UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"Introducción de mapas mentales en la enseñanza de las matemáticas"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

MARÍA PONCE DOMÍNGUEZ

Tutora : Mat. Concepción Ruiz Ruiz-Funes
Co-Tutora: Mat. Sara Alejandra Pando Figueroa

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2006

FACULTAD DE CIENCIAS

División de Estudios Profesionales

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente.

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

"Introducción de mapas mentales en la enseñanza de las matemáticas"

realizado por **Ponce Domínguez María,** con número de cuenta **09227084-6,** quien opta por titularse en la opción de **Tesis** de la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Tutor(a) Propietario	Mat.	Concepción Ruiz Ruiz-Funes	Concepción Ruiz
Co-Tutor(a) Propietario	Mat.	Sara Alejandra Pando Figueroa	SFigueroa.
Propietario	M. en C.	Gustavo Arturo Márquez Flores	Arturo Márquez Flores
Suplente	Mat.	Julieta del Carmen Verdugo Díaz	
Suplente	Mat.	José Gabriel Ocampo Márquez	Ocampo

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D.F., a 30 de octubre del 2006.
EL COORDINADOR DEL COMITÉ DE TITULACIÓN
DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

M. EN C. AGUSTÍN ONTIVEROS PINEDA

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

AGRADECIMIENTOS

A Dios.
Por haberme premiado con la buenaventura.
Por que a pesar de mis errores,
me escucha y me conforta.

A mis padres.
Por ser mis grandes maestros.
Por amarme y tenerme fe.
Por ser ejemplo de la determinación,
voluntad y éxito.
Son mi inspiración.
Son modelo de lo que deseo ser.

A mis maestros sinodales y
a los que participaron en mi formación.
Por compartirme su sabiduría,
su experiencia y su amistad.
Por corregirme y aconsejarme.
Son modelo de lo que llegaré a ser.

A mi esposo
Por amarme y acompañarme.
Por su paciencia y por su fe.
Por ser mi incondicional complemento.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN i

CAPÍTULO 1: MAPAS MENTALES Y MATEMÁTICAS. 1

1.1. Preámbulo. 1
1.2. Definición y componentes del mapa mental. 4
1.3. Tipos de mapas mentales. 6
1.4. Construcción de mapas mentales. 10

CAPÍTULO 2: ENTENDER ANTES DE HACER EN LAS MATEMÁTICAS DEL BACHILLERATO. 16

2.1. Comentarios acerca de la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato. 16
2.2. ¿Por qué usar mapas mentales en matemáticas? 19
2.3. Enseñanza de las matemáticas y mapas mentales. 27
2.4. Usos y beneficios de los mapas mentales en la enseñanza de las matemáticas. 34

CAPÍTULO 3: IMÁGENES Y DIBUJOS EN EL CONOCIMIENTO HUMANO. 38

3.1. Imágenes mentales y visuales. 38
3.2. Dibujos: Los retratos de la mente. 48

CAPÍTULO 4. SUGERENCIAS PARA EL USO DE MAPAS MENTALES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. 51

4.1. Geometría analítica con mapas mentales. 51
4.2. Geometría analítica a través de un cuento: “El Carteplan”. 105
4.3. Dinámicas para diseñar y usar mapas mentales en el aula: Crear y colorear, completar, armar, interpretar. 119
4.4. Cómo evaluar el contenido de los mapas mentales. 133

CONCLUSIÓN. 137

APÉNDICE. DETALLES DE MATERIAL DE SOFTWARE. 141

BIBLIOGRAFÍA. 142

INTRODUCCIÓN

Cada tres años la OCDE(Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico) organiza una evaluación conocida como PISA(Programa para la evaluación internacional de los estudiantes) que tiene como finalidad evaluar cómo los estudiantes de 15 años o más que terminan la parte obligatoria de la educación, han aprovechado y pueden utilizar el conocimiento adquirido y aplicarlo en un contexto real.

Desde el año 2000, las áreas temáticas evaluadas son: habilidades de lectura, ciencias y matemáticas. En la evaluación PISA 2003 el enfoque fue principalmente en matemáticas con el objetivo de determinar qué tanto los estudiantes son capaces de desarrollar y aplicar modelos matemáticos para tratar con tareas de la vida cotidiana e interpretar, validar y comunicar resultados. Las áreas evaluadas fueron: espacio y forma, cambio y relaciones, cantidad e incertidumbre, entre otras.[*]

México es uno de los países de la OCDE que obtuvo bajos resultados en esta prueba ya que según las cifras, 50% de los estudiantes mexicanos sólo pueden realizar tareas muy básicas tales como identificar información y llevar a cabo un procedimiento de rutina de acuerdo con instrucciones directas en situaciones explícitas. Otro 10% de estudiantes en México, puede tomar decisiones sencillas, usar estrategias simples de resolución de problemas o utilizar representaciones simbólicas. Dicho de otra manera, los estudiantes de nuestro país estarían en condiciones de obtener un seis o un siete de calificación en matemáticas si llegaran a competir con otras naciones del mundo desarrollado como Hong Kong-China, Finlandia, Estados Unidos, Canadá, Japón, Australia o la Unión Europea.[**]

Esta evaluación internacional es importante porque nos permite ver que a pesar de que en nuestro país se están haciendo esfuerzos por invertir más en el rubro educativo, éstos no están siendo eficientes. Las razones pueden ser diversas.

Para las personas a quienes nos interesa compartir nuestro conocimiento con los estudiantes mexicanos, este tipo de información nos motiva y da pie para que desarrollemos o, en su defecto, apliquemos estrategias y técnicas apropiadas que favorezcan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Estrategias y técnicas que permitan a los jóvenes ver, comprender, interpretar y verbalizar sus ideas y pensamientos al momento de estar empleando conceptos y objetos matemáticos. Estrategias y técnicas que vayan más allá de la simple memorización. Estrategias y técnicas que los familiaricen con el pensamiento matemático.

Este trabajo, está basado en mi experiencia práctica de dos años impartiendo clases de matemáticas a nivel bachillerato. Es esta misma experiencia la que me ayudó a darme cuenta de las limitaciones (teóricas y prácticas) que los estudiantes tienen en esta disciplina. También, al ser testigo de esta realidad, tuve que coincidir con un punto de vista, ya muy generalizado, que refiere que la mayoría de los estudiantes, desde sus primeros encuentros con las matemáticas, no las aprenden, sólo acumulan datos y, en el mejor de los casos, mecanizan procedimientos y algoritmos.

Al respecto opino que para aprender las matemáticas de manera eficiente hace falta que los estudiantes posean un medio que los ayude a comprender e interpretar qué es lo que están haciendo con ellas cada vez que las utilizan, cada vez que las practican, cada vez que se les enfrentan. Además, este medio debe ayudarles a comunicar sus experiencias y resultados de manera verbal. Desde luego, esto no lo van a lograr solos, es una tarea en la que tenemos que participar con gran entusiasmo, tanto los profesores, como los mismos estudiantes.

Con la intención de aportar un grano de arena en la constante búsqueda de formas para apoyar la enseñar la matemática, este trabajo titulado **"Introducción de mapas mentales en la enseñanza de las matemáticas"**, aplicado con alumnos de nivel bachillerato, propone como opción, adaptada a la enseñanza de las matemáticas, el diseño, uso y aplicación de mapas mentales para que los jóvenes estudiantes cuenten con un medio que les permita visualizar y darse cuenta de los procesos de pensamiento que ellos mismos generan al momento de realizar actividades con las matemáticas.

La técnica de mapas mentales, tiene un enfoque constructivista[Lo], lo que significa que fuerza a los estudiantes a que sean ellos quienes terminen de construir, o de reconstruir, los conocimientos, de los cuales, los profesores aportamos los cimientos. Más precisamente, los jóvenes se ven motivados a recurrir a un tipo de pensamiento profundo, razonado, y esto los encauza a elegir entre el sentido de su trabajo y el contexto de las ideas y conceptos nuevos. Esta actividad supera enormemente al tipo de pensamiento superficial que, evidentemente, conduce a un estudio memorístico.

Otro propósito que tiene la aplicación de esta técnica, es el de estimular en el alumno la imaginación y la creatividad, tan importantes en el ambiente abstracto de la matemática, para que esto contribuya a ejercitar las habilidades de retención, organización, análisis y síntesis de cada uno de ellos, claro, a su propio ritmo. Poco a poco, los estudiantes irán construyendo rutas mentales que les permitan seguir con claridad el contenido y resultados del tema que se les está enseñando.

Me agradaría invitar y sugerir a los profesores, en particular del nivel bachillerato, a que adapten y experimenten en sus clases de matemáticas el material que aporta esta experiencia, pues en este nivel de estudios los estudiantes retoman el conocimiento acumulado a lo largo de nueve años de educación básica y, por lo general, no lo recuerdan con claridad o, sencillamente, les es desconocido. Así pues, la técnica de mapas mentales puede convertirse en una útil herramienta que ayude a los estudiantes a corregir estas deficiencias.

Además de ser este material una idea que pretende dar un enfoque distinto para la enseñanza de las matemáticas, es también un medio que me sirve para compartir con ustedes una gran aventura, armonizada esta con las sonrisas, deseos de superación y grandes satisfacciones que surgieron en los estudiantes cuando descubrieron que al utilizar la técnica de mapas mentales para interpretar y expresar el cómo, el para qué y el por qué de la naturaleza de la matemática y además para elaborar sus notas de manera distinta, sus resultados académicos fueron mejorando cada vez más. De esta forma, en el **capítulo uno** expongo ampliamente en qué consiste la técnica de mapas mentales, sus características básicas, cómo pueden construirse y también qué material se necesita para hacerlos. En el cuerpo del capítulo muestro ejemplos de mapas mentales así como su interpretación. Algunos de los mapas usados fueron construidos con ayuda de los estudiantes. Ellos sirven para mostrar tanto sus deficiencias y flaquezas como sus progresos y fortalezas al estar trabajando con temas de matemáticas.

Para continuar con el relato de esta experiencia, en el **capítulo dos** podremos encontrar mi opinión acerca del por qué algunos estudiantes presentan bajo rendimiento al estudiar matemáticas. Planteo también que, como profesores, debemos adaptar y usar todos los recursos que podamos para evitar esta situación se siga dando. De esta forma, recomiendo que presentemos a nuestros alumnos maneras novedosas de adquirir, revisar, reconstruir y aplicar la belleza del conocimiento matemático. Con las referencias obtenidas de diversas fuentes, se me ocurrió pues, introducir, adaptar y usar los mapas mentales para ayudar a los estudiantes a relacionar y asociar conceptos, a comprender algoritmos, a visualizar y explicar procedimientos, a observar y a distinguir dentro de un problema entre la información que se busca y la que se tiene y cómo usarla para obtener lo que se pide.

Esta adaptación de los mapas mentales en la enseñanza de los conceptos matemáticos la trato de justificar con un ejemplo que explico paso a paso.

En el **capítulo tres** presento un breve panorama de cómo, desde tiempos de los antiguos filósofos, se ha dado gran importancia a la imagen y al dibujo como representantes y evocadores del conocimiento. Incluyo este tema porque al ser los mapas mentales una técnica que mediante dibujos e imágenes intenta impactar y estimular al cerebro en sus procesos de retención, recuerdo y asimilación de información, en necesario que revisemos su importancia en el contexto del aprendizaje.

Por lo regular, los profesores nos quejamos de que los programas de clase son extensos y de que el tiempo destinado para abarcarlos es insuficiente y esto nos impide poner más atención a la parte práctica de la materia y a la parte ilustrativa y de ejemplos concretos. Para evitar que la parte teórica reste tiempo a las otras, la primera se puede planear y presentar ante el grupo mediante el empleo de mapas mentales.

En el **capítulo cuatro** presento algunos mapas mentales que usé con un grupo de estudiantes de Geometría Analítica. Esta materia, es de mi particular agrado, por tal razón, se me ocurrió empezarla a enseñar introduciendo la técnica de mapas mentales logrando combinar así tanto su parte teórica como su parte práctica. Al hacerlo de esta manera ahorré mucho tiempo en la exposición de los conceptos y obtuve otro tanto para explicar cuidadosamente ejercicios y llevar a cabo otras tareas. En este capítulo hay, además, actividades complementarias, por ejemplo, una de ellas es la lectura de una historia en forma de cuento que habla de temas relacionados con el curso de geometría analítica. Otra es la creación y terminación de mapas mentales que servirán para ayudar a los estudiantes a evaluar qué tanto han aprendido.

De acuerdo con mi experiencia, adaptar e introducir esta técnica en la enseñanza de las matemáticas del bachillerato ofrece grandes ventajas para los estudiantes, por ejemplo, favorece la retención y recuerdo de conceptos, su uso frecuente les permite organizar y estructurar las ideas, paulatinamente los enseña a proveerse de argumentos que de manera ordenada y lógica dan fundamento a los problemas que se les plantean, es una actividad relajada que les permite aprender divirtiéndose y les proporciona un medio para autoevaluarse. Una de las limitaciones que puede presentar esta técnica es que, al tratar de ilustrar el proceso seguido para construir una demostración, éste pierde claridad, sobre todo, cuando las demostraciones involucran el uso de más de un teorema o propiedad. Lo que podemos hacer entonces, es trazar un mapa que ilustre, de manera breve, qué ideas se usaron para obtener el resultado esperado.

En el **apéndice**, explico las características básicas de algunos programas de software que han sido diseñados especialmente para la elaboración de mapas mentales en la computadora y anexo también, la página electrónica donde se pueden consultar más datos acerca de ellos.

Para terminar esta introducción solo me falta decir que proveer y compartir conocimientos a los estudiantes es parte de la tarea que desempeñamos los profesores y otra parte consiste en lograr estimular y desarrollar en ellos sensaciones de seguridad, motivación, satisfacción, confianza y optimismo al momento de enfrentarse con las matemáticas, al estudiarlas y al aprenderlas. Las imágenes y el dibujo pueden ayudarnos, ¿por qué no intentarlo más intensamente?

Agradeceré me envíen sus valiosos comentarios y opiniones a la siguiente dirección electrónica: maryponced@yahoo.com.mx

[*],[**]www.ocdemexico.org.mx , www.sep.gob.mx

CAPÍTULO 1

MAPAS MENTALES Y MATEMÁTICAS

> "Me lo explicaron,… lo olvidé.
> Lo vi,… lo aprendí.
> Lo experimenté y entonces lo comprendí".
>
> Confucio.

1.1. Preámbulo.

Son varios los factores que tienen que ver con la manera como asimilamos y recordamos información y estos se vuelven parte de una experiencia que puede sernos grata o no. Ni hablar, esto es algo característico de nuestra existencia. En cuanto a ésta, suele haber momentos en los que no podemos, o se nos dificulta, recordar algo. Quizá sea porque no lo sabemos con exactitud, no lo aprendimos bien, algún factor distractor nos bloquea o no hemos recurrido a esa información por mucho tiempo. Nos cuesta trabajo dar referencias de dónde vimos, escuchamos, degustamos, olimos, tocamos o percibimos ciertas cosas, cómo conocimos a alguien, qué anécdotas son representativas de nuestra infancia, qué fue lo que anoche soñamos, cómo resolvimos un problema, cuándo estuvimos en algún sitio, por qué estamos de mal humor, qué es lo que íbamos a decir o hacer en cierto momento, etcétera. Aunque no nos demos cuenta, cada una de las cosas que aprendemos y recogemos de nuestro entorno se ven afectadas, en mayor o menor grado, por el estado de ánimo que manifestamos en ese momento. Esto sugiere que las emociones también son parte esencial de nuestra capacidad de pensar y de aprender y no son sólo algo extra que nos confunde o complica nuestra existencia.

Para ayudarnos a resolver estas situaciones en las que hacen su aparición las famosas lagunas mentales, se han diseñado muchas técnicas que estimulan en el cerebro la función de recordar. Una de ellas se distingue de otras, porque imita la manera como éste accede, obtiene y rescata información almacenada en la memoria. Es un dibujo que nos ayuda a exteriorizar nuestras ideas y a organizarlas de tal manera que todas ellas están adecuadamente relacionadas. Es un diseño similar al de un mapa carretero de alguna ciudad en donde se indica la ubicación de cada población valiéndose de colores, palabras, caminos, rutas, símbolos y códigos.

Si nos proponemos practicar y aprender a pensar trazando mapas, poco a poco, nuestro cerebro se acostumbrará a retener y encontrar, de manera rápida y efectiva, la información que necesitamos o que nos hace falta para complementar y enriquecer nuestro aprendizaje. Es importante que notemos que al empezar a diseñar mapas, nos veremos forzados a investigar de modo amplio el tema del que deseamos tener conocimiento, esto nos proporcionará gran cúmulo de información que, enseguida, tendremos que ordenar y relacionar adecuadamente para que tenga sentido. A la par de esto aprendemos también a observar, explorar y evaluar nuestro conocimiento, y además, desarrollamos puntos de vista objetivos y neutrales que nos permiten contemplar los elementos positivos, negativos e importantes de éste.

Ahora bien, el tipo de pensamiento que traza mapas se puede materializar y practicar mediante la creación de dibujos. Estos dibujos, siguen algunas reglas en cuanto a su diseño. Se les llama "mapas mentales" y la técnica para elaborarlos se conoce como "cartografía mental".

El concepto y técnica para el diseño de "mapas mentales" fue desarrollado por el doctor en programación neurolingüística Tony Buzan quien nació en Londres en 1942. Desde muy joven, se interesó en los procesos de aprendizaje y con la finalidad de comprender y aportar técnicas que los estimularan se dedicó a investigar y a especializarse en varias áreas como: psicología, neurofisiología del cerebro, semántica, teorías de la información; mnemotécnia, percepción y pensamiento creativo.

Sus investigaciones sobre la naturaleza del procesamiento de la información, sobre la estructura y funcionamiento de la célula cerebral y sus estudios de la corteza cerebral, han ayudado a reforzar la teoría que afirma que durante el proceso de aprendizaje, el cerebro humano recuerda principalmente lo siguiente:

a) Temas o conceptos referentes al comienzo del periodo de aprendizaje.

b) Todo aquello que llama fuertemente la atención a cualquiera de los cinco sentidos en el momento del aprendizaje.

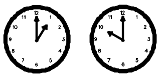
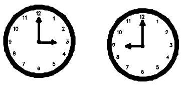
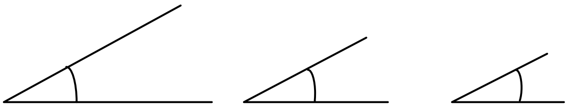
c) Todo aquello que consiste en relacionar y comparar información ya archivada con aquello que se está aprendiendo.

d) Características o detalles interesantes que satisfacen la curiosidad y complementan los temas o conceptos aprendidos.

e) Características únicas, particulares o sobresalientes que se han acentuado o recalcado para que se entienda bien el significado de lo que se aprende.

f) Temas o conceptos referentes al final del aprendizaje, es decir, lo que se puede concluir de lo que se ha aprendido.

Ejemplo: Supongamos que deseamos que los alumnos de segundo semestre de bachillerato aprendan, recuerden y manejen adecuadamente el concepto de ángulo. Intentemos mostrar cómo estarían distribuidos los seis puntos anteriores:

ASPECTO	ACCIÓN RELACIONADA
Tema o concepto.	Explicar la definición de ángulo, su representación, su clasificación.
Estímulos de los sentidos.	Al usar las manos, palos de madera, espejos o algún otro material para ilustrar el concepto de ángulo, se mantienen alertas los sentidos del tacto, la vista y el oído.
Comparación y relación.	Usar algún ejemplo simple como los siguientes: Los muros de las construcciones forman ángulos entre sí. Las manecillas de los relojes forman distintos ángulos conforme van pasando las horas. 
Detalles interesantes	El ángulo recto tiene una abertura de 90°, igual al que forman las manecillas del reloj a las 3:00 y a las 9:00. 
Detalles sobresalientes	El tamaño de un ángulo no depende de la longitud de sus lados 
Efecto de inmediatez	El conocimiento de los ángulos y sus medidas ha dado origen a algunos sistemas de medición, como el que conocemos en grados, llamado sexagesimal o el dado en radianes, llamado circular. Estos sistemas son usados frecuentemente en trigonometría.

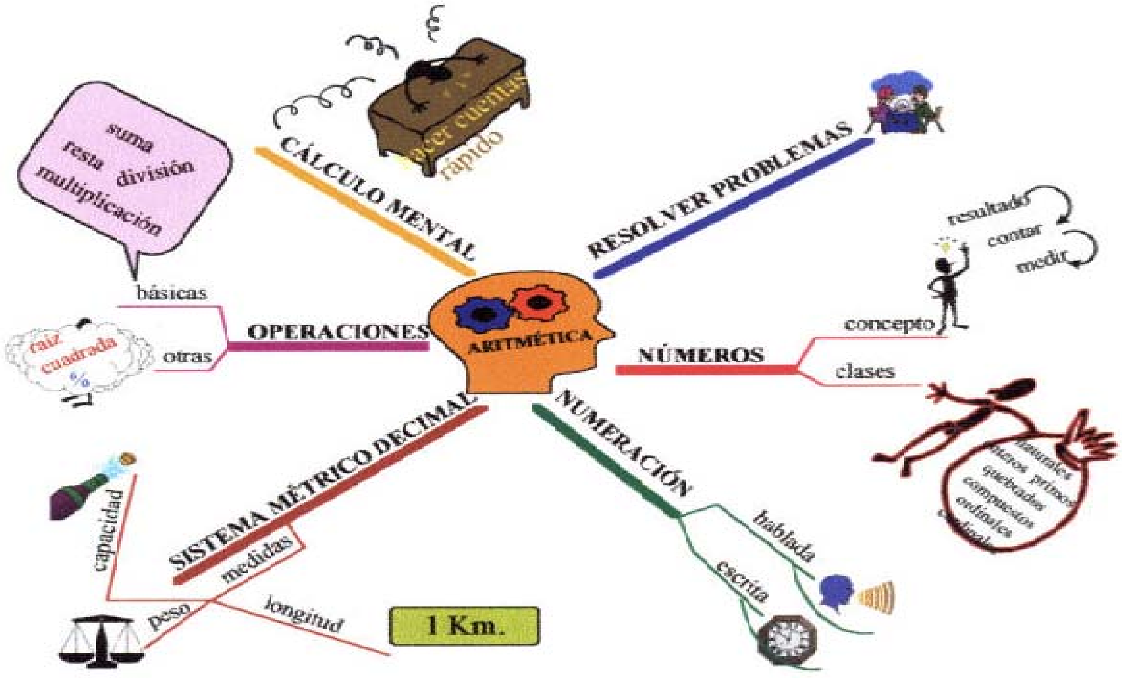
1.2. Definición y componentes del mapa mental.

El mapa mental es una técnica gráfica cuyo diseño abarca espacio, tiempo y color. Representa ideas utilizando símbolos y palabras clave y los relaciona de tal forma que su construcción imita las asociaciones que la mente forma. Esto ayuda a activar las habilidades halladas en la corteza cerebral (ritmo, totalidad, palabras, lógica, color, dimensión, etcétera). Además, establece niveles o jerarquías, es decir, se empieza con las ideas generales hasta llegar a las particulares. Esto permite a la mente ejercitarse favoreciendo así, un tipo de pensamiento estructurado y jerarquizado.

Los componentes esenciales de un mapa mental son:

a) IMAGEN O PALABLRA CENTRAL. Se refiere al concepto o tema que queremos recordar, desarrollar o explicar.
b) IDEAS ORDENADORAS BÁSICAS. Son los conceptos, temas, palabras o imágenes clave relacionados con la imagen o palabra central y que se ramifican o irradian de ésta.
c) RAMAS O LÍNEAS ASOCIADAS. Tienen impresa sobre si, una imagen o palabra clave y ambas, rama y palabra, coinciden en longitud.
d) ESTRUCTURA NODAL. Es la manera en que las ramas se conectan.

Ejemplo:



El mapa de la página anterior fue elaborado por alumnos de primer semestre de bachillerato, a los que se les instruyó antes en la técnica para la elaboración de éstos. Ellos proporcionaron las ideas con las que se fue construyendo el mapa y también se les ocurrieron las imágenes para ilustrarlo. Este mapa nos muestra las ideas personales que los estudiantes relacionan con el tema. Por medio de este dibujo, los profesores podemos observar y sondear lo que ellos recuerdan o asocian con la aritmética.

Si revisamos con cuidado este mapa, nos será más claro identificar las partes esenciales. Es preciso aclarar que la elección de los colores, el tipo de letra, las imágenes y el estilo de las líneas se hace de forma libre, es parte de nuestra inspiración y creatividad. La finalidad es que nos ayuden a recordar y explicar el tema.

a) IMAGEN O PALABRA CENTRAL. Corresponde al perfil de una cabeza amarilla cuyos engranes(cerebro) se interesan o están trabajando en el tema "ARITMÉTICA"

b) IDEAS ORDENADORAS BÁSICAS. Son las palabras que se relacionan con la aritmética, en este caso: CÁLCULO MENTAL, RESOLVER PROBLEMAS, NÚMEROS, NUMERACIÓN, SISTEMA MÉTRICO DECIMAL, OPERACIONES.

c) RAMAS O LÍNEAS ASOCIADAS. Son las líneas que contienen y unen las ideas ordenadoras básicas con idea central. En este caso están representadas por los colores: verde, rojo, azul marino, amarillo, morado y café. Las palabras en las ramas se leen de izquierda a derecha, tal y como lo hacemos en una página normal.

d) ESTRUCTURA NODAL. Podemos ver que la rama CÁLCULO MENTAL crece hacia la izquierda, muestra una ilustración y un mensaje que nos describe que éste consiste en hacer cuentas rápido. La imagen representa una persona poco paciente. La rama RESOLVER PROBLEMAS sólo está relacionada con la imagen de una persona que practica la adivinación. La rama NÚMEROS, crece hacia la derecha y se parte en dos caminos, uno se refiere al "concepto" (resultado de contar o medir) y el otro las "clases" que hay de estos (enteros, naturales, primos, quebrados…). La rama NUMERACIÓN también se divide en dos partes, una de ellas indica que ésta puede ser hablada, la otra nos indica que puede ser escrita.

De forma análoga podemos ver cómo están conectadas las ramas restantes. Esto nos permite concluir que, cada vez que creemos un mapa mental, debemos tener presentes las cuatro partes que lo forman para asegurarnos de que estamos dando sentido lógico y correcto, a nuestras ideas.

1.3. Tipos de mapas mentales.

Hay cuatro tipos básicos de mapas mentales: Diádicos, policategóricos, mnemotécnicos y creativos.

* MAPAS DIÁDICOS, manejan un tipo de opción simple. Sólo tienen dos ramas principales pues estos mapas se utilizan en la toma de decisiones o evaluación de algo.

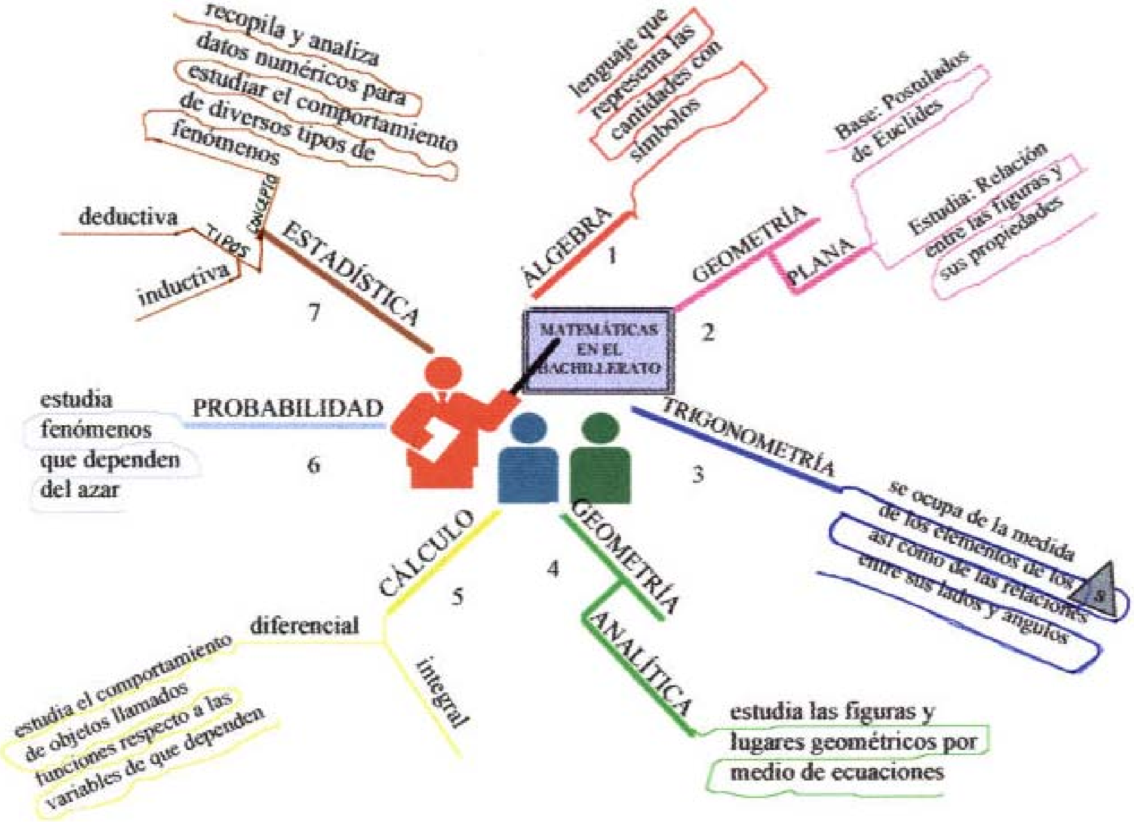
Ejemplo: Un estudiante de primer semestre de bachillerato debe resolver algunos ejercicios de álgebra que pertenecen al tema de obtención de raíces enteras de polinomios de segundo grado. Para este alumno no es clara la forma en que debe proceder. Notemos que puede hacerlo de varias maneras: tanteo, fórmula general, factorización. Aunque el tanteo suele a veces ser válido, por esta ocasión se le propone que dibuje un mapa mental diádico para que considere y evalúe la conveniencia de usar la fórmula general o el método de factorización. Nuestro estudiante comienza con el polinomio $x^2+5x+6=0$ y diseña su mapa mental. Este le ayudará a considerar que la manera de encontrar resultados y soluciones puede lograrse por diversos caminos. Sin duda elegirá el que le parezca más cómodo pero no ignorará que hay otros más.

Al revisar este mapa, observamos que el estudiante ha utilizado correctamente las partes que forman un mapa mental (palabra e imagen central, ideas ordenadoras básicas, líneas asociadas, estructura nodal). Este mapa sólo sintetiza la preferencia del estudiante y ésta, está determinada por sus experiencias previas.

Para el común de los estudiantes, con dificultades para comprender este tipo de temas, los mapas diádicos les indican cómo actuar en una situación similar.

* MAPAS POLICATEGÓRICOS, pueden tener entre tres y siete ramas principales. Esto se debe a que se ha comprobado[Bu1] que un cerebro normal no puede retener más de siete ítems importantes de información en su memoria inmediata. Sirven para mostrar con más detalle lo que se desea recordar o explicar.

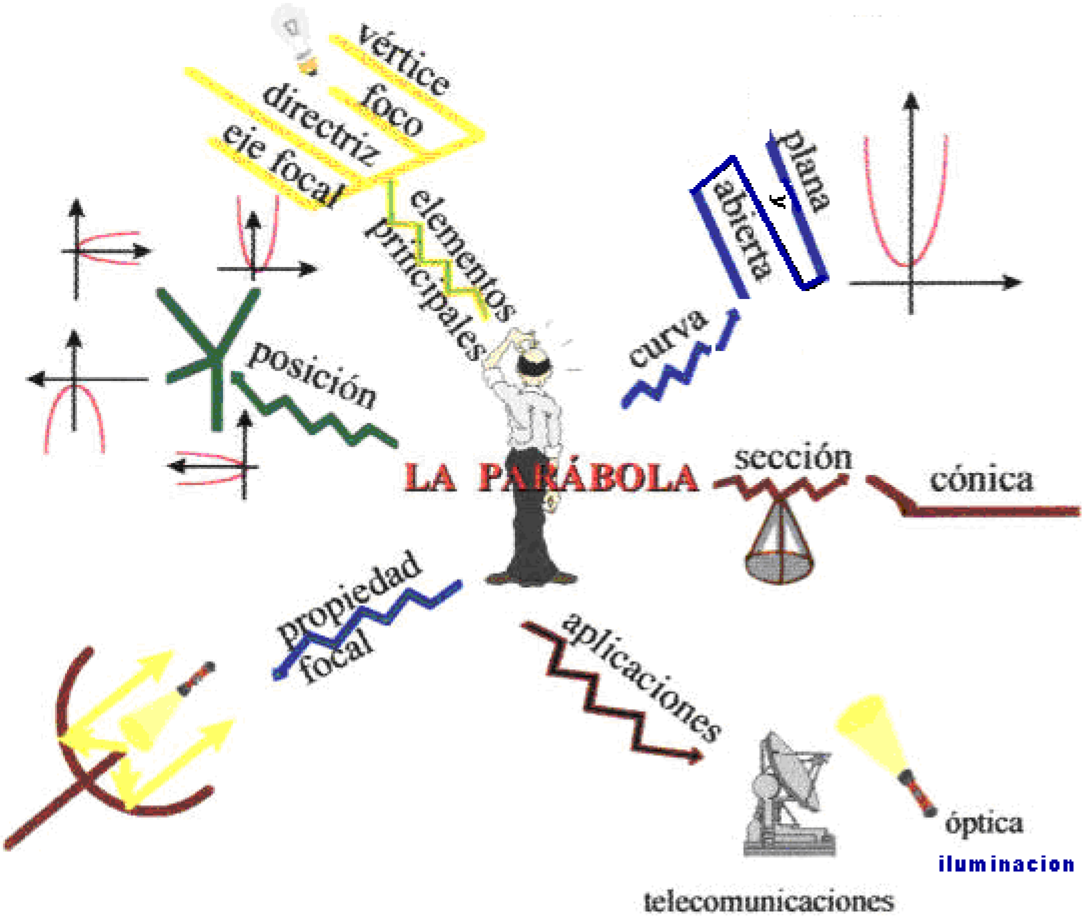
Ejemplo: Para mostrarle a los estudiantes que inician el bachillerato un panorama general acerca de las asignaturas de matemáticas que se les enseñarán en este nivel de estudios, hicimos un mapa mental que exhibe las siguientes ramas principales: álgebra, geometría y trigonometría, geometría analítica, cálculo y probabilidad y estadística. Cada una de estas ramas crece dando referencia sobre el contenido y objeto de estas partes de la matemática.



Los niveles en cada rama expresan, mediante palabras clave, lo que se debe de entender acerca de cada una de estas partes y si pueden clasificarse en otras más. Con este tipo de presentación, los jóvenes tienen un medio visual que les muestra que se requiere el buen dominio y conocimiento de cada una de estas asignaturas, en su debido momento, para poder tener éxito en las del semestre siguiente y, también, por qué no, durante su formación profesional.

* MAPAS MNEMOTÉCNICOS, ayudan al cerebro a recrear y recordar cosas, temas o conceptos que se creían olvidados o que no se tienen del todo claros. Son una especie de memoria auxiliar.

Ejemplo: Un estudiante de tercer semestre de bachillerato, mediante un mapa mental, nos platicó lo que él recordaba acerca del tema "la parábola".



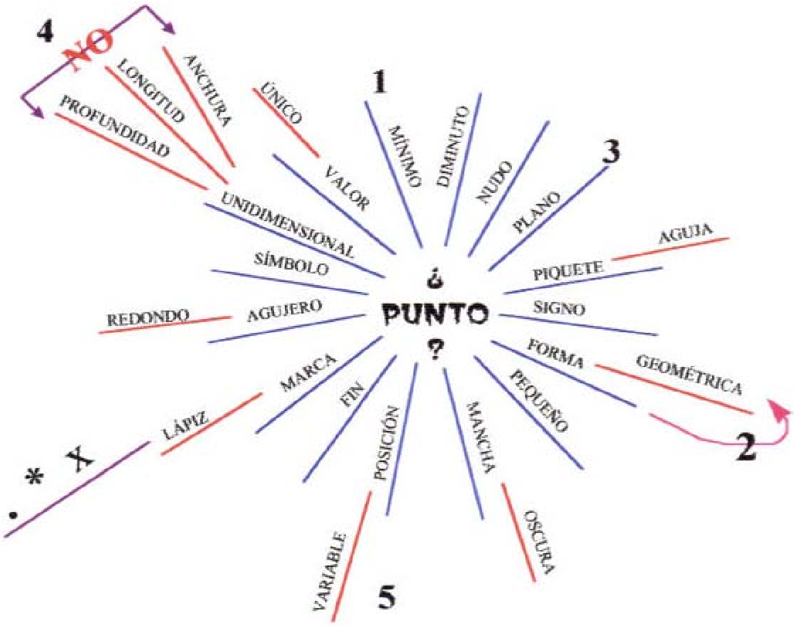
El joven diseñó este mapa y se ayudó con él para explicar y expresar verbalmente lo que se le había pedido. Lo ha interpretado de la siguiente manera:

La parábola es una curva plana y abierta. Es una sección cónica. Algunas de sus aplicaciones se hallan en las áreas de telecomunicaciones y óptica. Esto se debe a su propiedad focal. En el plano tiene cuatro posiciones. Sus elementos principales son: el vértice, el foco, la directriz y el eje focal.

* MAPAS CREATIVOS, tienen como intención relacionar conceptos, estimular tormentas de ideas y reorganizar las anteriores.

Ejemplo: Para construir el concepto geométrico de "punto", se ha pedido a los alumnos del segundo semestre de bachillerato que externen todas aquellas ideas espontáneas e inmediatas que se les vengan a la cabeza acerca de lo que ellos entienden por "punto". Conforme las van mencionando, el profesor las va colocando en las ramas de un mapa mental creativo.

Algunas de las ideas que van mencionando los estudiantes son las siguientes: algo plano, signo, marca de lápiz, agujero redondo, mancha oscura, forma geométrica, pequeño, piquete de aguja, algo mínimo, un nudo, etcétera.



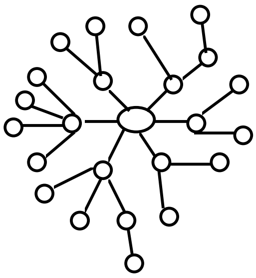
El propósito de colocar las ideas en este tipo de mapa es, que de manera visual, los estudiantes se den cuenta de cuáles de ellas les ayudan a construir apropiadamente el concepto geométrico de "punto".

Para obtener una definición con sentido, se han numerado las ideas que la formarán procediendo, en consecuencia, a verbalizarla y escribirla. Así, estos estudiantes han construido la siguiente definición: "Un punto es la mínima forma geométrica plana unidimensional, es decir, no tiene anchura, ni longitud, ni profundidad, únicamente posee posición".

El estado de ánimo que se podía percibir en los estudiantes manifestaba alegría, triunfo y satisfacción ya que con este tipo de ejercicio se han dado cuenta de que son capaces de generar en su mente gran cantidad de ideas, que las pueden exteriorizar y que pueden enfocarlas adecuadamente cuando tratan de crear y solucionar algo.

1.4. Construcción de mapas mentales.

Para construir un mapa mental debemos tomar en cuenta ciertas "reglas o leyes" que garantizan que el dibujo elaborado es realmente un mapa y no un monótono diagrama en forma de racimo o telaraña. Estos últimos, suelen ser confusos pues todas las ideas se ven reducidas al mismo nivel quedando, cada una de ellas, aislada de las demás.



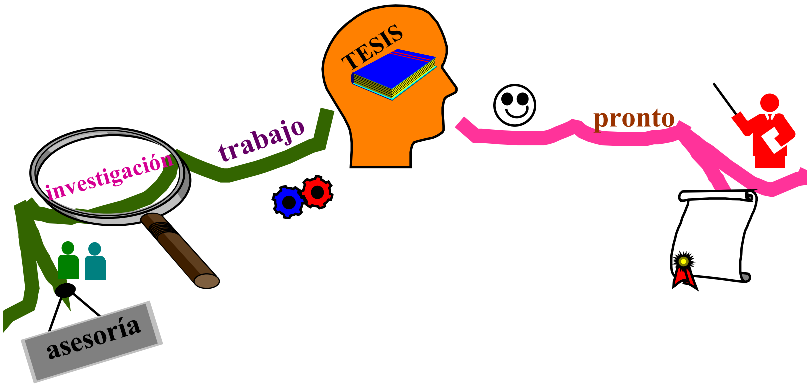
Por eso, para comenzar a dibujar mapas, es muy importante que sepamos que las reglas o leyes de la cartografía mental se dividen en dos grupos y que éstos se usan de manera simultánea al momento de elaborar mapas mentales. Se les llama "leyes de la técnica" y "leyes de la diagramación". A continuación veremos de qué trata cada una de ellas:

Leyes de la técnica:

a) **ÉNFASIS**. Consiste en usar siempre una imagen central ya que ésta atrapa la atención del ojo estimulando al cerebro visualmente. Podemos añadir otras imágenes en toda la extensión del mapa combinando, fusionando y variando colores, palabras, tercera dimensión (volumen), letras, tamaños, líneas y grosor, para obtener un mapa claro, atractivo y organizado.

b) **ASOCIACIÓN**. Se refiere a conectar por medio de líneas, llamadas ramas, las ideas relacionadas con el concepto o imagen central asignándoles colores, códigos, dibujos, marcas, etcétera.

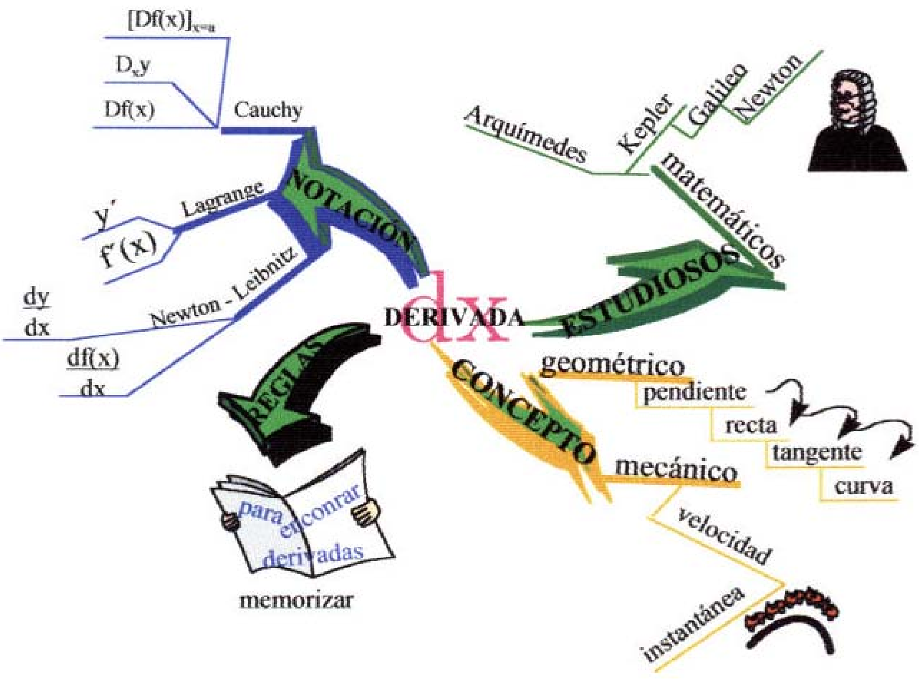
Ejemplo:



c) **CLARIDAD**. Las palabras clave que se usan por línea, se escriben con letra de imprenta, sobre la línea y coincidiendo ambas en longitud. Las líneas centrales que están en contacto directo con la imagen central, deben tener forma orgánica (ondulantes) y deben ser más gruesas que las del resto del mapa.

d) **ESTILO PERSONAL**. La motivación por querer hacer, la inspiración, una actitud positiva, un estado de ánimo optimista y un ambiente agradable son factores que influyen en el estilo propio de cada persona al elaborar mapas pues, el mapa terminado, reflejará la forma particular que el autor tiene de evocar, manipular e interpretar información.

Ejemplo: Se pidió a un estudiante de sexto semestre de bachillerato que elaborara un mapa mental acerca del tema de derivada. Con él, se trataba de averiguar cuánto recordaba o había entendido del tema. A continuación se muestra este mapa:



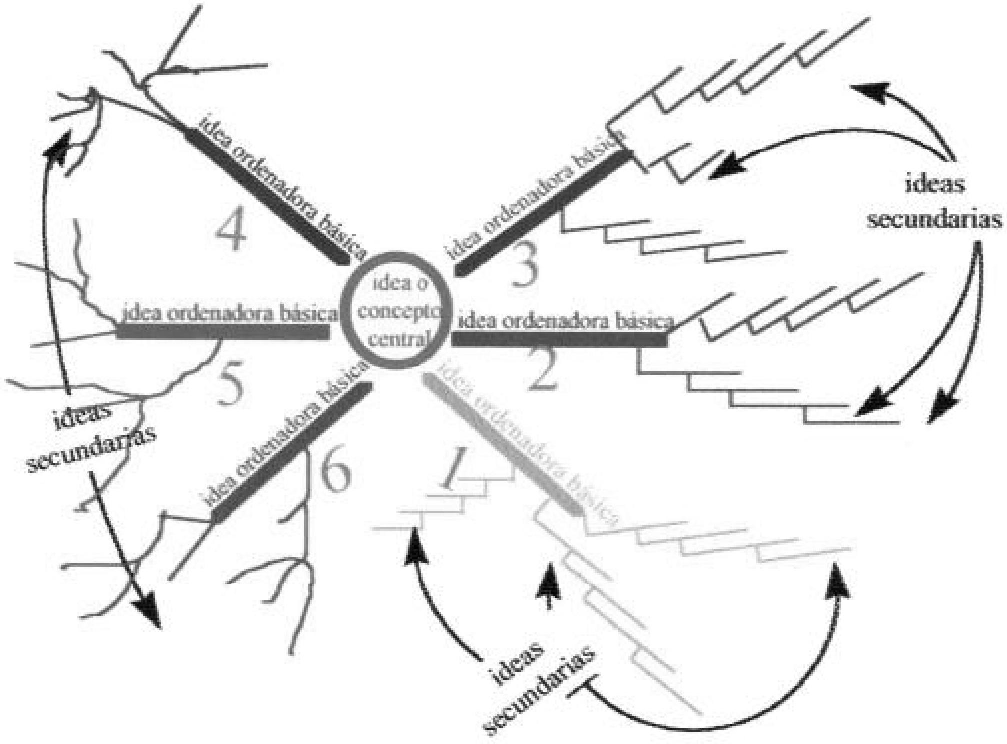
En su estilo personal coloca las ideas principales en flechas gruesas de colores muy brillantes y curvadas en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Esto significa que en esa dirección va a revisarse su mapa. Ha considerado ideas importantes como: el concepto de derivada, estudiosos de ésta, sus notaciones y las reglas para encontrar derivadas. Este mapa lo puede hacer crecer con nuevas ideas y también lo puede corregir, cuando después de repasar el tema, haya encontrado más información.

Leyes de la diagramación.

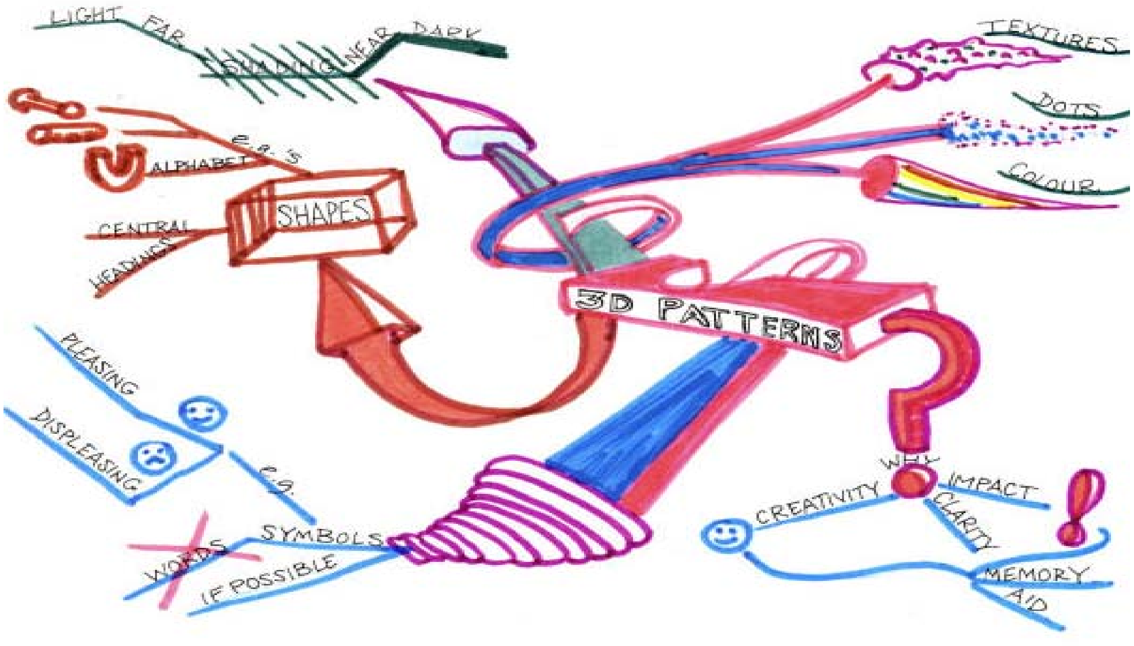
1) **JERARQUÍA.** Consiste en elegir las ideas en orden de importancia identificando cuáles son principales y cuáles secundarias ya que esto es lo que irá generando los niveles o categorías del mapa.

2) **ORDEN NUMÉRICO o DIRECCIÓN.** Las ramas del mapa mental se pueden numerar o marcar de algún modo para indicar el sentido o movimiento en que están colocadas las ideas. Así, las ramas de un mapa pueden analizarse bien en el sentido en que se mueven las manecillas del reloj o al contrario, en partes, empezando por la mitad izquierda o por la derecha, etcétera.

Ejemplo 1. Este dibujo muestra gráficamente las leyes de la diagramación. Se puede observar cómo la imagen central es el punto de partida del mapa mental. También podemos ver cómo han de colocarse las ideas ordenadoras básicas y cómo, a partir de ellas, nacen otras ideas subordinadas o secundarias. Se le ha dado, además, un sentido para ser revisado, en este caso, de derecha a izquierda, ilustrando este hecho con numeración arábiga. El dibujo, en general, representa una neurona y las prolongaciones de sus dendritas.



Ejemplo 2. En este mapa mental se puede observar cómo se integran las leyes de la técnica y la diagramación. Muestra de modo sensacional cómo usar las imágenes, la forma y la triple dimensión.



Fuente: El libro de los mapas mentales/ Tony Buzán.

Hasta aquí, hemos visto diferentes dibujos y también hemos conocido las reglas que garantizan que lo que estamos haciendo es un mapa mental pero, ¿qué hay con las maneras en que éstos pueden realizarse?

Hay dos maneras de diseñar mapas mentales: a mano o en computadora.

Los mapas mentales dibujados de modo "artesanal" (a mano) requieren que tengamos a la mano lápices de colores, crayones, plumones, pintura, bolígrafos o cualquier otro material que sirva para trazar dibujos. También calcomanías surtidas, recortes de periódicos, revistas, y accesorios que le proporcionen relieve como diamantina, lentejuela, botones, cartón corrugado, etcétera.

