



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



**FACULTAD DE CIENCIAS
FISICA**

FASES DE BERRY EN OBJETOS EXTENDIDOS

David Gelwaser

Tutor: Dr. Chryssomalis Chryssomalakos

México, D.F.

Noviembre de 2006



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del alumno

Gelbwaser

Klimovsky

David Andrés

5553 9146

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

40104834 0

2. Datos del tutor

Dr

Chryssomalis

Chryssomalakos

3. Datos del sinodal 1

Dra.

Myriam

Mondragón

Ceballos

4. Datos del sinodal 2

Dr.

José Antonio

García

Zenteno

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Daniel

Sudarsky

Saionz

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Hernando

Quevedo

Cubillos

7. Datos del trabajo escrito.

Fases de Berry en objetos extendidos

68 P

2006

ברוך אתה " חונך הדעת

עמידה י'

Bendito eres Tú Dios, que nos agracias con el
raciocinio.
Amida 18

Miserable. Encima de su cabeza tenía el único
lugar estable del cosmos, la única redención de la
condenación del *panta rei*, y pensaba que era
asunto suyo, y no Suyo. Y poco después ambos se
alejaron; él, adocetrinado con algún manual que
había oscurecido su capacidad de asombro, ella,
inerte, inaccesible al estremecimiento del infinito,
se alejaron sin que, en su memoria, hubiera
quedado huella alguna de aquel encuentro
pavoroso, el primero y el último, con el Uno, el
Ein-Sof, lo Indecible. ¿Cómo no postrarse de
hinojos ante el altar de la certeza.
El péndulo de Foucault

AGRADECIMIENTOS

Creo que antes de empezar es justo agradecer a todas la personas que contribuyeron a que este trabajo sea una realidad. En primer lugar agradezco a mi asesor, el Dr. Chryssomalis Chryssomalakos cuya guía fue esencial para poder desarrollar este trabajo. La realización de los cálculos fue un trabajo en conjunto en el que contribuyeron, además del Dr Chryssomalakos, Elías Okon y Hector Hernandez. A quienes estoy muy agradecido también por su paciencia, apoyo y largas discusiones con el sólo fin de entender un poco más como funcionan las cosas, sin importar que sean de física, política o de la vida. Creo que siempre los comentarios de otras personas son de gran importancia para cualquier cosa que uno haga. Le doy las gracias a Fernanda Villegas y Edith Klimovsky por apoyarme con sus observaciones y comentarios.

Por último, pero no menos importante, agradezco a esa gran institución, que aunque tiene sus deficiencias, no deja de ser grande y que a formado a cientos de miles de profesionales a lo largo de su historia, la UNAM. No solamente quiero agradecer a la institución, sino a todos y cada uno de sus profesores y personal que hacen posible su funcionamiento. Y aprovecho para también agradecer a México ya que al ser la UNAM una universidad pública, permitió que mis estudios fueran posibles.

Índice general

1. Antecedentes Geométricos	1
1.1. Haces fibrados vectoriales	1
1.1.1. Definiciones básicas	3
1.1.2. Conexiones en haces fibrados vectoriales	8
1.2. Haces fibrados principales	10
1.2.1. Definiciones básicas	10
1.2.2. Conexiones en haces fibrados principales	11
2. Fases Geométricas	17
2.1. El transporte paralelo de la fase cuántica	17
2.2. El efecto Wilczek-Zee	24
3. Mecánica Cuántica en Subvariedades de \mathbb{R}^n	27
3.1. Métodos de cuantización	27
3.2. Sistema de coordenadas	29
3.3. Dinámica	31
4. Fases Geométricas y Objetos Extendidos	35
4.1. Planteamiento del problema	35
4.2. Resultados	37
5. Conclusiones	51
Apéndice	55
A. Curva	55
B. Perturbaciones	57
B.1. 2° orden	57
C. Mathematica	59

Capítulo 1

Antecedentes Geométricos

1.1. Haces fibrados vectoriales

Supongamos que en la Ciudad de México hay una flecha pintada en el piso. Y también existe una en algún punto de París. Una persona tiene la oportunidad de verlas y le llaman tanto la atención que decide compararlas. Para hacerlo, puede copiarla en una hoja, pero si al transportarla gira la hoja no podrá comparar las direcciones. Otra idea puede ser hablar a un amigo que viera la flecha y por teléfono hacer la comparación. ¿Cómo la describe? Tal vez medir su largo no es difícil pero, ¿qué hacer con su dirección? También se puede medir, pero ¿Respecto a qué? Después de pensar un poco se podrían poner de acuerdo en medirla respecto a la dirección norte de una brújula .

En este punto es importante recalcar que se está tomando en cuenta la forma de la tierra. Primero se compara la flecha con una línea que llega al norte, posteriormente se compara ésta con el meridiano que pasa por la Ciudad de México y, haciendo un par de cálculos con los ángulos que relacionan todas estas líneas, se puede obtener la diferencia de ángulo. Si no conocieran la forma de la tierra y sus distancias, no lo podrían hacer.

Este procedimiento es equivalente a **transportar paralelamente** la flecha sobre la superficie de la tierra, juntarla a la segunda y medir su diferencia. Es necesario también definir cómo se transporta algo paralelamente, para lo cual se utiliza lo que se conoce como una **conexión**. La forma de la tierra influye en cómo se mueve el vector, lo cual es evidente cuando se piensa que en vez de dos vectores en una esfera, están en una hoja de papel plana. En este caso, jugando un poco con un par de escuadras es fácil hacer la equiparación (la hoja de papel o la tierra representan en estos ejemplos el **espacio base** o M).

Siguiendo con el ejemplo, existe otra propiedad interesante. Supongamos que una flecha en el Ecuador es perpendicular al meridiano que pasa por su origen (Ver figura 1.2). La movemos paralelamente siguiendo una curva cerrada de la siguiente forma: primero la subimos por el meridiano hasta llegar al polo norte. Luego, por otro meridiano, separado 90° del original, la bajamos hasta el Ecuador. Como la flecha era perpendicular al primer meridiano, va a ser paralela al segundo. Como el Ecuador es perpendicular a todos los meridianos, la flecha es ahora perpendicular al Ecuador; la movemos a través de este hasta el meridiano original. ¡Sorpresa! La flecha en vez de ser perpendicular al meridiano, es paralela. En pocas palabras, al transportar un vector de forma paralela, al regresar al punto original no siempre se obtiene el mismo vector. Esta propiedad se llama **holonomía** y está relacionada con la **curvatura** de la esfera.

Todos estos conceptos y algunos más pueden ser descritos con los haces fibrados. La importancia para la física de todo esto reside en que muchas cantidades físicas son vectores. Por lo que es importante conocer sus propiedades y relaciones entre ellos. Además, este tipo de descripción es útil para muchas teorías. En relatividad general, las partículas libres siguen trayectorias geodésicas, curvas cuya tangente es transportada paralelamente. Las teorías de norma, que describen a las partículas elementales, están escritas en este lenguaje, con lo cual se puede obtener una interpretación geométrica de las mismas, y también contestar una pregunta muy natural y sencilla, cómo comparar vectores. Para construir los haces fibrados en general, y en particular los haces vectoriales, se necesitan varios elementos que se relacionan entre sí.

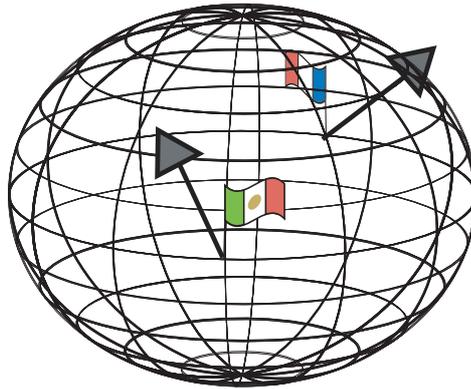


Figura 1.1: ¿Cómo se compara dos flechas en distintos puntos de la tierra?

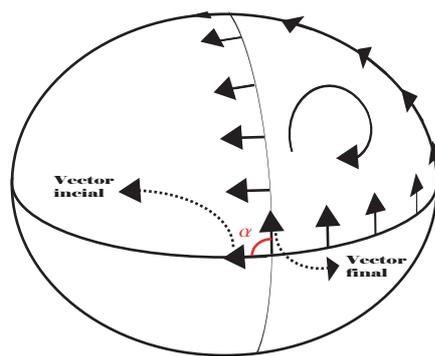


Figura 1.2: Al mover el vector inicial de forma paralela en una esfera, después de dar una vuelta completa, en vez de ser el mismo, el vector ha rotado por un ángulo α .

1.1.1. Definiciones básicas

La construcción siguiente es útil para cualquier tipo de haz fibrado, vectorial o no, salvo en las partes donde explícitamente se menciona. Por lo que gran parte de esta explicación se utiliza para los haces principales, agregando ciertos detalles mencionados en la sección 1.2.

Empecemos con el **espacio base** M que es simplemente una variedad. Este puede ser, por ejemplo, el espacio en el que se mueve una partícula, ya sea \mathbb{R}^k completo o una parte de él. También puede ser un espacio más abstracto, cuyas coordenadas no representen posiciones en el espacio, sino algún parámetro como el espacio de las constantes de Hooke de un sistema de resortes.

U_i es un conjunto abierto de la variedad, $U_i \subseteq M$. Por ser M variedad, localmente es isomorfo a \mathbb{R}^n y se le puede asignar coordenadas, lo que implica que se puede cubrir completamente de U_i de tal forma que $M = \bigcup U_i$. Por lo general, es necesario más de un sistema de coordenadas para cubrir por completo la variedad¹. A cada U_i se le asocia un sistema de coordenadas. Distintos U_i pueden superponerse, lo cual significa simplemente que a un punto de la variedad se le pueden asignar dos coordenadas distintas, lo que es muy común. Por ejemplo, en un plano, un punto puede ser descrito por sus coordenadas cartesianas o por las polares.

Ya que tenemos un espacio base, se le puede asignar a cada punto un espacio vectorial, por ejemplo el espacio tangente. Es importante insistir un poco en la semántica. En muchos libros en vez de utilizar la palabra asignar se usa *por encima*. Sin embargo, esto puede llevar a errores conceptuales ya que tiene connotaciones de dirección. También es importante subrayar que el punto en M no es parte del espacio vectorial.

A cada punto de M se le asocia un espacio vectorial, siendo todos estos de la misma dimensión, por lo cual todas son isomorfas al mismo espacio vectorial F que se conoce como la **fibra**. Sea $p \in M$. La variedad asignada a p se denota F_p y se llama la **fibra en p** . Existe un grupo de Lie, G , llamado **grupo de estructura** que actúa por la izquierda sobre F . Esto quiere decir simplemente que si $g \in G$ y $f \in F$ entonces, $gf \in F$ y $(g_1g_2)f = g_1(g_2f)$. Consideraremos que todas estas operaciones son suaves. La relevancia de G quedará clara poco a poco.

Sea $p \in M$. La variedad asignada a p se denota F_p y se llama la **fibra en p** . Además $F_p \cong F$. En el caso de un haz vectorial, F es un espacio vectorial real o complejo.

Hasta el momento tenemos M y, relacionado con cada punto de M , un espacio vectorial. Por lo tanto, tenemos un conjunto de espacios vectoriales y no existe ninguna relación directa entre ninguno de ellos, como se muestra en la figura 1.3. Es para esto que tenemos que agregar una variedad E que se llama **espacio total**.

Dicha variedad está formada por todas las F_p . ¿Cómo se “acomodan” las distintas F_p para formar E ? Simplemente se ponen una junta a la otra. ¿En qué orden? Simplemente si p y q están en M y son puntos cercanos, entonces F_p y F_q van a ser fibras cercanas en E .²

¿Cómo se relaciona E con M ? Lo que buscamos es un mapeo (que se llama **proyección**, π) que nos diga cómo cada punto en E se relaciona con alguno en M . Sea $u \in E$. No hay que olvidar que por estar u en E , pertenece entonces a alguna F_p para algún p en M . Por lo tanto es muy sencillo construir el mapeo. Simplemente si $u \in F_p$, entonces $\pi : E \rightarrow M$ de tal forma que $\pi(u) = p$. Algo que puede ser útil es notar que $\pi^{-1}(p) = F_p$ reconstruye completamente la fibra en p . Si v es un vector en el espacio vectorial asignado a un punto p , este punto en E se puede representar como (p, v) . Llamémoslo u , tal que $u = (p, v)$, entonces $\pi(u) = \pi(p, v) = p$. Podríamos decir que un punto en E ($u = (p, v)$) contiene información relacionada a M , p , y a F_p , v , y π simplemente “elimina” la parte asociada a F_p , dejando la parte de M .

Veamos un ejemplo un poco más concreto. Supongamos que tenemos un espacio base que es un círculo. En cada punto de éste tomamos los vectores que son tangentes y a la vez perpendiculares al espacio base. A cada punto hemos asociado un espacio vectorial de una dimensión. Todo esto se puede ver en la figura 1.3. En este caso, la fibra es una línea recta (en azul oscuro). Tomemos tres puntos en el círculo, l, j, k . En cada uno de éstos se puede ver dibujado un vector cualquiera que es parte de la fibra asignada a cada

¹Por ejemplo, en el caso de la esfera es necesario utilizar dos sistemas de coordenadas. En el caso particular de la proyección estereográfica, para poder asignar a casi todos los puntos coordenadas, se puede utilizar la proyección desde el polo norte. Sólo este último no tiene coordenadas, lo cual es remediado al utilizar también la proyección desde el polo sur. [Nakahara, Pag: 169-171]

²La forma en la que se acomodan las fibras en el espacio total no es única.

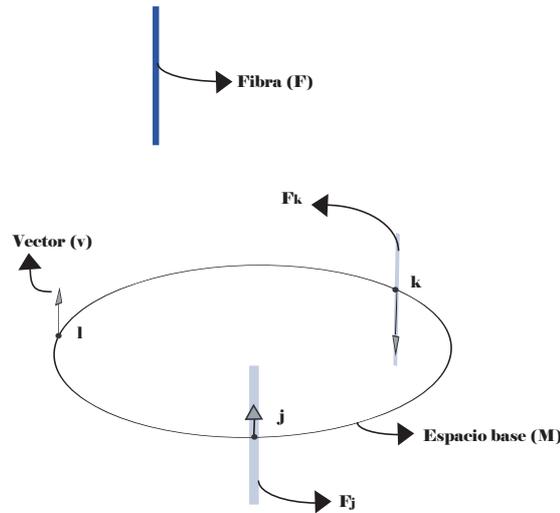


Figura 1.3: Algunos elementos de un haz vectorial. El espacio base es un círculo. Solamente en tres puntos se muestra como ejemplo un elemento (vector) de la fibra asignada a ese punto. Dos de las fibras asignadas a un punto son F_j o F_k . F , la fibra, es el mismo espacio vectorial, pero independiente del círculo.

punto. En particular en los puntos j y k , se ven en azul claro la F_j y la F_k . Salvo el punto del círculo al cual están asignados, éstas dos, y cualquier otra fibra asignada a un punto, son iguales entre sí. Hasta este momento no hemos hablado del espacio total, incluso no se ve en la figura 1.3. En la teoría de los haces fibrados, los vectores y las fibras asignadas a un punto no se encuentran “pegados” al espacio base, como se muestra en el dibujo. Pero la figura es simplemente ilustrativa para aclarar cómo se construyen las fibras, tanto F como las asignadas a un punto. En la figura 1.4, en la cual se construye el espacio total, se ubican todos los elementos donde realmente van.

¿Cómo se relaciona F con E ? Como E tiene información no sólo sobre F sino también sobre M , la función que relaciona F y E necesita información extra sobre M . Por eso se utiliza una función que toma un elemento de U_i y uno de F . La función se llama **trivialización local**, $\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ y es un difeomorfismo. Hay que recordar que $\pi^{-1}(U_i) \in E$. Se podría definir que el contradominio de ϕ_i fuera E , $\phi_i : U_i \times F \rightarrow E$, pero como su imagen en E no es cualquiera, está restringido a $\pi^{-1}(U_i)$, de esta forma sabemos un poco más sobre ϕ_i . ¿Qué nos quiere decir esta restricción a $\pi^{-1}(U_i)$? Que una vez definido $p \in U_i$, queda definido a qué F_p está asignada $\phi_i(p, f)$, donde $f \in F$. Se puede interpretar a las ϕ_i como una función que le asigna coordenadas a E , la coordenada de u es $\phi_i^{-1}(u) = (p, v)$. Para simplificar la notación $\phi_{i,p}(f) \equiv \phi_i(p, f)$. El camino completo desde F a M es $\pi \circ \phi_{i,p}(f) = p$.

$\phi_{i,p}^{-1}$ mapea $\pi^{-1}(U_i)$ al producto cartesiano $U_i \times F$. En pocas palabras, localmente podemos ver a E (sólo la parte que corresponde a $\pi^{-1}(U_i)$) como un producto cartesiano de F con una parte de M , que es U_i . En general no se puede ver todo E como el producto cartesiano de estos dos espacios y es por eso que al definir $\phi_{i,p}$, su dominio es $U_i \times F$ y no $M \times F$. Una fibra que se puede ver toda como un producto cartesiano es el cilindro, y una que no, es la banda de Moebius. Ésta última, al torcerse, tiene una topología más complicada que simplemente $M \times F$.

La figura 1.4 es la continuación del ejemplo anterior. La fibra, una línea recta, el espacio base, un círculo, y el espacio total en este caso es un cilindro. Las tres variedades son independientes entre sí, ninguna forma parte de otra. Sin embargo, se relacionan entre sí a través de la proyección y las trivializaciones locales. Ya que la fibra tiene una estructura de grupo, al multiplicar $g \in G$ por la izquierda de f , se obtiene otro elemento de la fibra, gf . Para pasar de la fibra a E , se utilizan las trivializaciones locales. En este caso, no se consideran las trivializaciones para distintos U_i ³. Las dos trivializaciones de abajo llevan a la misma fibra en E , ya que como su segundo subíndice (j) lo indica, están asignadas al mismo punto en M . En este caso simplemente relacionan dos puntos distintos en F con dos puntos distintos en E , que se encuentran en F_j . Las trivializaciones locales no sólo relacionan dos puntos, sino todo F con la

³Para un ejemplo donde se toman en cuenta, ver la figura 1.5.

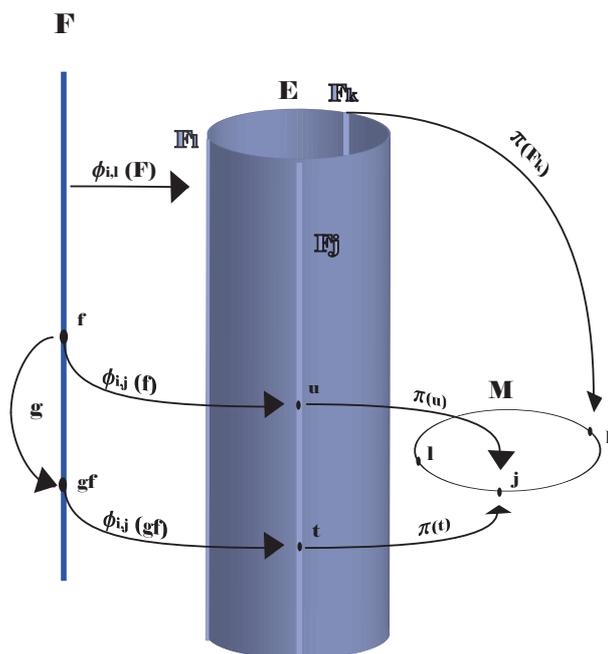


Figura 1.4: Elementos de un haz fibrado y las relaciones entre ellos.

totalidad de alguna F_p , como se puede ver en la trivialización local superior ($\phi_{i,l}$). Ésta va a otra fibra y se denota con el índice l . En este caso, relaciona todo F con toda la fibra asignada a l , F_l .

Dentro de E , están resaltadas tres fibras asignadas a distintos puntos de M . Además de las ya mencionadas, se encuentra también F_k . Las posiciones donde se encuentran tienen que ver con las de los puntos l, j y k en M . Dentro de F_j se marcan dos puntos, u y t . Estos tienen información tanto de F como de M . Al estar los dos en F_j , están asignados al mismo punto en $M(j)$. Sin embargo, como son dos puntos diferentes, representan distintos vectores en F_j .

Los puntos en E son proyectados a M a través de π . Ésta proyecta u y t , al mismo punto en M . La proyección no lleva solamente dos puntos en la misma fibra en E al mismo punto en M , sino a toda la fibra asignada a un punto, como se puede ver para el caso de F_k , donde toda ella es proyectada a un único punto en M .

Cuando se necesitan más de un conjunto (U_i) para cubrir a M , existen también varias ϕ_i , una por cada U_i . Cada $\phi_{i,p}^{-1}$ asocia un punto $u \in E$ con un elemento $f \in F$. Supongamos que $p \in U_i \cap U_j$, entonces existen $\phi_{i,p}$ y $\phi_{j,p}$. Por otro lado $\pi^{-1}(p) = u$. Para el mismo punto en E , u , existen dos puntos en F . Por lo tanto dicho punto está descrito por dos sistemas de coordenadas que pueden ser diferentes: $f_i = \phi_{i,p}^{-1}(u)$ y $f_j = \phi_{j,p}^{-1}(u)$.

Cada $\phi_{i,p}$ define una especie de “parche” de E , que es isomorfo a $U_i \times F$. Ver figura 1.5. Al pegar todos estos “parches” se obtiene E . Como se explica en el párrafo anterior, pueden existir puntos en E , asociados a dos o más elementos de F . Estos puntos en E son aquellos donde los “parches” se superponen. Esta superposición se debe a que existe una superposición en M de los U_i . Al pegar los “parches” entre sí, dos puntos distintos, uno en cada parche, se convierten en el mismo punto en E . Matemáticamente, estamos simplemente asignando una regla de correspondencia entre un punto de cada “parche” o lo que es lo mismo, definiendo una función que nos relaciona f_j y f_i . Esta función se llama **función de transición**, $t_{ij}(p) \equiv \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p} : F \rightarrow F$, donde $t_{ij} \in G$, de tal forma que $f_i = t_{ij}(p)f_j$. Sencillamente las **funciones de transición** nos dicen cómo se pegan los “parches”: Si hay que “torcer” (como en el caso de la banda de Moebius) o si no es necesario, etcetera, en fin, toda la estructura de E . Si los “parches” se pegan sin hacer ningún tipo de “torcedura”, las funciones de transición son simplemente la identidad de G , el haz fibrado es el producto directo $M \times F$ y se le llama **haz trivial**. En el caso de haces fibrados vectoriales,

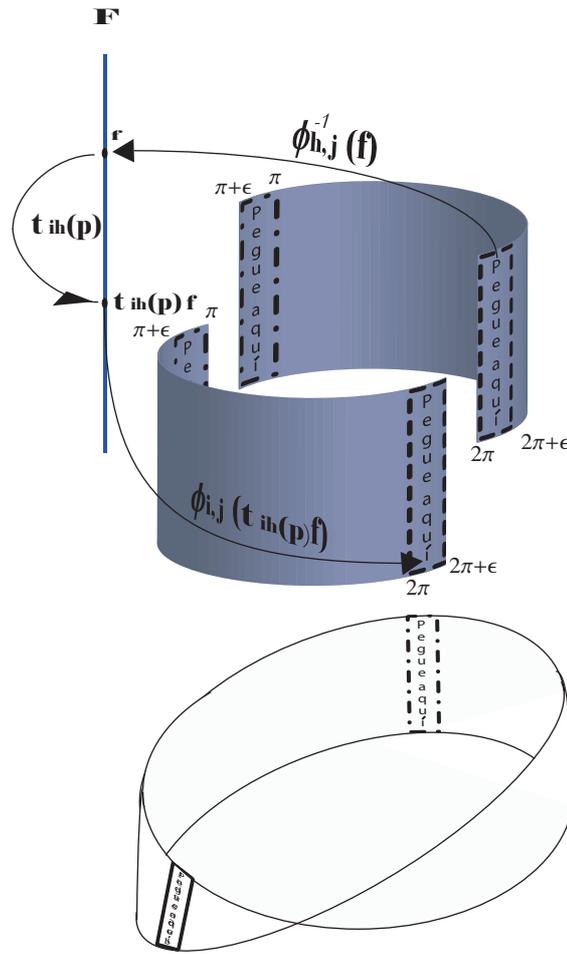


Figura 1.5: Construcción de E a través de sus funciones de transición. En la banda de Moebius, mientras una de las leyendas “pegue aquí” se ve nítida, la otra no. Esto se debe a que en el primer caso, las leyendas de los distintos “parches” se pegaron exactamente una sobre la otra, dando la impresión de que en realidad sólo es una. En cambio en el segundo caso, una se dio vuelta 180° antes de pegar, haciendo ilegible la leyenda final.

las funciones de transición son $GL(n, \mathbb{R})$ ⁴ si los vectores tienen coeficientes reales, y $GL(n, \mathbb{C})$ si son complejos. En los dos casos n es la dimensión de la fibra.

