



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**SIMULACIÓN DE GRANDES ESCALAS
DE UN CHORRO REDONDO**

**T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO MECÁNICO
P R E S E N T A:
DAVID IVÁN RAMÍREZ REBOLLAR**

ASESOR: DR. MARTÍN SALINAS VÁZQUEZ



MÉXICO CIUDAD UNIVERSITARIA 2006



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

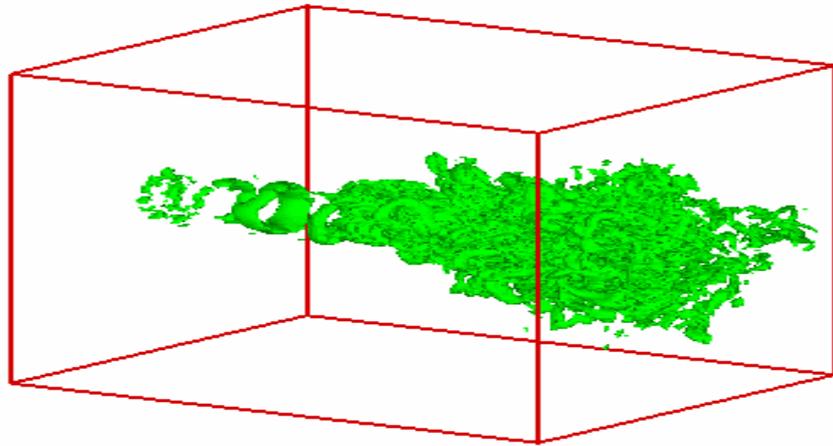
El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**SIMULACIÓN DE GRANDES ESCALAS
DE UN CHORRO REDONDO**



TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO MECÁNICO PRESENTA:

DAVID IVÁN RAMÍREZ REBOLLAR

ASESOR: DR. MARTÍN SALINAS VÁZQUEZ

MÉXICO CIUDAD UNIVERSITARIA 2006



Agradecimiento

A mis padres:

Por compartir mi sueño, es difícil encontrar las palabras precisas para agradecer todo lo que han hecho por mí, ya que sin su esfuerzo, consejo y amor no sería la persona que soy, sólo puedo decirles que los amo con todo mi corazón y que siempre estarán en mi pensamiento. GRACIAS.

A una persona muy especial Carmen:

Por estar siempre junto a mí, eres un tesoro, gracias por todo tu apoyo tanto personal como sentimentalmente, sin ti nada sería lo mismo, eres parte fundamental en este sueño.

A mis hermanos:

A Yadira por ser un ejemplo a seguir, siempre con un consejo y palabras de aliento para seguir adelante, nunca cambies, a Juan por ser un excelente e incondicional amigo, sigue adelante.

A mis profesores:

Martín y William, por su paciencia, dedicación y conocimiento, pero sobre todo por ser unos buenos amigos conmigo.

A la Facultad de Ingeniería:

Por brindarme la formación académica necesaria para sobre salir en la vida, por permitirme adquirir conocimiento de todos mis profesores, los cuales siempre estuvieron dispuestos a brindarme su apoyo, por darme la oportunidad de conocer a excelentes personas como son todos mis compañeros y amigos, mención a parte para Omar.

A la UNAM:

*Por permitirme formar parte de tu grandeza, no me queda más que corresponderle siendo una excelente persona para seguir dejando tu nombre escrito con letras de Oro y en lo más alto,
GRACIAS.*

“Por mi Raza Hablará el Espíritu”

Esta tesis fue apoyada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, siendo parte del proyecto:

CONACYT-SEMARNAT-2002-C01-148.

ÍNDICE

Resumen.....	I
Objetivos.....	IV

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN

1. Antecedentes.....	1
2. Características de un chorro.....	11
3. Naturaleza de la turbulencia.....	14

CAPÍTULO II ECUACIONES DE GOBIERNO EN LA MECÁNICA DE FLUIDOS

1. Simulación de grandes escalas.....	19
2. Ecuaciones en coordenadas generalizadas.....	26

CAPÍTULO III ESQUEMA NUMÉRICO

1. Aproximación de la primera derivada.....	28
2. Características del filtro matemático.....	30
3. Tiempo de integración.....	34
4. Métodos de Runge - Kutta de tercer y cuarto orden.....	35

CAPÍTULO IV CARACTERÍSTICAS NUMÉRICAS

1.	Condiciones iniciales y de frontera.....	38
2.	Dominio computacional.....	42
3.	Amortiguación en la salida del dominio computacional.....	44

CAPÍTULO V RESULTADOS

1.	Estructuras turbulentas tridimensionales del flujo.....	47
2.	Visualización de contornos.....	55
3.	Estudio estadístico en la zona de auto semejanza.....	64

CONCLUSIONES.....	76
--------------------------	-----------

APÉNDICE I.....	79
------------------------	-----------

REFERENCIAS.....	93
-------------------------	-----------

RESUMEN

Dentro de los problemas que estudia la mecánica de fluidos, existe uno con gran valor científico, tecnológico y de aplicación. Este problema se trata de la turbulencia que la mayoría de los fluidos alcanzan, en particular en este trabajo se estudió un chorro redondo que ayudó a comprender el comportamiento que tienen este tipo de flujos en la realidad.

La aplicación de este tipo de fenómenos se observa en casos como son, procesos de mezclado, transferencia de calor, combustión, propulsión, flujos ambientales, entre otros, debido a que los chorros están presentes en este tipo de fenómenos y el conocer su comportamiento lo más cercano posible a la realidad es el objetivo principal de esta simulación de grandes escalas, dicha simulación controla las características dinámicas del flujo y con esto se obtienen resultados que nos permiten hacer mejoras en los procesos anteriormente citados.

En la literatura existen trabajos que implican simulaciones numéricas parecidas a la desarrollada en la presente investigación, esta tesis se apoyó en esos trabajos para poder determinar la validación del código numérico utilizado para representar este tipo de fenómenos. Es importante mencionar que la validación está sustentada en la teoría de autosemejanza para chorros, ya que ésta se reduce al estudio del comportamiento de este tipo de fenómenos en la zona de turbulencia completamente desarrollada, ya que en esta zona se manifiesta un perfil universal para todos los chorros, que presenten las mismas propiedades físicas.

Existen diversos métodos de solución para este tipo de fenómenos, entre los cuales destaca la simulación de grandes escalas (LES), debido a que esta simulación nos ayudó a recrear la dinámica de un chorro redondo, con aproximación a la realidad, sin perder información valiosa del flujo, que nos permita tener resultados más precisos.

La importancia de este método de solución es la manera como se obtuvieron los resultados, ya que sólo el movimiento de las escalas mayores de la turbulencia con respecto al tamaño de la celda es calculado explícitamente, mientras que las escalas menores a las celdas (escala sub-malla) son modeladas. El efecto de las pequeñas escalas en la resolución final debe ser adecuado mediante un modelo de escala sub-malla, por lo que dichas escalas tienen efecto sobre las escalas de mayor tamaño, con esto se lograron obtener mejores resultados.

La validación del código numérico empleado se realizó haciendo un estudio del comportamiento del chorro redondo. En primera instancia, se hizo un estudio visual, con el cual se obtuvo el comportamiento del chorro de manera tridimensional, a través de iso-superficies vistas con el criterio "Q" (segundo invariante del tensor gradiente de velocidad) y el criterio de "Presión" (Isobáricas), el segundo método de comparación visual fue el de contornos de las principales magnitudes como son la velocidad longitudinal y los esfuerzos de Reynolds por la influencia que tienen estos sobre el chorro y por último el tercer método de comparación empleado fue el estudio estadístico el cuál nos permitió conocer la

importancia de la zona de autosemejanza en los flujos denominados como chorros.

La comparación de los resultados estadísticos entre este trabajo y los encontrados en la literatura fue determinante para conocer la calidad y la capacidad del código para representar el chorro redondo y de esta manera poder extrapolarlo a otro tipo de fenómenos con características similares.

OBJETIVOS:

Validar el código numérico utilizado para representar un chorro turbulento con salida redonda, comparando rigurosamente los resultados que se obtengan y datos experimentales.

Estudiar estadísticamente el comportamiento turbulento del chorro redondo para que la técnica utilizada: "Large Eddy Simulation" pueda ser extrapolado a otros casos similares pero con distintas condiciones iniciales o de frontera. Este estudio se complementara con la visualización de estructuras turbulentas y contornos de diferentes variables como son: la velocidad y la presión.

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN

I.1. Antecedentes

Los chorros están presentes en diversos fenómenos ambientales e industriales, como lo son por ejemplo la mejora de procesos de mezclado, transferencia de calor, combustión, propulsión, flujos ambientales, entre otros.

Se realiza este estudio de Simulación de Grandes Escalas (LES) con el fin de conocer mejor su comportamiento en estado turbulento.

Este trabajo tiene un doble objetivo: Realizar estudios estocásticos de la turbulencia y por otra parte aplicar estos conocimientos en condiciones reales.

Por mucho tiempo la turbulencia se ha definido como un campo de vorticidades, circunstanciales y desordenadas, pero algunos experimentos han demostrado lo contrario, debido a que se ha podido observar que las fluctuaciones de vorticidad no son tan aleatorias o caóticas como se ha manejado.

Dentro de las características más trascendentes de los flujos turbulentos podemos citar las siguientes: continuidad, difusividad, altos números de Reynolds, disipación, vorticidad fluctuante, entre otras.

La característica estadística juega un papel fundamental dentro de un flujo turbulento, ya que el estudio del flujo depende fuertemente de esta.

Cuando todos los valores estadísticos del flujo son independientes de la posición en el espacio, se dice que la turbulencia es **homogénea**. Cuando el flujo es independiente de la orientación, traslación y rotación del sistema de ejes escogido, se le denomina como **isotrópica**. En el caso de que la turbulencia sea homogénea, la energía se transfiere de los remolinos grandes de baja frecuencia a vórtices más pequeños de alta frecuencia, hasta que finalmente se disipa como calor por fricción viscosa.

En algunos casos, la turbulencia no es homogénea ni isotrópica, como en la turbulencia por cortante, donde la intensidad de las fluctuaciones de velocidad en dirección de la corriente es mayor que la intensidad de las fluctuaciones en otras direcciones.

Un aspecto importante dentro del estudio de flujo de fluidos surge a partir de que una estructura del flujo deja de ser laminar, para alcanzar la turbulencia, esto surge del hecho de que dicho flujo ha alcanzado su número de Reynolds crítico (Re_{cr}).

Cuando los flujos alcanzan números de Reynolds ligeramente mayores al citado valor crítico (Re_{cr}) pierde la naturaleza laminar y pasa a una nueva etapa caracterizada por un comportamiento de periodos breves de flujo en régimen turbulento, alternados con periodos lentos o laminares, por lo que podemos decir que antes de alcanzar la “turbulencia completamente desarrollada” se tiene una etapa de transición del flujo, por lo que la turbulencia es una etapa progresiva y no abrupta, como se observa en la figura 1.1.

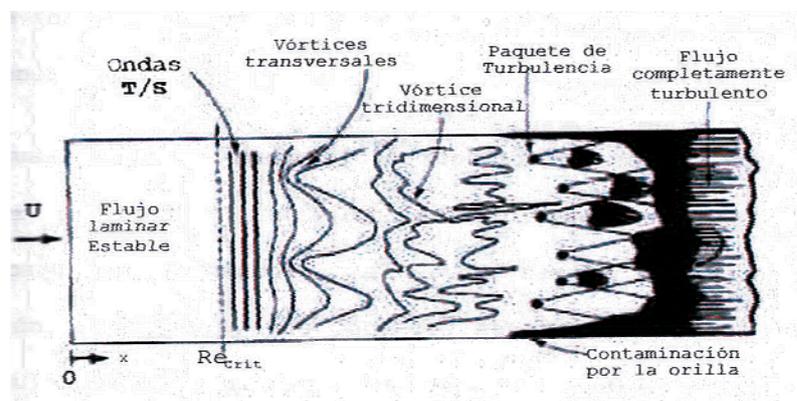


Figura 1.1. Desarrollo de un flujo sobre una placa a la turbulencia desarrollada.

La figura 1.1 muestra a un flujo sobre una pared. Al aumentar sus esfuerzos inerciales pierde el régimen laminar después de que alcanzó el número crítico de Reynolds ($Re_x = R_{cr}$). En este momento el fluido entra en la etapa de transición donde aparecen las ondas T-S (Tollminen – Schlichting), que son perturbaciones en la dirección perpendicular al flujo.

Aguas abajo, con el aumento de número de Reynolds ($Re_x > R_{cr}$) y con cualquier perturbación en el flujo, las ondas T–S transversales comienzan a perder estabilidad y su forma original. En esta nueva etapa transitoria comienza a aparecer una

componente de la vorticidad en la dirección del flujo. Si se aumenta un poco más el Re_x , lo que se observa es la desaparición de la estructura unidireccional del flujo. Esto es, que tanto la velocidad y la vorticidad se vuelven variables tridimensionales.

Aguas abajo en dicho flujo, con Re_x mayor, comienzan a aparecer compuestos de turbulencia completamente desarrollados. Estos compuestos o paquetes crecen en su tamaño y frecuencia de aparición. Finalmente, los compuestos se unen y se progresa así la llamada zona de turbulencia completamente desarrollada.

Los flujos turbulentos siempre ocurren a elevados números de Reynolds. La turbulencia se origina como una inestabilidad de los flujos laminares cuando el efecto de las fuerzas viscosas son poco importantes comparadas con el de las fuerzas de inercia. La interacción entre los términos viscosos y los términos no lineales que representan a dichos efectos en las ecuaciones de movimiento es muy compleja.

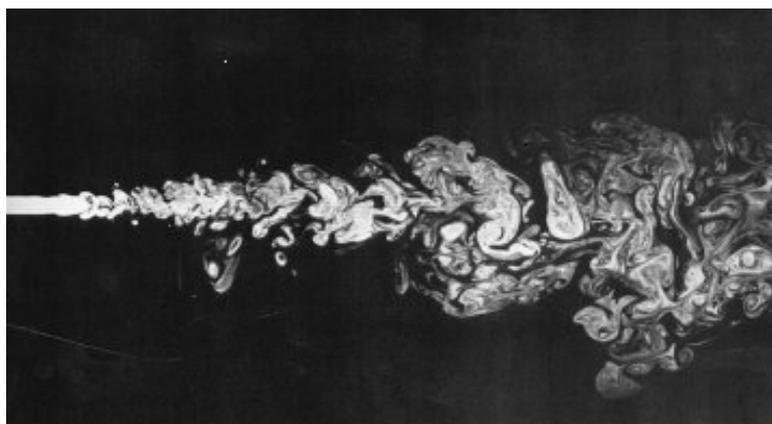


Figura 1.2. Flujo turbulento

Una vez que se ha determinado la dificultad de analizar y describir a los flujos turbulentos, por medio de funciones matemáticas de relativa sencillez como son las empleadas para flujo laminar, se requiere utilizar otras herramientas, como son la estadística y la probabilidad que nos ayuden a entender, estudiar y describir los flujos turbulentos.

En esta tesis se utilizó el concepto de promedio temporal, lo que ayudó para comprender la turbulencia en un chorro, la cual consiste en considerar una variable cualquiera, por ejemplo f como función del tiempo (t), su promedio temporal esta definido como:

$$\bar{F} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

donde T es el intervalo de tiempo transcurrido desde el tiempo inicial (t_0).

De acuerdo a la descomposición de Reynolds, cualquier variable, fluctuante o no, puede describirse por medio de su promedio en el tiempo al separar las variables en dos componentes: una estacionaria y otra fluctuante; por ejemplo la velocidad instantánea en cierto punto se puede expresar como $V(t) = \bar{v} + v'(t)$; donde \bar{v} es el promedio temporal v' es la componente fluctuante de la velocidad.

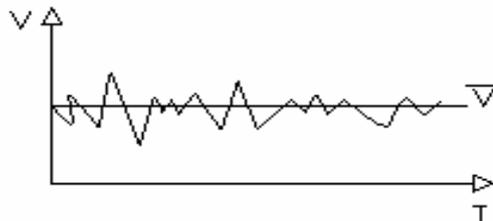


Figura 1.3. Representación grafica del promedio temporal.

La mayoría de los trabajos de investigación y experimentos que se han realizado se desarrollan en forma empírica, ya que el entender la dinámica de flujos turbulentos es demasiado compleja, dichos estudios se basan en la cuantificación y recopilación de sus propiedades estadísticas.

Gracias a estas investigaciones y experimentaciones en décadas pasadas, se han logrado medir los campos principales y los fluctuantes de la región de autosemejanza del chorro. Estos campos son fuertemente afectados por las condiciones iniciales de salida del chorro; en el caso de esta tesis tuvimos una salida redonda, además de condiciones de frontera especiales para este tipo de experimentos que ayudaron a representar de mejor manera el fenómeno sin tener que perder información valiosa durante la simulación numérica, ya que éstas afectan la transición del flujo en espacio y tiempo. Dichos trabajos han servido para observar que cuando aparece un flujo auxiliar con la misma dirección longitudinal que la velocidad principal que presenta el chorro, llamado “coflow”, se produce un efecto que retarda la evolución del chorro hacia su estado de turbulencia completamente desarrollada, conocida también como la zona de autosemejanza.

Esta zona de autosemejanza ha sido considerada de gran importancia por su fácil generalización, gracias a que es posible medir el comportamiento de cualquier chorro turbulento mediante los campos de la velocidad fluctuante (rms), la tasa de dispersión del chorro y la disminución de la velocidad en la línea central.

Una vez que se encontró cierta coherencia en las estructuras turbulentas, el problema es aplicar métodos de cálculo sencillos que nos lleven a buenas aproximaciones y ayuden a comprender de mejor manera el comportamiento del flujo. Para esto se ha recurrido a algunos sistemas de solución, los cuales ayudan para poder comprender la naturaleza de la turbulencia, aunque es indudable que cada uno de estos tiene sus ventajas y desventajas.

La primera solución se plantea con ayuda de los llamados “modelos de turbulencia” conocidos como **RANS** (por su siglas en inglés Reynolds Average Navier Stokes equations), los cuales consisten en promediar las fluctuaciones turbulentas y resolver ecuaciones para valores medios de las propiedades del fluido de la forma $\nabla(\overline{\phi'v'})$. Matemáticamente, este término representa las correlaciones entre las fluctuaciones de velocidad y las de la variable ϕ . Físicamente, el término es la convección media de ϕ debido a las fluctuaciones turbulentas. Estos modelos responden a las necesidades industriales conocidas con un margen de error permitido dentro de la solución de problemas de ingeniería aplicada (15% - 20%). Con dichos resultados se puede extrapolar una buena solución, pero estos métodos no son útiles para conocer situaciones nuevas o de carácter de investigación, debido a que la mejora que se obtiene no va más allá a la de la práctica habitual.

El otro extremo de las posibilidades, es recurrir a las simulaciones más exactas y directas del movimiento del fluido, o sea a las ecuaciones de Navier-Stokes sin aproximaciones (perfectamente válidas para flujo turbulento y laminar). Este método

es conocido como “simulación numérica directa” (**DNS** por sus siglas en inglés). Entonces, el problema en este tipo de simulación se genera por el gran número de grados de libertad que genera el flujo turbulento, lo que nos lleva al uso de un gran número de variables numéricas. Con ayuda de estos métodos de solución se puede comprender de mejor manera el fenómeno siempre y cuando se logre simular el flujo correctamente.

Existe una inconveniente en esta alternativa de simulación (DNS) y es que la discretización debe de resolver todas las escalas espaciales y temporales y la relación entre las escalas más grandes y las más pequeñas. Se deduce que el número de puntos en la discretización (nodos espaciales por intervalos temporales) crece con número de Reynolds elevados prácticamente al cubo, por lo que estas simulaciones se tienen que limitar a números de Reynolds relativamente bajos. Otro inconveniente de este tipo de simulaciones es el costo, ya que se requiere de mucho tiempo y memoria de cálculo, por lo que una falla en cualquier sentido es determinante para el éxito o fracaso de esta simulación.

La simulación DNS ha sido bastante útil, ya que se ha podido comprobar que con las condiciones iniciales en el campo de flujo se provocan algunos efectos en el desarrollo de los campos turbulentos y los resultados son similares en la turbulencia totalmente desarrollada, al alcanzar el estado de autosemejanza.