Otro elemento fundamental es la hoja de papel. Se sugiere que sea del tamaño de media cartulina. Esta hoja representa el área en donde vamos a plasmar nuestro dibujo. Debe ser de color blanco, esto hace referencia a que, en un principio, desconocemos el tema que queremos o necesitamos investigar. Es una analogía de lo que sucede en nuestra mente cuando alguien nos pregunta por algo que desconocemos, textualmente, nos quedamos en blanco.

Como el mapa mental tiene la finalidad de estimular y atrapar la atención del cerebro para que nuestro aprendizaje sea efectivo y significativo, es muy importante que la hoja sea blanca, pues en ella, los contrastes que existen entre colores, imágenes, palabras, líneas, sombras, tamaños y formas resaltan causando mayor impacto visual que en una hoja de color.

El mapa mental hecho a mano es divertido y entretenido, pues nos obliga a estimular la imaginación al máximo ya que el patrón y diseño de éste, se basará en imágenes, formas, movimientos, dimensiones o bosquejos que proyectamos primero en nuestra pantalla mental y que, posteriormente, dejamos impresos en nuestro dibujo. Nos tenemos que esforzar e ingeniar también para poder distribuir cada parte del mapa de manera adecuada, aprovechando todo el espacio que tenemos.

Una vez comenzado el diseño del mapa mental, ya no podremos parar hasta no verlo terminado y, aún así, cada vez que lo revisemos, nos veremos tentados a agregar o refinar información. Esto se debe a que se activan al máximo las habilidades de la corteza cerebral, en particular, la conocida como "gestalt" o totalidad, que es la habilidad que obliga automáticamente al cerebro a completar y terminar los patrones de información.

Es frecuente hallar, en estudiantes de matemáticas de nivel bachillerato, gran cantidad de olvido, poco entendimiento y baja asimilación, sobre todo de la parte conceptual, teórica, de éstas (sabemos que algunos algoritmos para resolver problemas generalmente se mecanizan). El diseño de mapas mentales que contengan los conceptos fundamentales que los alumnos deben tener presentes en cada tema que se les enseña, contribuirá a que, siendo esta una actividad entretenida, divertida y que requiere de gran concentración, dichos conocimientos sean retenidos con mayor efectividad, claridad y a largo plazo.

Además del modo artesanal, existe otra forma de diseñar mapas mentales, esto es, haciendo uso de la tecnología. Usar la computadora se está convirtiendo, a pasos agigantados, en una actividad constante y frecuente que se está introduciendo en la enseñanza de hoy día. Hay gran cantidad de software que se ha diseñado para este fin y, para el diseño de mapas mentales, no es la excepción.

En el mercado podemos encontrar gran variedad de productos como los cinco que se enuncian a continuación: Mind Manager, Mind Mapper, Axon Idea Processor, Concept Draw MINDMAP, NovaMind 1.1.1. Los detalles acerca de este material los podemos encontrar en el apéndice, al final de este trabajo.

La ventaja de diseñar mapas mentales en computadora se presenta al momento de corregirlos y/o ampliarlos ya que el texto, los enlaces y las imágenes pueden modificarse, recortarse, cambiarse o moverse de lugar según se requiera, con sólo un "clic" y sin necesidad de rehacer todo el mapa. En cambio, cuando elaboramos un mapa mental a mano y más adelante deseamos corregirlo o enriquecerlo con información nueva, hay que agregar hojas nuevas, pasarlo en limpio, o bien, acomodar en alguna parte símbolos llamados conectores. Aunque esto parece ser un tanto tardado, no resulta tedioso pues hay que desarrollar el ingenio para encontrar la manera de resolverlo.

Es importante que, como profesores, hagamos concientes a nuestros estudiantes de que al estudiar y aprender matemáticas no sólo requerimos del planteamiento, análisis y razonamiento de los problemas o de la construcción y memorización de conceptos, sino que también tiene mucho que ver la actitud con la que lo hacemos, la imaginación, el ingenio y la estructuración correcta de las ideas. Todo esto forma parte armónica del aprendizaje. Los estudiantes, ayudados por nosotros, sus maestros, pueden desarrollar y ejercitar estos aspectos dibujando mapas mentales. Esta actividad los relaja y les permite ver cómo ellos solos enfrentan, resuelven y concluyen las tareas que se les encomiendan. Los estamos proveyendo de una herramienta donde pueden ver, analizar, comprender y enfocar adecuadamente sus pensamientos.

Fuentes consultadas para este capítulo:[Bu1],[Ha],[Sa].

CAPÍTULO 2

ENTENDER ANTES DE HACER EN LAS MATEMÁTICAS DEL BACHILLERATO

"El profesor sabio no te pide que
entres en la casa de su sabiduría.
Te conduce hasta el umbral de tu mente"
Kahlil Gibran.

"La alegría de ver y entender es el
mas perfecto don de la naturaleza"
Albert Einstein.

2.1. Comentarios acerca de la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato.

Algunas veces, quizá de forma automática, los profesores recurrimos a una manera típica de enseñar matemáticas, esto es, damos una explicación rápida, muy breve del tema y, en seguida, llevamos a cabo ejemplos y ejercicios de modo tan veloz que, en consecuencia, así enseñadas las matemáticas, resultan para los jóvenes estudiantes un montón de símbolos, números y letras carentes de significado. De este modo, el mediano interés que quizá tenían por conocer el nuevo contenido, se ve sensiblemente perdido. Probablemente no nos damos cuenta que esto sucede pues, de manera inconsciente, nuestra prioridad es avanzar lo más posible en el temario para cumplir ampliamente con la mayor parte de los temas que lo integran. En tal caso, no consideramos que quizá al alumno le resultaría más interesante y más atrayente nuestra exposición si, además de presentarla con calma, de paso la enriqueciéramos mencionándoles alguna circunstancia extra, por ejemplo, el contexto histórico del tema, su relación con el entorno, con la vida cotidiana, con los avances tecnológicos, con la naturaleza, con los descubrimientos, con el cosmos, con el azar. Proponerles retos, etcétera.

Desde luego, no toda la culpa es nuestra pues, a la par del empeño por cubrir la totalidad del programa, otros factores influyen en el bajo rendimiento de los alumnos. En primer lugar tenemos conocimiento de que la mayoría de los estudiantes se ven afectados emocionalmente por diversos aspectos o circunstancias que tienen lugar en su entorno. Dentro de estos aspectos, podemos mencionar enfermedad, pobreza, desintegración familiar, baja autoestima, vicios, adicciones, actitudes agresivas, rebeldía. Muchos de estos factores los afectan enormemente en el momento del aprendizaje y así, su nivel de concentración, atención y asimilación suele ser insuficiente.

En segundo lugar sabemos que, por lo regular, el tiempo que se destina a cada clase de matemáticas en las escuelas de nivel bachillerato, cubren un total de cinco horas a la semana. Sin duda, dos horas al día es, para los estudiantes, una sesión larga en la que el cansancio mental aparece cuando menos lo imaginamos. Ellos no están acostumbrados al modo de pensamiento matemático tan abstracto, tan intenso.

En tercer lugar, ligado a los aspectos anteriores, no debemos olvidar que los estudiantes enfrentan otro gran problema cuando “descubren” que necesitan el dominio adecuado de los conocimientos y habilidades matemáticos de la enseñanza primaria y secundaria para poder aprender y manejar, con éxito, los nuevos contenidos. Los conflictos más comunes a los que tienen que enfrentarse son: dificultad para comprender y dominar el lenguaje matemático así como los conceptos, poca capacidad de análisis y resolución de problemas, deficiencia para aplicar resultados, poca capacidad creadora y bloqueos mentales.

Sería muy valioso que nos detuviéramos a pensar un poco en el estilo en el que estamos presentando las matemáticas a los estudiantes pues, sin notarlo, tendemos a mostrarles sólo un lenguaje cuyo vocabulario les es extraño, esto dificulta en ellos la comprensión de conceptos, procedimientos y algoritmos debido a que el manejo de éstos requiere de un nivel de abstracción que no todos han desarrollado. Así pues, otra de nuestras tareas es ayudarlos a descubrir, comprender, manejar y usar tanto el pensamiento como el lenguaje matemático y, al mismo tiempo, deberemos hacer de las matemáticas un modo de pensamiento cultural, valioso, además de, una experiencia significativa para el alumno.

Con el fin de asegurar la asimilación de conocimientos y la formación de habilidades matemáticas, numerosos estudios e investigaciones se han efectuado al respecto y han producido proyectos y herramientas didácticas que contribuyen a estimular formas de pensamiento que relacionan los conceptos, algoritmos y procedimientos ya estudiados, con otros nuevos y, a la vez, permiten visualizar cómo ambos se integran y se aplican. Se espera que estas herramientas las utilicemos intensamente los profesores para ayudar a los estudiantes a desarrollar constantemente la necesidad de “aprender a pensar” y de hacer matemáticas.

En este aspecto, nuestro papel como profesores es muy importante pues no sólo nos toca actuar como transmisores del conocimiento, sino también como orientadores y guías de las actividades del alumno prestándole la ayuda necesaria de acuerdo con el momento de asimilación en que este se encuentra.

Esto significa que tenemos que trabajar en función de una estrategia en la que los profesores y los estudiantes tengamos bien claro el rol que nos toca seguir.

Para cerrar este apartado me gustaría proponer una lectura, seleccionada de un artículo de Miguel de Guzmán[Gu1], que ayudará a nuestros alumnos a conocer y considerar algunos tips muy útiles para trabajar con matemáticas. Son muy sencillos y motivantes, por tal razón, me atrevo a incluirlos en este párrafo:

“…

1. **Sobre todo, trata de entender.**
2. **Saber matemáticas es saber hacer cosas con lo que aprendes**.
3. **Dibuja a tu modo.**
4. **Los diferentes objetos matemáticos son herramientas para hacer algo con ellos.**
5. **La pregunta es el anzuelo para pescar en el mar de las ideas.**
6. **No trates de memorizar nada antes de haber entendido bien a fondo.**
7. **Activa frecuentemente lo que has aprendido.**
8. **Memoriza lo que es de uso constante.**
9. **Trata de retener las ideas del proceso por el que se llega a ellas.**
10. **Usa el libro de texto.**
11. **Activa lo que ya sabes relacionado con el tema.**
12. **Haz tú mismo ejemplos y ejercicios aclaratorios.**
13. **Cuando los ejercicios te resultan difíciles vuelve a leer pausadamente lo que precede del tema.**
14. **Trata de identificar las porciones más importantes e interesantes que has aprendido a fin de que queden bien señaladas en tus esquemas de conocimiento.**
15. **Evalúa tu trabajo**.
16. **Ejercítate en hacer problemas con método para aprovechar mejor el tiempo que en ello empleas.**

…”

Fuentes recomendadas:[Bo],[Ca],[Ga].

2.2. ¿Por qué usar mapas mentales en matemáticas?

Algunas de las inquietudes que preocupan a la mayoría de los estudiantes de matemáticas del bachillerato tienen que ver con interrogantes que podrían parecer, a los profesores, simples, infantiles o tontas. Pero, si reflexionamos un poco, es posible que podamos dar respuesta a preguntas parecidas a las siguientes: ¿cómo lo hago yo solo?, ¿cómo sé qué “pasos” debo usar para resolver y explicar un problema o ejercicio?, ¿cómo veo mis ideas?, ¿cómo sé que son correctas o no?, ¿cómo les doy forma?, ¿cómo las enriquezco?, ¿cómo sé si apliqué bien el algoritmo?, ¿cómo me doy cuenta de si va a funcionar en este o aquel problema?, es más profesor, como usted ya se lo sabe, por eso le sale bien. Siendo un poco observadores, nos damos cuenta de que estas preguntas han surgido en momentos clave de la clase, en situaciones como aquellas en las que los jóvenes tienen que desarrollar, reducir o resolver una ecuación, visualizar y comprender un resultado obtenido a partir del análisis geométrico, imaginar figuras y sus posiciones en el plano, recordar y aplicar conceptos y resultados previos, construir conceptos nuevos, aportar ideas para resolver algo, explicar en lenguaje cotidiano un resultado, escribir en lenguaje matemático una proposición de primer grado en dos variables, etcétera.

Quizá estamos enseñando la matemática de una forma rasa y poco vistosa y creemos que son los estudiantes los que no tienen capacidad para aprenderla, pero consideremos la siguiente reflexión:

“… la incapacidad confesada para las matemáticas de muchas personas se debe, sobre todo, a un bloqueo psicológico inicial, originado por los métodos equivocados de enseñanza”[Gu2]

Para evitar en la mayor medida esos bloqueos psicológicos, nuestra profesión y vocación por la enseñanza nos exige encontrar, adaptar y explotar métodos, técnicas y herramientas didácticas que clarifiquen el aprendizaje de los estudiantes, así pues, propongámonos llevar a cabo esta exigencia pensando en una forma diferente de enseñar las matemáticas del bachillerato. Por ejemplo, podemos utilizar y adaptar en las clases, algún tipo de imágenes o dibujos con las cuales sea más fácil explicar y reforzar temas. Propongo pues, que las imágenes que usemos sean mapas mentales que representen conceptos o procedimientos y, con tal motivación, en este capítulo trataré de justificar y ejemplificar la introducción de la técnica de mapas mentales en la enseñanza de las matemáticas.

La práctica y la experiencia como profesores nos indica que la mayoría de los estudiantes de bachillerato no mantienen un equilibrio entre el aprendizaje teórico y práctico por lo cual la desintegración entre conceptos y procedimientos matemáticos es evidente y, desafortunadamente, parece que tiende a ser permanente.

Este tipo de referencia nos indica que, al parecer, las matemáticas las estamos enseñando y/o aprendiendo dándole más importancia a los hechos y procedimientos, olvidándonos en gran parte de los conceptos. Por ejemplo, una función no es un hecho, ni un procedimiento, es un concepto. Este concepto se puede transformar en una tabla, en una gráfica, en una fórmula o en una expresión verbal. También la variabilidad, la continuidad y el crecimiento, son conceptos. La importancia de diferenciar entre hechos, procedimientos y conceptos radica en que estos últimos tienen atributos o características que los relacionan entre sí y permiten la asimilación de nuevos conceptos.

En la introducción de esta tesis mencioné que mi propuesta está inspirada en la experiencia que tuve al usar mapas mentales con jóvenes estudiantes de nivel bachillerato, así pues, por tal razón, no me referiré en este trabajo a otros niveles educativos. Una vez hecha esta observación, retomemos el rumbo y recordemos que este capítulo comenzó con una serie de interrogantes que algunos estudiantes tienen al tratar de aprender matemáticas. A la vez, también estamos proponiendo a los profesores que indiquen a sus alumnos que intenten resolver estas inquietudes por sí mismos, ayudándose de algún tipo de imagen, es este caso, de mapas mentales. Desde luego, hay que ofrecerles algunas razones, como las siguientes, para que ellos se sientan atraídos por esta actividad.

Digámosles que al crear y dibujar mapas mentales, ellos se permitirán visualizar, paso a paso:

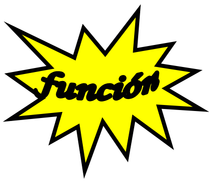
1. Los procesos de pensamiento llevados a cabo cuando construyen la solución de ejercicios y problemas.
2. Las relaciones que existen entre varios conceptos.
3. Cómo se asocian las ideas para generar y construir conceptos de manera intuitiva.
4. Cómo pueden expresar verbalmente un resultado.
5. La armonía del pensamiento y quehacer matemático.

Esta atracción, que por explotar la capacidad creadora, surgirá en cada uno de nuestros estudiantes, la lograremos motivando en ellos necesidades como: entender antes de hacer, elaborar y desarrollar estrategias, verificar que éstas sirvan para obtener resultados correctos, observar y ver lo verdaderamente esencial, lo relevante, entre otras. Tenemos que convencerlos de que pueden lograrlo, tenemos que repetirles esto constantemente.

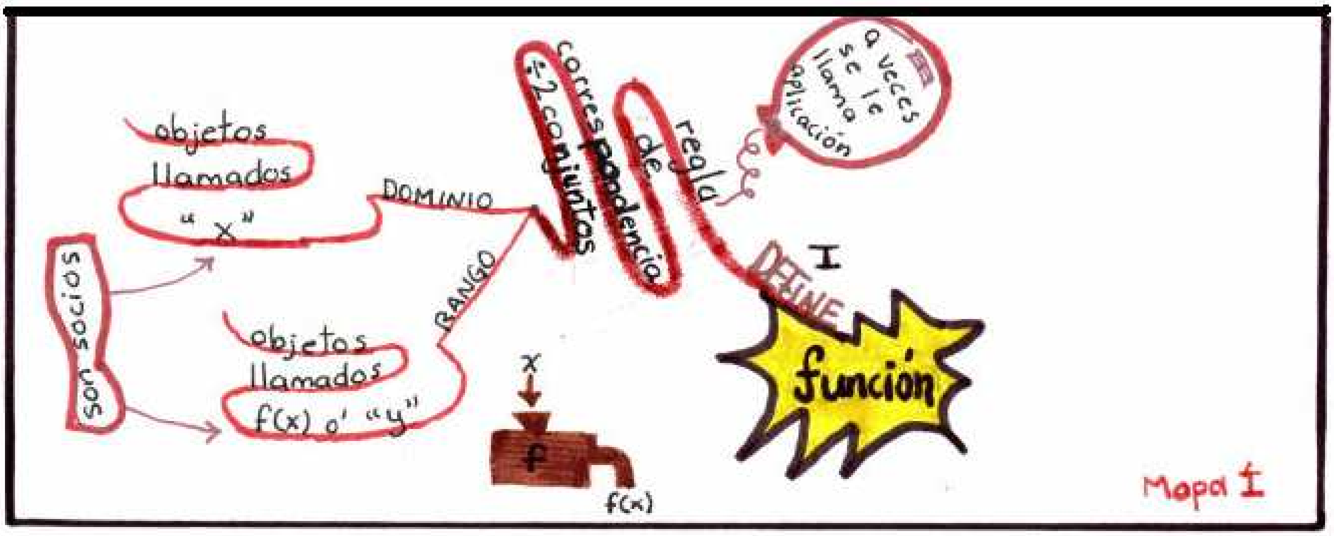
El ejemplo que presento a continuación utiliza el concepto de “función”. Los mapas están hechos a mano ya que el ejemplo fue improvisado y construido en hora de clase, con gises de colores y en el pizarrón. Me parece bastante ilustrativo mostrarlo de este modo, tanto a los profesores como a los estudiantes. Desde luego, este mapa se elaboró siguiendo las reglas que se explicaron en el capítulo uno.

Como observación adicional mencionaré que debemos tener en cuenta que no hay mapas mentales 100% correctos, lo importante son las relaciones entre los conceptos que, a través de las palabras clave, forman proposiciones que configuran un valor de verdad acerca del objeto estudiado.

Iniciemos colocando nuestro concepto principal, FUNCIÓN, en el centro de la hoja o del pizarrón, según sea el caso.

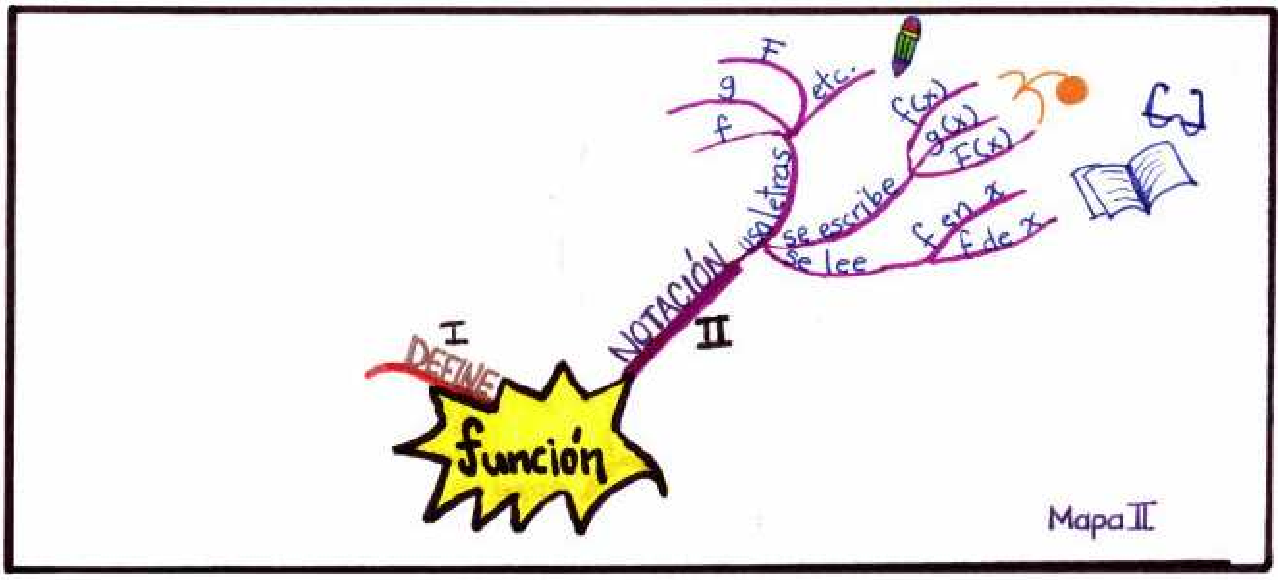


La primera idea importante consiste en indicar cómo se DEFINE una función, así, esa será la primera rama de nuestro mapa. Las ilustraciones que se usaron, son libres, podría parecer que no tienen nada que ver con lo que se está explicando pero, por el contrario, son esas imágenes, las que indican a los estudiantes la parte del mapa que hace referencia a las ideas relacionadas con la definición de FUNCIÓN.



Lo nombraremos MAPA I. En él podemos observar que aparecen conceptos como regla de correspondencia, conjuntos, dominio, rango, aplicación, todos ellos relacionados con el concepto central de FUNCIÓN. Esta rama inicial del mapa la interpretamos así: Una función es una regla de correspondencia entre los elementos u objetos de dos conjuntos. Uno de ellos se llama dominio y el otro conjunto se llama rango. A las funciones, algunas veces, se les llama aplicación.

A continuación tracemos una segunda rama donde vamos a colocar la siguiente idea importante relacionada con nuestro concepto central, por ejemplo, cuál es la NOTACIÓN que se usa para expresar que algo representa una función.

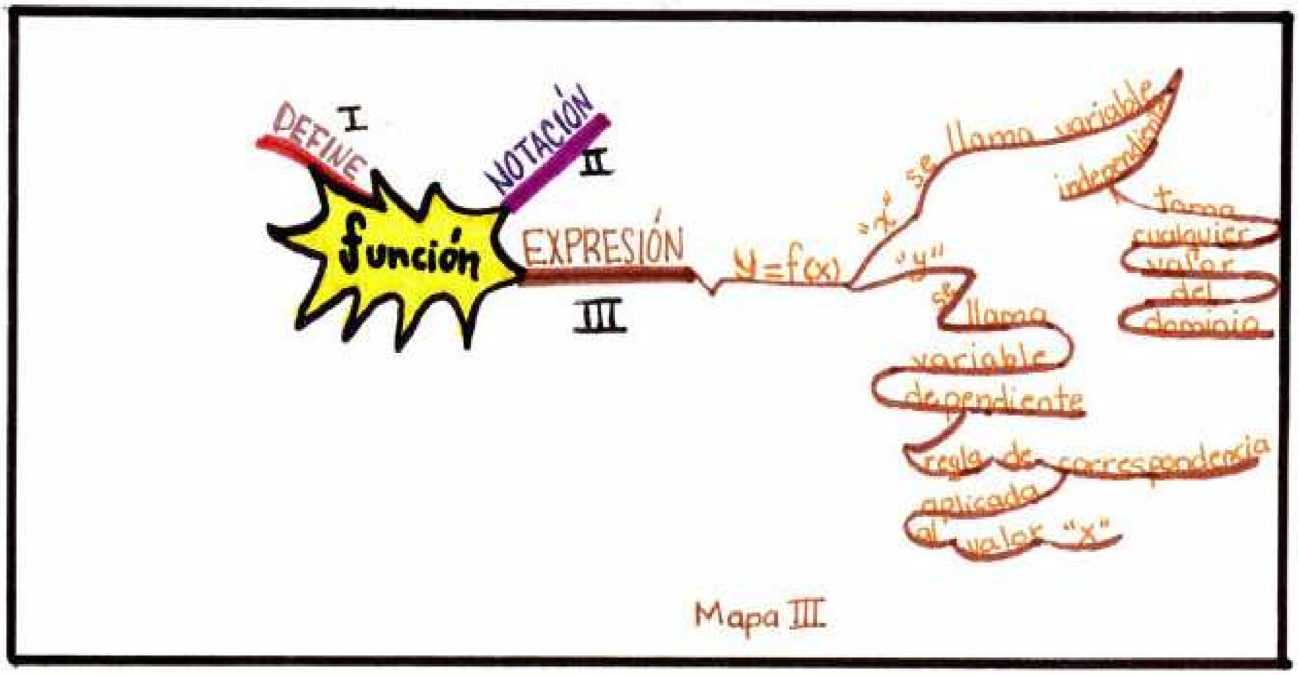


Este minimapa lo marcaremos como MAPA II y en él las ideas asociadas con la NOTACIÓN para una función indican el uso de letras, ya sean mayúsculas o minúsculas. También se muestra la simbología para escribir una función y cómo ésta debe de interpretarse en lenguaje común.

Nuevamente, las ilustraciones que aparecen en las ramas son libres. Así, para ilustrar la escritura, los alumnos propusieron el dibujo de un lápiz que deja un rastro de grafito y en la rama “se lee”, la ilustración muestra un libro abierto y un par de lentes. Estos dibujos son un medio que permite a los alumnos localizar con facilidad esta información en el momento que lo necesiten. Incluso les ayuda a recordarla y expresarla verbalmente y con fluidez.

También es importante explicar que la función se simboliza mediante cierta expresión universal. Ésta representa cómo, al aplicar la regla de correspondencia a los elementos del dominio, los del rango quedan automáticamente determinados.

De esta forma, podemos observar cómo las ramas de nuestro mapa van aumentando. Un tercer dibujo, que marcaremos como MAPA III, lo usaremos para describir que la función es una EXPRESIÓN de la forma y=f(x) e indicaremos lo que “x” y “y”, significan en ella.

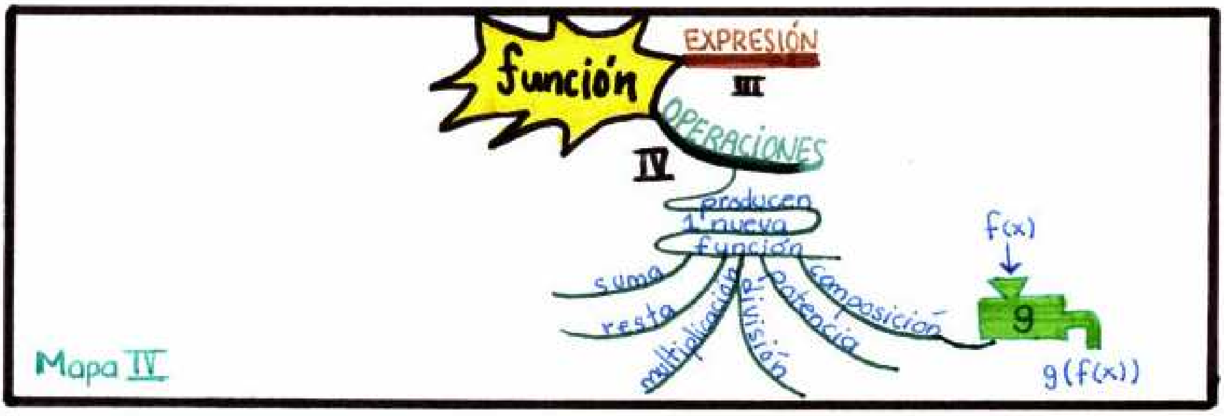


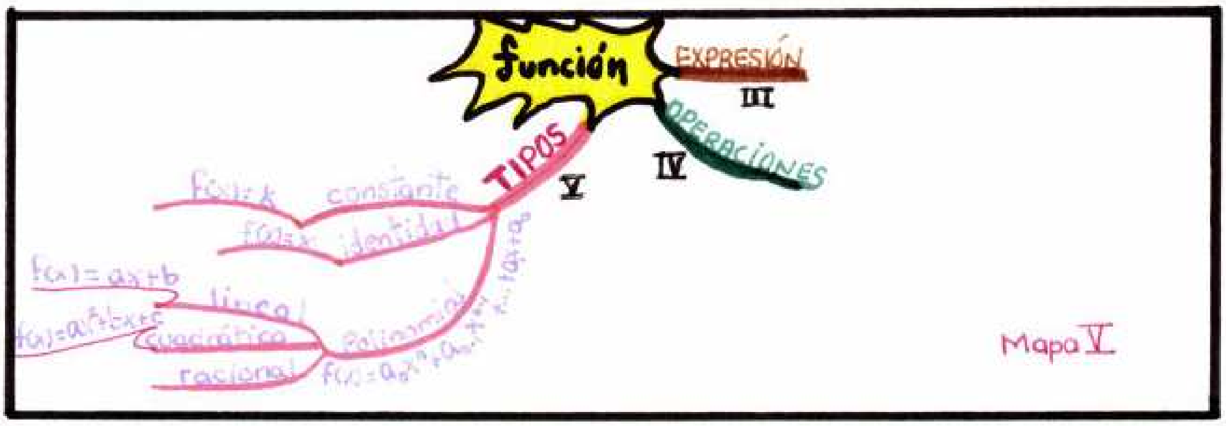
Si pidiéramos a uno de los estudiantes que explicara lo que describe esta nueva rama relacionada con el concepto de FUNCIÓN, el muchacho explicaría que una función generalmente suele representarse por medio de la expresión y=f(x) en donde “x” recibe el nombre de variable independiente y ésta, toma cualquier valor del conjunto llamado dominio. La “y” se conoce como variable dependiente y surge cuando la regla de correspondencia es aplicada considerando el valor que tenga la “x”.

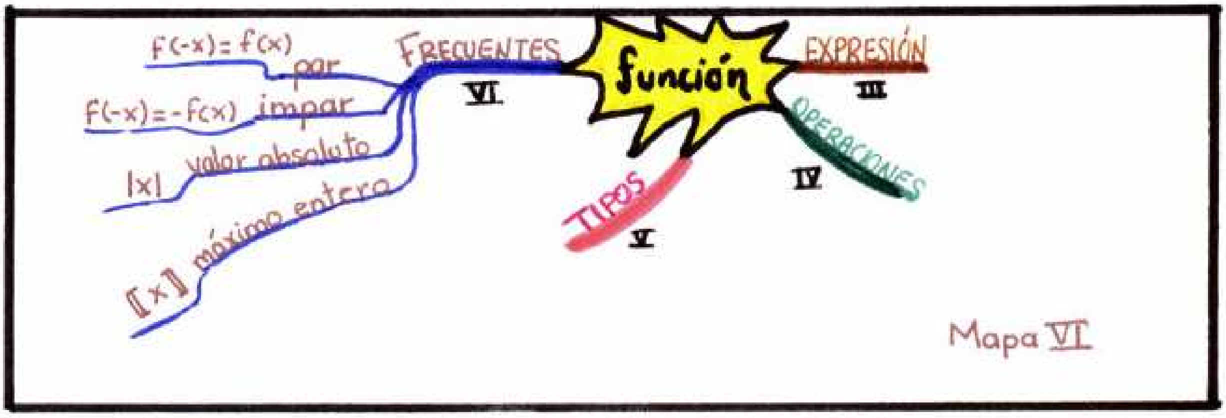
Algún otro estudiante podría decir que, f representa las operaciones que hay que realizar con la variable independiente para obtener “y”. Esto explica más brevemente el significado de la expresión y=f(x). Desde luego, ambos argumentos son correctos y reflejan la manera personal en que cada estudiante ha asimilado el concepto.

Si continuamos jugando con los alumnos utilizando este tipo de ejercicio gráfico, seguiremos generando y relacionando ideas y conceptos que nos permitirán aprender con más detalle del tema central: FUNCIÓN. El diseño original irá creciendo porque estaremos creando y dibujando en el mapa más ramificaciones como, por ejemplo, las que describen si con una función podemos realizar OPERACIONES, qué TIPOS de funciones hay, cuáles de ellas son las más FRECUENTES, etcétera.

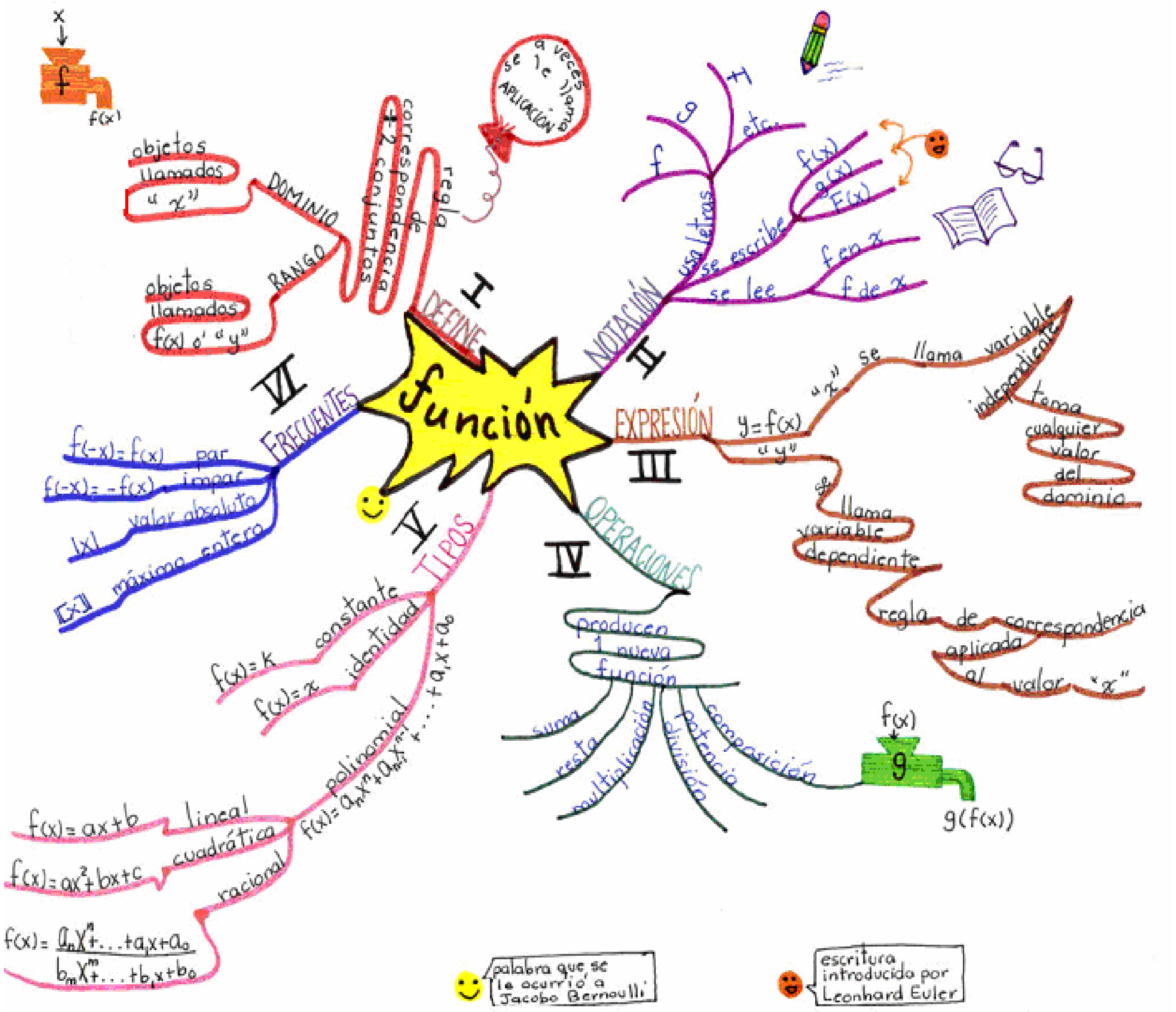
Esto lo podemos ilustrar con los MAPAS IV, V y VI que aparecen en la siguiente página.







No perdamos de vista que este mapa mental se creó en clase, utilizando las ideas que en conjunto proporcionaban los alumnos y la profesora. Como ejercicio los estudiantes pueden reconstruirlo en casa, variando todos o algunos de los elementos que lo forman. Por ejemplo, pueden agregar una rama que explique el concepto de GRÁFICA de una función u otra que CLASIFIQUE las funciones como de una o varias variables, algebraicas, trascendentes, explícitas, implícitas, etcétera. La intención es que adquieran la habilidad suficiente para integrar y retener conceptos. Seguramente resultarán diseños realmente impresionantes. Nuestro mapa terminado lo veríamos como se muestra en la página precedente.



Al terminar de construir este mapa mental, hagamos la observación a nuestros alumnos de que, al aprender matemáticas, se requiere del continuo ejercitamiento de habilidades como las de intuición, deducción y asociación y no sólo de una actividad mental autómata en la que estrictamente recurramos a la memorización de conceptos o a la mecanización de procedimientos y algoritmos. También nuestra actitud positiva cuenta y en mucho al momento de comprender y procesar conocimiento. Una buena actitud, no bloquea nuestra mente, al contrario, la moviliza y contribuye a que, con imaginación e ingenio, encontremos las respuestas que buscamos o a que reconstruyamos lo que ya sabemos.

Con el ejemplo que hemos visto podemos notar cómo, el diseñar mapas mentales, facilita en gran parte la enseñanza de los conceptos matemáticos a nuestros alumnos.

También estos dibujos facilitan la comprensión del concepto pues muestran detalladamente lo que se puede decir de él, además, crean en el alumno la necesidad de explicarlos ampliamente. Esto significa que constantemente deben de documentarse, investigar y repasar el tema.

Observemos que esta actividad ayuda a los estudiantes a ahorrar tiempo al momento de reconstruir y repasar los conceptos y, además, pueden asimilarlos y verbalizarlos con fluidez. Los jóvenes aprenden los conceptos a la vez que crean su propio arte. La parte teórica de las matemáticas se vuelve atractiva al adaptarla con imágenes y dibujos. ¡La matemática es un arte! Yo los invito a experimentar con esta herramienta, ¿por qué no?

Concluiré esta sección comentando que, en sus inicios, los mapas mentales fueron aplicados en niveles universitarios y poco a poco adaptaron su elaboración en niveles de primaria y secundaria, incluso en nivel preescolar con los llamados mapas pre-conceptuales. No sabría decir si en México, la poca difusión de esta técnica en el área de las ciencias, es la razón por la cual en Matemáticas todavía no se ha adaptado y abrazado con más fuerza este recurso como método de aprendizaje significativo.

Destacaré finalmente que los mapas mentales han ido extendiendo su dominio de acción, en países como Chile, Venezuela y Australia, entre otros. Incluso en nuestro país, en colegios como el de Ciencias y Humanidades de Azcapotzalco, la Facultad de Ingeniería de la UNAM y escuelas particulares, a nivel primaria y secundaria, han comenzado a usar esta técnica como un recurso novedoso y diferente, dentro de la enseñanza de las matemáticas, con la esperanza de que las haga significativas e importantes para el alumno.

Fuentes consultadas para esta sección: [An],[S-C2].

2.3. Enseñanza de las matemáticas y mapas mentales.

La enseñanza es una de las tareas más importantes en nuestra sociedad porque los maestros somos responsables del más valioso de todos los recursos: el intelecto humano. Con los mapas mentales, nuestro trabajo como maestros puede ser visualizado y organizado paso a paso, esto transformará nuestras exposiciones en ambientes más espontáneos, creativos, placenteros, flexibles, motivantes y adaptables. Nuestra intención debe ser despertar el interés de los estudiantes, para que se vuelvan más receptivos y cooperativos pues de esta manera les estamos enseñando a desarrollar y estimular formas de pensamiento ágil, claro y rápido

Al usar mapas mentales en el salón de clase ayudamos a los estudiantes a expresar sus ideas con libertad y de tal forma que entre todos las discuten y las evalúan. Además, exponen sus puntos de vista y explican si favorecen o perjudican el resultado que se está proponiendo, en suma, todos los alumnos se esfuerzan para que la actividad que se está realizando, sea cada vez más ingeniosa e imaginativa, esto estimula la mente de cada integrante del grupo y, con esta actividad, se crea una situación verdaderamente original y un ambiente en el que todos participan.

Una de las razones para introducir este tipo de material en la enseñanza de las matemáticas nace de la dificultad que para muchos de los estudiantes significa el aprender y comprender los conceptos matemáticos además de usarlos adecuadamente. También es complicado para ellos, interpretar el lenguaje matemático debido a la gran cantidad de símbolos y vocabulario abstracto que maneja. Estas son algunas de las causas que impiden que los estudiantes se acostumbren al modo de pensamiento matemático.

Los mapas metales son una herramienta que puede ayudar a hacerle ver a los estudiantes que el aprendizaje y comprensión de las matemáticas y su lenguaje no es tan espantoso como cree. Que el modo de pensamiento matemático no está reservado únicamente para genios. Sin embargo, si es importante estar consciente de que este tipo de pensamiento requiere de disciplina, inspiración y creatividad. Cualidades que todo ser humano posee. Con la actividad constante de creación y uso de mapas mentales, los estudiantes pueden darse cuenta y “ver”, paso a paso: las estrategias que se les han ocurrido para obtener la solución o soluciones de un problema o ejercicio, cómo han elaborado con sus palabras e ideas, una definición, qué significan los símbolos de una expresión algebraica, cómo han interpretado geométricamente una ecuación, cómo relacionan conceptos, cómo se les han ocurrido ejemplos para cierto tema, etcétera. Esto tiene un efecto positivo en su autoestima porque sus creaciones dejan en ellos una muy importante sensación de satisfacción, confianza, relajación, entretenimiento y diversión al sentirse capaces de lograr por sí mismos los resultados que se les piden.

Los estudiantes deben de aprender a equilibrar tanto la parte teórica como la parte práctica de las matemáticas. Ambas forman parte del pensamiento matemático. La atinada reflexión del ilustre genio, Leonardo da Vinci les ayudará a comprender este equilibrio, pues: “los que se enamoran de la práctica sin teoría son como los pilotos sin timón ni brújula, que nunca podrán saber a donde van”.

Al trabajar las matemáticas del bachillerato con la técnica de mapas mentales, los estudiantes lograrán combinar los conocimientos teóricos y prácticos de manera adecuada. Así, la obtención de los resultados acerca del tema que se está estudiando, se vuelve cada vez menos complicada. ¡Dibujan y dan color a la forma en que pensaron y reflexionaron! Utilizan sus ideas y no se limitan solamente a la memorización de procedimientos y fórmulas que en el corto plazo, olvidarán. Descubren sus errores y, a la vez, toman la iniciativa para corregirlos. En el momento en que ellos lo necesitan, pueden recurrir a su mapa mental para refrescar su memoria, disipar alguna duda o incorporar en él, ideas complementarias. Debido a que el mapa es una creación suya, con su estilo personal, ellos lo entenderán sin dificultad.

Para mostrar un poco de lo que se explica en el párrafo anterior, he incluido algunos ejemplos en esta sección, pero antes de exponerlos, cabe decir que, cuando nosotros los profesores, revisamos los mapas que han creado los estudiantes, podemos obtener de ellos información suficiente que nos revela cómo están siendo asimilados los temas por cada uno de los alumnos. Ello nos indica en qué aspecto del tema que se está tratando, hay que hacer énfasis.

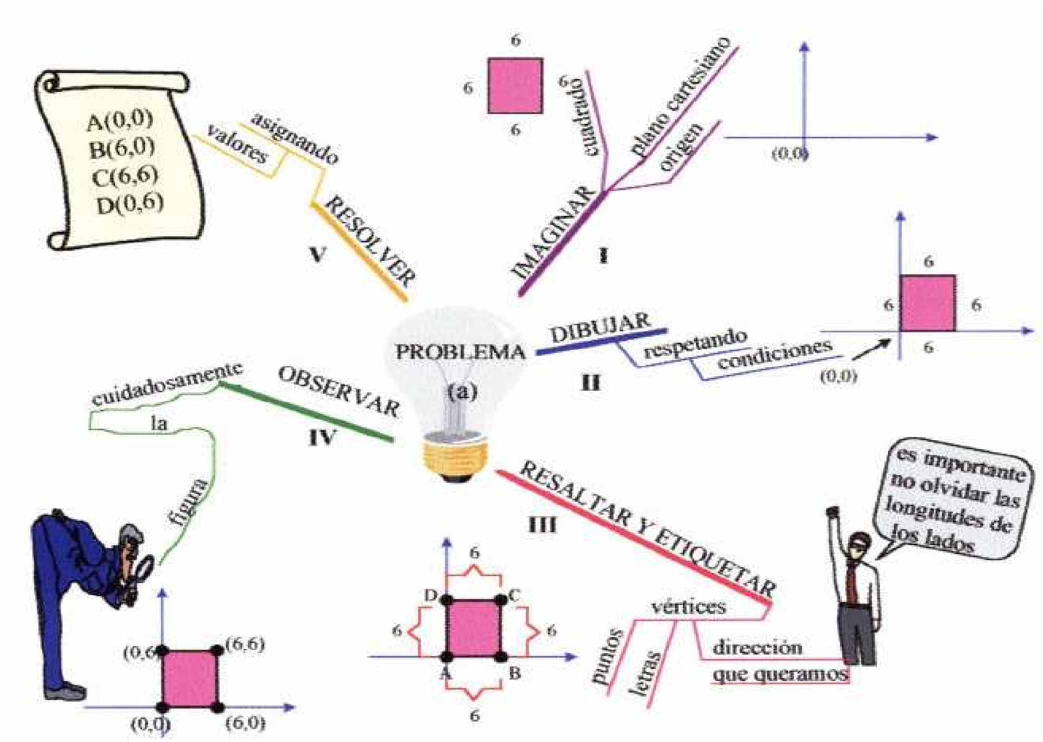
Ejemplo 1:

TEMA: Localización de puntos en el plano.

TÉCNICA: Ilustrar el razonamiento usado para encontrar la solución, dibujando un mapa mental.

PROBLEMA (a): Un cuadrado mide por lado 6 unidades. ¿Cuáles son las coordenadas de sus vértices si uno de ellos es el origen y dos de sus lados coinciden respectivamente con los ejes, en el primer cuadrante?

El mapa mental que a continuación veremos, fue creado por alumnos de tercer semestre de bachillerato. Éste les ayudó a observar paso a paso, el procedimiento que tuvieron que seguir para resolver el problema planteado. Tuvimos (entre todos los integrantes del grupo) que hacerlo de esta manera, para cerciorarnos de que a todos les fuera fácil darse cuenta de cómo se obtuvieron las coordenadas de los lados del cuadrado. Así pues, hicimos el bosquejo en papel, pero el diseño terminado lo elaboramos en computadora.



La interpretación verbal que ellos extrajeron del contenido del mapa, la expresaron como sigue:

- **Imaginar** el cuadrado, el plano cartesiano y el origen son un primer inicio.
- Luego, nos conviene **dibujar** el cuadrado en el plano, colocándolo como se nos pide, es decir, respetando las condiciones.
- **Resaltemos y etiquetemos** los puntos que forman los vértices de la figura, para que nos sea más fácil obtener información de ella. Esto lo podemos hacer remarcando los puntos y asignándoles una letra. Ubiquemos estas marcas en la dirección que queramos.
- Al **observar** con cuidado la figura comenzamos a darnos idea de cuáles son las coordenadas de los puntos que buscamos ya que es fácil notar a cuántas unidades, a partir del origen, hacia la derecha o hacia arriba, se han colocado éstos.
- Podemos **resolver** el problema tomando como referencia lo anterior. Así, le asignamos coordenadas a los puntos que forman los vértices, por lo tanto, encontramos que éstas son: A(0,0), B(6,0), C(6,6) y D(0,6).

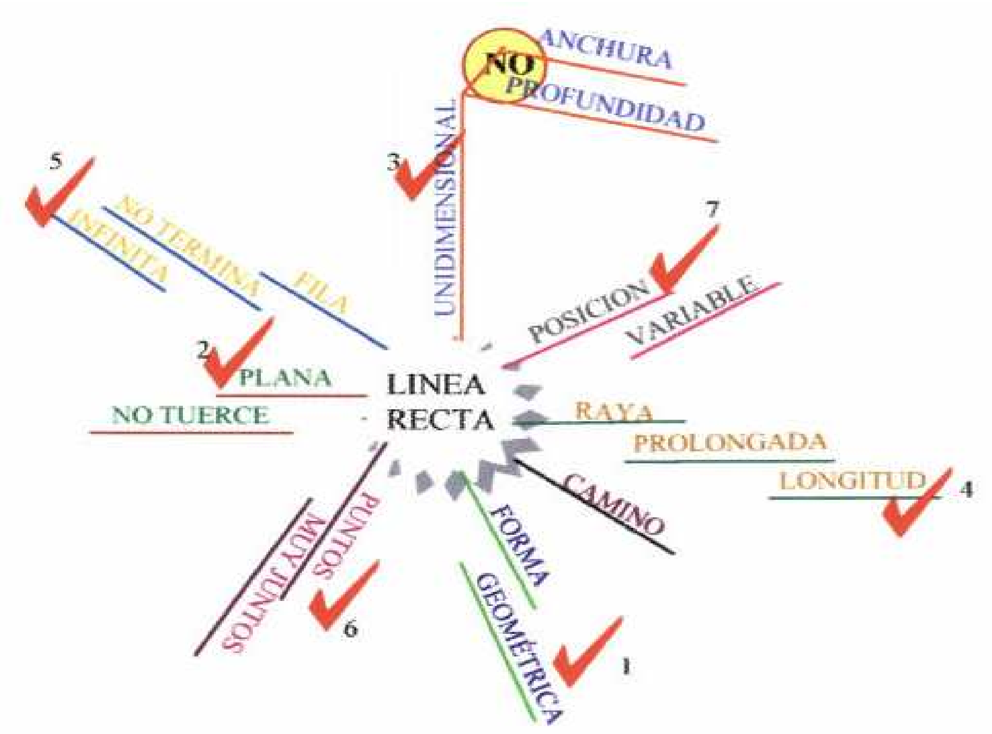
Una observación que debemos hacer a nuestros alumnos es, que ésta, no es la única manera de proceder para resolver el ejercicio. Ella depende de cada individuo. Algunos lo resolverán con más pasos y otros con menos, pero, al final, se obtendrá el resultado correcto a partir del razonamiento correcto.

Ejemplo 2:

TEMA: Concepto de línea recta.

PROBLEMA (b). Construir de manera intuitiva una definición de línea recta ayudándose con lluvia de ideas.

El dibujo que vemos en seguida, es un mapa mental del tipo creativo. Se ha elaborado en forma grupal y, en él, los alumnos de tercer semestre de bachillerato han escrito las ideas que se les vienen a la cabeza acerca de lo que ellos conciben como línea recta. Estas ideas son espontáneas, emitidas al instante y colocadas en el mapa al momento en que son exteriorizadas.



Con un poco de ayuda del profesor, los estudiantes han evaluado cada una de las ideas y, las que parecen más adecuadas y lógicas, las han identificado con una palomita roja. Posteriormente les asignan orden numérico y, siguiendo ese orden, se ayudan para construir la definición que se les pidió. Así pues, la expresan como sigue:

DEFINICIÓN. La línea recta es una forma geométrica plana unidimensional, es decir, no tiene anchura ni profundidad, únicamente posee longitud. Se representa como un trazo continuo e infinito de puntos.

