquierdo

de (5.39) se tiene que  $x_1 = x_2 = 0$ . Entonces sustituyendo  $x_3 = \pm 1$  en la tercera ecuación del lado izquierdo de (5.39) se tiene  $\lambda_1 = \pm \frac{1}{2}$ .

Por lo tanto  $H|TS^2$  tiene solamente dos puntos críticos  $\pm p = (0, 0, \pm 1, 0, 0, 0)$  con multiplicadores de Lagrange  $\lambda_1 = \pm \frac{1}{2}, \lambda_2 = 0$ . Lo siguiente es mostrar que estos dos puntos son no degenerados.

Por la proposición 2.31, el espacio tangente  $T_{(\pm p)}TS^2$  a  $TS^2$  en  $(\pm p)$  está dado por

$$\ker \begin{pmatrix} Dc_1(\pm p) \\ Dc_2(\pm p) \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

el cual es generado por los vectores  $\{e_1, e_2, e_4, e_5\}$ , siendo  $e_i$  con  $i = 1, \dots, 6$  una base para  $T\mathbb{R}^3$ . Dicho de otro modo, el espacio tangente  $T_{(\pm p)}TS^2$  a  $TS^2$  en  $(\pm p)$  es la imagen de la matriz

$$T_{(\pm p)}TS^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para comprobar que los puntos críticos  $\pm p$  son no degenerados necesitamos calcular las segundas derivadas de cada uno de los términos de (5.38) para poder aplicar (2.7). Cada una de las segundas derivadas de (5.38) viene dada por

$$D^2H(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$D^2c_1(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que  $\lambda_2 = 0$  no necesitamos calcular  $D^2c_2(x, y)$ , además se puede ver que las matrices anteriores (segundas derivadas de  $H$  y  $c_1$  respectivamente) no dependen de los puntos críticos, pues no aparecen las variables  $x$  y  $y$ , entonces lo único que por demostrar es que el Hessiano de  $H|_{TS^2}$  es invertible.

**Lema 5.22.** *Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita y  $B$  una forma bilineal asociada a este espacio vectorial, es decir,  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . Sean  $\beta_1$  y  $\beta_2$  bases de  $V$  y  $P$  la matriz de transición de la base  $\beta_1$  a la base  $\beta_2$ . Si  $A$  es la matriz de  $B$  en la base  $\beta_1$  y la cual denotaremos como  $[A]_{\beta_1}$ , entonces  $[A]_{\beta_2} = P^T[A]_{\beta_1}P$  es la matriz de  $B$  en la base  $\beta_2$ .*

**Prueba.** Éste es un resultado estándar de álgebra lineal; véase e.g. [11]. ■

Utilizando el lema anterior mostraremos que el Hessiano de  $H|_{TS^2}$  (el cual es por supuesto una forma bilineal) evaluado en los puntos críticos es invertible. Sea  $\beta_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$  la base canónica de  $\mathbb{R}^6 \approx T\mathbb{R}^3$  y sea  $\beta_2 = (e_1, e_2, e_4, e_5, e_3, e_6)$  otra base de  $\mathbb{R}^6$ . Podemos observar que los primeros cuatro vectores de la base  $\beta_2$  generan precisamente el espacio tangente  $T_{(\pm p)}TS^2$  a  $TS^2$  en  $(\pm p)$  y lo único que hemos hecho es extender esta base a una base de  $\mathbb{R}^6$ . Entonces la matriz de transición  $P$  viene dada por

$$(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea  $B = D^2H(x, y) + \lambda_1 D^2c_1(x, y)$  (recordemos que  $\lambda_2 = 0$ ) la forma bilineal. Entonces la matriz  $A$  asociada a la forma bilineal  $B$  en la base  $\beta_1$  tiene la siguiente forma:

$$([A]_{\beta_1}) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por el lema 5.22 la matriz  $[A]_{\beta_2}$  viene dada explícitamente por:

$$([A]_{\beta_2}) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$D^2H(x, y) + \lambda_1 D^2c_1(x, y)|_{TS^2} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz invertible, los puntos críticos  $\pm p = (0, 0, \pm 1, 0, 0, 0) \in TS^2$  son no degenerados y  $H|_{TS^2}$  es una función de Morse.

El punto  $(-p) = (0, 0, -1, 0, 0, 0) \in TS^2$  representa un mínimo de  $H$  con valor crítico  $H(-p) = -1$  (El índice de Morse es cero).