Pero existe un paso intermedio entre las dos simulaciones descritas anteriormente que es la *simulación de grandes escalas* (**LES** por su siglas en inglés).

Este método depende fuertemente de la correcta representación de la relación grandes/pequeñas en las escalas.

La turbulencia tiene un problema clave dentro de su estudio, el cual es la relación existente entre las grandes escalas y las pequeñas escalas. Este problema fue tratado desde los primeros trabajos de Kolmogorov (1941).

Kolmogorov plantea la hipótesis de la “universalidad de las pequeñas escalas”, con la idea de que existe cierto grado de independencia entre las escalas grandes y las pequeñas a altos números de Reynolds.

Este supuesto es fundamental en la teoría de la turbulencia, la cual desde entonces ayuda a modelar y entender los flujos turbulentos. Sin embargo, estudios rigurosos y extensos en las últimas décadas, tanto experimentales como numéricos o teóricos, los cuales mostraron que no siempre las grandes escalas muestran independencia de las pequeñas escalas o viceversa, aún con flujos con altos números de Reynolds, siendo este el tema clave para *la simulación de grandes escalas (LES)*.

Se debe hacer notar como se obtiene los resultados en la simulación que llevaremos a cabo dentro del desarrollo del trabajo. De hecho, en el modelo LES sólo el movimiento de las escalas mayores al tamaño de la celda se calcula explícitamente, mientras que las escalas menores a las celdas (escala sub-malla) no son calculados. El efecto de las pequeñas escalas en la resolución final debe ser

adecuado mediante un modelo propio de escala sub-malla. El aspecto más importante de tal modelo es el intercambio de energía cinética entre las grandes escalas resueltas por la simulación y las escalas sub-mallas calculadas por el modelo.

En la mayoría de los modelos se estimó que la energía se transfiere predominantemente de las grandes escalas a las pequeñas escalas (efecto disipativo). Considerando despreciable la transferencia contraria, donde la energía puede también fluir localmente de las pequeñas escalas a las grandes escalas. Con esta consideración se logra evitar un motivo de inestabilidad numérica.

Esta transferencia regresiva de energía puede producir viscosidades turbulentas negativas, generándose erróneamente una viscosidad neta inferior a la viscosidad molecular del fluido. Tal viscosidad molecular es el mínimo necesario para que el aumento de las fluctuaciones tenga un límite y puedan ser atenuadas, evitando así la divergencia del cálculo numérico.

Otro aspecto importante en la relación e interacción de ambas escalas es el efecto y la relación de las estructuras coherentes. Estas estructuras surgen de forma natural en diversos flujos turbulentos y se acepta que gobiernan a la mayoría de la energía del flujo. Se estima que son responsables de la mayor parte de la transferencia de masa y momentum dentro de éste.

Todas las investigaciones recopiladas en esta tesis al igual que en esta misma, cuantifican las propiedades estadísticas de un chorro circular en su región de turbulencia desarrollada, a través de varios diámetros lejos de la salida del chorro, en la zona de autosemejanza, por lo que los datos experimentales y de simulaciones numéricas recopilados, sobre el comportamiento de un chorro redondo, son los principales puntos de comparación estadística con la simulación de grandes escalas, que esta tesis propone para el estudio de este tipo de fenómenos.

I.2. Características de un chorro

En el estudio de flujo de fluidos existen varias clasificaciones, en este trabajo se consideró una de ellas, la cual involucra a los chorros, dicha clasificación esta basada en los flujos que presentan esfuerzos cortantes libres y se subdivide en tres los cuales son: la “capa de mezcla”, la “estela” y el “**chorro**” (White).

En la Figura (1.4) se pueden observar los tres tipos de flujo de fluido que presentan esfuerzos cortantes libres:

- a) Una capa de mezcla entre dos corrientes de diferente velocidad
- b) Un chorro descargado en un medio estático (o con movimiento),
- c) Una estela detrás de un cuerpo

En los tres tipos de flujo que presentan esfuerzos cortantes libres existe una escala característica de velocidad, $U_{m\acute{a}x}(x)$ o $\Delta u_{m\acute{a}x}(x)$, y un característico espesor de

capa cortante, $b(x)$. Por ser estos flujos libres, o no confinados, la presión es aproximadamente constante a través de todo el flujo, excepto para pequeñas fluctuaciones turbulentas dentro de la capa.

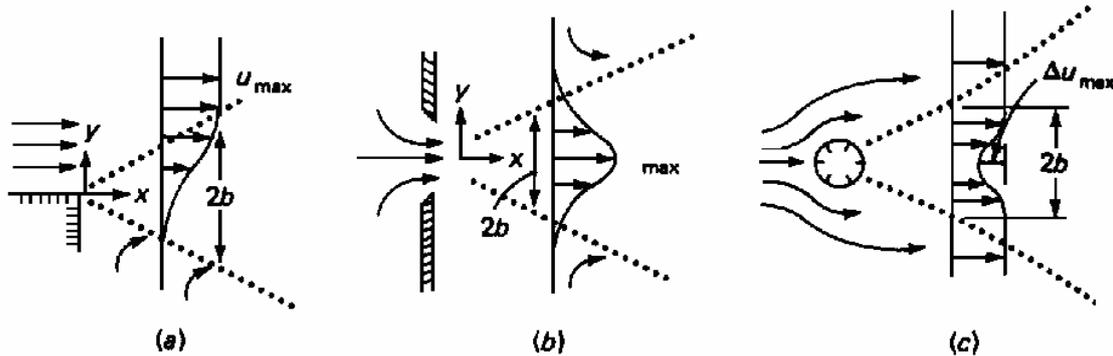


Figura 1.4. Tipos de flujos de fluidos que presentan esfuerzos cortantes libres

En la Figura (1.4), se visualiza el comportamiento aguas abajo de la turbulencia libre, tradicionalmente supuesto a ser independiente de la fuente que crea el flujo. La fuente, de esta forma ignorada, es también considerada como simétrica, tal que la capa cortante no es deformada en su geometría. Entonces, el análisis de estos flujos se simplifica al comportamiento asintótico de los valores del espesor y velocidad y de los campos de velocidad. Actualmente, hay ciertos efectos a ser discutidos, de la forma exacta de la fuente del chorro o del cuerpo que crea la estela.

La Figura 1.5 muestra los detalles de la formación inicial de un chorro, en un ambiente de fluido estático. La figura es válida solamente para chorros y ambientes similares, por ejemplo, aire dentro de aire. Los campos de velocidad se muestran como un espesor de línea negra cruzando el flujo. Típicamente el chorro descarga

casi con un perfil plano, con una velocidad turbulenta de salida U_{exit} totalmente desarrollada. Las capas de mezcla forman la frontera de la salida, como se muestra en la Figura (1.5), creciendo entre el ambiente estático y el centro potencial al chorro que fluye a una velocidad U_{exit} .

El centro potencial desaparece lentamente para números de Reynolds grandes, a una distancia de aproximadamente un diámetro de la salida, donde los campos de velocidad pierden la forma de capa de mezcla plana central. Aguas abajo de la salida del chorro, la velocidad comienza a desarrollarse dentro de la forma del tipo “Gaussiana” que comúnmente se visualiza como un chorro.

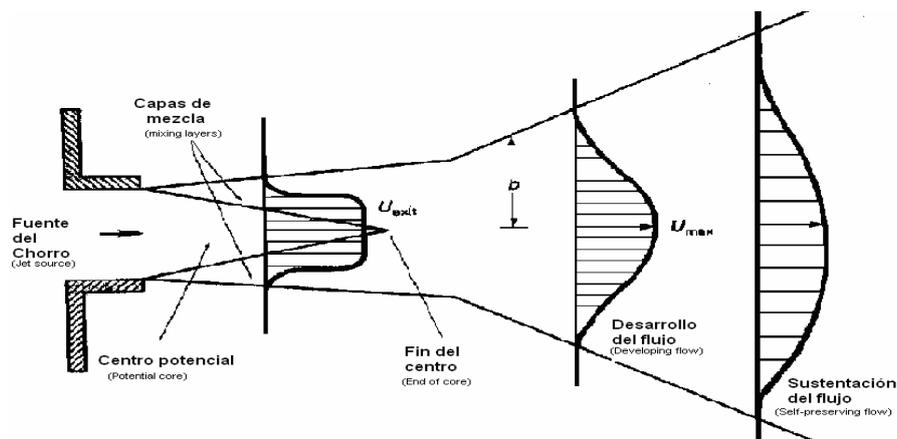


Figura 1.5. Formación de un chorro

El fluido entra al chorro de la región con condiciones ambientales y el flujo de masa del chorro se incrementa aguas arriba. También se debe hacer énfasis que la Figura 1.5 es un esquema de los campos de flujo promedios.

I.3. Naturaleza de la turbulencia

Como todo flujo turbulento completamente desarrollado, el chorro turbulento se caracteriza por ciertos comportamientos específicos, estos comportamientos los podemos tener en cuenta para caracterizar de mejor manera un flujo, sin que sea necesario que todos aparezcan, ya que ninguna solución analítica para flujos que satisfaga todas las condiciones matemáticas ha sido encontrada, dentro de los cuáles destacan o se pueden encontrar los siguientes:

- **Fluctuaciones de presión y velocidad** (también de temperatura siempre y cuando existe transferencia de calor). Estas fluctúan en las tres direcciones, alrededor de un valor medio.

- **Remolinos o paquetes de fluido**, son estructuras coherentes de diversos tamaños. Los tamaños de los remolinos varían constantemente desde espesores de la capa límite (grandes escalas) y hasta las llamadas escalas de Kolmogorov, en estos últimos se disipa la cantidad de movimiento y la energía por la acción de la viscosidad.

- **Variaciones pseudos-aleatorias** en las propiedades del fluido, las cuales tienen una forma particular (no precisamente azarosa).

- **Mantenimiento autónomo**, ya que los remolinos grandes pueden generar remolinos pequeños, esto contribuye a que un flujo turbulento puede mantenerse en ese estado por sí mismo.
- **Disipación**, un flujo turbulento decaerá progresivamente, al menos que exista un mecanismo de entrada de energía, esto debido a la ruptura sucesiva de vórtices a escalas más pequeñas (escala Kolmogorov).

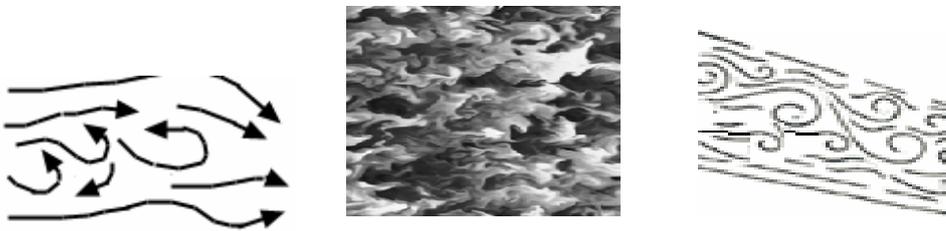


Figura 1.6. Vórtices turbulentos y estructuras turbulentas

Un concepto fundamental dentro de esta investigación es la hipótesis de la autosemejanza, ya que gran parte de la validación del trabajo recaerá en dicha teoría, la cual dice lo siguiente:

*“Cuando el flujo alcanza su etapa de turbulencia completamente desarrollada, se espera que presente un estado de **autosemejanza**, donde se puede verificar que los perfiles de velocidad de los chorros son todos similares. De esta manera el fenómeno se reduce a un perfil “universal” de velocidad, proporcional a las escalas de distancia*

y velocidad, según la hipótesis de semejanza (similarity hipotesis): $u = x^{-p} f\left(\frac{y}{x^q}\right)$,

donde para los chorros, los valores de p y q son tomados según la tabla siguiente:”

Dimensión	Momentum	Laminar homogéneo $2q=p+1$	Turbulento $q=1$
2	$2p = q$	$p = ? \quad Q = ?$	$p = 1/2 \quad q = 1$
3	$p = q$	$p = q = 1$	$p = q = 1$

Hipótesis de semejanza

CAPÍTULO II Ecuaciones de gobierno en la mecánica de fluidos

Para el estudio de flujos cortantes turbulentos que además son compresibles se utilizaron en esta tesis las ecuaciones conservativas de masa, momentum y energía, considerando las características de gas ideal, con relación newtoniana entre los esfuerzos sobre el fluido y la razón de deformación (De la Lama 2005).

En un marco de referencia cartesiano x, y, z las ecuaciones compresibles de Navier – Stokes, que representan el comportamiento de los fluidos que se describieron anteriormente en este capítulo, pueden ser escritas de la forma,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = \mathbf{S} \quad (2.1)$$

donde \mathbf{S} es un vector fuente nulo $\mathbf{S} = (0,0,0,0,0)$ y \mathbf{U} es un vector de cinco componentes definido por,

$$\mathbf{U} = {}^T (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho e) \quad (2.2)$$

se considera además que $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es el vector velocidad, ρ es la densidad del fluido, e es la energía total. La ecuación (2.1) representa la evolución de la densidad (balance de masa), momento y energía total definida para un gas ideal como,

$$\rho e = \rho C_v T + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \quad (2.3)$$

donde C_v es el calor específico a volumen constante y T es la temperatura y donde F_i son flujos para $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, que representará un fluido Newtoniano, que esta expresado por,

$$F_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + p \delta_{i1} - 2\mu S_{i1} \\ \rho u_i u_2 + p \delta_{i2} - 2\mu S_{i2} \\ \rho u_i u_3 + p \delta_{i3} - 2\mu S_{i3} \\ (\rho e + p) u_i - 2\mu u_j S_{ij} - k \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$k = \rho C_p \alpha$ es el coeficiente de conductividad térmica y donde α representa la difusividad térmica, δ_{ij} es el índice de Kronecker y S_{ij} es el componente divergencia del tensor deformación. Si despreciamos la viscosidad, S_{ij} se denota como,

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot u) \delta_{ij} \right) \quad (2.5)$$

la viscosidad molecular μ se establece a través de la ley empírica Sutherland,

$$\mu(T) = \mu(T_{ref}) \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \frac{S}{T_{ref}}}{1 + \frac{S}{T}} \quad (2.6)$$

donde S , T_{ref} y $\mu(T_{ref})$ son funciones del gas. La conductividad $k(T)$ se obtiene suponiendo que el número molecular de Prandtl es,

$$Pr = \frac{\nu}{k} = \frac{C_p \mu(T)}{k(T)} \quad (2.7)$$

La ecuación clásica de estado para gas ideal referente a la presión estática p , la temperatura T , y la densidad ρ , es:

$$p = R\rho T \quad (2.8)$$

se cierra el sistema, con $R = C_p - C_v$, donde C_p y C_v , son el calor específico a presión constante y el calor específico a volumen constante, respectivamente.

También se debe recordar que $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ es constante.

II.1. Simulación de Grandes Escalas

La técnica LES (Large-Eddy Simulation) consiste en la simulación únicamente de las grandes escalas del flujo, las pequeñas escalas son filtradas, pero estadísticamente influye en el movimiento de las grandes escalas a partir de un modelo sub-malla.

Las ecuaciones LES se encuentran regidas por la aplicación de un filtro espacial de paso bajo $G_\Delta(x)$ de tamaño Δ en las ecuaciones de Navier–Stokes. Esto elimina las escalas más pequeñas que el filtro de tamaño Δ llamado escala sub-malla. Matemáticamente, la operación de filtrado corresponde a la convolución de alguna cantidad $f(x, t)$ del flujo por la función filtro $G_\Delta(x)$, en la forma,

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{y}, t) G_\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (2.9)$$

y el campo sub-malla f' es determinado por la desviación del flujo actual con respecto al campo filtrado.

$$f = \bar{f} + f' \quad (2.10)$$

Donde f es la variable real, \bar{f} es la variable filtrada y f' corresponde a la componente del modelo sub-malla.

El formalismo LES compresible ha sido descrito en detalle por Comte and Lesieur (1997).

La aplicación del filtro a las ecuaciones compresibles de Navier – Stokes produce,

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{F}_3}{\partial x_3} = 0 \quad , \quad (2.11)$$

$$\text{con} \quad \bar{\rho e} = \overline{\rho C_v T} + \frac{1}{2} \overline{\rho (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)} \quad , \quad (2.12)$$

$$\text{y} \quad \bar{\rho} = \overline{\rho RT} \quad . \quad (2.13)$$

Para derivar un formalismo tan cercano como sea posible al formalismo incompresible utilizado y validado totalmente para la simulación de grandes escalas, es común introducir en los modelos de turbulencia estadística y LES el promedio de Favre (1965), cual se denota por \tilde{f} definido como,

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} \quad (2.14)$$

entonces se tiene,

$$U = {}^T (\bar{\rho}, \bar{\rho} \tilde{u}_1, \bar{\rho} \tilde{u}_2, \bar{\rho} \tilde{u}_3, \bar{\rho} \tilde{e}) \quad (2.15)$$

y la energía total resuelta se escribe,

$$\bar{\rho e} = \bar{\rho} \tilde{e} = \bar{\rho} C_v \tilde{T} + \frac{1}{2} \overline{\rho (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)} \quad (2.16)$$

los flujos resueltos \bar{F}_i son,

$$\bar{F}_i = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \bar{u}_i \\ \overline{\rho u_i u_1 + p \delta_{i1} - 2\mu S_{i1}} \\ \overline{\rho u_i u_2 + p \delta_{i2} - 2\mu S_{i2}} \\ \overline{\rho u_i u_3 + p \delta_{i3} - 2\mu S_{i3}} \\ \overline{(\rho e + p) u_i - 2\mu u_j S_{ij} - k \frac{\partial T}{\partial x_i}} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

con la ecuación de filtrado de estado,

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T} \quad (2.18)$$

Se puede introducir el tensor común esfuerzo – submalla $\bar{\mathcal{T}}$ con componentes,

$$T_{i,j} = -\overline{\rho u_i u_j} + \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (2.19)$$

El cual se puede dividir en sus partes isotrópica y desviador, la siguiente ecuación lo denota:

$$\mathcal{T}_{i,j} = \underbrace{\mathcal{T}_{ij} - \frac{1}{3} \mathcal{T}_{ll} \delta_{ij}}_{\tau_{i,j}} + \frac{1}{3} \mathcal{T}_{ll} \delta_{ij} \quad (2.20)$$

donde τ_{ij} denota el esfuerzo de sub-malla.

Entonces, las ecuaciones (2.16) y (2.17) pueden ser leídas como,

$$\bar{F}_i = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \bar{u}_i \\ \overline{\rho \bar{u}_i \bar{u}_1 + (\bar{p} - \frac{1}{3} T_{ll}) \delta_{i1} - \tau_{i1} - 2\mu S_{i1}} \\ \overline{\rho \bar{u}_i \bar{u}_2 + (\bar{p} - \frac{1}{3} T_{ll}) \delta_{i2} - \tau_{i2} - 2\mu S_{i2}} \\ \overline{\rho \bar{u}_i \bar{u}_3 + (\bar{p} - \frac{1}{3} T_{ll}) \delta_{i3} - \tau_{i3} - 2\mu S_{i3}} \\ \overline{(\rho e + p) u_i - 2\mu u_j S_{ij} - k \frac{\partial T}{\partial x_i}} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$y \quad \bar{\rho} \tilde{e} = \bar{\rho} C_v \tilde{T} + \frac{1}{2} \rho (\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2) - \frac{1}{2} T_{ii} \quad (2.22)$$

Una formulación elegante fue propuesta por Comte and Lesieur (1997), a través de la introducción de una macro – presión y una macro – temperatura definida como,

$$\varpi = \bar{p} - \frac{1}{3} \mathcal{J}_{ii} \quad (2.23)$$

y la macro – temperatura,

$$\mathcal{G} = \tilde{T} - \frac{1}{2 C_v \rho} T_{ii} \quad (2.24)$$

la ecuación de filtrado de estado (2.18) se puede expresar como,

$$\varpi = \bar{\rho} R \mathcal{G} + \frac{3\gamma - 5}{6} \mathcal{J}_{ii} \quad (2.25)$$

La ventaja principal de esta formulación es que se puede derivar un sistema cerrado de ecuaciones en las cuales el desconocido \mathcal{J}_{ii} del tensor escala – submalla no aparece explícitamente, por el hecho de la consideración $\gamma = 1.4$. De hecho, puede ser demostrado que la energía total resuelta se escribe,

$$\bar{\rho} \tilde{e} = \bar{\rho} C_v \mathcal{G} + \frac{1}{2} \bar{\rho} (\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2) \quad (2.26)$$

$$\varpi \approx \bar{\rho} R \mathcal{G} \quad (2.27)$$

esto hace que ϖ sea calculable si $\bar{\rho}$ y \mathcal{G} son conocidas.