Para complementar esta definición, los profesores debemos indicar a los estudiantes que, además, la recta se prolonga, de igual forma, para ambos lados, izquierdo y derecho. Cuando la dibujamos en el plano cartesiano, ésta tiene diferentes posiciones (vertical, horizontal, inclinada) que no alteran de ninguna manera la definición.

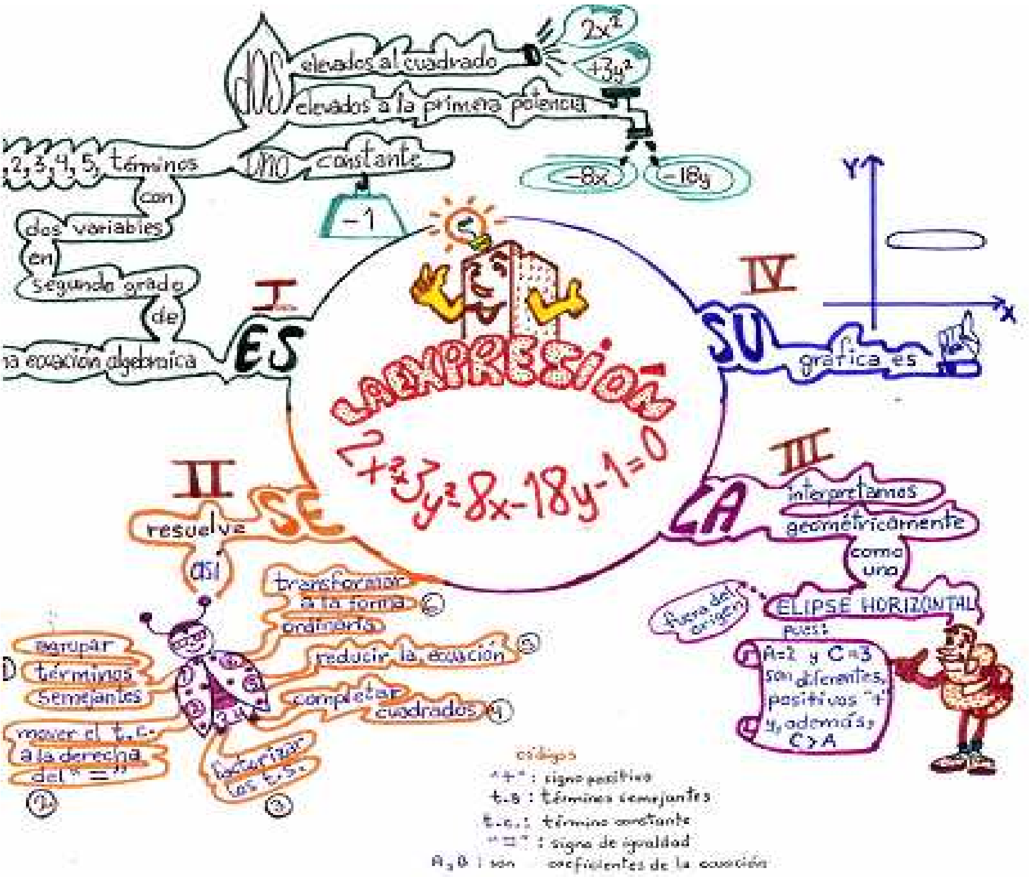
Ejemplo 3:

TEMA: Interpretación y representación geométrica de expresiones algebraicas.

TÉCNICA: Usar un mapa mental para describir la información que proporcionan las expresiones escritas en lenguaje matemático.

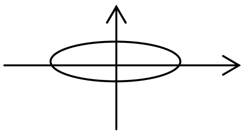
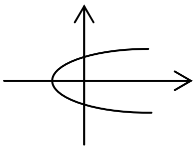
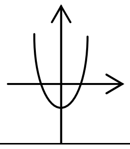
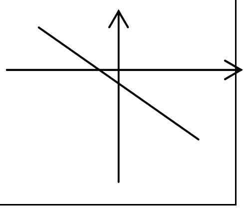
PROBLEMA (c): Con sólo observar y sin hacer ninguna operación, exponer en lenguaje habitual, la información que la expresión, $2x^2+3y^2-8x-18y-1=0$, nos proporciona.

El mapa mental que vemos, fue elaborado colectivamente, es decir, todos los alumnos del grupo (tercer semestre de bachillerato), participaron y fueron dándole forma al diseño y aportaron tanto las ideas como los gráficos.



Podemos notar un buen dominio de la técnica y mayor claridad en el contenido, tanto así, que no es indispensable hacer una interpretación escrita del mismo. Sin embargo, la aclaración que debe hacer el profesor debe girar en torno a que cada expresión algebraica tiene una interpretación y representación diferentes y éstas se obtienen poniendo atención en cada uno de los términos que la forman y, asimismo, fijándonos en sus características particulares. Cuando estas características varían, la interpretación geométrica de la ecuación cambia, parcial o totalmente. Esto significa que podemos obtener la gráfica de objetos distintos o iguales pero con atributos diferentes (por ejemplo, centrados en el origen, rotados, reflejados, desplazados sobre los ejes, etcétera).

Un ejemplo de lo que se les ha explicado puede verse cuando hacemos que los alumnos jueguen con los términos de la ecuación dada. Ellos descubrirán así, que con cada combinación obtienen objetos geométricos variados. Esto es una forma práctica de hacer un análisis y discusión de un objeto matemático que está presentado ante los estudiantes de modo abstracto. Veamos la siguiente tabla:

<table>
<tr><td>ECUACIÓN GENERAL</td><td>$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$</td></tr>
<tr><td>ECUACIÓN DADA</td><td>$2x^2+3y^2-8x-18y-1=0$</td></tr>
<tr><td colspan="4">VARIACIONES</td></tr>
<tr><td>SI NO APARECIERAN LOS TÉRMINOS</td><td>ENTONCES LA ECUACIÓN RESULTANTE ES</td><td>Y SU INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA SERÍA</td><td>UN ESBOZO DE LA GRAFICA LO VERÍAMOS ASÍ</td></tr>
<tr><td>D y E, significa que
D=E=0</td><td>$2x^2+3y^2-1=0$</td><td>Una elipse horizontal Con centro (0,0) y eje mayor sobre el eje X.</td><td></td></tr>
<tr><td>A y E, significa que
A=E=0</td><td>$3y^2-8x-1=0$</td><td>Una parábola horizontal con vértice distinto del origen y eje focal sobre el eje X.</td><td></td></tr>
<tr><td>C y D, significa que
C=D=0</td><td>$2x^2-18y=0$</td><td>Una parábola vertical con vértice distinto del origen y eje focal sobre el eje Y.</td><td></td></tr>
<tr><td>A y C, significa que
A=C=0</td><td>$-8x-18y-1=0$</td><td>Una recta cuya pendiente es m=-8/18 Su ángulo de inclinación es obtuso La abscisa al origen es x=-1/8 y la ordenada al origen es y=-1/18</td><td></td></tr>
</table>

Hemos observado ya, algunos ejemplos que muestran diversos aspectos que los estudiantes de bachillerato experimentan cuando trabajan con matemáticas, como procedimientos (problema (a)), conceptos (problema (b)) o una interpretación (problema (c)).

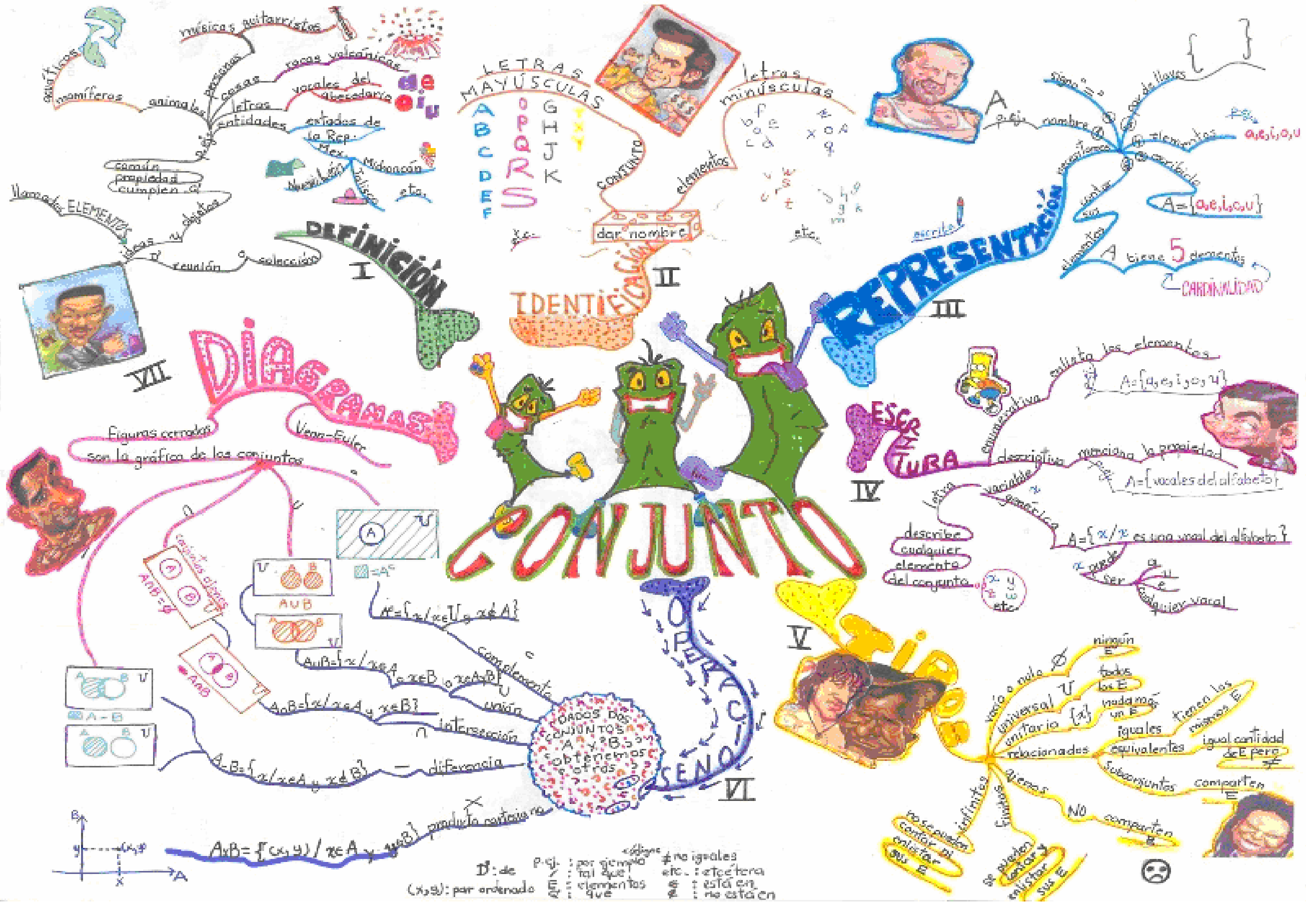
Me agradaría concluir esta sección comentando que, al introducir mapas mentales en la enseñanza de las matemáticas, tenemos un instrumento más para contribuir a hacer más claro el conocimiento matemático de los estudiantes, pues este retoma, en buena medida, el enfoque moderno que hoy día tiene la enseñanza de las matemáticas y que consiste en incentivar en el alumno la asimilación y manipulación de ideas, ya que éstas, al ser aplicadas con técnica, les ayudan a desarrollar, favorablemente, su habilidad matemática.

Fuentes consultadas para esta sección: [F-T],[O-L-G-R-H],[S-C1].

2.4. Usos y beneficios de los mapas mentales en la enseñanza de las matemáticas.

Al momento de estar presentando la clase de matemáticas, los profesores nos damos cuenta de que, por lo general, hace falta tiempo para realizar mayor cantidad de ejercicios prácticos que ilustren y hagan claro a los estudiantes la estrategia, procedimiento o algoritmo usado en la solución de éstos. Es decir, sucede que al tiempo en que enseñamos la teoría también tenemos que hacer lo propio con la práctica, siendo la primera, la actividad que reduce tiempo a la clase pues los alumnos necesitan escribir conceptos, definiciones, propiedades o resultados anteriores y, por lo regular, lo hacen con lentitud, sin motivación y sin sentido. Una alternativa para evitar esto último, es que los profesores llevemos ya preparados, mapas mentales que contengan la información teórica que vamos a utilizar en la sesión, de tal manera, que este material permanezca siempre visible para los alumnos y se transforme así en una fuente de consulta rápida e inmediata en el momento que el grupo de estudiantes lo requieran.

Por ejemplo, si necesitamos que nuestros estudiantes repasen el tema de conjuntos, podemos utilizar un mapa mental en el que les mostremos de manera atractiva, rápida, gráfica y general qué aspectos, como mínimo, deben saber al respecto



Asimismo, al final de la clase, o en el momento que juzguemos conveniente, podemos investigar (sondear) qué tanto recuerdan los estudiantes del tema pidiéndoles que hagan una exposición breve e improvisada donde lo analicen. Les podemos sugerir que piensen primero en una frase o imagen central, que después localicen en su mente aspectos relacionados con ésta y, por último, que comiencen a hablar de ello. Esto nos revelará qué tan buena o deficiente ha sido la comunicación y retroalimentación entre todas las personas que integramos el grupo (esto incluye al profesor). Además nos mostrará si el mensaje que queremos transmitir ha sido percibido de forma clara y correcta por los estudiantes.

Algunos usos que tienen los mapas mentales en el salón de clase son:

1. Para presentar los aspectos generales del curso, como: temario, objetivos, bibliografía, horario, estrategias a seguir y agenda de temas y actividades.
2. Como explicación del tema que se analizará en clase.
3. Para mostrar resúmenes de conceptos u otros resultados que se utilizarán con el tema que se expone.
4. Para sondear lo que se ha aprendido.
5. Como resumen general y panorámico de fórmulas.
6. Para estimular en los estudiantes la lluvia de ideas, en forma escrita o verbal, dándoles estructura para que formen, a partir de ellas, definiciones, conceptos, pasos de una prueba, etcétera.
7. Para desarrollar y favorecer la capacidad de imaginar, crear y asociar resultados con la información que se tiene, la que se sabe y la que se busca.
8. Como herramienta de consulta rápida de conceptos o resultados previos.
9. Para promover la discusión y evaluación de las formas en que se ha planteado un tema y qué se puede concluir de ello.
10. Para elaborar un examen oral.

Nuestra intención al aplicar la técnica de mapas mentales en el salón de case, es que los estudiantes obtengan, por su constante uso e interpretación, algunos beneficios pues, éstos:

1. Reducen barreras mentales como: “no puedo”, “no entiendo”, “se me secó el cerebro”, “soy un cabeza dura”, “eso es muy difícil”, “no se me da”, “desearía ser genio”.
2. Generan ideas y estimulan la creatividad, memoria y evocación de información usando, a su vez, asociaciones con otros conceptos relacionados.
3. Desarrollan y estimulan la capacidad mental para interpretar, describir, analizar, evaluar y sintetizar información (previa y reciente) escrita en lenguaje matemático, auxiliándose del estímulo visual.

4. Fomentan el uso de imágenes para reforzar el aprendizaje.
5. Fortalecen la capacidad de evocación y almacenamiento de la memoria a través de la imagen.
6. Ofrecen una manera de relajarse y despejar la mente.
7. Incrementan la habilidad mnemotécnica mediante el uso frecuente.
8. Estimulan la capacidad asociativa del cerebro, lo que favorece el establecimiento de redes o caminos que incrementan la probabilidad del recuerdo.
9. Desarrollan las habilidades mentales de orden, clasificación, categorización, precisión y claridad.
10. Evitan la mecanización y hacen consciente al estudiante sobre las reflexiones que tuvo que realizar para obtener el resultado de un planteamiento o problema.
11. Favorecen un ambiente positivo y relajado debido a la libertad para su elaboración.
12. Fomentan la comunicación y buenas relaciones con y entre los estudiantes.
13. Ayudan a crear un registro accesible de las experiencias importantes en el proceso de aprendizaje.
14. Incrementan la confianza y motivación por su sencillez y accesibilidad.
15. Estimulan la capacidad de jugar y el sentido del humor, aumentando así la probabilidad de producir ideas creativas.
16. Mejoran la fluidez y habilidad de expresar verbalmente los resultados obtenidos al resolver algo, formar conceptos o discutir temas y sus conclusiones.
17. Reducen el tiempo de preparación de una exposición oral.
18. Ejercitan constantemente la capacidad de interpretar símbolos e imágenes para extraer información y transformarlo en conocimiento.
19. La información vista, leída, en lenguaje matemático se habla en el lenguaje habitual.
20. Permiten estar pendiente, en todo momento, sobre el grado en que se está realizando la comunicación y el aprendizaje.

Se dice que una imagen dice más que mil palabras, y en matemáticas, esto no puede ser la excepción. Una de las áreas de las matemáticas que usa imágenes para representar los objetos que la caracterizan es la geometría. Se dice que la matemática empezó por la geometría. Sus formas y figuras son de especial belleza, tanto en la naturaleza como en la matemática. Resaltan por la diversidad de atributos que poseen como: tamaño, dimensión, posición, dirección, movimiento, profundidad, longitud, anchura; propiedades como la simetría, la proyección, etcétera. Estos atributos hacen de su existencia algo atractivo y que invita a ser examinado, inspeccionado cuidadosamente, además de ser inmortalizado mediante representaciones no solamente gráficas, sino también, algebraicas.

Podemos hallar una similitud entre las cualidades visuales de la geometría y el objetivo de los mapas mentales, es decir, ambos invitan a la observación, exploración e interpretación de lo que representan. Con respecto a la geometría analítica, los estudiantes deben relacionar las gráficas (imagen) con expresiones algebraicas (palabras en lenguaje matemático) así como decir en lenguaje habitual (interpretación) todos los detalles acerca de ellas. Esto es un sutil coqueteo que nos sugiere que la geometría debe ser una de las disciplinas pioneras en ser enseñadas con mapas mentales. No en balde se han escrito tantos libros que matizan la geometría y la imaginación.

Por ser los mapas mentales un recurso para estimular la imaginación y la creatividad, debemos pues, darles la dirección adecuada para concretar un fin: que ayudados por estas dos cualidades, los estudiantes sean capaces de entender la matemática, su lenguaje y el tipo de pensamiento que se necesita para comprender con claridad su contenido. Entonces, enseñarle a los estudiantes a construir mapas mentales que guíen y ordenen sus ideas, que les ayuden a verbalizarlas y reconstruirlas en el momento que sea necesario, que les indiquen cómo y cuándo usarlas, les aportará un medio visual, potente y accesible para retener, reforzar y usar sus conocimientos teóricos y prácticos combinándolos de manera que la obtención de resultados nuevos sea cada vez menos complicada para ellos.

Cuando mostramos a los alumnos que el aprendizaje de las matemáticas puede ser divertido y significativo, y los hacemos sentir y estar seguros de que ya aprendieron algo que creían que no sería posible, cuando los inducimos a recurrir a la técnica de mapas mentales para organizar y concretar sus ideas, para fortalecer sus hábitos de estudio y familiarizar a su cerebro con la construcción sistemática y analítica de respuestas, estamos obsequiándoles el valor agregado que contribuye a hacer de su formación matemática y escolar, una experiencia placentera.

CAPÍTULO 3

IMÁGENES Y DIBUJOS EN EL CONOCIMIENTO HUMANO

> *"En algunos casos, es más importante*
> *la imaginación que el conocimiento"*
>
> *"Si no puedo dibujarlo,*
> *es que no lo entiendo"*
>
> *Albert Einstein.*

3.1. Imágenes mentales y visuales.

Desde la más remota antigüedad, los seres humanos recurrieron al dibujo para representar y dejar testimonio de diversos hechos que ocurrían en su entorno. Al carecer de una forma de escritura, el dibujo representó el medio por el cual estos hombres manifestaron y plasmaron sus recuerdos, pensamientos y emociones, tanto a nivel individual como grupal. Tales dibujos muestran sucesos relacionados con el espacio en el que vivían, sus actividades, sus costumbres, sus experiencias, sus descubrimientos, sus inventos y sus conocimientos. Con estos dibujos reproducían y manifestaban físicamente (sobre troncos y rocas inicialmente) las imágenes que en su mente les recordaban su realidad cotidiana. Esto es, por medio de la imagen podían mostrar claramente, de manera vívida, en qué consistía la recolección, la caza, los rituales, el uso de herramientas, su organización social, los fenómenos físicos, las luchas entre clanes y hechos tan complejos como el comportamiento de la naturaleza y de los astros. Esas imágenes mentales, materializadas mediante dibujos, están tan bien realizados, que hoy día, cuando los observamos con interés y detenimiento, nos sentimos partícipes de lo que éstos ilustran.

De este modo, podemos considerar que reproducir mediante el recuerdo, nuestras sensaciones, sentimientos, pensamientos, conocimientos y situaciones cotidianas, visualizándolos en la mente es, en buena parte, imaginar. Cuando imaginamos creamos imágenes que se proyectan en una especie de *"pantalla mental"* en la que los objetos representados se pueden examinar cuidadosamente y transformar de diversas formas, es decir, afectamos sus dimensiones, posiciones, apariencia, incluso, podemos percibir sonidos, aromas y texturas. Imaginar, es crear una película cuadro por cuadro, de lo que ha ocurrido, ocurre o deseamos que ocurra a nuestro alrededor o en nuestra persona.

Imaginar es reproducir en nuestra mente hechos, conocimientos y resultados que ya se han obtenido, que se están obteniendo o anticiparnos a que esto suceda. Imaginar es manipular cosas que existen, que son concretas, o que no existen, que son abstractas. Aunque lo que imaginemos sea de naturaleza abstracta o concreta, tenemos, como seres humanos, la capacidad de representarlo.

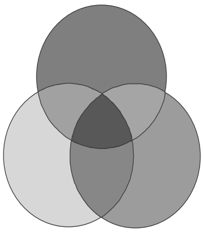
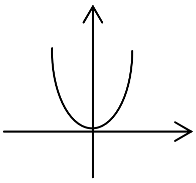
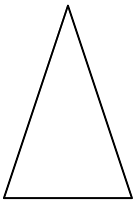
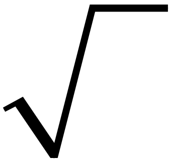
Generalmente, cuando estamos tratando de recordar algo, cuando lo estamos buscando en la memoria y tratando de hacerlo visible en la pantalla mental, para después manifestarlo o reproducirlo, la acción inconsciente que se presenta en nosotros es cerrar los ojos y tocar nuestra frente o las sienes. Aunque también, el acto de recordar, solemos hacerlo con los ojos abiertos, esto es, cuando nos cuesta trabajo recuperar y hacer explícita información que hemos almacenado en la memoria, el cerebro tiende automáticamente a enlazar todas aquellas referencias o asociaciones mentales, por pequeñas que éstas sean, que proporcionan características o detalles particulares de aquello que queremos recordar. Es entonces, que suele formarse una imagen que vemos o proyectamos en la mente y que sirve de apoyo a la información que necesitamos. Esto quiere decir que, al tratar de recordar, encendemos nuestro proyector de imágenes interno, personal, el cual nos ayudará a exteriorizar nuestros recuerdos paso a paso, valiéndose del lenguaje o de un recurso gráfico como el dibujo. Notemos que nuevamente aparece el dibujo, lo que nos sugiere que, por medio de éste, podemos transformar nuestras imágenes mentales en imágenes visuales.

El objetivo que tenemos que plantearnos al explotar intensamente nuestra capacidad de extraer significados de las imágenes mentales o visuales, de interpretarlos adecuadamente, representarlos y transformarlos en conceptos y resultados significativos es, que nos ayuden a captar la esencia de la información que no tenemos clara y, con esta práctica, percibirla en forma precisa, concreta y duradera. Este recurso lo debemos aprovechar para enriquecer y mejorar nuestro nivel de aprendizaje.

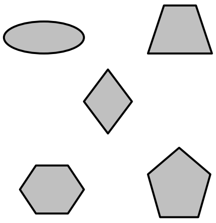
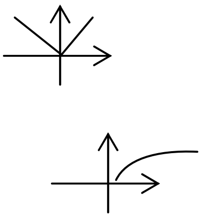
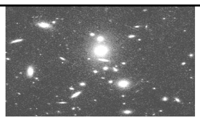
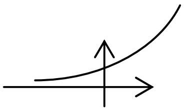
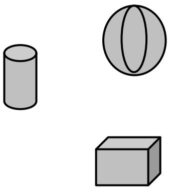
Dentro del contexto histórico, la naturaleza de las imágenes que utiliza la mente para evocar y representar la información y el conocimiento, no es un tema nuevo. El interés por este tema se remonta a las épocas de los primeros filósofos como Aristóteles y Platón. Éstos, mostraron un vivo interés por la naturaleza del significado, su lógica y el razonamiento involucrado para comprenderlo y expresarlo. Ellos no dudaban de la existencia de representaciones internas que permiten a la mente pensar y razonar sobre eventos que están ausentes *“representándolos”* de alguna forma. Una de sus teorías afirmaba que estas *“representaciones mentales”* debían ser, sin duda, imágenes debido a que éstas no se relacionan de manera arbitraria con lo que representan.

Descartaron la posibilidad de que las palabras fueran usadas como “representaciones mentales” pues estas sí establecen relación arbitraria con los objetos que manifiestan.

Tratemos de aclarar un poco esta teoría buscando algunos ejemplos simples, relacionados con matemáticas, e intentemos mostrar lo que pueden evocar, ya sea por medio de imágenes o de palabras. Veamos el siguiente par de tablas:

IMAGEN (significante)				
INTERPRETACIÓN VERBAL (significado)	Tres círculos que se intersectan	La gráfica de una parábola en el plano cartesiano	Un triángulo isósceles.	El símbolo de la raíz cuadrada

En esta primera tabla podemos ver que la interpretación de la imagen mostrada, expresa concretamente lo que se ve. La forma de decirlo puede ser diferente, pero describirá expresamente lo que nuestros ojos observan.

PALABRA (significante)	figura geométrica	Gráfica de una función en el plano cartesiano	límite	Sólido geométrico
INTERPRETACIÓN VISUAL (mental o externa) (significado)			 	

Esta segunda tabla nos muestra que la interpretación que podemos tener de una palabra, por lo general, no es única ya que cada persona puede asociarla con cosas e imágenes muy distintas.

Otra teoría que surgió entre los filósofos aseguraba que el pensamiento consistía en secuencias de imágenes y que éstas representaban el conocimiento, sin embargo, las hipótesis de esta teoría, dieron origen a intensos debates y reflexiones que finalmente derivaron en la conclusión de que las imágenes sólo pueden representar casos particulares del conocimiento, por ejemplo, un triángulo isósceles o uno equilátero, pero no clases de objetos, como los triángulos en general, ni conceptos abstractos como verdad o justicia.

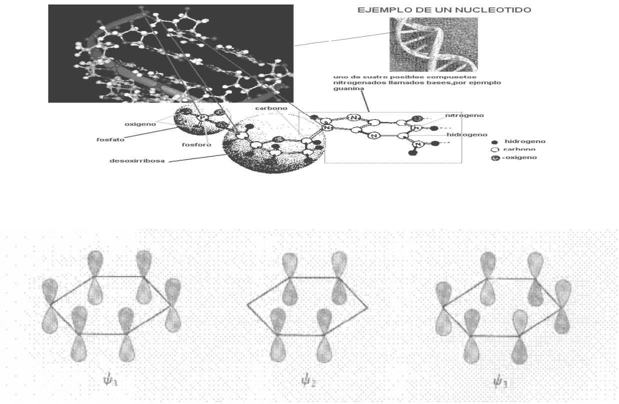
Pero los filósofos no fueron los únicos interesados en el tema de las imágenes y su relación con el conocimiento, también los psicólogos y científicos cognitivos se interesaron en las representaciones mentales. Algunos de ellos, como Wundt (padre de la psicología científica), comparten la convicción de que entre la experiencia y la conducta manifiesta debe mediar algún tipo de representación interna y que ésta es un factor indispensable en la explicación de la conducta inteligente. Otros, como Kulpe descubrieron que también hay pensamiento sin imágenes, es decir, las personas no siempre utilizan imágenes cuando razonan, resuelven problemas, o describen conceptos.

Siguiendo por el camino de la historia encontramos que el creciente desarrollo de la era computacional promovió intensamente nuevas y numerosas investigaciones sobre la forma en que se representan los conocimientos en la mente humana. Debido a que una computadora almacena de forma más natural descripciones de tipo proposicional o lingüístico que imágenes o representaciones pictóricas, se pensó que esto mismo podría suceder en la mente. Sin embargo, este es un punto de vista algo arriesgado ya que las computadoras únicamente muestran los hechos fríos, es decir, no manifiestan agrado o desagrado por los resultados obtenidos ni pueden explicarnos el razonamiento empleado para ello. Otra justificación para no aceptar del todo esta concepción es que podemos citar ejemplos de célebres científicos y artistas que antes de establecer descripciones de tipo proposicional, matemático o lingüístico que ilustrara su trabajo, se valieron de imágenes mentales durante la génesis de sus descubrimientos o creaciones.

Estos ejemplos sugieren que el pensamiento creativo no se fundamenta exclusivamente en procesos deductivos de carácter formal y abstracto, sino también en procesos que involucran la imaginación, la creatividad, la intuición, la reflexión y la crítica, entre otras cosa. Como referencia de la anterior, podemos mencionar la teoría de la relatividad de Albert Einstein. Ésta tiene su origen en el siguiente *“experimento mental”*:

Einstein se imaginó a sí mismo persiguiendo un rayo de luz que se movía frente a él a una velocidad de 300,000km/seg. Entonces se dio cuenta de que si las teorías contemporáneas fuesen correctas, cuanto más rápido se moviera él, más lentamente debería moverse la luz con respecto a él, hasta que emparejaran su velocidad y la luz pareciera estar “parada”. Einstein observó entonces que, a diferencia de su *“experimento imaginativo”*, las leyes de la óptica no parecían depender del punto de vista del observador, por tanto, éste y otros *“experimentos con imágenes mentales”* proporcionaron a Einstein los indicios intuitivos que condujeron posteriormente a su peculiar teoría de la relatividad. El propio Einstein se reconoció incapaz de encontrar los términos y símbolos matemáticos que permitieran expresar sus intuiciones sobre la naturaleza del espacio y el tiempo, hasta no haber elaborado antes su “conceptualización”, de la situación física por medio de “imágenes” que podían reproducirse y combinarse a voluntad.

Otros ejemplos de importantes hallazgos científicos que se han basado en procesos mentales que involucran la imaginación, la intuición, y la creatividad, son el descubrimiento de la estructura hexagonal del benceno por parte de Kekulé, o el modelo de doble hélice del ADN de Watson.



los modelos de ADN(arriba) y del benceno(abajo)

Estos ejemplos aportan una muestra de que las imágenes y simulaciones mentales ayudan a proporcionar nuevas ideas e intuiciones sobre la forma de razonar y resolver problemas. Además, ayudándonos de las imágenes mentales podemos representar relaciones físicas o conceptuales entre objetos o eventos, lo que nos permite tomar decisiones sin realizar necesariamente un complicado análisis lógico de las situaciones o problemas planteados.

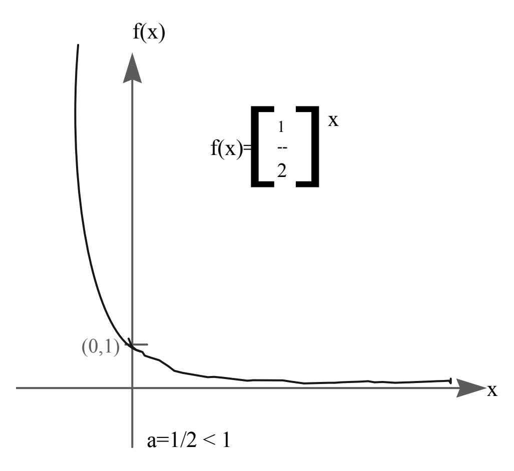
Las relaciones que existen entre ideas, intuiciones y conceptos construidos a nivel mental pueden observarse y explorarse más cuidadosamente utilizando imágenes visuales que las refuercen, por ejemplo:

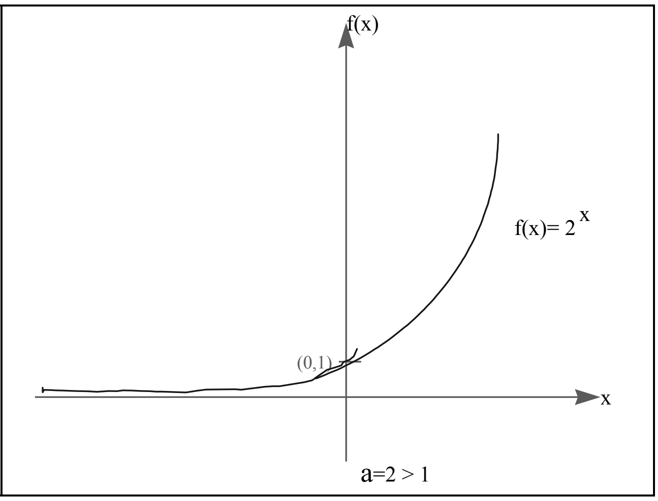
Supongamos que los estudiantes de bachillerato están a punto de entrar en contacto, en su clase de cálculo, con el tema de la función exponencial. Entonces, recurriendo a algunos ejemplos de la vida cotidiana, induzcamos en los jóvenes la idea intuitiva y aproximada de cómo se comporta esta función, es decir, hagamos que perciban su velocísimo crecimiento o decrecimiento. Para abordar el tema de modo formal, primero, familiaricemos al alumno con las características generales que la función exponencial tiene. Así, los chicos deben saber que en la expresión $f(x)=\mathbf{a}^x$:

- **a** es un valor constante, positivo y distinto de la unidad. A esta letra se le conoce con el nombre de **base**.
- **x**, representa un exponente, además, **x** es una variable que toma cualquier valor.
- Si **a>1** la función es creciente.
- Si **a<1** la función es decreciente.

Por lo tanto, la función exponencial se llama así porque esta formada por una base, cuyo exponente, es una variable.

A continuación, tomando en cuenta estas características, procedamos a realizar ejercicios sencillos en donde se asigne distintos valores a la base y al exponente. Enseguida, esbocemos cómo sería el “dibujo” correspondiente para que los alumnos se acostumbren a identificar cómo es la función en cada caso. Por ejemplo, si para cada valor de x, la base a=1/2, entonces los alumnos deben concluir que la función es decreciente. Pero si la base a=2, entonces la función es creciente. Ocurrido esto, mostrémosles que las respectivas gráficas (imagen visual) se ven, como sigue, en el plano cartesiano:



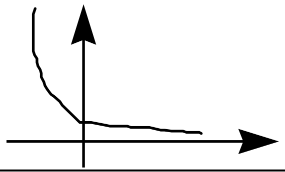
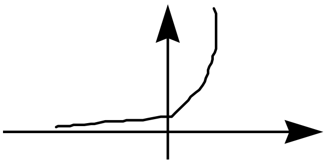


Más ejemplos como estos pueden hacerse, los cuales ayudarán a los estudiantes a darse cuenta de que la gráfica de la función, en ningún momento cruza el eje de las X y que cuando el exponente x=0, la gráfica siempre corta al eje Y en el punto (0,1). Sin embargo, antes de que ellos dibujen gráficas, deben esforzarse por deducir, de acuerdo al valor de la base y exponente que se les pida, cómo es la función, es decir, si es creciente o decreciente, si existe o si no existe.

La exploración visual de las gráficas y la práctica con valores concretos permitirá a los jóvenes hacer, por sí mismos, conclusiones acerca de lo que ocurre con el dominio y el rango de las variables "**x**" y "**y**". De esta manera pueden ahora añadir, a la lista de características, sus observaciones, es decir:

- El dominio de la variable **"x"** es el conjunto de los números reales.
- El rango de la variable **"y"** es el conjunto de los números reales positivos.
- La gráfica de la función siempre corta al eje Y en el punto (0,1).
- La función es continua ya que el trazo de su gráfica no se rompe en ningún punto.

Hasta aquí, los alumnos ya han hecho relaciones entre sus intuiciones, ideas y los conceptos, así es que, por último, teniendo bien claros todos estos elementos y basándose en ellos, deben de desarrollar la capacidad de visualizar en su mente cómo son las gráficas de las funciones que se les plantean y deben expresar verbalmente su respuesta sin necesidad de hacer cálculos en su cuaderno. Un ejemplo, pidamos a los estudiantes que describan las siguientes funciones: $y=(-20)^x$, $y=(16/13)^{-x}$ y $y=55^x$. Las respuestas que deben de externar, pueden parecerse a las del siguiente cuadro:

FUNCION	$y =(-20)^x$	$y =(16/13)^{-x}$	$y= 55^x$
RESPUESTA	Esta ecuación no se puede graficar como una función exponencial ya que la base es a=-20. Ésta no es positiva, y por lo tanto no cumple con una de las características de este tipo de funciones.	En esta ecuación el exponente es negativo lo cual indica que, aplicando leyes de los exponentes, la base se invierte y el exponente cambia a positivo, o sea, $y=(13/16)^x$. Entonces la base es a=(13/16)<1 por tanto la gráfica es la de una función exponencial decreciente	En esta ecuación la base es a=55, es decir "a" es mayor que la unidad, y "x" es un exponente, por lo tanto representa una función exponencial creciente.
GRÁFICA	No hay		

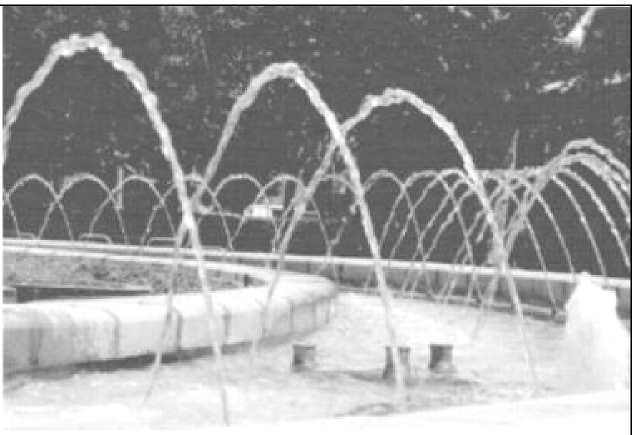
Estos ejercicios y sus imágenes tienen la finalidad de dejar en la memoria de los estudiantes un registro visual que les ayudará a reconstruir o recordar la información acerca de este tema, en el momento en que lo necesiten.

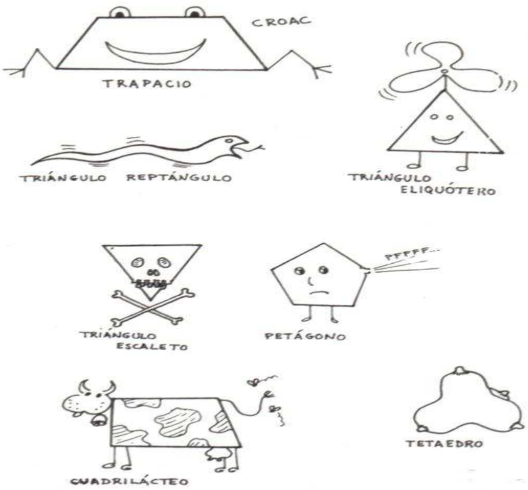
La utilización de imágenes mentales para ayudar a la memoria a recuperar y fijar información (mnemotecnia) tiene origen en un descubrimiento casual del poeta griego Simónides. La leyenda cuenta que, tras asistir a un banquete, Simónides tuvo la fortuna de que le condujeran fuera del recinto justo antes de que se derrumbara el techo. Todos los invitados quedaron destrozados e irreconocibles, sin embargo, Simónides advirtió que podía recordar con facilidad a todos y cada uno de los invitados, imaginándose la mesa y desplazándose mentalmente a través de ella, "viendo" quién estaba sentado en cada silla. Este hallazgo le indujo a desarrollar lo que se conoce como *"método loci"* o de los lugares, que se convirtió en una técnica muy utilizada por los oradores para poder memorizar sus discursos y ha seguido usándose durante muchos siglos como una eficaz herramienta mnemónica.[Ya]

No dejemos de tomar en cuenta las cualidades que las imágenes, ya sean visuales o mentales, poseen. Está probado científicamente que estimulan la imaginación, por lo que fortalecen el pensamiento creativo y la memoria. Así, cuando se trata de que realicemos una amplia gama de asociaciones entre hechos o conocimientos, las imágenes suelen ser más evocativas, precisas y directas que las palabras. Promover ampliamente, en la enseñanza de las matemáticas, el uso de imágenes visuales y mentales como refuerzo de lo que se desea enseñar, ha de estimular progresivamente en los alumnos el tipo de pensamiento intuitivo, asociativo, ordenado y lógico que se requiere para visualizar y dar seguimiento en la mente y en el papel, a las ideas, argumentos, planteamientos o algoritmos que están involucrados en la búsqueda y construcción de soluciones o conclusiones para las diferentes actividades con la matemática.

Los estudiantes pueden hacer perdurar estos logros valiéndose de la creación de diseños visuales, como el dibujo de uno o varios mapas mentales, que les indiquen en forma clara, concreta y efectiva, los conocimientos que necesitan saber y dominar para que su aprendizaje de las matemáticas sea significativo y de largo plazo. Estos mapas mentales desempeñarán la función de memoria auxiliar, portátil y de consulta rápida, pues combinan efectivamente la memoria visual y la memoria escrita.

Otras imágenes que ayudarán a los estudiantes a recuperar su capacidad de asombro y les mostrarán que las matemáticas forman parte de nuestro entorno se muestran en las siguientes páginas[So].

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>La geometría que pisas</td><td>Parábolas en la fuente</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Sueños cartesianos</td><td>hipérbolas</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Mole cartesiana</td><td>Parábolas en el puente</td></tr>
</table>

	
Árbol de conos	Circunferencias en el césped
	
Elipses en el estadio	Geometría insólita

Dirigidos sutilmente por nosotros, los profesores, los estudiantes deben darse cuenta de que todo resultado matemático que obtengan, si está acompañado por la imaginación, el ingenio, el ensayo, el error y la capacidad de asombro, habrá de convertirse en conocimiento verdadero, duradero, valioso y significativo para ellos.

3.2. Dibujos: Los retratos de la mente.

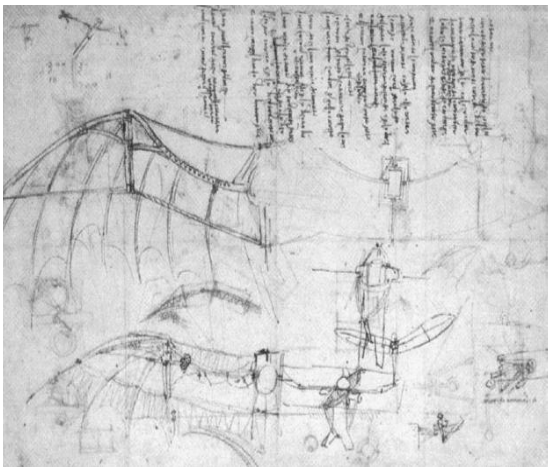
> “Las matemáticas convierten
> lo invisible en visible”
>
> Keith Devhin

Desde el momento en que nuestras manos lograron sostener adecuadamente un lápiz comenzamos a hacer trazos únicos, personales y, que a nuestros ojos, solían ser creaciones maravillosas e increíbles. Durante toda nuestra época infantil nos daba gusto hacer dibujos, en casi cualquier cosa y con diversos colores. Pero, ¿acaso nos dimos cuenta en qué momento dejamos en el olvido esta actividad? Mucho hemos escuchado acerca de que el aprendizaje más efectivo es aquel que se presenta dinámico, novedoso y divertido. Una de las actividades que cuenta con estas características es el dibujo. Pero, entonces, ¿por qué no se introduce el dibujo en el nivel medio superior como recurso y alternativa que enriquezca la enseñanza y el aprendizaje?

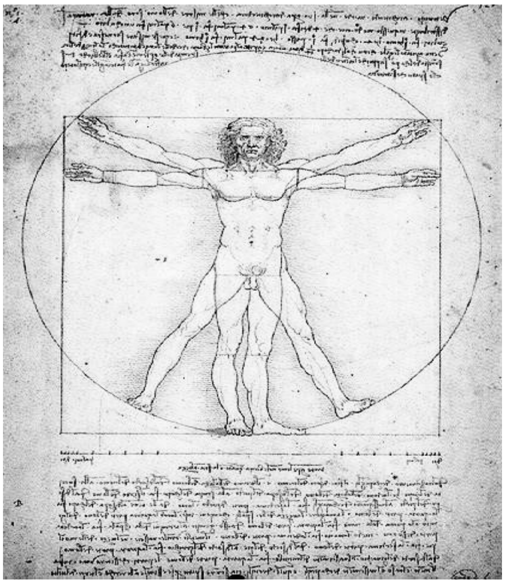
Pues esto sucede debido a que algunas circunstancias como la falta de práctica, la crítica, el prejuicio, el miedo al ridículo, la timidez, el no parecer infantil y la inseguridad forman parte de los factores que frenan a las personas es su intento o deseo de dibujar. Con esto, ellas le ponen límite a su capacidad para expresar y describir mediante imágenes lo que piensan, sienten, desean o necesitan. Quizá hemos olvidado, o queremos negar, que los dibujos son herramientas visuales que por estar dotadas de colores, formas, dimensiones, tonalidades y texturas, inevitablemente nos impresionan. Todas estas cualidades de las imágenes son captadas a través del sentido de la vista y éste es el sentido que recibe y obtiene del entorno mayor cantidad de información, esto significa que impacta fuertemente a nuestro cerebro desatando en él gran cantidad de estímulos y éstos activan, en especial, sus funciones de recepción y retención. Lo más probable es que, si integramos imágenes y dibujos en aquello que deseamos enseñar o aprender, el resultado será más interesante y satisfactorio.

No rechacemos la idea de que, la actividad del dibujo, además de ser una fuente enorme de satisfacción, ayuda a aprender, a pensar y a comunicar. Es asimismo, una actividad que estimula nuestra imaginación, recrea las ideas, nos permite aprender sobre nuestro mundo y fortalece el funcionamiento cerebral. Cuando combinamos el dibujo con la observación y la imaginación, experimentamos al máximo el pensamiento visual y a través de este medio podemos evaluar, refinar, comprender, comunicar y resolver ciertos problemas. Muchos personajes de la historia universal, como el eminente Leonardo da Vinci, el ingeniero Gérard Desargues (1591-1661), el filósofo Blaise Pascal (1623-1662), el arquitecto Louis Khan(1901-1974) y el inventor Thomas Alba Edison(1847-1931), entre otros, han pensado y comunicado sus ideas con efectividad mediante el uso del dibujo y la visualización. El dibujo fue parte de su proceso creativo.

Para ejemplificar esto, veamos a continuación, algunos apuntes de Leonardo:



En ellos podemos observar tanto dibujos como escritura y ambos, con seguridad, fueron usados para describir de qué trata el proyecto, invento o proceso creativo que este personaje pretendía materializar posteriormente.



En el conocido “**hombre de Vitrubio**”, Leonardo da Vinci realiza una visión del hombre como centro del Universo al quedar inscrito en un círculo y un cuadrado. El cuadrado es la base de lo clásico: el módulo del cuadrado se emplea en toda la arquitectura clásica, el uso del ángulo de 90º y la simetría son bases grecolatinas de la arquitectura. En él se realiza un estudio anatómico buscando la proporcionalidad del cuerpo humano, el canon clásico o ideal de belleza. En este dibujo representa las proporciones que podían establecerse en el cuerpo humano y éstas, asombrosamente, están relacionadas con la razón áurea.

Para cambiar un poco la rutina en la enseñanza de las matemáticas en el aula, una actividad que relacione el dibujo y las imágenes puede consistir en pedirle a los alumnos que consigan una cámara fotográfica e invitarlos a tomar fotografías a creaciones de la madre naturaleza o a creaciones del hombre. También pueden hacer esto imitando las formas que ven, dibujándolas en una cartulina. De esta forma, los jóvenes podrán encontrar gran cantidad de contenido matemático en aquello que forma parte de nuestro entorno. Esta actividad, al realizarse fuera de las cuatro paredes del salón de clase, permite a los estudiantes relajarse física y mentalmente ya que, de esta manera, ellos cambian la cotidianeidad por la aventura y el descubrimiento, esto último, debido a que tienen que ser muy observadores al momento de seleccionar y evaluar lo que van a fotografiar o dibujar.

Debido a que la evaluación de los pensamientos e ideas es un proceso mental que se efectúa rápidamente, su visualización se transforma en un método que capta sus detalles importantes, los expresa y los evalúa. Además, la mayoría de los pensamientos e ideas que habitan en nuestra mente son creaciones ilusorias que generalmente se manifiestan a través de imágenes mentales, de las cuales pueden pasar desapercibidos algunos detalles, por lo tanto, debemos considerar que dibujar es una alternativa motivante que nos permite ver con claridad nuestras imágenes mentales e imaginar como funcionan. Así, el dibujo representa la etapa donde el pensamiento puede ser capturado, expandido, refinado, analizado y evaluado con mayor detalle.

Esta etapa se conoce como pensamiento creativo y debe servirnos de puente para acostumbrarnos a desarrollar el pensamiento matemático pues, en este, la creatividad y la imaginación son parte importante al momento de generar ideas y resultados. ¿Por qué? Pues porque estamos trabajando con multitud de conceptos y objetos abstractos que, después de ser operados, representan objetos concretos. Esas operaciones las llevamos a cabo en un laboratorio invisible, es decir, en la mente.

Fuentes consultadas para este capítulo: [Ba],[Bu2],[Ko],[Or],[An],[S-C2].

CAPÍTULO 4

SUGERENCIAS PARA EL USO DE MAPAS MENTALES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

“No entiendes realmente algo
a menos que seas capaz de
explicárselo a tu abuela”

Albert Einstein

4.1. Geometría analítica con mapas mentales.

Cuando los jóvenes inician sus estudios de nivel bachillerato, descubren que tienen que cursar también, y sin poderlo evitar, asignaturas de matemáticas. Esto, en algunos casos, llega a causarles emociones negativas (pues ya habíamos mencionado antes que su experiencia previa con éstas pudo no haber sido agradable). Para la mayoría de ellos, por lo menos los nombres de álgebra, geometría y trigonometría, les son un tanto familiares e intuyen que se relacionan con matemáticas del nivel escolar anterior (sobre su contenido no especulemos). Sin embargo, varios no tienen referencias sobre las asignaturas de geometría analítica y cálculo diferencial. Hablando de éstas, en particular de la geometría analítica, la sensación de novedad e incertidumbre es más que evidente. Es posible que, la palabra “geometría” sugiera en la mente de los estudiantes figuras como rectas, cuadrados, triángulos, circunferencias y algunas fórmulas relacionadas con ellas. En cambio, encuentran algo misteriosa la palabra “analítica” pues no saben a qué se referirá.

Como sabemos, la geometría nos muestra imágenes que representan objetos matemáticos de especial belleza. Estos objetos van desde figuras y formas sencillas (que pueden trazarse con facilidad), hasta otras fabulosamente complicadas pero amabas son tan interesantes, que esto las hace merecedoras de ser estudiadas más allá de su apariencia visual, esto es, hay que analizarlas cuidadosamente para, luego, representarlas por medio de expresiones algebraicas que las describan de forma general. Es en este momento, es decir, al pasar del estudio visual de la figura al estudio algebraico, que la geometría se transforma en, geometría analítica. Así, la tarea que deben realizar nuestros estudiantes, consiste en que se den cuenta de que en la geometría analítica, la parte visual es muy importante al momento de examinar figuras o al tratar de interpretar un evento de la vida diaria ya que la visualización nos aportará información necesaria para poderlos representar sin importar cualidades particulares, como por ejemplo, el tamaño de las figuras.