Continuando el ejemplo, el círculo no puede ser cubierto por solamente un conjunto *abierto*. Se necesitan por lo menos dos. Sea U_i de $(0, \pi + \epsilon)$ y U_h de $(\pi, 2\pi + \epsilon)$. La unión de los dos cubre el círculo por completo. La intersección entre los dos no está vacía, ésta tiene dos partes, $(\pi, \pi + \epsilon)$ y $(2\pi, 2\pi + \epsilon)$. Al haber dos conjuntos abiertos, son necesarias dos trivializaciones locales: $\phi_i : U_i \times F \rightarrow E$ tal que $\phi_i(\theta, f) = u$ y $\phi_h : U_h \times F \rightarrow E$ tal que $\phi_h(\theta, f) = u$, cada una definida para el intervalo correspondiente de θ . Éstas forman dos parches que son isomorfos al producto cartesiano de $U_i \times F$ y de $U_h \times F$, y se pueden ver en la figura 1.5. Los “parches” son las superficies de color azul y E está abajo de ellos. Es importante notar que exclusivamente en las intersecciones, un punto en un “parche” y otro en el otro corresponden, los dos, a un único punto, $u \in E$, que es lo que queda de pegar un “parche” sobre el otro.

Las intersecciones están delimitadas por el recuadro punteado. En el caso de la intersección superior, que corresponde a $(\pi, \pi + \epsilon)$, simplemente pegamos un “parche” sobre el otro de forma que las leyendas “pegue aquí” de los dos queda alineada. Esto se debe a que la función de transición es la identidad $t_{i,h}(\theta) = e$, donde $\theta \in (\pi, \pi + \epsilon)$ y e es la identidad de G . Para la otra intersección, uno de los parches lo

⁴ $GL(n, \mathbb{R})$ es el conjunto de matrices invertibles.

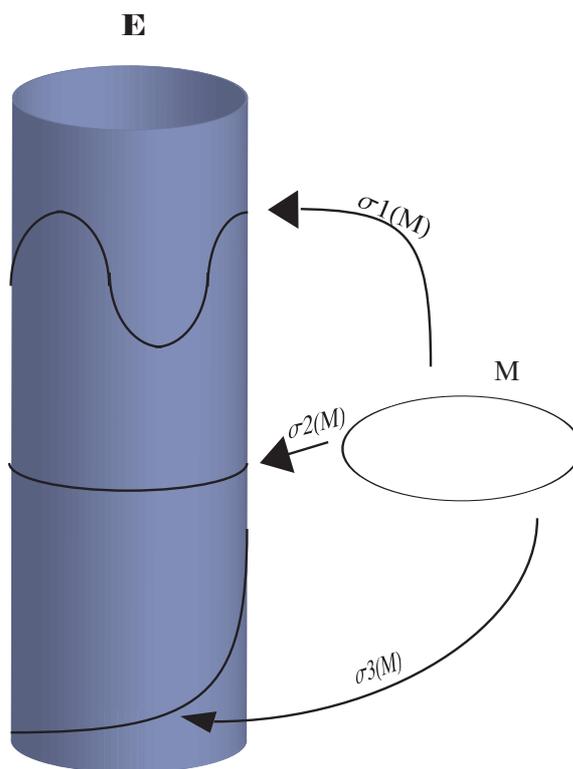


Figura 1.6: Distintas formas de ver a M en E . Todas ellas son curvas cerradas.

rotamos 180° de forma que “pegue aquí” queda de cabeza y lo pegamos sobre el otro, con lo que obtenemos una banda de Moebius. ¿Qué pasa con las trivializaciones locales y las funciones de transición? Al hacer el giro y pegar, la “p” de la leyenda de un “parche” queda sobre la “i” del otro. Lo cual significa que en E estos dos puntos, son el mismo. Aplicando a un punto de la “p” $\phi_{h,j}^{-1}$ se obtiene en F , f . Aplicando a un punto de la “i” $\phi_{i,j}^{-1}$, se obtiene en F , $t_{ih}f$. Los dos puntos están relacionados por un elemento de G que es la función de transición. Como simplemente dimos una vuelta de 180° , lo único que hicimos fue cambiarle el signo a todos los elementos de F , por lo que $t_{ih} = -1 \theta \in (2\pi, 2\pi + \epsilon)$, donde $-1 \in G$. Es importante notar, en el ejemplo en particular y en cualquier caso en general, que al pegar los “parches”, F_p completa de un “parche” se pega a su correspondiente en el otro “parche” sin que se mezclen las fibras asignadas a distintos puntos en M . Si en vez de torcer uno de los “parches” lo hubiéramos pegado como en el primer caso, habríamos obtenido un cilindro, la función de transición en este rango habría sido también la identidad y el haz fibrado habría sido trivial.

Es muy fácil caer en el error de pensar que M es una parte de E . En el ejemplo del cilindro se podría pensar que uno de los círculos es el espacio base (tal vez la mayoría de la gente escogería el del medio o donde empieza o acaba la figura). Sin embargo, esta visión es incorrecta y esto se vuelve especialmente importante al momento de hablar de conexiones. La estructura de los haces fibrados es más “rica”. La identificación entre M y E se hace a través de una función suave llamada **sección**, tal que $s : M \rightarrow E$. ¿Cómo se ve entonces M en E ? Pues simplemente es la función s . Tomando el ejemplo del cilindro, M puede ser cualquiera de los círculos mencionados, pero también puede ser un “círculo inclinado” o la función seno dibujada en el cilindro, como se muestra en la figura 1.6. En este caso, puede ser cualquier curva, siempre y cuando sea cerrada (no puede ser simplemente una hélice sobre el cilindro) ya que debe de ser continua y M es un círculo, y que la función sea *suave*. Cabe destacar esto último porque aunque los haces fibrados tienen una estructura más rica que el pensar que M en E “es” solamente un círculo, la **sección**, o como mencionan en algunos textos, el “levantamiento” de M , no son puntos al azar. Esta “limitación” de s permite definir vectores tangentes a s y le da otras propiedades que utilizan las **conexiones**.

El conjunto de las s de M se denota por $\Gamma(M, F)$. Si la **sección** no está definida en todo M , sino solamente en U_i se le llama **sección local** y el conjunto de éstas es $\Gamma(U, F)$. Un campo vectorial en una variedad es una sección. En términos menos técnicos, una **sección** es simplemente elegir para cada punto de M un elemento de la fibra de forma que, para puntos cercanos en M , los elementos escogidos de las fibras correspondientes se parezcan (condición de suavidad).

1.1.2. Conexiones en haces fibrados vectoriales

Ya que hemos construido el espacio total, podemos comparar vectores que están asignados a distintos puntos. Esto gracias a que en E todos los vectores pertenecen al mismo espacio. Pero aunque esto es un gran avance, no es suficiente. El problema ahora es cómo movemos al vector para poder compararlo con otro. De forma paralela. Pero ¿qué quiere decir eso?

Supongamos que dibujamos una flecha en una hoja de papel y queremos moverla circularmente. Lo hacemos poco a poco asegurándonos que, a cada paso, el vector sea paralelo al anterior, como en la figura 1.7 A. Después de hacerlo pensamos que en realidad nosotros vivimos en ese círculo, la flecha es en realidad una escoba, la cual agarramos de forma que esté perpendicular a nuestro cuerpo y sin mover el brazo empezamos a caminar sobre el círculo hasta dar una vuelta completa o, en otras palabras, la movemos paralelamente como en la figura 1.7 B. Al ver el dibujo podemos asegurar que la escoba no se movió de forma paralela. Para el habitante del círculo fue la flecha del caso A, y no la escoba, la que no se movió de forma paralela. A pesar de que el resultado es diferente, en *los dos casos el transporte es paralelo* y para ambos el resultado del otro es erróneo. En realidad no podemos comparar uno con otro ya que son situaciones distintas. Por lo que concluimos que el transporte paralelo de un vector NO es único. No sólo eso, sino que en principio podríamos mover el vector en el círculo totalmente al azar y considerar



Figura 1.7: El caso A representa el transporte paralelo para una persona que dibuja flechas en un papel plano. El círculo es sólo un auxiliar. El caso B representa lo mismo pero, desde el punto de vista de alguien que vive en el círculo. Para él, el círculo no es un auxiliar, sino el espacio donde se puede mover.

que lo transportamos paralelamente. En cada problema es necesario definir qué “criterio” de transporte paralelo se utilizará y esto depende de las características del problema. Este criterio se llama **conexión**.

Al pedir que un vector se mueva paralelamente, en esencia simplemente le estamos pidiendo que no cambie, que su derivada en la dirección que lo vamos a mover sea cero. Sea V un vector, $V = v^\alpha e_\alpha$. Al derivarlo, siguiendo la ley de derivadas de productos:

$$V_{;\mu} \equiv \frac{\partial V}{\partial x^\mu} = \partial_\mu V^\alpha e_\alpha + V^\alpha \partial_\mu e_\alpha \quad (1.1)$$

Que es la derivada covariante de V en dirección x^μ . El primer término representa cómo cambian las componentes del vector y el segundo nos dice cómo cambian los vectores bases.

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\mu} = w_{\alpha\mu}^\beta e_\beta \quad (1.2)$$

$w_{\alpha\mu}^\beta$ es la **conexión** y nos dice qué tanto del cambio de e_α , al moverlo en la dirección x_μ , es en la dirección de e_β . Por lo tanto, definir un transporte paralelo es simplemente definir cómo cambian los vectores base.

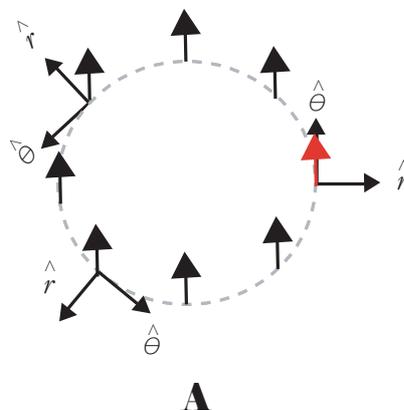


Figura 1.8: Vectores base en coordenadas polares y el vector del caso A. Desde este punto de vista, la base gira.

Regresando al ejemplo, utilizando coordenadas polares, en el caso A estas coordenadas cambian a lo largo del círculo, como se puede ver en la figura 1.8.

$$\begin{aligned}
 \hat{r} &= \{\cos\theta, \sin\theta\} & \hat{\theta} &= \{-r\sin\theta, r\cos\theta\} \\
 \frac{\partial \hat{r}}{\partial r} &= 0 & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r} &= \frac{1}{r}\hat{\theta} \\
 \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} &= \frac{1}{r}\hat{\theta} & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} &= -r\hat{r}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ya sabemos cómo son los vectores base en cada punto. Para poder dibujar el vector que queremos transportar, nos hace falta saber, en cada punto, cómo es este vector respecto a la base, o en otras palabras, sus componentes. Para esto utilizamos la ecuación 1.1 en la dirección $\hat{\theta}$ e igualándola a 0 obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V^r}{\partial \theta} - rV^\theta &= 0 \\
 \frac{\partial V^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r}V^r &= 0
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

de donde se puede ver que si se pide que V^r y V^θ sean constantes a lo largo del círculo, sus valores serían 0. Por consiguiente, si en las condiciones iniciales alguna de las componentes es distinta de 0, como en nuestro ejemplo, entonces las componentes cambiarán a lo largo del círculo, como se ve en la figura 1.8. A lo largo del círculo, el vector no es el mismo *respecto a los vectores bases*.

En cambio, para el habitante del círculo, los vectores bases no cambian. Es importante verlo desde el punto de vista de la persona que habita en el círculo y no desde afuera. La mejor forma de hacerlo es pensar que en la Tierra podemos definir nuestros vectores base como aquel que apunta hacia el cielo perpendicularmente al planeta y el que apunta hacia el horizonte. Si caminamos, no importa cuanto, y volvemos a definir nuestros vectores bases, siempre van a apuntar, según los habitantes de la Tierra, hacia la misma dirección: el cielo y el horizonte, por lo que desde este punto de vista no cambian. Las ecuaciones equivalentes a 1.4 son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V^r}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial V^\theta}{\partial \theta} &= 0\end{aligned}\tag{1.5}$$

que simplemente nos dicen que las componentes de V no cambian, o en otras palabras, V no cambia respecto a los vectores base.

Ahora que tenemos la herramienta de los haces fibrados, es importante notar que las fibras de los dos casos no son las mismas. En el primer caso, la fibra es el espacio de dos dimensiones tangente al papel en cualquier punto de éste. Al cambiar de un punto a otro no gira, desde la perspectiva de un observador de \mathbb{R}^3 . En el segundo caso, la fibra está formada por el vector tangente y el radial al círculo, el cual sí “gira” desde el mismo punto de vista. Al hacer esta comparación es importante que en los dos casos mantengamos la misma perspectiva. Cuando vemos las flechas dibujadas en una hoja de papel, la perspectiva utilizada en cualquiera de los dos casos es la de \mathbb{R}^3 . También se podría hacer el mismo análisis desde el punto de vista del habitante del círculo. Para visualizar lo que quiere decir “gira”, podemos imaginarnos una esfera en \mathbb{R}^3 y ver que al poner una hoja de papel tangente a ella en distintos puntos, hay que rotarla. A esto nos referimos con la palabra “girar”. En ambos casos, al requerir que el vector sea transportado paralelamente, simplemente requerimos que el vector no cambie en dirección de la fibra. En el primero, al no “girar” la fibra pedimos que no cambie el vector, viéndolo desde \mathbb{R}^2 . En el segundo, como la fibra “gira” para que no hayan cambios en esta dirección, el vector debe de “girar” con ella. El concepto de que el transporte paralelo implique que el vector no cambie en la dirección de la fibra es muy importante para el caso de las conexiones en haces fibrados principales.

Existe un tipo de conexión que está relacionada con la métrica del espacio base, $g_{\alpha\beta}$, los **Christoffel**.

$$\Gamma_{\beta\mu}^\gamma = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha})\tag{1.6}$$

donde $g_{\alpha\beta,\mu}$ es la parcial de $g_{\alpha\beta}$ respecto a μ . La fibra en el caso de los Christoffels es el espacio tangente a M y el transporte paralelo que describen equivale a que un habitante de M , simplemente “tome” el vector y camine con él sin rotarlo, como en el caso B. Cuando se utilizan las conexiones, como en relatividad, y no se especifica que tipo de conexión se está utilizando, generalmente es la de los Christoffels.

1.2. Haces fibrados principales

Si ya pudimos construir toda una estructura asociándole a cada punto del espacio base un espacio vectorial, ¿no podríamos asociarle alguna otra estructura matemática en vez del espacio vectorial? La idea de asociar campos vectoriales era muy natural debido a la gran utilización de vectores en la física. ¿Qué otro tipo de estructura es utilizada en física para la cual valdría la pena construir una teoría similar a la de los haces vectoriales?

En mecánica cuántica, cada función de onda tiene una fase, la cual puede cambiar de punto a punto. Las fases son representadas por una $e^{i\theta}$ y θ puede tomar cualquier valor entre 0 y 2π . Los valores posibles de la fase forman un grupo que se conoce como $U(1)$. Este está formado por todos los números complejos de norma uno.

Supongamos que tenemos un sistema que está restringido a una variedad, por ejemplo una partícula restringida a moverse en un cilindro. En cada punto de éste, la función de onda tiene una fase que es similar al concepto de un campo vectorial donde en cada punto hay un vector. En general, dependiendo de las condiciones del problema, la función de onda en cada punto puede tener cualquier fase. Por lo que podemos interpretar que tenemos un cilindro con un grupo, $U(1)$, asociado a cada punto de la variedad. Este caso es similar al de haces fibrados vectoriales con la única diferencia que la fibra, en vez de ser un espacio vectorial, es un grupo.

1.2.1. Definiciones básicas

Un haz principal se denota con una P , siendo éste el **espacio total**. Su F , a diferencia de los haces vectoriales, es un grupo con la estructura de G . Gracias a esto se puede definir la multiplicación del

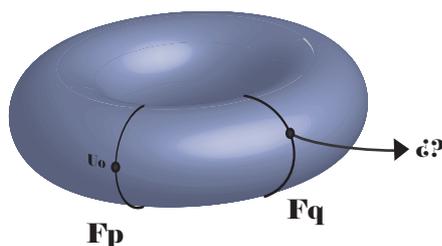


Figura 1.9: El toro puede ser un haz principal. Si tenemos un punto, u_0 , en la fibra F_p ¿qué punto es su transporte paralelo en F_q ?

lado derecho de un elemento de F por uno de G . Si $u = \phi_{i,p}(g_i)$ y $a \in G$, entonces $ua = \phi_{i,p}(g_i a) = \phi_{i,p}(g_i)a$. Esto quiere decir que si tenemos un punto $u \in P$ y queremos saber qué punto corresponde a ua , la multiplicación no se hace en P , sino que primero se ve qué elemento de F corresponde a u a través de $\phi_{i,p}^{-1}(u) = g_i$. Éste se multiplica por la derecha por a (es decir $g_i a$) y luego con $\phi_{i,p}$ se ve a qué punto corresponde en P . Al estar las $\phi_{i,p}$ involucradas en este procedimiento, se podría pensar que si en lugar de utilizar $\phi_{i,p}$, se utilizara $\phi_{j,p}$, el resultado sería distinto. Pero al definir esta operación de lado derecho, conmuta con las operaciones de lado izquierdo en general, y en particular con las funciones de transición. $ua = \phi_{i,p}(g_i a) = \phi_{i,p}(t_{i,j}(p)g_i a) = \phi_{j,p}(g_j a)$, haciendo a la multiplicación por el lado derecho independiente de las coordenadas elegidas (o de la trivialización local, que es lo mismo).

Es importante notar que si $u \in F_p$, entonces $ua \in F_p$. Debido a su definición, esta operación no mezcla elementos entre las distintas fibras asignadas a un punto, lo que quiere decir que $\pi(ua) = \pi(u)$. Otra propiedad interesante es que cualesquiera dos puntos en F_p están relacionados por medio de alguna a . Si u_1 y u_2 están en F_p , $u_1 = \phi_{i,p}(g_1)$ y $u_2 = \phi_{i,p}(g_2)$, entonces $u_1 = u_2 a$ donde $a = g_2^{-1}g_1$, elemento que existe en F , ya que éste es un grupo, lo cual nos permite construir toda F_p conociendo un elemento u en ella. $F_p = \{ua | a \in G\}$. Dado un elemento en F_p , sabemos cómo saltar a cualquier otro en la fibra, lo que nos permite elegir, al tener una sección, una **trivialización local canónica**, definida de la siguiente forma. Tomemos una sección cualquiera, $s_i(p) = u_0$, $u_0 \in P$ y asociémosla con la unidad del grupo en F por medio de la inversa de la trivialización local, $e = \phi_{i,p}^{-1}(s_i(p))$. La pregunta es ¿qué valor toma $\phi_{i,p}^{-1}(u)$ para cualquier $u \in F_p$? Como ya vimos, cualesquiera dos puntos en F_p están relacionados por alguna $a \in G$. Llamemos a ésta g_u . Por lo tanto, $u = u_0 g_u$ implica $\phi_{i,p}^{-1}(u) = \phi_{i,p}^{-1}(u_0 g_u) = \phi_{i,p}^{-1}(u_0) g_u = g_u$. Esto es muy importante para definir la conexión, ya que permite que al definirla en un punto de F_p , automáticamente quede definida en cualquier otro punto de F_p mediante la multiplicación por la derecha de g_u . En el caso de que $p \in U_i \cap U_j$, utilizando la trivialización local canónica se encuentra la relación entre dos secciones $s_i(p) = s_j(p)t_{ji}(p)$. Estas dos secciones no son cualesquiera. En realidad son la misma función, pero $s_i(p)$ se utiliza cuando p está descrito por las coordenadas de U_i y $s_j(p)$ cuando se utilizan las de U_j . Al ser distintas las coordenadas, aunque la función es la misma, su imagen puede ser distinta.

1.2.2. Conexiones en haces fibrados principales

En la figura 1.2 tomamos un vector y lo movimos por cierta trayectoria en la esfera, espacio base, obteniendo otro vector. Pero qué pasa en un haz principal al movernos en el espacio base en cierta curva de p a q . Si nuestro espacio base es un círculo y la fibra es $U(1)$, que gráficamente se representa por un círculo, podemos formar un toro y tomarlo como haz principal, como se muestra en la figura 1.9. ¿Qué punto en F_q equivale a mover u_0 sin “cambiarlo”? ¿Cuál es su transporte paralelo?

Para el caso de haces fibrados vectoriales teníamos muy claro qué quiere decir mover localmente un vector de forma paralela y con esto pudimos desarrollar la noción del movimiento global. Sin embargo, para el caso de un grupo, a primera vista no sabemos qué quiere decir transportar paralelamente. Pero podemos tomar una de las ideas del caso de vectores. El transporte paralelo implica que el movimiento no sea en dirección de la fibra, por lo que simplemente tenemos que encontrar una forma de definir cuáles direcciones en P son “permitidas” y cuáles “no”. Conociendo las direcciones “permitidas” podríamos dibujar una curva tangente (en P) a estas direcciones, que nos indique al movernos por cierta curva en el espacio base de p a q , qué punto de F_q corresponde a $u_0 \in F_p$. A la curva en el espacio base la denotamos

$\gamma(t)$ y la curva en P , que nos indica el transporte paralelo, se llama **levantamiento horizontal** o $\tilde{\gamma}(t)$. Esta, al igual que en el caso de los haces vectoriales, depende de la trayectoria en el espacio base ($\gamma(t)$).

Como P es una variedad, aunque estemos en el caso de haces principales, tangente a cada punto de P existe un espacio vectorial. Para $u \in P$, llamamos T_uP al espacio tangente a u . Cada vector en T_uP puede expresarse como la combinación lineal de dos vectores que pertenecen cada uno a uno de los siguientes dos subespacios. V_uP o **subespacio vertical**, que es el subespacio de vectores en las direcciones tangentes a la fibra, las que llamamos “no permitidas”. El segundo es H_uP o **subespacio horizontal** que indica las direcciones para el transporte paralelo. Tomemos \mathbb{R}^2 y supongamos que el eje Y es la dirección de la fibra. Cualquier vector puede ser descrito por la combinación lineal de un vector paralelo al eje Y y algún otro que no sea paralelo a este eje. El segundo vector no es necesariamente paralelo al eje X , por lo que la elección de una base no es única. De la misma forma, la elección de H_uP no es única y está dada por la conexión. Al igual que en el caso de los haces vectoriales, tampoco la conexión es única.

¿Cómo se define una dirección en P ? Tomamos una curva en P (una función de un parámetro) y el vector tangente a esa curva indica una dirección. Por consiguiente, si tomamos una curva que esté completamente en F_p , su vector tangente está en dirección de la fibra, en V_uP . De esta forma podemos definir V_uP y como primera condición suponemos que $T_uP = V_uP \oplus H_uP$.

Una segunda condición es que al movernos cierta distancia en el espacio base, el transporte paralelo en P sea único. Como se puede ver en la figura 1.10, si las direcciones de los H_uP son arbitrarias, en general las curvas que representan el transporte paralelo se van a cruzar. En ese caso, si queremos mover paralelamente u_o a la fibra F_q ¿a qué elemento? ¿a u ó a ug ? Para evitar esta ambigüedad, es necesario que las $\tilde{\gamma}(t)$ que indican el transporte paralelo no se crucen. Por consiguiente, es necesario que al definir H_uP en algún punto $u \in F_q$ quede automáticamente definido para cualquier punto de F_q de tal forma que las curvas no se crucen. Esto se logra requiriendo que $H_{ug}P = R_{g*}H_uP$, lo que implica en palabras más simples que, una vez definido H_uP , automáticamente quedan definidos los subespacios horizontales en toda la fibra.

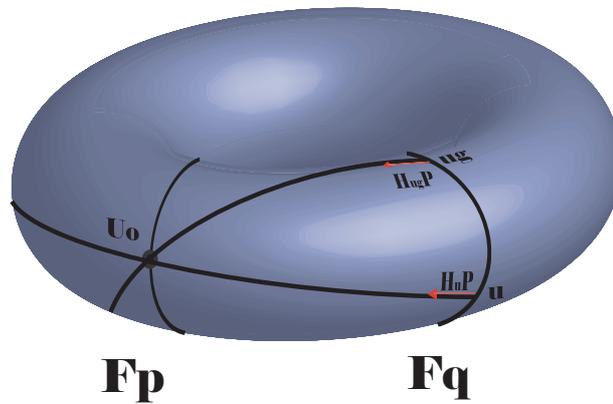


Figura 1.10: Las direcciones de los H_uP (vectores rojos) no pueden ser cualesquiera, ya que esto puede causar que las líneas se crucen y que el transporte paralelo no sea único.

La tercera condición de nuestra división de espacios es que cualquier campo vectorial suave en P sea combinación lineal de un campo vectorial suave en V_uP y uno en H_uP . Simplemente suavidad en todo para poder derivar y tener continuidad.

Necesitamos dividir T_uP de tal forma que cumpla las tres propiedades ya mencionadas. Una forma de hacerlo es tomar un vector en T_uP y descomponerlo en su parte “vertical” y “horizontal”. Para esto utilizamos una 1-forma valuada en una algebra de Lie⁵, ω , llamada **1-forma de conexión**. Ésta simplemente proyecta al vector en V_uP , definiendo:

$$H_uP \equiv \{X \in T_uP \mid \omega(X) = 0\} \quad (1.7)$$

⁵Ésta es simplemente una función lineal que toma vectores en P y nos da vectores en el algebra de Lie del grupo de estructura.