Necesitamos introducir después el vector submalla calor-flujo, denotado por Q , el cual resulta de filtrar la ecuación de energía con componentes,

$$Q_i = -(\bar{\rho} e + p) u_i + (\bar{\rho} \tilde{e} + \varpi) \tilde{u}_i \quad (2.28)$$

la expresión exacta para el filtrado de los flujos entonces se convierte en:

$$\bar{F}_i = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \bar{u}_i \\ \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_1 + \varpi \delta_{i1} - \tau_{i1} - \overline{2\mu S_{i1}} \\ \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_2 + \varpi \delta_{i2} - \tau_{i2} - \overline{2\mu S_{i2}} \\ \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_3 + \varpi \delta_{i3} - \tau_{i3} - \overline{2\mu S_{i3}} \\ (\bar{\rho} \bar{x} + \varpi) \bar{u}_i - Q_i - \overline{2\mu u_j S_{ij}} - k \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

El sistema descrito arriba se puede cerrar haciendo uso de los modelos comunes de variable – densidad, escala – viscosidad y difusividad, en la forma,

$$\tau_{ij} \approx \bar{\rho} \nu_t \tilde{S}_{ij} \quad (2.30)$$

$$Q_i \approx \bar{\rho} C_p \frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_i} \quad (2.31)$$

Los términos restantes no calculables son los términos de viscosidad molecular y difusiva, que se pueden considerar de menor importancia cuando el número de Reynolds es suficientemente grande. Por lo tanto simplemente reemplazamos (2.29) por,

$$\bar{F}_i \approx \begin{pmatrix} \bar{\rho} \bar{u}_i \\ \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_1 + \varpi \delta_{i1} - 2(\bar{\mu} + \bar{\rho} \nu_t) \tilde{S}_{i1} \\ \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_2 + \varpi \delta_{i2} - 2(\bar{\mu} + \bar{\rho} \nu_t) \tilde{S}_{i2} \\ \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_3 + \varpi \delta_{i3} - 2(\bar{\mu} + \bar{\rho} \nu_t) \tilde{S}_{i3} \\ (\bar{\rho} \bar{x} + \varpi) \bar{u}_i - 2(\bar{\mu} + \bar{\rho} \nu_t) \tilde{S}_{ij} \bar{u}_j - \left[\bar{k} + \bar{\rho} C_p \frac{\nu_t}{Pr_t} \right] \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

en donde $\bar{\mu}$ y \bar{k} están ligados con \mathcal{G} a través de la relación de Sutherland (2.6), un

número de Prandtl molecular constante es asumido $Pr = C_p \frac{\bar{\mu}(\mathcal{G})}{\bar{k}(\mathcal{G})} = 0.7$.

Obsérvese que uno de los aspectos notables de esta formulación es que el sistema LES se puede deducir fácilmente de las ecuaciones compresibles de Navier – Stokes originales con los cambios correspondientes:

$$u_i \rightarrow \tilde{u}_i, \quad \rho \rightarrow \bar{\rho}, \quad T \rightarrow \mathcal{G}, \quad p \rightarrow \varpi, \quad e \rightarrow \tilde{e}, \quad \mu \rightarrow \bar{\mu} + \bar{\rho} \nu_t, \quad k \rightarrow \bar{k} + \bar{\rho} C_p \frac{\nu_t}{Pr_t}$$

Esto proporciona el código numérico de fácil uso para el LES sin modificaciones importantes.

Las expresiones para ν_t y Pr_t utilizadas en las siguientes simulaciones compresibles corresponden a los modelos incompresibles descritos en Métails and Lesieur (1996), la única diferencia es que aquí se deduce del campo de velocidad filtrado densidad – peso \tilde{u} . Nuestro modelo submalla es el modelo selectivo de la función de la estructura propuesto por Davide (1993), la viscosidad turbulenta local, esta dado por,

$$\nu_t(x, \Delta, t) = C_{ssf} \Delta \sqrt{\tilde{F}_2(x, \Delta, t)} \quad (2.33)$$

donde C_{ssf} puede ser expresado como función de la constante de Kolmogorov

C_K : $C_{ssf} = f\left(C_K^{-\frac{3}{2}}\right)$. C_{ssf} toma el valor de 0.104 para $C_K = 1.4$. Δ se toma igual a

$(\Delta x \Delta y \Delta z)^{\frac{1}{3}}$, donde Δx , Δy y Δz , son los tamaños de la malla locales en las tres direcciones espaciales.

$\tilde{F}_2(x, \Delta, t)$ es la función de velocidad de segundo orden de la estructura construida con el campo $\tilde{\mathbf{u}}$. \tilde{F}_2 es calculado en el punto x con un promedio estadístico local de las diferencias de la velocidad al cuadrado entre x y los seis puntos más cercanos que rodean al punto en la malla computacional. La interpolación se basó sobre la ley de $\frac{2}{3}$ de Kolmogorov que se usa para la función estructura de la velocidad.

Según lo propuesto por Davide (1993), la viscosidad turbulenta desaparece cuando el flujo no es lo suficientemente tridimensional. El criterio para tres dimensiones es definido de la siguiente forma: considérese en un momento dado que el ángulo entre el vector de vorticidad en un punto dado de la malla y la media aritmética de los vectores vorticidad en los seis puntos vecinos más cercanos. La viscosidad turbulenta se cancela en los puntos donde este ángulo es menor que 20° , este valor fue obtenido de la turbulencia homogénea – isotrópica a través de simulaciones directas. Finalmente, el número de Prandtl turbulento se toma igual a 0.6.

II.2. Ecuaciones en coordenadas generalizadas

El código numérico usa coordenadas generalizadas. La adaptación a las coordenadas generalizadas se realiza introduciendo una matriz Jacobiana que transforma una geometría compleja en un sistema de coordenadas Cartesiano (x, y, z) , como una malla no uniforme o una geometría curvilínea, dentro de una geometría ortogonal simple con malla uniforme en el sistema de coordenadas generalizadas (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . En consecuencia las ecuaciones se pueden resolver fácilmente. Para este caso que se estudió, simplemente consiste en una transformación de una malla no uniforme en el espacio físico (x, y, z) dentro de una malla uniforme en el espacio computacional (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Cada término en la matriz Jacobiana inversa (\mathbf{J}^{-1}) se expresa como funciones analíticas de las medidas $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$. Las medidas son introducidas y calculadas por el esquema interno de segundo orden, entonces la matriz (\mathbf{J}) es calculada directamente de (\mathbf{J}^{-1}) .

Entonces la ecuación (2.1) se puede volver a escribir como,

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \xi_3} = \hat{S} \quad (2.34)$$

Con

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{U} &= \frac{U}{J}, \\
 \hat{F} &= \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \mathbf{F} \right) + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \mathbf{G} \right) + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \mathbf{H} \right) \right], \\
 \hat{G} &= \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \mathbf{F} \right) + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \mathbf{G} \right) + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \mathbf{H} \right) \right], \\
 \hat{H} &= \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \mathbf{F} \right) + \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \mathbf{G} \right) + \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \mathbf{H} \right) \right], \\
 \hat{S} &= \frac{1}{J} \mathbf{S}.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

J es el determinante de la matriz (J) y U es función de las coordenadas cartesianas y del tiempo.

CAPÍTULO III Esquema numérico

En esta tesis, el sistema en coordenadas generalizadas se soluciona a través de esquemas de diferencias finitas compactas. La discretización de las derivadas espaciales se hace por medio de un esquema compacto de sexto orden.

La principal diferencia que existe entre la solución de un método tradicional de diferencias finitas y los esquemas compactos de diferencias finitas, es que el último, nos ayudan a representar de mejor manera a las pequeñas escalas de la turbulencia, además el número de puntos de discretización involucrados en el algoritmo para altos ordenes es mucha menor al que se usa en una expresión de diferencias finitas tradicional, por estas razones los esquemas compactos tienen mayor utilidad y preferencia sobre los métodos tradicionales de diferencias finitas, además de conservar una mayor precisión.

III.1. Aproximación de la primera derivada

Dado el valor de una función en uno de los nodos, la aproximación en diferencia finita a la derivada de una función, es expresada como una combinación lineal de los valores dados de la función (Lele 1992). Considérese una malla uniforme donde los

nodos están denotados por i . La variable independiente en los nodos es x_i . El valor de la función en cada nodo está dado por $f_i = f(x_i)$. La aproximación en diferencia finita f'_i a la primera derivada $\left(\frac{df}{dx}\right)(x_i)$ para el nodo i depende de los valores de la función de los nodos cercanos a i . Por ejemplo, para diferencias centradas de segundo y cuarto orden, la aproximación depende de (f_{i-1}, f_{i+1}) y $(f_{i-2}, f_{i-1}, f_{i+1}, f_{i+2})$, respectivamente. Los esquemas utilizados en esta tesis son generalizaciones del esquema de Padé.

De forma general, la derivada f' para cualquier variable f , esta dada por:

$$\beta f'_{i-2} + \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} + \beta f'_{i+2} = c \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{h} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

donde $h = x_{i+1} - x_i$

(3.1)

Las relaciones entre los coeficientes a, b, c y α, β son derivados de acuerdo a los coeficientes de la serie de Taylor para varios órdenes de derivadas, y estos son:

$$a + b + c = 1 + 2\alpha + 2\beta \quad (\text{segundo orden}) \quad (3.2)$$

$$a + 2^2 b + 3^2 c = 2 \frac{3!}{2!} (\alpha + 2^2 \beta) \quad (\text{cuarto orden}) \quad (3.3)$$

$$a + 2^4 b + 3^4 c = 2 \frac{5!}{4!} (\alpha + 2^4 \beta) \quad (\text{sexto orden}) \quad (3.4)$$

$$a + 2^6 b + 3^6 c = 2 \frac{7!}{6!} (\alpha + 2^6 \beta) \quad (\text{octavo orden}) \quad (3.5)$$

$$a + 2^8 b + 3^8 c = 2 \frac{9!}{8!} (\alpha + 2^8 \beta) \quad (\text{décimo orden}) \quad (3.6)$$

Si las variables independientes son periódicas en x , entonces el sistema (2.39) escrito para cada nodo es resuelto como un sistema de ecuaciones lineales para un valor desconocido de la derivada.

Si las variables no son periódicas entonces se usa una aproximación de las derivadas en los puntos 1 y 2.

$$\phi_1' + \alpha_1 \phi_2' = \frac{1}{\Delta \xi} (a_1 \phi_1 + b_1 \phi_2 + c_1 \phi_3 + d_1 \phi_4 + e_1 \phi_5 + f_1 \phi_6 + g_1 \phi_7) \quad (3.7)$$

$$\alpha_{21} \phi_1' + \phi_2' + \alpha_{23} \phi_3' = \frac{1}{\Delta \xi} (a_2 \phi_1 + b_2 \phi_2 + c_2 \phi_3 + d_2 \phi_4 + e_2 \phi_5 + f_2 \phi_6 + g_2 \phi_7) \quad (3.8)$$

Con el fin de guardar la tridimensionalidad del sistema se escogió un esquema de orden cuatro:

$$\alpha_1 = 2.0$$

$$\alpha_{21} = 0.25$$

$$\alpha_{23} = 0.25$$

$$a_1 = -\frac{5}{2}$$

$$b_1 = 2.0$$

$$c_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{3}{4}$$

$$b_2 = -1.0$$

III.2. Características del filtro matemático

A menudo es encontrada la inestabilidad numérica en la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes con diferencias compactas, debido a que las discretizaciones de diferencias compactas, como otros esquemas centrados, son no disipativos y por ende susceptibles a inestabilidades numéricas. Las fuentes de la inestabilidad incluyen la implementación de las condiciones de frontera, escalas que no se pueden resolver, las no uniformidades de la malla, y las ecuaciones no lineales del flujo. Las

ondas no deseadas se amplifican y destruyen la solución. La disipación artificial, en la cual un término pequeño es agregado y anexado explícitamente a las ecuaciones de gobierno; es un método para la supresión de inestabilidades. De cualquier forma, éste método es indeseable para intentar cálculos para examinar la física del flujo, como son la Simulación de las grandes escalas (siglas en inglés LES) de la turbulencia.

Para extender la solución a simulaciones prácticas, a menos que estas no involucren fuertes choques estacionarios, en espera de que la exactitud de la discretización espacial mejore, la reciente técnica alternativa del método de filtrado, por medio de un filtro implícito de alto orden fue incorporada.

Si se denota un componente del vector solución por ϕ , los valores filtrados $\tilde{\phi}$ son obtenidos por la solución del sistema tridiagonal:

$$\alpha_f \tilde{\phi}_{i-1} + \tilde{\phi}_i + \alpha_f \tilde{\phi}_{i+1} = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{2} (\tilde{\phi}_{i+1} + \tilde{\phi}_{i-1}) \quad (3.9)$$

La ecuación (3.9) da como resultado una fórmula de $2N - \text{orden}$ sobre un punto dibujado en $2N + 1$. Los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_N fueron derivados en términos de α_f con el análisis de las series de Taylor y de Fourier, lo cual se presenta en la tabla 3.1 siguiente, en la cual se muestran los coeficientes para la fórmula del filtro y los puntos interiores:

Esquema	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	OA
F2	$\frac{1}{2} + \alpha_f$	$\frac{1}{2} + \alpha_f$	0	0	0	0	2
F4	$\frac{5}{8} + \frac{3\alpha_f}{4}$	$\frac{1}{2} + \alpha_f$	$\frac{-1}{8} + \frac{\alpha_f}{4}$	0	0	0	4
F6	$\frac{11}{16} + \frac{5\alpha_f}{8}$	$\frac{15}{32} + \frac{17\alpha_f}{16}$	$\frac{-3}{16} + \frac{3\alpha_f}{8}$	$\frac{1}{32} - \frac{\alpha_f}{16}$	0	0	6
F8	$\frac{93+70\alpha_f}{128}$	$\frac{7+18\alpha_f}{16}$	$\frac{-7+14\alpha_f}{32}$	$\frac{1}{16} - \frac{\alpha_f}{8}$	$\frac{-1}{128} + \frac{\alpha_f}{64}$	0	8
F10	$\frac{193+126\alpha_f}{256}$	$\frac{105+302\alpha_f}{256}$	$\frac{15(-1+2\alpha_f)}{64}$	$\frac{45(1-2\alpha_f)}{512}$	$\frac{5(-1+2\alpha_f)}{256}$	$\frac{1-2\alpha_f}{512}$	10

Nota: α_f es un parámetro libre en el rango $0 < |\alpha_f| \leq 0.5$

Tabla 3.1*. Coeficientes para la fórmula del filtro y los puntos anteriores

El parámetro ajustable α_f satisface la desigualdad $-0.5 < \alpha_f \leq 0.5$, con valores altos de α_f corresponden a un filtro con menor disipación. La experiencia numérica sugiere que a pesar del tiempo del esquema del tiempo de integración, los valores de α_f entre 0.3 y 0.5 son apropiados. De cualquier forma, en casos extremos donde la calidad de la malla sea pobre, se puede requerir de un valor bajo, $\alpha_f \sim 0.1$.

Se requirieron fórmulas especiales para los puntos en las cercanías de las fronteras, pero los valores de puntos finales 1 y 1L no son filtrados, en tanto otros puntos cercanos a las fronteras si lo fueron, donde la ecuación (3.9) no se puede aplicar, por lo que dos aproximaciones fueron convenientes en estos casos. En el primer método, el orden de exactitud es reducido en la proximidad a las fronteras a

* M.R. Visual and D.V. Gaitonde. On the Use of Higher-Order Finite-Difference Schemes on Curvilinear and Deforming Meshes. Journal of Computational Physics. p.160. (2002)

un nivel para el cual el esquema centrado esta disponible. La exactitud se conserva con la optimización del valor de α_f . Esta aproximación es particularmente conveniente donde la malla es altamente refinada en las cercanías a las fronteras. El segundo método, emplea fórmulas de alto orden en un lado, con lo cual nuevamente retiene la forma tridiagonal del esquema. Para este estudio, se usó el segundo método.

En un punto cercano a la frontera, i , la fórmula del filtro esta dada por:

$$\alpha_f \hat{\phi}_{i-1} + \hat{\phi}_i + \alpha_f \hat{\phi}_{i+1} = \sum_{n=1}^{11} a_n \phi_n \quad i \in \{2, \dots, 5\}$$

$$\alpha_f \hat{\phi}_{i-1} + \hat{\phi}_i + \alpha_f \hat{\phi}_{i+1} = \sum_{n=0}^{10} a_{1L-n} \phi_{1L-n} \quad i \in \{1L-4, \dots, 1L-1\}$$
(3.10)

Esta elección conserva la forma tridiagonal del filtro, y α_f se mantiene como el único parámetro libre. La Tablas 3.2 y 3.3, contienen los coeficientes para las fórmulas del filtro de alto orden de un lado para la frontera izquierda, empleadas en el cálculo realizado de los puntos 2 y 3. Las fórmulas para la frontera derecha, son obtenidas de $a_{1L-n,i} = a_{n+1,1L-i+1}$ para $i \in \{1L-4, \dots, 1L-1\}$.

OA	$a_{1,3}$	$a_{2,3}$	$a_{3,3}$	$a_{4,3}$	$a_{5,3}$	$a_{6,3}$	$a_{7,3}$
6	$-\frac{1}{64} + \frac{\alpha_f}{32}$	$\frac{3}{32} + \frac{13\alpha_f}{16}$	$\frac{49}{64} + \frac{15\alpha_f}{32}$	$\frac{5}{16} + \frac{3\alpha_f}{8}$	$-\frac{15}{64} + \frac{15\alpha_f}{32}$	$\frac{3}{32} - \frac{3\alpha_f}{16}$	$-\frac{1}{64} + \frac{\alpha_f}{32}$

Tabla 3.2*. Coeficientes para la fórmula del filtro de sexto orden para la frontera en el punto 3

* M.R. Visual and D.V. Gaitonde. On the Use of Higher-Order Finite-Difference Schemes on Curvilinear and Deforming Meshes. Journal of Computational Physics. p.161. (2002)

OA	$a_{1,2}$	$a_{2,2}$	$a_{3,2}$	$a_{4,2}$	$a_{5,2}$	$a_{6,2}$	$a_{7,2}$
4	$\frac{1}{16} + \frac{7\alpha_f}{8}$	$\frac{3}{4} + \frac{\alpha_f}{2}$	$\frac{3}{8} + \frac{\alpha_f}{4}$	$-\frac{1}{4} + \frac{\alpha_f}{2}$	$\frac{1}{16} - \frac{\alpha_f}{32}$	0	0
6	$\frac{1}{64} + \frac{31\alpha_f}{32}$	$\frac{29}{32} + \frac{3\alpha_f}{16}$	$\frac{15}{64} + \frac{17\alpha_f}{32}$	$-\frac{5}{16} + \frac{5\alpha_f}{8}$	$\frac{15}{64} - \frac{15\alpha_f}{32}$	$-\frac{3}{32} + \frac{3\alpha_f}{32}$	$\frac{1}{64} - \frac{\alpha_f}{32}$

Tabla 3.3*. Coeficientes para la fórmula del filtro para la frontera en el punto 2

El filtro fue aplicado a las variables conservativas y de manera secuencial en cada eje coordenado. Aunque la frecuencia de aplicación puede ser variada, para los resultados presentados, la solución fue filtrada una vez después de la etapa final del método explícito de Runge-Kutta.