La ayuda visual en el estudio de la geometría analítica permite que nuestros alumnos perciban muchas de las características y condiciones que satisfacen los objetos o los eventos, es decir, casi sin darse cuenta, pasan de un estudio sintético (geométrico puro) a un estudio analítico. Sin embargo, este proceso es tan sutil, que difícilmente los estudiantes llegan a detectarlo. Podemos darnos cuenta fácilmente que les resulta extraño y, a veces, increíble haber empezado a trabajar con algo concreto (puntos, rectas y otras figuras dibujadas en el plano cartesiano) y “de repente”, tener sólo frente a sí, algo abstracto, es decir, expresiones algebraicas.

De este modo, para ayudarlos a asimilar esta transformación que les parece tan brusca, he escogido esta parte de las matemáticas, la geometría analítica, para enseñarla adaptando en clase la aplicación, uso y creación de mapas mentales. La finalidad principal que deseo alcanzar al usar esta técnica es que mis estudiantes, además de aprender con claridad la parte conceptual de esta disciplina, sean capaces de equilibrarla con la acción de percibir, comprender y sintetizar cómo, en un laboratorio llamado plano cartesiano, manipulan objetos geométricos, hayan relaciones entre ellos y, además, le dan nombre (en lenguaje matemático) con sólo agregar un ingrediente especial (álgebra).

Afortunadamente he tenido la oportunidad de experimentar con la técnica de mapas mentales con tres grupos diferentes de estudiantes de geometría analítica y los resultados han sido favorables tanto para los estudiantes como para mí, ya que, con la aplicación de esta técnica, también logré motivar en ellos las siguientes acciones que beneficiaron su aprovechamiento:

- Acercarse al profesor, considerándolo como una persona que es mentor y guía y no alguien que provoca temor y desconfianza.
- Preguntar, para disipar dudas, corregir y reafirmar contenidos y procedimientos.
- Participar intensivamente, es decir, dando su opinión, haciendo propuestas, discutiendo las diferentes maneras de atacar problemas, haciendo escuchar su voz, etcétera.
- Tener iniciativa, intentando hacer las cosas solos, aunque se equivoquen.
- Aprender de sus errores, ya que éstos les proporcionan conocimiento verdadero.
- Confiar en sus propios logros.
- Expresar sus sentimientos, miedos e inquietudes.
- Desarrollar su interés por investigar, descubrir e interpretar símbolos.
- Compartir experiencias.
- Sentirse felices con sus aciertos y sus errores.
- Evaluar su aprendizaje.

En las siguientes páginas presentaré un ejemplo de cómo expuse ante mis alumnos temas de geometría analítica y de cómo usamos los mapas mentales. Podremos notar que los temas iniciales se platican con suavidad y detenimiento pero, poco a poco (y espero que los jóvenes no se hayan dado cuenta) abordamos los siguientes con más intensidad y trabajamos con objetos y notación abstractos.

Esta propuesta es una aventura que me ayudó a transformar la pureza de las matemáticas en una actividad que combina armoniosamente su seriedad con la informalidad al comunicar su contenido. Desde luego, la presentación de este trabajo no pretende ser, de ninguna manera, ni un curso de matemáticas ni un libro de texto, más bien, veámoslo como un conjunto de apuntes de geometría analítica escritos de manera diferente a la usual. Así pues, otra cosa que debemos notar es que este trabajo carece en gran parte del rigor y manifiesta formalidad que comúnmente aparece en libros destinados al nivel de enseñanza superior. Al tener así elaboradas las notas, se transforman en un material de fácil consulta para el alumno, le son atractivas porque parte del contenido será creación suya y, además, con este tipo de apuntes retiene información indispensable que le indica concretamente, qué es lo que necesita conocer y dominar para construir o reconstruir conceptos y/o fórmulas fundamentales de la geometría analítica.

Veremos pues, que la propuesta iniciará con la presentación del temario y luego continuará con la exposición de algunos temas que lo integran. En cuanto a estos, primero mostraré un ejemplo de explicación y luego observaremos un mapa mental que indica, mediante imágenes y palabras, los puntos esenciales que los estudiantes requieren saber para asegurarse de que han comprendido con claridad el tema. Este mapa representará una especie de resumen donde se explique visualmente qué se hizo y cómo en el estudio de cada tema.

Por otro lado, como los mapas mentales deben ser un diseño sencillo y claro que genere la necesidad por completar y complementar aquello que se está aprendiendo, algunos procedimientos algebraicos que intervienen en la obtención de fórmulas y que son extensos, no serán incluidos en la exposición del tema ni en el diseño del mapa mental. Esto podría saturar de simbología el mapa y perdería claridad. La intención es evitar que el alumno se confunda y se aburra tratando de seguir procedimientos no tan directos y que involucran varias cosas. Tal es el caso del mapa VIII, que trata de la distancia de un punto a una recta, y de los mapas XII y XIV (elipse e hipérbola, respectivamente). En ellos, la explicación para la obtención de las fórmulas se hace de manera muy somera. Desde luego que en clase debemos hacerlos en el pizarrón pero, si quedara alguna duda, el alumno puede consultar su libro base o cualesquiera otros para averiguar, por sí mismo, cómo son y cómo se construyen.

Para que entremos en materia mostraré enseguida, en su formato original, dos páginas, de un total de seis, del programa "semestral" a cubrir en el colegio donde laboré por dos años. Podremos notar que, si las entregamos así a los alumnos, serán percibidas por ellos como un conjunto de letras en fondo blanco, plano y poco interesante. Las muestro para expresar mi desacuerdo con este tipo de medio para comunicar a los estudiantes de qué tratará su curso.

HOJA No.:1
DE: 6

CLAVE: **MSPO815.7** INSTITUCIÓN: **COLEGIO BOSTON DE MÉXICO** AÑO LECTIVO: **2004-2005**
ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS III** GRUPO: **3º.BTA, C, P**
PROFESOR: **MARÍA PONCE DOMÍNGUEZ** DICTAMEN:
FECHA DE ELABORACIÓN: 05-08-2005

OBJETIVOS GENERALES DEL CURSO:

QUE EL ALUMNO MANEJE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA COMO SON LOS DE FUNCIÓN, ECUACIONES DE LA RECTA, PARÁBOLA, CIRCUNFERENCIA, ELIPSE E HIPÉRBOLA.

EL ALUMNO TENDRÁ LA CAPACIDAD DE REPRESENTAR GRÁFICAMENTE ESTAS FUNCIONES, ASÍ COMO IDENTIFICAR ALGEBRAICAMENTE SUS CARACTERÍSTICAS.

EVALUACIÓN GLOBAL(PORCENTAJES):

EXAMEN:70% PARTICIPACIÓN, TAREAS, TRABAJOS:30%

ASISTENCIAS:80%

BIBLIOGRAFÍA:

LEHMANN	CABALLERO, MARTÍNEZ, BERNÁRDEZ
Geometría Analítica	Geometría Analítica
UTHEA	ESFINGE

DIRECTOR TÉCNICO: FIRMA

DEPTO. DE SUPERVISIÓN ACADÉMICA

HOJA NO.2
DE: 6

No.1 UNIDAD TEMÁTICA: INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

OBJETIVOS:

QUE EL ALUMNO CONOZCA Y SE FAMILIARICE CON EL PLANO CARTESIANO Y LOS CONCEPTOS BÁSICOS NECESARIOS PARA EL USO ADECUADO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA.

FECHA	TEMA, SUBTEMA, CONTENIDO	PÁGINAS	ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE	FECHA REAL
	I. INTRODUCCIÓN I.1.Antecedentes históricos de la Geometría analítica. I.2 Definición.		Se realizará una breve reseña histórica sobre la Geometría Analítica. Se pedirá una investigación bibliográfica sobre René Descartes y su obra.	
	II. SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES. II.1.El plano cartesiano.		Se explicará la manera en que opera el sistema de coordenadas rectangulares y se definirán los elementos que lo constituyen.	
	II.2.Localización de puntos en el plano II.3.Distancia entre dos puntos. II.4.Punto medio de un segmento.		Se localizará puntos sobre un plano cartesiano de acuerdo a sus coordenadas. De una forma gráfica y analítica se redescubrirán las fórmulas que nos ayudan a encontrar la distancia entre dos puntos y para dividir un segmento en una razón dada.	

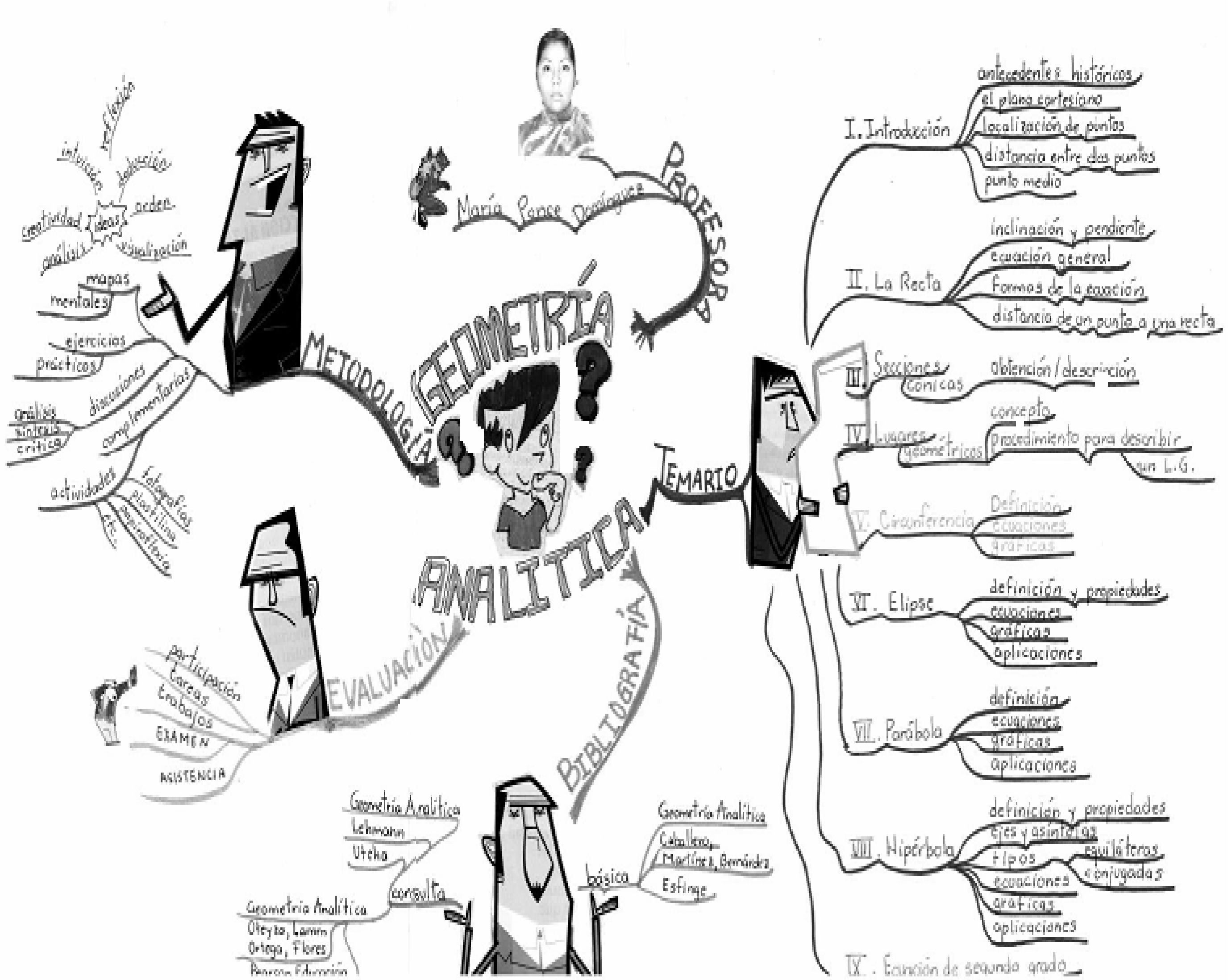
BIBLIOGRAFÍA: CABALLERO, MARTÍNEZ, BERNÁRDEZ
Geometría Analítica
UTHEA

EVALUACIÓN:

EXAMEN 70% PARTICIPACIÓN, TAREAS, TRABAJOS 30%

ASISTENCIA 80%

Como comenté, este tipo de presentación del temario suele no ser atractivo para los jóvenes, así, para presentar este programa de una manera llamativa y en una sola hoja, lo transformé en un mapa mental que muestra los puntos más importantes del curso. Adicionalmente, expliqué al grupo como lo íbamos a revisar e interpretar. Como podemos ver enseguida, el mapa es claro, breve y concreto.



Empecemos pues con los ejemplos de presentación de temas de geometría analítica que aparecen en este programa de bachillerato. En el texto que forma la explicación, he resaltado las ideas principales con letras mayúsculas y éstas se trasnformarán en los puntos más sobresalientes que los jóvenes necesitan saber, dominar y recordar de cada tema, por tal motivo, formarán parte de los mapas mentales correspondientes. Cada explicación estará identificada con un número de mapa así como por el nombre del tema que se va a tratar. Esto lo podemos ver en las siguientes páginas.

MAPA I
ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Algunas de las PRIMERAS NECESIDADES que pusieron al ser humano en contacto con la GEOMETRÍA fueron las de MEDIR, para su equitativa repartición, las tierras de labor, las de CONSTRUIR edificios y canales de riego y la de dotar de ESENCIA ESTÉTICA a multitud de utensilios que, como podemos ver en los museos, poseen cualidades simétricas. Esto puede apreciarse en los trabajos de los EGIPCIOS, BABILONIOS, SUMERIOS y OTRAS CIVILIZACIONES.

Esta necesidad práctica y estética de la medición, dio ORIGEN a RECETAS EMPÍRICAS (fórmulas) con las que estos pueblos podían COMPARAR y MEDIR perímetros, áreas y volúmenes de FIGURAS SENCILLAS como rectángulos, circunferencias, trapecios, triángulos, paralelepípedos, cilindros y prismas rectos. Sin embargo, estos conocimientos NO TENÍAN JUSTIFICACIÓN más allá de su UTILIDAD.

Los conocimientos empíricos elaborados por los egipcios, babilonios y otros pueblos fueron aprovechados, posteriormente, por LOS GRIEGOS, quienes les dieron un carácter racional, es decir, aplicaron un MÉTODO llamado DEDUCTIVO, para JUSTIFICAR estos RESULTADOS más allá de la simple utilidad práctica o estética. En la escuela de Alejandría, la GEOMETRÍA GRIEGA alcanzó su máximo esplendor. De ella sobresale el matemático EUCLIDES, quien dejó asentado en riguroso orden lógico, las PRINCIPALES PROPIEDADES GEOMÉTRICAS de su tiempo. Esta lista de propiedades se conoce con el nombre de POSTULADOS de Euclides.

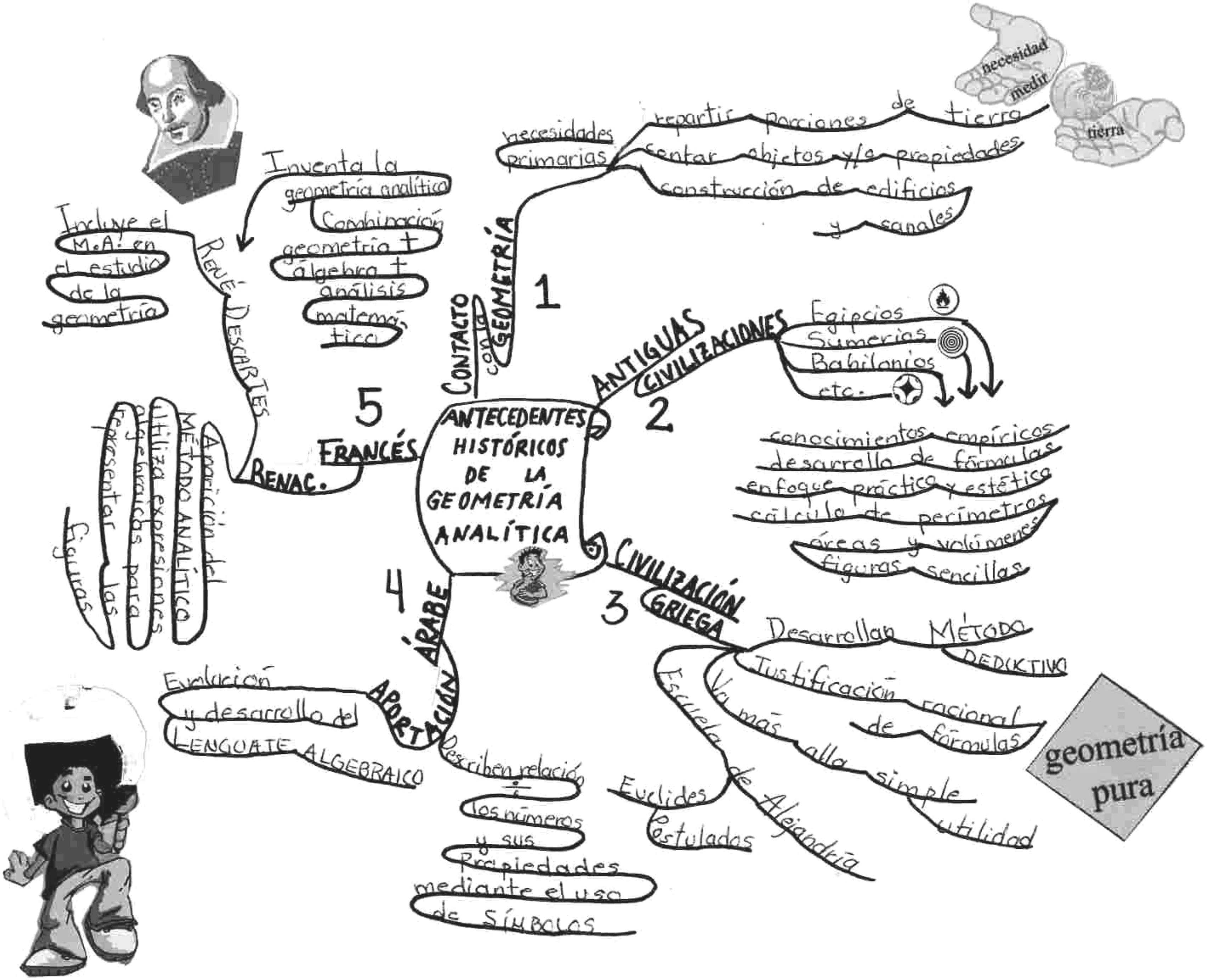
En el MÉTODO DEDUCTIVO, el estudio y obtención de las propiedades de las figuras, se lleva a cabo a partir de los POSTULADOS fundamentales y de la OBSERVACIÓN DIRECTA de la misma, es decir, la figura no se pierde nunca de vista. Sin embargo, no es el único método que existe para el estudio de las figuras. Después del fin de la civilización griega el estudio y conocimiento de las matemáticas entró en una época oscura en donde el interés por éstas era casi nulo. Sólo los ÁRABES dieron CONTINUIDAD al basto CONOCIMIENTO MATEMÁTICO GRIEGO y además DESARROLLARON un lenguaje que, mediante símbolos, representa las relaciones existentes entre los números y sus propiedades. Este lenguaje lo conocemos hoy con el nombre de ÁLGEBRA.

Es hasta la primera mitad del Siglo XVII, durante el RENACIMIENTO FRANCÉS que se crea otro método de estudio llamado, MÉTODO ANALÍTICO, en éste, la deducción de las propiedades de una figura y la determinación de la misma, se efectúa empleando el ANÁLISIS MATEMÁTICO (cálculo).

Así, es en 1637, que un famoso matemático francés llamado RENÉ DESCARTES, INTRODUCE este método en el estudio de la geometría, es decir, en esta nueva forma de deducción, las figuras geométricas son representadas por EXPRESIONES ALGEBRAICAS (ecuaciones) obtenidas a partir del estudio de las relaciones que guardan entre sí los puntos que forman la figura. Estas relaciones pueden observarse con la ayuda de un SISTEMA DE COORDENADAS.

Las ECUACIONES que REPRESETAN a la FIGURA sirven para DESCRIBIR, no sólo a una, sino a TODAS LAS FIGURAS geométricas que tienen la MISMA FORMA, no importando su tamaño. De esta manera NACE una nueva rama de la matemática, la GEOMETRÍA ANALÍTICA, que consiste en combinar el ÁLGEBRA, la GEOMETRÍA y el ANALÍSIS MATEMÁTICO.

Fuentes: [Co],[R-S],[R-B],[St].



Mapa I. Lo que debo recordar acerca de los "Antecedentes históricos de la geometría analítica".

MAPA II
EL PLANO CARTESIANO

Tomemos una hoja de papel, de preferencia cuadriculado. Vamos a llamarla, en vez de hoja, PLANO.

Ahora hagamos, con la punta de un marcador de punto fino, una diminuta marca sobre cada una de las esquinas de los cuadros que tiene nuestro plano. Podemos notar perfectamente que éste queda lleno por un CONJUNTO de PUNTOS. Observemos que mientras más pequeños sean los cuadros, aparecen también más y más puntos y que estos GUARDAN CIERTO ORDEN.

Si doblamos nuestro plano por la mitad, primero a lo largo y luego a lo ancho, notaremos que, al desdoblarlo, pueden verse dos marcas largas. Delineando con un lápiz cada una de ellas, obtenemos dos líneas rectas que se cruzan en un punto común y que además, forman ángulos de noventa grados. Llamaremos a las dos líneas originadas por los dobleces, EJES y al punto de intersección, ORIGEN.

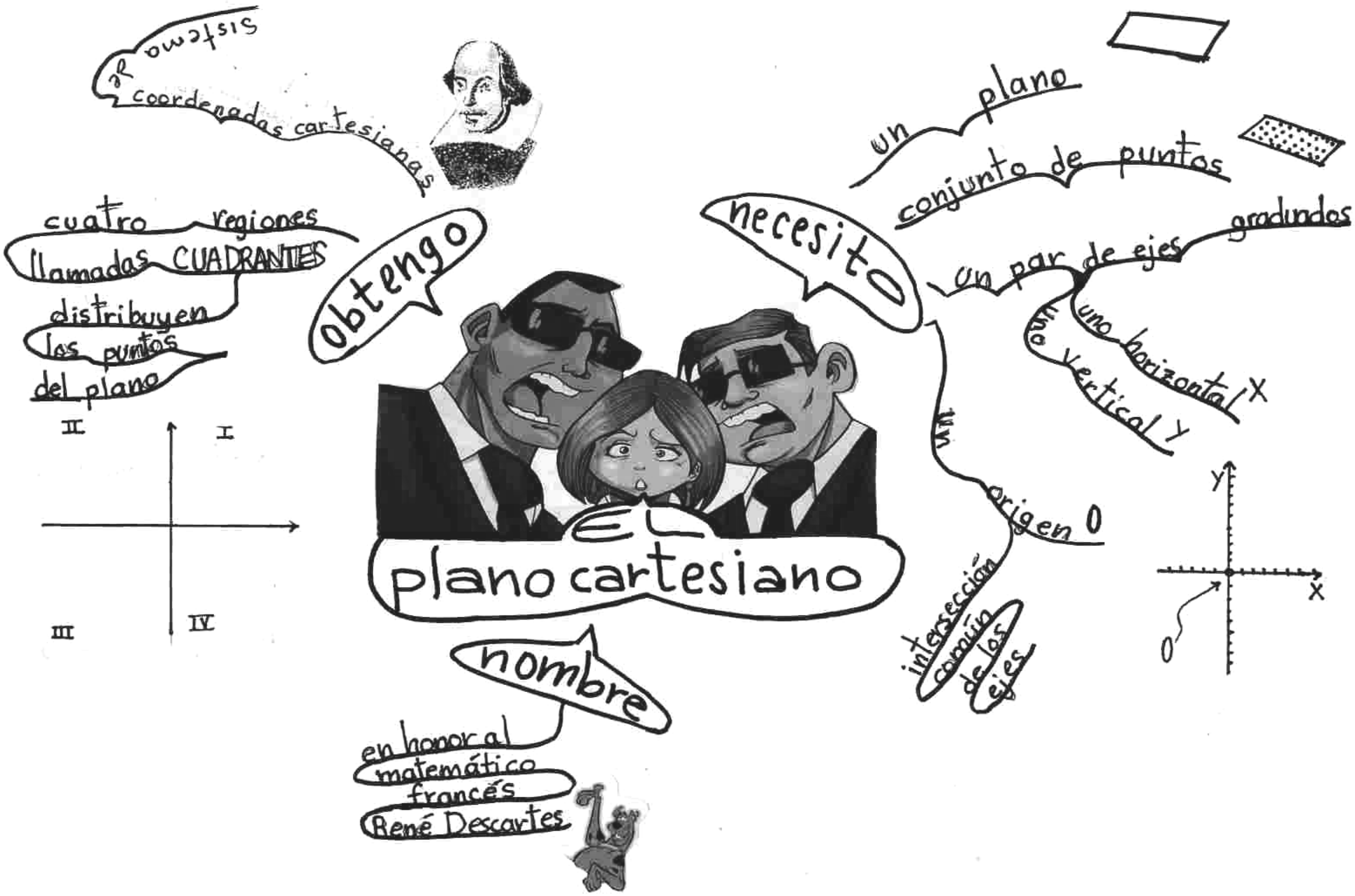
Elijamos como unidad de medida a cualquiera de los cuadrados de la hoja y graduemos, a partir del origen y con esta longitud, cada uno de los ejes. Por comodidad acompañemos cada marca de la graduación con un número entero.

Vemos que en nuestro plano hay un EJE HORIZONTAL, lo llamaremos EJE X o eje de las abscisas. El otro EJE es VERTICAL, éste se llamará EJE Y o eje de las ordenadas.

Cada uno de los ejes tiene DOS PARTES, UNA POSITIVA y OTRA NEGATIVA. Si nos paramos en el origen, podemos ver que, a partir de este, la parte positiva del eje X es hacia la derecha y la negativa, hacia la izquierda. En el eje Y, la positiva es hacia arriba y la negativa hacia abajo. Para simbolizar la parte positiva usaremos el signo “+” y para la negativa “-”.

También podemos notar que los EJES DIVIDEN AL PLANO en CUATRO REGIONES. Las numeraremos en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Les pondremos por nombre, a cada una de estas regiones, CUADRANTES.

A la figura que hemos construido le llamaremos PLANO CARTESIANO o, más precisamente, SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES CARTESIANAS. Este plano se llama así, en honor al matemático francés RENÉ DESCARTES.



Mapa II. Lo que debo recordar acerca del "Plano cartesiano".

MAPA III
LOCALIZACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO

Los PUNTOS en el PLANO se encuentran DISTRIBUIDOS en cada uno de los CUADRANTES, aunque también los hay en los ejes. Para diferenciar a cada uno de ellos, los vamos a distinguir o etiquetar de algún modo, es decir, les vamos a asignar un NOMBRE ÚNICO. Para darle nombre a los puntos necesitamos DOS VALORES escogidos en el siguiente orden: primero ABSCISA y luego ORDENADA. La abscisa la vamos a buscar en el eje X y la ordenada, en el eje Y. Aquí notamos la importancia de haber graduado los ejes pues las marcas de la graduación, representan a cada uno de estos valores.

Los valores de los que estamos hablando, REPRESENTAN, respectivamente, la DISTANCIA que hay, DESDE el ORIGEN hasta la PROYECCIÓN del punto sobre cada uno de los ejes. La proyección se representa en el plano cartesiano, con una LÍNEA PUNTEADA que nace en el punto y es PERPENDICULAR A CADA EJE.

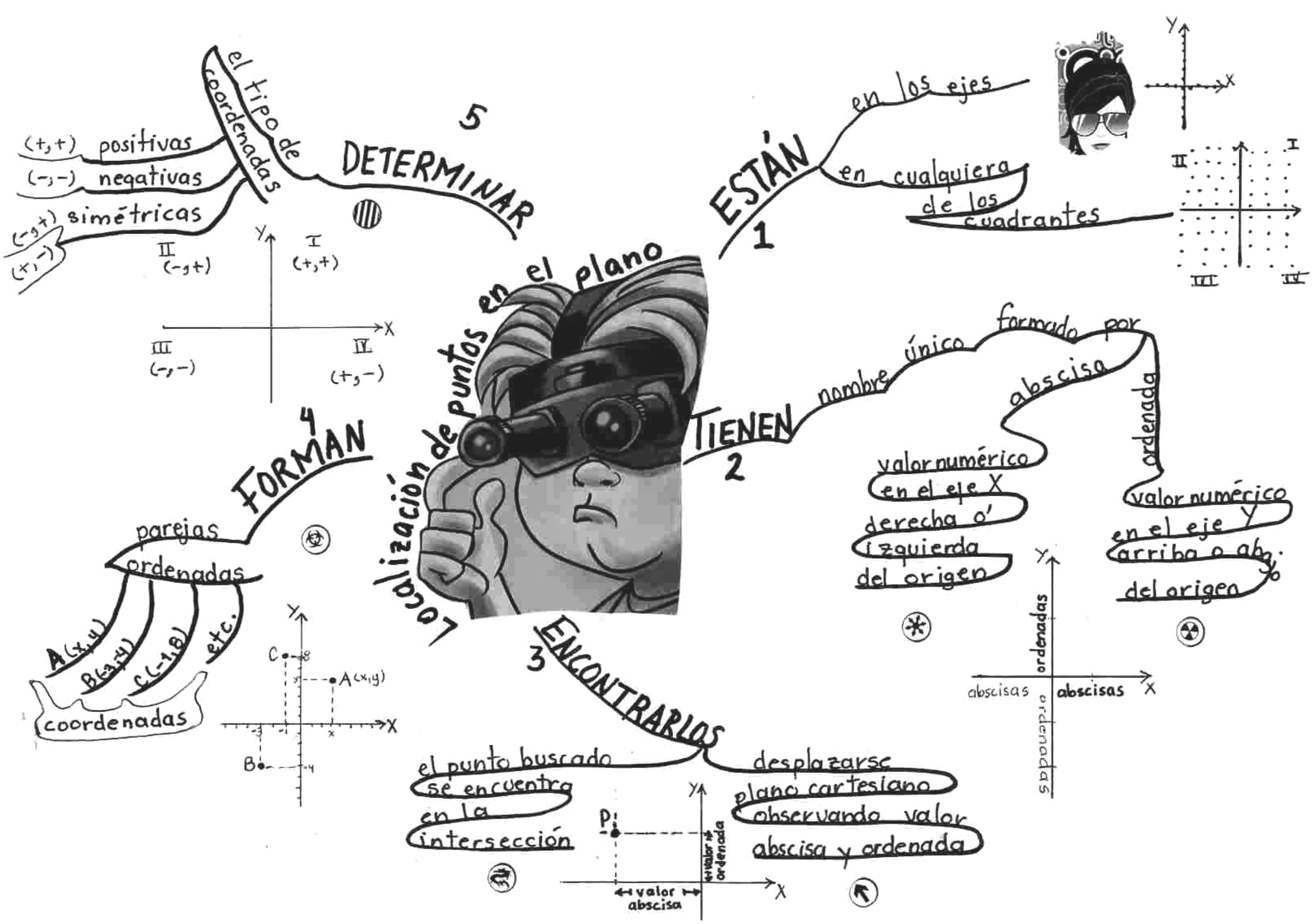
Para ejemplificar esto, escojamos al azar un punto cualquiera del plano y llamémosle P. Con ayuda de una escuadra o una regla, tracemos las proyecciones del punto sobre los ejes y hagamos alto en donde las líneas, los cortan. En esos cortes se encuentra el valor que corresponde a la abscisa y a la ordenada de ese punto. Para ESCRIBIR el NOMBRE que corresponde al punto P, colocamos estos valores dentro de un paréntesis y los separamos con una coma, o sea, así:(ABSCISA, ORDENADA). Esta representación es el nombre con el que identificamos al punto y es único porque no hay otro punto en el plano que se llame igual. Para abreviar, conoceremos al nombre de cada punto como sus COORDENADAS.

Como los ejes tienen dos partes, entonces las coordenadas en cada uno de los cuadrantes se CARACTERIZAN por ser como se muestra en la siguiente tabla:

CUADRANTE	ABSCISA	ORDENADA	SE ESCRIBE	SE LES LLAMA
I	+	+	(+,+)	Positivas
II	-	+	(-,+)	Simétricas
III	-	-	(-,-)	Negativas
IV	+	-	(+,-)	Simétricas

Cuando conocemos los valores que representan las coordenadas del punto, los escribimos de manera explícita. Por ejemplo, si la abscisa es +6 y la ordenada -9, las coordenadas del punto se escriben (+6,-9). Si desconocemos los valores de las coordenadas, entonces usamos las letras minúsculas “x” y “y” (o cualesquiera otras) para representar, respectivamente, a la abscisa y a la ordenada, entonces escribimos (x,y) o (m,n) o (a,b).

Otras veces colocamos junto a las coordenadas, una letra mayúscula que indica concretamente a qué punto, en particular, nos referimos, por ejemplo, P(x,y), Q(m,n), R(a,b). En otras ocasiones usaremos subíndices para etiquetar a los puntos, es decir, podemos escribirlos así: $P_1(x_1,y_1)$ o $P_2(x_2,y_2)$ o $M(x_M,y_M)$, etcétera.

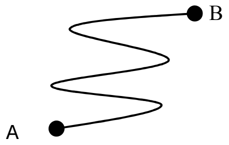


Mapa III. Lo que debo recordar acerca de la "Localización de puntos en el plano".

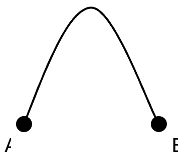
MAPA IV
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Supongamos que DOS PUNTOS CUALESQUIERA del plano cartesiano, representan a dos personas distintas y que éstas viven en diferente lugar. Una de ellas se llama persona A y la otra, B. Estas dos personas, desean conocerse, sin embargo, para que A pueda entrevistarse con B, tiene que llegar hasta donde ésta vive. Así pues, A tiene que elegir entre los siguientes caminos para llegar a su objetivo:

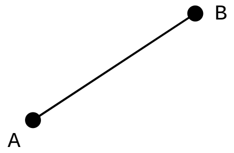
Quizá un camino ondulante la ayudaría a llegar.



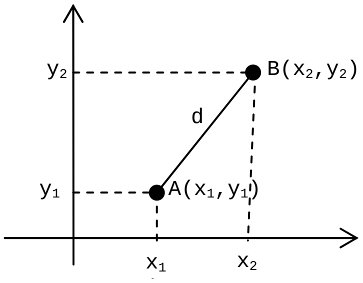
O también puede optar por seguir un camino curvo, más sencillo.

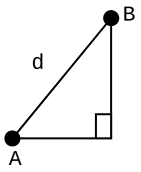


¿Existirá alguna otra opción que pueda escoger la persona A? ¡Pues sí! Tiene que encontrar un camino más corto, uno que MINIMICE LA DISTANCIA entre el lugar en que ella se encuentra y el lugar donde vive la persona B. Pero, ¡hey!, ¿cómo no se le había ocurrido antes? ¡Claro! Ese camino debe ser en línea recta.

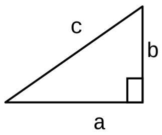


Bien, ayudémosle a la persona A, a encontrar una fórmula para que llegue pronto a su destino. Realicemos pues, en el plano cartesiano, una FIGURA con la que podamos visualizar esto. Así, si A se encuentra en (x_1,y_1), B en (x_2,y_2) y la distancia que los separa en línea recta es “d”, entonces podemos observar que, con estos datos, se forma una figura. Esa figura REPRESENTA un…, ¡eso es!, un TRIÁNGULO RECTÁNGULO. Notemos que la distancia “d”, está asociada al lado más largo de éste.

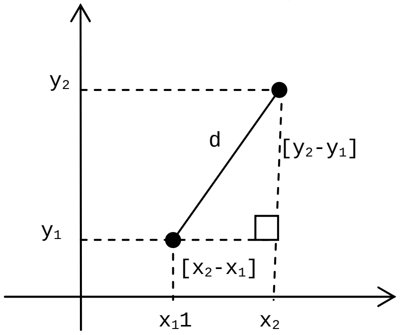




Esta figura nos pone en contacto con un matemático y sabio griego del pasado. ¡Sí! ¡PITÁGORAS! A él lo conocemos por el TEOREMA que lleva su nombre y que dice: en todo triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos. La misma cosa, pero expresada con letras, se ve así: $c^2=a^2+b^2$. O, bien, $c=\sqrt{a^2+b^2}$.



Comparando esto con lo que observamos en nuestro triángulo, relacionamos entonces el lado “d” con la hipotenusa y a los catetos con los segmentos que miden (x_2-x_1) y (y_2-y_1), respectivamente. La longitud de los catetos la obtuvimos fijándonos simplemente en la construcción de la figura.

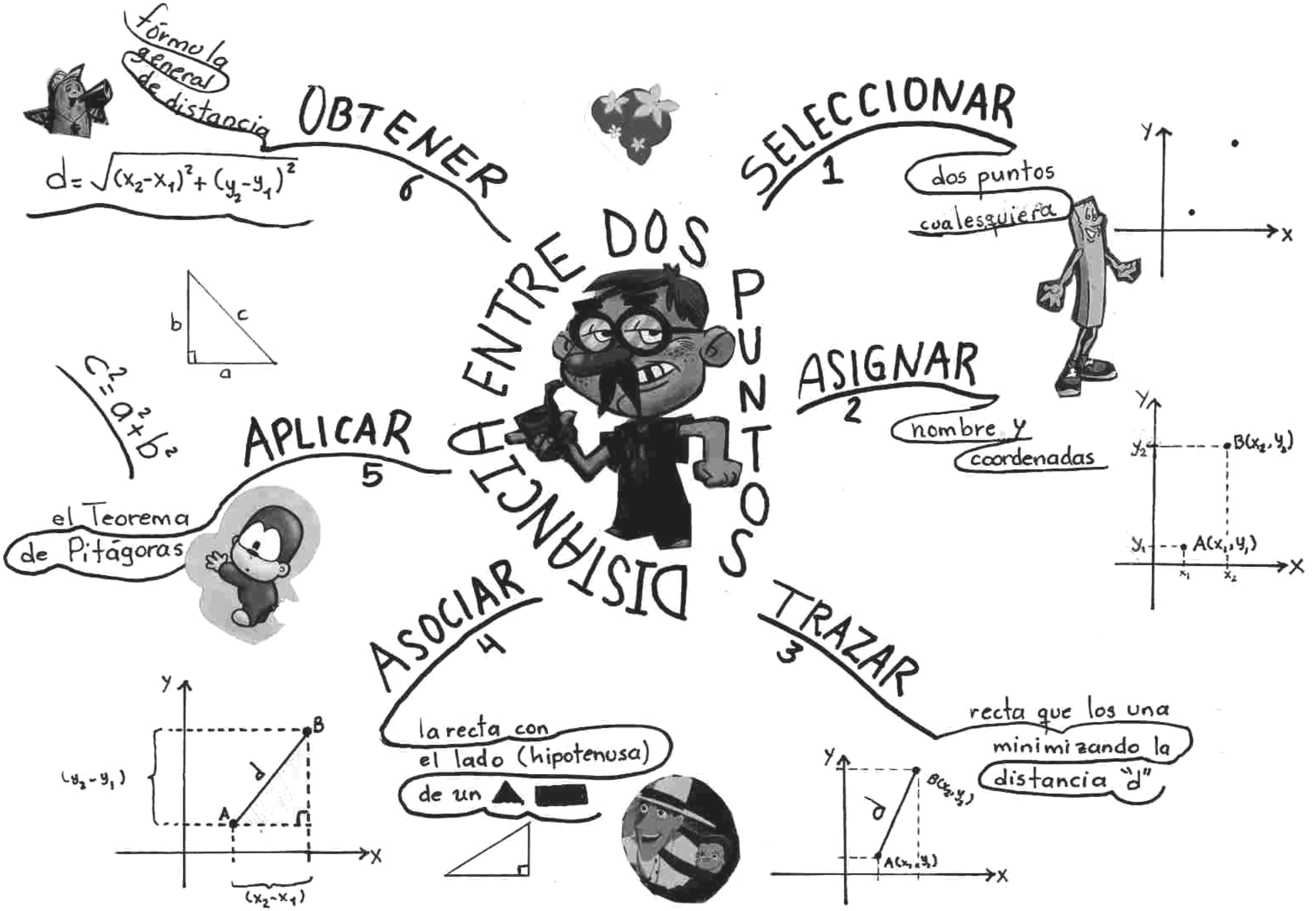


Si escribimos esta información como lo indica el TEOREMA DE PITÁGORAS, obtenemos:

$d^2=(x_2-x_1)^2 – (y_2-y_1)^2$,o bien,

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2 – (y_2-y_1)^2}$

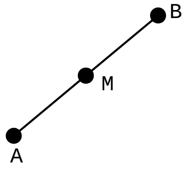
A esta última expresión le llamaremos, FÓRMULA DE LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.



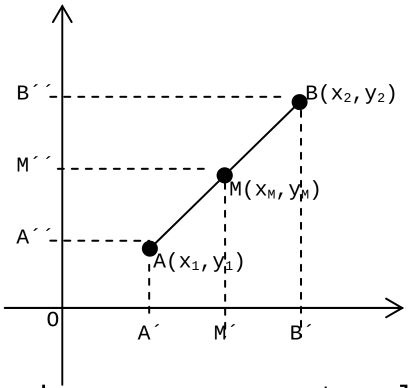
Mapa IV. Lo que debo recordar acerca de la "Distancia entre dos puntos".

MAPA V
PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Imaginemos que el plano cartesiano es el territorio donde están Las Vegas. Supongamos que un empresario quiere situar un negocio, justo a la mitad de la ruta recta que hay entre dos hoteles de ese lugar. Él sabe que un hotel está en el sitio A y el otro en el B. Su negocio lo quiere colocar en M, es decir, justo a la mitad entre A y B.



Cuando conozca con exactitud los puntos en los que se ubican los hoteles, ¿cómo podrá él estar seguro de que su negocio está situado justo en medio de la ruta de ambos? Nuestra respuesta inmediata seguramente será, “pues midiendo”. Sin embargo, ¿podríamos comprobar esto sin necesidad de tener que ir al lugar a tomar medidas? ¡Pues claro que sí! Cuando llevamos la situación al plano cartesiano, obtenemos la siguiente figura (donde, por construcción, $M(x_M,y_M)$ es el punto medio entre $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$).



Usemos líneas punteadas para proyectar las sombras de los puntos A, M y B en cada uno de los ejes. Para diferenciarlas, les añadiremos unas marcas pequeñas, parecidas a un acento, y las leeremos “prima”, si es una y “biprima”, si son dos.

Al observar la figura con cuidado, notamos que cada una de las líneas punteadas dividen a los ejes, respectivamente, en tres partes y que estas forman segmentos como, por ejemplo, OA´, OM´y A´M´ en el eje X y OA´´, OM´´ y A´´M´´ en el eje Y.

Esta vez, la figura que acabamos de hacer nos pone en contacto con un matemático de la antigua Grecia y es con el sabio Tales. Esta vez es con el sabio Tales. Él nos va a ayudar a ver qué onda con esta figura.

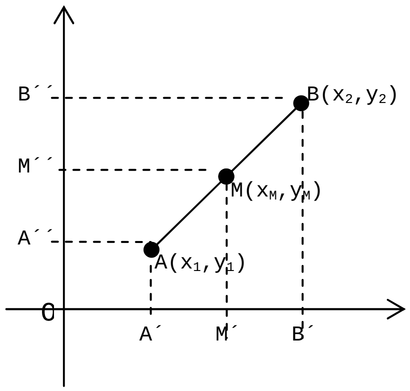
A este matemático griego le debemos el siguiente teorema:

"Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos rectas transversales, dos segmentos cualesquiera de una de éstas, son proporcionales a los dos segmentos correspondientes de la otra".

Esto es, Tales nos está diciendo en pocas palabras que los segmentos que en la figura se ven, son proporcionales, es decir, como M es punto medio del segmento AB, entonces M´ lo es del segmento A´B´ y, de la misma manera, M´´ lo es de A´´B´´.

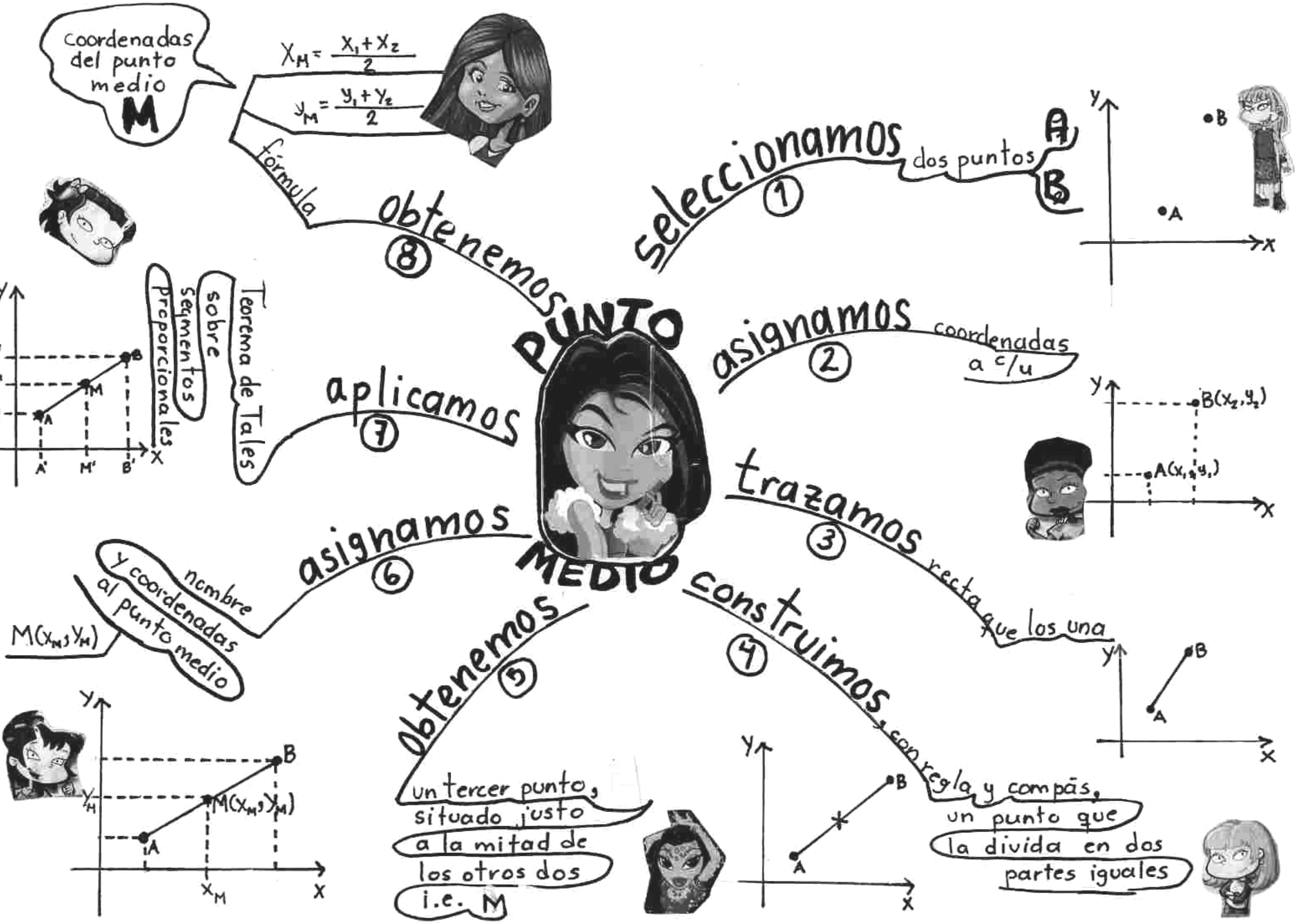
Retomemos nuestro dibujo original y observemos con mucha atención que podemos obtener de ella los siguientes datos, que escribiremos a continuación dentro de las tablas:

EN EL EJE X
$OM´=x_M$
$OM´=OA´+A´M´$
$OA´=x_1$
$A´M´=\frac{A´B´}{2}=\frac{x_2-x_1}{2}$
Así, $OM´=x_1+\frac{x_2-x_1}{2}$ Entonces $OM´=\frac{2x_1+x_2-x_1}{2}$ Por tanto $OM´=\frac{x_1+x_2}{2}$
Es decir $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}$



EN EL EJE Y
$OM´´=y_M$
$OM´´=OA´´+A´´M´´$
$OA´´=y_1$
$A´´M´´=\frac{A´´B´´}{2}=\frac{y_2-y_1}{2}$
Así, $OM´´=y_1+\frac{y_2-y_1}{2}$ Entonces $OM´´=\frac{2y_1+y_2-y_1}{2}$ Por tanto $OM´´=\frac{y_1+y_2}{2}$
Es decir $y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$

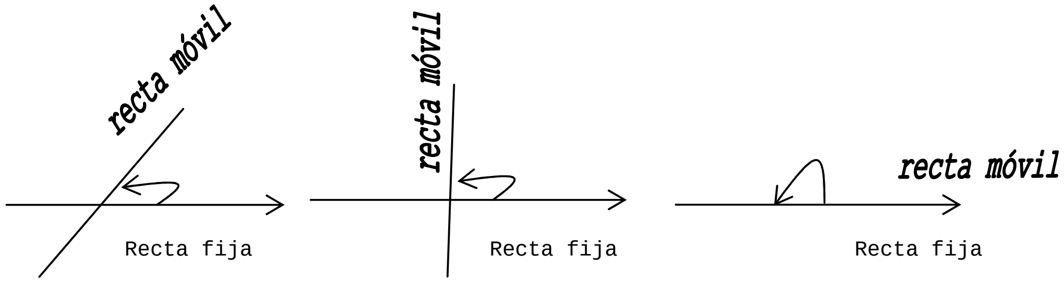
A x_M y y_M se les llama COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO. Las representamos así: $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$



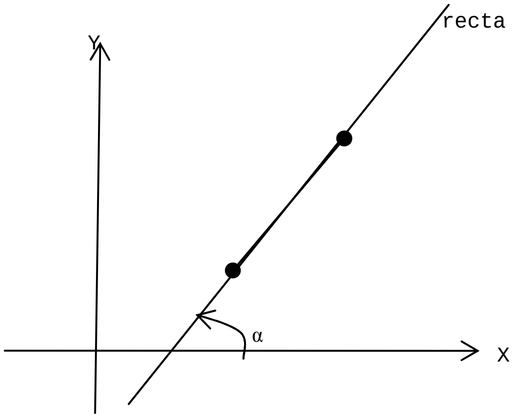
Mapa V. Lo que debo recordar acerca del "Punto medio".

MAPA VI
INCLINACIÓN Y PENDIENTE DE UNA RECTA

Miremos con atención las manecillas de un reloj. Imaginemos que ambas son muy, muy largas. Imaginemos que una de ellas está fija y que la otra es una recta que se mueve de derecha a izquierda. Entonces, la recta móvil forma diferentes ángulos con respecto a la manecilla que está quieta. Por ejemplo, está inclinada, vertical o coincide con la manecilla fija, es decir, está horizontal.