ω cumple:

$$\omega(A^\#) = A \quad A \in \mathfrak{g} \quad (1.8)$$

$$R_g^* \omega_u g = Ad_{g^{-1}} \omega \quad (1.9)$$

donde $\#$ quiere decir que es un vector en $V_u P$. Se puede demostrar que con estas dos condiciones para ω y $H_u P$ definido por la ecuación 1.7, la división de $T_u P$ cumplen las tres condiciones requeridas [Nakahara, Pag: 372].

Es útil definir $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$ que es una 1-forma valuada en un algebra de Lie en U_i . En teoría de normas se la conoce como el **potencial de norma**.

Estamos buscando la curva que nos indique cómo se hace el transporte paralelo, donde las direcciones “permitidas” y por la tanto, la definición de transporte paralelo nos la da ω . Finalmente, una sección es una curva en P . Sea la que estamos buscando la sección $\sigma_j(\gamma(t)) = \tilde{\gamma}(t)$. Ahora la pregunta es cómo encontramos σ_j . Una forma es viendo que relación tiene con otra sección cualquiera, σ_i , de modo que con esta sección arbitraria podamos construir $\tilde{\gamma}(t)$.

Sea $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(t)$, donde para facilitar la notación $g_i(t) = g_i(\gamma(t))$. Se hace lo mismo para σ_i . Como $\tilde{\gamma}(0) = u_0$ es el punto que queremos transportar, podemos elegir $\sigma_i(\gamma(0)) = u_0$, por lo que $g_i(0) = e$. Sea X el vector tangente a $\gamma(0)$, $\tilde{X} = \tilde{\gamma}_* X$ es el vector tangente a $\tilde{\gamma}(0)$ y por lo tanto está en $H_{u_0} P$.

$$\begin{aligned} \tilde{X} = \tilde{\gamma}_* X &= \left. \frac{d}{dt} \tilde{\gamma}(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \{ \sigma_i(t) g_i(t) \} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \{ \sigma_i(t) \} g_i(0) \right|_{t=0} + \sigma_i(0) \left. \frac{d}{dt} \{ g_i(t) \} \right|_{t=0} \\ &= R_{g_1^*}(\sigma_{i*} X) + \tilde{\gamma}(0) g_i^{-1} \left. \frac{d}{dt} g_i(t) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

donde el segundo sumando de la última columna es igual a $[g_i(t)^{-1} dg_i(X)]^\#$.

Si aplicamos ω a esta ecuación tomando en cuenta las propiedades 1.8 y 1.9, que $\omega(R_{g^*}(\sigma_{i*} X)) = R_g^*(\omega(\sigma_{i*} X))$ y que $\tilde{X} \in H_u P$:

$$0 = \omega(\tilde{X}) = g_i(t)^{-1} \omega(\sigma_{i*} X) g_i(t) + g_i(t)^{-1} \frac{dg_i(t)}{dt}$$

De donde se obtiene:

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -\omega(\sigma_{i*} X) g_i(t) = -\sigma_i^* \omega(X) g_i(t) = -\mathcal{A}_i(X) g_i(t) \quad (1.10)$$

Resolviendo la ecuación diferencial con la condición inicial $g_i(0) = e$:

$$g_i(t) = \mathcal{P}exp \left(- \int_0^t \mathcal{A}_{i\mu} \frac{dx^\mu}{dt} dt \right) \quad (1.11)$$

como $u(t) = \tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(t) g_i(t)$

$$u(t_0) = \sigma_i(t_0) \mathcal{P}exp \left(- \int_0^{t_0} \mathcal{A}_{i\mu} \frac{dx^\mu}{dt} dt \right) \quad (1.12)$$

donde \mathcal{P} está relacionado con cómo se recorre $\gamma(t)$ y $u(t_0)$ es el valor u_0 transportado paralelamente en la dirección de $\gamma(t)$ hasta $t = t_0$.

Veamos un ejemplo para ver cómo se calcula el transporte paralelo. Sea $P = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$, donde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ es un grupo. $\phi((x, y), f) \rightarrow u \in P$ es una trivialización local. Las primeras dos coordenadas corresponden a M y la última a la fibra. Sea la conexión, la *conexión real* ⁶ $\omega = -\frac{1}{\pi}(x^2 - y^2)^2 dx + df$. Tenemos el punto $u_0 = (1, 0, 1)$. Movámonos en el espacio base a partir de $(1, 0)$, alrededor de un círculo $\gamma(t) = \{ \cos(2\pi t), \sin(2\pi t) \}$. ¿Cuál es la curva, $\tilde{\gamma}(t)$, que corresponde al transporte paralelo de u_0 siendo

⁶El origen del nombre es claro al ver el resultado.

$\gamma(t)$ la curva en M ? Realmente parte de la respuesta ya la tenemos y es $\tilde{\gamma}(t) = \{Cos(2\pi t), Sen(2\pi t), f\}$. Sólo falta saber cuanto vale f .

$$\tilde{X} = \frac{d}{dt} \equiv \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{df}{dt} \frac{\partial}{\partial f}$$

\tilde{X} es el vector tangente a $\tilde{\gamma}(t)$, por lo que es parte de H_uP y $\omega(\tilde{X}) = 0$. Lo único que desconocemos de \tilde{X} es la componente en f que es $\frac{df}{dt}$. Las otras se obtienen al derivar las componentes correspondientes de $\tilde{\gamma}(t)$.

$$\omega(\tilde{X}) = 0 = -\frac{4}{\pi}(x^2 - y^2)^2 x \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dt} = Sen(16\pi t) + \frac{df}{dt}$$

Resolviendo la ecuación diferencial con la condición inicial $\tilde{\gamma}(0) = (1, 0, 1)$, se encuentra:

$$\tilde{\gamma}(t) = \{Cos(2\pi t), Sen(2\pi t), Cos(16\pi t)\}$$

cuya gráfica se puede ver en la figura 1.11.

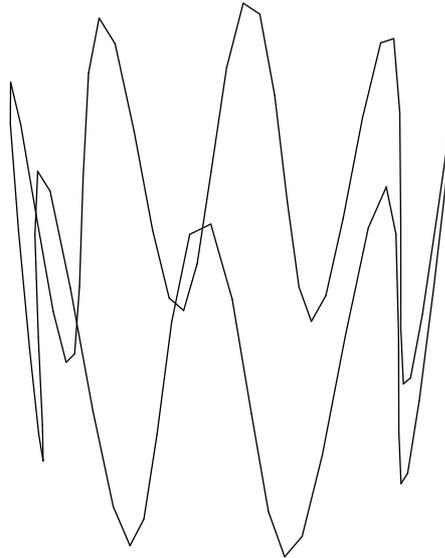


Figura 1.11: Curva que representa el transporte paralelo de $(1, 0, 1)$ definido por la *Conexión real*. Su nombre se debe a que la curva tiene forma de corona.

Podríamos haber resuelto el problema con otra conexión⁷, obteniendo en vez de una “corona”, una hélice y:

$$\tilde{\gamma}(t) = \{Cos(2\pi t), Sen(2\pi t), 2\pi t\} \quad (1.13)$$

Para este caso, a diferencia del de la conexión real, $\tilde{\gamma}(1) \neq \tilde{\gamma}(0)$ pese a que $\gamma(1) = \gamma(0)$. En el caso de la conexión real, al dar una vuelta en M , obtenemos el mismo elemento en P . Pero al hacerlo con otra conexión, el elemento en P no es el mismo. Esta situación es similar a la de la figura 1.2 donde los vectores inicial y final no son iguales. En general, al hacer un transporte paralelo para un curva cerrada en M , el resultado en P no es una curva cerrada. Esta propiedad se llama **holonomía** y depende de

⁷Para este caso $\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} + df$.

la conexión, como ya vimos, pero también de $\gamma(t)$. En el caso de la figura 1.2, si hubiéramos hecho el transporte paralelo tomando al Ecuador como $\gamma(t)$, el vector inicial y el final hubieran sido los mismos.

Un resultado similar a mover el vector en una esfera y después de un ciclo obtener uno diferente, no puede ser obtenido en un hoja de papel plana, lo que nos hace pensar que existe una relación entre la holonomía y la forma de la variedad en la que se transporta un vector. En el ejemplo de la hélice, la diferencia entre $\tilde{\gamma}(0)$ y $\tilde{\gamma}(1)$ reside en la tercera coordenada, la cual corresponde a la ubicación en la fibra. Tanto $\tilde{\gamma}(0)$ como $\tilde{\gamma}(1)$ son vectores horizontales, por lo que nos gustaría tener una forma de medir la distancia entre dos vectores horizontales definidos en la misma fibra.

Como ya vimos, al definir H_uP en un punto, automáticamente queda definido para cualquier punto de la fibra.

Al tener H_uP definido en toda la fibra y tomando en cuenta que cambian de forma suave, su cambio está relacionado con cuánto nos movimos en la fibra. Como los H_uP están definidos por $\omega(X)$, donde $X \in H_uP$, el cambio de ω aplicado a un vector horizontal es lo que buscamos.

La **derivada covariante** mide el cambio en las direcciones horizontales [Nash, Cap: 7.12] y para ω se define:

$$D\omega(X, Y) \equiv d_p\omega(X^H, Y^H) \quad (1.14)$$

donde d_p es la derivada exterior [Nakahara, Cap: 5.4.2] y, X^H y Y^H son las componentes horizontales de sus respectivos vectores.

Así pues definimos la **curvatura** como $\Omega(X, Y) = D\omega(X, Y)$, que es una 2-forma.⁸ Si X ó Y están en V_uP , $\Omega(X, Y) = 0$. Al igual que \mathcal{A}_i , se define $\mathcal{F}_i = \sigma_i^*\Omega$. En las teorías de norma, \mathcal{F}_i se le llama **campo de fuerza**. En términos de \mathcal{A}_i [Nakahara, Cap: 10.3.4]:

$$\mathcal{F}_i = d\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i \quad (1.15)$$

⁸ Una 2-forma es una función lineal que toma dos vectores y da un real.

Capítulo 2

Fases Geométricas

En 1851 Foucault hizo una invitación sorprendente a la comunidad científica de París. “Los invito a ver la tierra girar”. Colgó un péndulo de 67 metros de largo y 28 Kg. de masa en el Panthéon, en París. Este comenzó a oscilar en un plano, sin sorprender a nadie. Pero al pasar el tiempo, el plano de oscilación giraba poco a poco.

Si la tierra no gira, la única fuerza que actúa sobre un péndulo es la de gravedad y el plano se queda fijo. Sin embargo, al girar la tierra sobre su propio eje, otras fuerzas entran en juego y hacen rotar al plano. Esta sencilla e impresionante demostración del movimiento de la tierra puede ser vista en muchos de los museos de ciencia de todo el mundo.

El movimiento del péndulo de Foucault se puede explicar de muchas formas. Una es utilizando la mecánica de Newton, en la cual la fuerza de Coriolis, que se debe a la rotación de la tierra, es la causante del giro del plano.

También es posible utilizar las ideas de transporte paralelo del capítulo anterior. Sin entrar en muchos detalles, la dirección del plano del péndulo de Foucault es representada por un vector. En estos términos, el efecto de la rotación de la tierra no se debe a que el planeta se mueve. Este se supone fijo y lo que se mueve es el péndulo a través de ella. Desde este punto de vista, el vector de dirección del plano debe de ser transportado paralelamente alrededor del globo terráqueo.

Esto es similar al efecto que se muestra en la figura 1.2, sólo que utilizado otra trayectoria en la esfera. El giro del plano depende de la latitud del lugar en la tierra donde esté el péndulo. En general, después de 24 horas, el plano del péndulo no va a regresar a su posición original. En el caso de París, en un día el plano gira 270° .

Este es un ejemplo de un sistema físico al cual se le cambian ciertos parámetros de forma cíclica y al volver a los valores originales, el sistema no es el mismo. Existen otros sistemas, no cualesquiera, que presentan el mismo fenómeno. En mecánica cuántica, este tipo de sistemas adquieren una fase que se conoce como fase de Berry.

Aunque la fase de Berry fue descubierta en la mecánica cuántica, se pueden utilizar ideas similares para explicar sistemas no cuánticos como el mencionado.

Por otro lado, la fase de Berry “cuántica” se puede explicar en muchas ocasiones como un fenómeno no cuántico [Kugler y Shtrikman, 1988].

Toda esta aparente ambigüedad se debe a que, en realidad, la fase de Berry no es más que el transporte paralelo de la función de onda. El transporte paralelo es una herramienta que es independiente de si el sistema es clásico o cuántico. Como ya vimos no es único y hay que definir qué criterio se utiliza. En el caso de la fase de Berry es uno muy especial como veremos en este capítulo.

2.1. El transporte paralelo de la fase cuántica

En mecánica cuántica, el estado de un sistema está completamente descrito por la función de onda, $|\Psi\rangle$. Sin embargo, la cantidad que se mide en un experimento es $\langle\Phi|\Psi\rangle$, la norma, donde los dos términos representan funciones de onda. Debido a que esta cantidad es la que se mide, existe una libertad, ya que cualquier cambio a la función de onda, que no cambie la norma, da *casi* el mismo resultado físico. Estos

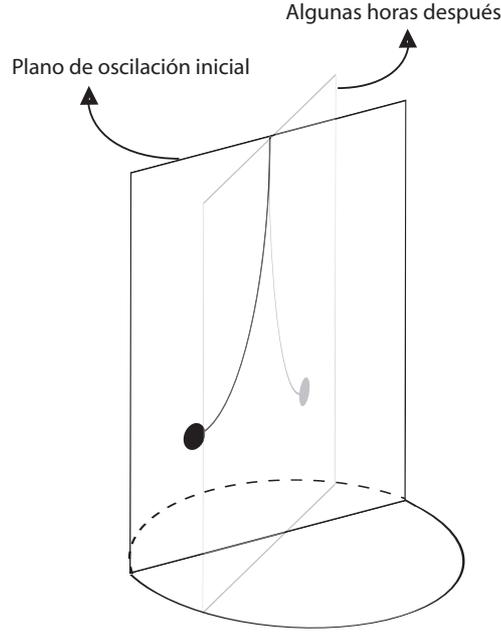


Figura 2.1: Péndulo de Foucault.

cambios, matemáticamente implican multiplicar a la función de onda por $e^{i\theta}$, lo que se conoce como una fase. Por lo tanto si en vez de $|\Psi\rangle$, se utiliza $e^{i\theta}|\Psi\rangle$ el resultado es el mismo. Por otro lado, siempre se puede modificar la base de los eigenvectores.

$$|\Psi\rangle = \sum_n |n\rangle$$

donde $|n\rangle$ son eigenvectores. Si $|n'\rangle = e^{i\theta}|n\rangle$, entonces:

$$e^{i\theta}|\Psi\rangle = \sum_n e^{i\theta}|n\rangle = \sum_{n'} |n'\rangle \quad (2.1)$$

El *casi* se debe a que las fases desempeñan un papel relevante (medible) en fenómenos de interferencia, por lo que no son simplemente una curiosidad matemática. Pero lo que se mide no es la fase absoluta, sino la relativa entre dos estados. Al hacer un cambio de base, como en la ecuación (2.1), la fase relativa no cambia.

Cualquier sistema físico depende de ciertos parámetros, por ejemplo: la frecuencia, la intensidad del campo magnético, etcetera. Estos los denotamos con un vector $R(t)$ donde cada componente representa a uno de los parámetros. Suponemos que estos a su vez pueden ir cambiando en el tiempo, por lo cual existe una dependencia temporal. Los eigenestados dependen también de los parámetros, por lo que se escriben $|n(R(t))\rangle$.

Como consecuencia del teorema adiabático [Messiah, Cap: 17], si cambiamos muy lentamente ¹ los parámetros del sistema, si éste inicialmente se encontraba en el eigenestado $|n(R(0))\rangle$, después de un tiempo T se encontrará en $|n(R(T))\rangle$. En general estos dos eigenestados no tienen que ser los mismos. Si $R(T) = R(0)$, los dos eigenestados describen la misma situación física, por lo que su diferencia solamente puede ser una fase $|n(R(T))\rangle = e^{i\theta}|n(R(0))\rangle$, donde θ es una función que poco a poco veremos de

¹ Muy lentamente quiere decir que [Aharonov y Anandan, 1987, Fórmula 6]:

$$\sum_{n \neq m} \left| \frac{\hbar \langle m | \dot{H} | n \rangle}{(E_n - E_m)^2} \right| \ll 1 \quad (2.2)$$

El punto es la derivada respecto al tiempo, $|m\rangle$ son los eigenestados y sus complejos conjugados y E_m son los eigenvalores

qué variables depende. Una primera propuesta es $e^{i\theta} = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T \langle \Psi(t') | H(t') | \Psi(t') \rangle dt'} = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T E_n(t) dt}$ que es simplemente la fase dinámica y se debe a la evolución del sistema. La primera igualdad es el caso general y la segunda es válida solamente cuando los hamiltonianos a distintos tiempos conmutan [Bohm, Pag: 578-579]. Sin embargo, esta propuesta *no cumple la ecuación de Schroedinger*, por lo que hay que agregar una fase extra: $e^{i\theta} = e^{-\frac{i}{\hbar} \int^T E(t) dt} e^{i\gamma}$.

Berry investigó [Berry, 1984] cuál era esta fase. Suponiendo su existencia, que el sistema inicialmente se encontraba en $|n(R)\rangle$, un cambio cíclico y adiabático, y considerando que cualquier eigenestado debe de cumplir la ecuación de Schroedinger, encontró que esta fase, $\gamma_n(C)$ es:

$$\gamma_n(C) = i \oint_C \langle n(R) | \nabla_R n(R) \rangle \cdot dR \quad (2.3)$$

Por ser los parámetros coordenadas de una variedad, una curva en ella, C , indica el cambio de $R(t)$. Por simplicidad en la notación, la dependencia del tiempo de R no está indicada de manera explícita. $\gamma_n(C)$ es la **fase de Berry**.

Uno puede obtener un resultado donde no aparezca la fase dinámica. Existen aparentemente varios métodos para hacerlo, aunque en esencia son similares. Como el valor absoluto de la energía no es importante, uno puede mover la escala de energía de tal forma que $E_n(t) = 0$ [Simon, 1983], lo cual es similar a cambiar el hamiltoniano $H(t) \rightarrow H'(t) = H(t) - k(t)I$ [Bohm, Pag: 611], donde $k(t)I$ simplemente cambia la escala de energía. O finalmente, hacer un cambio de los eigenvectores, multiplicándolos por una fase, $|n\rangle \rightarrow |n'\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T \langle \Psi(t') | H(t') | \Psi(t') \rangle dt'} |n\rangle$. [Bohm, Boya y Kendrick, 1991]. Como se puede ver, la fase dinámica depende del hamiltoniano escogido. En todos los casos, el sistema físico antes y después de la transformación es el mismo. Simplemente se “describe” de manera diferente reescalando la energía, por lo cual, siempre se puede elegir una “descripción”, en realidad un hamiltoniano, donde no aparezca el término dinámico.

Lo relevante de la fase de Berry es que, a diferencia de la fase dinámica, no depende de la escala de energía, ni de qué tan rápido se recorra C ², ni de ninguna transformación dinámica. Por lo cual *no se la puede “eliminar” haciendo este tipo de transformaciones* o, lo que es lo mismo, cambiando el hamiltoniano.

La fase de Berry puede ser explicada como un fenómeno geométrico, utilizando los haces principales. Esto es una muestra de la capacidad de esta herramienta matemática. γ que originalmente parecía ser sólo una consecuencia del teorema adiabático, es en realidad el transporte paralelo de un eigenestado.

Aprovechando toda la herramienta matemática construida en el capítulo 1, describiremos la fase de Berry en términos de los haces principales. Primero construimos los elementos de estos. En la sección 1.2 mencionamos que era útil describir con haces fibrados a las funciones de onda. Consideremos el espacio en el que están las funciones de onda con norma unitaria como el espacio total, P . Este es \mathcal{H} sin el vector nulo. En él, $|\Psi\rangle$ y $e^{i\vartheta}|\Psi\rangle$, donde $\vartheta \in \mathbb{R}$ son elementos distintos. Como espacio base, M , utilizamos el espacio proyectivo de $\mathcal{H} - \{0\}$, $P(\mathcal{H})$. Este consiste simplemente en tomar todos los elementos de \mathcal{H} y considerar como el mismo elemento a $|\Psi\rangle$ y $|\Phi\rangle$ si $|\Psi\rangle = e^{i\vartheta}|\Phi\rangle$. Esto es muy natural ya que los dos estados representan casi el mismo estado físico. La fibra es $U(1)$ y sus elementos son las fases de las funciones de onda. La curva por la cual el sistema se mueve ($C(t)$) es una curva cerrada en $P(\mathcal{H})$, or lo que al completar un ciclo, la función de onda inicial y final difieren solamente por una fase.

Falta definir la conexión que nos defina al $H_u P$. Debido a que si $|\Psi\rangle$ es un elemento de \mathcal{H} , su derivada también lo es, un vector tangente a una curva en P lo podemos representar como un elemento de P . Como ya vimos, la elección del $H_u P$ no es única, pero la de $V_u P$ sí lo es. Los vectores de $V_u P$ apuntan en la dirección de la fibra. Como en la fibra, la diferencia entre dos funciones de onda es únicamente una fase, si $|\Psi\rangle$ está en la fibra, los vectores del espacio vertical tienen la forma $e^{i\vartheta}|\Psi\rangle$.

Llamemos $|\dot{\Psi}(t)\rangle$ a una curva en P , y sea T el tiempo que tarda el sistema en dar una vuelta completa. El vector tangente a ella lo podemos descomponer en su parte vertical y en la horizontal:

$$|\dot{\Psi}(t)\rangle = \langle \Psi(t) | \dot{\Psi}(t) \rangle |\Psi(t)\rangle + |Hor(t)\rangle \quad (2.4)$$

$\langle \Psi(t) | \dot{\Psi}(t) \rangle$ es la proyección del vector tangente a lo largo del $V_u P$ y es una fase. $|Hor(t)\rangle$ es el espacio horizontal. La pregunta es cómo elegirlo. Cada elección, nos va a dar una fase diferente. En particular,

²Siempre y cuando se cumplan las hipótesis requeridas por el teorema adiabático

existe un H_uP que “elimina” la fase dinámica. Una función de onda cualquiera, $|\Psi(t)\rangle$ va a evolucionar conforme a la ecuación de Shroedinger:

$$H(t)|\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle \quad (2.5)$$

entonces $|\Psi(T)\rangle = e^{i\vartheta}|\Psi(0)\rangle$, donde la fase tiene una parte dinámica que depende del hamiltoniano y una parte geométrica que solamente depende de la curva $C(t)$. La evolución de la función de onda es una curva en P . Tomemos otra curva en el espacio total que sea cerrada y $|\tilde{\Psi}(t)\rangle = e^{-if(t)}|\Psi(t)\rangle$, donde $f(T) - f(0) = \vartheta$ es la relación con la anterior. Aplicando la ecuación de Shroedinger a $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$, contrayendo con $\langle \tilde{\Psi}(t)|$ e integrando:

$$\int_0^T \langle \tilde{\Psi}(t)|i\frac{d}{dt}|\tilde{\Psi}(t)\rangle dt = \int_0^T \frac{1}{\hbar} \langle \tilde{\Psi}(t)|H(t)|\Psi(t)\rangle dt + \vartheta \quad (2.6)$$

El primer término del lado derecho es el negativo de la fase dinámica y el segundo es la fase total. Al ser cerrada, la diferencia de fase entre el estado inicial y el final es cero, $|\tilde{\Psi}(T)\rangle = |\tilde{\Psi}(0)\rangle$. Queremos una curva donde la diferencia de fase sea independiente del hamiltoniano, que sea una fase geométrica. Sea ésta $|\xi(t)\rangle = e^{i\delta}|\tilde{\Psi}(t)\rangle$ Haciendo δ igual a la fase total menos la parte dinámica o lo que es lo mismo el lado derecho de la ecuación 2.6:

$$\delta = \int_0^t \langle \tilde{\Psi}(t')|i\frac{d}{dt'}|\tilde{\Psi}(t')\rangle dt' \quad (2.7)$$

que es similar a la ecuación 2.3. Comparando con la ecuación 1.11:

$$\begin{aligned} |\xi(t)\rangle &= e^{i\int_0^t \langle \tilde{\Psi}(t')|i\frac{d}{dt'}|\tilde{\Psi}(t')\rangle dt'} |\tilde{\Psi}(t)\rangle \\ &\Downarrow \\ \mathcal{A} &= \langle \tilde{\Psi}(t)|i\frac{d}{dt}|\tilde{\Psi}(t)\rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

Recordemos que el dominio de \mathcal{A} son vectores en el espacio base, por lo que la derivada temporal en la ecuación (2.8) se refiere a cómo cambia la función de onda *en el espacio proyectivo*, al evolucionar el sistema. Por estar en el espacio proyectivo, si el cambio es únicamente una fase esta derivada es cero.

Conociendo \mathcal{A} podemos encontrar a ω . Simplemente el dominio de ω es el espacio total. Si $|\phi(t)\rangle$ es un levantamiento horizontal de $C(t)$, entonces el vector tangente está en H_uP y

$$\omega\left(\frac{d}{dt}|\phi(t)\rangle\right) = 0 = \langle \phi(t)|i\frac{d}{dt}|\phi(t)\rangle \quad (2.9)$$

En este caso la derivada está asociada con el cambio en \mathcal{H} y es distinta a la de \mathcal{A} . La derivada simplemente se utiliza para tener un vector tangente a una curva. Aunque la notación puede hacer que las definiciones de \mathcal{A} y ω sean un poco confusas, en realidad son expresiones diferentes.