El punto  $(+p) = (0, 0, 1, 0, 0, 0) \in TS^2$  representa un punto silla de  $H$  con valor crítico  $H(+p) = 1$  (El índice de Morse es dos).

**Proposición 5.23.** *La topología de las superficies de energía  $(H|_{TS^2})^{-1}(h)$  del péndulo esférico son las siguientes:*

Condición sobre $h$	Topología de $(H _{TS^2})^{-1}(h)$
1. $h = -1$	Un punto
2. $-1 < h < 1$	$S^3$
3. $h = 1$	$\mathbb{U}$ El haz de la esfera unitaria tangente a $S^2$ con una fibra pinchada en un punto
4. $h > 1$	$\mathbb{RP}^3$ El espacio proyectivo real de dimensión 3

**Prueba.** 1. Por definición

$$(H|_{TS^2})^{-1}(-1) = \{(x, y) \in TS^2 : \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + x_3 = -1\}$$

La ecuación  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = -2(1 + x_3) \geq 0$  se satisface si y sólo si  $x_3 \leq -1$ , como  $x_3 \in TS^2$  entonces  $x_3 = -1$  y  $x_1 = 0 = x_2$ , y por lo tanto  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$  si y sólo si  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ . Entonces  $(H|TS^2)^{-1}(-1) = (0, 0, -1, 0, 0, 0)$ , un punto.

2. Queremos demostrar que la topología de la fibra  $(H|TS^2)^{-1}(h)$  con  $-1 < h < 1$  es difeomorfa a  $S^3$ . Primero vamos a demostrar, usando el lema de Morse, que para valores de  $h$  ligeramente mayores que el valor mínimo  $-1$ , el conjunto de nivel de  $(H|TS^2)^{-1}(-1) \cap U_{p_-}$  es difeomorfo a la esfera  $S^3$ . Aquí  $U_{p_-}$  es una vecindad alrededor de  $p_-$ .

Sea

$$\begin{aligned} \bar{H}_1(x, y) &:= H_1(x, y)|TS^2 \\ &= (H(x, y) + 1)|TS^2 = \left(\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + x_3 + 1\right)|TS^2. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Entonces los puntos críticos no degenerados de  $H|TS^2$  son también puntos críticos no degenerados de  $\bar{H}_1$ . La función  $\bar{H}_1$  satisface las hipótesis del lema de Morse (ver proposición 2.27) y entonces hay un conjunto abierto  $U \subseteq T\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$  con  $(-p) \in U$  y un difeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$  con  $\varphi(-p) = 0$  tal que  $\bar{H}_1 \circ \varphi^{-1}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}D^2\bar{H}_1(-p)((\xi, \eta), (\xi, \eta))$  para toda  $(\xi, \eta) \in \varphi(U)$ . Queremos demostrar que una vecindad del punto  $-p$ , dada una  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeña se tiene que  $(\bar{H}_1)^{-1}(\epsilon) \cap U_{-p}$  es difeomorfo a  $S^3$ .

Por definición

$$\begin{aligned} (\bar{H}_1 \circ \varphi^{-1})^{-1}(\epsilon) &= \{(\xi, \eta) \in \varphi(U) : \bar{H}_1 \circ \varphi^{-1}(\xi, \eta) = \epsilon\} \\ &= \{(\xi, \eta) \in \varphi(U) : \frac{1}{2}D^2\bar{H}_1(-p)((\xi, \eta), (\xi, \eta)) = \epsilon\} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Calculando  $D^2\bar{H}_1(-p)((\xi, \eta), (\xi, \eta))$  se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2.$$

Entonces

$$(\bar{H}_1 \circ \varphi^{-1})^{-1}(\epsilon) = \{(\xi, \eta) \in \varphi(U) : \xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 = 2\epsilon\}$$

Por la proposición 2.28 tenemos que  $\varphi(\bar{H}_1^{-1}(\epsilon) \cap U_{-p}) = (\bar{H}_1 \circ \varphi^{-1})^{-1}(\epsilon)$  y dado que  $\varphi$  es un difeomorfismo entonces se tiene que  $\bar{H}_1^{-1}(\epsilon) \cap U_{-p}$  es difeomorfo a la esfera  $S^3$ . Pero también se tiene que  $\bar{H}_1^{-1}(\epsilon) \cap U_{-p}$  es difeomorfa a  $(H|TS^2)^{-1}(-1+\epsilon) \cap U_{-p}$ . Por lo tanto  $(H|TS^2)^{-1}(-1+\epsilon) \cap U_{-p}$  es difeomorfa a la esfera  $S^3$ .