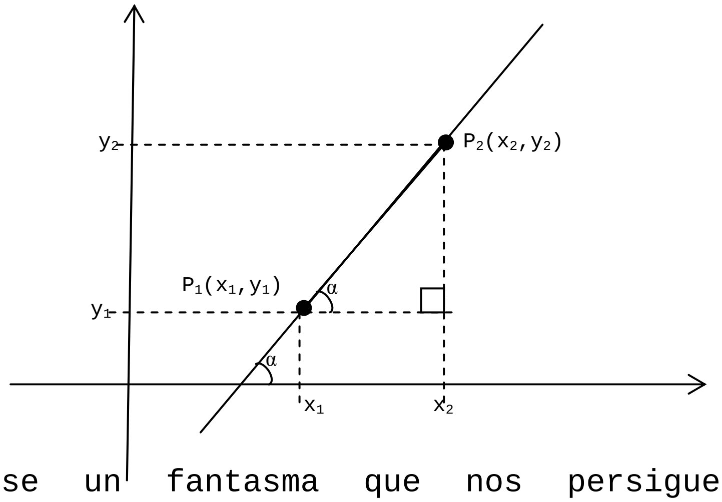


Algo parecido sucede con las rectas en el plano cartesiano. Ya hemos visto que, si escogemos dos puntos de él, podemos dibujar una recta que pase por ellos y que está tan prolongada como queramos. Al hacer esto, notamos que la recta corta al eje X y forma con éste un ángulo. El ángulo así formado se llama ÁNGULO DE INCLINACIÓN de la recta. Por lo regular se representa con una letra griega, por ejemplo, α (alfa). Este ángulo tiene la característica de que se va abriendo a partir del eje X y hacia donde está la recta.

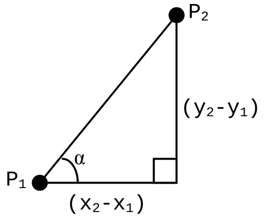


Si al mismo tiempo en que se va abriendo la recta pudiéramos bajar por ella, sentiríamos que nuestro cuerpo, por efecto de la fuerza de gravedad, es empujado y tiende a caer. Esa bajada que se forma mientras más se abre el ángulo de inclinación, la llamaremos PENDIENTE de la recta.

La pendiente es un valor numérico que podemos calcular cuando conocemos las coordenadas de dos de los puntos por donde pasa la recta. Hagamos un dibujo en el plano cartesiano que represente esto. Llamemos α al ángulo de inclinación.



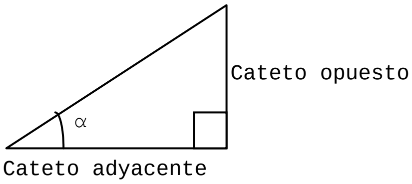
Como si fuese un fantasma que nos persigue, nuevamente observamos que la figura formada es un… triángulo rectángulo. De él sabemos fácilmente las longitudes de los catetos. Así, el cateto adyacente al ángulo de inclinación mide (x_2-x_1) y el cateto opuesto al mismo ángulo, mide (y_2-y_1).



El ángulo α en el vértice P_1 de nuestro triángulo es igual al ángulo que la recta forma con el eje X, pues de acuerdo con Euclides (otro matemático y sabio griego), estos ángulos son correspondientes, es decir, el ángulo α sólo se ha desplazado sobre la recta que pasa por P_1 y P_2. Además podemos ver que el cateto que mide (x_2-x_1) es paralelo al eje X.

Los catetos y el ángulo α en este triángulo están relacionados por la función trigonométrica, tangente, esto es:

$$\text{Tan}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$



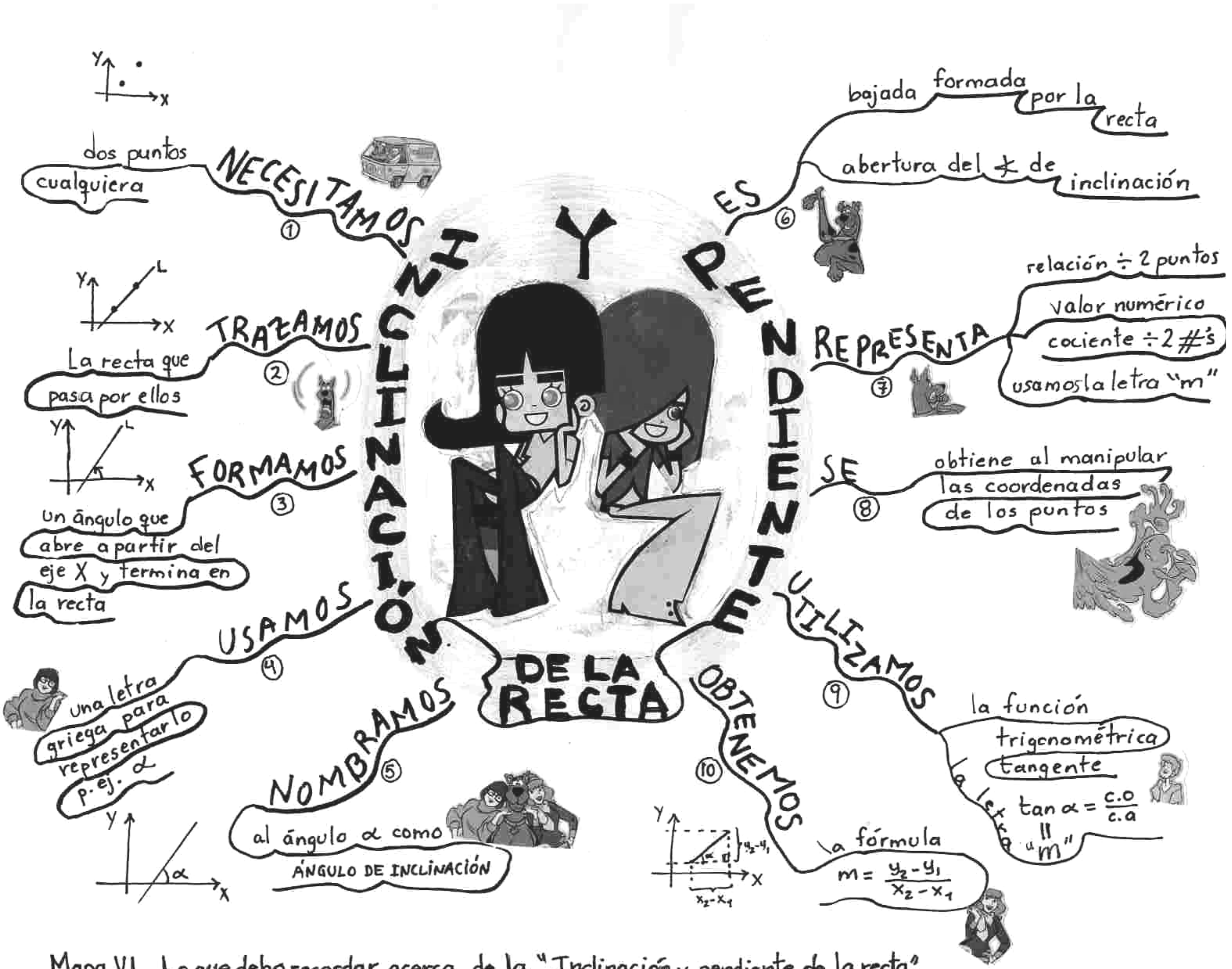
Esta relación se representa generalmente con la letra “m”. Así pues, con los datos que tenemos, esto se transforma en:

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Que es la FORMA PARA OBTENER LA PENDIENTE DE LA RECTA.

Advirtamos que, al ser x_1, x_2, y_1 y y_2 valores conocidos, al manipularlos en esta fórmula mediante una resta, el resultado que obtenemos, tanto en el numerador como en el denominador, es la diferencia de dichos valores, es decir, tenemos un cociente de dos números, esto es, en el numerador obtendremos un resultado A y en el denominador un resultado B. De esta manera, la pendiente quedará representada por el cociente $m=\frac{A}{B}$

Observación. El uso de las letras mayúsculas del alfabeto no sirve únicamente para representar el nombre de los puntos. Aquí vemos que también podemos usarlos como valores constantes, es decir, para representar cualquier número.



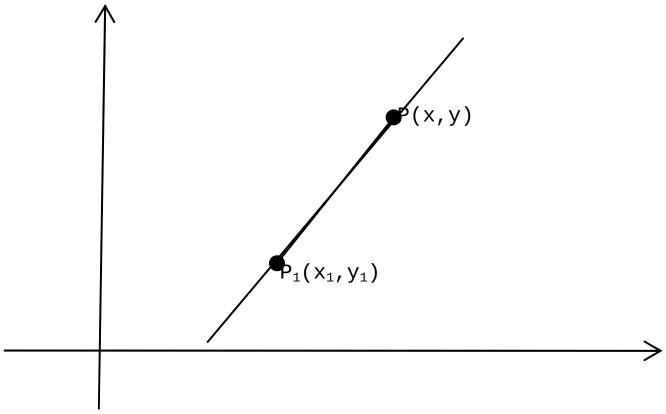
Mapa VI. Lo que debo recordar acerca de la "Inclinación y pendiente de la recta".

MAPA VII
ECUACIÓN DE LA RECTA

Como sabemos, los puntos en el plano pueden identificase por medio de un nombre único, al que llamamos COORDENADAS. Al igual que éstos, también a la recta podemos encontrarle un nombre. A este nombre le diremos ECUACIÓN y lo vamos a OBTENER fijándonos en algunas CARACTERÍSTICAS importantes que tiene la recta y que ya conocemos. Por ejemplo, sabemos que la pendiente está representada por el cociente de dos números, digamos $\frac{A}{B}$.

Así pues, escojamos la PENDIENTE COMO VALOR CONOCIDO y también un PUNTO FIJO, por donde pase nuestra recta, es decir, un punto de la forma $P_1(x_1,y_1)$.

Para representar la pendiente de cualquier recta, se necesitan dos puntos, por lo tanto, tenemos que elegir OTRO PUNTO que pertenezca a la recta, o sea, escogemos a P(x,y).



Entonces, con estos datos, EXPRESEMOS la pendiente. Por lo tanto, obtendremos: $m= \frac{y-y_1}{x-x_1}$

Haciendo UN POCO de ÁLGEBRA transformamos esto en lo siguiente:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Pero ya sabíamos que m, es un valor conocido y lo estamos expresando con el cociente $\frac{A}{B}$

Sustituyamos este valor en lo anterior, por tanto, obtenemos:

$$y-y_1=\frac{A}{B}(x-x_1)$$

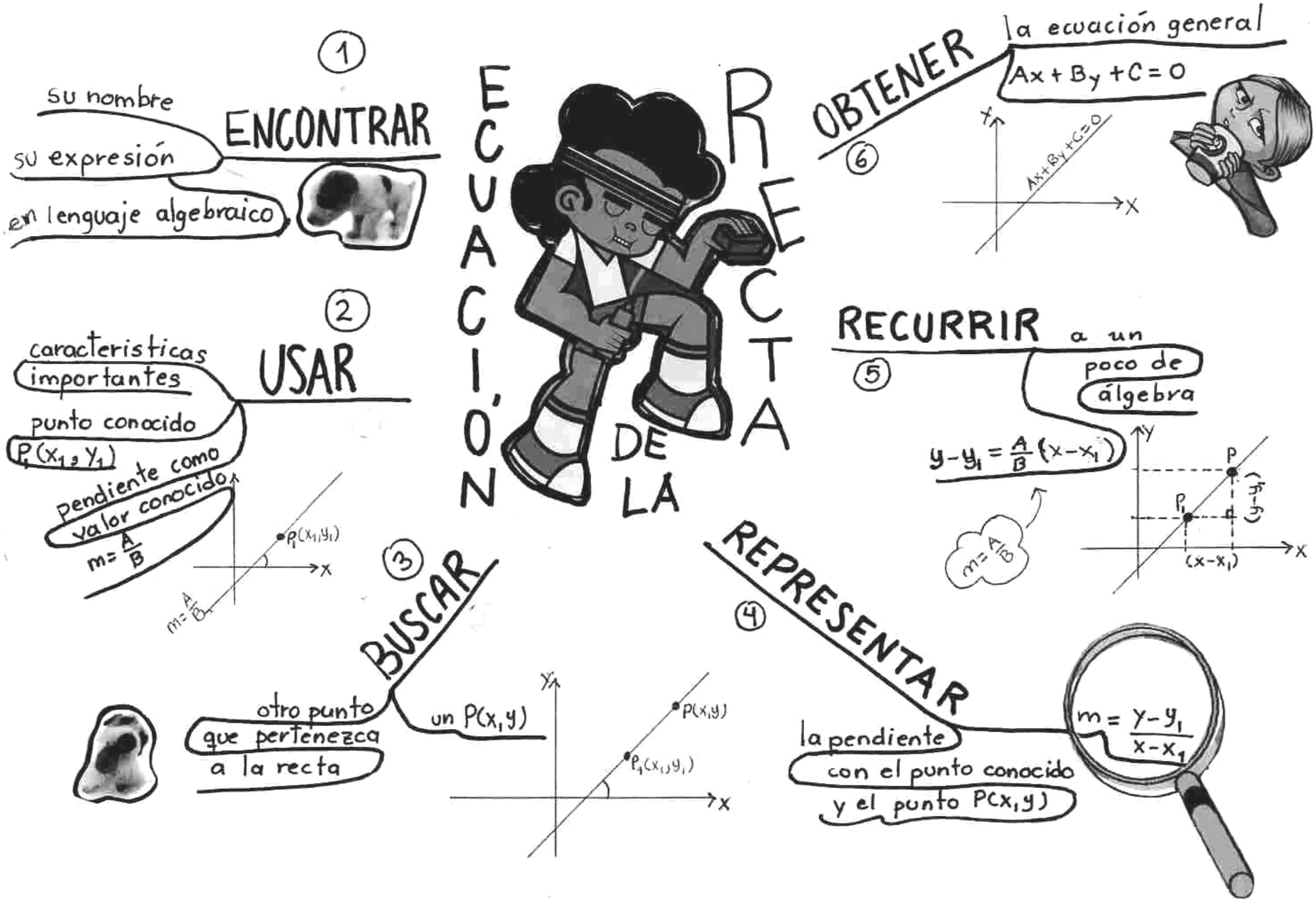
Al realizar otro poco de álgebra, multiplicando, agrupando e igualando a cero, esta expresión nos va a quedar así:

$$Ax+By+(Ax_1-By_1)=0$$

Pero (Ax_1-By_1) es restar números que ya conocemos, por lo tanto, al operarlos, obtenemos otro número, digamos, un número C. Al sustituir esto en la ecuación anterior, ésta nos queda como sigue:

$$A x + B y + C = 0$$

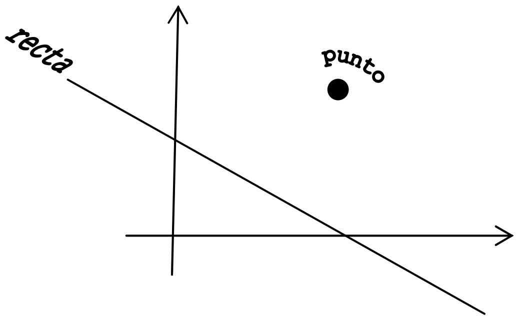
De esta forma hemos obtenido el nombre o ECUACIÓN GENERAL con el que se representa a la recta.



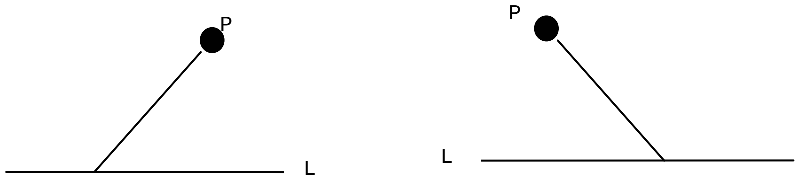
Mapa VII. Lo que debo recordar acerca de la "Ecuación de la recta".

MAPA VIII
DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

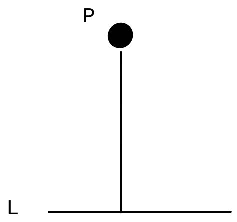
Visualicemos en el plano cartesiano un punto y una recta colocados en diferente lugar. Veamos de qué manera podemos relacionarlos.



¡Oh, sí! Podemos averiguar cuál es la distancia que los separa. Por economía, llamemos al punto P y, a la recta, L. Para calcular la distancia, debemos hacerlo utilizando el camino más corto, directo y rápido. Notemos que algunos caminos posibles son:

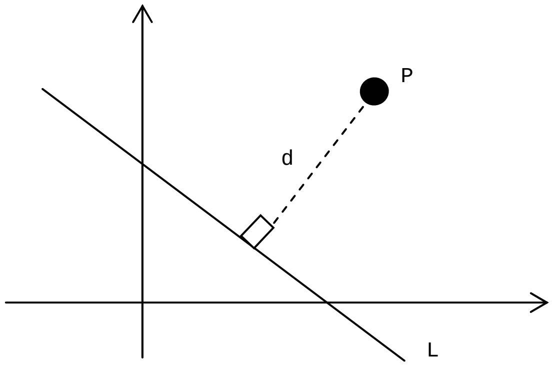


Caminos rectos, pero diagonales



Camino recto, perpendicular

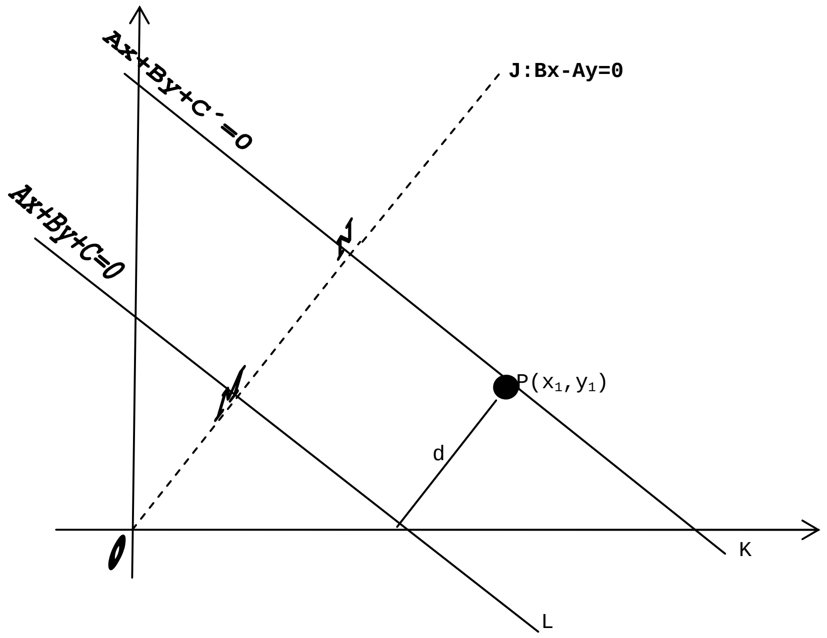
Como podemos ver, la distancia más corta consiste en trazar una línea recta, pero perpendicular a la recta conocida y que toque también, el punto conocido.



Así, observamos una RECTA(L), UN PUNTO(P), y una DISTANCIA(d) entre ellos. Esto quiere decir que en el plano, vamos a poder calcular, además de la distancia entre dos puntos, también la distancia entre un punto y una recta.

Démosle identidad a lo que vemos en la figura. Entonces, la recta conocida L se llamará, en lenguaje matemático, $Ax+By+C=0$ y el punto conocido $P(x_1,y_1)$. Construyamos otra recta, que llamaremos K, que sea paralela a la primera. Entonces su ecuación será $Ax+By+C´=0$. Hagamos que K pase por el punto P.

También necesitamos otra recta, J, que pase por el origen **O** y que sea perpendicular a la recta L. Su ecuación es $Bx-Ay=0$.



Podemos observar en la figura que la recta $Bx-Ay=0$ corta a las rectas L y K en los puntos **M** y **N**, respectivamente. También notamos que la distancia que hay desde **N** hasta **M** es igual a la distancia de P a L.

Encontremos las coordenadas de **M** y **N** para, después, calcular la distancia que los separa usando la fórmula

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Como conocemos las ecuaciones de las tres rectas que estamos usando, entonces podemos formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} L&: Ax+By+C=0 \\ K&: Ax+By+C´=0 \\ J&: \quad Bx-Ay=0 \end{aligned}$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones de L y J, encontramos que las coordenadas del punto **M** son $\left(\frac{-AC}{A^2+B^2}, \frac{-BC}{A^2+B^2}\right)$

También al resolver simultáneamente las ecuaciones K y J, encontramos las coordenadas del punto **N**, es decir, $\left(\frac{-AC´}{A^2+B^2}, \frac{-BC´}{A^2+B^2}\right)$

Una vez obtenidas las coordenadas de los puntos **M** y **N** calculamos la distancia que hay entre ellos y obtenemos:

$$d=\frac{(C-C´)}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

Como $P(x_1,y_1)$ pertenece a la recta $Ax+By+C´=0$, entonces satisface su ecuación, es decir, si sustituimos las coordenadas del punto P en la recta, obtenemos $Ax_1+By_1+C´=0$ de donde, despejando la C´, se tiene:

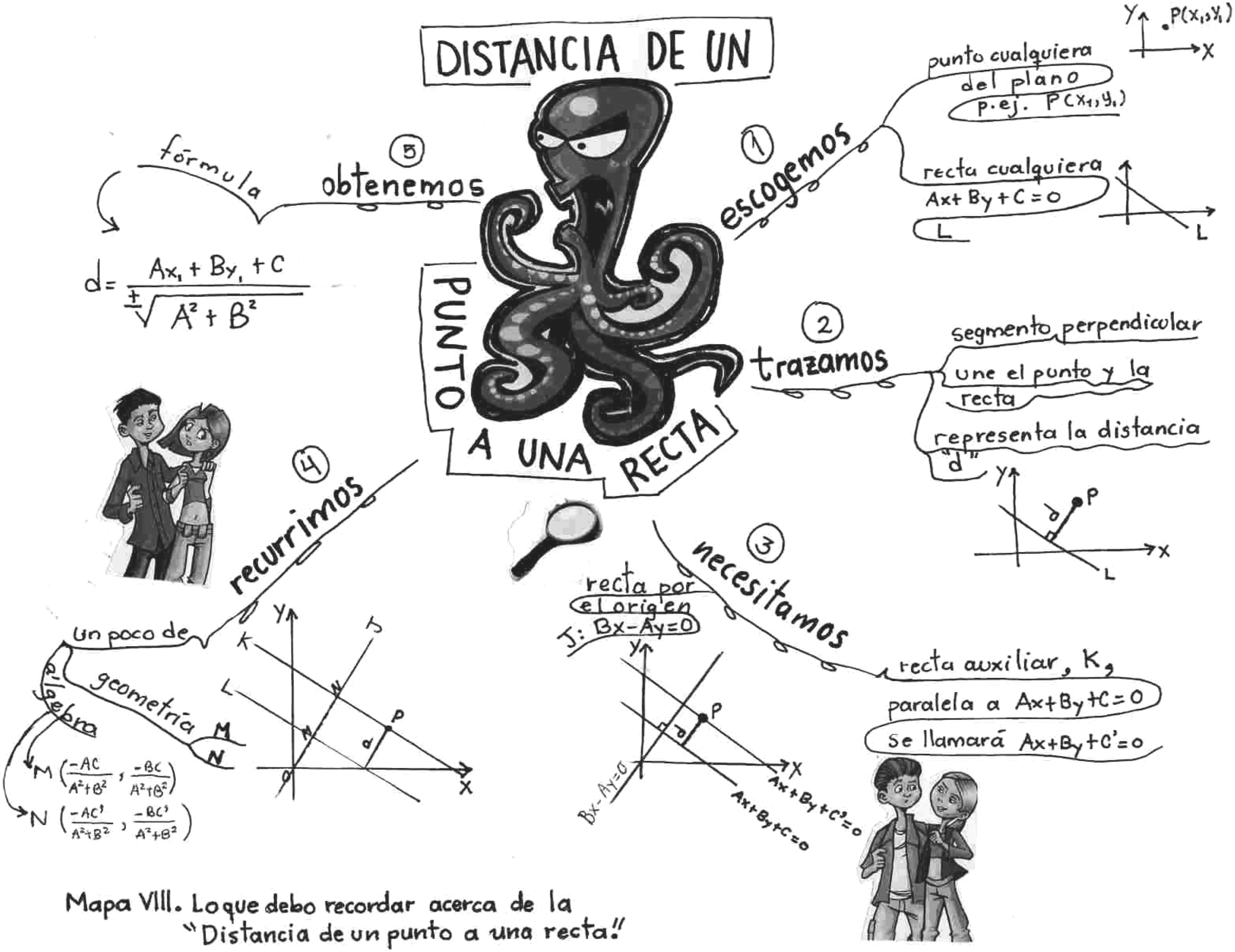
$$C´=-Ax_1-By_1$$

Sustituyendo este dato en $d=\frac{(C-C´)}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$, finalmente tenemos:

$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

A este resultado lo vamos a llamar FÓRMULA para calcular la DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

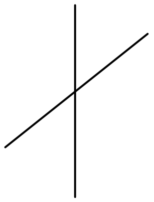
Como la distancia debe ser un número no negativo, el signo de la raíz se escoge para que “d” sea positiva.



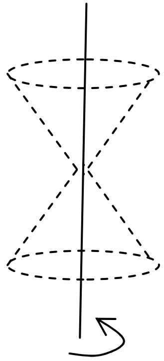
Mapa VIII. Lo que debo recordar acerca de la "Distancia de un punto a una recta!"

MAPA IX
SECCIONES CÓNICAS

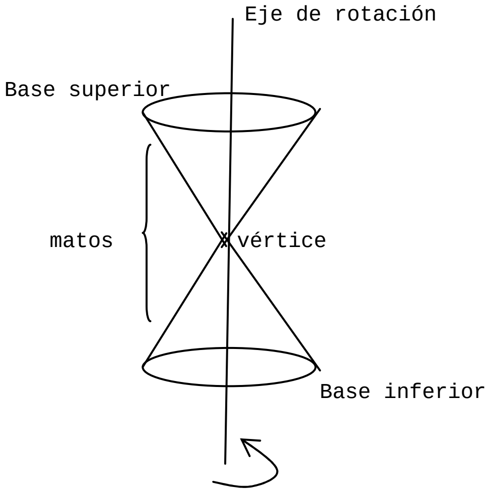
Tomemos dos palos de madera, de esos que son muy largos y que se les llama palos de bandera. Con un clavo, fijemos ambos palos, de preferencia por la parte media de cada uno, para formar la siguiente figura:



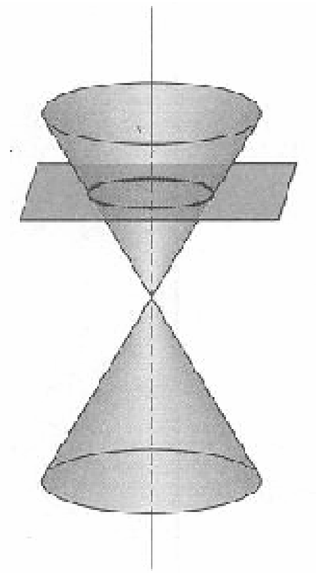
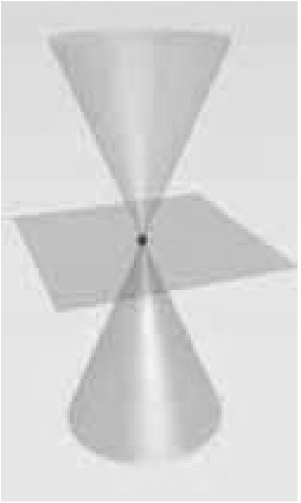
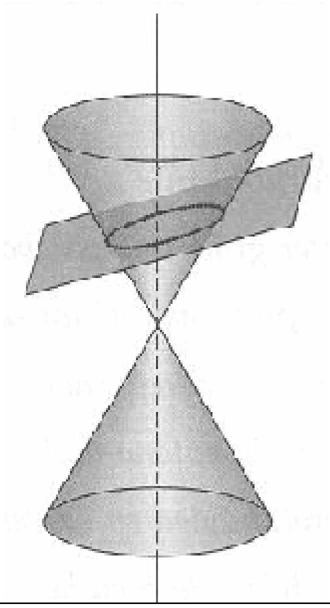
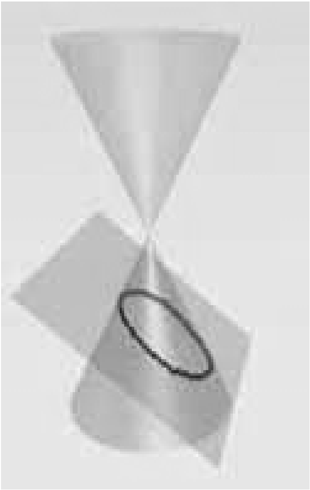
Al palo vertical lo vamos a enterrar en alguna parte blanda que nos permita hacerlo girar sobre sí mismo, conservando su posición. Como el palo diagonal está fijo a este, entonces podemos ver que, con la rotación, veremos lo siguiente:

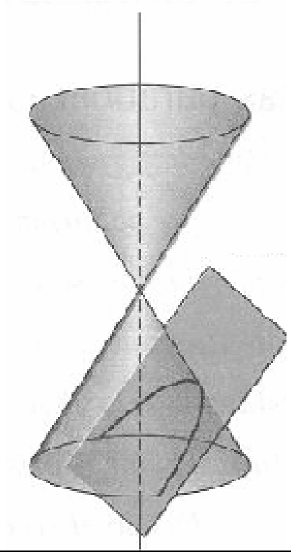
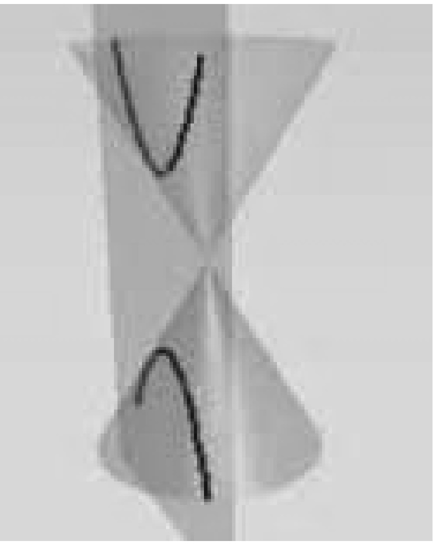
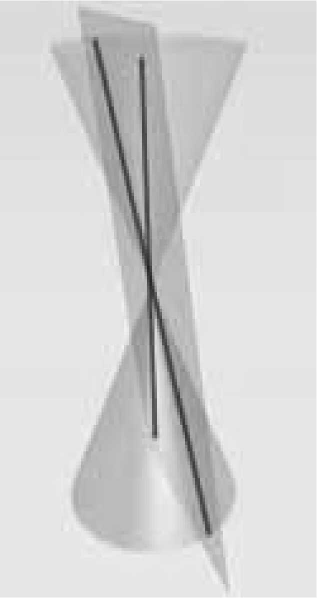


Como podemos darnos cuenta, esta figura consta de dos partes que son idénticas. Una está por encima del clavo y la otra por debajo, pero están unidas de tal manera que ambas forman una sola figura. A ésta se le llama CONO y a cada una de sus partes se le llama manto. Entonces tenemos aquí un CONO DE DOS MANTOS. Ilustremos con un dibujo los elementos que forman este CONO:

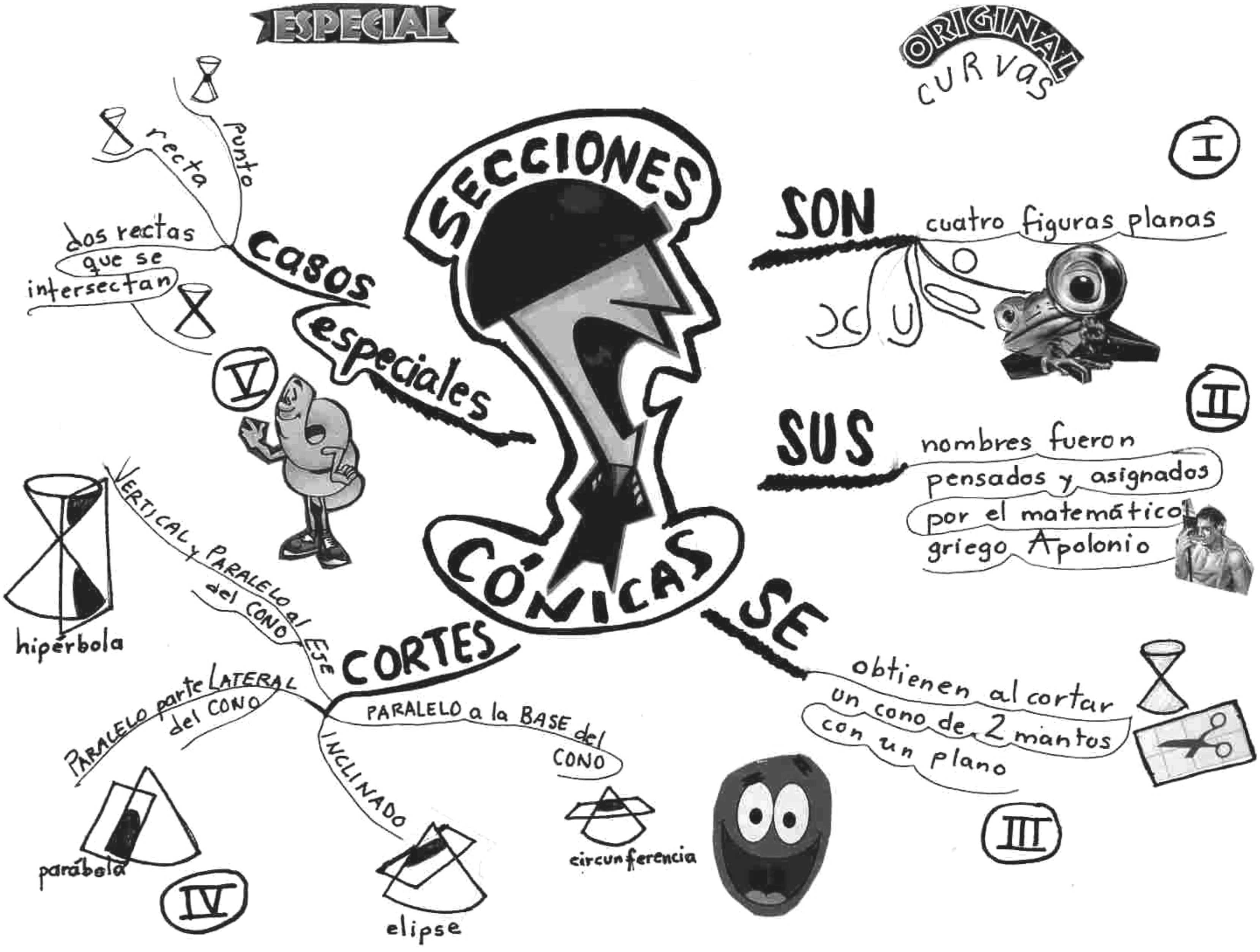


En el cuerpo del cono se pueden realizar, utilizando un PLANO a manera de cuchillo, cuatro cortes especiales que originan figuras, muy interesantes, que se llaman SECCIONES CÓNICAS. Tales cortes se realizan colocando el plano de la siguiente manera:

1. PARALELO A LA BASE. La figura obtenida por este corte se le llama CIRCUNFERENCIA. 	Imaginemos que empezamos a cortar el cono desde su base y hacia el vértice. Podemos, por intuición, asegurar que, las circunferencias obtenidas tienen, cada vez, radio más pequeño hasta que, al llegar el plano al vértice, sólo podrá mirarse un punto.	
2. INCLINADO sin que toque la base. Así obtenemos una ELIPSE. 	Conservando la posición del plano, pero desplazándonos por el cono, podemos obtener otras elipses y éstas son más pequeñas o bien, más grandes.	

3. PARALELO a la PARTE LATERAL del cono. Esta figura se llama PARÁBOLA. 	También, al desplazar el plano, en esta posición, por el cono, podemos obtener otras parábolas de diferentes tamaños. Sin embargo, si el plano de corte se coloca recargado en la parte lateral del cono, la figura que obtenemos es una línea recta.	
4. VERTICAL, PARLELO AL EJE del cono y tocando las dos base. Cuando el plano está en esta posición, corta al mismo tiempo los dos mantos del cono y de esta manera se forma una figura llamada HIPÉRBOLA. 	Podemos mover el plano, conservando su posición, para obtener más hipérbolas de diferentes tamaños. Pero, si el plano de corte pasa a través del eje del cono, lo que obtenemos son sólo dos rectas y éstas, se intersectan en el vértice del cono.	

Las secciones cónicas son tan importantes que, el gran matemático griego Apolonio, ya las había estudiado en su época. Además, les dio el nombre con el que las conocemos en la actualidad. Sus estudios los recopiló en un tratado de ocho libros, llamado CÓNICAS. Pensó que estas figuras deberían ser estudiadas por la belleza de las demostraciones acerca de sus propiedades y no tanto por sus aplicaciones prácticas.

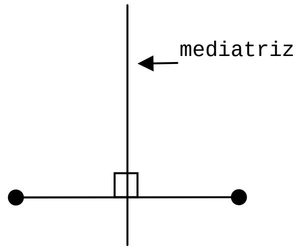


Mapa IX. Lo que debo recordar acerca de las "Secciones cónicas".

MAPA X
LUGARES GEOMÉTRICOS

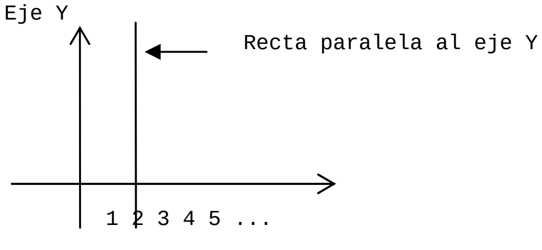
Sabemos que las figuras geométricas están formadas por conjuntos de puntos. También sabemos que las podemos dibujar en el plano cartesiano con sólo conocer algunos de ellos. Sin embargo, para que la diversidad de figuras que se logran realizar con los puntos que hay en el plano puedan ser descritas de manera universal, es necesario que esos puntos que las forman cumplan siempre con ciertas reglas o condiciones específicas. Es decir, siempre que un CONJUNTO de PUNTOS CUMPLAN con una CONDICIÓN DETERMINADA, éstos pertenecerán a un lugar al que llamaremos LUGAR GEOMÉTRICO. Vamos a enunciar algunos ejemplos de estos lugares así como la condición que deben cumplir los puntos que los forman:

1. La MEDIATRIZ es el lugar geométrico de todos aquellos puntos del plano que están colocados a la misma distancia de los extremos de un segmento.



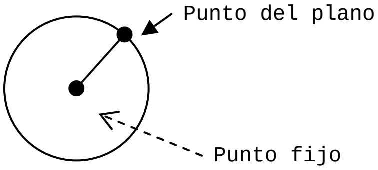
Podemos ver que todos los puntos que satisfacen esta condición forman una recta que es perpendicular al segmento, a partir del punto medio de este.

2. Una RECTA PARALELA AL EJE Y es el lugar geométrico de todos aquellos puntos del plano que se encuentran a K unidades de distancia del eje Y.

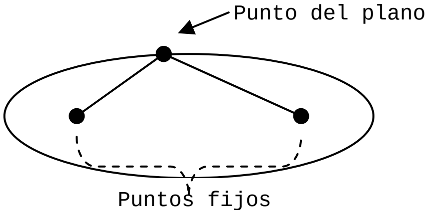


En nuestro dibujo K representa 2 unidades pero, observemos que K puede tomar cualquier valor numérico, sea este positivo o negativo. De este modo, la recta paralela puede estar a la derecha o a la izquierda del eje Y.

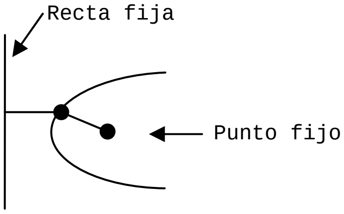
3. La CIRCUNFERENCIA es el lugar geométrico de todos aquellos puntos del plano que equidistan de otro punto que está fijo.



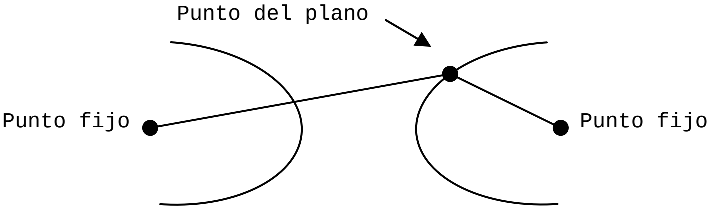
4. La ELIPSE es el lugar geométrico de todos aquellos puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es una cantidad constante.



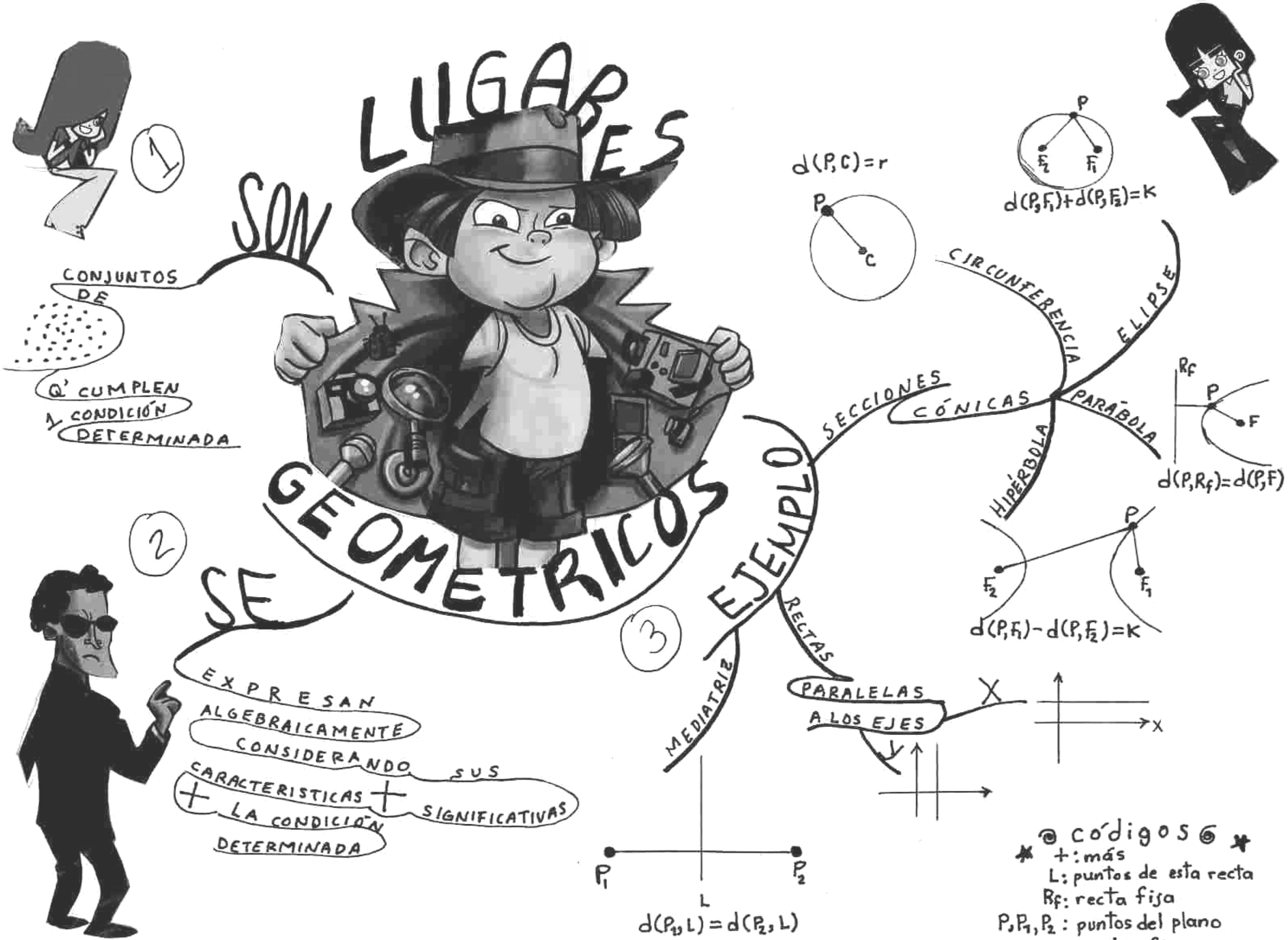
5. La PARÁBOLA es el lugar geométrico de todos aquellos puntos del plano que equidistan de un punto fijo y de una recta fija.



6. La HIPÉRBOLA es el lugar geométrico de todos aquellos puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es una cantidad constante.



Así como a los puntos y rectas del plano se les puede asignar un nombre, también sucede lo mismo con los lugares geométricos. ¿Te acuerdas cómo encontramos la ecuación general de la recta? ¡Sí! Nos fijamos en dos características importantes: la pendiente y un punto conocido y a partir de ellos construimos su ecuación. Bueno, pues para encontrar la ECUACIÓN o expresión algebraica que representa a los lugares geométricos también basta con que nos fijemos en sus CARCTERÍSTICAS MÁS SIGNIFICATIVAS así como en las CONDICIONES que cumplen los puntos de ese lugar.



Mapa X. Lo que debo recordar acerca de los "Lugares geométricos".

@ códigos @

+ : más

L: puntos de esta recta

R_f: recta fija

P, P_1, P_2 : puntos del plano

C, F, F_1, F_2 : puntos fijos

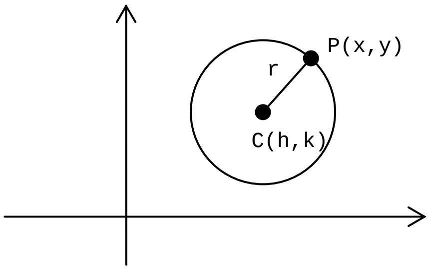
d(,): distancia ÷ puntos

K: cantidad constante

MAPA XI
CIRCUNFERENCIA

Recordemos que la circunferencia es el LUGAR GEOMÉTRICO de todos los PUNTOS del plano que EQUIDISTAN de otro PUNTO que está FIJO. Al punto fijo, lo llamaremos CENTRO y lo distinguiremos con la letra mayúscula “C”. A un PUNTO CUALQUIERA del plano lo llamaremos P(x, y). La DISTANCIA que hay desde P hasta C, se llama RADIO y lo representaremos con la letra minúscula “r”.

Supongamos que la circunferencia tiene su centro en cualquiera de los cuadrantes, es decir, que está en C(h,k).



Para obtener la ecuación de la circunferencia NECESITAMOS escribir la CONDICIÓN, esto es , PC=r.

Pero la longitud PC es igual a $\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$.

Al sustituir esta información en la condición que enunciamos antes, obtenemos:

$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$ Haciendo UN POCO DE ÁLGEBRA esto se transforma en:

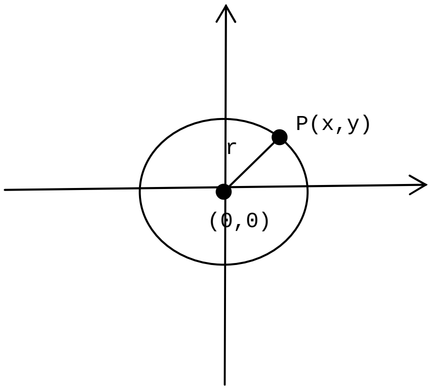
$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ que es la ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA Cuando ésta tiene su CENTRO en CUALQUIERA de los CUADRANTES.

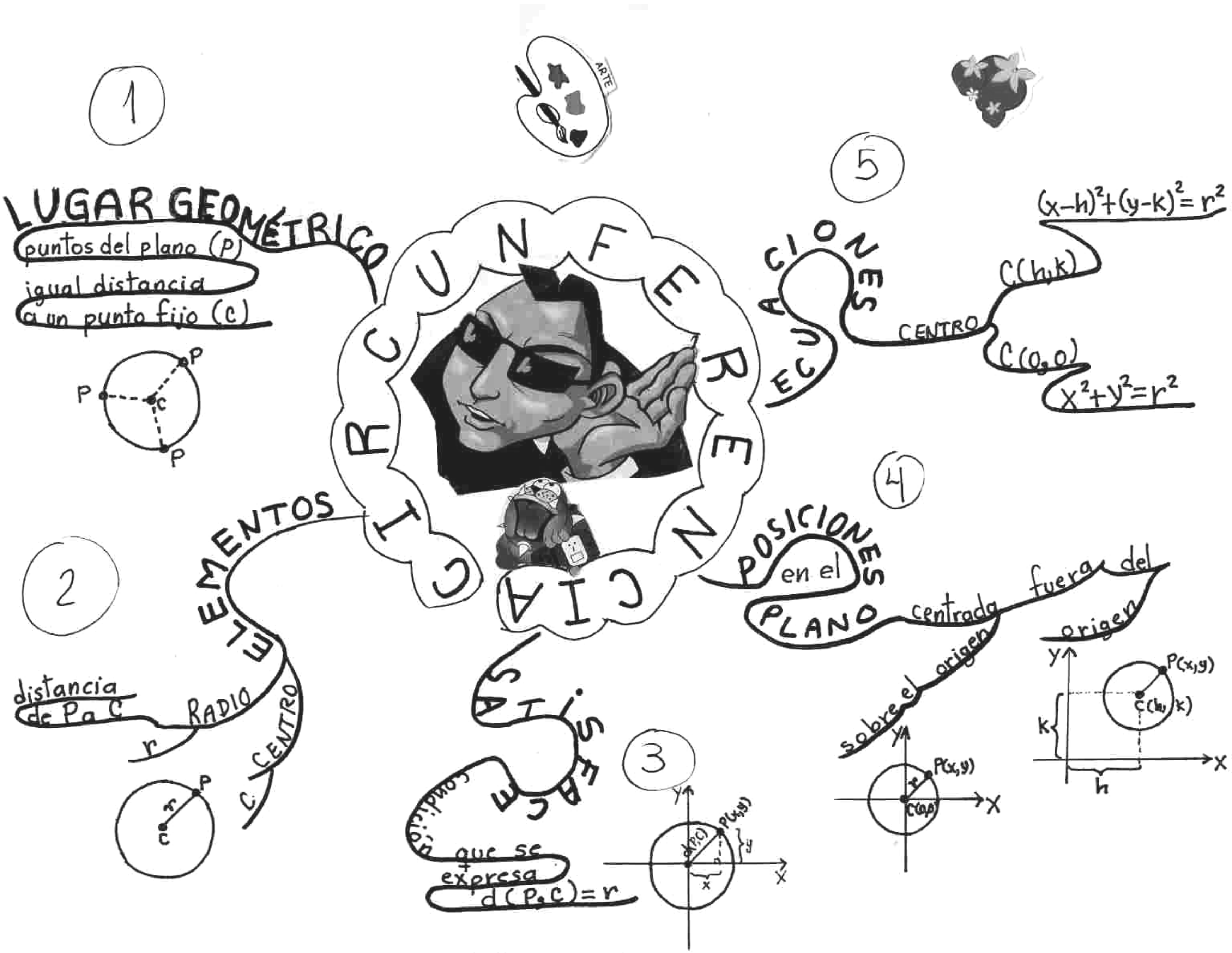
Pero si el CENTRO fuera el ORIGEN, sus coordenadas serían C(0,0). Al sustituir en la ecuación anterior los valores h=0 y k=0, ésta nos queda así:

$(x-0)^2+(y-0)^2 = r^2$

Que es lo mismo que $x^2 + y^2 = r^2$

Como vemos este es un CASO PARTICULAR de la primera ecuación que obtuvimos y esta circunferencia se ve así, en el plano cartesiano:



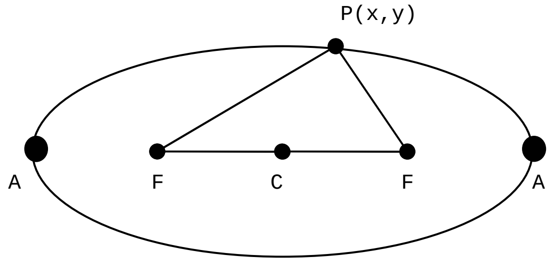


Mapa XI. Lo que debo recordar acerca de "la circunferencia".