Para cualquier función de onda, el hecho de que esté normalizada implica $\mathcal{R}e(\langle \phi(t)|\frac{d}{dt}|\phi(t)\rangle) = 0$. Entonces la ecuación (2.9) se reduce a $\mathcal{I}m(\langle \phi(t)|\frac{d}{dt}|\phi(t)\rangle) = 0$

Los vectores de H_uP son los ortogonales a la fibra. Esta conexión es la **conexión de Berry**. Después de una vuelta:

$$|\xi(T)\rangle = e^{i\oint_C \mathcal{A}}|\xi(0)\rangle \quad (2.10)$$

Si al tomar una curva en P que sea igual a la evolución dictada por la ecuación de Shroedinger, al dar una vuelta en ella no aparece la fase dinámica, obtenemos la conexión que nos da la fase de Berry. Para ello simplemente se requiere que las *direcciones “permitidas” para el transporte paralelo sean ortogonales* a la fibra. Si escogemos otra conexión, el resultado va a ser la fase geométrica más una fase extra, que se puede interpretar como la fase dinámica de cierto hamiltoniano. Existen formas similares de deducir la conexión [Simon, 1983] y [Samuel y Bhandari,1988]. En consecuencia, *la fase de Berry es el transporte paralelo de la función de onda, donde la regla de transporte paralelo hace que la fase sea independiente del hamiltoniano utilizado.*

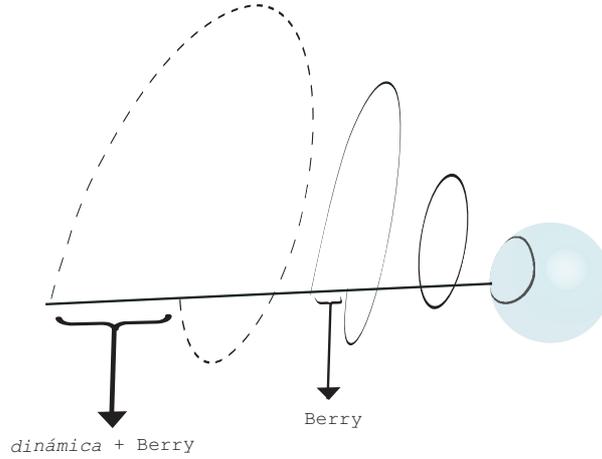


Figura 2.2: Construcción de la conexión. La curva sobre la superficie de la esfera representa la evolución del sistema, $C(t)$. Las otras tres curvas (De izquierda a derecha, $|\Psi(t)\rangle$, $|\xi(t)\rangle$ y $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$) están en el espacio total y sus proyecciones al espacio base son la misma $\pi(|\Psi(t)\rangle) = \pi(|\xi(t)\rangle) = \pi(|\tilde{\Psi}(t)\rangle) = C(t)$

La figura 2.2 muestra el proceso de construcción de la conexión. En este caso, el espacio base es la superficie de una esfera. La curva negra cerrada sobre ella representa la evolución del sistema, $C(t)$. El espacio total es la esfera completa sin su centro. $|\Psi(t)\rangle$ es representado por la curva punteada. Ésta no es cerrada debido a que $|\Psi(T)\rangle \neq |\Psi(0)\rangle$. La diferencia entre $|\Psi(T)\rangle$ y $|\Psi(0)\rangle$ es una fase que equivale a una distancia en la fibra, que tiene dos contribuciones. Una la fase dinámica y otra la fase de Berry (γ). Construimos una segunda curva $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$ que es cerrada. Y a partir de ésta, utilizando la conexión podemos construir una tercera curva, $|\xi(t)\rangle$, que no es cerrada, pero su diferencia de fase sólo incluye a la fase de Berry. En la figura es la curva continua no cerrada. La proyección de las tres curvas al espacio base es la misma.

Utilizando el teorema de Stokes en la ecuación (2.10):

$$\oint_C \mathcal{A} = \int_{\Sigma} d\mathcal{A} = \int_{\Sigma} \mathcal{F} \quad (2.11)$$

donde la frontera de Σ es C . \mathcal{F} es la **curvatura de Berry**. Como vimos en la sección 1.2.2, \mathcal{F} es una propiedad de la geometría global de la variedad, que nos dice que tan curva es. En este caso, la variedad asociada es el espacio base, por lo cual la fase de Berry no es más que una consecuencia de la forma global del espacio base. Si éste es plano, no hay fase de Berry. Si es curvo, sí lo hay. Este resultado no es tan inesperado ya que habíamos visto que la fase de Berry es la holonomía resultante del transporte paralelo de la función de onda. Y como ya vimos (figura 1.2), la holonomía sólo existe en espacios curvos.

Como los vectores utilizados en la ecuación (2.8) son vectores del $P(\mathcal{H})$, existe una libertad de escoger cualquier fase. Tal vez haciendo un cambio de fase, podríamos eliminar a la fase de Berry. De hecho, por esta misma idea durante años nunca se la tomó en cuenta.

Hagamos el siguiente cambio:

$$|\tilde{\Phi}(t)\rangle = e^{i\xi(t)} |\tilde{\Psi}(t)\rangle \quad (2.12)$$

donde el $\tilde{\sim}$ solamente quiere decir que la curva en el espacio total es cerrada, lo cual es un requisito que utilizamos para definir a \mathcal{A} . Como las dos curvas son cerradas se tiene:

$$\begin{aligned}
e^{i\xi(T)}|\tilde{\Psi}(T)\rangle &= e^{i\xi(0)}|\tilde{\Psi}(0)\rangle \\
&\Downarrow \\
e^{i\xi(T)} &= e^{i\xi(0)} \\
&\Downarrow \\
\xi(T) &= \xi(0) + 2\pi n
\end{aligned} \tag{2.13}$$

donde n es un entero. Y \mathcal{A} se transforma:

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}' = \langle \tilde{\Phi}(t) | i \frac{d}{dt} | \tilde{\Phi}(t) \rangle = \langle \tilde{\Psi}(t) | i e^{-i\xi(t)} \frac{d}{dt} e^{i\xi(t)} | \tilde{\Psi}(t) \rangle = \langle \tilde{\Psi}(t) | i \frac{d}{dt} | \tilde{\Psi}(t) \rangle + -\frac{d}{dt} \xi(t) = \mathcal{A} - \frac{d}{dt} \xi(t) \tag{2.14}$$

Para calcular la fase integramos:

$$\oint_{\gamma} \mathcal{A}' = \oint_{\gamma} \mathcal{A} - (\xi(T) - \xi(0)) = \oint_{\gamma} \mathcal{A} - 2\pi n \tag{2.15}$$

donde el factor $2\pi n$ no es relevante ya que $e^{2\pi n} = 1$, por lo que este cambio de fase nos da la misma fase de Berry. Esto se debe a que en la definición de \mathcal{A} , la curva utilizada es cerrada en el espacio total.

Claro que los resultados de Berry [Berry, 1984] nos daban cierta pista de cómo iba a ser la conexión.

Las diferencias entre esta deducción y la que utilizó Berry van más allá de una cuestión de elegancia matemática o de la clarificación de ciertos puntos. También existen diferencias en las hipótesis físicas en la que se basan. En el artículo de Berry se requiere que:

- Inicialmente el sistema se encuentre en un eigenestado.
- El cambio del sistema sea adiabático.
- Los parámetros varíen de forma cíclica.
- Los eigenestados no sean degenerados.

En la deducción que hicimos, nunca requerimos que el cambio del sistema fuera adiabático. Se puede demostrar que la adiabacidad induce de forma “natural” una conexión que es igual a la ecuación (2.8) [Chruscinski y Jamiolkowski, Secciones 2.1-2.2]. La idea básica es que la implicación del teorema adiabático que mencionamos al principio de este capítulo puede escribirse como un proyector. Si el sistema se encontraba inicialmente en el eigenestado $|\psi(0)\rangle = |n(0)\rangle$, el proyector se escribe $|n(t)\rangle\langle n(t)|$ entonces a un tiempo t el sistema va a estar en $|n(t)\rangle\langle n(t)|\dot{n}(t)\rangle$, donde la fase está relacionada con $\langle n(t)|\dot{n}(t)\rangle$ y que es similar a la ecuación (2.8).

La adiabacidad es suficiente para garantizar el transporte paralelo escogido. Sin embargo, no es necesaria. En la deducción presentada nunca se necesitó que el cambio fuera adiabático. Existen experimentos donde se detecta una fase geométrica para sistemas que cambian de forma no adiabática [Suter, Mueller y Pines, 1988]. Tampoco fue necesario que la función de onda inicial sea un eigenestado del hamiltoniano inicial.

En principio se podría haber escogido otro espacio base. Simon [Simon, 1983] escoge el espacio de parámetros y en él pone una curva cerrada. A través de ella cambia el hamiltoniano, lo que implica que los parámetros cambian de forma cíclica. La conexión utilizada por Simon es:

$$\langle n|d|n\rangle = 0 \tag{2.16}$$

donde $|n\rangle$ es un eigenestado del sistema. Esta es la **conexión de Berry-Simon**. Pero al elegir como espacio base el espacio proyectivo, la curva cerrada está en éste y no en el espacio de parámetros. En este caso, lo único que necesitamos es que la función de onda inicial y final sean la misma, salvo diferencias de

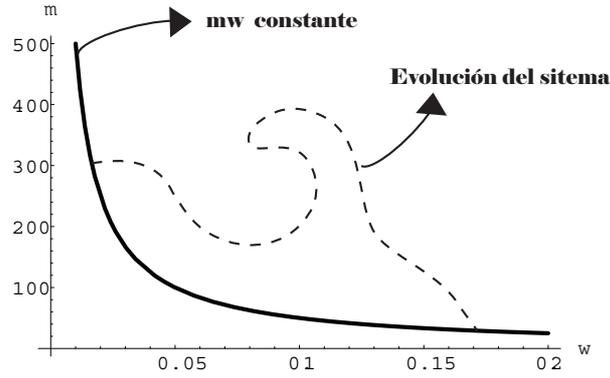


Figura 2.3: Espacio de parámetros de un oscilador armónico. En el eje x, la frecuencia y en el eje y la masa.

fase. Que la curva sea cerrada en el espacio proyectivo no implica que lo sea en el espacio de parámetros. Por ejemplo: el estado base de un oscilador armónico en una dimensión es

$$\phi_0(x) = \left(\frac{mw}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{mw}{2\hbar}x^2} \quad (2.17)$$

y depende de dos parámetros, m y w . En la figura 2.1, la curva continua representa los valores de m y w , donde el producto mw es constante. Para cualquier punto de esta curva, la función de onda asociada será la misma. Suponiendo que inicialmente el sistema se encuentra en algún lugar de esta curva, la curva punteada representa un cambio en los parámetros. A pesar de que no es cerrada en el espacio de parámetros, las funciones de onda inicial y final son iguales, por lo que *en el espacio proyectivo la curva sí es cerrada*. Esta fase se conoce también como la fase Aharonov-Anandan (AA) y es simplemente una generalización de la fase de Berry.

Existe incluso una generalización más a la fase de Berry, en la cual no se requiere que la evolución en el espacio proyectivo sea cíclica [Samuel y Bhandari,1988].

Veamos un ejemplo de cómo se calcula la fase de Berry. Tenemos fotones que se propagan a través de una fibra óptica. La dirección de propagación \vec{k} va a ser paralela a la fibra, por lo que si la fibra da vueltas, el fotón también. El espín del fotón \vec{s} va a ser paralelo o antiparalelo a \vec{k} . Al ser una partícula que viaja a la velocidad de la luz, su helicidad $\vec{s} \cdot \vec{k}$ va a ser 1 o -1 . Los eigenestados son:

$$\vec{s} \cdot \vec{k} |k(t), \pm\rangle = \pm |k(t), \pm\rangle \quad (2.18)$$

donde:

$$|k(t), +\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \text{sen}\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad |k(t), -\rangle = \begin{pmatrix} -\text{sen}\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Cada uno de estos eigenestados representa una de las dos posibles polarizaciones circulares, una derecha y otra izquierda. θ y ϕ son las coordenadas esféricas del vector \vec{k} .

$$\mathcal{A}_{\pm} = i(\langle k(t), \pm | \partial_{\theta} | k(t), \pm \rangle d\theta + \langle k(t), \pm | \partial_{\phi} | k(t), \pm \rangle d\phi) = \mp \text{sen}^2\frac{\theta}{2} d\phi \quad (2.20)$$

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A}_{\pm} = \mp \text{sen}\theta d\phi d\theta \quad (2.21)$$

$$\gamma_{\pm} = \mp \int_{\Sigma} \text{sen}\theta d\phi d\theta = \mp \Omega \quad (2.22)$$

donde Ω es el ángulo sólido encerrado por la curva en la esfera a lo largo de la cual se movió el vector \vec{k} . Y la función de onda después de una vuelta adquiere la fase:

$$|k(T), \pm\rangle = e^{\mp i\Omega} |k(0), \pm\rangle \quad (2.23)$$

La polarización lineal $|x\rangle$ es una superposición de la polarización circular izquierda y de la derecha:

$$|x(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|k(0), +\rangle + |k(0), -\rangle) \quad (2.24)$$

Después de una vuelta cada estado adquiere su fase correspondiente:

$$\begin{aligned} |x(T)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\Omega} |k(T), +\rangle + e^{+i\Omega} |k(T), -\rangle) \\ \langle x(0)|x(T)\rangle &= \cos^2 \Omega \end{aligned} \quad (2.25)$$

lo que implica que la polarización lineal rotó un ángulo Ω . Ésta es la teoría de uno de los experimentos utilizados para comprobar la existencia de la fase de Berry.

Se han hecho varios experimentos donde se comprueba la existencia de la fase de Berry [Shapere y Wilczek, Capítulo 4]. Incluso hubo experimentos [Mead y Truhlar, 1979] que se hicieron antes del descubrimiento de Berry. Uno de los primeros experimentos que comprobó la existencia de la fase de Berry fue el de Tomita y Chiao [Tomita y Chiao, 1986]. En él enrollaron una fibra óptica en un cilindro formando una hélice. Al principio y al final de la hélice pusieron dos polarizadores para medir el cambio en la polarización de un láser de He-Ne. Como ya vimos en el ejemplo anterior, el parámetro que cambia cuando la luz recorre la fibra es la dirección del vector \vec{k} . El espacio base es el espacio de momentos y tiene la forma de una esfera. Para asegurar que el ciclo fuera cerrado, acomodaron la fibra de tal forma que sus dos extremos estuvieran en la misma dirección; de esta manera, \vec{k} también tenía la misma dirección. Y encontraron los resultados esperados. El experimento lo repitieron formando otras figuras al enrollar la fibra en vez de una hélice. Como vimos, en *este sistema*, la fase de Berry únicamente depende del ángulo sólido encerrado por $C(t)$. Para poder comparar los resultados de este experimento, entre distintas curvas, es necesario que esta condición se cumpla. Tomando en cuenta esto, los resultados para la hélice y para las otras curvas son los mismos y se apegan a las predicciones teóricas.

2.2. El efecto Wilczek-Zee

Hasta el momento siempre supusimos que los eigenestados no estaban degenerados. Por eso pudimos suponer que la diferencia entre el estado inicial y el final era solamente una fase como en la ecuación (2.10). Pero en general, los eigenestados pueden estar degenerados. Esto se debe a alguna simetría en el hamiltoniano. En este caso ya no podemos asegurar que el estado final va a ser el mismo que el inicial (salvo una fase). Supongamos que inicialmente el sistema se encuentra en el eigenestado $|\psi(0)\rangle = |l(0)\rangle$ y con energía $E_\alpha(0)$. Además de este estado, existen otros $m - 1$ estados con la misma energía. Haciendo una generalización del teorema adiabático:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{l=1}^m a_l(t) |l(t)\rangle \quad (2.26)$$

donde las $a_l(t)$ al ser coeficientes nos dicen no solamente la fase del estado $|l(t)\rangle$, sino también su amplitud. En la ecuación también se ha removido la fase dinámica. Lo cual siempre se puede hacer.

Esta matriz que obtuvimos se puede deducir también utilizando el lenguaje de los haces fibrados. En este caso, tomamos al espacio de parámetros como el espacio base, M . A cada punto de él, x , se le puede asociar el espacio creado por los eigenvectores que corresponden a la energía E_α . Este espacio lo llamamos \mathcal{H}_α . Y el espacio total es

$$E^\alpha = \bigcup_{x \in M} \mathcal{H}_\alpha$$

Nótese que la unión de los espacios degenerados es respecto a diferentes parámetros y no respecto a distintas α . Por esto para cada valor de la energía existe otro espacio total.

De manera similar a lo que hicimos en el caso no degenerado (ecuación (2.16)), llamamos transporte paralelo al movimiento del eigenestado de forma ortogonal, no solamente a él mismo sino a cualquier eigenestado que tenga la misma energía. La curva que representa el transporte horizontal representa el transporte paralelo de cada uno de los eigenvectores degenerados, por lo que es de la forma $(\xi_1(t), \dots, \xi_m(t))$. La **conexión de Wilczek-Zee** es:

$$\langle l | \frac{d}{dt} | \xi_k(t) \rangle = 0 \quad (2.27)$$

para cualquier $k, l = 1, \dots, m$.

Lo que nos interesa en este caso es poder relacionar las distintas a_l después de completar un ciclo en el espacio de parámetros (esto se hace al tiempo T) con la originales al tiempo 0. Esto esta dado por una matriz de la siguiente forma:

$$a_k(T) = \sum_{l=1}^m U_{kl}^\alpha(T) a_l(0) \quad (2.28)$$

U_{kl} es una matriz de $m \times m$.

En el caso no degenerado, la contribución a la fase de Berry se debía únicamente al eigenestado original. Sin embargo, en este caso, después de un ciclo, los coeficientes $a_k(T)$ van a ser una mezcla de todos los coeficientes, lo que implica que el estado original va a evolucionar a una combinación lineal de los eigenestados degenerados con fase $U_{kl}^\alpha(T) a_l(0)$. Esto tiene como consecuencia que exista una fase geométrica pero también que la población de los eigenestados con la misma energía cambie al haber una evolución. Como los cambios son entre eigenestados degenerados, no hay ni absorción ni emisión de energía [Berry, 1990, Lecture 5]. Al representar $U_{kl}^\alpha(T)$ el transporte paralelo del estado $|k\rangle$, utilizando la ecuación (1.11) se encuentra que sus componentes son:

$$U_{kl}^\alpha(T) = \mathcal{P} e^{i \oint_C \mathcal{A}_{kl}^\alpha} \quad (2.29)$$

donde C es la curva recorrida en el espacio de parámetros, \mathcal{P} es la integral de ordenamiento de recorrido [Sakurai, Ver Series de Dyson]. \mathcal{A}_{kl}^α son los elementos de matriz del **potencial de Wilczek-Zee**. Debido a que conocemos la conexión podemos definir a sus componentes como:

$$\mathcal{A}_{kl}^\alpha = i \langle k | \frac{d}{dt} | l \rangle \quad (2.30)$$

Si la matriz \mathcal{A}^α es diagonal, también lo va a ser U^α , los coeficientes a_k ya no se van a mezclar:

$$a_k(T) = U_{kk}^\alpha a_k(0) \quad \mathcal{A}^\alpha \text{ diagonal} \quad (2.31)$$

donde $U_{kk} = \gamma_k$ (Ver ecuación (2.3)). Por consiguiente, en una base donde \mathcal{A}^α es diagonal, las fases para el caso degenerado se calculan de la misma forma que el no degenerado. Esto puede servir para simplificar los cálculos.

Un ejemplo [Suter, Chingas, Harris y Pines, 1987] de un sistema degenerado donde se puede diagonalizar la matriz \mathcal{A}^α es el experimento realizado por Tycko [Tycko, 1987] Para cada energía degenerada, al ser diferentes los eigenvectores también lo van a ser \mathcal{A}^α y U^α , por eso llevan un superíndice α que indica a que degeneración están asociados. En caso de que $m = 1$, lo cual implica que no hay degeneración, \mathcal{A}^α y U^α son matrices 1×1 . Además U^α es unitario, lo que quiere decir que es un número complejo de norma uno y así todo se reduce a la fase de Berry que ya habíamos calculado.

Veamos un ejemplo práctico de cómo se calculan las fases en el caso degenerado. La generalización de la interacción de una partícula de spín un medio con un campo magnético implica cambiar en el hamiltoniano las matrices de Pauli por las de Dirac (γ_k), obteniendo:

$$H = \frac{1}{2} \mu B \cdot \gamma \quad (2.32)$$

La energía $E = \frac{1}{2} \mu B$ tiene dos eigenestados degenerados.

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad \psi_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \operatorname{sen}\theta e^{-i\phi} \\ -\cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Utilizando la ecuación (2.30):

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_\theta d\theta + \mathcal{A}_\phi d\phi \\ \mathcal{A}_\theta &= \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ -e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}_\phi &= \frac{\operatorname{sen}\theta}{2} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta e^{-i\phi} \\ \cos\theta e^{i\phi} & \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Capítulo 3

Mecánica Cuántica en Subvariedades de \mathbb{R}^n

Para resolver un problema físico lo primero que se intenta es simplificar el problema. Existen varios tipos de simplificaciones, algunas con implicaciones físicas y otras no. De hecho, todo problema físico es una aproximación de la realidad. Se debe decidir que elementos son importantes para la solución del problema y cuáles no. Por ejemplo, si un objeto se deja caer desde un edificio no muy alto, la fricción del aire, aunque frena al objeto, no ejerce un efecto muy grande y, como una primera aproximación, se le puede despreciar para simplificar el problema. Además de este tipo de simplificaciones que son de carácter físico, existen otras que son de carácter matemático. Éstas no cambian los factores que se toman en cuenta. Simplemente simplifican el cálculo. En caso de tener un objeto que se mueve a lo largo de un círculo es más fácil describir el problema en términos de la distancia recorrida en el círculo que en coordenadas cartesianas. Este tipo de simplificaciones consisten en hacer ciertos cambios de coordenadas y tomar en cuenta las simetrías del problema. En el caso de un péndulo, se puede simplificar el problema tomando en cuenta que la masa del péndulo siempre se va a mover a cierta distancia del lugar de donde está colgada, por lo que podemos suponer que se va a mover en medio círculo y utilizar la distancia que se ha recorrido en el círculo como coordenada. Sin embargo, la masa del péndulo, al ser un objeto con volumen, no se mueve en una línea. Pero existen ciertos “trucos” que nos permiten suponer que toda la masa del péndulo está concentrada en un punto y este punto se mueve en la línea anterior. Este punto es el centro de masa.

En mecánica cuántica se pueden interpretar las partículas como objetos con volumen. Sin embargo, en este caso no existe un equivalente al centro de masa, por lo que en un problema donde existen constricciones no se puede suponer que una partícula se mueve en una línea o en una superficie en vez de en un espacio de tres dimensiones.

En varios casos, cómo interpretar cuánticamente un problema no es tan trivial y las suposiciones anteriores no se toman en cuenta. En este capítulo veremos qué es lo que pasa al suponer que una partícula que está restringida a moverse en una línea, en vez de sólo moverse en ésta, en realidad se puede mover en ella y en distancias muy cercanas a ellas (una descripción más realista). Esta simple suposición tiene efectos muy importantes que pueden ser medidos.

3.1. Métodos de cuantización

Cuando un cuerpo está limitado a moverse en ciertas direcciones, existe una constricción que obliga al cuerpo a estar solamente en ciertos puntos del espacio. Un ejemplo de esto es un péndulo en un plano. Claramente, al moverse en el plano podemos describir su movimiento con dos coordenadas. Sin embargo existe una constricción que obliga a la masa que cuelga a mantenerse siempre a la misma distancia del lugar donde cuelga. Esta constricción además nos ayuda a simplificar los cálculos al utilizar coordenadas generalizadas. Al igual que en la sección 1.1.2, en el caso B el habitante del círculo sólo se puede mover en éste; al hacer esto limitamos el movimiento del péndulo también a un círculo y es como si todo su

“mundo” fuera éste y el resto del espacio no existiera.

Esta visión ha tenido mucho éxito en mecánica clásica debido en gran parte a su capacidad de simplificación. En mecánica cuántica, varios métodos de cuantización utilizan esta idea. Primero, se simplifica el problema clásico, utilizando un sistema de coordenadas generalizadas, donde ciertas coordenadas tienen valores fijos (debido a las constricciones) y posteriormente se cuantiza el sistema. En pocas palabras, esto consiste en remplazar las cantidades medibles del sistema (Posición, momento, etc.) por operadores y los paréntesis de Poisson por conmutadores [DeWitt, 1952]. El problema es que en general en mecánica cuántica los operadores no conmutan. Cuando dos operadores, \hat{A} y \hat{B} , se multiplican y no conmutan, $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$. Esto implica que el orden de los operadores puede ser importante y no siempre es evidente cuál es el correcto. Esta ambigüedad en el ordenamiento puede ser responsable de que ciertos efectos cuánticos no sean evidentes. Veamos un ejemplo. Supongamos que en \mathbb{R}^3 hay una partícula que sólo se puede mover en una superficie, por ejemplo una esfera. Tomando $\hbar = m = 1$

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\Delta + \alpha R \quad (3.1)$$

El coeficiente α va a ser diferente para distintos métodos de cuantización y distintos ordenamientos [Maraner, 1994], resultando en una ambigüedad.