III.3. Tiempo de integración

Frecuentemente, las ecuaciones integradas en el tiempo con el clásico método de cuarto orden de cuatro etapas de Runge-Kutta (RK4), con R denotando el residuo, se utilizan para aplicaciones de propagación de ondas y en este trabajo no es la excepción, la ecuación de gobierno es:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = R = -J \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \zeta} - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial \bar{F}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{H}_v}{\partial \zeta} \right] + U(1/J)_\tau \right) \quad (3.11)$$

* M.R. Visual and D.V. Gaitonde. On the Use of Higher-Order Finite-Difference Schemes on Curvilinear and Deforming Meshes. Journal of Computational Physics. p.161. (2002)

El método clásico de cuatro etapas, integra del tiempo t_0 (paso n) a $t_0 + \Delta t$ (paso $n+1$) por medio de las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} k_0 &= \Delta t R(\bar{U}_0) & k_1 &= \Delta t R(\bar{U}_1) \\ k_2 &= \Delta t R(\bar{U}_2) & k_3 &= \Delta t R(\bar{U}_3) \\ \bar{U}^{n+1} &= \bar{U} + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde $\bar{U}_0 = \bar{U}(\xi, \eta, \zeta, \tau)$, $\bar{U}_1 = \bar{U}_0 + k_0/2$, $\bar{U}_2 = \bar{U}_1 + k_1/2$, $\bar{U}_3 = \bar{U}_2 + k_2$. El método RK4 fue empleado en el presente trabajo solamente para casos en los cuales las coordenadas de la malla eran conocidas como una función del tiempo, pero cabe mencionar que también puede ser utilizado el método de Runge-Kutta de tercer orden. En tal situación, y por simplicidad, las distancias espaciales y las velocidades de malla fueron establecidas a sus $n + 1$ valores (Silva 2001).

III.4. Métodos de Runge-Kutta de tercer y cuarto orden

Dado que la evolución temporal de un sistema, como se utilizó en esta tesis, conduce a la obtención de ecuaciones diferenciales ordinarias; conocidas con el nombre de ecuaciones del movimiento o ecuaciones de evolución del sistema. Dichas ecuaciones del movimiento, tanto para una partícula como para un sistema de partículas, pueden ser ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, cuya solución analítica, en general, es difícil de obtener. En este sentido, el análisis numérico de las ecuaciones, basado en métodos numéricos confiables, constituye la principal herramienta para obtener dicha solución.

Los métodos más populares para la solución de este tipo de expresiones son los de Runge-Kutta, ya que tratan de obtener una mayor precisión con un paso h no tan pequeño, y en especial para este trabajo el de tercer y cuarto orden (Williamson 1980). Dichos métodos de Runge-Kutta corresponden a una generalización de la expresión:

$$x_{i+1} = x_i + \phi(t_i, x_i, h) \quad (3.13)$$

donde $\phi(t_i, x_i, h)$ es conocida como la función incremento y de forma general corresponde a:

$$\begin{aligned} \phi &= a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n \\ k_1 &= f(t_i, x_i) \\ k_2 &= f(t_i + p_1 h, x_i + q_{11} k_1 h) \\ k_3 &= f(t_i + p_2 h, x_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ k_n &= f(t_i + p_{n-1} h, x_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde los valores de p , q y a_i se obtuvieron mediante transformaciones algebraicas de las expresiones anteriores, dependiendo del orden n que se maneje.

Así, para $n = 3$, se obtienen las expresiones para el método de Runge-Kutta de tercer orden que son las siguientes:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3) h \quad (3.15)$$

donde

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t_i, x_i) \\
 k_2 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\
 k_3 &= f(t_i + h, x_i - k_1 h + 2k_2 h) \\
 & \text{y } h = t_{i+1} - t_i
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

Con $n = 4$ se tiene el denominado método clásico Runge Kutta de cuarto orden, cuyas expresiones son:

$$x_i = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \tag{3.17}$$

donde

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t_i, x_i) \\
 k_2 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\
 k_3 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) \\
 k_4 &= f(t_i + h, x_i + k_3 h) \\
 & \text{y } h = t_{i+1} - t_i
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

La expresión (3.17) es el algoritmo más usado para resolver numéricamente un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

CAPÍTULO IV Características numéricas

Para lograr buenos resultados dentro de la simulación de grandes escalas se requiere que las técnicas empleadas proporcionen una alta precisión en la medida espacio y tiempo, para poder reproducir de manera adecuada el fenómeno de turbulencia que se desea simular y estudiar.

Para poder responder a la iteración (espacio-tiempo) del flujo a modelado, es necesario establecer claramente el comportamiento de las ecuaciones de gobierno en la simulación, esto se logra utilizando condiciones iniciales y de frontera del fenómeno adecuadas.

IV.1. Condiciones iniciales y de frontera

Las condiciones iniciales de las cinco variables son las siguientes:

La velocidad en la dirección del flujo x tiene un perfil tipo tangente hiperbólica de revolución, usando la línea central del chorro como eje de revolución, con lo que se obtiene un perfil principal de sombrero de copa.

$$u = \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{U_1 - U_2}{2} \tanh \left[\frac{1}{4} \frac{R}{\theta_0} \left(\frac{r}{R} - \frac{R}{r} \right) \right] \quad (4.1)$$

Donde u es el perfil de velocidad longitudinal, θ_0 es el momento, U_1 es la velocidad del chorro, U_2 es la velocidad del flujo circundante, R es el radio de salida del chorro y r es el radio medido en cualquier posición dentro del círculo de radio R .

Las otras dos componentes de la velocidad tienen valores nulos y se consideró que la presión y temperatura tienen un valor de referencia.

En el chorro redondo se tienen tres diferentes condiciones de frontera las cuales se presentan a continuación:

Entrada: En la entrada se establecen las velocidades. La velocidad longitudinal permaneció con el mismo perfil tipo tangente hiperbólica y las otras dos componentes valores nulos. Igualmente el fluido entró con un valor constante de temperatura igual a la temperatura de referencia.

Salida: La salida se basó en la propuesta realizada por Poisson and Lele (Apéndice 1) en la cual se conoce una presión de referencia fuera del dominio (P_∞).

Simetría o pared con deslizamiento: Considera que la velocidad normal a esta frontera es igual a cero al igual que el gradiente del resto de las velocidades.

Las tres condiciones de frontera se basan en el método NSCBC (Navier-Stokes Characteristic Boundary Conditions), explicado ampliamente en el apéndice 1.

Es importante señalar que la simulación numérica representó un ambiente bajo control, lo que en situaciones reales o de experimentación no sucede, por lo que se tuvo una consideración extra sobre este aspecto en las condiciones iniciales.

En ciertos casos, las simulaciones no alcanzan la transición a su etapa turbulenta completamente desarrollada o en algunos otros simplemente tardan demasiado en alcanzarla y salen del dominio computacional, esto se debe a que no existen condiciones que afecten la salida del flujo como lo es en fenómenos reales, por lo que en las simulaciones por computadora se utiliza alguna perturbación conocida con el nombre de “ruido”.

Las fluctuaciones propias del perfil, que son responsables de llevar la transición del flujo a su estado de turbulencia completamente desarrollada, requieren de una energía cinética turbulenta que produce perturbaciones en el campo, pero en la simulación de grandes escalas se perdería información del modelo sub-malla, antes de llegar a la transición de la turbulencia desarrollada si se agregara un campo energético auxiliar como condición inicial, por lo que en este tipo de simulaciones se agrega una perturbación conocida como: “ruido blanco” en la zona de esfuerzos cortantes con el fin de agilizar dicho proceso. Esta perturbación se usa con la finalidad de que la distancia de la salida en el que se alcanza la turbulencia sea menor en comparación con la ausencia de dicho ruido blanco. La perturbación se

aplica a las tres componentes de la velocidad para lograr una alteración tridimensional. El ruido blanco nos proporcionó la inestabilidad en las pequeñas escalas lo que provoca que la frecuencia fundamental emerja naturalmente. Se resolvió con el ruido blanco el problema de la energía cinética turbulenta que se notificó en la simulación numérica, sin tener que perder información valiosa.

El ruido blanco se define como: $U = \varepsilon(U_1 - U_2)\text{ran}(-0.5,0.5)$, donde ε es un valor (0 -1) y “ran” son números aleatorios de -0.5 a 0.5, la amplitud del ruido en este caso es 0.1 (10%).

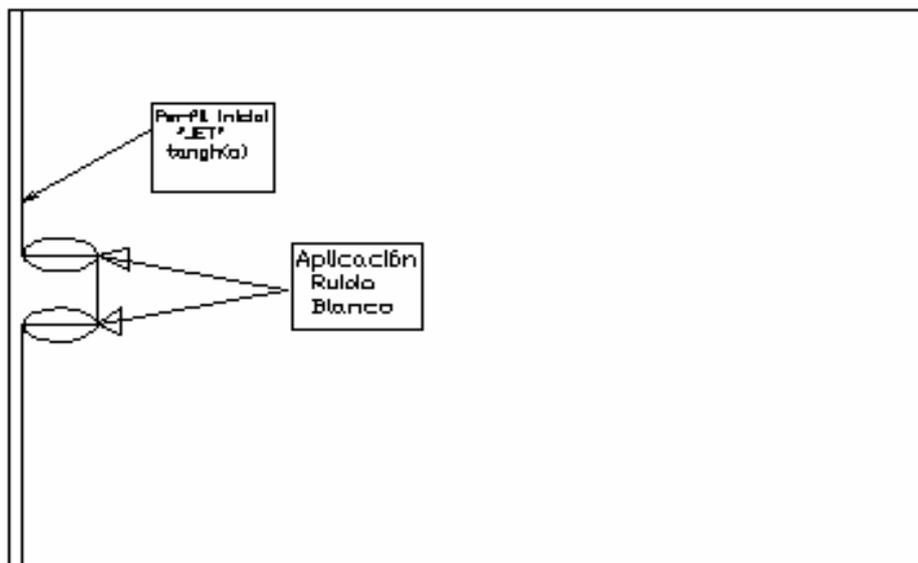


Figura 4.1. Visualización de la zona de aplicación del ruido blanco

IV.2. Dominio computacional

El diámetro de salida del chorro es de una longitud unitaria D , su centro se localizó en el plano YZ a 4 unidades D de el eje "Y" y 4 unidades D de el eje "Z", el trabajo se realizó con una malla tridimensional con divisiones en los tres ejes coordenados cartesianos "X", "Y" y "Z", que nos representaron un total de 1782150 nodos ($n_x=150$, $n_y=109$ y $n_z=109$) con 12.5 unidades D en el eje "X", 8 unidades D en el eje "Y" y "Z".

En las figuras 4.2 y 4.3 se puede observar que en la zona de mayor esfuerzo cortante (centro) la malla se consideró con una mayor cantidad de nodos respecto a las otras zonas, esto es para poder resolver con mayor precisión esta zona ya que es la zona crítica para poder visualizar de mejor manera al chorro turbulento.

Algunos de los parámetros más importantes dentro de la simulación fueron los que a continuación se citan: número de Reynolds = 22000.00, número de Prandtl = 0.7, Un

chorro subsónico Mach = 0.5, $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1.4$, número de Prandtl turbulento = 0.6.

Los números adimensionales están referidos a las variables de referencia $u_0 = u_1 -$

u_2 , $L = D$, $T_0 = T_{\text{entrada}}$ y $\rho_0 = \rho_{\text{entrada}}$

Con lo que se estimó lo siguiente:

$$R = \frac{DU_0\rho_0}{\mu(T_0)}$$

$$M = \frac{U_0}{\sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}}; \text{ donde } P_0 = f(T_0, \rho_0)$$

$$\text{Pr} = \frac{\mu(T_0)C_p}{K(T_0)}$$

Igualmente, las variables fueron adimensionalizadas por estos valores:

$$u_{ADM} = \frac{U}{U_0}$$

$$T_A = \frac{T}{T_0}$$

$$x_A = \frac{x}{P}$$

$$\rho_A = \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$t_A = \frac{t}{\left(\frac{D}{U_0}\right)}$$

$$P = \frac{P}{P_0}$$

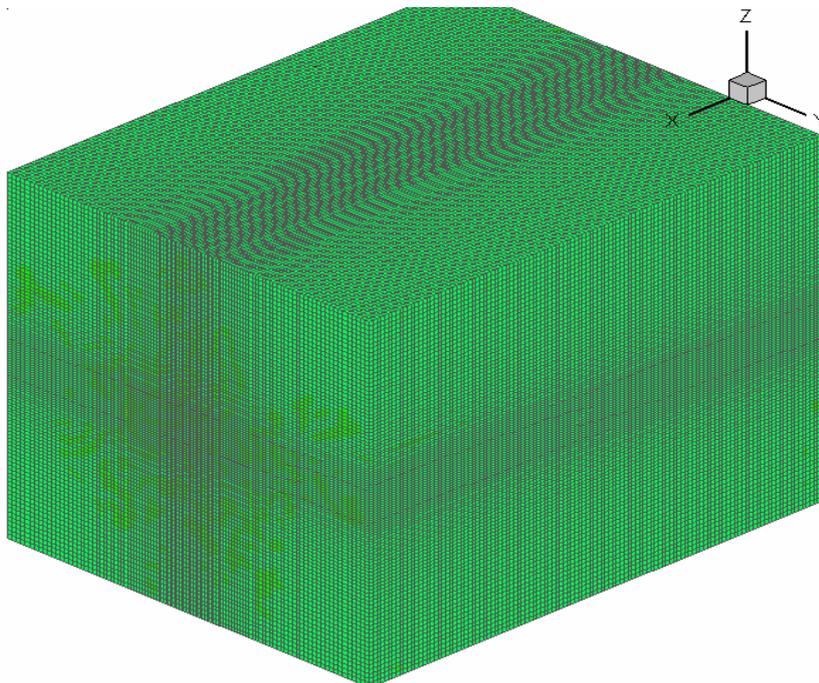


Figura 4.2. Visualización de la malla utilizada

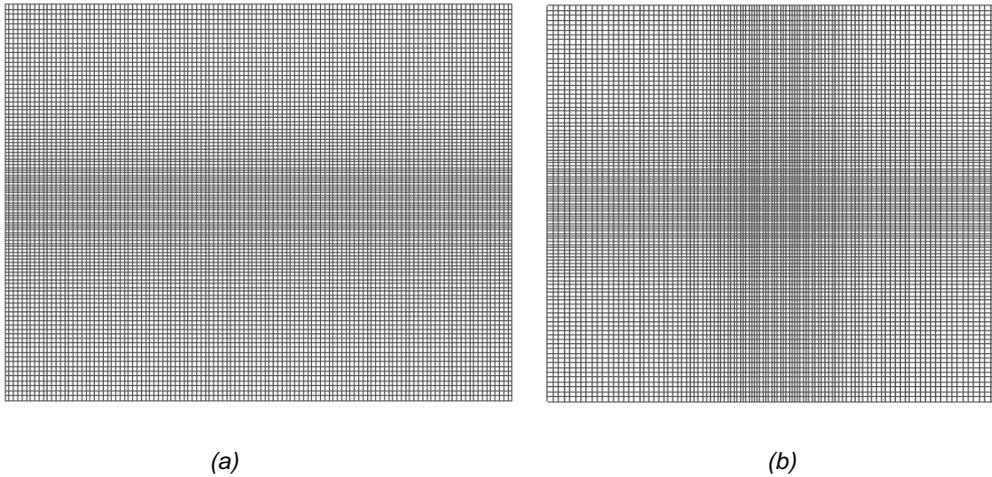


Figura 4.3. Visualización de los planos de la malla utilizada, figura 4.3a plano XY figura 4.3b plano YZ.

IV.3. Amortiguación en la salida del dominio computacional

Existió un problema en la salida del dominio computacional, una vez que el chorro redondo llegó a este punto, ya que la turbulencia se ha desarrollado por completo. El chorro completamente desarrollado generó el principal problema, dado que las fluctuaciones de dicha turbulencia totalmente desarrollada son demasiado fuertes y no salen completamente del dominio computacional, provocando la recirculación de las ondas acústicas en la frontera de salida cuasi no reflexiva Poisson-Lele. Este es un típico fenómeno de reflexión, que alteran el comportamiento y desarrollo del chorro. Por lo que resulta necesario amortiguar el flujo antes de su salida, esto se logra dejando las últimas celdas en la dirección del eje "x" como los paneles en modelos empíricos donde pasa el flujo y se atenúa su salida del dominio computacional.

El amortiguador es conocido como “capa esponja” y es una herramienta numérica, que tiene el objetivo de llevar los campos instantáneos a un estado más homogéneo durante la última etapa de cálculo, es decir en las últimas celadas.

El amortiguador es de tipo exponencial, desde el valor cero hasta el ochenta por ciento de un campo homogéneo, el cual fue promediado para la última celda en la frontera de salida, a partir de la función esponja donde x es la coordenada en la dirección longitudinal.

$$f_{esponja} = 0.8 \exp(-7x^4)$$



Figura 4.5. Visualización de la capa esponja

CAPÍTULO V Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos de la simulación de grandes escalas del chorro con salida redonda. Los resultados se presentarán en tres formas diferentes para obtener un panorama amplio y general del fenómeno, esto con el fin de validar el código numérico:

- 1._ Visualización en iso-superficie, esta nos ayudó a comprender de buena manera la tridimensionalidad de las estructuras turbulentas y el comportamiento del chorro en general.
- 2._ Visualización de contornos velocidad, esta nos ayudó a comprender las variables críticas del chorro (velocidad), estas visualizaciones se hicieron para valores instantáneos y promedio.
- 3._ Estudio estadístico en la zona de autosemejanza, este fue el parámetro más importante para la validación de la simulación LES, ya que se comparó con los datos experimentales de Hussein.

V.1. Estructuras turbulentas tridimensionales del flujo.

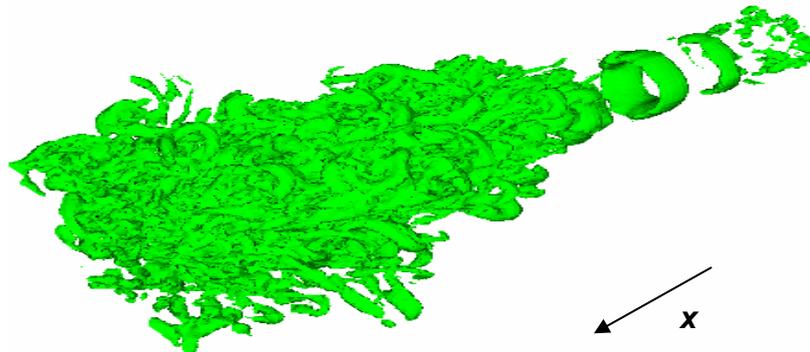


Figura 5.1. Visualización de Iso-superficie tridimensional observada a través del criterio $Q=15$

Este criterio nos ayudó a visualizar las principales estructuras tridimensionales del flujo a lo largo de todo el dominio computacional, además de observar el aspecto general del comportamiento del flujo de manera real (tridimensional).

Existen dos métodos para visualizar las estructuras turbulentas, el primero de estos métodos es conocido con el nombre de criterio “Q” (Hunt 1988) y el segundo método se basa en la variación de presión.

El criterio Q esta basado en el segundo invariante del tensor gradiente de la velocidad, $Q = \frac{1}{2}(\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij})$, donde Ω_{ij} es la parte antisimétrica y S_{ij} es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad. En este criterio Q los valores positivos del invariante son un buen indicador para identificar las estructuras coherentes del flujo, es decir cuando $Q > 0$, esto debido a que para valores positivos la parte rotacional del flujo domina a la parte cortante del mismo, esto fue demostrado con los

experimentos de Dubief y Delcayre (2002). Con este criterio se pudieron observar las estructuras de diferentes tamaños. Entre más aumente el valor de Q se hizo más visibles las zonas con mayor rotación.

En la figura 5.2, se muestra la iso-superficie para $Q=350$, valor el cual es mayor que el tomado para observar la figura 5.1. En la figura 5.1 se distingue toda la etapa de transición del chorro redondo, mientras que en la figura 5.2 sólo se visualizan las estructuras altamente rotacionales en la zona de turbulencia totalmente desarrollada.