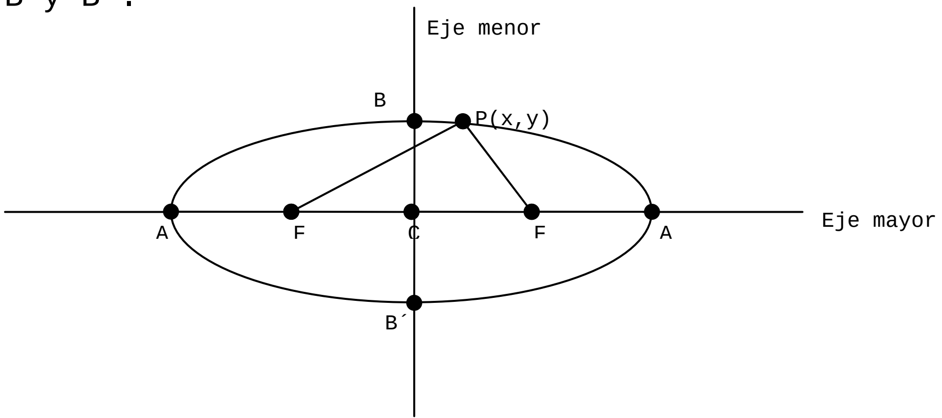
MAPA XII
ELIPSE

Sabemos que la elipse es el lugar geométrico formado por todos aquellos puntos del plano que cumplen la siguiente condición: la suma de sus distancias a dos puntos fijos es una cantidad constante. Esta cantidad constante se representa por 2a.

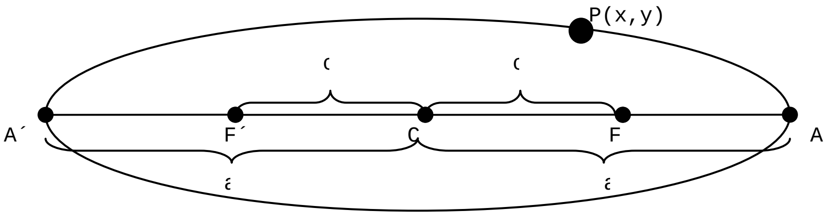
Los PUNTOS FIJOS se llaman FOCOS y se simbolizan con las letras F y F´. Además de ellos, hay otros puntos importantes en la elipse. Por ejemplo, el CENTRO y los VÉRTICES. Para el primero usamos la letra C y para los vértices las letras A y A´.



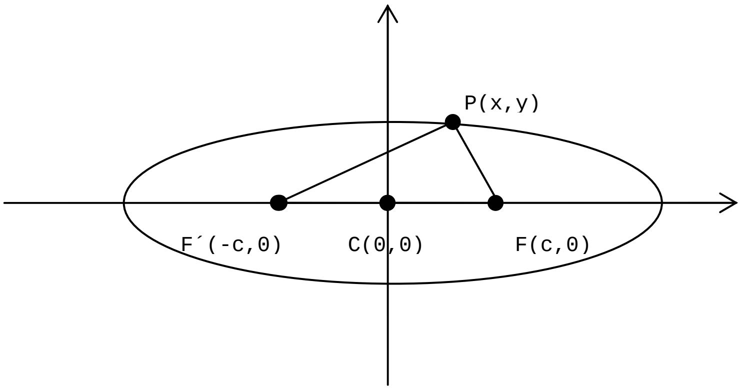
El centro, los vértices y los focos están colocados sobre una misma línea que se conoce con el nombre de EJE MAYOR. En él, tanto los vértices como los focos, equidistan del centro. La elipse tiene otro eje más pequeño, que es perpendicular al eje mayor y que pasa por el centro de la elipse. Este eje se llama EJE MENOR y corta a la elipse en dos puntos, que también son vértices, que identificaremos con las letras B y B´.



La distancia que hay desde el centro hacia cualquiera de los focos se representa con la letra minúscula “c” y la distancia del centro a los vértices con “a”. De este modo nos damos cuenta de que la longitud total del eje mayor es 2a.



Para que podamos encontrar la ecuación de la elipse vamos a colocarla en el plano para obtener algunos datos. Comencemos por colocar el centro en C(0,0), así, los focos tienen que ser F(c,0) y F´(-c,0).



Ahora bien, la condición dice que PF+PF´=2a, pero,

$$PF=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \text{y} \quad PF´=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

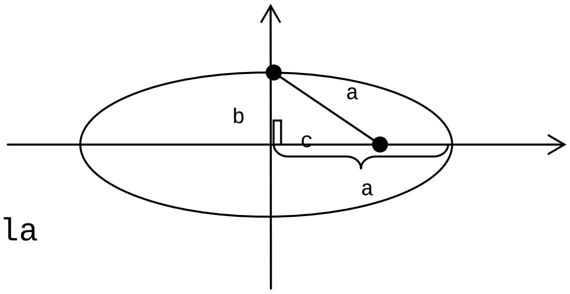
Sustituyendo estos valores como lo pide la condición dada, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

Al hacer UN POCO DE ÁLGEBRA, esto se reduce a:

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Por construcción, y por el Teorema de Pitágoras, en cualquier elipse, $a^2-c^2=b^2$.



Así, sustituyendo esto en la expresión anterior, nos queda:

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Finalmente, dividiendo toda la expresión entre a^2b^2 obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Esta es la ECUACIÓN DE LA ELIPSE cuando el CENTRO es el ORIGEN y el EJE MAYOR coincide con EL X. Es decir, está en POSICIÓN HORIZONTAL.

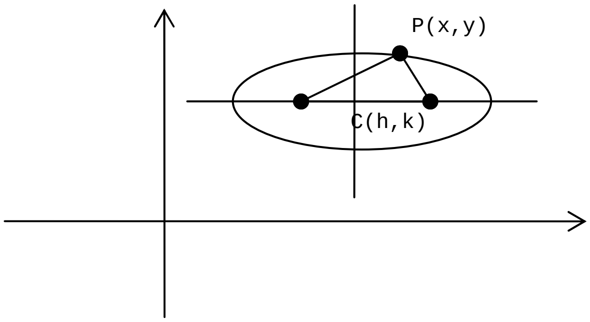
La ecuación anterior puede escribirse también así:

$$\frac{(x-0)^2}{a^2} + \frac{(y-0)^2}{b^2} = 1$$

Esto indica que la elipse no se ha movido del origen en ninguna unidad. Pero si la elipse tuviera su centro en cualquier otro punto que no fuera el (0,0), ahora éste tendría coordenadas C(h,k), o sea, la elipse se movió “h” unidades hacia la derecha (o izquierda) y “k” unidades hacia arriba (o abajo).

Así pues, si en la ecuación anterior sustituimos las unidades que se ha movido la elipse en cualquiera de los cuadrantes, tendremos:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



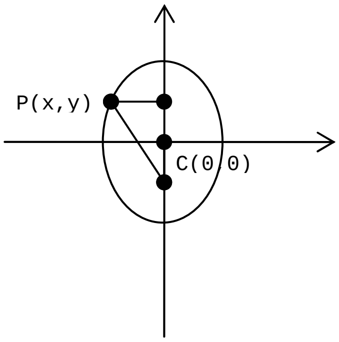
Que es la ECUACIÓN DE LA ELIPSE con CENTRO distinto del origen, es decir, C(h,k) y EJE MAYOR PARALELO al eje X. Esta elipse, aunque se halla desplazada, seguirá conservando su POSICIÓN HORIZONTAL.

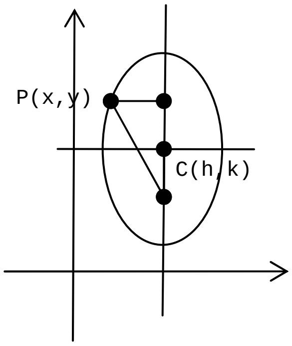
Pero la elipse no sólo puede colocarse en el plano en posición horizontal, también podemos encontrarla en POSICIÓN VERTICAL. Si seguimos un procedimiento parecido al que usamos para obtener la ecuación de la elipse horizontal llegaremos a los dos siguientes resultados:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

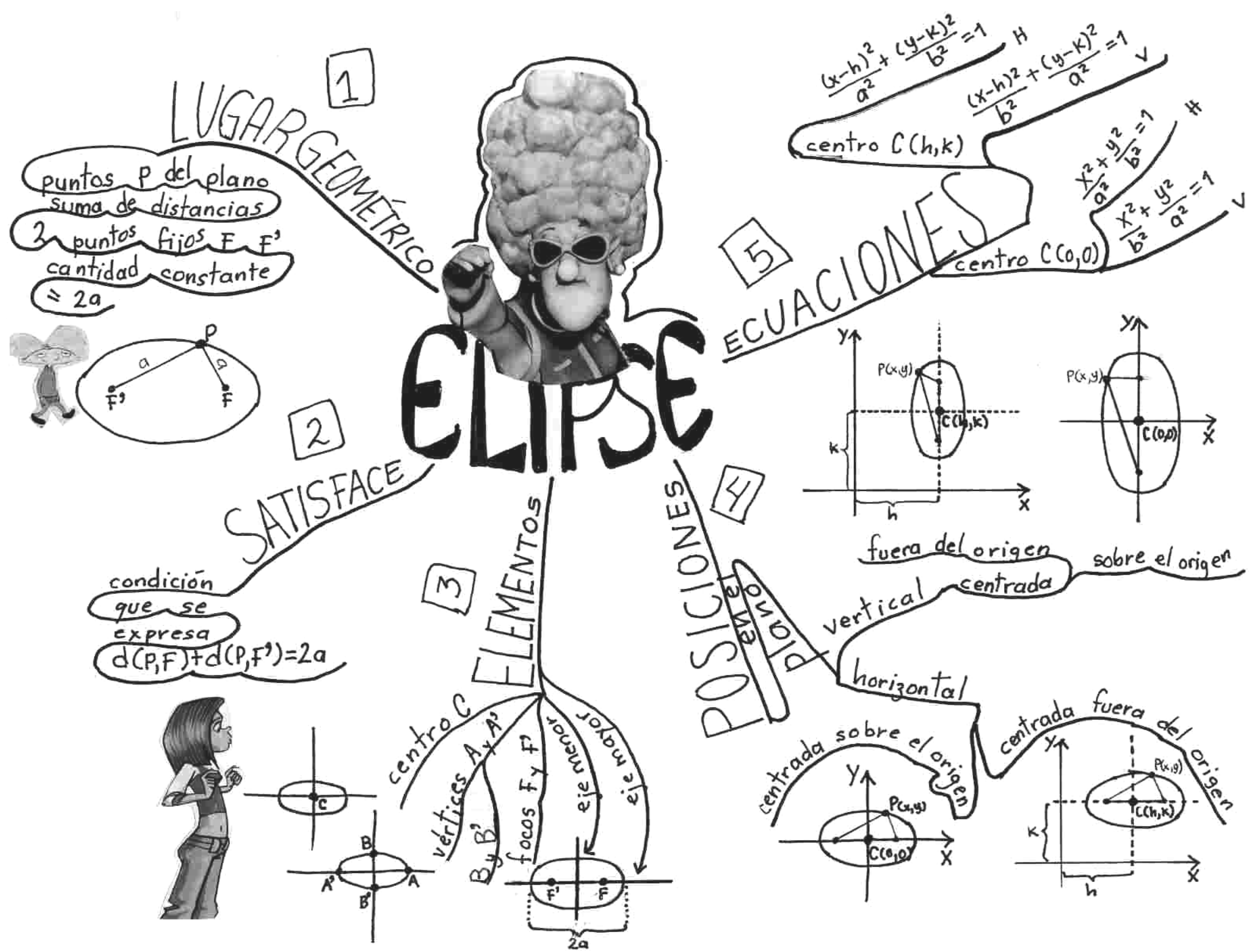
y

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$





Estas dos últimas ecuaciones representan elipses en posición vertical. Una de ellas con centro en el origen y la otra cuando es un punto cualquiera del plano. Podemos notar que se diferencian de las ecuaciones para elipses horizontales en que los denominadores están cambiados de lugar.

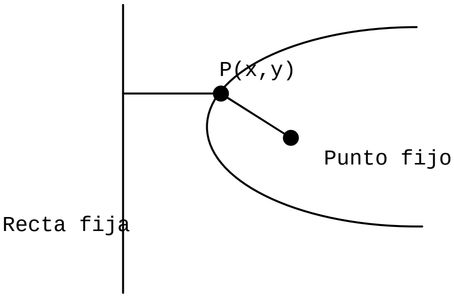


Mapa XII. Lo que debo recordar acerca de la "Elipse".

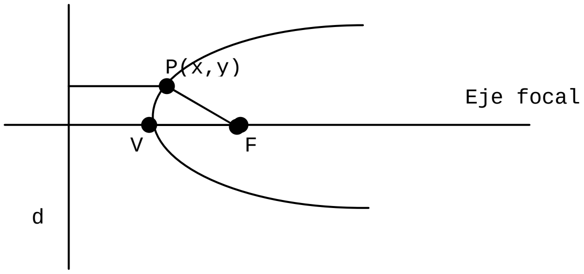
códigos
V: vertical, H: horizontal, =: igual

MAPA XIII
PARÁBOLA

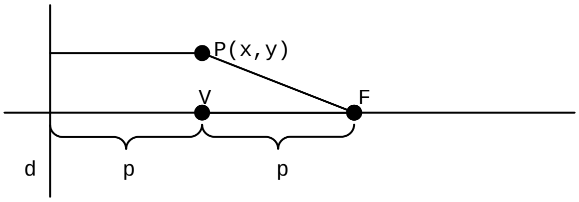
Recordemos que la parábola además de ser una sección cónica, es también el LUGAR GEOMÉTRICO de todos aquellos PUNTOS que EQUIDISTAN de un PUNTO FIJO y una RECTA FIJA.



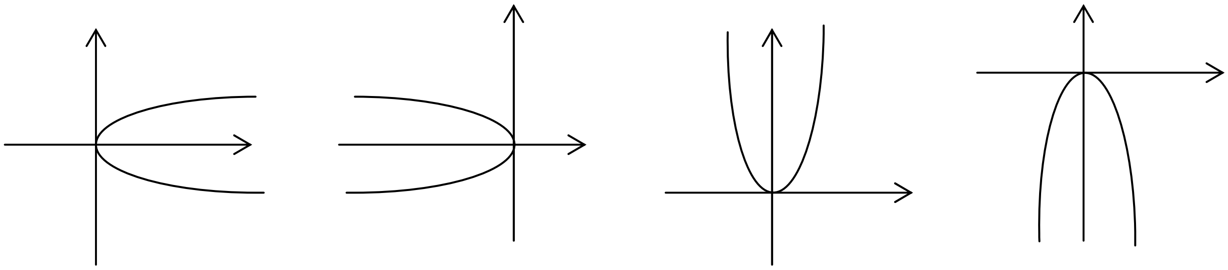
El punto fijo se llama FOCO y se usa la letra F para identificarlo. La recta fija se llama DIRECTRIZ y para simbolizarla, generalmente se emplea la letra minúscula "d". Otro elemento importante de la parábola, es un punto llamado VÉRTICE. Este se representa con la letra V. El vértice y el foco están colocados sobre una misma recta, que se conoce con el nombre de EJE, que es perpendicular a la directriz.



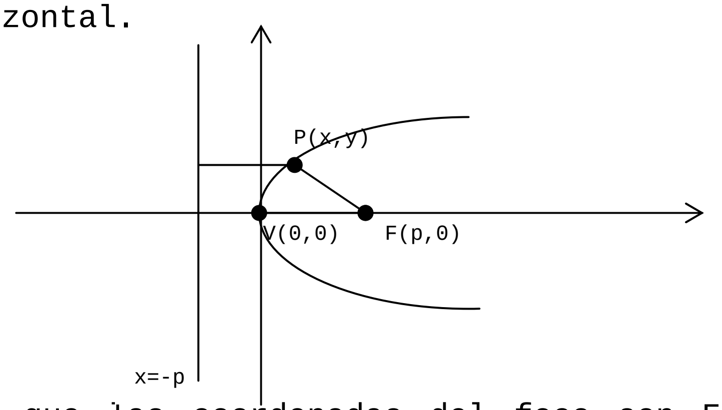
El foco y la directriz están colocados a la misma distancia del vértice, es decir, a partir del vértice y hasta el foco, hay "p" unidades de distancia. Lo mismo sucede desde el vértice hasta la recta "d". Así, la longitud total del segmento que va del foco a la directriz es 2p. Este segmento se llama PARÁMETRO.



Por la forma que tiene la parábola, ésta puede colocarse en CUATRO diferentes POSICIONES en el plano cartesiano. Esto es, puede verse horizontal abierta hacia la derecha, horizontal abierta hacia la izquierda, vertical abierta hacia arriba o vertical abierta hacia abajo. Estas posiciones las puede tener en cualquier parte del plano en donde se encuentre localizado el vértice.



Para ayudarnos a encontrar la ecuación de la parábola, primero coloquemos alguna de ellas con su vértice situado en el origen, o sea, en V(0,0). Comencemos pues con la que abre hacia la derecha y está en posición horizontal.



Podemos observar que las coordenadas del foco son F(p,0) y la ecuación de la directriz es x=-p.

Ahora bien, la condición enunciada al principio del tema, nos dice que un punto cualquiera P(x,y) va a pertenecer a este lugar geométrico si se cumple que:

$$PF=Pd$$

Pero $PF=\sqrt{(x-p)^2+y^2}$ y $Pd= x+p$

Acomodando esta información como lo pide la condición dada, tenemos:

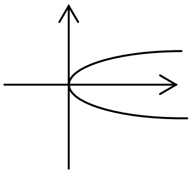
$$\sqrt{(x-p)^2+y^2} = x+p$$

Haciendo un poco de álgebra, obtendremos:

$$(x-p)^2+y^2 = (x+p)^2$$

Lo que desarrollando los binomios, agrupando y reduciendo, se transforma en:

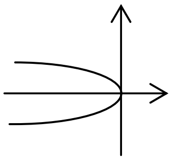
$$y^2=4px$$



Esta expresión algebraica representa una PARÁBOLA CON VÉRTICE en el ORIGEN, EJE que coincide con EL X y FOCO parte POSITIVA de este eje.

Si el foco de la parábola anterior estuviera colocado en la parte negativa del eje X, la ecuación anterior sólo varía en signo, es decir, la vemos así:

$$y^2=-4px$$



Tal como hicimos con las ecuaciones de las otras cónicas, podemos reescribir la ecuación de la parábola, de la siguiente manera:

$$(y-0)^2=4p(x-0)$$

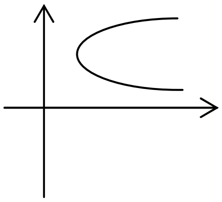
Esto indicará que la parábola tiene vértice en el origen. Sin embargo, si el vértice no fuera V(0,0) sino V(h,k) esto significaría que la parábola se desplazó, sobre cualquiera de los cuadrantes, “h” unidades hacia la derecha(o izquierda) y “k” unidades hacia arriba (o abajo). Conservando la posición horizontal, su eje estaría paralelo al eje X.

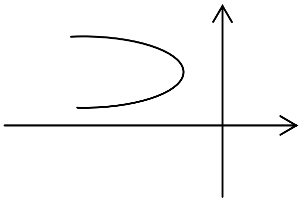
Así, si sustituimos en la ecuación anterior, las nuevas coordenadas del vértice, vamos a obtener:

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

y

$$(y-k)^2=-4p(x-h)$$





Ambas ecuaciones representan una PARÁBOLA con VÉRTICE distinto del origen, es decir, V(h,k) y EJE PARALELO AL X. La primera abre hacia la derecha y la segunda, hacia la izquierda.

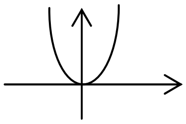
Como podemos observar, para una sola posición de la parábola, en este caso, horizontal, hemos obtenido cuatro ecuaciones. Esto quiere decir que si ahora tratamos de obtener la ecuación de una parábola cuando se encuentra sobre el plano en posición vertical, también debemos obtener cuatro ecuaciones. Y efectivamente, llevando a cabo un procedimiento similar al que utilizamos para encontrar la ecuación de la parábola horizontal, vamos a concluir que, para el caso vertical las ecuaciones encontradas serán:

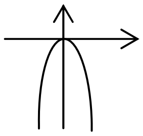
$$x^2=4py$$

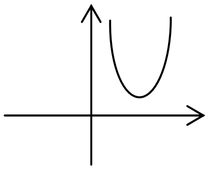
$$x^2=-4py$$

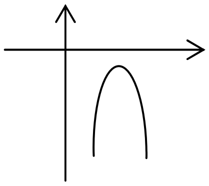
$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

$$(x-h)^2=-4p(y-k)$$



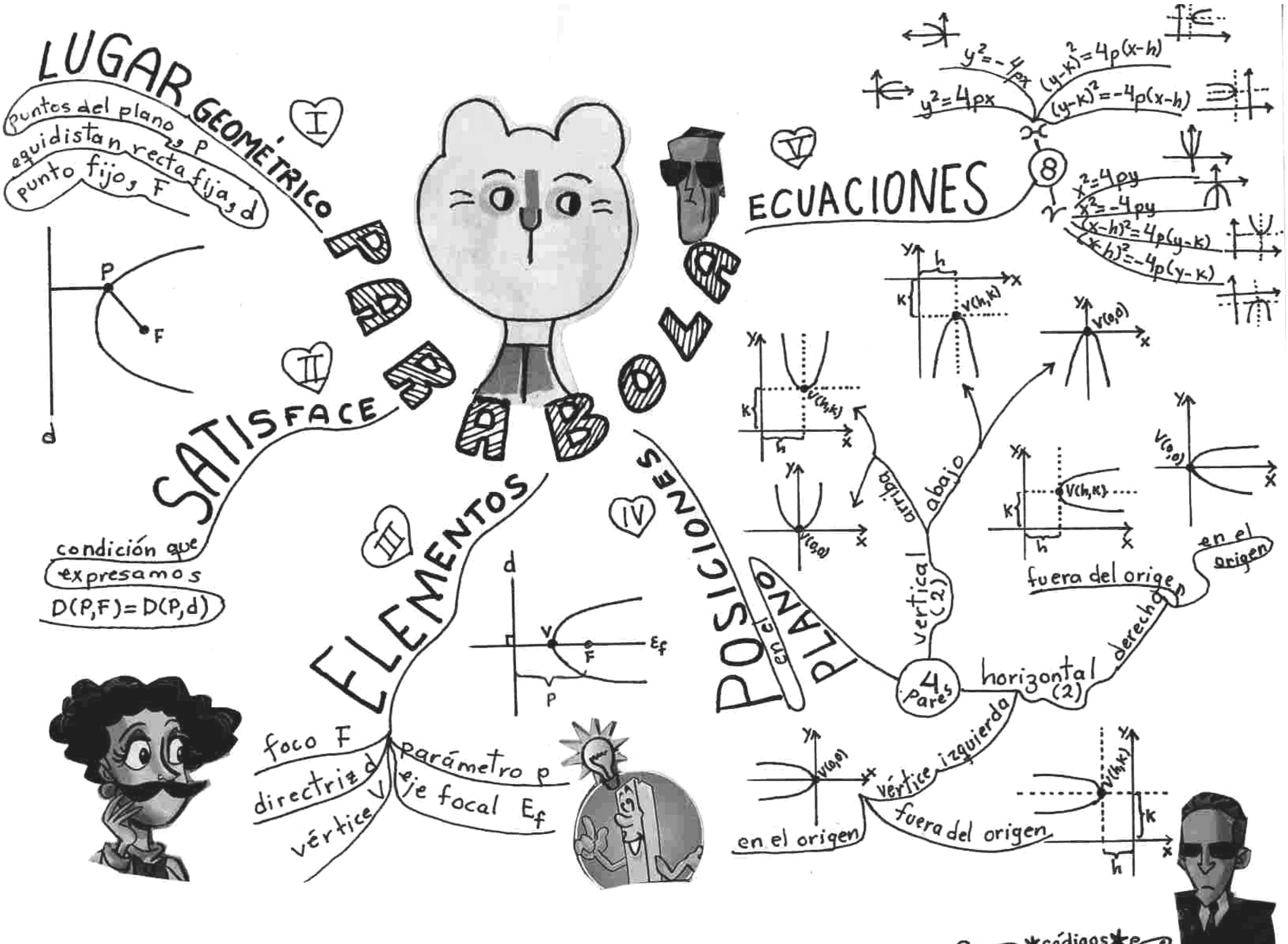






Las dos primeras representan una PARÁBOLA con VÉRTICE situado en el ORIGEN, es decir, en V(0,0) y EJE que coincide con EL Y. Sin embargo, una abre hacia arriba y la otra, hacia abajo.

El siguiente par de ecuaciones representa una PARÁBOLA cuyo VÉRTICE está en cualquier parte del plano, es decir, V(h,k) y su EJE es PARALELO AL eje Y. La primera abre hacia arriba y la segunda, hacia abajo.



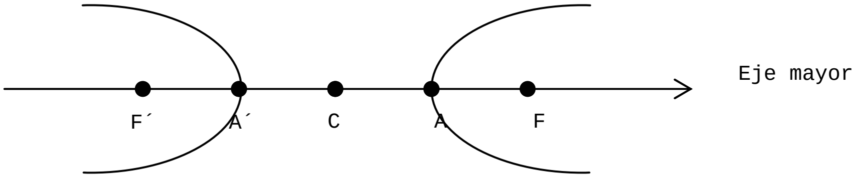
Mapa XIII. Lo que debo recordar acerca de la "Parábola".

códigos
r: vertical x: horizontal
D(,): distancia

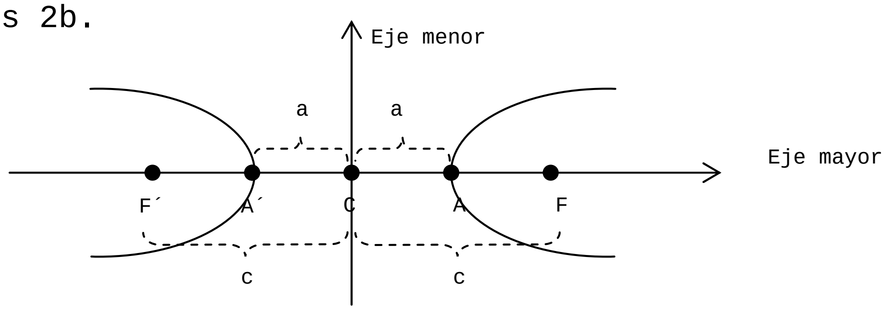
MAPA XIV
HIPÉRBOLA

Ya habíamos aprendido en el tema de lugares geométricos que la hipérbola es el lugar geométrico de todos aquellos puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es una cantidad constante. Lo que no sabíamos es que esta cantidad se representa por 2a.

La hipérbola CONSTA DE DOS RAMAS. Los PUNTOS FIJOS se llaman FOCOS y se representan con las letras F y F´. Otros elementos importantes de la hipérbola son el CENTRO "C" y los VÉRTICES A y A´. El centro, los focos y los vértices, están colocados sobre una misma línea que se llama EJE MAYOR.

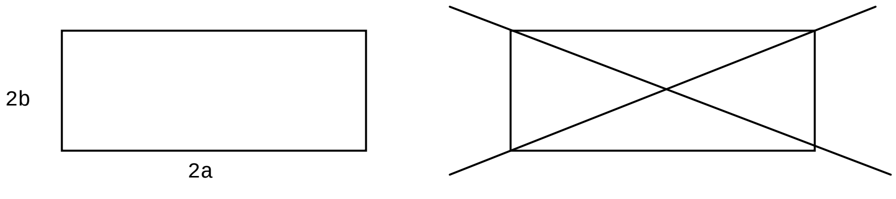


Los vértices y los focos equidistan del centro. La distancia que hay desde el centro a cualquiera de los focos es de "c" unidades y la longitud del segmento que los une es de 2c. La distancia que hay desde el centro hacia los vértices es de "a" unidades, de este modo, la longitud total del eje mayor es 2a. La hipérbola tiene también otro eje, llamado EJE MENOR. Este es perpendicular al eje mayor y ambos se intersectan en el centro de la hipérbola. La longitud total de este eje es 2b.

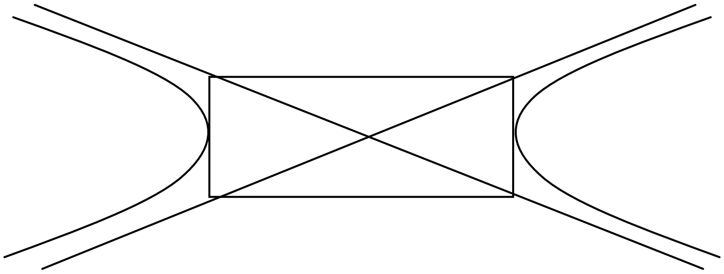


Observemos que para que haya hipérbola, siempre debe cumplirse que el segmento FF´ sea mayor que el segmento AA´, es decir, 2c>2a .

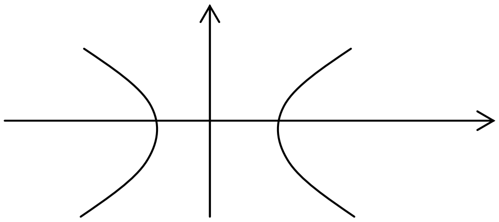
Otro elemento muy importante de este lugar geométrico son un par de rectas llamadas ASÍNTOTAS. Si trazamos un rectángulo cuyos lados midan 2a y 2b respectivamente, las diagonales de éste, formarán las asíntotas de la hipérbola.

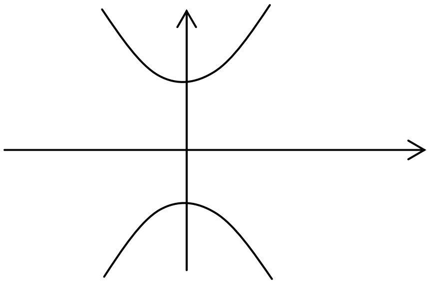


La intersección de estas rectas es el centro de ella. En el interior del ángulo formado por las asíntotas, están colocadas las ramas de la hipérbola. Veamos la figura:

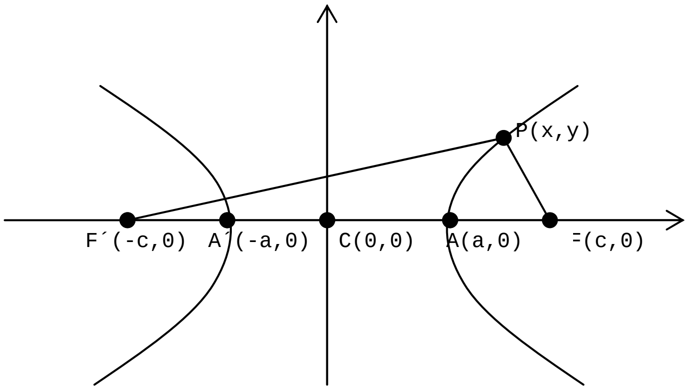


Cuando el eje mayor de la hipérbola coincide o es paralelo al eje X, ésta se encuentra colocada en posición horizontal. Si fuera de otra forma, la posición es vertical, esto es, su eje coincide con el Y o es paralelo a éste.





Para obtener la ecuación de la hipérbola, empecemos con la posición horizontal y centro en el origen, es decir, C(0,0). Notemos que las coordenadas de los focos serán F(c,0) y F´(-c,0).



Si escogemos un punto cualquiera del plano como P(x,y), éste pertenecerá a la hipérbola si cumple con la condición dada, es decir, según la figura, la distancia PF´ menos la distancia PF debe ser igual a 2a. Esto se expresa así:

$$PF'-PF=2a$$

Pero $PF'=\surd(x+c)^2+y^2$ y $PF=\surd(x-c)^2+y^2$

Sustituyendo estos datos como lo requiere la condición, tenemos:

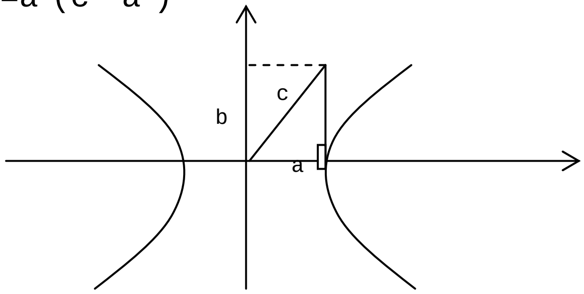
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

O bien,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Haciendo UN POCO DE ÁLGEBRA, esta expresión se reduce a:

$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$



Por construcción, y por Teorema de Pitágoras, en toda hipérbola se satisface que $c^2=a^2+b^2$.

Que es lo mismo que $b^2=c^2-a^2$.

Por lo tanto, sustituyendo (c^2-a^2) por el valor b^2, en la ecuación anterior, obtenemos:

$$x^2b^2-a^2y^2=a^2b^2$$

Y finalmente, al dividir toda la igualdad entre a^2b^2, nos queda

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} =1$$

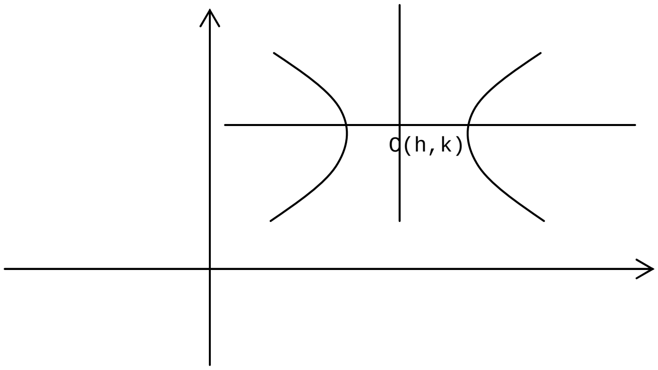
Esta expresión algebraica representa la ECUACIÓN de la HIPÉRBOLA cuando su CENTRO es el ORIGEN y su EJE MAYOR coincide con EL X.

Como hemos hecho antes, esta ecuación puede escribirse como:

$$\frac{(x-0)^2}{a^2} – \frac{(y-0)^2}{b^2} =1$$

Si colocamos la hipérbola con centro en C(h,k), la nueva ecuación será:

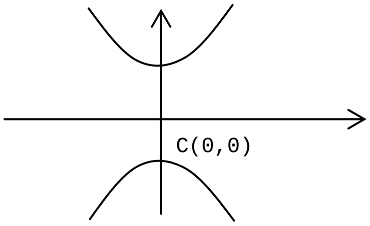
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} – \frac{(y-k)^2}{b^2} =1$$



Esta ECUACIÓN representa una HIPÉRBOLA con CENTRO distinto del origen, es decir, C(h,k) y EJE MAYOR PARALELO al eje X.

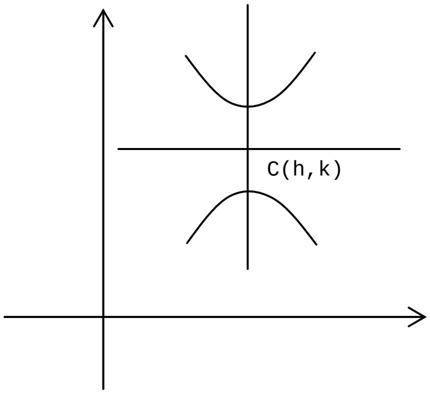
Haciendo un razonamiento similar para representar a las hipérbolas en posición vertical, las ecuaciones que obtendríamos serían las siguientes:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



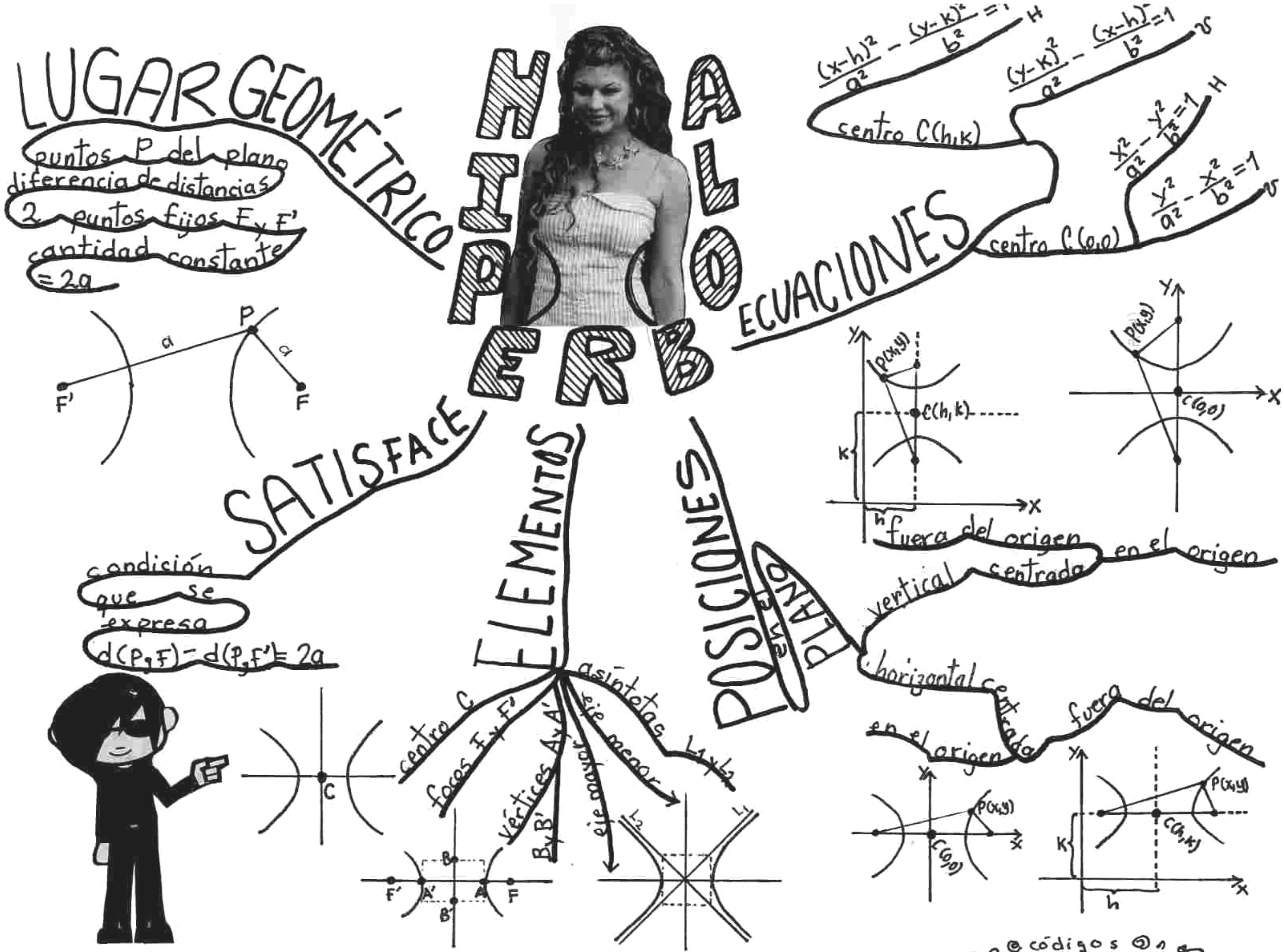
y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



De este par de ecuaciones, la primera representa una HIPÉRBOLA con CENTRO en el ORIGEN y EJE MAYOR coincidiendo con EL eje Y. La segunda representa una HIPÉRBOLA con CENTRO fuera del origen, es decir C(h,k) y EJE MAYOR PARALELO al EJE Y.

Fuentes consultadas para esta sección: [F-T],[O-L-G-R-H],[S-C1].



Mapa XIV. Lo que debo recordar acerca de la "Hipébola".

códigos

H: horizontal v: vertical

L_1, L_2: rectas

4.2. Geometría analítica a través de un cuento, “El Carteplan”.

La mayoría de las personas suponen que conocer, aprender y saber matemáticas se reduce a la simple realización de miles y miles de cuentas, ejercicios y memorización de conceptos que, según su particular opinión, son incomprensibles y sin utilidad. De acuerdo a su interpretación, la sola idea de jugar, escribir cuentos, dibujar, experimentar o hacer actividades manuales con las matemáticas, suele sonarles absurda e imposible. De este modo, no pueden percatarse de que este punto de vista únicamente se transforma en un mito más que desprestigia a las matemáticas. Lo verdaderamente curioso es, que estas ideas, no sólo se le ocurren a personas que se han alejado mucho de la escuela, ni a personas mayores, también suelen vivir en la mente de nuestros niños y jóvenes. Aunque ellos no hayan tenido aún algún tipo de experiencia con las matemáticas, se han apropiado de tales ideas con sólo escuchar los comentarios equivocados que se hacen sobre ellas y que viajan de boca en boca.

Para contribuir un poco a hacer desaparecer esta opinión tan triste, en esta sección del capítulo he incluido una narración, escrita a manera de cuento, que tiene la finalidad de que, al ser leído por los estudiantes, éstos comiencen a imaginar cada una de las situaciones que en él se plantean. Es otra manera de asociar y recordar lo que han aprendido en una clase de matemáticas. El cuento está dividido en tres episodios narrados con un lenguaje sencillo y, además, también está acompañado de varios dibujos, lo cual hace atractiva e interesante la lectura. El objetivo de este cuento es que, al momento de leer y estar imaginando, los estudiantes relacionen su contenido con los temas estudiados en su curso de Geometría Analítica. El cuento es una actividad que pretende ayudarlos a reforzar mayormente su aprendizaje.

El trabajo que tendrán que realizar los estudiantes después de haber leído el cuento, consiste en que reflexionen sobre una serie de preguntas que se relacionan con conceptos y temas estudiados en clase. En seguida, considerando estas preguntas y reflexiones, deben de elaborar algunos mapas mentales que describan el contenido formal del cuento. Posteriormente tendrán que exponer verbalmente, ante todos los miembros de la clase, tanto el contenido matemático del cuento como de qué manera esta actividad les beneficia en su proceso de comprensión de la geometría analítica. También, los profesores podemos, con esta actividad, evaluar y revisar si los alumnos hay comprendido de manera efectiva lo que se les está enseñando.

Al ir siguiendo, paso a paso, la lectura, nos daremos cuenta de por qué hemos titulado el cuento con el nombre de “El Carteplan”. ¿Qué les parece si comenzamos ahora?

LOS HABITANTES DEL CARTEPLAN

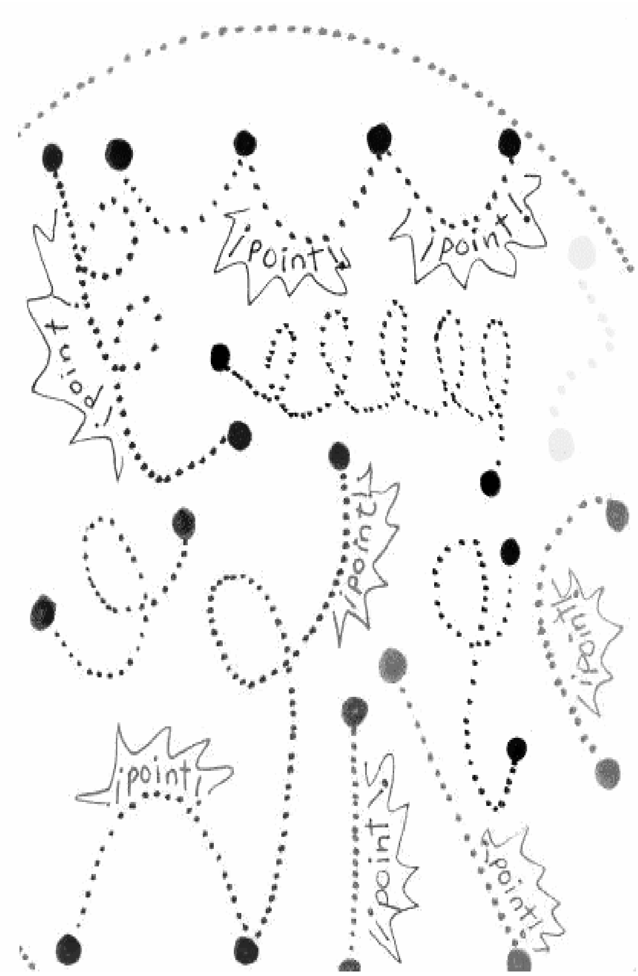
Por María Ponce Domínguez

Episodio I

¿Qué nos pasa?

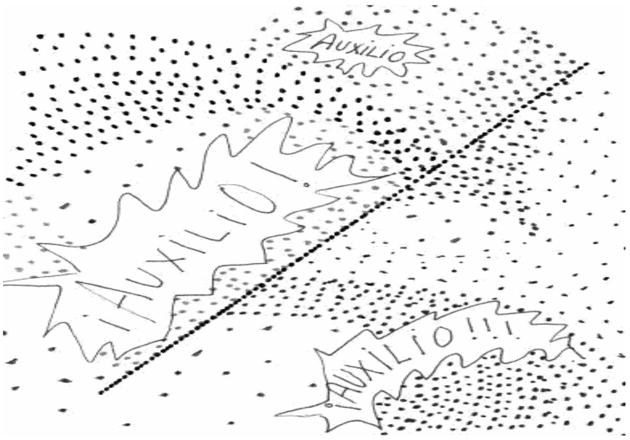
Así como nuestro sistema solar está contenido dentro de nuestra galaxia y ésta a su vez está dentro del Universo, el espacio fantástico que conoceremos hoy, también está contenido dentro de otro espacio que es muy, muy grande. Bien, hablemos primero del pequeñín, así pues…

Se dice que la vida en el UNIDIMUN comenzó con un ser que tenía posición pero no dimensiones. Este habitante podía describirse como la marca que deja un lápiz al apoyarlo sobre un papel. Se podía mover, a brincos, de un lado a otro, de arriba abajo, de izquierda a derecha, pero, sin arrastrarse. Esté movimiento era como si el ser rebotara dentro de una enormísima pelota.



Como él había otros, muchos, muchísimos, con las mismas cualidades pero de varios colores y andaban regados por ahí, compartiendo el mismo espacio, sin embargo, no se conocían bien. Todos ellos sabían cantar, por lo cual, su existencia no les parecía nada aburrida.

El nombre de estos seres era los “sotnup”.



Un día, un extraño densefómeno invadió el tranquilo hábitat de los “sotnup” haciéndolos chocar, quedar juntos y apretados en una única hilera que se extendía muchísimo, tanto a la izquierda como a la derecha. Aunque con extraordinario esfuerzo pudieran lograr apartarse un poco, al instante, otros “sotnup” ocupaban ese hueco.

Debido a tal suceso, quedaron fuertemente unidos, tanto que ya no se notaba su color. Como no se conocían, esta sudorosa y apretada cercanía les incomodaba, pero por más intento que hacían, no se podían separar.

Para desconcierto de los “sotnup”, el densefómeno duraría por largo, largo tiempo, por esta razón, ellos siguieron encontrándose, chocando y uniéndose hasta formar una larga e interminable fila, tanto así , que si pudiéramos ponerla en el piso y pararnos en una parte, la que queramos de ella, no alcanzaríamos a ver ni dónde empieza ni dónde termina. Ya que iban a permanecer así, los “sotnup” decidieron hacerse amigos y llamaron a su mutación “atceratinifni”. Desde luego, los “sotnup” y la “atceratinifni”, seguían viviendo en el UNIDIMUN.

El exterior del UNIDIMUN era recorrido por un satélite que tenía una especie de “ventana” que permanentemente estaba abierta. Tras ella podían verse unos seres llamados “soremún”. Cada uno de ellos era único y de apariencia un tanto extraña pues al verlos parecía como si alguien los hubiese torcido. Bueno, había dos excepciones, uno muy gordo-redondo y otro muy flaco con nariz de aguja y pie plano.

Los “soremún” también eran muchos, tantos como los “sotnup”, y de colores, unos más altos que otros, ya con gorra ya sin ella y de diversos tipos, por ejemplo, los había: naturistas, completos, rotos, irrazonables, nobles y acomplejados.

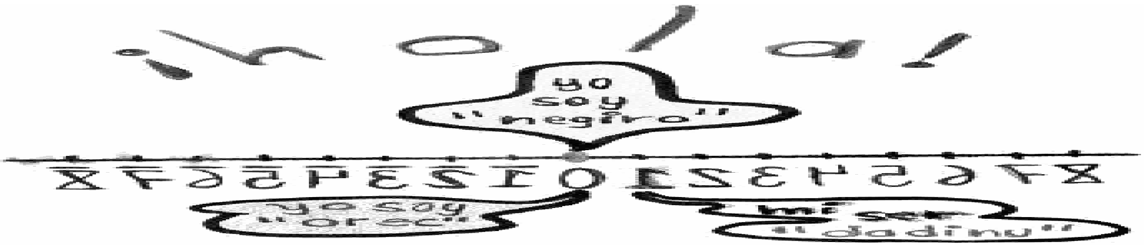
Con todo y su gran variedad, los “soremún” no sabían cantar. De hecho, eran unos seres muy tranquilos y muy quietos.

Como los “soremún” se entretenían mirando constantemente por aquella ventana, fueron testigos de la situación que afectó a los “sotnup” y, conmovidos por lo que les había sucedido, decidieron solidarizarse con ellos de algún modo. Fue así, como empezaron a pasar, todos y cada uno de ellos, a través de la ventana.

Con la creación de la “atceratinifni”, era difícil distinguir dónde había quedado cada uno de los “sotnup” pues estaban muy juntos, muy unidos, aún así, los “soremún”, pudieron pararse frente a ellos, formando también una hilera bien derechita, para hacerles compañía. Desde luego, convinieron en no hacer trampas, es decir, no se valía solidarizarse con más de uno de los “sotnup”. Sin embargo, como no sabían cómo colocarse, en el primer intento para hacer su fila, todos los “soremún” quedaron revueltos, es decir, quedaron mezclados altos entre chaparritos.

Se tomó entonces la decisión de elegir un representante de cada especie, es decir, uno para los “sotnup” y otro para los “soremún”. El representante de los “sotnup” no era físicamente distinto de sus otros compañeros salvo en su extraño color metálico-grisáceo y, el representante de los “soremún”, era gordo-redondo. Cada uno de los representantes tenían un apodo, al primero de decían “negiro” y, al segundo, “orec”.

Ambos representantes se pusieron de acuerdo sobre el modo en que se iban a colocar los “soremún” frente a los “sotnup”. De esta forma, los “soremún sin gorra” se colocarían a la derecha y los “soremún con gorra”, a la izquierda de los representantes, respectivamente. Además, los “soremún” respetarían estaturas, esto es, los más bajitos cerca de los representantes y los más altos hacia las orillas. Pero, para que no hubiera pierde, uno de los “soremún naturistas”, el que era muy flaco, se ofreció voluntariamente a organizar el orden. Él pidió a los otros “soremún naturistas” que se colocaran uno seguido del otro, desde luego, por estaturas, pero tomando como referencia la separación que había entre él y “orec”. Por haberse hecho notar de esa forma, le pusieron el sobrenombre de “dadinu”.