Algo importante a tomar en cuenta es que a diferencia del caso de mecánica clásica, en cuántica no se puede suponer a los cuerpos como partículas puntuales. Las partículas son descritas por funciones de onda de probabilidad. Al no poder asegurar (a menos que se haga una medición) que la partícula está en un punto o en otro, no lo podemos interpretar como un objeto puntual. Al ser un cuerpo extendido, se pensaría que puede encontrarse un análogo clásico al centro de masa. Sin embargo, la “extensión” de la partícula no es de ella misma sino de su probabilidad. Por lo que, por lo menos hasta donde sabemos actualmente, no se puede definir un centro de masa tampoco.

Supongamos que estudiamos un sistema que está restringido a moverse en cierta curva. En 3 dimensiones la partícula es representada por una esfera de probabilidad. En realidad, esta esfera se puede extender por todo el espacio, pero solo consideramos el espacio donde las probabilidades de que esté la partícula son mayores a cierto número. La restricción puede representarse por una curva en el espacio. La esfera completa no puede moverse en una línea. Por lo tanto, las partes que no se mueven en esta línea van a ser afectadas por lo que pasa fuera de esta línea. En realidad, nuestro sistema se mueve en la línea y en una vecindad de ella.

¿Dónde desempeña un papel importante el hecho de que la función de onda es afectada por el espacio fuera de la curva? Veamos un ejemplo poco ortodoxo. Tomemos un spaghetti y enrollémoslo, sin estirarlo, de dos maneras distintas. En un caso lo ponemos recto. En otro lo enrollamos en un círculo. Viendo el plato, las diferencias son evidentes en las dos situaciones. Pero el spaghetti es exactamente el mismo. Si solamente nos pudiéramos mover en el spaghetti no podríamos notar la diferencia. Esto se debe a que existe una relación uno a uno entre las dos curvas. Las dos tienen la misma curvatura interna. Se ven diferentes por que sus curvaturas extrínsecas son distintas. En los dos casos el spaghetti es el mismo, pero en cada uno está “enrollado” de forma diferente. Cómo se enrolla el spaghetti depende de qué espacio ocupe en el plato o lo que es equivalente, las coordenadas que tenga en un espacio más grande. Esta diferencia se debe a la curvatura extrínseca y depende del espacio *fuera* del spaghetti.

Regresando al caso de las partículas, si no tomamos en cuenta que la partícula es un objeto extendido, la física sería la misma si se moviera en un círculo o en una línea recta. Suponiendo lo contrario, la física sería diferente y dependería de la curvatura extrínseca. Por esta razón tomaremos en cuenta que la partícula es un objeto extendido.

Si queremos que una partícula se mueva en una curva en el espacio, ¿cuáles son las constricciones que debemos de tomar en cuenta? En cada punto de la curva podemos definir un espacio normal. En estas direcciones la partícula se puede mover, pero poco. Para lograr esto, introducimos un potencial muy estrecho en las direcciones normales a la curva en cada punto. Para tener los resultados deseados el potencial debe de:

- Tener un mínimo en la curva y su valor en este punto debe de ser cero.
- Depender solamente de las coordenadas normales.
- Ser muy estrecho, para que la partícula no se pueda alejar mucho de la curva.

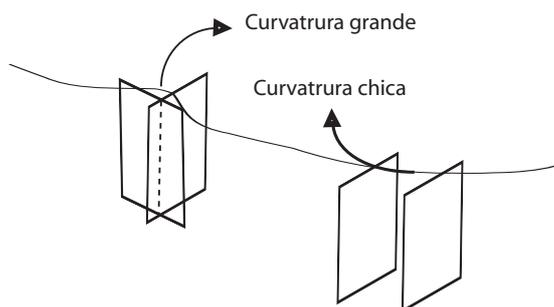


Figura 3.1: Cuando la curvatura es grande, los planos normales se cruzan cerca de la curva, por lo que varios puntos (en el dibujo la línea punteada) pueden describirse por coordenadas distintas. En cambio si la curvatura es chica, los planos también se cruzan pero mucho más lejos de la curva, en regiones que para este estudio no nos interesan.

Podemos utilizar cualquier potencial que cumpla estos requisitos. Los resultados dependerán del potencial utilizado y éste a su vez del problema físico. Debido a que el potencial es muy estrecho, la separación entre los niveles de energía en las direcciones normales va a ser muy grande respecto a la separación en las direcciones tangenciales.

Primero analizaremos este tipo de sistemas en general y posteriormente tomaremos el caso particular de una línea en un espacio de 3 dimensiones.

3.2. Sistema de coordenadas

Una partícula está constreñida a una variedad de dimensión m , la cual es parte de \mathbb{R}^n y $m < n$. Cada punto de la variedad tiene una coordenada en \mathbb{R}^n dada por la función $\mathbf{R} : V^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Utilizar coordenadas cartesianas no es conveniente. Para simplificar el problema hacemos un cambio de coordenadas. Debido a que la hipersuperficie de constricción es una variedad, existe un sistema local de coordenadas $y = \{y^1, \dots, y^m\}$. Restan $n - m = p$ coordenadas. Elegimos las coordenadas del hiperplano normal a la variedad. Para esto es necesario escoger una base, la cual consiste en p vector independientes en las direcciones normales. $\hat{n}^i(y)$, $i = m + 1, \dots, n$. Como los vectores son normales a la variedad en *cada punto*, para distintos puntos van a ser diferentes y por eso dependen del punto de la variedad, y . Las coordenadas normales van a ser distancias, z^i , en éstas direcciones, $z^i \hat{n}^i(y)$. Esta elección no es única. Siempre se puede elegir alguna rotación de uno o varios de los vectores. Más adelante veremos qué hay que tomar en cuenta si se hace un cambio de base.

“Cualquier” punto en \mathbb{R}^n lo podemos escribir en estas nuevas coordenadas:

$$r(y, z) = \mathbf{R}(y) + z^i \hat{n}^i(y) \quad (3.2)$$

Tomaremos como convención que índices repetidos se suman. En realidad, esto no es un sistema de coordenadas válido para todo el espacio. Si queremos poner el punto r siempre es necesario elegir un punto de referencia en la variedad, de ahí la dependencia en y . Si éste es y_0 , el punto que deseamos describir en \mathbb{R}^n es la suma vectorial del vector que va del origen a y_0 más una combinación lineal de los vectores normales. La única restricción que existe para la elección de y_0 es que r esté en el hiperplano normal a y_0 . Estos en general se van a cruzar por lo que para un punto existen varias coordenadas, lo cual evita que sea un buen sistema de coordenadas. Sin embargo, para puntos muy cercanos a la variedad, los planos no se van a cruzar. Solamente para éstos es válido este nuevo sistema de coordenadas. Pero como la posición de la partícula está restringida a la variedad y a una vecindad suficientemente chica, estas coordenadas son suficientemente buenas para nuestro análisis. ¿Qué tan chicas? Lo suficiente para que los planos normales no se crucen.

Podemos tomar como base vectorial de estas coordenadas un combinación de los vectores tangentes (\hat{t}_μ) y de los normales (\hat{n}^i) a la variedad. Utilizaremos la convención de que índices griegos van de 1 a m

e índices en minúsculas latinas de $m+1$ a n y los de mayúsculas de 1 a n . De las ecuaciones generalizadas de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \hat{n}^i &= -\alpha_{\mu\nu}^{i\nu} t_\nu - A_\mu^{ij} \hat{n}^j \\ \partial_\mu \hat{t}_\nu &= \Gamma_{\mu\nu}^\rho \hat{t}_\rho + \alpha_{\mu\nu}^i \hat{n}^i \\ g_{\mu\nu} &= \hat{t}_\mu \cdot \hat{t}_\nu \\ \alpha_{\mu\nu}^i &= \hat{t}_\mu \cdot \partial_\nu \hat{n}^i \\ A_\mu^{ij} &= \hat{n}^i \cdot \partial_\mu \hat{n}^j\end{aligned}\quad (3.3)$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ son los símbolos de Christoffel, $g_{\mu\nu}$ es la métrica de la variedad. $\alpha_{\mu\nu}^i$ es antisimétrico en los índices griegos y A_μ^{ij} lo es en los latinos. Para el caso de una curva en \mathbb{R}^3 , solamente existe una dirección tangencial, por lo que los índices griegos ya no son necesarios. Hay 2 direcciones normales que llamamos \hat{n} y \hat{b} , eliminando así los índices latinos. α es la curvatura y A la torsión.

Como mencionamos, la elección de los \hat{n}^i no es única. En cambio, los \hat{t}_μ están definidos por las coordenadas de la variedad. Tenemos la libertad de hacer una rotación de los vectores normales $\hat{n}^{ti} = R^{ki} \hat{n}^k$, donde R^{ik} es una matriz de rotación. Haciendo este cambio de base:

$$\alpha_{\mu\nu}^{ti} = R^{ki} \alpha_{\mu\nu}^k \quad (3.4)$$

$$A_\mu^{tij} = R^{ki} A_\mu^{kl} R^{lj} + R^{ki} \partial_\mu R^{kj} \quad (3.5)$$

La métrica en las coordenadas tangenciales y normales es:

$$G_{AB} = \partial_{A^r} \cdot \partial_{B^r} \quad (3.6)$$

Esta matriz la podemos dividir en 4 partes para facilitar el cálculo:

$$\left(\begin{array}{c|c} \frac{(t_\mu + y^i \partial_\mu \hat{n}^i) \cdot (t_\nu + y^j \partial_\nu \hat{n}^j)}{\hat{n}^i \cdot (t_\nu + y^j \partial_\nu \hat{n}^j)} & \frac{(t_\mu + y^i \partial_\mu \hat{n}^i) \cdot \hat{n}^j}{\hat{n}^i \cdot \hat{n}^j} \\ \hline & \end{array} \right)$$

La primera división corresponde en la ecuación (3.6) a tomar las dos parciales respecto a las direcciones tangenciales, de las siguientes dos (que están fuera de la diagonal), una parcial es respecto a la dirección tangencial y la otra respecto a la normal, y en la última, las dos parciales son respecto a las direcciones normales. Utilizando esta matriz y las ecuaciones 3.3 se obtiene que G_{AB} es:

$$\left(\begin{array}{c|c} \gamma_{\mu\nu} + y^i y^j A_\mu^{ih} A_\nu^{jh} & y^i A_\mu^{hi} \\ \hline y^j A_\nu^{hj} & \delta^{ij} \end{array} \right)$$

donde $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - 2y^i \alpha_{\mu\nu}^i + y^i y^j \alpha_{\mu\rho}^i g^{\rho\sigma} \alpha_{\nu\sigma}^j$. Ya que $\det(G) = \det(\gamma)$, es fácil encontrar la matriz inversa, G^{AB} es :

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda^{\mu\nu} & y^j A_\sigma^{jh} \lambda^{\mu\sigma} \\ \hline y^i A_\sigma^{ki} \lambda^{\mu\nu} & \delta_{ij} + y^i y^j A^{ki\mu} A^{lj\nu} \lambda^{\mu\nu} \end{array} \right)$$

donde $\lambda^{\mu\nu} \equiv (\gamma^{-1})_{\mu\nu}$.

3.3. Dinámica

Los cambios de coordenadas de la sección anterior nos facilitan el cálculo. En coordenadas cartesianas, el hamiltoniano del sistema es $H_c = -\frac{1}{2}\partial_A\partial_A + V(z)$, donde V es el potencial de constricción en las direcciones normales. Haciendo el cambio a las nuevas coordenadas [Schutz]:

$$H = -\frac{1}{2G^{\frac{1}{2}}}\partial_A G^{AB} G^{\frac{1}{2}}\partial_B + V(z) \quad (3.7)$$

En este caso, las parciales son respecto a la nuevas coordenadas y G es el determinante de la matriz G .

Nos interesa encontrar una función de onda, Ψ , que describa la probabilidad de que la partícula se encuentre en algún punto de la variedad [Schuster y Jaffe, 2003] y que su normalización sea de la forma $\int d^m y d^p z \sqrt{g} \Psi^* \Psi$. Recordemos que g es la métrica de la variedad en las nuevas coordenadas. Pero la normalización de una función de onda que sea eigenvalor de la ecuación 3.7 al hacer el cambio de coordenadas es $\int d^m y d^p z \sqrt{G} \Phi^* \Phi$. Reescalando la función de onda obtenemos el resultado deseado: $\Psi = \frac{g}{G}^{\frac{1}{4}} \Phi$.

También hay que reescalar el hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_T = \frac{G}{g}^{\frac{1}{4}} \hat{\mathcal{H}} \frac{g}{G}^{\frac{1}{4}}$. Tomando en cuenta que g, z^i y A_μ^{ij} no dependen de las direcciones normales y que en la ecuación 3.7 hay una suma sobre los índices A y B:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_T = & \\ & -\frac{1}{2(g\gamma)^{\frac{1}{4}}} (\partial_i \sqrt{\gamma} \partial_i + \partial_\mu \lambda^{\mu\nu} \sqrt{\gamma} \partial_\nu + \partial_\mu \lambda^{\mu\sigma} y^j A_\sigma^{jh} \sqrt{\gamma} \partial_j + \partial_i \lambda^{\mu\sigma} y^i A_\sigma^{ki} \partial_\mu + y^i y^j A^{ki\mu} A^{lj\nu} \partial_i \lambda^{\mu\nu} \sqrt{\gamma} \partial_j) \left(\frac{g}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} \\ & + V(z) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para simplificar la notación definimos $\hat{\partial}_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{1}{2} i A_\mu^{ij} L_{ij}$, donde $L_{ij} = i(z^j \partial_i - z^i \partial_j)$. El factor un medio viene de que los dos operadores son antisimétricos y se suman en sus índices.

$$\hat{\mathcal{H}}_T = -\frac{1}{2(g\gamma)^{\frac{1}{4}}} (\partial_i \sqrt{\gamma} \partial_i + \hat{\partial}_\mu \lambda^{\mu\nu} \sqrt{\gamma} \hat{\partial}_\nu) \left(\frac{g}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} + V(z) \quad (3.9)$$

En general, en esta ecuación no se pueden encontrar los eigenvalores [Ikegami y Nagaoka, 1991], ya que no es separable en las direcciones normales y tangenciales. Por lo que para simplificar la ecuación hacemos un desarrollo en serie utilizando las propiedades del potencial. La energía total del sistema es la suma de la energía normal más la tangencial. Entre más estrecho sea el potencial, mayor va a ser la energía normal y, por lo tanto, en una expansión perturbativa, podemos tomar a los términos relacionados con la energía normal como los de orden cero. El potencial es uno de ellos y su expansión es:

$$V(z^i) = \frac{1}{2\epsilon^2} w^2 z^{i2} + a_{ijk} z^i z^j z^k + b_{ijkl} z^i z^j z^k z^l + \dots \quad (3.10)$$

El otro término es el primer sumando de la ecuación 3.9. Tomando éste más el primer término del potencial obtenemos:

$$\hat{\mathcal{H}}_o = -\frac{1}{2} \partial_i \partial_i + \frac{1}{2\epsilon^2} w^2 z^{i2} \quad (3.11)$$

Para que todo $\hat{\mathcal{H}}_o$ tenga el mismo orden en ϵ , reescalamos las coordenadas normales $z^i \rightarrow \epsilon^{\frac{1}{2}} z^i$:

$$\hat{\mathcal{H}}_o = \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{1}{2} \partial_i \partial_i + \frac{1}{2} w^2 z^{i2} \right) \quad (3.12)$$

Y la serie completa de $\hat{\mathcal{H}}_t$ es:

$$\epsilon \hat{\mathcal{H}}_t = \epsilon \hat{\mathcal{H}}_o + \epsilon \hat{\mathcal{H}}_1 + \epsilon^{\frac{3}{2}} \hat{\mathcal{H}}_{\frac{3}{2}} + \epsilon^2 \hat{\mathcal{H}}_2 + \dots \quad \dots + \epsilon^{\frac{5}{2}} a_{ijk} z^i z^j z^k + \epsilon^3 b_{ijkl} z^i z^j z^k z^l \quad (3.13)$$

$\epsilon \hat{\mathcal{H}}_o$ es el hamiltoniano de p osciladores armónicos desacoplados en las direcciones normales. $\hat{\mathcal{H}}_1$ es [Schuster y Jaffe, 2003]:

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = -\frac{1}{2g^{\frac{1}{2}}} \left(\partial_\mu + \frac{i}{2} A_\mu^{ij} L_{ij} \right) g^{\mu\nu} g^{\frac{1}{2}} \left(\partial_\nu + \frac{i}{2} A_\nu^{kl} L_{kl} \right) + \frac{1}{8} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} (\alpha_{\mu\nu}^i \alpha_{\rho\sigma}^i - 2\alpha_{\mu\rho}^i \alpha_{\nu\sigma}^i) \quad (3.14)$$

Los otros términos de la serie en práctica pueden ser del mismo orden que $\hat{\mathcal{H}}_1$ [Maraner, 1994, Maraner, 1994a]. Vamos a tomar solamente los dos primeros términos de la serie 3.13.

Hasta el momento el hamiltoniano de orden cero depende de las direcciones normales, mientras que la perturbación a primer orden depende de las tangenciales. En esta también existen términos que están relacionados con el espacio en el que está la variedad. Pero la dinámica que describe es la de una partícula libre (sin potenciales en las direcciones tangenciales) constreñida a la variedad. La función de onda va a ser una combinación de una parte relacionada con las direcciones normales y otra con las tangenciales.

$$\Psi(y, z) = \sum_{\beta=1}^d \psi_\beta(y) \Xi_\beta(z) = \begin{pmatrix} \psi_1(y) \\ \vdots \\ \psi_d(y) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

donde $\Xi_\beta(z)$ son los eigenestados de la ecuación 3.12. La segunda igualdad corresponde simplemente a otra forma de escribir la función de onda que será útil posteriormente. Ya que los $\Xi_\beta(z)$ forman una base, la función de onda se puede escribir como un vector donde la primera componente corresponde a la dirección $\Xi_1(z)$, la segunda a ... y la d -ésima a $\Xi_d(z)$. Los eigenestados $\Xi_\beta(z)$ tienen la misma energía y hay d estados degenerados. Como ya habíamos mencionado, ver sección 2.2, la degeneración se debe a cierta simetría del hamiltoniano. En este caso, la simetría se debe a que el potencial es $SO(p)$ simétrico, por lo que en este caso el hamiltoniano también lo es y los estados están degenerados.

El espacio entre los niveles de energía normales es mucho más grande que entre los tangenciales, por lo que los cambios de energía que pueda haber por la dinámica en las direcciones tangenciales no son suficientemente grandes para que la partícula cambie de estado en las direcciones normales. Debido a esto podemos suponer, como una aproximación, que la partícula en las direcciones normales se va a quedar en un eigenestado de estas direcciones. Para obtener la dinámica en la variedad es necesario congelar la función de onda en las direcciones normales. Esto se logra proyectando $\hat{\mathcal{H}}_1$ en el espacio de los eigenestados $\Xi_\beta(z)$. De esta manera, el hamiltoniano proyectado tiene la estructura de una matriz $d \times d$.

$$\hat{\mathcal{H}}_{1p} \alpha_\beta = \int d^p z \Xi_\alpha^*(z) \hat{\mathcal{H}}_1 \Xi_\beta(z) \quad (3.16)$$

donde el hamiltoniano cumple la ecuación de Schroedinger para la corrección de la energía, E_1 .

$$\hat{\mathcal{H}}_{1p} \psi(y) = E_1 \psi(y) \quad (3.17)$$

donde ψ son vectores de d componentes. Cada una de las componentes está relacionada con uno de los eigenestados $\Xi_\beta(z)$ por medio de la ecuación 3.15. La elección de la base de $\Xi_\beta(z)$ es importante ya que al ser $\hat{\mathcal{H}}_{1p}$ una ecuación matricial, representa un sistema de d ecuaciones que en general pueden estar acopladas. Al escoger una base que diagonalice las matrices, las ecuaciones se desacoplan y el cálculo se simplifica.

Proyectando $\hat{\mathcal{H}}_1$ se obtiene:

$$\hat{\mathcal{H}}_{1p} = -\frac{1}{2g^{\frac{1}{2}}} (\partial_\mu - i\mathcal{A}_\mu) g^{\mu\nu} g^{\frac{1}{2}} (\partial_\nu - i\mathcal{A}_\nu) + \mathcal{P} \quad (3.18)$$

donde

$$\mathcal{P} = \frac{1}{8} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} (\alpha_{\mu\nu}^i \alpha_{\rho\sigma}^i - 2\alpha_{\mu\rho}^i \alpha_{\nu\sigma}^i) \mathcal{I} \quad (3.19)$$

$$\mathcal{A}_\mu = \frac{1}{2} A_\mu^{rs} \mathcal{L}_{sr} \quad (3.20)$$

$$(\mathcal{L}_{ij})_{mn} \equiv \int d^p z \Xi_m^*(z) L_{ij} \Xi_n(z) \quad (3.21)$$

donde \mathcal{I} es la matriz identidad del tamaño de la degeneración de $\Xi(z)$. $\hat{\mathcal{H}}_{1p}$ es el hamiltoniano efectivo de la partícula constreñida a moverse en la variedad. La única matriz que no siempre es diagonal es \mathcal{A}_μ , ya que las demás son la matriz identidad. La elección de base es relevante justo por esta matriz.

En caso de que $\Xi_\beta(z)$ no estén degenerados, $(\mathcal{L}_{ij})_{mn} = 0$ [Maraner, 1994a]. En este caso el término \mathcal{A}_μ o el potencial de norma es cero.

Como se puede ver de la forma del hamiltoniano, éste depende del espacio exterior a la curva. La expresión de \mathcal{P} contiene términos con $\alpha_{\mu\nu}^i$, los cuales están relacionados con la curvatura extrínseca. El papel de éstos en el hamiltoniano es simplemente mover la escala de energía por un factor \mathcal{P} . En el caso de una curva, este factor aumenta donde la curvatura es mayor, por lo que la probabilidad de encontrar a la partícula en una sección curva es mayor que la de encontrarla en una parte plana. \mathcal{P} desempeña el papel de fuerzas “ficticias” que se deben a que la partícula está constreñida a moverse en la variedad. Debido a este término, dos curvas isométricas, como por ejemplo una línea recta y un círculo, no van a tener el mismo hamiltoniano [da Costa, 1981]. Mientras en el caso de la línea $\mathcal{P} = 0$, para el círculo $\mathcal{P} = -\frac{1}{8R^2}$, donde R es el radio del círculo. De hecho, todas las curvas son isométricas ya que al solamente existir una dirección tangencial, $g_{\mu\nu}$ es un matriz de uno por uno, o un número, y como los vectores t_μ están normalizados, para toda curva $g_{\mu\nu} = 1$. Sin embargo, cada curva tiene su propia dinámica cuántica. Por otro lado, también está el factor \mathcal{A}_μ . Éste desempeña el papel de un campo vectorial, similar al caso de electromagnetismo. Geométricamente se puede interpretar como una curvatura del espacio, por lo que existe un transporte paralelo definido por la nueva métrica del sistema. Al transportar un vector hay que considerar que los vectores bases cambian y \mathcal{A}_μ nos da el valor del cambio que hay que tomar en cuenta al transportar un vector. Debido a que la fase de Berry está relacionada con espacios no planos, como el caso de la presencia de un campo electromagnético, la forma que toma la derivada del hamiltoniano al incluir el término \mathcal{A}_μ hace pensar que es posible que en este tipo de sistemas exista una fase de Berry.

Además de este factor, la aproximación que tomamos para definir las coordenadas se puede relacionar con la aproximación adiabática [Ikegami y Nagaoka, 1991], lo cual es otro ingrediente para pensar en que puede existir una fase de Berry. Los tres temas tratados en estos capítulos, que a primera vista se pensaría no tienen relación entre sí, están profundamente vinculados.

Al hacer una rotación de la base $\hat{n}'^i = R_{ij}\hat{n}^j$, donde $R = e^{i\theta_{ij}}\mathcal{L}_{ij}$:

$$\begin{aligned}\Psi(y)' &= R\Psi(y) \\ \mathcal{A}'_\mu &= R\mathcal{A}_\mu R^T + R\partial_\mu R^T \\ \mathcal{P}' &= \mathcal{P}\end{aligned}\tag{3.22}$$

También se puede encontrar la curvatura o el campo de fuerzas.

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathcal{A}_\nu - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]\tag{3.23}$$

Como ya mencionamos, para el caso de una curva en \mathbb{R}^3 , sólo hay una dirección tangencial, \hat{t} , dos normales a las cuales se acostumbra denotar como \hat{n} y \hat{b} que son el vector normal y el binormal a la curva [Fenchel, 1951]. Utilizando esta notación, todos los índices de las expresiones se pueden no tomar en cuenta. $\mathcal{P} = -\frac{1}{8}\kappa^2\mathcal{I}$, donde κ es la curvatura, mientras que \mathcal{A} es el negativo de la torsión, $-\tau$. $g_{\mu\nu}$ es solamente un número y en el caso de que la curva esté normalizada por la longitud de arco, su valor es 1. Por lo tanto $\hat{\mathcal{H}}_{1p}$ 3.18 se reduce a:

$$\hat{\mathcal{H}}_{1pc} = -\frac{1}{2g^{\frac{1}{2}}}\left(\partial_s - ig^{\frac{1}{2}}\tau\mathcal{L}_{nb}\right)\frac{1}{g^{\frac{1}{2}}}\left(\partial_s - ig^{\frac{1}{2}}\tau\mathcal{L}_{nb}\right) - \frac{1}{8}\kappa^2\mathcal{I}\tag{3.24}$$

donde s es la parametrización de la curva, que en general puede ser distinta a la longitud de arco.