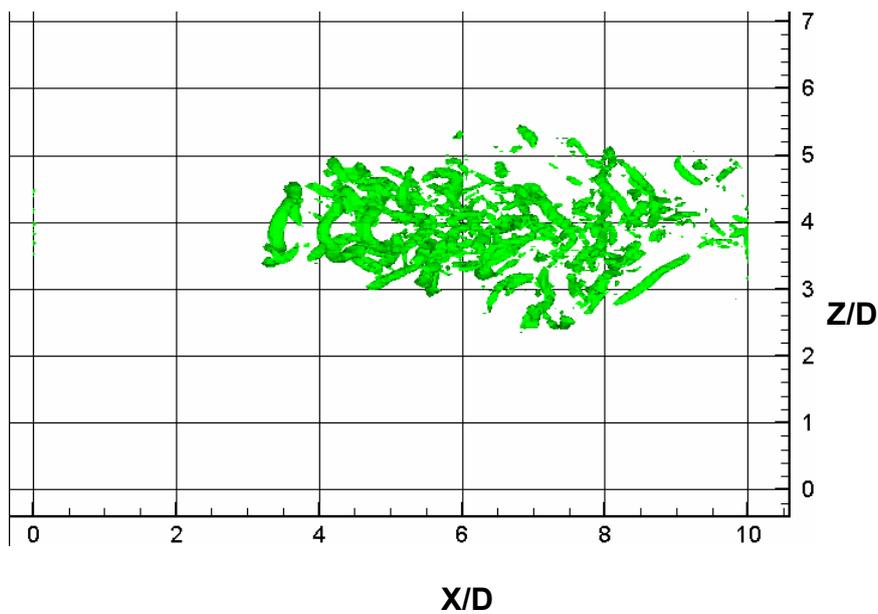


Figura 5.2. Visualización Iso-superficie de los valores positivos del criterio $Q=350$

El segundo criterio se basó en los efectos producidos por la baja presión que existe en el flujo, el cual es provocado por el movimiento rotacional de los vórtices, es decir, la zona de baja presión se produce dentro de los remolinos, por lo que con este

criterio solo se pueden notar dónde se producen las estructuras turbulentas de mayor tamaño, como se observa en la **figura 5.3**

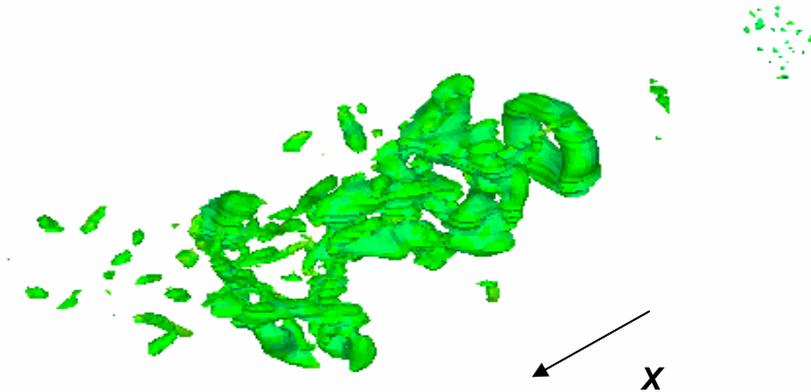


Figura 5.3. Iso-superficie tridimensional observada a través del criterio de presión

Es importante hacer notar que estos dos criterios están relacionados en un fluido incompresible a través de $Q = \nabla^2 \frac{P}{2\rho_0}$; esto implica que la identificación de los vórtices de las pequeñas escalas se visualicen en el criterio Q y no en el criterio de la presión.

Es importante hacer evidente las diferencias existentes entre los dos criterios, el criterio Q ayuda a tener la idea general del comportamiento del chorro a lo largo de todo el dominio computacional, así como el efecto de las grandes y pequeñas escalas. El criterio de presión sólo permite conocer donde se producen los remolinos de mayor tamaño. Los dos criterios ayudan a visualizar las regiones de transición a la turbulencia y la zona de turbulencia completamente desarrollada la cual es de trascendencia en este trabajo.

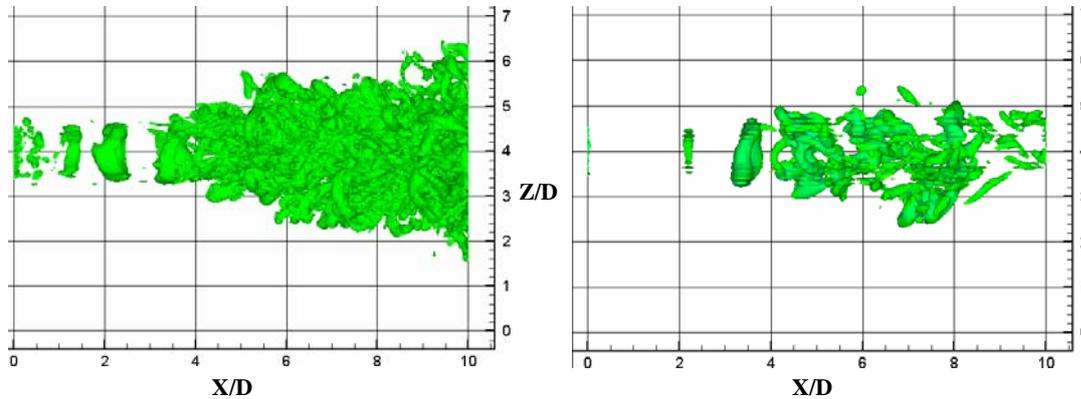


Figura 5.4. La figura 5.4(a) muestra el criterio $Q=15$, en esta se puede observar claramente el comportamiento del flujo a lo largo de todo el dominio computacional, en la figura 5.4(b) se observa el criterio $P=1.155$, donde se visualiza perfectamente la zona con mayor energía.

Un aspecto importante a resaltar en estas visualizaciones es el hecho de que la geometría de salida del chorro juega un papel importante dentro del comportamiento del flujo, ya que podemos observar claramente en la figura 5.1 la formación de tres anillos. Estas estructuras se pueden denotar como estructuras primarias del comportamiento del chorro, también conocidas como vórtices Kelvin-Helmholtz, en el rango de dominio computacional $X/D=1.0$ a $X/D=4.0$; aunque en el tercer anillo ya se nota una deformación (tipo lengua) a causa de la transición de la zona laminar a la zona de turbulencia. Se puede decir que este anillo representa el punto de ruptura de los vórtices anteriormente citados. Figura 5.5.

Se ha concluido a partir de algunos trabajos de investigación que la turbulencia tridimensional ocurre antes de la unión de las capas cortantes superior e inferior. En esta región, el fluido externo de comportamiento irrotacional que envuelve el chorro es atraído al interior de su centro potencial, este fenómeno explica la presencia de

regiones de fluido irrotacional dentro de la zona de turbulencia desarrollada el cual es el causante de la pérdida de aceleración por parte del chorro.

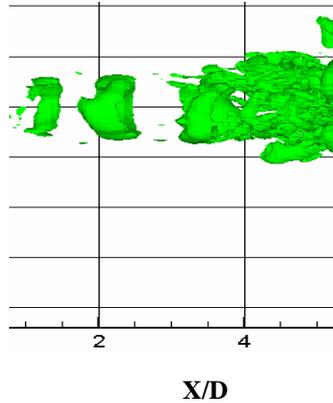


Figura 5.5. Visualización de la zona de ruptura de los vórtices Kelvin-Helmholtz criterio $Q=350.0$

En todas las figuras anteriores verificamos que la transición del chorro se alcanzó de una manera rápida, algo que es fundamental en los métodos numéricos, ya que se deben buscar herramientas que faciliten el poder alcanzar la transición en un corto dominio computacional, debido que el tener mayor dominio requeriría demasiado cálculo computacional, lo cual implica un mayor costo y sobre todo un mayor tiempo, por lo que el ruido blanco aplicado en la zona de esfuerzo cortante en las tres componentes de la velocidad cumplió su cometido, lograr una alteración tridimensional y proporcionar la inestabilidad necesaria en las pequeñas escalas para que el chorro evolucione naturalmente a la turbulencia, sin perder información sobre las pequeñas escalas, y con esto acercarse lo más posible a un fenómeno real.

Con las figuras 5.1 y 5.4a se pudo corroborar ciertos aspectos de la teoría que la turbulencia como es el hecho de que la turbulencia no es una etapa abrupta sino una etapa progresiva, ya que para alcanzar su estado de turbulencia desarrollada debe

de cambiar a través de una serie de etapas bien definidas dentro del dominio del flujo.

El régimen de transición de este flujo está en el rango $X/D=0.0$ y $X/D=3.0$, esto porque se tiene un comportamiento definido, como son los dos primeros anillos que se observan al principio de la figura 5.4a. Estos vórtices en forma de anillos tienen un comportamiento periódico y guardan su forma hasta el final del centro potencial localizado alrededor de $X/D=4.0$. Su frecuencia corresponde al modo preferente del chorro, al alcanzar su Reynolds crítico entra en una etapa de tridimensionalización definida en el rango $X/D=4.0$ y $X/D=5.0$.

En la siguiente figura 5.6 se demuestra lo descrito anteriormente, ya que el chorro tiende a seguir la geometría de salida, pero debido al alto número de Reynolds y la inestabilidad de las estructuras Kelvin - Helmholtz el chorro no puede seguir manteniendo su modo preferente inicial bidimensional y pasa a su etapa de tridimensionalización.

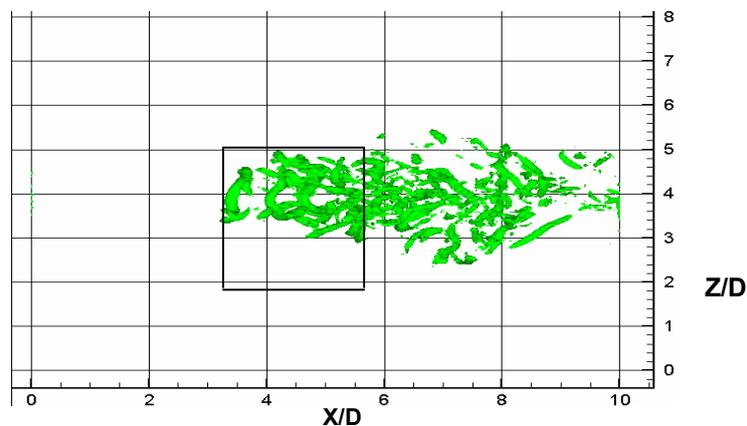


Figura 5.6. Tendencia de la geometría de salida "Estructuras primarias" criterio $Q=350.0$

En esta nueva etapa empieza a aparecer una nueva componente de la vorticidad en la dirección del flujo lo cual implica un aumento en turbulencia y consecuentemente la desaparición de cualquier flujo unidireccional preferente, esto implica que la velocidad y la vorticidad se vuelvan variables tridimensionales, esta es la zona de turbulencia incipiente.

Después empiezan a aparecer estructuras de menor tamaño, creando la zona de turbulencia totalmente desarrollada, esto debido a que los vortices coherentes perdieron en este momento (espacio-tiempo) cualquier orientación espacial preferencial, esto como muestra de un estado isotrópico cuasi homogéneo.

Los detalles del desarrollo de la turbulencia en nuestro chorro se pueden observar a detalle en la siguiente figura:

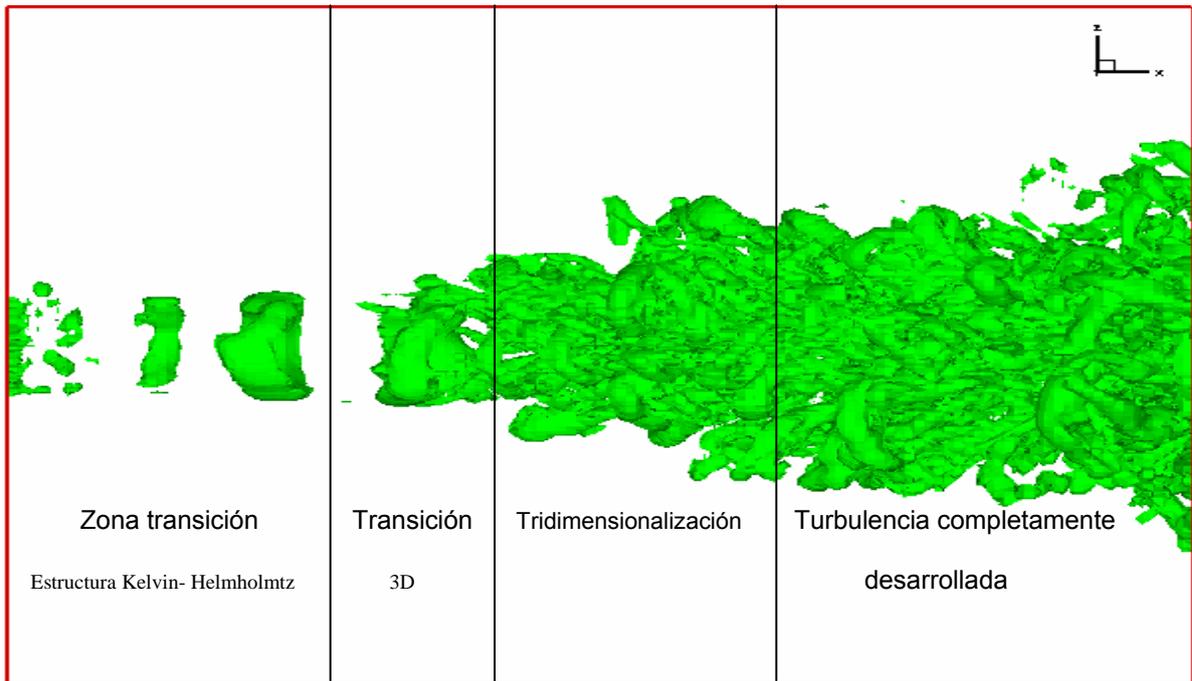


Figura 5.7. Principales zonas de división del flujo hacia la turbulencia completamente desarrollada

V.2. Visualización de contornos.

La visualización de contornos en la zona de auto semejanza es una de las herramientas frecuentemente usadas para el estudio, validación y comparación entre modelos que estudia este tipo de fenómenos. En el caso de este trabajo de investigación, se analizaron las velocidades tanto promedio como instantáneas, los esfuerzos de Reynolds y la presión instantánea; todos en la región de turbulencia completamente desarrollada del chorro redondo.

Las dos direcciones representativas del chorro redondo analizado son la longitudinal (X) y la normal (Z), esto se debe a que la dirección transversal (Y) es similar a la normal (Z).

En la figura 5.8 se observa el comportamiento del chorro en la dirección longitudinal en dirección normal instantánea y promedio dentro de la etapa de turbulencia completamente desarrollada ($4.0 < X/D < 8.0$). En dicha figura la parte de abajo representa la velocidad promedio, esto desde $Z/D=0$ hasta $Z/D=4.0$. En la segunda parte de la gráfica desde $Z/D=4.0$ hasta $Z/D=8.0$ visualizamos el comportamiento instantáneo.

En la primera parte se observa la expansión del chorro redondo y la desaceleración que tuvo el mismo durante su desarrollo en todo el dominio del centro potencial hacia las orilla hasta alcanzar su estado de auto semejanza. En la segunda parte, se identifica una respuesta instantánea del chorro en un perfil para un tiempo dado, donde se observa el comportamiento turbulento del chorro.

La zona de auto semejanza que se forma cuando el chorro es totalmente turbulento tiene importancia en el análisis estadístico de los chorros redondos ya que esta representa perfiles universales para este tipo de fenómenos, este se analiza más adelante.

Es preciso señalar la marcada tendencia que tiene la velocidad longitudinal sobre el desarrollo del chorro redondo ya que como se puede ver en la figura 5.8 el chorro sale con demasiada energía en la dirección longitudinal desde $X/D=0.0$ hasta $X/D=4.0$ y no tiene ningún tipo de expansión en alguna otra dirección. La interacción con las demás componentes se da después de que el chorro ha terminado su etapa de transición. Esto influirá de manera significativa en el crecimiento del chorro en las otras direcciones, esto porque tenderá a seguir su desarrollo normal y complicar la interacción de este en otras direcciones, pero las alteraciones se reflejarán en las fluctuaciones de este a lo largo de las tres componentes de la velocidad.

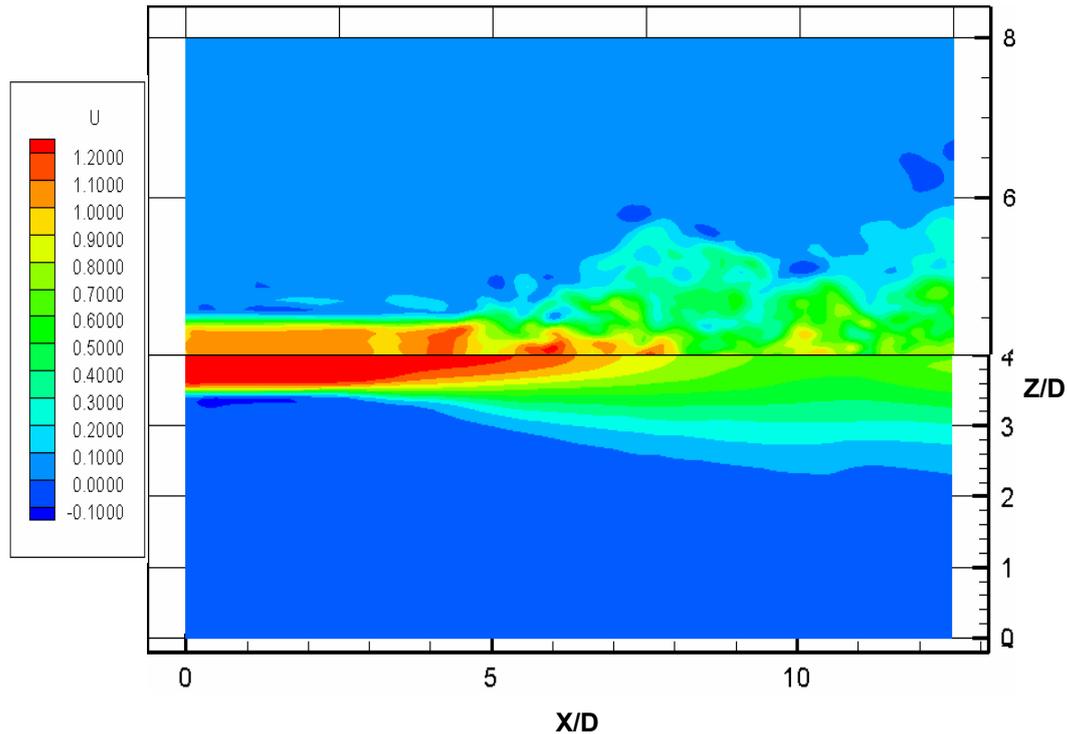


Figura 5.8. Abajo contorno de la velocidad promedio (\bar{u}/u_j), arriba contorno de la velocidad instantánea u , en la zona de autosemejanza.

En las siguientes figuras 5.9 y 5.10, se observan los comportamientos de la velocidad instantánea v y w del chorro respectivamente. Es importante mencionar que estas dos velocidades a la entrada del chorro se consideran nulas por lo que su efecto es relativamente pequeño respecto a la velocidad u a lo largo de la línea central. También se puede notar como se había mencionado anteriormente, que los valores de estas componentes de la velocidad son pequeños hasta $X/D=4.0$, donde comienza la etapa de turbulencia y el chorro empieza a relacionarse con la velocidad longitudinal. Este efecto instantáneo fue causado por las fluctuaciones de la velocidad preferencial.

Estos contornos instantáneos para las dos componentes no preferenciales de la velocidad fueron el resultado de la sustracción del campo promedio al campo instantáneo normal de la velocidad normal.