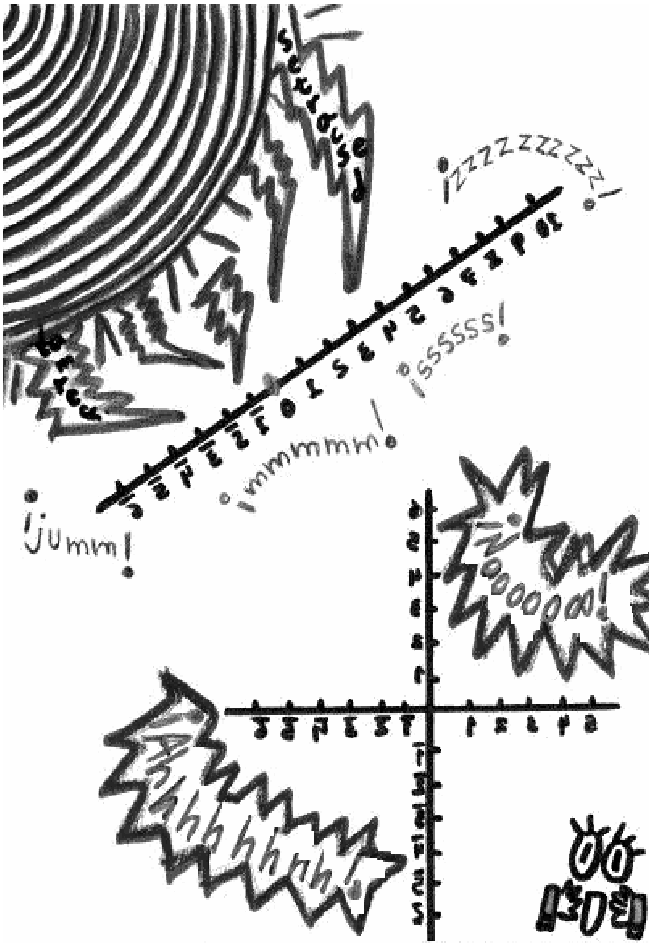


Todos, “soremún” y “sotnup”, estuvieron de acuerdo con esta manera de ordenarse y, para calibrar crearon una sociedad a la que bautizaron con el nombre de “bunivócore”. En agradecimiento a la solidaridad de los “soremún”, los “sotnup”, les enseñaron a cantar una de las tantas canciones de su repertorio.

Cada vez que te veo llegar,
es más difícil de controlar
esta angustia,
hay que me estira.

Me estoy volviendo loco,
loco, por tí,
si no me vas a querer,
ya no me hagar sufir.

La, la , la ,



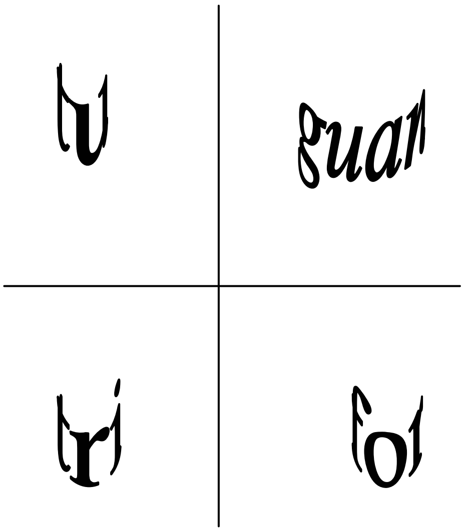
Pero la patente y prolongada felicidad de los socios había de ser turbada. Cierta ocasión, mientras ellos descansaban, de algún modo, un fenómeno extraño llamado “Pierrené”, clonó por completo la “atceratinifni”. Aunque, esperen,… hubo algunos socios que no fueron clonados.

El representante de los “soremún” y el de los “sotnup” fueron la excepción, pero el fenómeno los forzó a ser, también, representantes de los clones. Se les encomendó, además, la tarea de mantener para siempre, vertical y bien derechita, la copia de la “atceratinifni”, formando con la original, una enorme cruz recta. Además, estos socios debían pertenecer a ambas, original y copia.

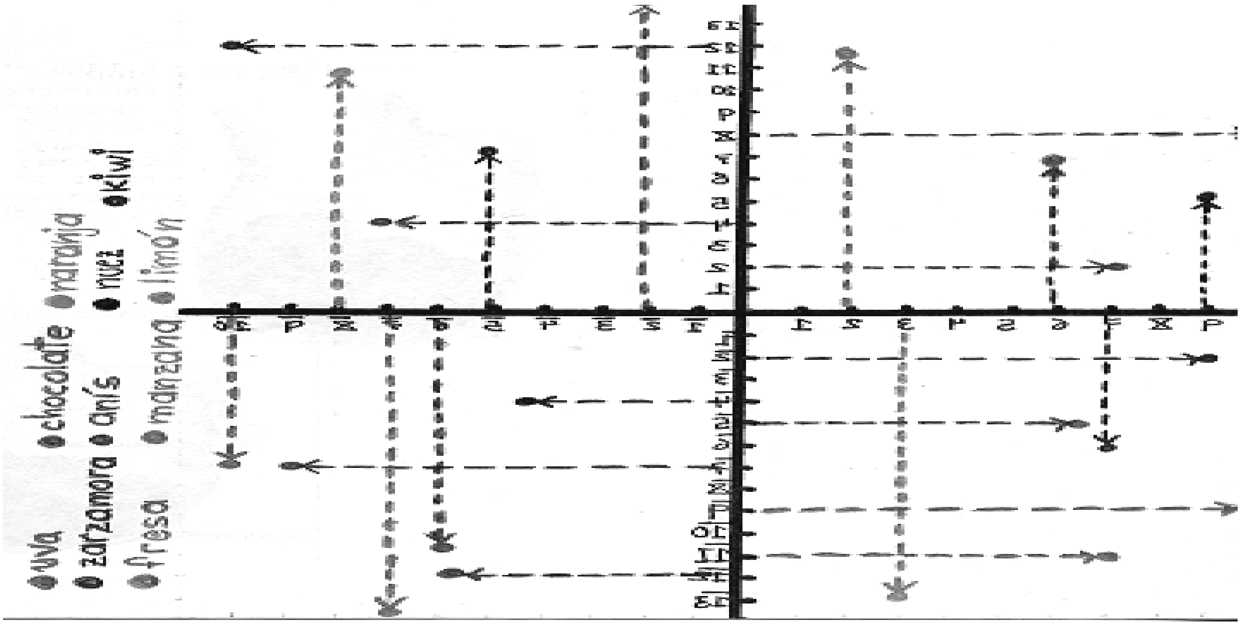
Cuando los socios terminaron de descansar, se percataron del hecho y, asombrados, temerosos, perplejos, no eran capaces de comprender tal metamorfosis. Horrorizados, al unísono gritaron, ¡ahhhhhhhhhh! Trataban de asimilar el hecho pero ¡nooooo! lo lograban. A partir de ese momento, los socios habrían de clasificarse en habitantes “nativos” y habitantes “clones”, pero… ¿de dónde?

Episodio II
Hogar, dulce hogar

La extraña metamorfosis de la “atceratinifni” dio origen al “carteplan”. Este nos los podemos imaginar como una enorme cruz recta y fija, que en un piso invisible sostiene cuatro amplias zonas llamadas “setnardauc”. Para poder diferenciar las zonas, los habitantes han acordado que se recorran en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Las han bautizado con los nombres de zona guan, tu, tri y for, respectivamente. Desde luego, este lugar se convirtió en el nuevo hogar de los “sotnup”, sus amigos “soremún” y los clones.

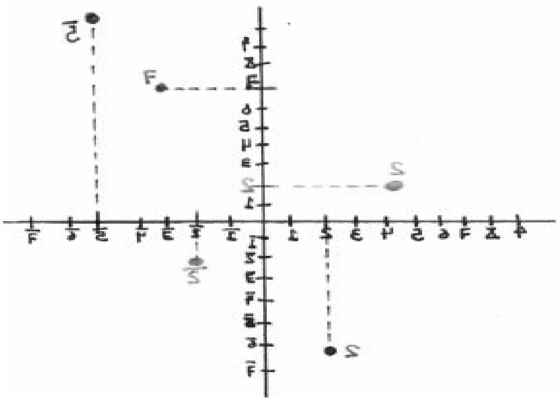


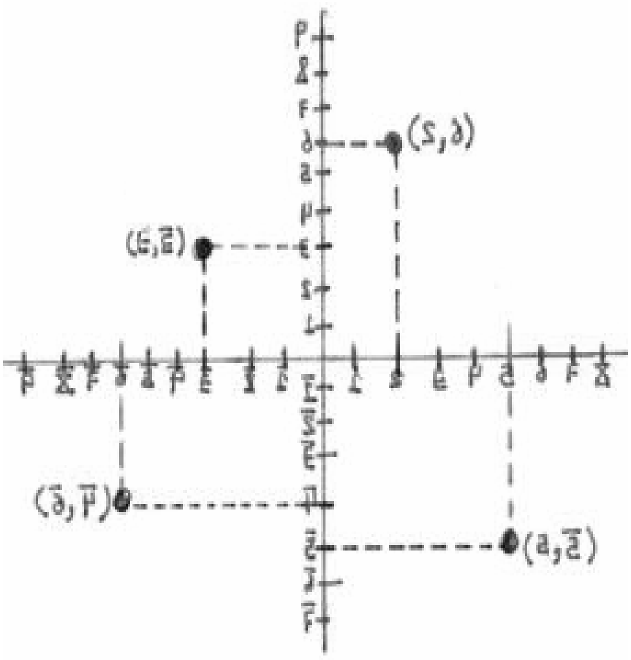
Presas de la incertidumbre, tímidamente, los “sotnup” comenzaron a explorar este nuevo espacio. Con gran asombro, tanto los “sotnup nativos” como los “sotnup clones”, descubrieron que el fenómeno les había dotado de gran elasticidad. Así, desde su lugar en la “atceratinifni”, podían arrastrarse y estirarse sobre el “carteplan”, tanto como quisieran. Otra cualidad que los “sotnup” tenían ahora era que, conforme se estiraban y arrastraban por el invisible piso, iban dejando un colorido y perfumado rastro. Ese rastro se parecía a pequeñísimos guiones. También observaron que los movimientos de los nativos consistían en moverse hacia arriba o hacia abajo y los de los clones, a la derecha o a la izquierda.



Los “soremún” también fueron afectados por el fenómeno, pues algo así como su sombra, se movía acompañando a su respectivo “sotnup”.

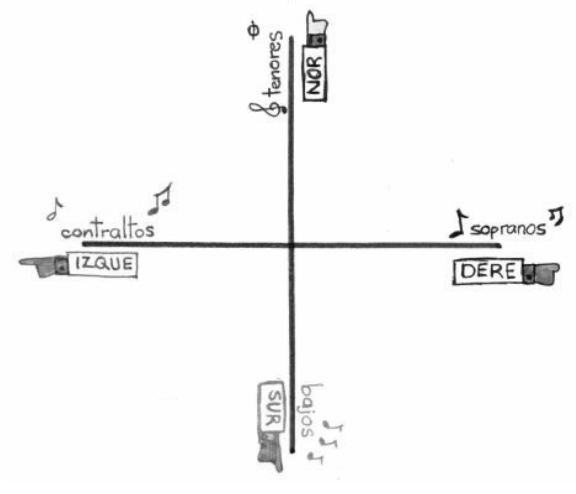
Cuando se hubieron acostumbrado a este nuevo lugar, tanto los “sotnup” como los “soremún”, nativos y clones, comenzaron a moverse por el “carteplan”, con mayor confianza.





Cada vez que los “sotnup” decidían moverse por el “carteplan”, por lo general, coincidían, al mismo tiempo, en el mismo lugar y en alguna parte del éste, con otros “sotnup”. Mágicamente, al encontrarse, se integraban en uno solo, que se ponía un poco gordito. Como cada uno de ellos era seguido por las sombras de sus respectivos “soremún”, estos últimos se colocaban juntos y se encerraban en una especie de casita que les ayudaba a formar parejas. Esta casita permanecía a un costado de los “sotnup” y de esta manera, socializaban mutuamente clones y nativos, lo que les permitió irse conociendo mejor.

Desde luego que los movimientos de los “sotnup” y de los “soremún” estaban organizados de acuerdo a su tipo, es decir, clon o nativo. Así, las cuatro maneras de moverse por el “carteplan” eran: “derenor”, “izquenor”, “izquesur” y “deresur”.



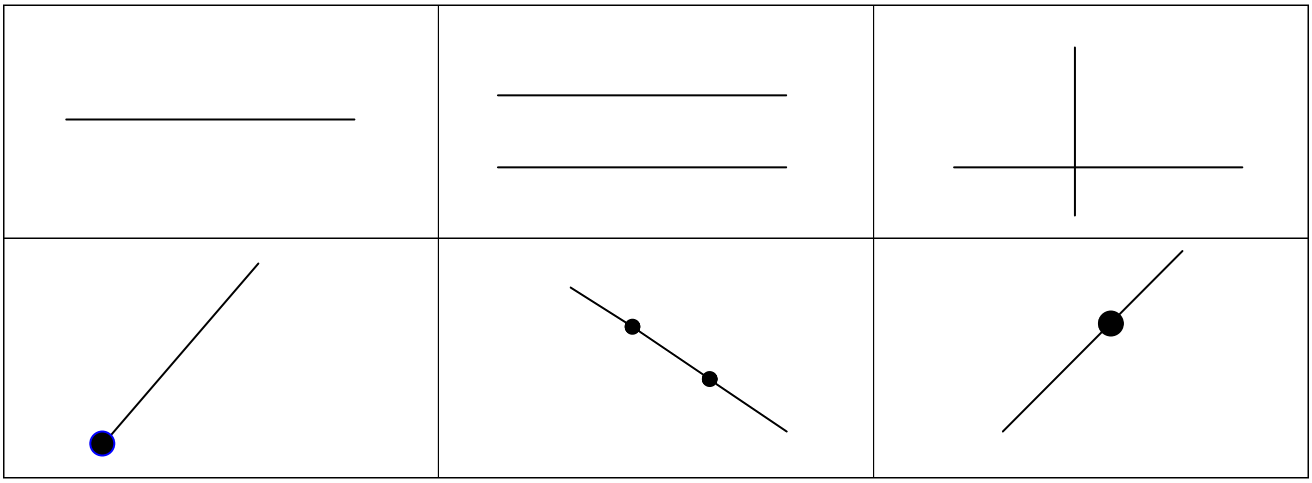
Ahora, en este nuevo lugar, los “sotnup” se estaban relacionando con parejas de “soremún”, ¡qué tal, eh! Todo esto les parecía tan novedoso y divertido que, de pronto, les hizo recordar que hacía rato que no cantaban. Al organizarse para hacerlo de nuevo, notaron que, por efecto del monstruoso fenómeno que los afectó, habían quedado acomodados de acuerdo a su tipo de voz, ¡qué fantástico! Si se movían al “derenor”, las parejas eran de un soprano y un tenor, si se movían al “izquenor”, las parejas se formaban de un contralto y un tenor; al “izquesur”, de contralto y bajo; al “deresur”, de soprano y bajo. Algo muy gracioso que sucedía era que sopranos y tenores no usaban gorra, en cambio los contraltos y bajos, sí.

Con esta maravillosa disposición, los cánticos de los socios de la “bunivócore” estaban más estilizados, más bonitos, ¡de competencia!, ¡qué padre!

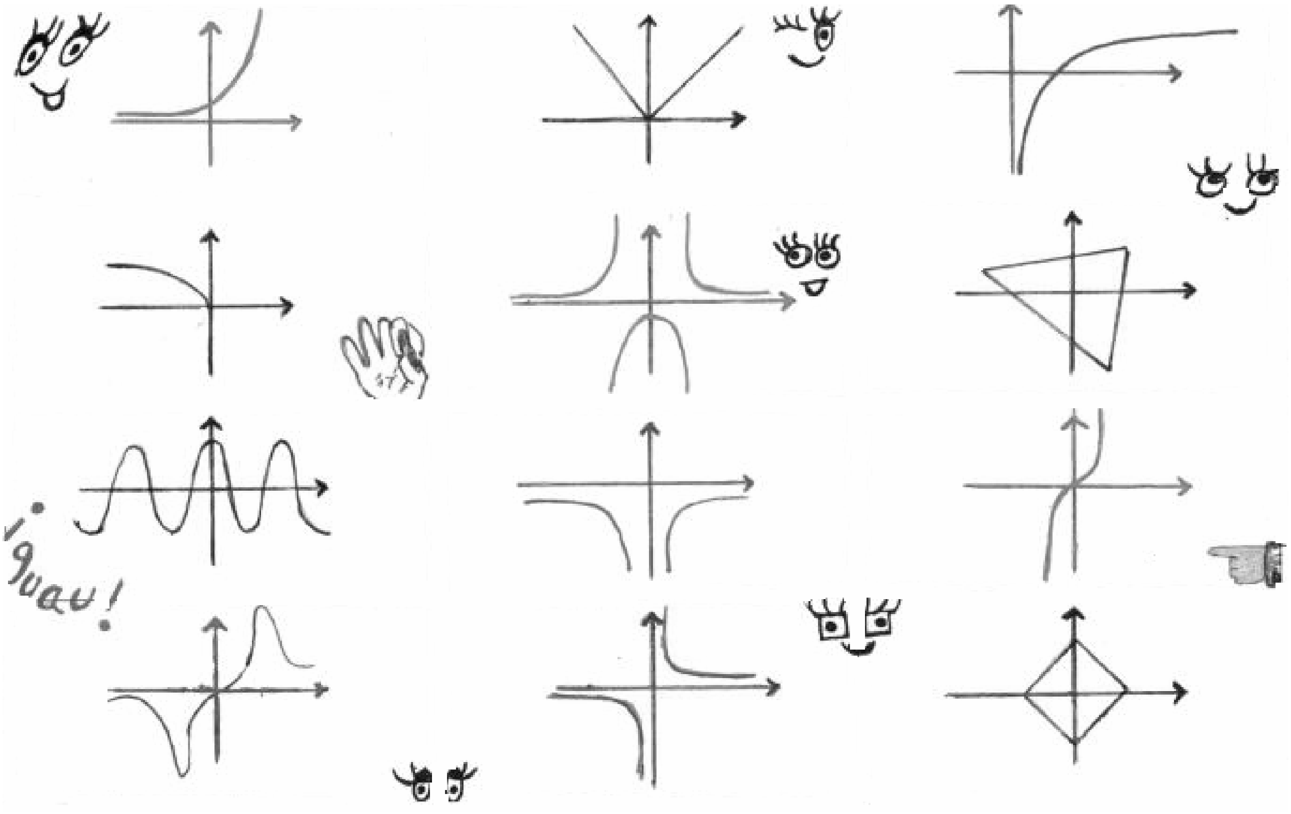
Como nativos y clones renovaron y reafirmaron su sociedad, juntos gritaban con gran emoción, ¡viva la bunivócore!, ¡viva la bunivócore! También compusieron una canción en estilo opera pop para agradecerle al “Pierrené” por crearles un hogar más amplio.

Por tí volaré
espera que llegaré
fin de trayecto eres
contigo yo viviré
mi tú
Por tí volare
por cielos y mares
hasta tu amor
[illegible]do los ojos por
contigo yo viviré

Como los habitantes del “carteplan” eran muy inquietos y les gustaba estirarse por todos lados, pronto se dieron cuenta que podían formar figuras. Las figuras que formaron primero, por supuesto, fueron “atceratinifni”s, pero, por lo regular les salían diferentes así que les dieron ciertos nombres para distinguirlas, por ejemplo: “generalas”, “lelas”, “lares”, “originitas”, “duopun”, “simplifi”, entre otras. Asomándonos a ese mundo, las veríamos así:

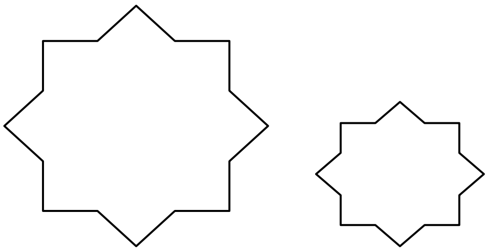


Hubo una ocasión en que los “sotnup” estaban tan alegres, que sin darse cuenta, comenzaron a moverse tomando diferentes direcciones. De momento, se asustaron mucho pero al poco rato, se sorprendieron con las figuras que habían formado. Eran unas figuras tan elegantes, bonitas, únicas y originales que ahora tenían la oportunidad de embellecer aún más su adorable hogar, el “carteplan”. Continuamente las hacían pues, además de que les significaba un grato placer, cada vez encontraban en ellas más y más detalles interesantes. He aquí algunas de las tantas figuras con las que solían embelezarse los habitantes del “carteplan”.



Para que estas figuras les salieran iguales, cada vez que tuvieran ganas de formarlas, los “sotnup” que las integraban pusieron mucha atención en cómo es que las habían construido, así pues, aprendieron que tenían que cumplir y respetar siempre las mismas condiciones al moverse por el “carteplan”. Para acordarse de que estas figuras eran muy especiales, les dieron un nombre, ¡qué digo!, ¡un nombrezote!: “seragul-socirtémoeg”.

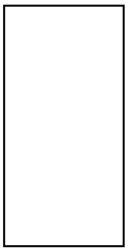
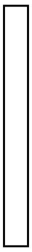
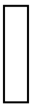
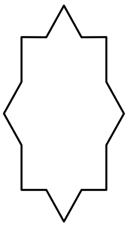
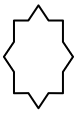
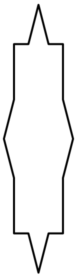
Como niños con juguete nuevo, los socios habitantes del “carteplan”, empezaron a jugar y entretenerse haciendo figuras. Pronto notaron que algunas de ellas quedaban cerradas, es decir, los “sotnup” de los extremos de la figura quedaban uno junto al otro, pero que si bien juntitos. También notaron que si invitaban a más compañeros a jugar, las figuras cerradas se hacían más grandes y, si los jugadores eran menos, la misma figura se hacia más pequeña. De cualquier manera, las condiciones para su construcción, se conservaban.



Bien, he aquí otro misterio, ¿de qué se tratará? Esto es algo que los habitantes del “carteplan” tienen que averiguar. ¿Qué irán a descubrir? No lo sabemos, pero, por qué no averiguarlo. Sigamos mirando, sin que ellos se den cuenta, al interior de su mundo.

Episodio III
El BIDIMUN

Como sabemos, los habitantes del “carteplan” vivían muy felices estirándose sobre de este, perfumándolo, creando y formando, cada vez más, nuevas figuras. A partir de sus juegos notaron ciertas cosas que los sumieron en una gran incertidumbre. Se notaban, pues, muy nerviosos. Poco después, cuando todos volvieron a estar serenos, se dieron cuenta de que sus figuras poseían un par de características muy importantes: la “dutignol” y la “aruhcna”. La “aruhcna” era algo así como la talla de la figura, es decir, qué tan gorda o flaca era ésta. La “dutignol” venía siendo como la estatura, es decir, alta o chaparra. ¿De acuerdo? Bueno, mejor espiemos un poco.

						
Alta y gorda	Chaparra y gorda	Alta y flaca	Chaparra y flaca	Alta y gorda	Chaparra y gorda	Flaca y alta

Con tanto furor, los habitantes del “carteplan”, no se habían dado cuenta que inventar figuras con estas características de “dutignol” y “aruhcna”, fuese en los “setnardauc” que fuesen, los había hecho pasar a vivir, sin darse cuenta, del UNIDIMUN, a un nuevo espacio, es decir, ahora vivían en el BIDIMUN y éste, de la misma forma que el primero, está colocado en el interior del espacio ese súper grande del que platicábamos al principio de esta aventura.

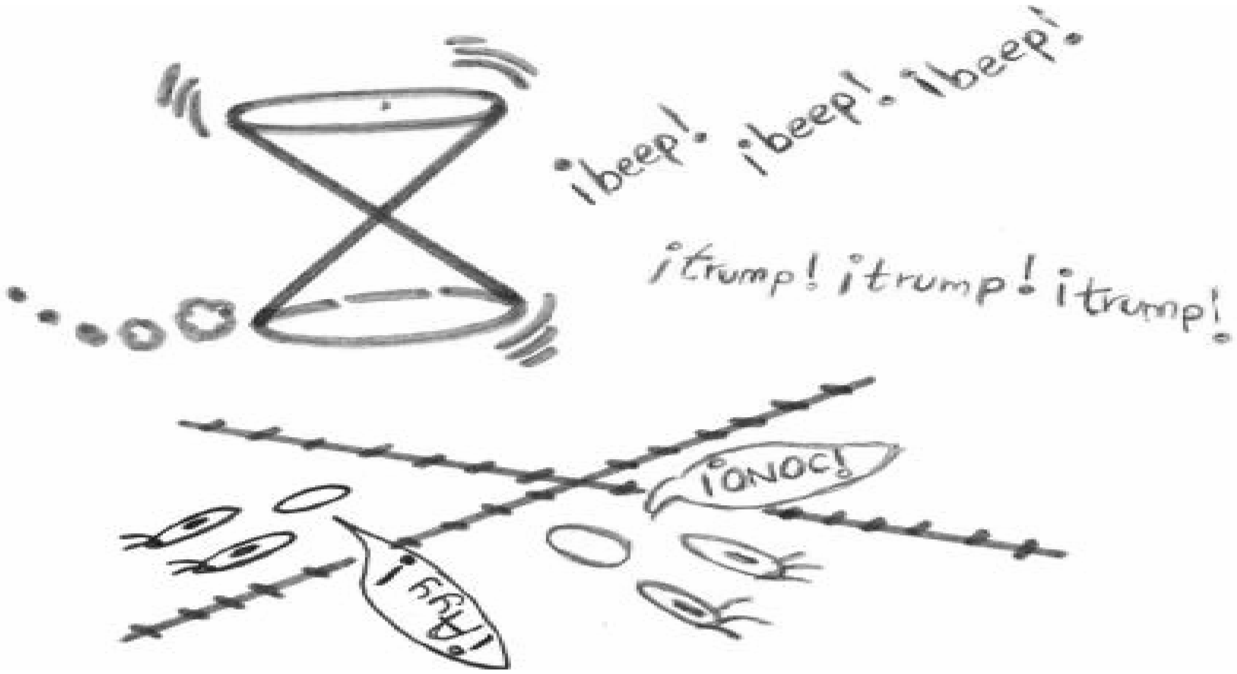
Cada descubrimiento hecho por los habitantes del “carteplan”, los llenaba de tal regocijo que, de inmediato, todos ellos, se ponían a cantar y ahora, en este momento están cantando al ritmo del regueatón, el siguiente tema:

Con las manos arriba,
con las manos arriba,
para arriba, pam, pam,
para abajo, pom, pom.
para un lado,
para el otro…

Mueve la pooompa,
muévela a un laaado,
muévela al oootro…

Cuando el momento festivo terminó, los “carteplanenses” se dispusieron a descansar. No había pasado mucho tiempo de esto cuando, de repente, se oyó un gran tronido. Seguido de éste, una brillante y cegadora luz, iluminó, por completo, el “carteplan”.

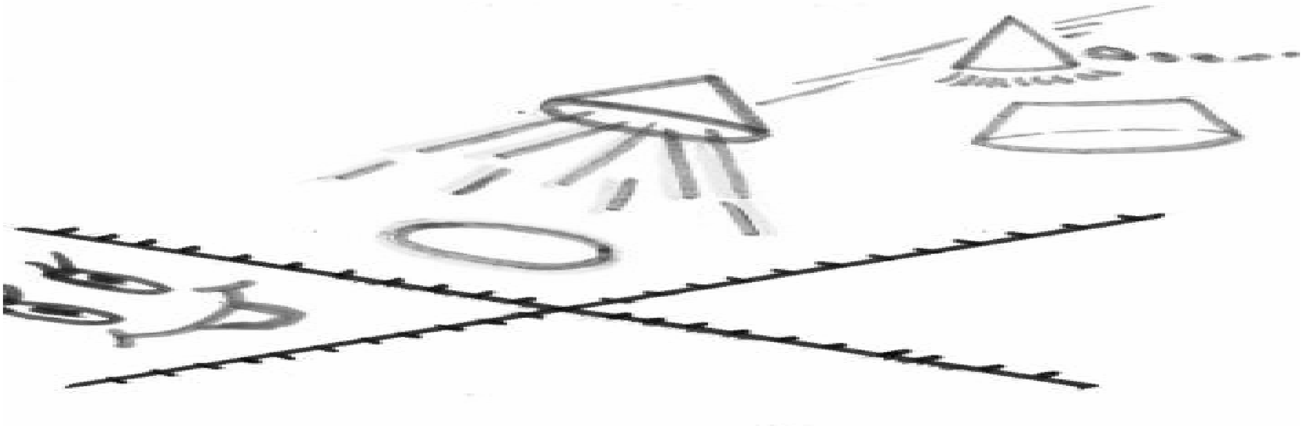
Los “carteplanenses”, jamás se habían percatado, hasta ese momento, de que el “carteplan” tenía cielo. Un inmenso y alto cielo. Cuando la intensa luz fue disminuyendo, ahí arriba podía verse un extraño objeto, sin duda, un O.V.N.I. Este objeto no era como las figuras que los habitantes del “carteplan” conocían, ¡no!, este objeto era muy extraño. El O.V.N.I. tenía la siguiente forma:



Uno de los habitantes, debido al nerviosismo, quiso gritar, pero sólo atinó a emitir un sonido que los demás interpretaron como “onoc” y, entonces, bautizaron al objeto con esa palabra. Ellos creían que el O.V.N.I. era algo así como una voluminosa nave y que si caía sobre su hogar, seguramente, los desintegraría.

No terminaban aún de salir de su asombro, cuando nuevos sonidos, provenientes de la nave, empezaron a escucharse. Eran agudísimos, ensordecedores, ¡ay!, ¡qué dolor!, ¡es insoportable!

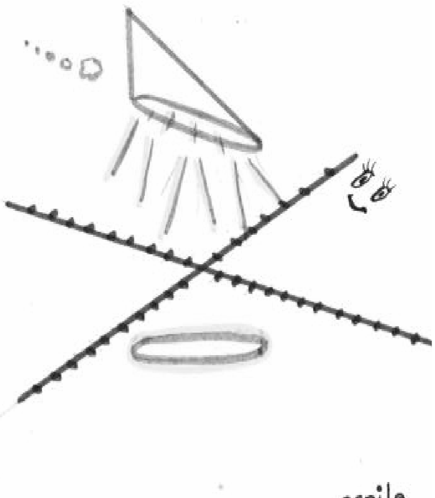
Al fin el ruido cesó. Todos estaban a la expectativa. Y… entonces, ¡oh, cielos!, la parte superior de la nave se ocultó pero, otra parte de ella, se separó y de alguna manera, proyectó una delgada sombra sobre el “carteplan”. Esa sombra se veía así:



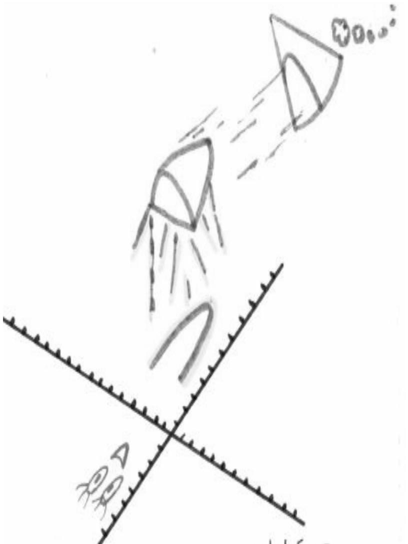
aicnerefnucric

De inmediato varios “sotnup” se acomodaron tal y como se mostraba la figura que proyectaba la nave. Esta colocación les gustó mucho y la llamaron “aicnerefnucric”.

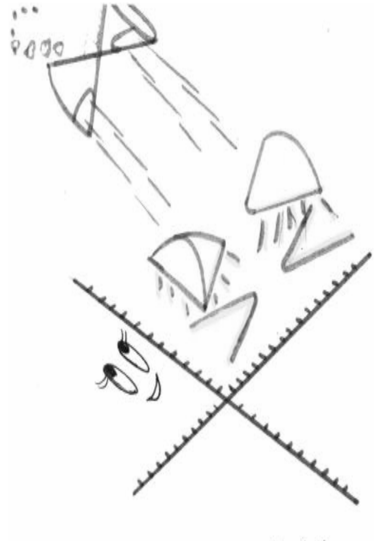
Más esa no era la única nave que podía desprenderse del “onoc”. También había otras tres y, al igual que con la primera, cada vez que se separaban de la gran nave, proyectaban su delgada sombra sobre el “carteplan” y varios “sotnup” se reunían ahí, maravillados de poder formar esa figura. Así, a la segunda sombra de la nave le llamaron “espile”, a la tercera “alobárap” y, a la cuarta, que era muy especial y espectacular, “alobrépih”.



espile



alobárap



alobrépih

Estas figuras gustaron tanto a los “carteplanenses” que continuamente las formaban y, a la vez, con eso, trataban de explicarse de dónde sería esa extraña nave que los impresionó tanto.

Pasaban largo rato meditando acerca de su impresionante belleza, sus nombres, sus secretos y hasta fantaseaban imaginando que en una realidad paralela, había seres que vivían en una especie de mundo, al que se referían como TRIDIMUN, que tenía esclavizadas a las formas esas tan preciosas y que las utilizaban explotándolas en diferentes áreas de aplicación de esa realidad, ¡zaz!, ¿qué habrán ingerido?, o sea, ¡guau!

Fantaseaban tanto, que hasta creían que el TRIDIMUN y los seres que lo habitaban existían en realidad y que los estaban mirando a través de una súper ventana y que en el momento en el que lo decidieran absorberían el feliz y tranquilo hábitat de la sociedad “bunivócore” convirtiéndolos así en súbditos de su mundote.

¡Están relocos!, pues, si de verdad existiera ese tal TRIDIMUN, ¿cómo sería?, ¿cómo se habría formado?, ¿a poco hay más características para los seres además de la “dutignol” y la “aruhcna”? Los estándares de la moda actual hacen gala de lo planito, ¿ellos estarán a la moda?, ¿cuál será su onda?

¡Bah!, yo creo que aquí se acaba todo, pues si no, tendríamos que comenzar una historia bien loca que se leyera así: Se dice que la vida en el TRIDIMUN…

FIN

4.3 Dinámicas para diseñar y usar mapas mentales en el aula: Crear y colorear, completar, armar, interpretar.

ACTIVIDAD I. CREAR Y COLOREAR MAPAS MENTALES.

1. MIS PRIMERAS IMPRESIONES EN UN MAPA MENTAL.

Utiliza cada una de las siguientes preguntas como idea central para elaborar, respectivamente, un mapa mental.

a) ¿Por qué es útil aprender matemáticas?
b) ¿Por qué es divertido aprender matemáticas?
c) ¿Qué significan las matemáticas para mí?

2. CUENTOS, IMAGINACIÓN Y CONOCIMIENTO.

Lee el cuento de “El Carteplan” y, utilizando como idea central lo que se pide en la lista, elabora el mapa mental correspondiente.

a) Episodio 1.
b) Episodio 2.
c) Episodio 3.

3. MATEMÁTICAS EN NUESTRO ENTORNO.

Crea un mapa mental que utilice únicamente imágenes para mostrar que la Geometría forma parte de nuestro entorno.

4. ASIMILACIÓN DE CONCEPTOS.

Utilizando como idea central los conceptos siguientes, elabora un mapa mental en donde expliques ampliamente cada uno de ellos.

a) punto
b) recta
c) lugar geométrico

5. UN POCO DE HISTORIA.[Al][Pe]

Lee con atención el siguiente poema, extrae las ideas principales y la idea central. Elabora un mapa mental que describa concretamente de qué trata el poema.

A pesar de que tres trabajos tiene,
es una persona cumplida y jovial
y en todas sus clases mantiene,
ambiente ameno y un tanto informal.

Es mi agradable maestra, alta, delgada y güerita, la que para cada clase, de alguna sabia mujer, nos platica.

Oigamos de su dulce voz,con cuál de ellas comenzó:

¡Oh, sí! Palas Atenea,
los números inventó,
los romanos la llaman Minerva,
ella, de la cabeza de su padre,
nació.

Dido, la máxima superficie
dentro de perímetro fijo abarcó,
sólo la piel de un toro recortó,
y ya en tiras, la ató.
Esto tiene relación con un problema
cuya prueba matemática,
ella, en siglo lejano, resolvió.

Y las llamadas Pitagóricas,
Theano, Fintis, Tymicha y Melisa,
bellas, estudiosas, precisas,
no os deben causar risa.

La primera mujer de ciencia,
cuya documentada vida
está llena de encanto,
comentó la Aritmética de Diofanto.
De cónicas escribió un tratado,
representa el fin de la ciencia antigua,
Hipatia es su nombre afamado.

Otra femenina científica,
que cometas solía ver,
Caroline Lucrecia Herschel,
oriunda de Hannover es.

Ella estudió y explicó
la física de Newton.
De Leibniz,
la filosofía natural vitalista,
Emilie du Châtelet se llamó,
la marquesa francesa tan lista.

La llamada burguesa de París,
Marie Sophie Germain,
conoció al gran Karl Gauss
y, con el seudónimo Le Blanc,
importantes resultados
solíale enviar.

Ella es Ada Byron Lovelace,
incondicional de Babbage,
juntos, de la computación harán,
trabajo superior que no apreciará,
en esa época, la mente de los demás.

La dama Sofía Kovalevski,
¡oh, qué abusada!,
aprendió la notación
y fórmulas avanzadas
del cálculo superior,
gracias a los tapices
de su habitación.

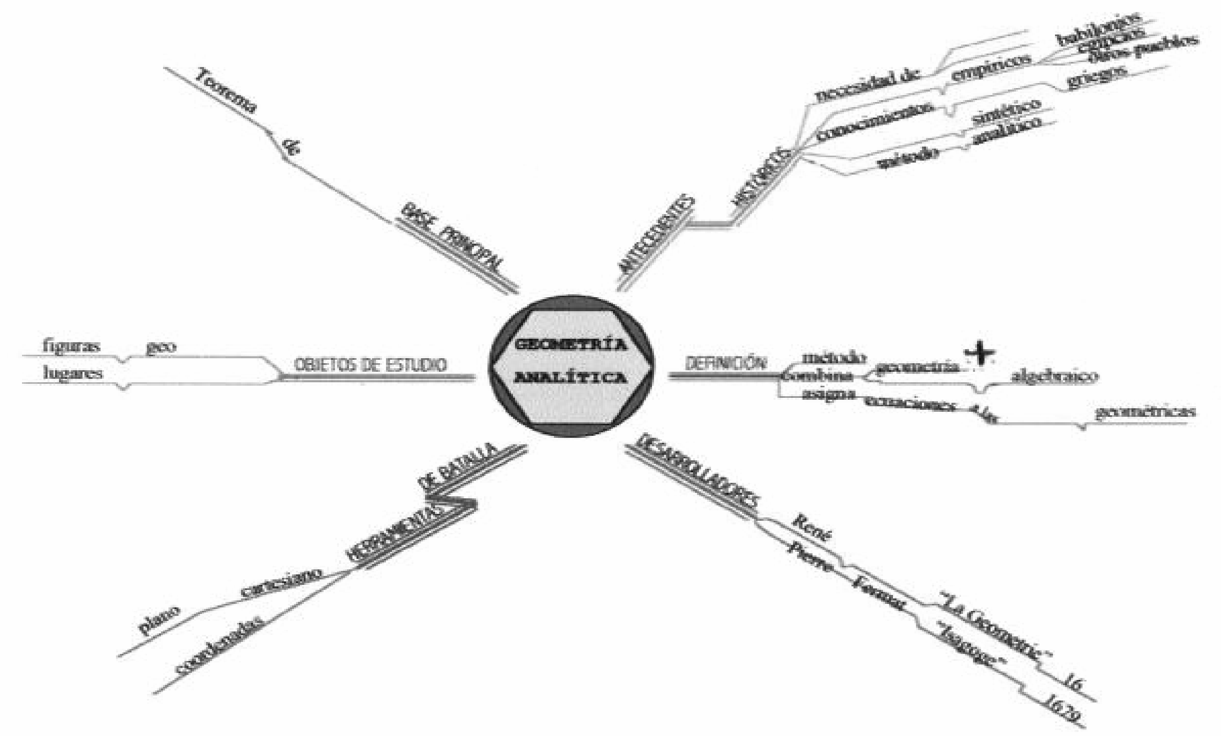
Marie Somerville, de Escocia,
aprendía los libros de memoria,
y resolvía mentalmente problemas,
pues, quitábanle las velas,
para que leer, ya no pudiera.

¡Oh, historia! ¡Qué mala eres!
Pues, de muchas otras mujeres,
sus nombres yacen en la niebla,
y sus trabajos sobre ciencia,
a otros, se atribuyó su existencia.

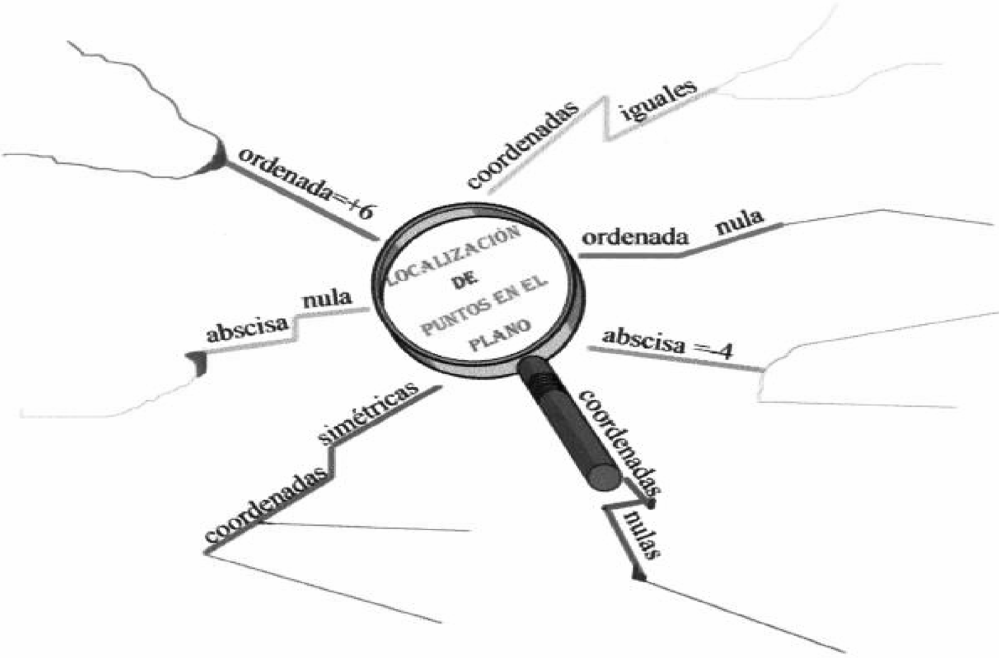
ACTIVIDAD II. COMPLETAR MAPAS MENTALES.

Los mapas mentales que vez a continuación, muestran la idea central y algunas de las ideas principales. Termina de completarlos, construyendo las ramas e ideas asociadas que faltan.

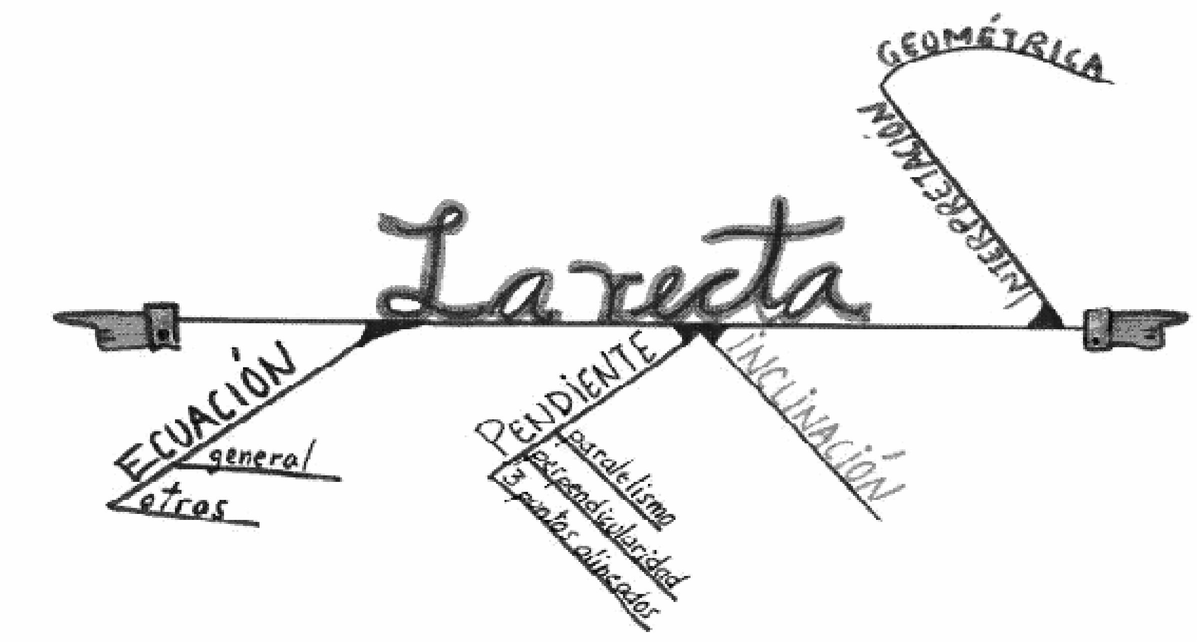
1. ACERCA DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA.



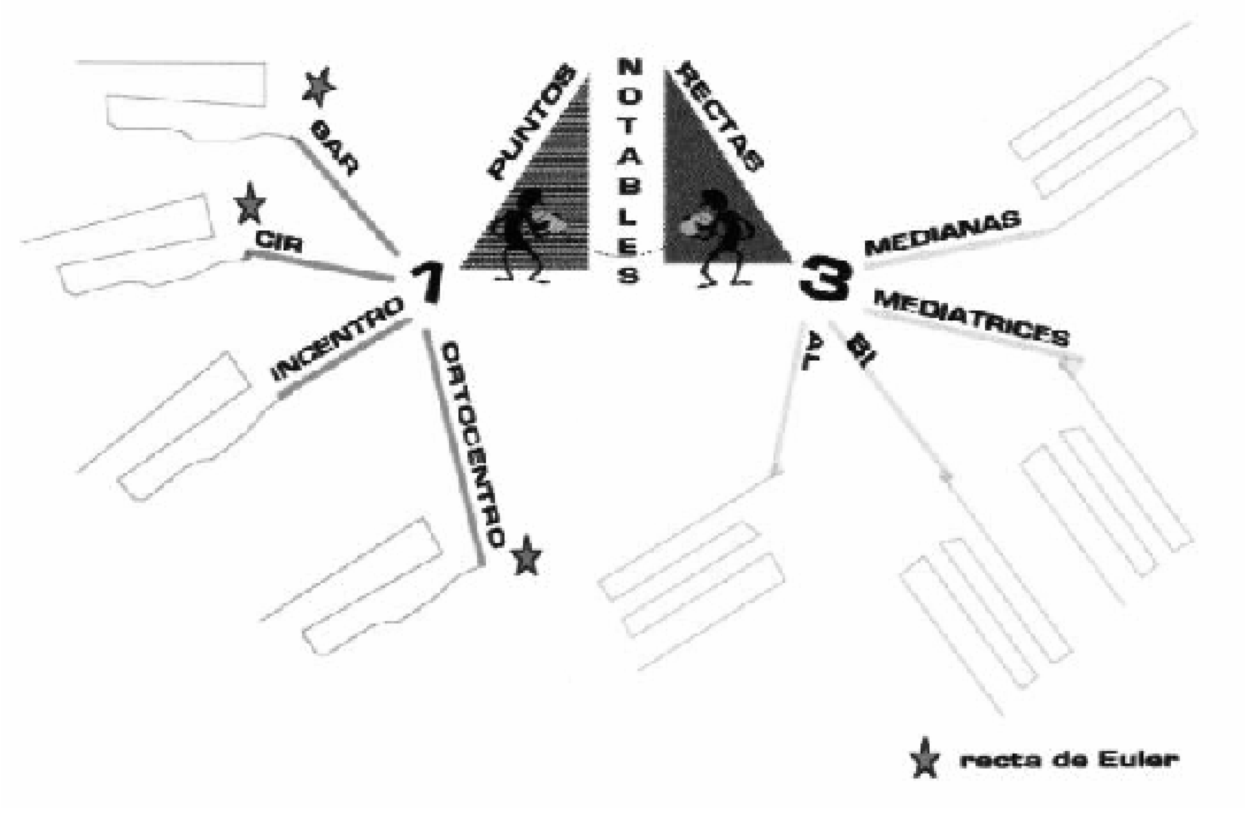
2. LOCALIZACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO.



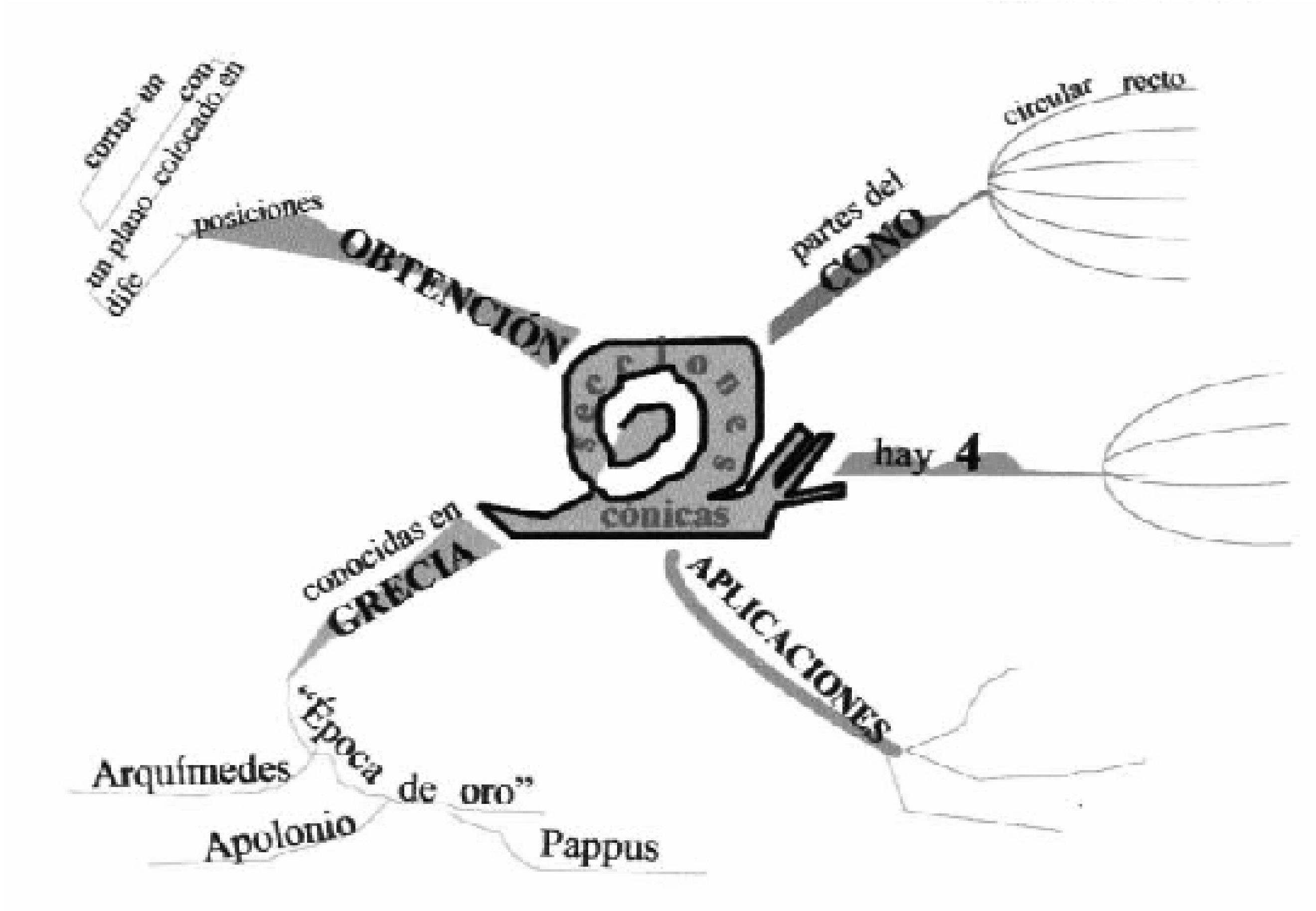
3. ACERCA DE LA LÍNEA RECTA.