**Observación.** Podemos escoger  $U_{-p}$  de tal forma que si  $(x, y) \in U_{-p} \subseteq T_{-p}S^2$  entonces  $-1 \leq x_3 < -1 + \epsilon$  y  $\|y^2\| < 2\epsilon$ , para alguna  $\epsilon > 0$ . Se sigue que  $x_i^2 < 2\epsilon$ ,  $i = 1, 2$ .

Usando el Lema de isotopía de Morse (ver proposición 2.30) se sigue que el conjunto de nivel  $(H|TS^2)^{-1}(h)$  es difeomorfo a  $S^3$  para toda  $h \in (-1, 1)$ , esto es,  $(H|TS^2)^{-1}(-1+\epsilon)$  es suavemente isotópico a  $(H|TS^2)^{-1}(1-\epsilon)$ . Esto concluye la demostración para el caso 2.

4. A continuación mostraremos que para  $h > 1$ ,  $(H|TS^2)^{-1}(h)$  es difeomorfo a  $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ . La demostración va a ser una composición de difeomorfismos. Mostraremos primero que  $(H|TS^2)^{-1}(h)$  es difeomorfo a  $T_1S^2$  (el **haz circular unitario tangente a  $S^2$** ), que éste a su vez es difeomorfo a  $SO(3)$  y que éste último es difeomorfo a  $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ , el espacio proyectivo real de dimensión 3.

Sea  $\varphi$  la siguiente función suave

$$\varphi : (H|TS^2)^{-1}(h) \rightarrow T_1S^2 : (x, y) \mapsto \left(x, \frac{y}{\sqrt{2h - 2x_3}}\right) = (\xi, \eta). \quad (5.43)$$

Dado que  $h > 1$  entonces  $h - x_3 > 0$  para toda  $x_3 \in [-1, 1]$ . El conjunto de nivel  $(H|TS^2)^{-1}(h) \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  se define por

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= 1, & \langle x, y \rangle &= 0 \\ h &= \frac{1}{2}\langle y, y \rangle + \langle x, e_3 \rangle. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Para toda  $(\xi, \eta) \in \varphi((H|TS^2)^{-1}(h))$  se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \langle \xi, \xi \rangle &= \langle x, x \rangle = 1, \\ \langle \xi, \eta \rangle &= \left\langle x, \frac{y}{\sqrt{2(h - x_3)}} \right\rangle = 0, \\ \langle \eta, \eta \rangle &= \left\langle \frac{y}{\sqrt{2(h - x_3)}}, \frac{y}{\sqrt{2(h - x_3)}} \right\rangle = 1. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Por lo tanto la imagen de  $\varphi$  está en efecto contenida en  $T_1S^2$ . Además,  $(\xi, \eta) \rightarrow (\xi, \eta\sqrt{2h - 2\xi_3})$  es una inversa suave de  $\varphi$  y entonces la función  $\varphi$  es un difeomorfismo.

Ahora  $T_1S^2$  se puede ver como el conjunto de todos los pares ordenados de vectores ortonormales  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^3$ . Extendiendo el par ordenado  $\{\xi, \eta\}$  a una base ortonormal orientada positivamente (regla de la mano derecha)  $\{\xi, \eta, \xi \times \eta\}$  de  $\mathbb{R}^3$ , se tiene que cada base puede ser identificada con una rotación propia de  $\mathbb{R}^3$  representada por la matriz  $(\xi, \eta, \xi \times \eta)$ . (Aquí cada entrada representa la columna de la matriz.) Entonces la función

$$\psi : T_1S^2 \subseteq T\mathbb{R}^3 \rightarrow SO(3) \subseteq \mathbb{R}^9 : (\xi, \eta) \mapsto (\xi, \eta, \xi \times \eta) \quad (5.46)$$

es una función suave y donde

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta & \xi \times \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2 \\ \xi_2 & \eta_2 & \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3 \\ \xi_3 & \eta_3 & \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \end{pmatrix}.$$

Si definimos la función inversa suave de  $\psi$  como

$$\sigma : SO(3) \rightarrow T_1S^2 : (\xi, \eta, \alpha) \mapsto (\xi, \eta),$$

entonces  $T_1S^2$  es difeomorfo a  $SO(3)$ .

**Observación.** Una demostración más completa de que  $T_1S^2$  es difeomorfo a  $S^3$  es ver que existe un isomorfismo del álgebra de Lie  $(T_e(T_1S^2), [,])$  con el álgebra de Lie  $(\mathbb{R}^3, \times)$ . Ver Cushman [7, cap. 3, secc. 1.4].