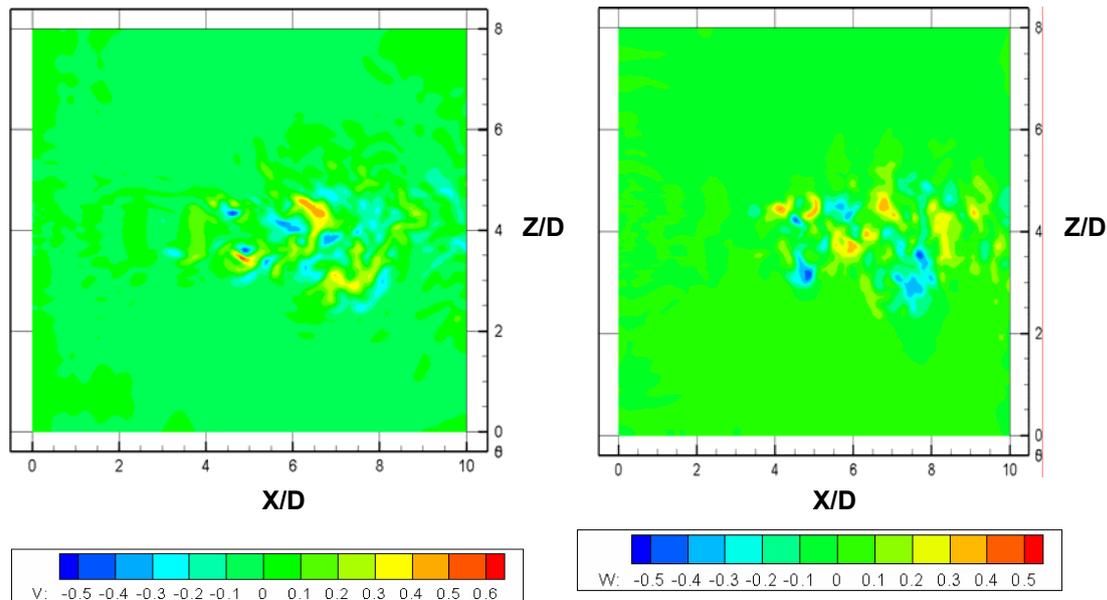


Figura 5.9. Contorno de la velocidad instantánea \bar{v}/u_j Figura 5.10. Contorno de la velocidad instantánea \bar{w}/u_j

El promedio de la velocidad w figura (5.11) en la dirección normal es muy sensitiva a la bidimensionalidad en las condiciones de entrada y las condiciones de frontera en las paredes laterales. El efecto casi nulo de la velocidad w promedio, lejos del centro potencial del chorro se puede atribuir a la lejanía que existe entre el límite lateral y el chorro, por lo que el efecto se evita al máximo posible. Con lo anteriormente citado se demuestra que el chorro no sufrió ninguna perturbación relevante causa de la influencia de las componentes de la velocidad no preferente (“ v ” y “ w ”) hasta la zona de turbulencia desarrollada donde el efecto siguió siendo mínimo, pero ahora notorio ya que al expandirse el chorro y pasar a la zona de turbulencia desarrollada este

efecto se observa sobre los contornos y se notó el efecto de la velocidad longitudinal sobre la otras componentes.

La velocidad v tiene la misma forma en un plano xy .

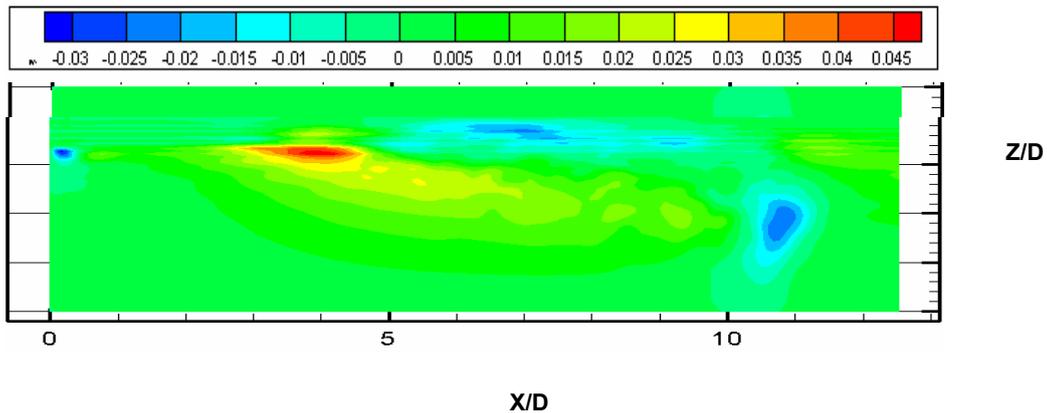


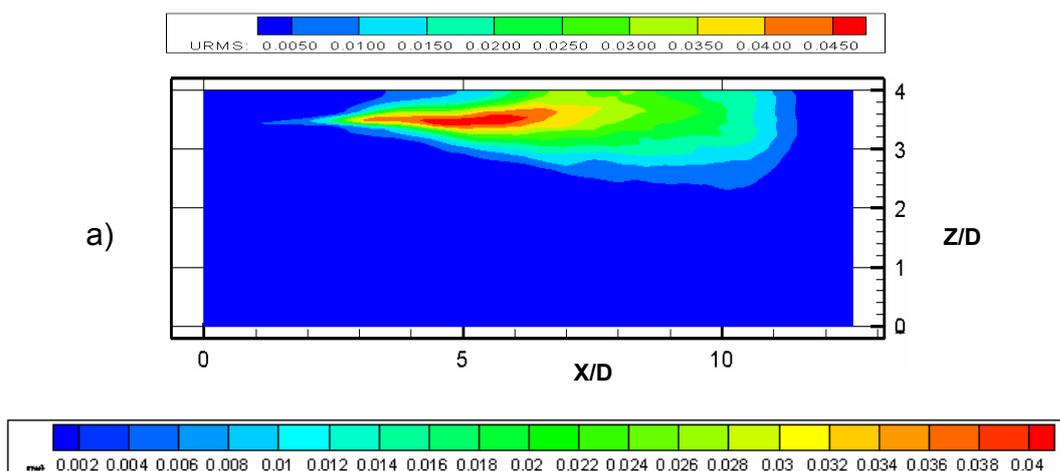
Figura 5.11. Contorno de la velocidad \overline{w}/u_j

Los esfuerzos de Reynolds representados por un tensor simétrico también se pueden examinar por medio de contornos, los cuales están formados por los esfuerzos normales y cortantes del chorro redondo. Dichos esfuerzos representan un parámetro importante para comparar flujos. Los esfuerzos turbulentos normales ($u'u'$, $v'v'$ y $w'w'$) están representados por las rms, para cada dirección principal y estos muestran la intensidad de las fluctuaciones promedio o la parte fluctuante media que tiene la velocidad en cada componente. Los otros términos ($u'v'$, $u'w'$, $v'w'$) representan los esfuerzos cortantes en el chorro.

En los tres contornos que manifiestan los esfuerzos normales de Reynolds, el comportamiento es muy similar, ya que la zona de mayor intensidad se tiene en donde inicia el desarrollo del chorro hacia la turbulencia y se pierde hasta donde es

alcanzado a la plenitud de la misma. Este efecto señala la importancia que tienen los esfuerzos principales de Reynolds sobre la turbulencia. Otro aspecto a señalar es que el desarrollo turbulento solo se tiene en una dirección y la interacción con las otras dos dimensiones es muy lento, razón por la cual la turbulencia no llegó a ser completamente isotrópica. La zona nula de las fluctuaciones al final del contorno se debe a la capa esponja utilizada para poder resolver correctamente las condiciones de frontera.

En las figuras 5.12 se pueden observar los tres contornos referentes a los esfuerzos normales de Reynolds. Algo importante que se debe hacer notar es la similitud que tienen los tres entre sí; la única diferencia es la intensidad de las fluctuaciones ya que en la U_{rms} es mayor tanto en intensidad como longitud respecto a W y V es debido a lo anteriormente mencionado de la velocidad preferente del chorro.



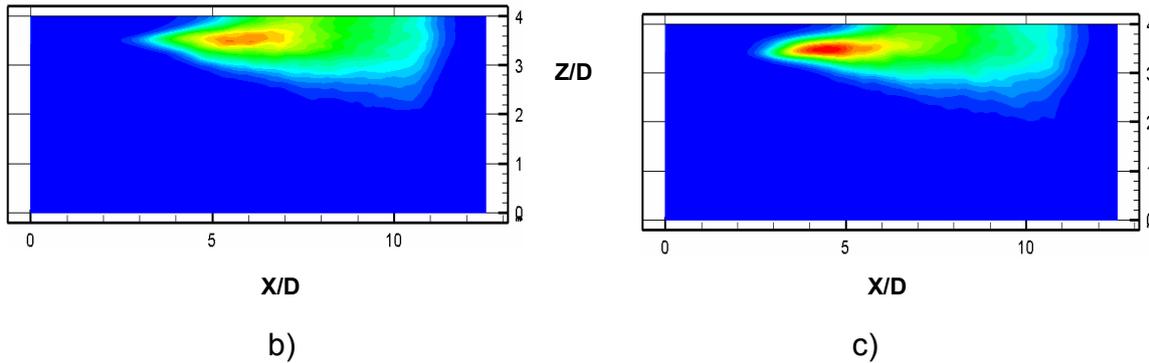


Figura 5.12. Medios contornos de los esfuerzos normales de Reynolds, a lo largo de todo el dominio computacional. a) Esfuerzo normal longitudinal de Reynolds u_{rms} / u_j . b) Esfuerzo principal de Reynolds v_{rms} / u_j . c) Esfuerzo principal de Reynolds w_{rms} / u_j .

En la parte tres de este capítulo se hace referencia al comportamiento de estas variables de modo estadístico, con lo se tiene el estudio completo del chorro redondo.

La dirección más representativa como ya se mencionó es la dirección longitudinal del chorro (X), y sólo ésta interactúa para generar los contornos y perfiles de los esfuerzos cortantes de Reynolds $u'v'$ y $u'w'$, ya que el esfuerzo cortante $v'w'$ se considera nulo en el plano mostrado xz.

En la figuras 5.3 se muestran los dos contornos de las dos componentes representativas para el chorro redondo del tensor de esfuerzo de Reynolds en su parte referente a los esfuerzos cortantes. Estos dos perfiles muestran un comportamiento parecido a las componentes normales. Estos esfuerzos cortantes generan la principal fuente de energía cinética turbulenta, ya que estos son función

del gradiente de velocidad. En la parte tres de este capítulo se consideró el estudio estadístico de estas variables y la importancia que tuvieron para validación del código numérico empleado para la visualización del chorro redondo.

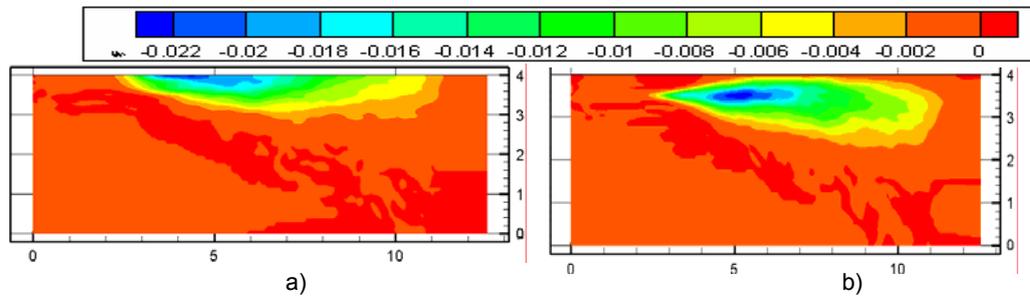


Figura 5.13. Esfuerzos cortantes de Reynolds.

a) Esfuerzo cortante $\frac{u'w'}{u_j}$.

b) Esfuerzo cortante $\frac{u'v'}{u_j}$.

El último contorno por analizar es el de la presión instantánea. Este nos permitió corroborar la zona donde se encuentran las estructuras turbulentas de mayor tamaño y por consiguiente las zonas de baja presión, al igual que la formación característica de los anillos para este chorro redondo, los cuales tienen la misma posición que se había determinado a través de la visualización de la estructuras turbulentas. También se puede observar que dentro de las estructuras turbulentas de mayor tamaño se tiene las zonas de baja presión. Este criterio, como se había mencionado anteriormente nos ayuda a observar la zona de transición hacia la turbulencia y la zona de turbulencia desarrollada.

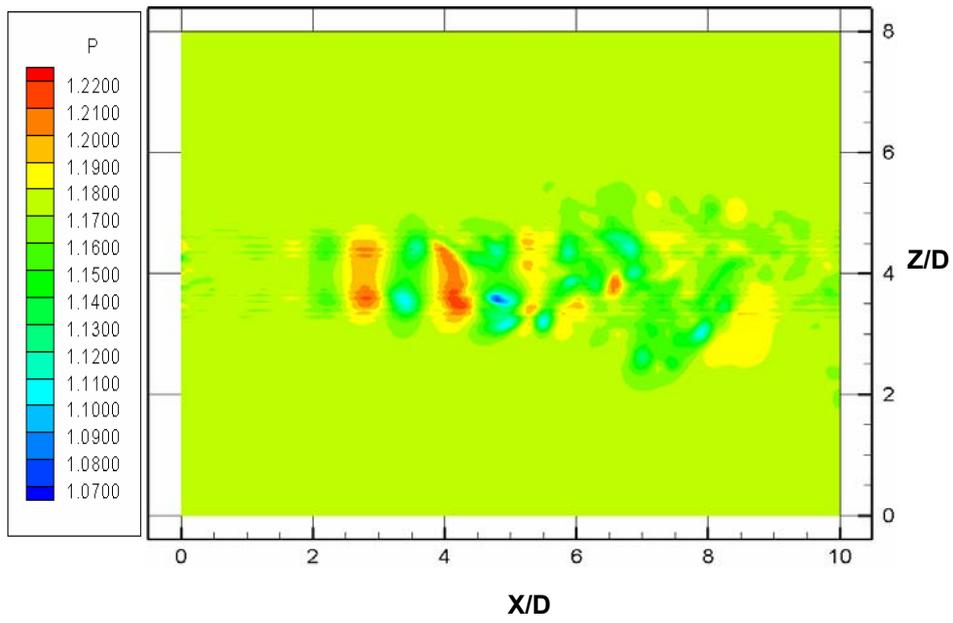


Figura 5.14. Visualización del contorno de presión instantánea $\frac{P}{P_{ref}}$.

V.3. Estudio estadístico en la zona de auto semejanza.

El poder interpretar de una manera adecuada los resultados estadísticos fue la parte fundamental de este trabajo de investigación, debido a que con estas pudimos validar de una manera correcta el código numérico utilizado para representar de manera gráfica y numéricamente el fenómeno del chorro redondo que se está estudiando.

Es necesario resaltar que el punto clave para validar el código numérico propuesto es la comparación entre esta tesis con diferentes trabajos de experimentación e investigación. Existen un gran número de trabajos de investigación a los cuales esta tesis hizo referencia, por lo que en este aspecto no existe mayor problema para poder tener buenos puntos de comparación y así conocer el comportamiento estadístico del chorro redondo además de observar los alcances y limitaciones que tiene el código numérico utilizado para poder estudiar este fenómeno. La teoría de auto semejanza en este punto juega un papel fundamental, ya que ésta nos habla de perfiles universales para los chorros, no importando las características que puedan presentar. Este panorama permite comparar este trabajo de tesis con otras investigaciones, que aunque no tengan las mismas características del flujo en la zona de turbulencia desarrollada se comportaran de manera similar.

Existe un punto de comparación importante dentro de la tesis el cual consiste en analizar y comparar estadísticamente el comportamiento del chorro redondo con un trabajo de experimentación previo realizado por Hussein. Dicho trabajo de experimentación fue de utilidad, ya que se estudió un chorro con el mismo perfil que se utilizó en la tesis. Hoy en día este experimento es el principal banco de información que existe para el estudio de la región de auto semejanza, gracias a este punto, pudimos validar el código numérico que se usó en este trabajo.

De acuerdo a varios estudios previos realizados, tanto experimentales como numéricos, está perfectamente fundamentado que el comportamiento de los flujos que presentan esfuerzos cortantes libres como lo son los chorros son muy difíciles de comparar entre si a la entrada de los mismos sin presentar algún tipo de variación. En un trabajo realizado por Thomas y Chu (1989) se estudió la dificultad de obtener perfecta concordancia del crecimiento en du (mitad del grosor) y el alcance del centro potencial del chorro, ya sea experimental o numéricamente, por lo que resultaría inadecuado comparar los resultados con la zona de transición, ya que aunque se presenta el mismo proceso para la mayoría de los casos, existe una variación importante de tiempo-espacio.

Como se mencionó anteriormente la zona de turbulencia desarrollada es la parte medular para la comparación del comportamiento del código numérico con el fenómeno real. Esta zona a su vez es representada por la región de autosemejanza, ya que en ésta los perfiles de velocidad de los chorros son todos similares si se usan

las variables adecuadas para parametrizar los resultados. De esta manera el fenómeno se reduce a un perfil “universal” de velocidad, proporcional a las escalas de distancia y velocidad.

La primera gráfica a analizar es la 5.15, la cual representa un perfil universal para chorros. En ésta gráfica se puede observar estadísticamente la evolución de la mitad del grueso del chorro (du) en dirección normal con respecto a la dirección longitudinal de éste.

La du representa la distancia desde la línea central del chorro hasta el punto en el cual el promedio de la velocidad es la mitad de la velocidad en la línea central, esto para cada plano (x), como se observa en la gráfica 5.15. Es importante notar que para obtener el comportamiento adecuado y real de la velocidad longitudinal se debe considerar la diferencia que existe entre la velocidad de la simulación y la velocidad del co-flow (fluido circundante).

Como se puede observar en la gráfica 5.15, la zona de linealidad se alcanzó a partir de un valor de $X/D=5.5$ y hasta $X/D=10.0$. Esta zona representa a du , la última parte de la gráfica desde $X/D=10.0$ hasta el final del dominio computacional, representa el amortiguador en la salida. Esta parte de la simulación es la herramienta numérica llamada capa esponja mencionada en capítulos anteriores. Esta es la razón por la cual el chorro no sigue su tendencia lineal hasta el final del dominio computacional.

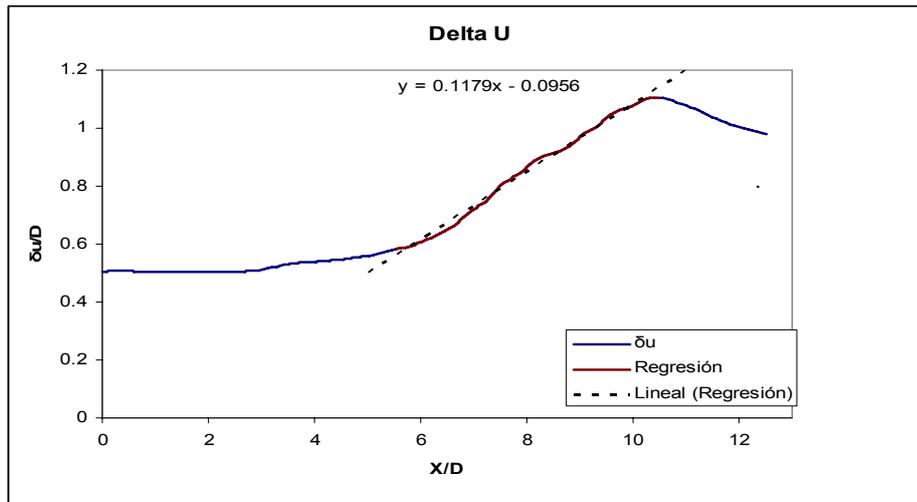


Figura 5.15. Evolución de la mitad del grosor del chorro redondo

En la gráfica 5.16, se muestra la relación que existe en el decremento de la velocidad en la línea central del chorro, la cual representa su centro potencial como función de la dirección longitudinal en el caso del chorro redondo se tiene una relación lineal entre el promedio de la velocidad en cada punto de la línea central en la dirección longitudinal y su velocidad inicial.

En esta figura 5.16 se puede observar claramente lo citado anteriormente, la poca o nula interacción entre las componentes de la velocidad en la etapa de transición, desde $X/D=0$ hasta $X/D=5$, lo cual comprueba que el chorro redondo empieza a transferir energía a las demás componentes una vez que ha empezado la etapa de turbulencia.

Al igual que en la gráfica anterior la última etapa dentro del dominio computacional representa la herramienta numérica amortiguadora del chorro dicha zona está representada desde $X/D=10$ y hasta $X/D=12$.