4. RECTAS Y PUNTOS NOTABLES EN EL TRIÁNGULO.



5. ACERCA DE LAS SECCIONES CÓNICAS.



ACTIVIDAD III. ARMAR MAPAS MENTALES.

Para la siguiente actividad se muestra una lista de palabras. De ellas, tienes que escoger las que representan a la idea central así como las que representan a las ideas principales y las asociadas. Una vez hecho esto, arma y dibuja el mapa mental correspondiente.

1.

Vacío o nulo Enumerativa Necesitamos Conjunto Propiedad común	TIPOS Operaciones IDENTIFICACIÓN Elementos colección	Letras mayúsculas Letras minúsculas Contar sus elementos Dar nombre REPRESENTACION
ESCRITURA Universal OPERACIONES Ideas u objetos Menciona la propiedad	Descriptiva Unitario DIAGRAMAS Al conjunto iguales	Variable genérica Relacionados Reunión A sus elementos equivalentes
Subconjuntos CONJUNTOS Enlista los elementos Infinitos unión	DEFINICIÓN Cumplen Ajenos Complemento Figuras cerradas	DIAGRAMAS Nombre, signo=, llaves Finitos Venn-Euler intersección
Diferencia Producto cartesiano Ningún elemento Contar sus elementos Igual cantidad Obtenemos otros	Gráfica de los Letra Se pueden No comparten Distintos A, B, C, D,…	Conjuntos Describe cualquier elemento No se pueden Nada más un elemento Dados 2 conjuntos Llamados elementos

2.

LA EXPRESIÓN La interpretamos Agrupar Del signo =	Elipse horizontal Se resuelve Términos semejantes factorizar	Mover el Término constante A la derecha Su GRÁFICA es
Geométricamente $2x^2+3y^2-8x-18y=1$ Segundo grado Transformar a reducir	Como una Es UNA Dos variables La forma La ecuación	Fuera del origen Expresión algebraica Con 5 términos Ordinaria Completar cuadrados

3.

OPERACIONES Variable independiente Se ecribe Resta TIPOS polinomial	Regla de correspondencia Producen Variable dependiente Rango FUNCIÓN Máximo entero	Suma Par Dominio Multiplicación División potencia
Entre 2 conjuntos Constante f de x Valor absoluto Objetos “y” F(x), g(x), f(x)	Usa letras EXPRESIÓN Nueva función Se lee y=f(x) frecuentes	Impar f en x identidad objetos “x” DEFINE NOTACIÓN composición

4.

$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ Ejes paralelos Representa una ECUACIÓN DE 2do.GRADO 2 focos	Ecuación general $B=0$ y $A\neq C$ $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ Ecuación canónica 4 vértices	A, C del mismo signo A los coordenados Elipse 1 centro Eje mayor AA´
Eje menor BB´ Método del jardinero 2 estacas, 1 cuerda Calcular longitud Eje mayor y eje menor intersecciones	ELEMENTOS PRINCIPALES Ecuación dada Arreglos florales Localizar Parques, jardines simetrías	Regle y compás Conocidos los focos Determinar Longitudes del Dominio, rango Ecuación de las
Rectas que contienen Inclinada 2 puntos fijos Ecuaciones ordinarias Del lado recto Y vértices	Lugar geométrico 1 cantidad constante Horizontal A los ejes Coordenadas del Trazar la gráfica	PF+PF´=2a Vertical Es igual a Ejes y semiejes Centro, focos CONSTRUCCIÓN
DESCRIPCIÓN Plana PROPIEDADES Es C(h,k) 2ª.ecuación excentricidad	Trazo contínuo Curva ECUACIONES Es C(0,0) Eje mayor=2a De los focos	Cerrada DEFINICIÓN Cuando el centro 1ª.ecuación Vértices equidistan Relación entre
$e<1$ ejes se cortan en su punto medio C AA´ Puntos P(x,y)	$e=c/a$ LA ELIPSE Si: F,F´ BB´ Del plano	Semiejes $a^2=b^2+c^2$ POSICIONES A, A´, B, B´ Suma de distancias Cumplen condición

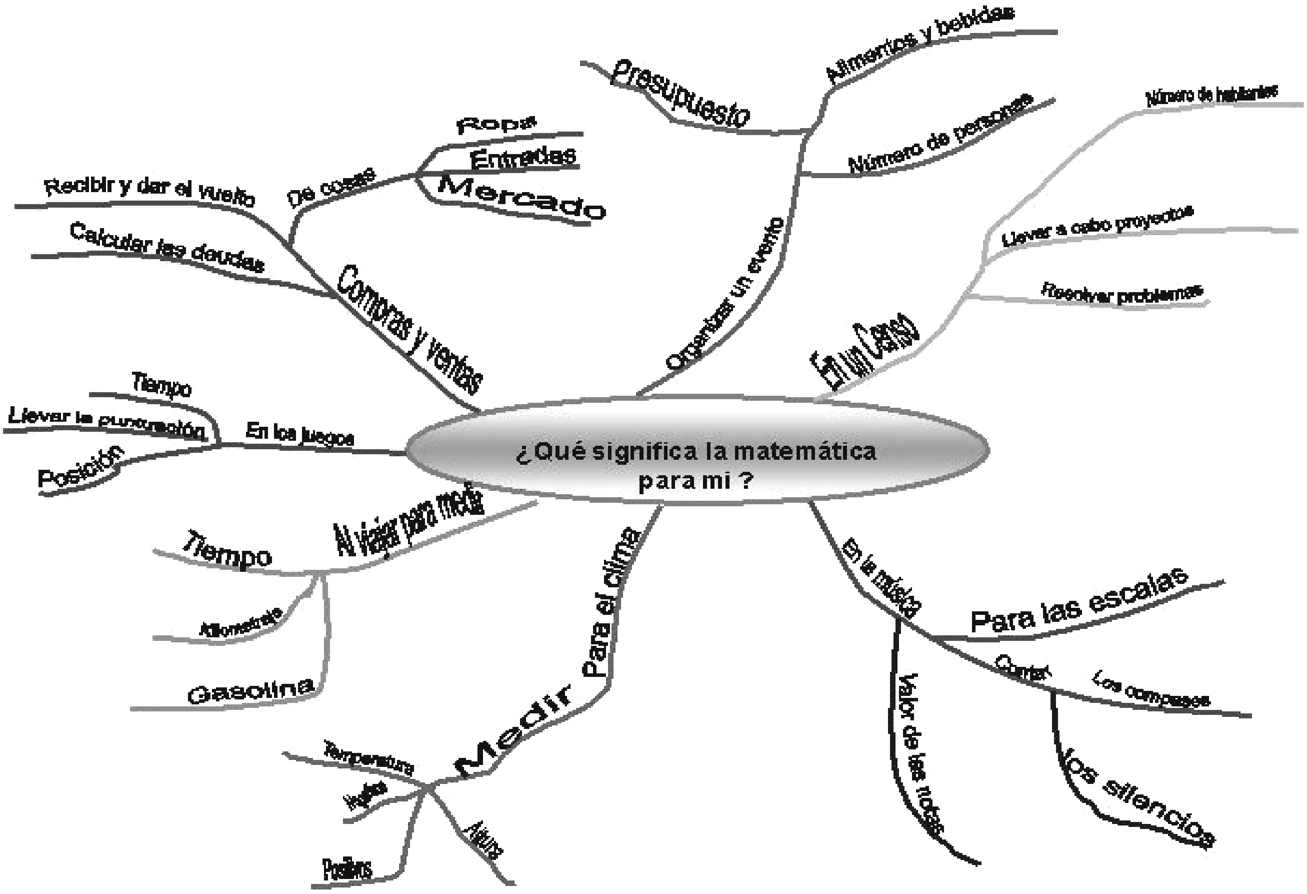
5.

CONSTRUCCIÓN Ecuación ordinaria e=1 lado recto Pd=PF DESCRIPCIÓN	Ax2+Dx+Ey+F=0 Regla y compás V(0,0) Excentricidad Eje focal 1 recta fija	Curva, plana, abierta Ax2+Bxy+Cy2+Dx+Ey+F=0 Dados el foco Dada la ecuación ECUACIONES V(h,k)
Concavidad Recta directriz, d 1 punto fijo Consta de una rama Representa una Y la directriz 1ª.,2ª.	Parábola Cuando el vértice es p>0, arriba 1 vértice, V Equidistan de la DEFINICIÓN calcular	Cóncava Ecuación general Eje paralelo A los coordenados Determinar Dominio, rango ELEMENTOS PRINCIPALES
PROPIEDADES Cumplen condición Indefinidamente Ecuación de la directriz Cy2+Dx+Ey+F=0 Valor del Foco y vértice	p<0, abajo ECUACIÓN DE 2do.GRADO Si B=0 y A=0 Vertical Horizontal Parámetro Equidistar de	1 foco, F Se extiende Si B=0 y C=0 Intersecciones Simetrías Y semiparámetro Puntos P(x,y)
Del plano La longitud Coordenadas Trazar la gráfica Cuatro posiciones	Ecuaciones contienen Del lado recto Del vértice Directriz LA PARÁBOLA	Al eje focal Localizar Y del foco Lugar geométrico Ecuación canónica

ACTIVIDAD IV. INTERPRETAR MAPAS MENTALES.

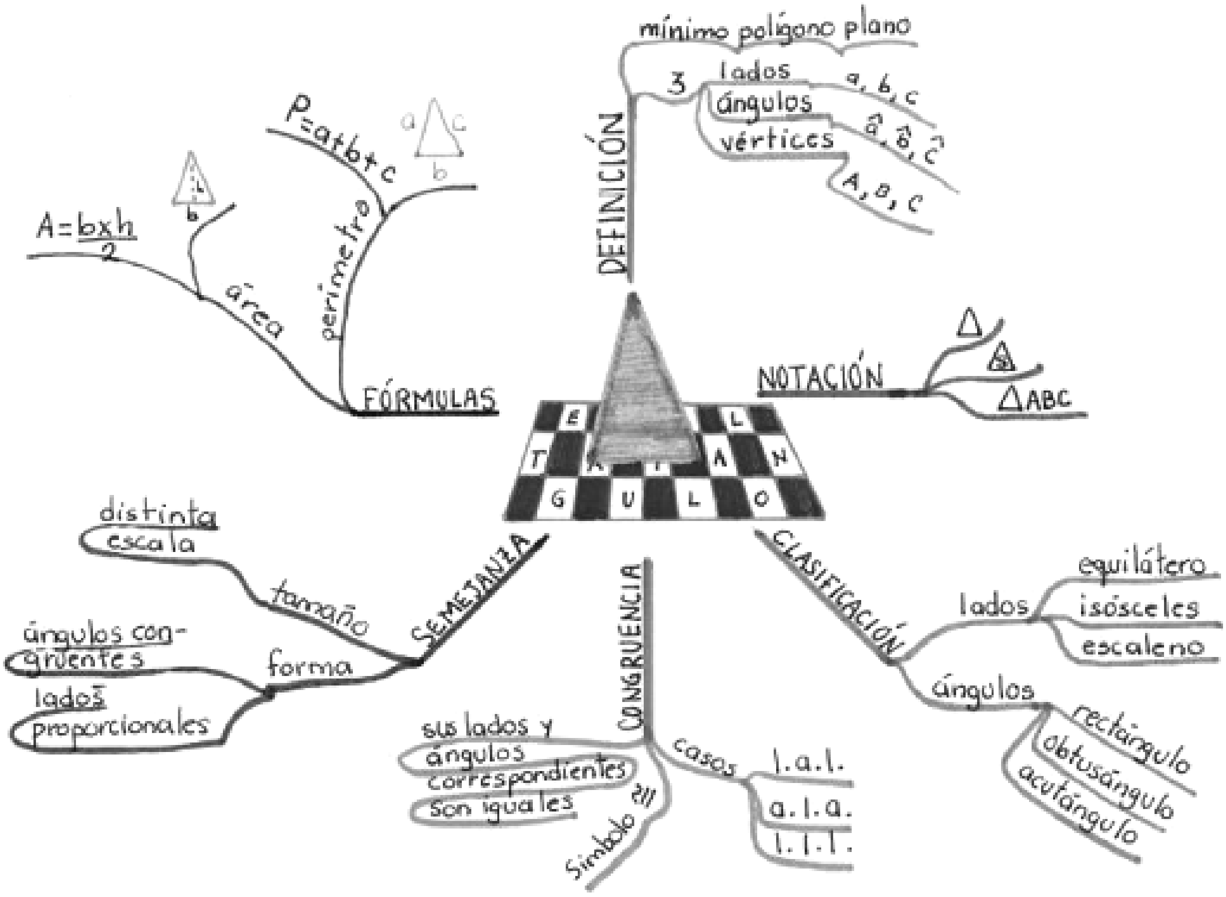
A continuación puedes ver varios mapas mentales ya terminados. Obsérvalos con cuidado, estúdialos bien y luego, sobre los renglones que hay debajo de ellos, escribe la interpretación del contenido o tema que muestra el mapa.

1. ¿QUÉ SIGNIFICAN LAS MATEMÁTICAS PARA MÍ?

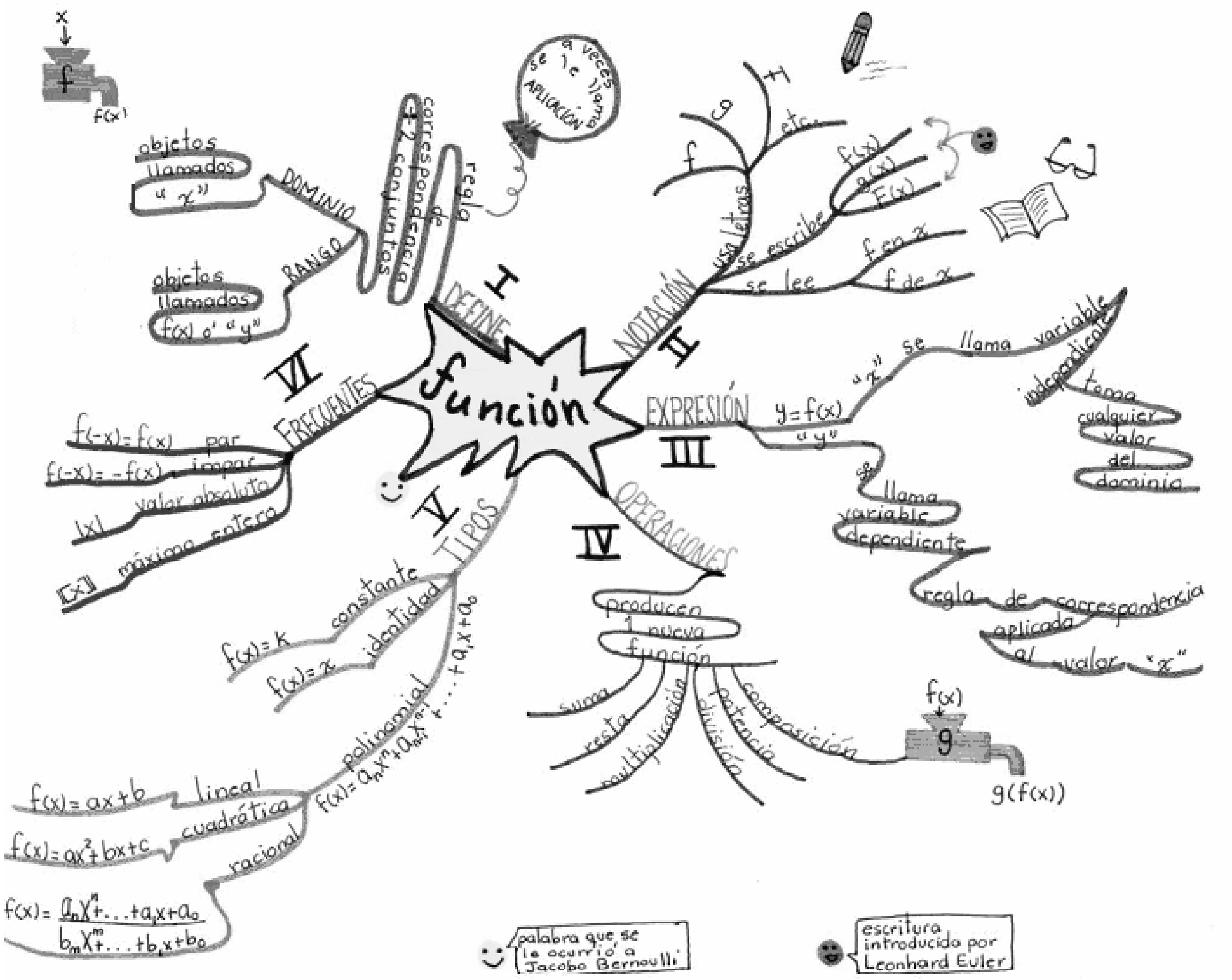


Fuente:http/conectando las matemáticas a la vida/Mónica Groshaus

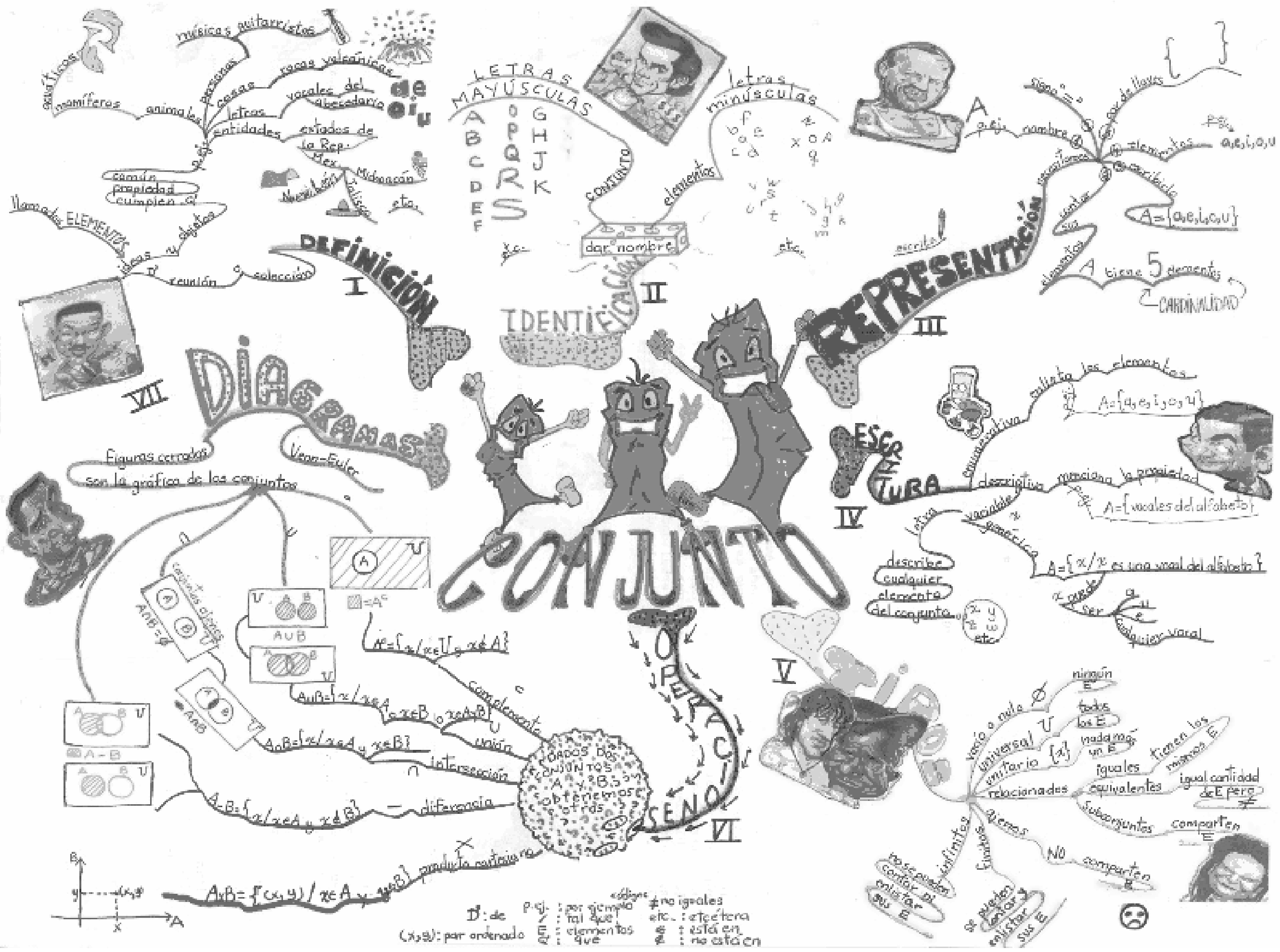
2. EL TRIÁNGULO



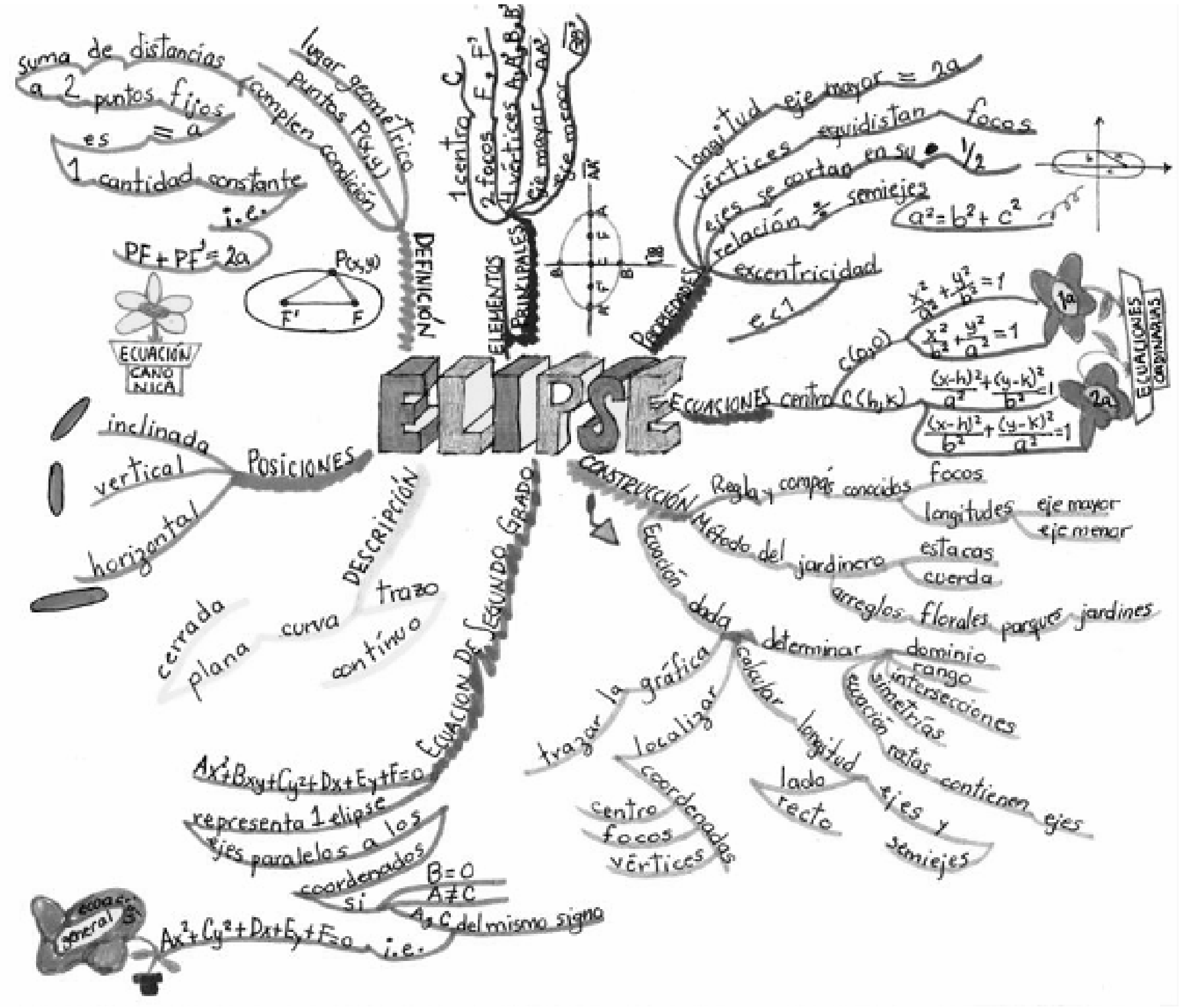
3. UNA FUNCIÓN



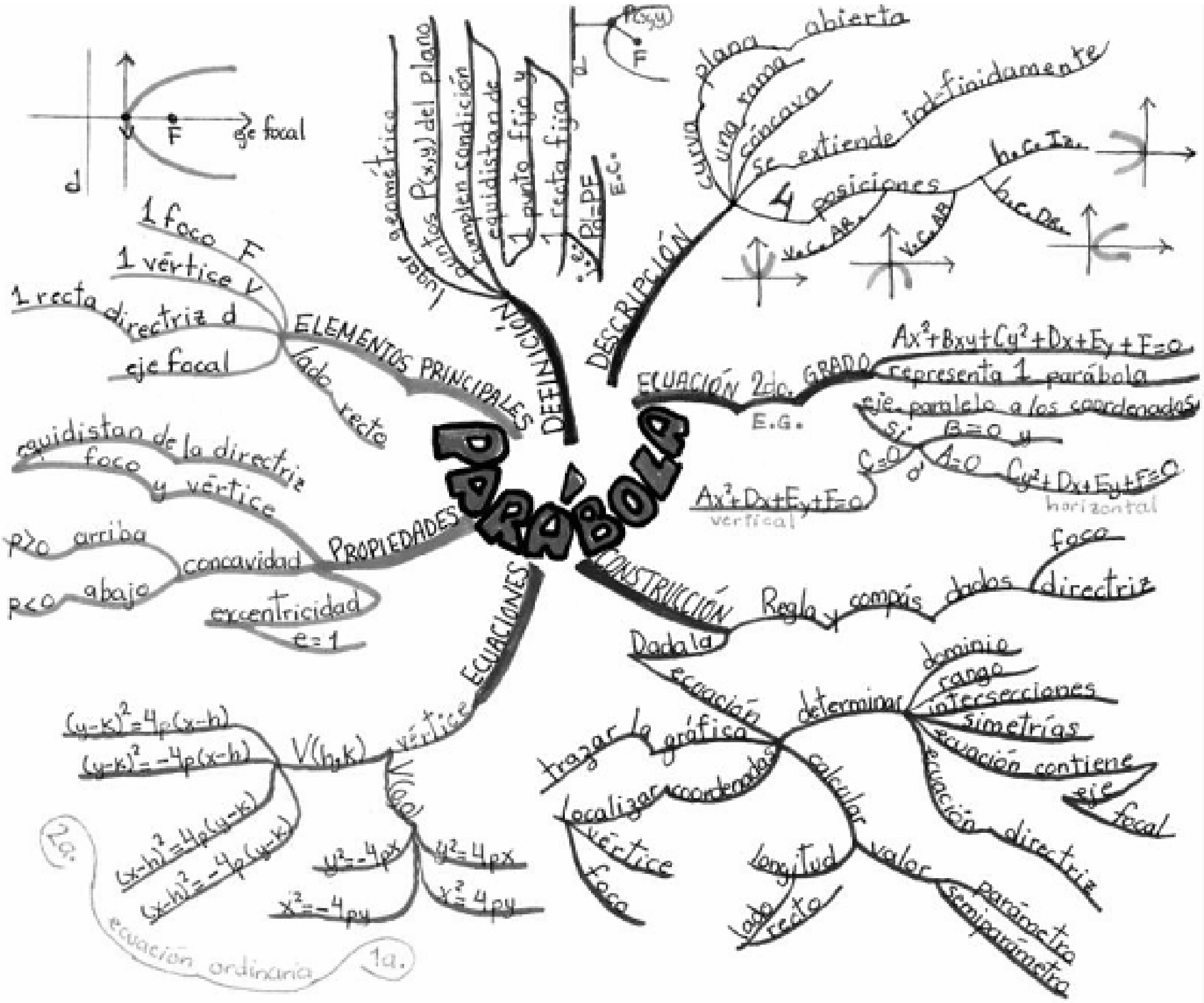
4. CONJUNTOS


CONJUNTO
I DEFINICIÓN
acuáticos
mamíferos
animales
personas
músicos guitarristas
cosas
rocas volcánicas
letras
vocales del abecedario
entidades
estados de la Rep. Mex.
Michoacán
Nuevo León
Jalisco
etc.
común propiedad cumplen
llamados ELEMENTOS
ideas u objetos
reunión
selección
II IDENTIFICACIÓN
LETRAS MAYÚSCULAS
A B C D E F O P Q R S G H J K
etc.
conjunto
dar nombre
elementos
letras minúsculas
etc.
III REPRESENTACIÓN
escrita
A
p.ej. nombre
signo "="
par de llaves { }
elementos
a, e, i, o, u
escritura
A = {a, e, i, o, u}
A tiene 5 elementos
CARDINALIDAD
IV ESCRITURA
enumerativa
enlista los elementos
A = {a, e, i, o, u}
descriptiva
menciona la propiedad
A = {vocales del alfabeto}
letra
variable
genérica
A = {x / x es una vocal del alfabeto}
x puede ser a, u, e, cualquier vocal
describe cualquier elemento del conjunto
x y z w etc.
V
vacío o nulo ∅
ningún E
universal U
todos los E
unitario {x}
nada más un E
relacionados
iguales
tienen los mismos E
equivalentes
igual cantidad de E pero ≠
subconjuntes
comparten E
ajenos
NO comparten E
infinitos
no se pueden contar ni enlistar sus E
finitos
se pueden contar y enlistar sus E
VI OPERACIONES
DADOS DOS CONJUNTOS A Y B, OBTENEMOS OTROS
complemento
A^c = {x / x ∈ U y x ∉ A}
unión
A∪B = {x / x∈A o x∈B o x∈A∩B}
intersección
A∩B = {x / x∈A y x∈B}
diferencia
A−B = {x / x∈A y x∉B}
producto cartesiano
A×B = {(x, y) / x∈A y y∈B}
VII DIAGRAMAS
Figuras cerradas son la gráfica de los conjuntos
Venn-Euler
U
A
= A^c
A∪B
A∩B
conjuntos ajenos
A∩B = ∅
A − B
B
y
(x, y)
x
A
D: de
p.ej. : por ejemplo
/ : tal que
E : elementos
q : que
(x, y): par ordenado
≠ no iguales
etc. : etcétera
∈ : está en
∉ : no está en

5. ELIPSE


ELIPSE
DEFINICIÓN
lugar geométrico
puntos P(x,y)
cumplen condición
suma de distancias
a 2 puntos fijos
es = a
1 cantidad constante
i.e.
PF + PF' = 2a
P(x,y)
F'
F
ECUACIÓN CANONICA
ELEMENTOS PRINCIPALES
1 centro C
2 focos F, F'
4 vértices A, A', B, B'
eje mayor AA'
eje menor BB'
AA'
BB'
PROPIEDADES
longitud eje mayor = 2a
vértices equidistan focos
ejes se cortan en su • 1/2
relación semiejes
a² = b² + c²
excentricidad
e < 1
ECUACIONES
centro
c(0,0)
x²/a² + y²/b² = 1
x²/b² + y²/a² = 1
C(h,k)
(x-h)²/a² + (y-k)²/b² = 1
(x-h)²/b² + (y-k)²/a² = 1
1a
2a
ECUACIONES ORDINARIAS
POSICIONES
inclinada
vertical
horizontal
DESCRIPCIÓN
curva
plana
cerrada
trazo
contínuo
ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO
Ax² + Bxy + Cy² + Dx + Ey + F = 0
representa 1 elipse
ejes paralelos a los
coordenados
si
B = 0
A ≠ C
A y C del mismo signo
i.e.
Ax² + Cy² + Dx + Ey + F = 0
ecuación general
CONSTRUCCIÓN
Regla y compás
conocidos
focos
longitudes
eje mayor
eje menor
Método del jardinero
estacas
cuerda
arreglos florales parques jardines
Ecuación dada
determinar
dominio
rango
intersecciones
simetrías
ecuación rectas contienen ejes
trazar la gráfica
localizar coordenadas
centro
focos
vértices
calcular longitud
lado recto
ejes y semiejes

6. PARÁBOLA


PARÁBOLA
d
V
F
eje focal
ELEMENTOS PRINCIPALES
1 foco F
1 vértice V
1 recta directriz d
eje focal
lado recto
DEFINICIÓN
lugar geométrico
puntos P(x,y) del plano
cumplen condición
equidistan de
1 punto fijo y
1 recta fija
PF=PD
E.C.
P(x,y)
DESCRIPCIÓN
curva
plana
abierta
una rama
cóncava
se extiende ind-finidamente
4 posiciones
h.c.Iz.
h.c.De.
v.c.Ab.
v.c.Ar.
ECUACIÓN 2do. GRADO
E.G.
$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$
representa 1 parábola
eje paralelo a los coordenados
si B=0 y
C=0
ó
A=0
$Cy^2+Dx+Ey+F=0$
horizontal
$Ax^2+Dx+Ey+F=0$
vertical
PROPIEDADES
equidistan de la directriz
foco y vértice
concavidad
P>0 arriba
P<0 abajo
excentricidad
e=1
CONSTRUCCIÓN
Regla y compás dados
foco
directriz
Dada la ecuación
determinar
dominio
rango
intersecciones
simetrías
ecuación contiene eje focal
ecuación directriz
trazar la gráfica
localizar coordenadas
vértice
foco
calcular
longitud lado recto
valor
parámetro
semiparámetro
ECUACIONES
vértice
V(h,k)
$(y-k)^2=4p(x-h)$
$(y-k)^2=-4p(x-h)$
$(x-h)^2=4p(y-k)$
$(x-h)^2=-4p(y-k)$
V(0,0)
$y^2=-4px$
$y^2=4px$
$x^2=-4py$
$x^2=4py$
2a.
1a.
ecuación ordinaria

4.4. Cómo evaluar el contenido de los mapas mentales.

El recorrido que hemos hecho a través de este trabajo ha permitido que nos demos cuenta de que los mapas mentales son expresiones personales que reflejan la manera particular en que un contenido determinado se ha percibido. Para evaluarlos debemos considerar las estrategias que los estudiantes utilizan al momento de hacer visibles sus pensamientos. De esta manera podemos tener una idea general de cómo han asimilado, comprendido y procesado la información.

Tocando el tema de la evaluación, Luisa Suárez y María García, dos profesoras venezolanas, de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador en Maracay, Venezuela, han elaborado un método para evaluar los mapas mentales, y éste considera las siguientes recomendaciones:[Sa]

1. Observar el mapa mental como una expresión particular de cada alumno sin pretender que en él aparezcan ideas tal y como las realizaría el profesor.
2. Detectar, utilizando diversas técnicas docentes, si el conocimiento del tema que se va a mapear es adecuado, así como, el conocimiento de las leyes de la cartografía mental.
3. Asegurarse de que los alumnos están totalmente familiarizados con la técnica de mapa mental.
4. Hacerle a los alumnos observaciones acerca de su progreso.
5. Establecer criterios flexibles para la calificación y dárselos a conocer a los estudiantes.
6. Considerar la singularidad de cada alumno. Cada mapa es diferente porque cada modo de pensar es diferente.
7. Cuando se observen fallas, hacer las observaciones por medio de preguntas específicas y sugerir al estudiante, mayor elaboración.
8. Evaluar de forma subjetiva para que la observación del profesor no cambie la realidad que aparece en el mapa mental.

Las profesoras Suárez y García también han realizado una tabla de evaluación para los mapas mentales, basándose en los cinco criterios siguientes: representatividad, análisis y síntesis, creatividad, ideas propias y cartografía.

A continuación veamos el documento que en 1999 fue presentado y preparado por las profesoras y que se ha estado utilizando en varias escuelas de Venezuela:

CRITERIOS PARA EVALUAR
UN MAPA MENTAL

El presente documento se utilizará para evaluación de un mapa mental construido por los estudiantes al lograr los objetivos____
____
____
de la unidad______ de la asignatura____________________________
del grado__________año__________semestre______________________.

Los criterios de evaluación son los siguientes:

1. Representatividad. Los estudiantes seleccionaron las teorías y conceptos fundamentales de la unidad temática que se va a estudiar.

2. Análisis y síntesis. Los estudiantes extrajeron de manera jerárquica las ideas ordenadoras básicas de la información.

3. Creatividad. Las estudiantes, al realizar el mapa, utilizan el punto anterior como trampolín para el pensamiento creativo.

4. Ideas propias. El estudiante establece conexiones entre teorías, conceptos y sus propias ideas.

5. Cartografía. Los estudiantes usan estrategias de la cartografía tales como: color, símbolos, flechas, imágenes, etcétera.

Para evaluar el mapa mental, se utilizará la siguiente escala de estimación:

Nivel alto: 4 puntos.
Nivel medio: 2 puntos.
Nivel bajo: 1 punto.

INSTRUMENTO PARA EVALUAR
MAPAS MENTALES

Identificación del mapa mental:

____

Escala de estimación:

ASPECTOS	NIVEL ALTO (4)	NIVEL MEDIO (2)	NIVEL BAJO(1)
Representatividad			
Análisis y síntesis			
Creatividad			
Ideas propias			
Cartografía (color, símbolos, etc.			
Suma integral	X1	X2	X3

Total (X1+X2+X3):=

Ubicación en las categorías de cada mapa mental de acuerdo al puntaje obtenido:

Excelente	Bueno	Regular	Malo
18-20	15-17	10-14	01-09

Resultado de la evaluación del mapa mental________________________
____
____
____

Autor____

Juicio cualitativo____
____

Para finalizar este capítulo, invito tanto a estudiantes como profesores a reflexionar un poco en lo siguiente: No olvidemos que somos personas y que la natural curiosidad de las personas es parte de lo que hace que descubramos cosas. Al descubrir cosas tendemos, automáticamente, a explorarlas y examinarlas, detectando así, características y detalles interesantes, peculiares y, por qué no, hasta asombrosos de ellas. Esto es una manera natural de adquirir y reforzar nuestros conocimientos.

La estructura de los mapas mentales explota nuestra curiosidad natural pues no sólo nos invita a explorarlos y examinarlos, sino también a descubrir en ellos errores o ideas inconclusas y, con esto, tendemos a corregirlos y completarlos aplicando para ello capacidades como la crítica, la reflexión, el análisis y la síntesis. De esta manera, la información que se haya en nuestra memoria fluye de modo claro en el momento en que tenemos que utilizarla pues ya tenemos una herramienta interesante que nos permite construirla o reconstruirla, analizarla y evaluarla, por tanto, con esta experiencia, obtenemos conocimiento verdadero y de largo plazo. Usemos pues, estas cualidades en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas, ¿por qué no?

CONCLUSIÓN

Tanto la idea como el punto de vista diferente que se propone para apoyar la enseñanza de las matemáticas y que he descrito en este trabajo, fue aplicado con tres grupos diferentes de estudiantes de bachillerato. Cabe mencionar que dichos grupos eran pequeños pues, en promedio, contaban con quince alumnos, lo cual me permitió poder introducir y adaptar la técnica de mapas mentales con comodidad a la vez que observar, a nivel individual, quienes la aceptaron pronto y quienes se resistieron más (esto, debido a la predisposición que les representaba el aceptar que la forma diferente de trabajar podría cambiar su opinión acerca de lo difícil, terrible e innecesario que es aprender y entender la matemática).

En un sondeo inicial, los mencionados alumnos tenían las siguientes percepciones y opiniones acerca de las matemáticas y sus experiencias con ellas:

1. Son difíciles.
2. No les entiendo nada.
3. El que las inventó, lo hizo para hacernos pasar malos momentos. Esa persona no tenía otra cosa que hacer.
4. Aunque intente entenderlas, no me entran.
5. No se me dan porque no soy genio.
6. Las odio porque mis maestros de la “secu”, en vez de explicarme, me insultaban y me hacían llorar.
7. Me desespero con tantos simbolitos raros.
8. Aunque sospecho que si forman parte de todo, no puedo entender de dónde salen tantas fórmulas y cosas como esas.
9. Es hacer cosas sin sentido. No me dicen nada.
10. No es cierto que representen algo. No lo creo. Son puras cosas que los maestros se sacan de la manga.

Lo anterior significa que estos estudiantes se hallaban predispuestos a tener que “aprender” más temas de matemáticas. Habían aceptado ya que iban a reprobar o, en el mejor de los casos, a alcanzar la mínima calificación aprobatoria, es decir, un seis.

Para poder enfrentar esta situación, el experimentar con una forma diferente de explicación y exposición de la clase de matemáticas que llamara la atención de los alumnos y les fuera además de novedosa, práctica (sin perder su carácter serio, formal), fue que me decidí a adaptar, introducir y usar la técnica de mapas mentales.

Una observación que me gustaría añadir es que los jóvenes estudiantes de estos grupos, no fueron avisados de que tendrían que trabajar con la técnica de mapas mentales y, mucho menos, se les dio un curso previo de elaboración de mapas. Más bien, fui introduciéndola poco a poco hasta que por sí mismos, los estudiantes se percataron de ello y fue hasta ese momento que les aclaré que la manera en que ellos habían estado recibiendo y creando conocimiento, la habían podido visualizar auxiliándose de diagramas visuales, llamados mapas mentales.

Así pues, **al introducir esta técnica, primero de manera inconsciente en las actividades en el aula y, luego, de forma explícita, me permite concluir que las intenciones por las cuales tome la iniciativa de experimentar con ella, fueron satisfechas. Más precisamente, lo que logré fue:**

1. **Interesar a mis alumnos en el tipo de pensamiento que traza mapas, es decir, el que nos impulsa generar ideas, a evaluarlas, relacionarlas, construir algo con ellas y a exteriorizar lo obtenido.**
2. **Que entrenaran su pensamiento para darle flexibilidad, es decir, que se sintieran capaces de pasar de casos particulares a generales (inducción) y de casos generales a particulares (deducción).**
3. **Que, sin temor a equivocarse, aportaran ideas, propuestas y opiniones respecto del tema que se exponía.**
4. **Que desecharan sus prejuicios y malas experiencias con las matemáticas.**
5. **Que se dieran cuenta de que los resultados y conceptos de temas precedentes son pieza clave en los subsecuentes.**
6. **Que construyeran y reconstruyeran conceptos y fórmulas dándole importancia a sus intuiciones.**

7. **Que aprendieran a distinguir la diferencia entre conceptos, algoritmos y procedimientos.**
8. **Que fueran capaces de describir y explicar, en lenguaje habitual, resultados y deducciones llevados a cabo en el ambiente abstracto del pensamiento y lenguaje matemático.**
9. **Que ayudándose del diagrama visual, radial, sintetizaran resultados, es decir, que plantearan concretamente la información conocida y cómo se relaciona con otra y cómo, al manipular ambas, se transforma en algo nuevo.**
10. **Que al presentarles expresiones algebraicas fueran capaces de relacionarlas con la imagen correspondiente (gráfica) y dijeran su nombre y características (ejemplo, $y=x^2$ representa una parábola con vértice en el origen y que abre hacia arriba).**
11. **Que al presentarles una gráfica en el plano cartesiano, fueran capaces de relacionarla con la expresión algebraica correspondiente o, en su defecto, construirla.**
12. **Que percibieran que varios ejemplos o casos concretos, los podemos generalizar con ayuda del pensamiento y lenguaje matemático.**
13. **Que aprendieran de sus errores y tuvieran paciencia al trabajar con abstracciones.**
14. **Que sintieran confianza en sí mismos.**
15. **Que acudieran a clase por convicción y no por obligación.**

Al apoyar mi clase con la creación y diseño de mapas mentales puede ayudar a mis alumnos a visualizar las rutas utilizadas para “escudriñar en algo”, para averiguar a profundidad más acerca de lo que se pedía. Estos diseños fueron propiamente la manifestación física de sus intuiciones y deducciones. Eran una referencia de las estrategias a seguir para luego, poder actuar.

Sin duda, los quince puntos expuestos pueden parecer utópicos, más no es así.

Aunque es difícil demostrar tan sólo con las líneas escritas en un texto, los logros de una experiencia de la vida real, quiero defenderlos y reforzarlos agregando que éstos, son el resultado de un experimento que, además, requirió de mucha paciencia, dedicación, autocontrol (pues los cambiantes estados de ánimo de los adolescentes son una variable que interfiere, en ocasiones, con los propósitos planteados) y, sobre todo, de encontrar una fase previa para captar el interés de los jóvenes en el estudio de la matemática del bachillerato, esto significa que hube de dirigirme a ellos con un trato comprometido y humano.

APÉNDICE
DETALLES DE MATERIAL DE SOFTWARE.

En esta lista se describen algunos programas que sirven para realizar mapas mentales en la computadora.

a) Mind Manager. Es un programa que cuenta con funciones como: tormenta de ideas, herramientas para pasar desde un mismo mapa a formato de Word, Power Point, Project y elaboración de hojas web. Es un programa que ayuda rápidamente al usuario debido a su fácil uso y funcionalidad.

Para más detalles, podemos consultar la página web: http://www.hookedonmindmanager.com.

b) Mind Mapper. Este programa permite dibujar mapas mentales utilizando primordialmente texto. Los componentes gráficos pueden manipularse, imprimiendo el mapa y el texto. La idea principal va en el centro y las ramas van saliendo del mismo, pueden colorearse así como crearse sub-ramas de ramas. Es útil para niños debido a su fácil manejo.

Detalles en la siguiente página web: http//www.ozemail.com.au/-caveman/Creative/Software/Mind_Mapper.htm

c) Axon Idea Processor. Está basado en las ciencias cognoscitivas (psicología, antropología, lingüística, filosofía, ciencias de la computación, neurociencias). En su editor muestra las conexiones explícitamente, aprovecha los atributos visuales como la forma, el color, el tamaño, la profundidad, la posición; la sombra, los iconos, etcétera.

http///www.ozemail.com.au/-caveman/creative/Software/axon.htm

d) Concept Draw MindMap. Es un programa que utiliza la técnica de tormenta de ideas y el pensamiento visual. Existen varias versiones para los ambientes Windows y equipos Mac.

http://www.conceptdraw.com

e) NovaMind 1.1.1. Es un software que corre de manera nativa en equipos Mac. La interfaz es agradable y flexible. sus funciones están centradas exclusivamente para el desarrollo de mapas mentales. Se pueden agregar figuras, símbolos o dejar solamente texto a cualquiera de las ramas. Las notas para cada idea están siempre disponibles con sólo hacer “clic” sobre ella.

http://www.nova-mind.com

La variedad de material de cómputo diseñado para la creación de mapas mentales es vasta. Los anteriores son algunos de los más comerciales, sin embargo, se pueden dibujar mapas mentales en otros programas procesadores de dibujo, imágenes y texto como Paint, Power Point, Corel Draw, Micrografix Windows Draw, Imagine for Windows, etcétera.

BIBLIOGRAFÍA

[Al]Alic, Margaret.(1991), El legado de Hipatia, México, Siglo XXI.

[An]Anfossi, Agustín.(1993), Cálculo diferencial e integral, México, Progreso, parte 1, cap.1.

[Ar]Arbib, Michael A.(1982), Cerebros, máquinas y matemáticas, Madrid, Alianza.

[Ba]Bajo, M. T. y Cañas, J. J.(1991), Las imágenes mentales, Madrid, Alianza.

[Bo]Boggino, Norberto.(1998), ¿Problemas de aprendizaje o aprendizaje problemático?, Rosario, Homo Sapiens.

[Bu1]Buzán, Tony.(1996), El libro de los mapas mentales, Barcelona, Urano.

[Bu2]Buzán, Tony.(1993), Cómo utilizar su mente, Bilbao, Deusto.

[Ca]Castelnouvo, E.(1970), Didáctica de la matemática moderna, México, Trillas.

[Co]Collete, Jean-Paul. Historia de las matemáticas, México, Siglo XXI, vol. I,II.

[F-T]Fuller, G. y Tarwater, D.(1999), Geometría Analítica, México, Pearson Educación.

[Ga]Gattengo, Caleb.(1981), Cuadernos de educación matemática No.4, La pedagogía de las matemáticas, México, Facultad de Ciencias, UNAM.

[Gu1]Guzmán, Miguel de. Cómo trabajar en matemáticas. Artículo publicado en Internet. http:/platea.pntic.mec.es/aperez/miguel/artículos.htm

[Gu2]Guzmán, Miguel de.(1983), Algunos aspectos insólitos de la matemática. El papel de la visualización. Revista investigación y ciencia del mes de febrero, pp.100-108.

[Ha]Hampton-Turner, C.(1981), Maps of the mind, Nueva York, Collier Books.

[He]Heller, Miriam.(1998), El arte de enseñar con todo el cerebro, Caracas, Distribuidora de estudios.

[Ko]Kosslyn, S. M.(1986), Capacidad de formar imágenes, Barcelona, Labor.

[Lo]López Puig, Anna.(1997), Fracaso escolar en el aprendizaje de las matemáticas: un enfoque constructivista, Universidad de Cadiz: Fundación Los Pinos.

[Ma-Mo]Mayor, J. y Moñivas, A.(1992), Representación mental e imágenes mentales, Madrid, Alhambra Universidad.

[Or]Ortells, Juan José.(1996), Imágenes mentales, Barcelona, Paidós.

[O-L-G-R-H]Oteyza, Lam, Gómez, Ramírez y Hernández.(1994), Geometría Analítica, México, Prentice Hall.

[Pe]Perl, Teri.(1978), Biographies of women mathematicians, México, Addison Wesley.

[R-S]Ramírez, Ana Irene y Sienra, Guillermo.(2000), Ivitación a las geometrías no ecuclidianas, México, Facultad de Ciencias, UNAM, caps. 1,2.

[R-B]Rey, J. y Babini, José. Historia de la matemática, Gedisa, vol. 1,2.

[Sa]Sambrano, Jazmín.(2000), Mapas mentales: agenda para el éxito, México, Alfa Omega.

[S-C1]Santaló, Marcelo y Carbonell, Vicente.(1993), Geometría analítica, México, Porrúa.

[S-C2]Santaló, Marcelo y Carbonell, Vicente.(1993), Cálculo diferencial e integral, México, Porrúa, lección 1.

[So]Sorondo Muzás, José María. Matemáticas en tu mundo. Artículo publicado en Internet. http/es.geocites.com/mundo_matemáticas/mapa.htm

[St]Struik, Dirk J. Historia concisa de las matemáticas, IPN, serie Ciencia y Tecnología.

[Y]Yates, Frances A.(1974), El arte de la memoria, Madrid, Taurus.