Por último mostraremos que  $SO(3)$  es difeomorfo a  $\mathbb{R}P^3$ ; para ello, seguiremos la demostración que da Marsden (ver [14, prop. 9.2.10]).

Transformamos la bola unitaria  $D_1^3 \subset \mathbb{R}^3$  a  $SO(3)$  enviando  $(x_1, x_2, x_3)$  a una rotación alrededor de este punto a través de un ángulo  $\pi\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$ , donde mandamos el elemento  $(0, 0, 0)$  a la identidad. Esta función es suave y suprayectiva. La restricción al interior de  $D_1^3$  es inyectiva. Sobre la frontera de  $D_1^3$ , que denotamos por  $\partial D_1^3$ , la función es 2 a 1. Por lo tanto induce una función biyectiva suave desde  $D_1^3$ , con puntos antipodales sobre la frontera identificados, de tal forma que la función inversa es suave. Entonces  $SO(3)$  es difeomorfo a  $D_1^3$  con puntos antipodales sobre la frontera identificados.

La transformación  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, x_3, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2})$  es un difeomorfismo de  $D_1^3$  con el hemisferio unitario superior de  $S^3$  con puntos antipodales sobre el ecuador identificados. Este último espacio es difeomorfo a la

esfera unitaria  $S^3$  con puntos antipodales identificados, los cuales coinciden con el espacio de líneas de  $\mathbb{R}^4$  que pasan por el origen, esto es, con  $\mathbb{RP}^3$ .

3. La última demostración es que si  $h = 1$  entonces  $(H|TS^2)^{-1}(1) = \mathbb{U}$ , donde  $\mathbb{U}$  es el haz circular unitario tangente a  $S^2$  con una fibra pinchada en un punto.

Por definición

$$(H|TS^2)^{-1}(1) = \left\{ (x, y) \in TS^2 : \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + x_3 = 1 \right\}.$$

Sea  $\varphi$  la siguiente función

$$\varphi : (H|TS^2)^{-1}(1) \rightarrow T_1S^2 : (x, y) \rightarrow \left( x, \frac{y}{\sqrt{2(1-x_3)}} \right)$$

Si  $x_3 \neq 1$  entonces  $\varphi$  es una función diferenciable y cuya inversa está dada por

$$\psi : T_1S^2 \rightarrow (H|TS^2)^{-1}(1) : (\xi, \eta) \rightarrow (\xi, \eta\sqrt{2(1-\xi_3)})$$

Por lo tanto, si  $x_3 \neq 1$ ,  $(H|TS^2)^{-1}(1)$  es un difeomorfismo con el haz circular unitario tangente a  $S^2$ .

Si  $x_3 = 1$  entonces  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ . Entonces

$$(H|TS^2)^{-1}(1) = T_1S^2 \cup (0, 0, 1, 0, 0, 0) = \mathbb{U} \quad (5.47)$$

■

# Bibliografía

- [1] Abraham, R. y Marsden, J.E. *Foundations of Mechanics*. The Benjamin Cummings Publishing Company, 1985.
- [2] Arms, J.M., Marsden, J.E. y Moncrief, V. Symmetry and Bifurcations of Momentum Mappings. *Commun. Math. Phys.* 78, 455–478, 1981.
- [3] Barden, D. y Thomas, C. *An Introduction to Differential Manifolds*. Imperial College Press, 2003.
- [4] Brickell, F. y Clark, R.S. *Differentiable Manifolds. An introduction*. Van Nostrand Reinhold Company, Londres VNR, 1970.
- [5] Bulajich, R. y Lopez de Medrano, S. *Teoría de Singularidades. Una introducción elemental*. Aportaciones Matemáticas. SMM, 1995.
- [6] Chruściński, D. y Jamiolkowski, A. *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*. Birkhäuser, 2004.
- [7] Cushman, R.H. y Bates, L.M. *Global Aspects of Classical Integrable Systems*. Birkhäuser, 1997.
- [8] Do Carmo, M. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [9] Duistermaat, J.J. y Kolk, J.A.C. *Lie Groups*. Springer, 1999.
- [10] Fowles, G. R. *Analytical Mechanics*. Saunders golden sunburts series, 1986.
- [11] Friedberg, S.H. *Linear Algebra*. Prentice Hall, 1989.