En vez de los vectores \hat{n} y \hat{b} se puede tomar una combinación lineal de ellos. En este caso, τ , que no es la torsión, es igual a \mathcal{A}_μ^{ij} , ecuación 3.3. Al hacer este cambio, también cambia el hamiltoniano. Consideremos el transporte paralelo de un vector en el plano normal a la curva como aquel en el que el vector no gira en las direcciones normales a la curva. En caso de que la torsión sea distinta de cero, la base \hat{n} y \hat{b} en distintos puntos no se obtiene de transportarla paralelamente a lo largo de la curva. En otras palabras, la proyección del cambio de uno de los vectores a lo largo del otro es distinta a cero, ver ecuaciones (4.8).

Haciendo un cambio de base, podemos encontrar dos vectores que sí sean transportados paralelamente a lo largo de la curva. Estos son:

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cos}(\phi) & -\text{Sen}(\phi) \\ \text{Sen}(\phi) & \text{Cos}(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

donde $\frac{d\phi}{ds}$ es igual a la torsión. Este cambio de base simplifica la ecuación 3.24 ya que $\tau = 0$. Sin embargo, si se requiere que las soluciones sean periódicas no siempre se puede usar. Al dar una vuelta, la base de vectores \hat{U}_1 y \hat{U}_2 puede estar rotada respecto a la misma base antes de dar la vuelta. El ángulo de rotación va a ser igual a $\int_0^L \tau(s)ds$, donde L es la longitud total de la curva y τ es la torsión. Por lo que para poder utilizar este cambio de base, en el caso de suponer soluciones periódicas, es necesario que $\int_0^L \tau(s)ds = 0$

Existen varios casos en que se puede aplicar este método de cuantización, como lo son el efecto Hall cuántico, las moléculas [Maraner, 1994a] o incluso los semiconductores [Exner, Seba, y Stovicek, 1990].

Capítulo 4

Fases Geométricas y Objetos Extendidos

Finalmente la fase de Berry es una cantidad física medible que adquieren ciertos sistemas físicos al cambiar parámetros del sistema. Aunque matemáticamente es muy claro qué necesita un sistema para tener fase de Berry, físicamente no lo es. Al ser medible la fase de Berry, el sistema se vuelve una especie de detector de cambios. Tenemos un sistema físico, hay un cambio en su alrededor que modifica los parámetros, esto hace que el sistema adquiera una fase de Berry y por medio de otros experimentos ésta se puede medir. Esto hace que las fases de Berry sean un área de investigación con bastantes aplicaciones. El objetivo a largo plazo, del cual esta tesis es solamente un primer paso, es poder hacer detectores de vibraciones. En este caso, el sistema físico sería una partícula que solamente se puede mover en una curva. Las vibraciones cambiarían cíclicamente la forma de la curva, lo que matemáticamente se puede describir como el cambio de ciertos parámetros de la curva relacionados con su forma. Si el sistema es propenso a adquirir fase de Berry, este cambio va a hacer que la función de onda de la partícula la adquiera y se pueda medir con otro experimento. Si este último mide una fase de Berry quiere decir que hubo una vibración, si no, no hubo. El detector podría no solamente medir si hubo o no vibración sino también su intensidad.

En este capítulo verificamos si una curva tiene o no fase de Berry. Esto incluye cómo seleccionar a la curva, elegir los parámetros a variar, la descripción física y matemática de la misma y el cambio de los parámetros, y finalmente el cálculo de la fase de Berry. En todo este proceso es importante utilizar cualquier información del sistema para simplificar el cálculo. Es cierto que existe una gran brecha entre que un experimento se pueda hacer en teoría y que se pueda realizar en la práctica. Pero este es un primer filtro para saber si valdría la pena intentarlo.

4.1. Planteamiento del problema

Como vimos en el capítulo anterior, la forma del hamiltoniano tangencial proyectado (Ecuación 3.24) nos hace pensar que sistemas de este tipo pueden tener fase de Berry. La idea es describir curvas en \mathbb{R}^3 con este hamiltoniano, calcular su fase de Berry con el objetivo de encontrar alguna que sí tenga. Antes de elegir curvas al azar es una buena idea tomar en cuenta la complejidad del cálculo. Incluso el hamiltoniano de una curva relativamente sencilla, una hélice enrollada en un toro, se vuelve muy complicado (Por ejemplo ver, en el apéndice B, la ecuación (B.2)). Por esta razón es necesario elegir una curva lo suficientemente simple como para poder hacer el cálculo aunque sea de forma perturbativa. Esta propiedad es fácil de relegar pero es muy necesaria.

Por su simplicidad, la primera curva analizada fue una especie de coseno enrollado en un cilindro, similar a la curva superior de la figura 1.6. Debido a que $\int_0^L \tau(s) ds = 0$ no continuamos el cálculo, ya que en su momento pensamos, por la forma del hamiltoniano, que este tipo de curvas no iban a tener fase de Berry. Como vimos al final de la sección anterior, en este caso podemos hacer un cambio de base que cumpla la condición de periodicidad y que elimine de la ecuación 3.24 a la conexión, la cual

consideramos esencial para que una curva tenga fase de Berry. Sin embargo, no podemos asegurar que esto sea un requisito.

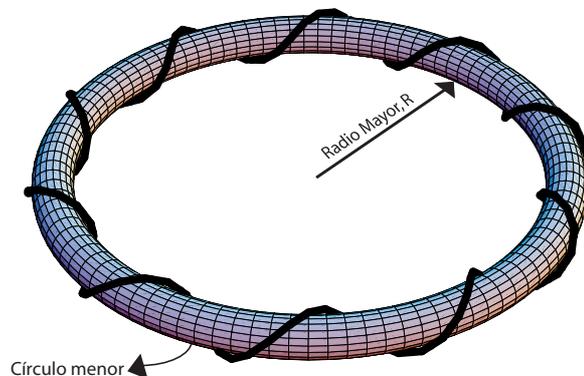


Figura 4.1: La curva que estudiamos, sin éxito, fue la curva negra que en esta figura tiene 10 vueltas. El toro es simplemente un auxiliar para facilitar la visualización. Los parámetros que variamos fueron el radio del círculo mayor y el del menor.

El siguiente intento fue con una curva enrollada en un toro, como se puede ver en la figura 4.1. Un toro se puede ver como un círculo mayor, cada punto de éste se utiliza como el centro de un círculo menor, perpendicular al original. Tomamos como parámetros el radio del círculo mayor, R y el del menor r . Estos son los que deformamos para encontrar la fase de Berry, siempre manteniendo fijo el número de vueltas alrededor del toro. Debido a la complejidad de los cálculos, los hicimos de forma perturbativa. Supusimos que la curva a orden cero era el círculo mayor e hicimos la perturbación hasta segundo orden, tomando r como el parámetro de la perturbación. Para esta curva $\int_0^L \tau(s) ds = \frac{6\pi r^2}{35R^3} + O(r)^3$.

Pero hay un problema. La longitud de la curva depende de R . Para calcular la fase de Berry se necesita derivar la función de onda respecto a los parámetros. Derivar respecto a R quiere decir que hay dos curvas, una con radio mayor R y la otra con R' , donde R y R' son muy cercanos y $R' > R$. Posteriormente se elige arbitrariamente un punto en una de las curvas y el mismo en la otra. Sin embargo, qué quiere decir el mismo punto. La parametrización de la curva que tiene sentido físico es la de la longitud de arco, por lo que utilizándola para las dos curvas, decimos que dos puntos son el mismo si tienen la misma longitud de arco. Pero aquí reside el problema, ya que al tener diferentes radios mayores, las dos curvas no tienen la misma longitud. Por lo tanto existen puntos en la curva más grande, que no tienen puntos “equivalentes” en la curva menor. Como podemos ver la definición de la derivada no es muy clara. Probablemente se podrían encontrar formas de resolver el problema, por ejemplo manteniendo constante la longitud de la curva y obteniendo alguna relación entre las deformaciones de R y r , pero parece que no es tan trivial. También podríamos hacer otro tipo de deformaciones como suponer que, en vez de tener dos círculos, éstos pueden deformarse a elipses. Esta idea queda para futuras investigaciones.

De la curva enrollada en el toro que es importante mantener fija la longitud de arco al hacer las deformaciones. Podemos encontrar una curva donde suponer esto sea más sencillo que en la anterior.

Una hélice tiene torsión constante, distinta de cero, por lo que cumple la propiedad relacionada a la torsión. Analizar una sola vuelta (debido a la simetría de la hélice) y requerir que las soluciones sean periódicas es suficiente para conocer el sistema completo, salvo en las puntas, pero podemos suponer que la hélice tiene muchas vueltas y la que estudiamos está suficientemente alejada de los extremos para despreciar los efectos de las puntas.

El sistema lo podemos imaginar como un resorte, con muchas vueltas y una constante de resorte lo suficientemente chica para poder despreciar su efecto y poderlo deformar, hecho de un material que no cambie su longitud al estirarlo o contraerlo, pero que sea deformable. Con esto cada vuelta mantiene la longitud y evitamos el problema de la curva anterior. El problema consiste en calcular la fase de Berry para una vuelta de este resorte.

4.2. Resultados

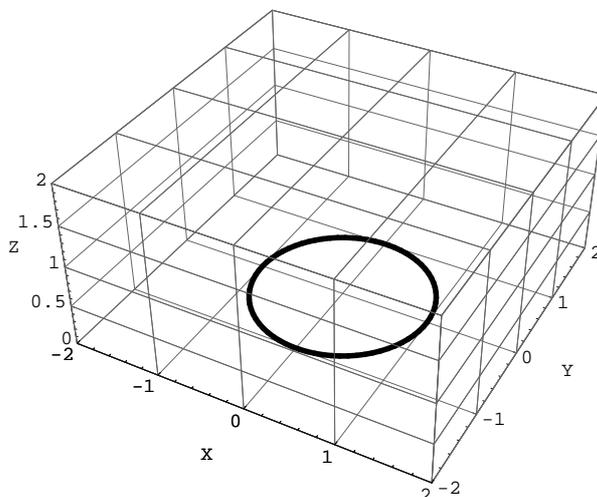


Figura 4.2: Animación de como se transforma la curva al ir aumentando la perturbación. Inicialmente $\epsilon = 0$ y crece poco a poco hasta llegar al valor $\frac{15}{100}$. Los otros parámetros de la curva son $z = 2$, $x = 1$ y $y = 1$ (Ver la ecuación 4.1). Para volverla a ver haga primero click fuera de la animación y luego sobre ella.

Para simplificar el problema utilizaremos la teoría de perturbaciones. Si el resorte no está estirado, cada vuelta se aproxima a un círculo (sin olvidar que en realidad no es un círculo continuo). Al estirarlo una vuelta se ve como en la figura 4.2. A orden cero, la curva es un círculo, como en el caso del resorte contraído y a órdenes superiores es equivalente al caso estirado. Al deformar el círculo, existe la libertad de elegir a qué curva lo queremos deformar. Esto nos da la posibilidad de incluir en la descripción ciertos parámetros que, por un lado, nos permiten elegir la curva deformada y, por el otro, son los parámetros que cambiaremos para encontrar la fase de Berry. Aunque la deformación se debe a términos de primer orden, en el cálculo consideramos hasta segundo orden. Como veremos, a segundo orden la curvatura es distinta de cero.

La ecuación de la curva es:

$$\vec{r}t = (\text{Cos}(s), \text{Sen}(s), 0) + (\epsilon xs, \epsilon ys, \epsilon zs) + (O(\epsilon^3), O(\epsilon^3), O(\epsilon^3)) \quad (4.1)$$

donde s es la parametrización de la curva y x, y y z son los parámetros de deformación. Tendremos que hacer una reparametrización para que la curva esté parametrizada por su longitud de arco. Al variar x, y y z , el punto $s = 0$ se queda fijo y el resto cambia. Entre mayor sea el valor de s , mayor va a ser el cambio. Esto es equivalente a describir la deformación como si estuviéramos parados en el punto $s = 0$. Al estar en ese punto, éste no se mueve. Los más cercanos, como el material no se puede estirar, se van a mover poco. Los lejanos van a tener más libertad de movimiento y por eso va a ser mayor su cambio.

No sólo la curva descrita por la ecuación 4.1 no está parametrizada por su longitud de arco, sino que su longitud, L ¹, depende de los parámetros:

$$L = 2\pi + \frac{\pi(x^2 + y^2 + 2z^2)\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3) \quad (4.2)$$

Para eliminar la dependencia es necesario dividir a la curva entre su longitud. Además queremos que la nueva longitud sea 2π , por lo que la nueva curva es:

¹La longitud de arco es:

$$\int_0^{s_0} \left\| \frac{\partial \vec{r}t}{\partial s} \right\| ds$$

donde s va de 0 a s_0 . En este caso, para obtener la longitud completa de la curva $s_0 = 2\pi$.

$$\vec{rt}_n = 2\pi \frac{\vec{rt}}{L} = (Cos(s), Sen(s), 0) + (sx, sy, sz)\epsilon - \frac{(x^2 + y^2 + 2z^2)}{4}(Cos(s), Sen(s), 0)\epsilon^2 + (O(\epsilon^3), O(\epsilon^3), O(\epsilon^3)) \quad (4.3)$$

Para que la curva esté parametrizada por la longitud de arco es necesario encontrar el parámetro actual en función de la longitud de arco, $s(l)$. Utilizando perturbaciones sabemos que para una curva parametrizada por s , que a orden cero es un círculo de radio uno, la longitud de arco es:

$$l(s) = \int_0^s \left\| \frac{\partial \vec{rt}_n}{\partial s'} \right\| ds' = 1 + a_1(s)\epsilon + a_2(s)\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (4.4)$$

donde la función inversa es ² :

$$s(l) = l - a_1(l)\epsilon + (-a_2(l) + a_1'(l)a_1(l))\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (4.5)$$

Para el caso particular de la curva que estamos estudiando:

$$l(s) = s + (-x + x Cos(s) + y Sen(s)) \epsilon + \frac{Sen(s) ((x^2 - y^2) Cos(s) + 2xy Sen(s)) \epsilon^2}{4} + O(\epsilon^3) \quad (4.6)$$

$$s(l) = l + (x - x Cos(l) - y Sen(l)) \epsilon + \left(Cos(l)(xy(-1 + Cos(l)) + \frac{5Sen(l)}{4}(y^2 - x^2)) + xSen(l)(x - \frac{3y Sen(l)}{2}) \right) \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (4.7)$$

Con esto obtenemos la curva en función de la longitud de arco y con las propiedades necesarias, ya que la curva está parametrizada por la longitud de arco, $g = 1$, y además podemos utilizar las ecuaciones de Frenet-Serret. ³ Debido a que la expresión de la curva es muy larga se muestra en el apéndice A, ecuación A.1 .

Esto completa la descripción del sistema en las direcciones tangenciales. Como vimos en el capítulo anterior, es necesario también tomar en cuenta las direcciones normales para poder obtener la función de onda total (ecuación (3.15)). Para esto debemos escoger en cuál de los estados normales vamos a congelar el sistema. Tomamos el primer nivel de la energía que tenga estados degenerados. El requisito de que los estados estén degenerados fue explicado en el capítulo 3.3. La razón para tomar el primer nivel y no otro se debe a que entre menor sea la energía normal, la partícula estará constreñida a una vecindad más chica de la curva. Como la energía de un oscilador armónico en dos dimensiones es $E = \hbar\omega (n_1 + n_2 + \frac{1}{2})$, los primeros estados degenerados son $|10\rangle$ y $|01\rangle$. Tomamos como direcciones normales las definidas por \hat{n} y \hat{b} , los eigenestados deben de “estar orientados” en estas direcciones. Suponiendo que $\frac{mw}{\hbar} = 1$:

$$|10\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha e^{-\frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2}} \quad |01\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta e^{-\frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2}} \quad (4.9)$$

donde α es la distancia a la curva en la dirección \hat{n} y β en la dirección \hat{b} . Sin embargo, en esta base, la matriz de la ecuación 3.21 no es diagonal, ya que:

²Si $l(s(m)) = l_0(s(m)) + l_1(s(m))\epsilon + l_2(s(m))\epsilon^2$ y $s(m) = s_0(m) + s_1(m)\epsilon + s_2(m)\epsilon^2$, la función inversa se obtiene al requerir que $l(s(m)) = m$ y hacer una expansión de Taylor de $l(s(m))$ alrededor del término de orden cero de la serie $s(m)$. Solamente se toman los términos hasta el orden deseado que, en este caso, es hasta segundo orden.

³Las 3 ecuaciones de Frenet-Serret para una curva en \mathbb{R}^3 se pueden escribir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{n} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

donde el punto significa la derivada respecto a la longitud de arco. t , n y b son vectores.

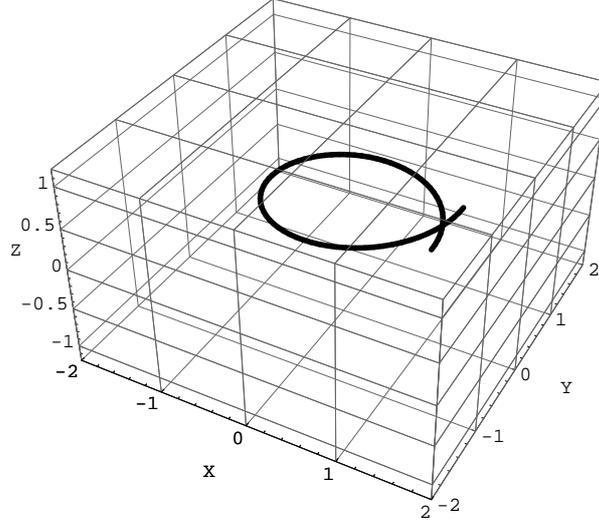


Figura 4.3: Animación de la deformación de la curva. En ella, $\epsilon = 15/100$, $z = 2$, $x = \text{Cos}(t)$ y $y = \text{Sen}(t)$. Para volverla a ver haga primero click fuera de la animación y luego sobre ella.

$$\mathcal{L}_{12}|10\rangle = i|01\rangle \qquad \mathcal{L}_{12}|01\rangle = -i|10\rangle \qquad (4.10)$$

por lo que hacemos un cambio de base, $|\pm\rangle = \frac{|10\rangle \pm i|01\rangle}{\sqrt{2}}$

$$\mathcal{L}_{12}|+\rangle = |+\rangle \qquad \mathcal{L}_{12}|-\rangle = -|-\rangle \qquad (4.11)$$

Debido a que en el hamiltoniano (ecuación (3.24)) todas las otras matrices son la matriz identidad, al diagonalizar la matriz anterior, el hamiltoniano se convierte en dos ecuaciones diferenciales desacopladas. Tomando en cuenta que $\mathcal{A}^{12} = \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = -\tau$ (ver ecuación (3.20)), el hamiltoniano es

$$\hat{\mathcal{H}}_{1pc} \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{H}}_{1pc}^+ & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{H}}_{1pc}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix} \qquad (4.12)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{1pc}^+ = -\frac{1}{2} (\partial_t - i\tau) (\partial_t - i\tau) - \frac{1}{8}\kappa^2 \qquad (4.13)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{1pc}^- = -\frac{1}{2} (\partial_t + i\tau) (\partial_t + i\tau) - \frac{1}{8}\kappa^2 \qquad (4.14)$$

donde utilizamos la notación de la segunda igualdad de la ecuación 3.15 para escribir a la función de onda. Es importante notar que los eigenvectores del hamiltoniano son el vector $\begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix}$ completo y no solamente sus componentes. Para obtener esto es necesario que las componentes del vector cumplan:

$$\hat{\mathcal{H}}_{1pc}^+ \psi^+ = E \psi^+ \qquad (4.15)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{1pc}^- \psi^- = E \psi^- \qquad (4.16)$$

donde la restricción es que la energía debe ser la misma para los dos hamiltonianos. Esto se debe a que:

$$\hat{\mathcal{H}}_{1pc} \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix} \qquad (4.17)$$

Esta condición podría no cumplirse para ningún par de componentes donde una verifique la ecuación (4.15) y la otra la (4.16). Sin embargo, por la forma de los hamiltonianos esta condición no es restrictiva. Debido a que $\hat{\mathcal{H}}_{1pc}^- = (\hat{\mathcal{H}}_{1pc}^+)^*$, si se cumple 4.15, conjugándola:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_{1pc}^{+*}\psi^{+*} &= E\psi^{+*} \\ \Downarrow \\ \hat{\mathcal{H}}_{1pc}^-\psi^{+*} &= E\psi^{+*} \\ \Downarrow \\ \psi^- &= \psi^{+*}\end{aligned}\tag{4.18}$$

Por consiguiente, basta encontrar el eigenestado para una componente del hamiltoniano para conocer el eigenestado de la otra.

En general un eigenestado del hamiltoniano total (ecuación 4.17) tiene la forma $\begin{pmatrix} c_1\psi^+ \\ c_2\psi^{+*} \end{pmatrix}$. Si el eigenestado y ψ^+ están normalizados, entonces $\|c_1\|^2 + \|c_2\|^2 = 1$. Como al variar c_1 y c_2 se obtienen distintos eigenestados con la misma energía, los estados están degenerados. Por lo tanto, para calcular la fase de Berry, en principio deberíamos considerar el efecto Wilczek-Zee (Ver sección 2.2). Para esto es necesario elegir una base del espacio degenerado. Si tomamos como base a $|1\rangle = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \end{pmatrix}$ y $|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^{+*} \end{pmatrix}$, los elementos de la matriz del potencial de Wilczek-Zee se pueden obtener utilizando la ecuación (2.30). En cada punto de la curva se definen un plano normal a la curva y las direcciones normales. Se define así la función de onda que es una combinación lineal de los estados $|10\rangle$ y $|01\rangle$ (ecuación 4.9). Esta combinación lineal solamente depende de α y β . Y éstas a su vez son distancias en las direcciones normales y no dependen de los parámetros x , y y z , lo que implica que $|+\rangle$ y $|-\rangle$ tampoco dependen de los parámetros:

$$\mathcal{A}_{ab} = i\langle a | \psi_a^* \frac{d}{dt} (\psi_b | b) \rangle = i\langle a | \psi_a^* \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} (\psi_b) | b \rangle ds = \int_0^{2\pi} i\psi_a^* \frac{d}{dt} (\psi_b) \langle a | b \rangle ds = \int_0^{2\pi} i\psi_a^* \frac{d}{dt} (\psi_b) \delta_{ab} ds\tag{4.19}$$

Al ser \mathcal{A} diagonal, si el estado del sistema tiene la forma de uno de los vectores base ($|1\rangle$ ó $|2\rangle$), podemos calcular cada componente como la fase de Berry en el caso no degenerado (Ver sección 2.2). La simplificación en el cálculo de la fase de Berry es otra de las ventajas de haber elegido la base $|+\rangle, |-\rangle$.

Ya podemos calcular el hamiltoniano. Expandiendo las ecuaciones (4.15) y (4.16):

$$\hat{\mathcal{H}}_{1pc}^\pm = \frac{1}{2} \left(\partial^2 \pm 2i\tau \pm i \frac{\partial\tau}{\partial l} + \tau^2 - \frac{1}{4}\kappa^2 \right)\tag{4.20}$$

Necesitamos calcular κ , τ y $\frac{\partial\tau}{\partial l}$. La ecuación para τ ya la conocemos. La de κ también la podemos obtener de las ecuaciones de Frenet-Serret (ecuación 4.8), $\kappa = \left\| \frac{\partial \hat{t}}{\partial l} \right\|$.

$$\begin{aligned}\kappa(l) = 1 + (-2y \text{Cos}(l) + 2x \text{Sen}(l)) \epsilon + \left(\frac{-2z^2 - 13(x^2 - y^2) \text{Cos}(2l) + 8xy \text{Sen}(l)}{4} + \right. \\ \left. \frac{4x \text{Cos}(l) (2x - 13y \text{Sen}(l))}{4} \right) \epsilon^2 + O(\epsilon^3)\end{aligned}\tag{4.21}$$

$$\tau(l) = z\epsilon + (-2yz \text{Cos}(l) + 2xz \text{Sen}(l)) \epsilon^2 + O(\epsilon^3)\tag{4.22}$$

$$\frac{\partial\tau(l)}{\partial l} = 2z (x \text{Cos}(l) + y \text{Sen}(l)) \epsilon^2 + O(\epsilon^3)\tag{4.23}$$

Al tomar el límite para $\epsilon \rightarrow 0$, las expresiones anteriores deben ser las de un círculo.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \kappa(l) = 1 \quad (4.24)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tau(l) = 0 \quad (4.25)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \tau(l)}{\partial l} = 0 \quad (4.26)$$

que son los límites esperados. El de κ es uno, ya que el círculo es de radio uno, y los demás son cero ya que el círculo está contenido en un plano. Verificar estos límites no es solamente una formalidad innecesaria. Es importante comprobar que a orden cero todo se reduzca a lo esperado. Un ejemplo donde esto no se cumple es el caso de una hélice descrita como una línea a orden cero más una pequeña perturbación que depende del radio de la hélice. Si el radio es a , $\tau = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. El límite de τ cuando a tiende a cero es 1, mientras que para una línea recta $\tau = 0$.