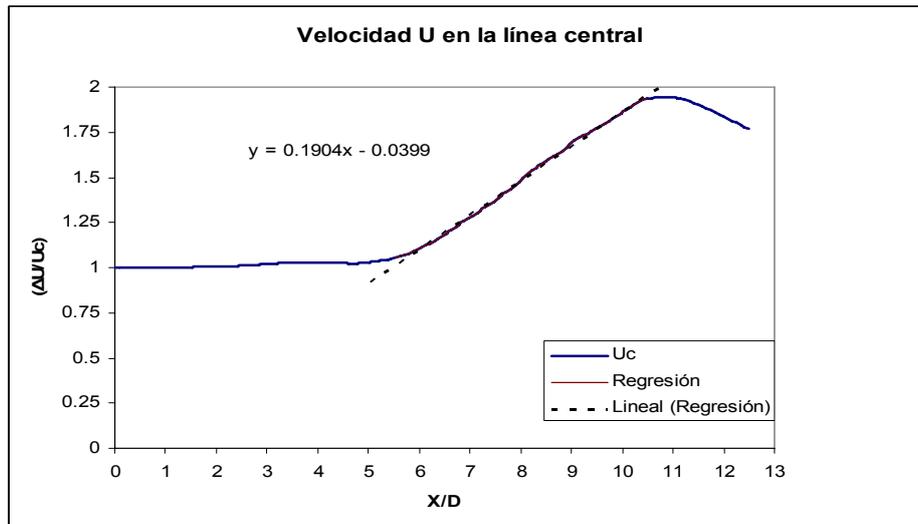


Figura 5.16. Decremento de la velocidad promedio en la línea central.

La importancia de estas dos gráficas se refleja en la sección de tendencia lineal de las mismas (representada por la línea punteada), ya que dicha sección representa la zona de autosemejanza, importante para el estudio estadístico. En esta zona se lleva a cabo el comparativo con otros trabajos de investigación y de esta manera se podrá validar el código numérico empleado.

Las siguientes relaciones lineales representan el comportamiento de los chorros en la zona de autosemejanza, estas relaciones fueron obtenidas de un trabajo de investigación previo de Hussein, Capp and George (1994). La ecuación (5.1) representa la relación lineal del grueso del chorro en dirección longitudinal y la ecuación (5.2) representa el decremento de la velocidad en la línea central.

$$\frac{\delta_{0.5}(x)}{D} = C_d \left[\frac{x}{D} - C_{d1} \right] \dots \dots \dots (5.1)$$

$$\frac{U_1}{u_x} = \frac{1}{B_1} \left[\frac{x}{D} - B_{U1} \right] \dots\dots\dots(5.2)$$

Dado el comportamiento universal de los chorros en la zona de turbulencia desarrollada, estos pueden ser comparados entre si, sin mayor problema, por lo cual se pueden tomar como puntos de comparación para poder determinar la validez del código numérico utilizado.

La siguiente tabla 5.17 muestra diferentes resultados obtenidos por diversos autores con métodos diferentes, pero todos comparados en la zona de turbulencia completamente desarrollada y en la llamada zona de auto similaridad.

Modelos de chorros	C_d	C_{d1}	$\frac{1}{B_u}$	B_{u1}
Resultados LES 2006	0.118	-0.09	0.19	-0.04
Resultados LES 2005	0.123	-2.48	0.260	-3.53
DNS Stanley (2002)	0.092	2.63	0.201	1.23
Ramaprian & Chandrasekhara	0.110	-1.00	0.093	-1.60
Browne (1983)	0.104	-5.00	0.143	-9.00
Thomas & Prakash (1991)	0.110	0.14	0.220	-1.20
Thomas and Chu (1989)	0.110	0.14	0.220	-1.19
Gutmark & Wygnansky (1976)	0.100	-2.00	0.189	-4.72
Hussain and Clark (1977)	0.118	2.15	0.123	4.47
Pendiente promedio experimental	0.108	-0.688	0.181	-1.943

Figura 5.17. Principales parámetros de comparación lineal para: La evolución de la mitad del grueso del chorro redondo y el decremento de la velocidad promedio en la línea central.

Al analizar los resultados estadísticos obtenidos con el código numérico empleado en el presente trabajo de las gráficas que representan el comportamiento universal de los chorros, podemos observar que estos son muy parecidos a los encontrados en las referencias, sobre todo con los de Hussein, que son el principal parámetro de comparación para esta tesis. Aunque todos los estudios se realizaron con diferentes condiciones y circunstancias, la tasa de crecimiento referida para du (C_d) es consistente en todos los casos y no se observa demasiada variación en los diferentes casos. Al comparar la pendiente del chorro redondo $C_d=0.118$ con la pendiente promedio de los diferentes experimentos $C_d=0.108$ se tiene una ligera variación, pero esta variación no es motivo para no poder validar el código numérico, ya que esta pendiente obtenida muestra buena consistencia con los resultados experimentales y podemos decir que el error estadístico es pequeño además de considerar que todos los estudios son diferentes entre sí para cada caso de du .

El caso de variación del origen virtual C_{d1} es diferente, ya que este solo afecta la extensión del núcleo potencial y este núcleo se transforma en turbulencia desarrollada específica en cada estudio. Este efecto se ve alterado por las condiciones de salida del chorro; se puede decir que al tener en el presente trabajo un ambiente totalmente controlado solo afectado por las herramientas numéricas de salida (ruido blanco) utilizado para que el chorro alcanzará rápidamente su estado de turbulencia desarrollada en un corto dominio computacional. Por lo tanto la C_{d1} solo determinó el tamaño de la zona de transición del chorro redondo.

Lo mismo pasa con la velocidad u en la línea central, ya que tanto para la pendiente $\frac{1}{B_U}$ como para el origen virtual B_{U1} son los bastante consistentes respecto a los resultados experimentales de diferentes autores, ya que el resultado obtenido por la simulación LES (2006) para la pendiente solo varía un poco respecto al promedio de todos los trabajos anteriores, donde se nota mayor incertidumbre para B_{U1} , pero al igual que el caso anterior, éste nos muestra la rapidez con que el chorro alcanza el estado de turbulencia, otra situación muy importante es poder notar dónde empieza la velocidad longitudinal a interactuar con las otras variables de la velocidad como se había mencionado anteriormente.

Como se puede observar en las figuras 5.15 y 5.16 la zona de turbulencia para este chorro comienza a partir de $X/D=5.5$ y termina en $X/D=10.5$. Es importante resaltar que este dominio computacional de la zona de tendencia lineal no corresponde con el dominio computacional de toda la simulación, debido principalmente al efecto de la capa esponja (zona donde los perfiles caen) la cual debe ser tomada en cuenta como se ha mencionado anteriormente, sin esta herramienta propia de la simulación, las condiciones de frontera afectarían de manera considerable los resultados en la zona de autosemejanza.

Dentro de los parámetros que existen para comparar chorros turbulentos, por parte de diversos autores contamos con la velocidad promedio longitudinal (u) y el comportamiento de los esfuerzos turbulentos o de Reynolds, conocidos también como segundos momentos de la velocidad que interactúan en el desarrollo del flujo

dentro del fluido que lo rodea. Uno de estos trabajos fue realizado por Silva and Métais (2002), el cual esta sustentado en el trabajo más importante que existe para determinar el comportamiento de chorros, el cuál fue realizado por Hussein (1994),

La velocidad longitudinal presenta una alta variación en dirección normal, puesto que el promedio (figura 5.18) cae rápidamente hasta el valor mínimo. Esto se debe a la expansión del chorro y la disminución de velocidad que sufre del centro hacia la orilla del chorro redondo en la transición hacia la zona de turbulencia completamente desarrollada, este comportamiento nos indica que se alcanzó la zona de autosemejanza.

Al analizar y comparar los datos experimentales y los resultados obtenidos a través del método LES en diversos planos dentro de la zona de auto semejanza, se determina una buena concordancia entre ambos, lo que nos lleva a corroborar la validez del modelo numérico presentado en este trabajo, de acuerdo a la velocidad principal y representativa del flujo.

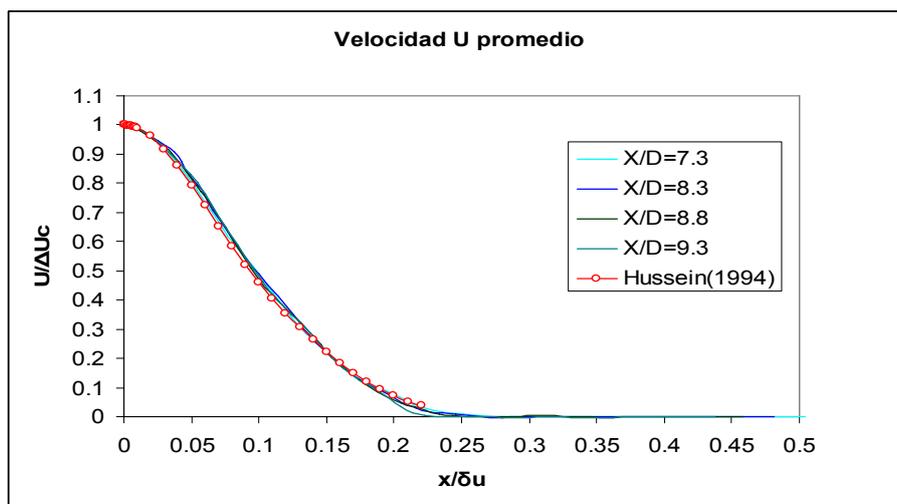


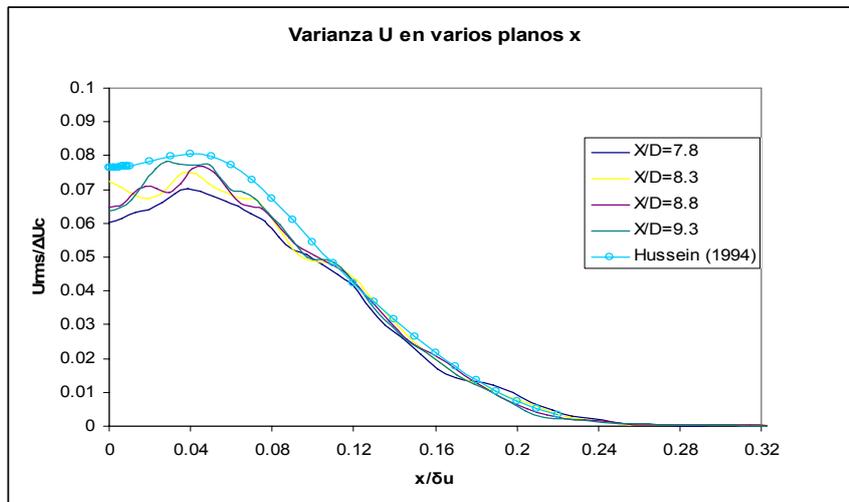
Figura 5.18. Velocidad longitudinal promedio del chorro redondo en zona de autosemejanza

Para este estudio de investigación se consideraron solo dos de las seis posibles componentes que relacionan las variables del tensor de esfuerzos de Reynolds, éstas se presentan en las figuras 5.19 y 5.20, que representan a u_{rms} y $u'w'$, respectivamente.

En la figura 5.19 se presenta el esfuerzo normal de Reynolds en diferentes planos dentro de la zona de autosemejanza. Al comparar este esfuerzo de la simulación con el realizado por Hussein se encuentra cierta distorsión por una falta de convergencia de las estadísticas. Se necesitaría un mayor tiempo de cálculo, aunque el comportamiento es el mismo y sus perfiles tienden a ser similares.

Lo más sobresaliente a destacar dentro de esta figura 5.19 es el pico máximo característico en este tipo de fenómenos, este se alcanza a una distancia $x/\delta u$ aproximada a 0.06 parecida a la distancia para el chorro experimental, por lo que se puede concluir que la simulación es consistente con el modelo experimental. Este pico se obtiene como resultado de la máxima producción de energía turbulenta.

Una vez alcanzado de manera muy rápida el máximo esfuerzo normal, éste empieza a decaer igual de rápido desde el punto $x/\delta u=0.1$, y se estabiliza hasta una asíntota en el valor de cero desde el punto $x/\delta u=0.22$, donde se ha alcanzado el estado de autosemejanza.

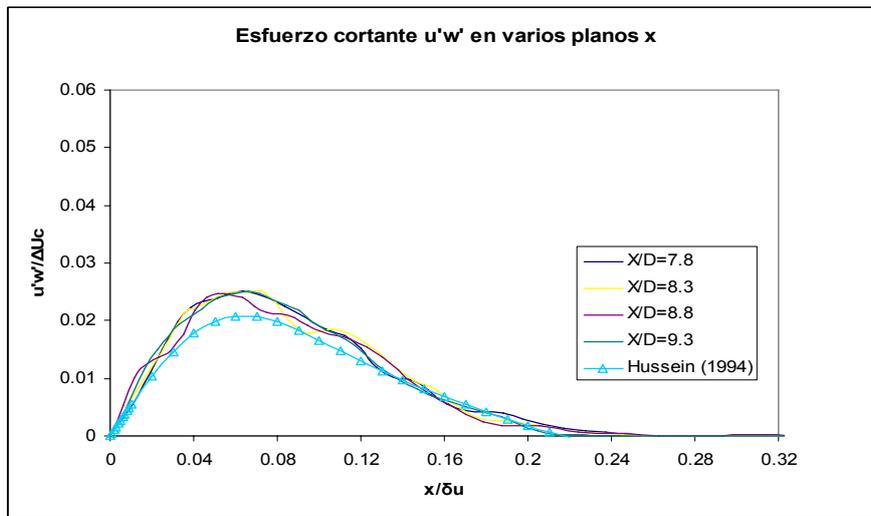


5.19. Esfuerzo normal de Reynolds. Esfuerzo u_{rms} en varios planos x simulación LES (2006) comparado con u_{rms} experimento Hussein (1994).

Resulta evidente también en la figura 5.20 la similaridad en comportamiento y perfiles en diferentes planos para el esfuerzo cortante de Reynolds $u'v'$ obtenido por Hussein (1994) y la simulación LES (2006). Estas gráficas representan al esfuerzo cortante de mayor magnitud de la simulación. Como se puede observar en la gráfica, el perfil es muy parecido al experimental realizado por Hussein, pero la predicción no se logra por completo dado que el mayor valor en la simulación se alcanza en

$$\frac{u'w'}{\Delta U_c} = 0.025 \text{ y el experimento se obtiene a } \frac{u'w'}{\Delta U_c} = 0.021, \text{ aunque esta variación}$$

puede deberse solo a la resolución de la malla utilizada.



5.20. Esfuerzo cortante $u'w'$. Esfuerzo $u'w'$ en varios planos x simulación LES (2006) comparado con esfuerzo $u'w'$ experimento Hussein (1994)

CONCLUSIONES

Al analizar los resultados obtenidos para un “*chorro redondo*” a través de la simulación numérica desarrollada en el instituto de ingeniería de la UNAM por medio de la técnica LES (Large Eddy Simulation) se puede concluir lo siguiente:

Al comparar rigurosamente los resultados arrojados por medio del código numérico, se puede concluir que la simulación numérica empleada para representar este tipo de fenómenos es válida de acuerdo a la gran semejanza que se obtuvo en las estadísticas, visualización de estructuras turbulentas tridimensionales y contornos con los casos experimentales y numéricos que se encontraron en las referencias, esto sobre todo en la zona de autosemejanza, espacio donde se pueden estudiar los chorros.

Al comparar los resultados estadísticos obtenidos en este trabajo se pudo observar una gran similitud con los obtenidos por Hussein, (el principal parámetro de validación del chorro redondo), ya que el perfil universal de velocidad en la zona de turbulencia desarrollada muestra tan solo una ligera variación respecto al trabajo de Hussein al igual que la parte fluctuante de la velocidad, por lo cual no existe una

razón suficiente para no validar el código numérico utilizado en esta tesis. Por lo que esta simulación se puede utilizar para estudiar casos similares con diferentes condiciones iniciales o de frontera.

El comportamiento del flujo fue el esperado debido a que la geometría del chorro se vio reflejada en el desarrollo del mismo y se presentaron las mismas situaciones que en las referencias consultadas. Además se logró una transición a la etapa de turbulencia desarrollada en un corto dominio computacional, lo cual es uno de los parámetros importantes dentro de las simulaciones numéricas.

Este código numérico validado es muy interesante debido a que se basa en la técnica LES razón por la cual el tiempo para la obtención de resultados es relativamente corto respecto a otras técnicas al igual que el dominio computacional. La ventaja de esta técnica es la simulación de las grandes escalas sin perder de vista las pequeñas escalas, por lo que no se pierde información y los resultados obtenidos se vuelven aún más precisos, con lo que este código puede ser utilizado a futuro para variar propiedades del flujo y estudiar detalles de mayor especialización en el comportamiento de chorros.

Como parte final de este trabajo de investigación se puede mencionar alguna recomendación para la obtención de los resultados, se podría considerar el amentar el número de nodos en la malla con el fin de obtener una mayor convergencia de las estadísticas, aunque se debe tener presente que esto implica un mayor tiempo de

simulación, pero la ventaja es que al aumentar los nodos se podrán obtener gráficas más limpias.

Resulta evidente la dificultad del estudio de este tipo de fenómenos debido a la complejidad de los mismos, razón por la cuál el desarrollar técnicas que nos ayuden a visualizar y analizar estos es de gran valor, por lo cuál la validación de este código numérico tiene un valor extra, debido a que los resultados obtenidos por este son de calidad y permitirá estudiar de mejor manera los chorros turbulentos.

APÉNDICE I

Condiciones de frontera

Para visualizar de mejor manera el comportamiento del fenómeno se ha resuelto proporcionar movimiento en el fluido circundante del fenómeno, esta medida se ha tomado para flujos simulados y experimentales, esto no afecta el fenómeno siempre y cuando sea constante en toda la frontera de entrada, por lo que el fluido que circunda al chorro pasa a ser flujo circundante (co-flow).

En el dominio del flujo se han implementado diferentes condiciones de frontera, las cuales se muestran en la figura 1.1, que afectan el desarrollo del chorro, dichas fronteras son: la pared adiabática deslizante en las direcciones "Y" y "Z", una condición de frontera en la entrada para el flujo y su fluido circundante con su respectiva salida, esto en la dirección "X", a continuación se detalla la solución empleada en la investigación.

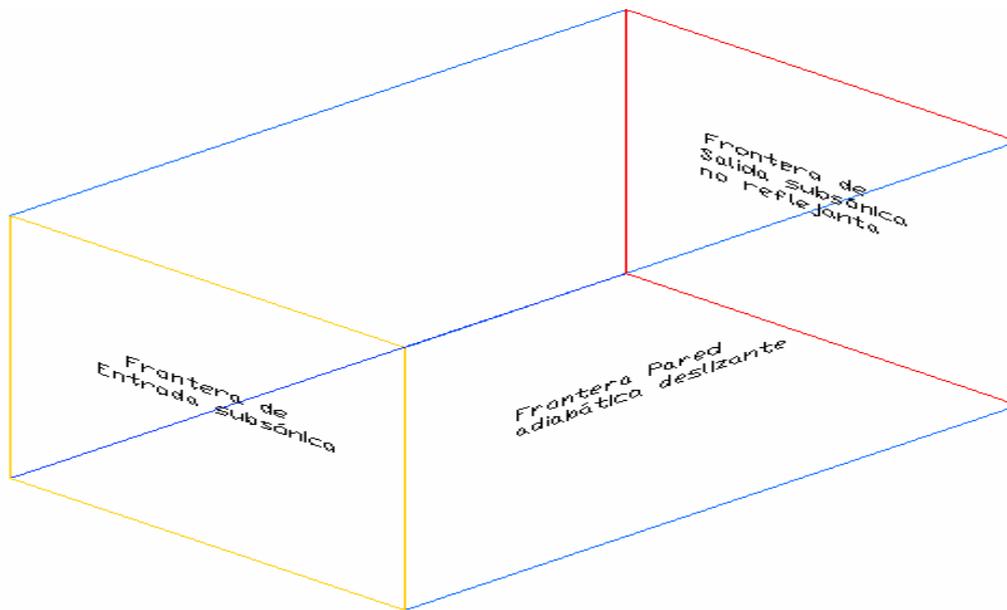


Figura 1.1. Visualización de las condiciones de frontera en el dominio computacional

Un aspecto fundamental dentro del trabajo es la definición de las condiciones de frontera, ya que dichas fronteras afectan el desarrollo del chorro redondo turbulento por lo que particularmente en este caso se utilizó el método conocido como Navier-Stokes Characteristic Boundary Conditions (NSCBC) y muy particularmente las condiciones de frontera elaboradas por Poinot-Lele, el cuál consiste en partir de las ecuaciones de Euler y después extender el análisis para las ecuaciones de Navier-Stokes, bajo ciertas condiciones, cuando el término viscoso desaparece.