- [12] Gidea, M. y Burns, K. *Differential Geometry and Topology*. Chapman & Hall, 2005.
- [13] Marsden, J.E. *Elementary Classical Analysis*. W. H. Freeman and Company.
- [14] Marsden, J.E. y Ratiu, T.S. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer, 1999.
- [15] Munkres, J.R. *Topology*. Prentice Hall, 2000.
- [16] Puta, M. *Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization*. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [17] Talpaert, Y. *Differential Geometry with Applications to Mechanics and Physics*. Marcel Dekker Inc., 2000.
- [18] Uspensky, J.V. *Theory of Equations*. McGraw-Hill, 1958.
- [19] Weyl, H. *The classical groups*. Princeton University Press, 1946.

# Capítulo 6

## Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado en detalle algunos aspectos en la literatura sobre sistemas mecánicos integrables y hemos visto cómo la geometría diferencial permite estudiar aspectos cualitativos de la dinámica de un sistema mecánico. En particular, hemos mostrado cómo la teoría de Morse nos permitió hacer un estudio geométrico cerca de los puntos críticos no degenerados de la función de energía-momento<sup>1</sup>. También caracterizamos geoméricamente los espacios reducidos (para distintos valores del momento angular) y la topología de las fibras de las funciones de energía y de energía-momento.

En cuanto a nuestro sistema mecánico, el péndulo esférico, hemos estudiado el argumento que muestra que efectivamente es un **sistema hamiltoniano completamente integrable**, pues existen dos cantidades conservadas ( $2 = \dim TS^2/2$ ) llamadas la **energía**  $H$  y el **momento angular**  $J$ , las cuales bajo el paréntesis de Poisson están en involución, es decir,  $\{H|TS^2, J|TS^2\} = 0$ .

En esta tesis hemos también presentado al lector los aspectos básicos acerca de la reducción del espacio fase y la dinámica para el péndulo esférico, pero restringiéndonos únicamente a los resultados que necesitamos en capítulos posteriores. Un estudio detallado de la reducción de la dinámica hubiera requerido muchos resultados de geometría algebraica y topología algebraica que hemos dejado de lado.

En contraste, hemos estudiado en el capítulo 4 con detalle y de manera

---

<sup>1</sup>Cabe notar que en nuestro reporte de servicio social desarrollamos previamente una descripción bastante completa de la geometría del péndulo matemático (i.e. el péndulo plano), incluyendo la topología de las fibras de la función de energía, para lo cual también aplicamos la teoría de Morse cerca de puntos críticos no-degenerados.

bastante completa la topología de las fibras de la función de energía-momento  $\mathcal{E}\mathcal{M}$ . En particular obtuvimos e ilustramos el hecho de que para valores regulares de la función de energía-momento se tiene geoméricamente que cada fibra de dichos valores regulares es difeomorfa al **toro**,  $T^2$ . Este difeomorfismo es a veces conocido como el **Teorema de Arnold** y puede encontrarse en muchos textos de física teórica como puede ser en [1, 5.2.21] o en [7]. En este capítulo no solamente hemos mostrado la geometría asociada a la topología de las fibras para los valores regulares de  $\mathcal{E}\mathcal{M}$  sino también para los valores críticos de dicha función. Tanto para los valores regulares como para los valores críticos la descripción de las respectivas topologías fue hecha en base a las topologías de la función hamiltoniana  $H_j : M_j \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , que es un sistema con un solo grado de libertad y donde  $M_j$  es una variedad semialgebraica. Por último, describimos también geoméricamente la topología de las fibras de la función  $H|_{TS^2}$ . Cabe mencionar que el punto crítico  $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$  (el polo norte), fue el que mayor problema representó al tratar de describir dichas geometrías.

También podrá haber observado el lector que la parte de la introducción fue bastante larga, aún cuando en esta parte dimos las definiciones y proposiciones que simplemente necesitábamos. En este sentido la literatura es bastante extensa tanto en el área de las matemáticas como en la de física. Conviene volver a recordar que las definiciones y proposiciones aquí dadas pueden ser extendidas a objetos matemáticos más complejos, como los haces vectoriales y los haces fibrados. Estos dos últimos objetos matemáticos son de mucho uso hoy en día para el estudio de temas como la relatividad, la mecánica cuántica o la teoría de Yang-Mills.