La expresión final del hamiltoniano se puede ver en el apéndice B, ecuación B.2. De forma compacta se puede escribir como:

$$\hat{\mathcal{H}}_{1pc}^{\pm} = \hat{\mathcal{H}}_{1pc0}^{\pm} + \hat{\mathcal{H}}_{1pc1}^{\pm} \epsilon + \hat{\mathcal{H}}_{1pc2}^{\pm} \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (4.27)$$

Las expansiones perturbativas de la energía y de los eigenestados son:

$$\psi^{\pm} = \psi_0^{\pm} + \psi_1^{\pm} \epsilon + \psi_2^{\pm} \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (4.28)$$

$$E = E_0 + E_1 \epsilon + E_2 \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (4.29)$$

Y la ecuación de Schroedinger estacionaria es :

$$\hat{\mathcal{H}}_{1pc}^{\pm} \psi^{\pm} = E \psi^{\pm} \quad (4.30)$$

La ecuación anterior a orden cero es:

$$\hat{\mathcal{H}}_{1pc0}^{\pm} \psi_0^{\pm} = \frac{(-\psi_0^{\pm}(l) - 4\psi_0^{\pm}{}''(l))}{8} = E_0 \psi_0^{\pm} \quad (4.31)$$

de donde se puede ver que $\hat{\mathcal{H}}_{1pc0}^{+} = \hat{\mathcal{H}}_{1pc0}^{-}$. Resolviendo la ecuación, la solución más general es:

$$\psi_0(l) = e^{\frac{il\sqrt{1+8E_0}}{2}} C(1) + e^{-\frac{il\sqrt{1+8E_0}}{2}} C(2) \quad (4.32)$$

La longitud de la curva es 2π . La función de onda con $l \in [0, 2\pi)$ corresponde a la función de onda de la curva. Sin embargo, como vimos al principio, solamente estamos estudiando una vuelta de una hélice. El intervalo de $[2\pi, 4\pi)$ corresponde a la siguiente vuelta, $[4\pi, 6\pi)$ a dos después, etcétera. Así l puede tomar cualquier valor, aunque nosotros nos concentraremos en el intervalo $[0, 2\pi)$. Pero al ser todas las vueltas de la hélice iguales, podemos suponer que la función de onda en cada una de ellas debe ser la misma, por lo que debe de cumplir una condición de periodicidad, $\Psi(l) = \Psi(l + 2\pi)^4$. Esta suposición se basa también en el hecho de que la curvatura, la torsión, los vectores tangente, normal y binormal son periódicos. En este caso, la condición la debe cumplir la función de onda a orden cero. *Por esta condición, el espectro de la energía está cuantizado.*

Una vez explicado este punto podemos analizar la ecuación 4.32. Las soluciones encontradas corresponden a una partícula que se mueve en un círculo de radio 1 en el que la escala de energía está recorrida $-\frac{1}{8}$, que es lo que esperábamos porque a orden cero el sistema se reduce a un círculo. Debido a la condición de periodicidad, $\frac{\sqrt{1+8E_0}}{2}$ debe ser entero. Esto se logra restringiendo E_0 , a $\frac{4n^2-1}{8}$, siendo n es entero. Para el estado $n = 1$ $E_0 = \frac{3}{8}$.

$C(1)$ y $C(2)$ son constantes de normalización, donde $\|C(1)\|^2 + \|C(2)\|^2 = \frac{1}{2\pi}$, que también representan la existencia de dos soluciones, que cumplen la condición dada por la ecuación 4.18, por lo que una la asociamos con el estado $|+\rangle$ y la otra con $|-\rangle$, de forma que podemos escribir:

⁴También se pueden encontrar soluciones no periódicas.

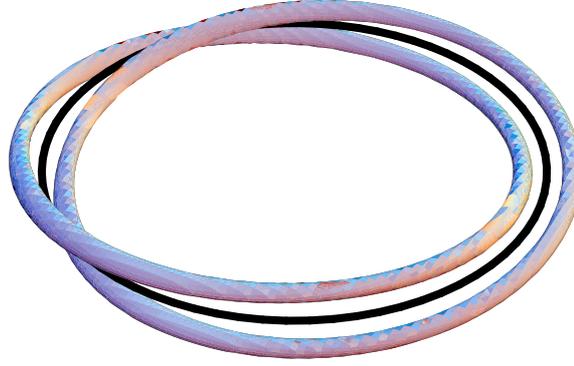


Figura 4.4: Gráfica de la curva y el estado $n = 1$ a orden cero con $C(1) = C(2)$. La línea negra representa la curva a orden cero. La superficie en colores representa los puntos en que la probabilidad de encontrar la partícula es igual a 0.057.

$$\psi_0(l) = \begin{pmatrix} C(1)e^{\frac{il\sqrt{1+8E_0}}{2}} \\ C(2)e^{-\frac{il\sqrt{1+8E_0}}{2}} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Tomando $C(1) = C(2)$, el estado $n = 1$ total normalizado y a orden cero es ⁵ :

$$\begin{aligned} \Psi(l) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(e^{il}|+\rangle + e^{-il}|-\rangle) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}((e^{il}(|10\rangle + i|01\rangle) + e^{-il}(|10\rangle - i|01\rangle)) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}(\text{Cos}(l)\alpha - \text{Sen}(l)\beta) e^{-\frac{(\alpha^2+\beta^2)}{2}} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Como vimos, el cálculo de la fase de Berry se simplifica mucho si tomamos estados de la forma $\begin{pmatrix} \psi_0^+ \\ 0 \end{pmatrix}$ o de la forma $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0^- \end{pmatrix}$, por lo que para el resto del cálculo tomaremos solamente la componente superior,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{il\sqrt{1+8E_0}}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

, y utilizaremos $\hat{\mathcal{H}}_{1pc}^+$. Analizaremos el estado $n = 1$. Debido a la relación existente entre las dos componentes en general, no sólo a orden cero, los resultados para la componente inferior son el complejo conjugado de los de la superior.

La ecuación de Schroedinger a primer orden es:

⁵Si $\Psi(l) = \begin{pmatrix} \psi(l) \\ \psi^*(l) \end{pmatrix}$, donde ψ está normalizada, entonces $\Psi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\text{Re}(\psi(l))\alpha - \text{Im}(\psi(l))\beta) e^{-\frac{(\alpha^2+\beta^2)}{2}}$.

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathcal{H}}_{1pc0}^+ + \hat{\mathcal{H}}_{1pc1}^+ \epsilon) (\psi_0^+ + \psi_1^+ \epsilon) &= (E_0 + E_1 \epsilon) (\psi_0^+ + \psi_1^+ \epsilon) = \\
&= \hat{\mathcal{H}}_{1pc0}^+ \psi_0^+ + \left(\hat{\mathcal{H}}_{1pc1}^+ \psi_0^+ + \hat{\mathcal{H}}_{1pc0}^+ \psi_1^+ \right) \epsilon + O(\epsilon^2) = \\
&= E_0 \psi_0^+ + (E_0 \psi_1^+ + E_1 \psi_0^+) \epsilon + O(\epsilon^2) \quad (4.36)
\end{aligned}$$

Por la ecuación 4.31, la parte a orden cero de la ecuación anterior es cero. Únicamente tenemos que resolver la parte a primer orden. Utilizando los valores obtenidos para E_0 y ψ_0^+ para el estado $n = 1$:

$$\frac{e^{il}}{\sqrt{2\pi}} (-2(E_1 + z) + y \text{Cos}(l) - x \text{Sen}(l)) - \psi_1^+(l) - \psi_1^{+''}(l) \quad (4.37)$$

Resolviendo la ecuación diferencial, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\psi_1^+(l) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-i}{2} x + \frac{e^{(2i)l}}{6} (-ix - y) + \frac{y}{2} \right) + \\
&= \frac{e^{il}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-E_1 + iE_1 l - z + ilz) + i\text{Im}(C(111)) + \text{Im}(C(112)) + \text{Re}(C(111)) - i\text{Re}(C(112)) \right) + \\
&= \frac{e^{-il}}{2} \left(i\text{Im}(C(111)) - \text{Im}(C(112)) + \text{Re}(C(111)) + i\text{Re}(C(112)) \right) \quad (4.38)
\end{aligned}$$

donde supusimos que las constante de integración, que llamamos $C(111)$ y $C(112)$, pueden ser complejas ⁶.

Falta encontrar E_1 . Para esto usamos la condición de periodicidad que requerimos a la función de onda. En la ecuación 4.38 existen dos términos que no son periódicos. Para obtener el resultado deseado igualamos a cero la parte no periódica:

$$\begin{aligned}
\frac{l}{\sqrt{2\pi}} (i e^{il} E_1 + i e^{il} z) &= 0 \\
\Downarrow \\
E_1 &= -z \quad (4.41)
\end{aligned}$$

No es de extrañarse que la primera corrección de la energía dependa de uno de los parámetros. Si todos los parámetros son cero, el sistema se reduce al de orden cero y la energía también. En ese caso, $E_1 = 0$ conforme a lo esperado. Por otro lado, E_1 no depende de x ni de y , lo que quiere decir que para curvas que sean pequeñas deformaciones de un círculo (lo suficientemente pequeñas para despreciar términos de orden 2 o superiores) y estén contenidas en el mismo plano que el círculo, la energía del estado $n = 1$ es la misma que la del círculo. Al hacer el mismo cálculo para el eigenestado m , $E_1 = -mz$, por lo que no sólo el estado $n = 1$ va a ser igual, sino todo el espectro de energía.

Es necesario normalizar la función de onda completa, en este caso hasta primer orden:

$$\psi^+ = \psi_0^+ + \psi_1^+ \epsilon + O(\epsilon^2)$$

$$\begin{aligned}
\|\psi^+\|^2 &= \int_0^{2\pi} \psi^{+*} \psi^+ dl = \int_0^{2\pi} (\psi_0^{+*} \psi_0^+ + (\psi_0^{+*} \psi_1^+ + \psi_1^{+*} \psi_0^+) \epsilon + O(\epsilon^2)) dl = \\
&= 1 + \left(\sqrt{2\pi} \text{Im}(C(112)) + \sqrt{2\pi} \text{Re}(C(111)) \right) \epsilon + O(\epsilon^2) \quad (4.42)
\end{aligned}$$

⁶Las constantes de integración se puede expresar en términos de constantes reales como:

$$C(111) = \text{Re}(C(111)) + i\text{Im}(C(111)) \quad (4.39)$$

$$C(112) = \text{Re}(C(112)) + i\text{Im}(C(112)) \quad (4.40)$$

Para que la función de onda esté normalizada es necesario que $Im(C112) = -Re(C111)$. El estado $n = 1$ normalizado a primer orden es:

$$\psi^+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{il} + \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-ix}{2} + \frac{y}{2} + \frac{e^{(2i)l}}{6} (-ix - y) \right) + e^{il} \left(\frac{i}{2} Im(C111) - \frac{i}{2} Re(C112) \right) + e^{-il} \left(\frac{i}{2} Im(C111) + Re(C111) + \frac{i}{2} Re(C112) \right) \right) \epsilon + O(\epsilon^2) \quad (4.43)$$

Para calcular ψ_2^+ seguimos el mismo proceso. La ecuación de Schroedinger a segundo orden es:

$$\begin{aligned} \left(\hat{\mathcal{H}}_{1pc0}^+ + \hat{\mathcal{H}}_{1pc1}^+ \epsilon + \hat{\mathcal{H}}_{2pc1}^+ \epsilon^2 \right) (\psi_0^+ + \psi_1^+ \epsilon + \psi_2^+ \epsilon^2) &= (E_0 + E_1 \epsilon + E_2 \epsilon^2) (\psi_0^+ + \psi_1^+ \epsilon + \psi_2^+ \epsilon^2) = \\ \hat{\mathcal{H}}_{1pc0}^+ \psi_0^+ + \left(\hat{\mathcal{H}}_{1pc1}^+ \psi_0^+ + \hat{\mathcal{H}}_{1pc0}^+ \psi_1^+ \right) \epsilon &+ \left(\hat{\mathcal{H}}_{1pc2}^+ \psi_0^+ + \hat{\mathcal{H}}_{1pc1}^+ \psi_1^+ + \hat{\mathcal{H}}_{1pc0}^+ \psi_2^+ \right) \epsilon^2 + O(\epsilon^3) = \\ E_0 \psi_0^+ + (E_0 \psi_1^+ + E_1 \psi_0^+) \epsilon &+ (E_0 \psi_2^+ + E_1 \psi_1^+ + E_2 \psi_0^+) \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (4.44) \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación 4.36, los términos de orden menor a dos se eliminan mutuamente. Sustituyendo los valores que ya conocemos de E_0, E_1, ψ_0^+ y ψ_1^+ obtenemos la ecuación diferencial a resolver para encontrar ψ_2^+ . Debido a su longitud, la ecuación diferencial y la función de onda ψ_2^+ se muestran en el apéndice B.1, ecuaciones B.3 y B.4 respectivamente. $C211$ y $C212$ son las constantes de integración que aparecen al resolver la ecuación diferencial B.3 y pueden ser complejas ⁷.

Al igual que a primer orden, la solución debe de ser periódica. En este caso, esta condición además de fijar el valor de la energía, también nos da el valor de ciertas constantes. Los términos no periódicos de la ecuación B.4 son:

$$\begin{aligned} l \left(\frac{ie^{il}\sqrt{2}(96E_2 + 16x^2 + 16y^2 - 60z^2)}{192\sqrt{\pi}} + \right. \\ \left. \frac{e^{-il}}{\sqrt{\pi}} \frac{i}{192} \left(39\sqrt{2}x^2 + (78i)\sqrt{2}xy - 39\sqrt{2}y^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 192\sqrt{\pi}z \left(iIm(C111) + 2Re(C111) + iRe(C112) \right) \right) \right) \quad (4.47) \end{aligned}$$

Para que esta ecuación sea cero para toda l , es necesario que los coeficientes de e^{il} y e^{-il} sean cero. Para esto sus partes reales e imaginarias deben de ser cero. Como la parte imaginaria del coeficiente de e^{il} es cero, tenemos en total tres ecuaciones. E_2 se obtiene del coeficiente de e^{il} . De las otras dos ecuaciones se obtienen valores para $Re(C111)$ y para $Re(C112)$.

$$E_2 = -\frac{1}{6}(x^2 + y^2) + \frac{5z^2}{8} \quad (4.48)$$

$$Re(C111) = -\frac{39\sqrt{2}(x^2 - y^2)}{384\sqrt{\pi}z} \quad (4.49)$$

$$Re(C112) = -Im(C111) - \frac{78\sqrt{2}xy}{192\sqrt{\pi}z} \quad (4.50)$$

⁷Las constantes de integración se puede expresar en términos de constantes reales como:

$$C211 = Re(C211) + iIm(C211) \quad (4.45)$$

$$C212 = Re(C212) + iIm(C212) \quad (4.46)$$

A segundo orden la energía depende no sólo de z , como en el caso a primer orden, sino también de x e y . Por lo tanto, no toda curva que sea una pequeña deformación (lo suficientemente grande para no poder despreciar los términos a segundo orden) de un círculo y que esté contenida en el mismo plano que el círculo, va a tener el mismo espectro de energía que el círculo. Pero veamos el siguiente caso. Dos curvas son pequeñas deformaciones de un círculo con la misma deformación en el eje z , $z_1 = z_2$. En el plano $x - y$, donde el eje x indica la deformación de la curva en esta dirección (parámetro x) y el eje y indica la deformación de la curva en esta dirección (parámetro y), cada una de las curvas se puede representar por un punto. Si se trazan círculos centrados en el origen y los dos puntos están en el mismo círculo, o lo que es lo mismo $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, su espectro de energía hasta segundo orden va a ser el mismo. Al igual que en el caso anterior, si no hay deformación $E_2 = 0$.

El cálculo de la norma es:

$$\begin{aligned} \psi^+ &= \psi_0^+ + \psi_1^+ \epsilon + \psi_2^+ \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \\ \|\psi^+\|^2 &= \\ \int_0^{2\pi} \psi^{+*} \psi^+ dl &= \int_0^{2\pi} \left(\psi_0^{+*} \psi_0^+ + (\psi_0^{+*} \psi_1^+ + \psi_1^{+*} \psi_0^+) \epsilon + (\psi_0^{+*} \psi_2^+ + \psi_1^{+*} \psi_1^+ + \psi_2^{+*} \psi_0^+) \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \right) dl = \\ 1 + \epsilon^2 &\left(\frac{5(x^2 + y^2)}{18} + \pi \left(\text{Im}(C111)^2 + 2\text{Re}(C111)^2 + \text{Re}(C112)^2 \right) + \sqrt{2\pi} (\text{Im}(C212) + \text{Re}(C211)) \right) + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (4.51)$$

El término de la norma a primer orden es cero, ya que es el mismo que el de la ecuación 4.42 y supusimos una relación entre las constantes de integración para que se elimine. Sustituyendo las ecuaciones 4.49 y 4.50 la condición entre las constantes de integración es:

$$\begin{aligned} \text{Re}(C211) &= \\ -\frac{1}{18\sqrt{2\pi}} &\left(5x^2 + 5y^2 + \frac{1521(x^2 - y^2)^2}{2048z^2} + 18\pi \text{Im}(C111)^2 + 18\pi \left(\frac{13xy}{16\sqrt{2\pi}z} + \text{Im}(C111) \right)^2 + 18\sqrt{2\pi} \text{Im}(C212) \right) \end{aligned} \quad (4.52)$$

De las ocho constantes de integración (cuatro constantes, cada una tiene una parte real y una imaginaria), dos de ellas dependen solamente de los parámetros ($\text{Im}(C112)$ y $\text{Re}(C111)$), otras dos ($\text{Re}(C112)$ y $\text{Re}(C211)$) dependen de otras constantes, (de $\text{Im}(C111)$ y $\text{Im}(C212)$) con lo cual nos quedan cuatro constantes libres: $\text{Im}(C111)$, $\text{Im}(C212)$, $\text{Re}(C212)$ y $\text{Im}(C211)$. La expresión para ψ_2^+ está en el apéndice B, la ecuación B.5.

El estado $n = 1$ completo a segundo orden de la componente escogida (entrada superior del vector de la ecuación 4.17) es:

$$\Psi = (\psi_0^+ + \psi_1^+ \epsilon + \psi_2^+ \epsilon^2 + O(\epsilon^3)) |+\rangle \quad (4.53)$$

Dado que conocemos la función de onda completa a segundo orden, podemos calcular la fase de Berry. Como ya vimos, a pesar de que los estados están degenerados, como la matriz del potencial de Wilczek-Zee es diagonal en la base que escogimos, podemos calcular la fase de Berry para cada entrada de la diagonal como si no hubiera degeneración. Recordando que los parámetros que vamos a variar son x , y y z , y utilizando la última igualdad de la ecuación 4.19, el elemento superior de la diagonal de la matriz del potencial de Wilczek-Zee a segundo orden es:

$$\begin{aligned} A_{++} &= \int_0^{2\pi} i\psi^{+*} \frac{d}{dt}(\psi^+) ds = \\ &\int_0^{2\pi} i\psi^{+*} \left(\frac{\partial}{\partial x}(\psi^+) dx + \frac{\partial}{\partial y}(\psi^+) dy + \frac{\partial}{\partial z}(\psi^+) dz \right) = \\ &\frac{2y\epsilon^2}{9} dx - \frac{2x\epsilon^2}{9} dy + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (4.54)$$

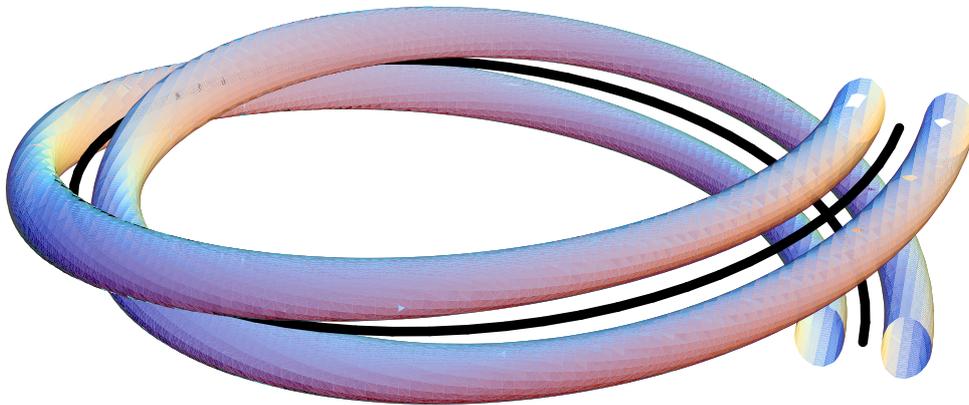


Figura 4.5: Gráfica de la densidad de probabilidad del estado $n = 1$ a segundo orden (Ecuación B.5). La línea negra representa la curva y la superficie de color los puntos en que la densidad de probabilidad es 0.028. En esta gráfica: $\epsilon = 5/100$, $x=y=0.2$, $z=2$, $Im(C111) = Re(C111) = 0$ y $Re(C112) = -13/32$.

A segundo orden la componente z de \mathcal{A}_{++} es cero. Debido a esto, en la aproximación que hemos tomado, deformaciones de la curva en la dirección z no van a generar una fase de Berry. Sin embargo, no sucede lo mismo con deformaciones en las otras dos direcciones. Aunque un parámetro no contribuye, para que un sistema tenga fase de Berry es necesario variar por lo menos dos parámetros. Por consiguiente, los que nos restan son suficientes. Las otras dos componentes de \mathcal{A}_{++} son reales, como lo esperábamos. De este resultado podemos ver la importancia de tomar las series hasta segundo orden, a pesar de que la perturbación (Ver ecuación (4.1)) haya sido únicamente a primer orden. De no haber tomado la serie hasta segundo orden, no habríamos encontrado ninguna fase.

De la ecuación (2.11), vemos que la curvatura es la derivada exterior del potencial de Wilczek-Zee:

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A}_{++} = -\frac{4\epsilon^2}{9}dxdy + O(\epsilon^3) \quad (4.55)$$

La fase de Berry a segundo orden al variar los parámetros en un ciclo, cuando la variación de x va de x_0 a x_f , la de y de y_0 a y_f y la de z puede ser cualquiera, es:

$$\int_{x_0}^{x_f} \int_{y_0}^{y_f} -\frac{4\epsilon^2}{9}dxdy + O(\epsilon^3) = -\frac{4\epsilon^2}{9}(x_f - x_0)(y_f - y_0) + O(\epsilon^3) = -\frac{4\epsilon^2}{9}Área + O(\epsilon^3) \quad (4.56)$$

donde el área es la encerrada por la curva que representa la variación de x e y , en el espacio de parámetros $x - y$. Es importante destacar que la integración se hace en el espacio de parámetros y no en el espacio físico. Si la integración fuera en el espacio físico, al ser el área proporcional a ϵ^2 , la curvatura sería proporcional a ϵ^4 .

El espacio de parámetros a segundo orden lo podemos imaginar de la siguiente forma. Si tomamos un corte haciendo $x = cte$, tenemos el plano $y - z$. Es un plano ya que la curvatura de este espacio es cero. Sucede lo mismo si tomamos una corte con $y = cte$. Pero si tomamos $z = cte$, ya no obtenemos un plano sino una variedad con curvatura constante.

Podemos ver un ejemplo sencillo para ver qué efectos tiene la deformación de la curva sobre la función de onda. Supongamos que la función de onda es:

$$e^{i5s}|+\rangle + e^{-i5s}|-\rangle \quad (4.57)$$

y deformamos la curva de tal forma que su extremo superior recorre un círculo en el plano $x - y$ de radio $r\epsilon$. Por lo tanto, los parámetros de deformación son : $x = r\text{Cos}(t)$ y $y = r\text{Sen}(t)$. z lo fijamos a un valor cualquiera, por ejemplo, $z = 2$. Sustituyendo la expresión encontrada para \mathcal{A}_{++} , en la ecuación 2.10, obtenemos la fase para el estado $|+\rangle$. Para $|-\rangle$ tomamos la fase conjugada. La función de onda final es :

$$e^{i5(s + \frac{2r^2}{9}\epsilon^2 t)}|+\rangle + e^{-i5(s + \frac{2r^2}{9}\epsilon^2 t)}|-\rangle \quad (4.58)$$

Las animación 4.2 muestra los efectos de la deformación sobre la función de onda.



Figura 4.6: Animación del efecto de la deformación en una aproximación del estado $n = 5$. El objetivo es simplemente mostrar los efectos de la fase de Berry. Debido a esto, y por simplicidad, las correcciones de la función de onda no fueron tomadas en cuenta. La punta superior de la curva se mueve en el plano $x - y$, $z=2$, en un círculo de radio $5/100$. Por cada vuelta, las componentes de la función de onda adquieren fases opuestas. El número en la parte superior indica el número de vueltas. Cada 10 vueltas se toma una "foto" del sistema. Al final de la animación la curva dio 300 vueltas. La función de onda es $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i5(s+\frac{0.08}{9}\epsilon^2t)}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i5(s+\frac{0.08}{9}\epsilon^2t)}|-\rangle$, donde t es el tiempo. Las coordenadas s, α, β se consideran a segundo orden. Los valores utilizados son: $\epsilon = 5/100$, $z = 2$, $x = 0.2$ y $y = 0.2$. Para volverla a ver haga primero click fuera de la animación y luego sobre ella.