La intención de utilizar este método es resolver las ecuaciones de una manera distinta al resto del dominio, debido a la naturaleza hiperbólica de las ecuaciones compresibles, ya que las cinco diferentes variables se propagan en forma de ondas acústicas (Thompson, 1990).

Estas ondas poseen ciertas velocidades características asociadas con la amplitud de cada onda. Las velocidades de las cinco ondas son: u , u , u , $u+c$, $u-c$; donde u es la velocidad local del flujo y c es la velocidad local del sonido. Por lo que tres variables viajan a la misma velocidad u , una lo hace a velocidad $u+c$ mayor con el objetivo de “recopilar” información sobre las condiciones que se encontraran más “adelante”, la última variable de velocidad $u-c$ viaja en dirección contraria a las otras cuatro.

Es necesario conocer las velocidades y la temperatura para poder resolver las ecuaciones de onda del flujo compresible y subsónico, de esta manera se tiene cuatro condiciones de frontera física y otra más al resolver la variable ρ necesaria para el método numérico. Es necesario para aventajar la solución en el tiempo determinar las amplitudes L de las diferentes ondas que cruzan las fronteras, solución que a continuación se muestra, para un flujo viscoso compresible en coordenadas cartesianas:

Dado un flujo viscoso compresible las ecuaciones de dinámica de fluidos en coordenadas cartesianas son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (m_i) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(\rho E + p)u_i] = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j \tau_{ij}) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(m_i u_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.3)$$

donde

$$\rho E = \frac{1}{2} \rho u_k u_k + \frac{p}{\gamma - 1} \quad (1.4)$$

$$m_i = \rho u_i \quad (1.5)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (1.6)$$

Donde, p es la presión termodinámica, m_i es la cantidad de movimiento en la dirección x_i , ρE es la energía total (cinética e interna). El flujo de calor a lo largo de x_i llamado q_i esta dado por

$$q_i = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (1.7)$$

La conductividad térmica λ es obtenida del coeficiente de viscosidad μ de acuerdo a

$$\lambda = \mu \frac{C_p}{P_r} \quad (1.8)$$

donde P_r es el número de Prandtl.

Considerando una frontera localizada en $x_1 = L$ (figura 1.2). Usando el análisis para modificar los térmicos hiperbólicos (convectivos) en las fronteras el sistema se reescribe:

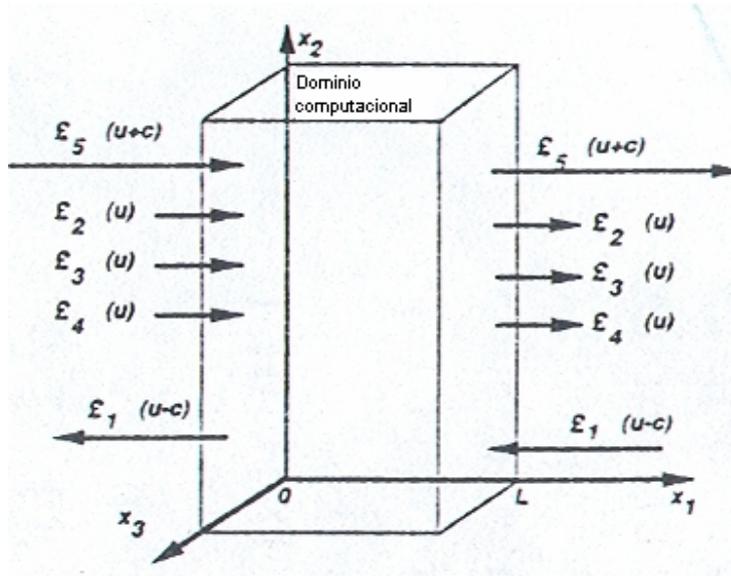


Figura 1.2. Entrada y salida de las ondas al dominio computacional para un flujo subsónico

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + d_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}(m_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(m_3) = 0 \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{1}{2}(u_k u_k) d_1 + \frac{d_2}{\gamma - 1} + m_1 d_3 + m_2 d_4 + m_3 d_5 + \frac{\partial}{\partial x_2}[(\rho E + p)u_2] + \frac{\partial}{\partial x_3}[(\rho E + p)u_3] \\ & = \frac{\partial}{\partial x_i}(u_j \tau_{ij}) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial m_1}{\partial t} + u_1 d_1 + \rho d_3 + \frac{\partial}{\partial x_2}(m_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(m_1 u_3) = \frac{\partial \tau_{1j}}{\partial x_j} \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial m_2}{\partial t} + u_2 d_1 + \rho d_4 + \frac{\partial}{\partial x_2}(m_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(m_2 u_3) + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial \tau_{2j}}{\partial x_j} \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial m_3}{\partial t} + u_3 d_1 + \rho d_5 + \frac{\partial}{\partial x_2}(m_3 u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(m_3 u_3) + \frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial \tau_{3j}}{\partial x_j} \quad (1.13)$$

Los términos diferentes entre los sistema de ecuaciones (1.9 – 1.13) se modelan a partir de una descomposición local de las ecuaciones de Navier-Stokes en ecuaciones de onda. El vector \mathbf{d} esta dado por el análisis de características (Thompson) y puede ser expresado como

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c^2} \left[\mathcal{L}_2 + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) \right] \\ \frac{1}{2}(\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) \\ \frac{1}{2\rho c}(\mathcal{L}_5 - \mathcal{L}_1) \\ \mathcal{L}_3 \\ \mathcal{L}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(c^2 m_1)}{\partial x_1} + (1-\gamma)\mu \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Donde las L_i son las amplitudes de las ondas características asociadas con cada velocidad característica λ_i . Estas velocidades están dadas por:

$$\lambda_1 = u_1 - c \quad (1.15)$$

$$\lambda_5 = u_1 + c, \quad (1.16)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = u_1, \quad (1.17)$$

donde c es la velocidad del sonido para un gas ideal:

$$c^2 = \frac{\gamma P}{\rho} \quad (1.18)$$

λ_1 y λ_5 son las velocidades de ondas acústicas moviéndose a lo largo del dominio en la dirección x_1 ; donde λ_2 es la velocidad de convección de la entropía y λ_3 y λ_4 son

las velocidades de convección u_2 y u_3 respectivamente y u es la velocidad convectiva (la velocidad a la cuál el fluido localmente viajará en la dirección x_1)

Las L_i están dadas por:

$$\mathcal{L}_1 = \lambda_1 \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} - \rho c \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \quad (1.19)$$

$$\mathcal{L}_2 = \lambda_2 \left(c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \quad (1.20)$$

$$\mathcal{L}_3 = \lambda_3 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (1.21)$$

$$\mathcal{L}_4 = \lambda_4 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \quad (1.22)$$

$$\mathcal{L}_5 = \lambda_5 \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho c \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \quad (1.23)$$

Una simple interpretación física de las L_i puede ser dado como la linealización de las ecuaciones de Navier-Stokes para ondas acústicas no viscosas unidimensionales. Considerando ondas propagándose a la velocidad $\lambda = u_1 - c$. Si p' y u' son las perturbaciones de presión y de velocidad, las amplitudes de onda $A_1 = p' - \rho c u'$ se conservan a lo largo de la línea característica $x + \lambda_1 t = \text{const}$, así que:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial A_1}{\partial x_1} = 0 \quad \text{ò} \quad \frac{\partial A_1}{\partial t} + \mathcal{L}_1 = 0.$$

En una localización dada ($-L_1$) representa la variación en el tiempo de la amplitud de onda A_1 . Por analogía, llamaremos a las L "s la variación de amplitud de las ondas características cruzando la frontera. Esta relación entre las L y la amplitud de ondas cruzando las fronteras es la mayor ventaja de los modelos de ecuaciones de conservación.

La aproximación usada en la técnica NSCBC es para inferir valores para la variación de la amplitud de las ondas en casos multidimensionales viscosos examinando un problema no viscoso unidimensional (LODI por sus siglas en inglés) asociado localmente.

En cada punto de la frontera nosotros podemos obtener tales sistemas LODI considerando el sistema de ecuaciones (1.9 – 1.13) y omitiendo el término viscoso y transversal. Las ecuaciones resultantes son fáciles de interpretar y nos permiten inferir valores para las variaciones de amplitud de onda considerando el flujo localmente como no viscoso y unidimensional.

El sistema LODI puede ser lanzado en muchas diferentes formas dependiendo de la elección de las variables. En términos de variables primitivas, el sistema LODI es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \left[\mathcal{L}_2 + \frac{1}{2} (\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) \right] = 0 \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2} (L_5 + L_1) = 0 \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2\rho c}(\mathcal{L}_5 - \mathcal{L}_1) = 0 \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathcal{L}_3 = 0 \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \mathcal{L}_4 = 0 \quad (1.28)$$

Frontera de entrada subsónica

Existen muchas condiciones de frontera física, para la entrada de un flujo. En este trabajo se eligió un caso donde las componentes de la velocidad en u_1 , u_2 , u_3 y la temperatura T son conocidas, ya que estas cualidades pueden cambiar con el tiempo y en función de la localización espacial en el plano de entrada $x_1=0$. La presión o la densidad deben ser resueltas a partir de las condiciones de frontera.

$$u_1(0, x_2, x_3, t) = U(x_2, x_3, t)$$

$$u_2(0, x_2, x_3, t) = V(x_2, x_3, t)$$

$$u_3(0, x_2, x_3, t) = W(x_2, x_3, t)$$

$$T(0, x_2, x_3, t) = T(x_2, x_3, t).$$

Este caso es típico de simulación directa de flujos turbulentos donde deseamos tener control del cortante de entrada y de la perturbación. Para un flujo subsónico tridimensional, entran al dominio cuatro características L_2 , L_3 , L_4 , y L_5 mientras una de ellas (L_1) esta saliendo del dominio a velocidad $\lambda_1 = u_1 - c$. Tenemos cuatro condiciones de frontera físicas para u_1, u_2, u_3 y T y una condición de frontera suave

para ρ . La relación no viscosa es necesaria en este caso. Para avanzar la solución en el tiempo en la frontera, necesitamos determinar las amplitudes L_j de las diferentes ondas cruzando la frontera. Solo una de estas ondas (L_1) puede ser obtenida de puntos interiores. Las otras están dadas por el procedimiento NSCBC siguiente:

Paso 1. Las velocidades de entrada u_1, u_2, u_3 están dadas, por lo tanto, las ecuaciones (1.11), (1.12), (1.13) no son necesarias. La temperatura de entrada también está dada y la ecuación de la energía (1.10) tampoco es necesaria.

Paso 2. Como la velocidad de entrada u_1 está dada, la relación sugiere la siguiente expresión para L_1 :

$$\mathcal{L}_5 = \mathcal{L}_1 - 2\rho c \frac{dU}{dt} \quad (1.29)$$

Como la temperatura en la entrada es dada, la relación LODI da una estimación de la amplitud de onda de la entropía L_2 :

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}(\gamma - 1)(\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) + \frac{\rho c^2}{T} \frac{dT}{dt}$$

Las relaciones de LODI (1.27) y (1.28) muestran que $\mathcal{L}_3 = -dV / dt$ y $\mathcal{L}_4 = -dW / dt$.

Paso 3. La densidad ρ puede obtenerse usando la ecuación (1.9),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + d_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho u_2) = 0 \quad (1.9)$$

donde d_1 esta dado por la ecuación (3.15).

$$d_1 = \frac{1}{c^2} \left[\mathcal{L}_2 + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) \right]$$

L_1 es obtenida de puntos interiores usando la ecuación 1.19 L_2 y L_5 han sido determinadas del paso 2. En este caso L_3 y L_4 no son necesarias.

Frontera de salida del flujo: Salida subsónica no reflejante

En la salida se tiene una condición de frontera de flujo subsónico no reflejante, esto con el objetivo de evitar ruido provocando por ondas que pueden reflejarse, aunque no se puede evitar que exista cierto reflejo de las algunas ondas pero esto puede ser aprovechado para tener información de las condiciones que se encuentran al final.

Si consideramos una salida subsónica donde se pretende implementar una condición de frontera no reflejante, se puede ver que existen cuatro ondas características L_2 , L_3 , L_4 y L_5 salen del dominio mientras que una de ellas (L_1) está entrando a una velocidad $\lambda_1 = u_1 - c$. Especificando una condición de frontera no viscosa para las variables primitivas se generarán ondas reflejadas. Por ejemplo, si se coloca la presión estática en la salida $p = p_\infty$ conducirá a un problema definido, el cuál, sin embargo, creará ondas reflejantes. Nosotros necesitamos añadir información física en la presión estática media p_∞ para nuestro conjunto de

condiciones de frontera para que el problema se mantenga bien definido. Después las ondas han salido del dominio, exceptuando la presión en cada punto de la salida para ser cercana a p_∞ . Para obtener una solución sencilla de estas condiciones se ha optado por una sencilla modificación en el procedimiento NSCBC, el cual se describe a continuación:

Paso 1. Considerando una condición de frontera física especial, la presión en el infinito esta determinada. Esta condición no fija a ninguna de las variables dependientes en la frontera por lo que el sistema de ecuaciones de conservación esta determinado por las ecuaciones (1.9 – 1.13).

Paso2. La condición de presión constante en el infinito se usa para obtener la variación de amplitud de la onda entrante L_1 : si la presión de salida no es cercana a p_∞ ondas reflejadas entrarán al dominio atravesando la salida para traer presión media a un valor cercano a p_∞ . Por lo que esto se puede definir adecuadamente utilizando la relación:

$$\mathcal{L}_1 = K(p - p_\infty) \quad (1.30)$$

donde K es una constante: $K = \sigma(1 - \mathcal{M}^2)c/L$. M es el máximo número de Mach en el flujo, L es una longitud característica del dominio y σ es una constante.

Algunos problemas son sencillos para poder obtener tener un valor exacto. Entonces la ecuación anterior se reescribe como:

$$\mathcal{L}_1 = K(p - p_\infty) + \mathcal{L}_1^{exacto}$$

El segundo término asegura una precisión al procesar derivadas entre ambos lados de la frontera mientras el primer término sirve para almacenar el valor medio alrededor de p_∞ .

Paso 3. Todos los L_i con $i \neq 1$ pueden ser estimados a partir de puntos interiores. L_1 está dada por la ecuación (1.30) y el sistema de ecuaciones (1.9) – (1.13) puede ser usado para ventajar la solución en el tiempo en la frontera.

Frontera Pared adiabática deslizante.

Este tipo de condición de frontera se utiliza en varias soluciones computacionales. Su principal característica está dada por el hecho de que solo se tiene una condición no viscosa, la velocidad normal a la pared es cero ($u_1(L, x_2, x_3, t) = 0$). Las relaciones de viscosidad corresponden a esfuerzos tangenciales y flujos de calor nulos a través de la pared. Así como la velocidad normal tiene valor de cero, por lo que las amplitudes de onda L_2 , L_3 y L_4 también corresponden a valores cero. Una onda L_5 está saliendo del dominio a través de la pared mientras una onda reflejada L_1 está entrando al dominio:

Paso 1: La velocidad u_1 normal a la pared es cero y la ecuación (1.11) no es necesaria.

Paso 2: La relación de LODI (1.26) sugieren que la amplitud de la onda reflejada sea:

$$L_1 = L_5.$$

Paso 3: L5 es procesada de los puntos interiores y L1 es colocada en L5. Las derivadas a lo largo de x_1 de los esfuerzos tangenciales viscosos τ_{12}, τ_{13} y del flujo de calor normal q_1 en la pared son obtenidos usando la condición viscosa en la pared: $q_1=0, \tau_{12} = \tau_{13} = 0$. Las variables restantes (ρ, u_2, u_3 y T) son obtenidas por integración de las ecuaciones (1.9) – (1.10) y (1.12) – (1.13).

REFERENCIAS

- BEREZOWSKY, M. (1994) “*Análisis de flujos turbulentos a superficie libre*”. Series del Instituto de Ingeniería de la UNAM, México D.F.
- DE LA LAMA, M. (2005) “*Simulación de grandes escalas de un chorro plano compresible*”. Instituto de Ingeniería de la UNAM, México D.F.
- DUBIEF, Y. and Delcayre, F. (2000) “*On coherent-vortex identification in turbulence*”. Journal of turbulence, Ed. Taylor and Francis Grup, Vol. **1**, pp. 01.
- COMTE, P. and Lesieur, M. (1997) “*Large-eddy simulation of compressible turbulent flows*”. Turbulence in Compressible Flows, AGARD/VKI Course, AGARD Rep. 819.
- DAVIDE, E. (1993) “*Modélisation des écoulements compressibles et hypersoniques: Une approche instationnaire*”. PhD Thesis, Institut National Polytechnique d Grenoble, France.
- FAVRE, A. (1965) “*Equations des gaz turbulents compressibles, II: Méthode des vitesses macroscopiques pondérées par la masse volumique.*” Journal de mécanique. Ed. Université de Nice Sophia-Antipolis Vol. **4**, pp. 391-421.
- HUNT, J.C.R; Wray, A.A. and Moin, P. “*Eddies stream and convergence zones in turbulent flow*”. Annual Research Briefs, Stanford University, 1988.
- HUSSEIN, H.J., Capp S.P. and George W.K. (1994) “*Velocity measurements in a high-Reynolds-number, momentum-conserving, axisymmetric, turbulent jet*”. Journal Fluid Mechanical, Vol. **258**, pp. 31-75.
- KOLMOGOROV, A. M. (1941) “*On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid*”. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol. **31**, pp. 538-541.
- LELE, S.K. (1992) “*Compact finite difference schemes with spectral-like resolution*”. Journal Computation Physics, Vol. **103**, pp. 15.
- MÉTAIS, O. and Lesieur, M. (1996). “*New trends in large eddy simulations of turbulence*”. Annu. Rev. Fluid Mechanical, Vol. **28**, pp. 45-82.
- POISSON, T.J. and Lele, S.K. (1992) “*Boundary conditions for direct simulation of compressible viscous flows*”. Journal Computation Physics Vol. 101, pp. 104-129.
- SALINAS, Vázquez M. and Métais O. (2002). “*Large-eddy simulation of the turbulent flow through a heated square duct*”. Journal Fluid Mechanical, Vol. 453, pp. 202-207.

- SILVA, C.B. and Métais O. (2002) “*Vortex control of bifurcating jets: A numerical study*”. Physics of Fluids, Vol. 14, pp. 3798-3819.
- SILVA, C.B. and Métais O. (2002) “*On the influence of coherent structures upon interscale interactions in turbulent plane jets*”. Journal Fluid Mechanical, Vol. **473**, pp. 103-145.
- SILVA, C.B. (2001) “*The role of coherent structures in the control and interscale interactions of round, plane and coaxial jets*”. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- STANLEY, S.A; Sarkar S. and Mellado J.P. (2002) “*A study of the flow-field evolution and mixing in a planar turbulent jet using direct numerical simulation*”. Journal Fluid Mechanical, Vol. **450**, pp. 377-407.
- TENNEKES, H. and Lumley, J.L. (1972) “*A first course in turbulence*”. The M.I.T. Press, Boston, Mass., E.E.U.U.
- THOMPSON, K.W. (1990) “*Time dependent boundary conditions for hyperbolic system*”. Journal Computation Physics, Vol. **89**, pp. 439-461.
- THOMAS, F. O. and Chu, H. C. (1989) “*An experimental investigation of the natural transition of a planar jet: sub armonic suppression and upstream feedback*”. Physics Fluids, vol. **1**, pp. 1566-1587.
- VISUAL, M.R. and Gaitonde D.V. (2002) “*On the Use of Higher-Order Finite-Difference Schemes on Curvilinear and Deforming Meshes*”. Journal of Computational Physics, pp.160.
- WHITE, F.M. (1979) “*MECANICA DE FLUIDOS*”. Mc. Graw Hill, Primera edición, pp. 757.
- WILLIANSON, J.H. (1980) “*Low-storage Runge-Kutta schemes*”. Journal of Computational Physics, Vol. **35**, pp. 48.