Finalmente, tratar de encontrarle sentido físico a muchas de las proposiciones aquí dadas no es del todo fácil. Pero sin estas proposiciones a veces es difícil entender algunas otras proposiciones que si muestran la física del problema. Es muy dado actualmente en la física proponer cierta teoría sin estar bien fundamentada matemáticamente. Pero para que una teoría alcance madurez es necesario desarrollar los fundamentos matemáticos de la misma.

# Bibliografía

- [1] Abraham, R. y Marsden, J.E. *Foundations of Mechanics*. The Benjamin Cummings Publishing Company, 1985.
- [2] Arms, J.M., Marsden, J.E. y Moncrief, V. Symmetry and Bifurcations of Momentum Mappings. *Commun. Math. Phys.* 78, 455–478, 1981.
- [3] Barden, D. y Thomas, C. *An Introduction to Differential Manifolds*. Imperial College Press, 2003.
- [4] Brickell, F. y Clark, R.S. *Differentiable Manifolds. An introduction*. Van Nostrand Reinhold Company, Londres VNR, 1970.
- [5] Bulajich, R. y Lopez de Medrano, S. *Teoría de Singularidades. Una introducción elemental*. Aportaciones Matemáticas. SMM, 1995.
- [6] Chruściński, D. y Jamiolkowski, A. *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*. Birkhäuser, 2004.
- [7] Cushman, R.H. y Bates, L.M. *Global Aspects of Classical Integrable Systems*. Birkhäuser, 1997.
- [8] Do Carmo, M. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [9] Duistermaat, J.J. y Kolk, J.A.C. *Lie Groups*. Springer, 1999.
- [10] Fowles, G. R. *Analytical Mechanics*. Saunders golden sunburts series, 1986.
- [11] Friedberg, S.H. *Linear Algebra*. Prentice Hall, 1989.

- [12] Gidea, M. y Burns, K. *Differential Geometry and Topology*. Chapman & Hall, 2005.
- [13] Marsden, J.E. *Elementary Classical Analysis*. W. H. Freeman and Company.
- [14] Marsden, J.E. y Ratiu, T.S. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer, 1999.
- [15] Munkres, J.R. *Topology*. Prentice Hall, 2000.
- [16] Puta, M. *Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization*. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [17] Talpaert, Y. *Differential Geometry with Applications to Mechanics and Physics*. Marcel Dekker Inc., 2000.
- [18] Uspensky, J.V. *Theory of Equations*. McGraw-Hill, 1958.
- [19] Weyl, H. *The classical groups*. Princeton University Press, 1946.

# Bibliografía

- [1] Abraham, R. y Marsden, J.E. *Foundations of Mechanics*. The Benjamin Cummings Publishing Company, 1985.
- [2] Arms, J.M., Marsden, J.E. y Moncrief, V. Symmetry and Bifurcations of Momentum Mappings. *Commun. Math. Phys.* 78, 455–478, 1981.
- [3] Barden, D. y Thomas, C. *An Introduction to Differential Manifolds*. Imperial College Press, 2003.
- [4] Brickell, F. y Clark, R.S. *Differentiable Manifolds. An introduction*. Van Nostrand Reinhold Company, Londres VNR, 1970.
- [5] Bulajich, R. y Lopez de Medrano, S. *Teoría de Singularidades. Una introducción elemental*. Aportaciones Matemáticas. SMM, 1995.
- [6] Chruściński, D. y Jamiolkowski, A. *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*. Birkhäuser, 2004.
- [7] Cushman, R.H. y Bates, L.M. *Global Aspects of Classical Integrable Systems*. Birkhäuser, 1997.
- [8] Do Carmo, M. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [9] Duistermaat, J.J. y Kolk, J.A.C. *Lie Groups*. Springer, 1999.
- [10] Fowles, G. R. *Analytical Mechanics*. Saunders golden sunburts series, 1986.
- [11] Friedberg, S.H. *Linear Algebra*. Prentice Hall, 1989.

- [12] Gidea, M. y Burns, K. *Differential Geometry and Topology*. Chapman & Hall, 2005.
- [13] Marsden, J.E. *Elementary Classical Analysis*. W. H. Freeman and Company.
- [14] Marsden, J.E. y Ratiu, T.S. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer, 1999.
- [15] Munkres, J.R. *Topology*. Prentice Hall, 2000.
- [16] Puta, M. *Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization*. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [17] Talpaert, Y. *Differential Geometry with Applications to Mechanics and Physics*. Marcel Dekker Inc., 2000.
- [18] Uspensky, J.V. *Theory of Equations*. McGraw-Hill, 1958.
- [19] Weyl, H. *The classical groups*. Princeton University Press, 1946.