Capítulo 5

Conclusiones

Al ver la forma del hamiltoniano tangencial (ecuación 3.24) y su similitud con otros sistemas que tienen fase de Berry (aquellos con campo magnético, donde \mathcal{A} es el potencial vectorial) todo lleva a pensar que muy probablemente una partícula en \mathbb{R}^3 constreñida a moverse en una curva tenga fase de Berry. El resultado que obtuvimos lo confirma. No es claro *a priori* físicamente qué requiere un sistema para tener fase de Berry. Simon [Simon, 1983] básicamente dice que es necesario tener un hamiltoniano no real. Pero esta respuesta está lejos de ser una solución completa a la pregunta, además de que existen sistemas con hamiltonianos no reales que no tienen fase de Berry. Siempre se podría decir que el requisito es que el espacio de parámetros tenga curvatura, pero no es una respuesta *a priori* y tampoco es muy claro físicamente qué es lo que curva al espacio de parámetros, ya que no es suficiente que en el hamiltoniano en vez de utilizar el operador de momento común se utilice una derivada covariante para que el espacio de parámetros sea curvo. Probablemente encontrar los requisitos físicos para que un sistema tenga fase de Berry ayude a profundizar en el tema.

La constricción se debe a un potencial en las direcciones normales a la curva, que tiene un mínimo en la curva donde vale cero, que depende solamente de las coordenadas normales a la curva y que es muy estrecho. Fuera de este potencial, no existe otro potencial en el sistema o sus efectos son despreciables.

En particular, si la partícula está constreñida a moverse en un resorte y su estado inicial es $|+\rangle$, la función de onda va a adquirir una fase de Berry al deformar cíclicamente el resorte. Debido a la simetría del resorte, escogimos funciones de onda periódicas. Para este caso es suficiente con estudiar una vuelta para conocer el sistema completo. La condición de periodicidad es esencial, pues no solamente reduce el sistema a una vuelta. La cuantización de la energía en mecánica cuántica, desde el problema más sencillo como el pozo infinito, hasta el más complicado, se debe a condiciones de frontera. En el caso de una curva, no es suficiente suponer que $\Psi(0) = \Psi(2\pi)$ para que el espectro de la energía se cuantice. Es necesario que la función de onda sea totalmente periódica, $\Psi(x) = \Psi(x + 2\pi)$. De hecho, en el problema que resolvimos, los valores a la energía se obtienen suponiendo la periodicidad total de la función de onda. En el caso de E_1 y E_2 , se procede eliminando los términos no periódicos de la función de onda. Esto también muestra la ventaja de inicialmente haber considerado el sistema como el resorte completo y no solamente una vuelta de él. Si hubiéramos considerado inicialmente sólo una vuelta, no habría tenido sentido físico considerar $\Psi(x + 2\pi)$ para $x > 0$, ya que la función de onda solamente estaría definida entre 0 y 2π , lo que nos hubiera impedido requerir $\Psi(x) = \Psi(x + 2\pi)$ y por lo tanto la energía no habría estado cuantizada. Estos problemas se evitan en el caso del resorte. Siempre se podrían pasar por alto estas formalidades, pero es importante tener claro su significado.

Por cada vuelta, la fase de Berry va a ser $-\frac{4e^2}{9} \text{Área}$, por lo que la fase total va a ser el número de vueltas por esa cantidad (despreciando los efectos de las puntas del resorte). La deformación consiste en estirar el resorte. Para que realmente haya una fase de Berry es necesario que, al estirar el resorte, la punta final de cada vuelta se mueva respecto a su posición original en el plano $x - y$. Si el movimiento tiene lugar exclusivamente en cualquier otro plano, la partícula no va a adquirir una fase de Berry.

Este razonamiento concierne al caso particular analizado, pero también hay conclusiones generales que se aplican a cualquier curva que se tome en \mathbb{R}^3 . Es mejor utilizar curvas que al deformarlas mantengan su longitud total constante. Aunque estrictamente no es un requisito para que la partícula adquiera una

fase de Berry, requerirlo evita varios problemas con ciertas definiciones. En caso de no adoptarlo, se debe tener cuidado en qué quiere decir derivar (que en realidad es comparar la función de onda de dos curvas). En especial, al tener dos curvas de longitud l y L , con $L > l$, con qué punto de la curva chica se compara un punto x en la curva grande, tal que $x > l$. Si esto no se toma en cuenta, se pueden obtener resultados carentes de sentido (como por ejemplo que la uno-forma \mathcal{A} en vez de ser real sea imaginaria). Pasos que se consideraban triviales se vuelven muy complicados. Mantener la longitud de la curva constante puede ser una cuestión de elección de los parámetros, como en el caso de la segunda curva (hélice alrededor de un toro). Si en vez de variar los radios de los círculos, se permite que el círculo mayor pueda ser una elipse (se deforman el eje mayor y el eje menor de la elipse), esta curva también tiene fase de Berry [Okon] Probablemente se pueda hacer alguna generalización para poder obtener la fase de Berry en el caso en que la longitud de la curva no se mantenga constante.

Aunque utilizamos una curva relativamente sencilla, una hélice, los cálculos se volvieron muy complicados. Basta con ver la expresión de la curvatura, la torsión, el hamiltoniano, etc. para darse cuenta de ello. Para que el problema sea calculable es necesario pues utilizar el método perturbativo. También es necesario verificar que al tomar el límite de la curvatura, la torsión y su derivada, tiendan a sus correspondientes para la curva a orden cero, cuando ϵ tiende a cero. La perturbación en la curva (ver ecuación (4.1)) puede ser a primer orden. Esto no quiere decir que la fase de Berry vaya a ser a este orden. En nuestro caso, la perturbación de la curva es a primer orden y la fase a segundo. Esto se debe a que si el sistema es muy sencillo (como un círculo), la función de onda no adquiere una fase de Berry. Al ir considerando órdenes superiores, el sistema se vuelve más complejo. En nuestro caso se necesitó llegar a segundo orden. Puede ser que en otros sistemas se necesite considerar órdenes aún superiores.

Además de utilizar el método perturbativo, la complejidad del cálculo amerita la utilización de cualquier “truco” para simplificarlo. Uno utilizado, y que puede haber pasado desapercibido, es que $g = 1$. Esto se logra utilizando la longitud de arco como parámetro de la curva. Si no lo hubiéramos hecho, no habríamos podido utilizar las ecuaciones de Frenet-Serret tal como las formulamos, sino que habríamos tenido que incluir un factor que proviene de la regla de la cadena. Además, la ecuación 3.24 se hubiera vuelto más complicada, ya que la combinación entre derivadas y la g que está en medio de los dos paréntesis habría incluido varios términos. Además de simplificar el cálculo de la dinámica, también facilita el de la fase de Berry, ya que al calcular los $\langle bra | kets \rangle$ no tuvimos que agregar en el integrando el término \sqrt{g} . También utilizamos simplificaciones exclusivas para el cálculo de la fase de Berry, como la elección de base de los eigenestados normales, por la cual podemos decir que no tuvimos que considerar el efecto Wilczek-Zee.

Una primera continuación de este trabajo es aplicar el método de cálculo completo que utilizamos a distintas curvas, tomando en cuenta todo lo ya mencionado.

Otras futuras líneas de investigación son más aplicadas. Finalmente, la fase de Berry puede ser vista como una propiedad de ciertos sistemas para detectar cambios. ¿Qué tipo de cambios? Depende de cuales sean los parámetros del sistema que varíen. En el ejemplo clásico de la fase de Berry, los parámetros son la posición de un campo magnético y éste es exactamente el cambio detectado. En los sistemas que analizamos, los parámetros están relacionados con la forma de la curva, por lo que es una especie de detector de cambios de curvas. Las respuestas a por qué cambia la curva pueden ser muchas, por ejemplo una vibración, lo cual muestran el gran potencial que podría tener la utilización de estos resultados para construir un “detector” de cambios. La sensibilidad de este detector dependerá de muchos factores, dependiendo de la curva utilizada. En el caso particular estudiado, uno de ellos es el número de vueltas del resorte, por lo tanto, en principio, siempre se puede aumentar la sensibilidad incrementando el número de vueltas. Un estudio más profundo podría ayudar a desarrollar el conocimiento sobre la sensibilidad de estos sistemas.

El tipo de curva a utilizar dependerá de cuáles sean los efectos de los cambios que se quieren detectar. Por ejemplo, en el caso tratado, si el cambio va a causar una deformación únicamente en el plano $x - z$ o en $y - z$, sin generar deformación alguna en $x - y$, la curva no va a “detectar” nada.

Por eso es importante analizar otras curvas, ya que así se puede tener una especie de “colección” de curvas, en la que cada una sirve para medir distintas deformaciones. Obviamente, el camino que hay entre los resultados obtenidos y poder realmente construir un detector de cambios es muy largo, y existen pasos nada triviales. Sin embargo, éste es un primer paso que indica, hasta donde sabemos en este momento, que podría valer la pena seguirlo.

Otra línea de investigación está relacionada con el método de cuantización utilizado. No hay que olvidar

que la elección del método de cuantización fue esencial para llegar a los resultados obtenidos. De haber utilizado otro, o de manera más exacta, si no hubiéramos tomado en cuenta que la función de onda es un objeto extendido en el espacio de tres dimensiones y que no se puede suponer que está restringida a moverse únicamente en una curva sino en ésta y en su vecindad, la fase de Berry habría sido nula. Esto está relacionado con las dimensiones en las que está la función de onda. Se puede hacer una generalización suponiendo que la función de onda está en \mathbb{R}^7 , \mathbb{R}^{11} o \mathbb{R}^n . En efecto, las fórmulas ya fueron generalizadas para cualquier \mathbb{R}^n [Schuster y Jaffe, 2003]. Al igual que el hecho de que la función de onda estuviera en \mathbb{R}^3 tuvo consecuencias físicas (medibles) sobre la partícula constreñida a moverse en una curva, el suponer que la función de onda esté en algún otro espacio podría tener también efectos medibles. Evidentemente el cálculo es mucho más complicado, pero podría desembocar en un experimento que podría decirnos en cuantas dimensiones vivimos.

Apéndice

A. Curva

La expresión de la curva en función de la longitud de arco, con norma 2π (ver pagina 38) y que es la que estudiamos es:

$$\begin{aligned}rt_n(l) &= (rtx_n(l), rty_n(l), rtz_n(l)) \\rtx_n(l) &= \cos(l) + \epsilon \left(lx + x (-1 + \text{Cos}(l)) \text{Sen}(l) + y \text{Sen}(l)^2 \right) - \epsilon^2 \left(\frac{-16x^2 + (29x^2 + 11y^2 + 8z^2) \text{Cos}(l)}{16} + \right. \\&\quad \left. \frac{-16x^2 \text{Cos}(2l) + 7x^2 \text{Cos}(3l) - 7y^2 \text{Cos}(3l) + 6xy \text{Sen}(l) - 16xy \text{Sen}(2l) + 14xy \text{Sen}(3l)}{16} \right) + O(\epsilon^3) \\rty_n(l) &= \text{Sen}(l) + \epsilon (ly + \text{Cos}(l) (x - x \text{Cos}(l) - y \text{Sen}(l))) - \\&\quad \frac{\epsilon^2 \text{Sen}(l) (13x^2 + 7y^2 + 4z^2 - 16x^2 \text{Cos}(l) + 7(x^2 - y^2) \text{Cos}(2l) + xy(14\text{Sen}(2l) - 16\text{Sen}(l)))}{8} + O(\epsilon^3) \\rtz_n(l) &= lz\epsilon + z\epsilon^2 (x - x \text{Cos}(l) - y \text{Sen}(l)) + O(\epsilon^3)\end{aligned}\tag{A.1}$$

B. Perturbaciones

Esta es la expresión final del hamiltoniano del sistema, al cual se hace referencia en la página 41. l corresponde a la longitud de arco de la curva. En la ecuación están incluidas las dos componentes, $\hat{\mathcal{H}}_{pc}^+$ y $\hat{\mathcal{H}}_{pc}^-$.

$$\hat{\mathcal{H}}_{pc}^{\pm} = \frac{(-f(l) - 4f''(l))}{8} + \left(\frac{f(l)}{2} (y \text{Cos}(l) - x \text{Sen}(l)) \pm i z f'(l) \right) \epsilon + \left(f(l) \left(\frac{-4(x^2 + y^2) + 10z^2}{16} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{8x^2 \text{Cos}(l) + 17(x^2 - y^2) \text{Cos}(2l) \pm 16iz(x \text{Cos}(l) + y \text{Sen}(l)) - 8xy \text{Sen}(l) + 34xy \text{Sen}(2l)}{16} \right) \mp \right. \\ \left. 2iz(y \text{Cos}(l) - x \text{Sen}(l)) f'(l) \right) \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (\text{B.2})$$

B.1. 2° orden

La ecuación de Schroedinger a segundo orden puede ser simplificada utilizando primerola ecuación (4.36). Posteriormente, se sustituyen los valores de E_0, E_1, ψ_0^+ y ψ_1^+ y se obtiene la siguiente ecuación diferencial, a la cual se hace referencia en la pagina 45.

$$\frac{z}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{(-3i)(-1 + e^{(2i)l})\sqrt{\pi} \text{Im}(C111) + e^{il}(\sqrt{2}(i(-3 + 4e^{(2i)l})x + (3 + 4e^{(2i)l})y) + (6i)\sqrt{\pi} \text{Cos}(l) \text{Re}(C112))}{e^{il}} \right. \\ \left. 6\sqrt{\pi} \text{Re}(C111)(\text{Cos}(l) - i \text{Sen}(l)) \right) - \frac{e^{il}}{8\sqrt{2\pi}} \left(8x(x - (2i)z) \text{Cos}(l) - 17(x^2 - y^2) \text{Cos}(2l) + \right. \\ \left. 2(8E_2 + 2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 4y(x - (2i)z) \text{Sen}(l) - 17xy \text{Sen}(2l)) \right) - \\ (-2z - y \text{Cos}(l) + x \text{Sen}(l)) \left(\frac{y}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{y \text{Cos}(2l)}{6\sqrt{2\pi}} + \text{Cos}(l) \text{Re}(C111) + \text{Re}(C112) \text{Sen}(l) + \frac{x \text{Sen}(2l)}{6\sqrt{2\pi}} - \right. \\ \left. \frac{i}{12} \frac{(-12\sqrt{\pi} \text{Cos}(l) \text{Im}(C111) + 12\sqrt{\pi} \text{Re}(C111) \text{Sen}(l) + \sqrt{2}(3x + x \text{Cos}(2l) + y \text{Sen}(2l)))}{\sqrt{\pi}} \right) - \psi_2(l) - \psi_2''(l) \quad (\text{B.3})$$

Resolviendo la ecuación anterior y llamando a las constantes de integración $C211$ y $C212$, que pueden

ser complejas, se encuentra ψ_2^+ .

$$\begin{aligned}
\psi_2^+(l) = & \frac{C211}{2e^{il}} + \frac{iC212}{e^{il}} + \frac{C211e^{il}}{2} - \frac{i}{2}C212e^{il} - \frac{e^{il}E_2}{2\sqrt{2\pi}} + \frac{ie^{il}E_2l}{\sqrt{2\pi}} - \frac{x^2}{2\sqrt{2\pi}} + \frac{13x^2}{64e^{il}\sqrt{2\pi}} - \frac{e^{il}x^2}{12\sqrt{2\pi}} + \frac{e^{(2i)l}x^2}{6\sqrt{2\pi}} - \\
& \frac{55e^{(3i)l}x^2}{384\sqrt{2\pi}} + \frac{13ix^2}{32e^{il}\sqrt{2\pi}} + \frac{i}{6}e^{il}lx^2 - \frac{i}{2}xy + \frac{13ixy}{32e^{il}\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{6}e^{(2i)l}xy + \frac{55ie^{(3i)l}xy}{192\sqrt{2\pi}} - \frac{13lxy}{16e^{il}\sqrt{2\pi}} - \frac{13y^2}{64e^{il}\sqrt{2\pi}} - \\
& \frac{e^{il}y^2}{12\sqrt{2\pi}} + \frac{55e^{(3i)l}y^2}{384\sqrt{2\pi}} - \frac{13ily^2}{32e^{il}\sqrt{2\pi}} + \frac{i}{6}e^{il}ly^2 - i\sqrt{\frac{2}{\pi}}xz - \frac{5i}{9}e^{(2i)l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}xz + \sqrt{\frac{2}{\pi}}yz - \frac{5e^{(2i)l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}yz}{9} + \frac{5e^{il}z^2}{16\sqrt{2\pi}} - \\
& \frac{\frac{5i}{8}e^{il}lz^2}{\sqrt{2\pi}} - \frac{xIm(C111)}{12e^{(2i)l}} + \frac{e^{(2i)l}xIm(C111)}{12} + \frac{i}{2}yIm(C111) - \frac{\frac{i}{12}yIm(C111)}{e^{(2i)l}} - \frac{i}{12}e^{(2i)l}yIm(C111) + \\
& \frac{\frac{i}{2}zIm(C111)}{e^{il}} - \frac{lzIm(C111)}{e^{il}} + \frac{i}{2}xRe(C111) + \frac{\frac{i}{6}xRe(C111)}{e^{(2i)l}} + \frac{yRe(C111)}{2} - \frac{yRe(C111)}{6e^{(2i)l}} + \frac{zRe(C111)}{e^{il}} + \\
& \frac{(2i)lzRe(C111)}{e^{il}} - \frac{xRe(C112)}{2} - \frac{xRe(C112)}{12e^{(2i)l}} - \frac{e^{(2i)l}xRe(C112)}{12} - \frac{\frac{i}{12}yRe(C112)}{e^{(2i)l}} + \frac{i}{12}e^{(2i)l}yRe(C112) + \\
& \frac{\frac{i}{2}zRe(C112)}{e^{il}} - \frac{lzRe(C112)}{e^{il}} \quad (B.4)
\end{aligned}$$

La expresión final, a la que se hace mención en la página 46, en función de las constantes de integración ($Im(C112)$, $Im(C212)$, $Re(C212)$ y $Im(C211)$) que son independientes de los parámetros de la curva o de otras constantes es:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{73728\sqrt{\pi}z^2} \left((-1521\sqrt{2}(x^4 + 6x^2y^2 + y^4) + 2048(36C211\sqrt{\pi} - 5\sqrt{2}(x^2 + y^2))z^2) \cos(l) + \right. \\
& 32\sqrt{2}z \left(9(-ix + y)(13(x^2 + (2i)xy + y^2) - (64i)xz + 256z^2) + (39(-ix^3 + 5x^2y + ixy^2 - y^3) + \right. \\
& \left. 192x(x - iy)z - (1280i)(x - iy)z^2) \cos(2l) - 165(x - iy)^2z \cos(3l) \right) + \\
& 32z \left(48\sqrt{\pi} \left(8(3x + e^{(2i)l}(x - iy) + (3i)y)z - 39xy \cos(l) \right) Im(C111) - 2304\sqrt{2}\pi z \cos(l) Im(C111)^2 - \right. \\
& \left. 39\sqrt{2}(x^3 + ix^2y - 5xy^2 - iy^3) \sin(2l) + z(2304\sqrt{\pi}(-\cos(l)(Im(C212) + Re(C211))) + C212 \sin(l) + \right. \\
& \left. \left. \sqrt{2}(ix + y)(64(3x - (20i)z) \sin(2l) - 165(x - iy) \sin(3l)) \right) \right) \quad (B.5)
\end{aligned}$$

C. Mathematica

A continuación se muestra el programa utilizado para hacer los cálculos del problema.

In[1]= Off[General::spell, General::spell1]

In[2]= $rT = \{Cos[s] + \epsilon xs + O[\epsilon]^3, Sin[s] + \epsilon ys + O[\epsilon]^3, \epsilon zs + O[\epsilon]^3\};$

In[3]= $r1T = D[rT, s] // Simplify;$
 $gT = r1T.r1T // Simplify;$
 $gsqT = Sqrt[gT];$
 $uT = (Integrate[gsqT, s, 0, sp] // Simplify);$
 $LT = uT /. sp \rightarrow 2Pi // Simplify$

Restringiendo la longitud de la curva a 2π .

In[4]= $r = 2Pi rT/LT$

Elementos de la curva (curvatura, torsión, etcétera).

In[5]= $r1 = D[r, s] // Simplify;$
 $r2 = D[r1, s] // Simplify;$
 $r3 = D[r2, s] // Simplify;$
 $g = r1.r1 // Simplify;$
 $gsq = Sqrt[g];$
 $t = r1/gsq;$
 $t1 = D[t, s] // Simplify;$
 $c12 = Cross[r1, r2] // Simplify;$
 $c23 = Cross[r2, r3] // Simplify;$
 $nc12 = c12.c12 // Simplify;$
 $nt1 = t1.t1 // Simplify;$
 $\kappa s = Sqrt[nc12]/gsq^3 // Simplify;$
 $n = t1/Sqrt[nt1];$
 $b = Cross[t, n] // Simplify;$
 $b1 = D[b, s] // Simplify;$
 $\tau e = -n.b1/gsq // Simplify;$
 $\tau s = r1.c23/nc12 // Simplify;$
 $\tau sp = D[\tau, s] // Simplify;$

La longitud de la curva en función de s .

In[6]= $u = (Integrate[gsq, s, 0, sp] // Simplify) /. sp \rightarrow s$

Invirtiendo u para poder parametrizar la curva en función de la longitud de arco.

In[7]= $s\lambda Sub = s \rightarrow \lambda - (-x + xCos[\lambda] + ySin[\lambda])\epsilon + (-1/4 Sin[\lambda]((x^2 - y^2)Cos[\lambda] + 2xySin[\lambda]) + (-x + xCos[\lambda] + ySin[\lambda])(-xSin[\lambda] + yCos[\lambda]))\epsilon^2 + O[\epsilon]^3$

Verificando que la inversión sea la correcta.

In[8]= $((s/.s\lambda Sub)/.\lambda \rightarrow (u//Normal)) // Expand // Simplify$

In[9]= $r/.s\lambda Sub/. \lambda \rightarrow s$

Curvatura, torsión y su derivada en función de la longitud de arco.

In[10]= $\kappa = (Series[(\kappa s/.s\lambda Sub) // Normal, \epsilon, 0, 2] // Simplify) /. \lambda \rightarrow s$

In[11]= $\tau = (Series[(\tau s/.s\lambda Sub) // Normal, \epsilon, 0, 2] // Simplify) /. \lambda \rightarrow s$

In[12]= $\tau p = D[\tau, s] // Simplify$

Ecuación de Schroedinger

$$\mathbf{In}[13] = \text{ham} = ((-D[\#, \{s, 2\}] + I2\sigma\tau D[\#, s] + (\tau^2 + I\sigma\tau p - \kappa^2/4 - 2e)\#) // \text{Simplify}) \&$$

Forma de la función de onda y la energía.

$$\mathbf{In}[14] = \psi[s] = \psi0[s] + \epsilon\psi1[s] + \epsilon^2\psi2[s] + O[\epsilon]^3;$$

$$e = e0 + \epsilon e1 + \epsilon^2 e2 + O[\epsilon]^3;$$

Ecuación de Schroedinger a segundo orden.

$$\mathbf{In}[15] = \text{Seqn} = \text{ham}[\psi[s]]$$

Solución a orden cero.

$$\mathbf{In}[16] = \psi0Subp = (DSolve[(Seqn/.\epsilon \to 0) == 0, \psi0[s], s][[1]]/. \sigma^2 \to 1) // \text{Simplify}$$

Tomando el estado base, $e0 = 3/8$ y únicamente la componente asociada con $|+\rangle$.

$$\mathbf{In}[17] = \psi01Sub = \{$$

$$\psi0[s] \to -e^{Is}/\sqrt{2\pi}$$

$$\psi0'[s] \to Ie^{Is}/\sqrt{2\pi}$$

$$\psi0''[s] \to -e^{Is}/\sqrt{2\pi}$$

$$\};$$

$$\psi01Sol = \text{ComplexExpand}[\psi0[s]/.\psi01Sub];)$$

$$\psi01Solc = \psi01Sol/.Complex[0, j_] \to -Complex[0, j];$$

$$e0Sub = e0 \to 3/8;$$

Solución a primer orden.

$$\mathbf{In}[18] = \text{Coefficient}[\text{Seqn}, \epsilon]/.s \to l$$

$$\mathbf{In}[19] = lhs11 = \text{Coefficient}[\text{Seqn}, \epsilon]/.\psi01Sub/.e0Sub/. \sigma \to 1 // \text{FullSimplify} // \text{Normal}$$

Solución para $\psi11$.

$$\mathbf{In}[20] = \psi11Sub = DSolve[lhs11 == 0, \psi1[s], s][[1]]/.{C[1] \to Re[C111] + IIm[C111], C[2] \to$$

$$Re[C112] + IIm[C112]} // \text{Simplify};$$

$$\psi11Sol1 = \psi1[s]/.\psi11Sub // \text{Simplify} // \text{Expand}$$

Términos no periódicos, eliminándolos se obtiene un valor para $e1$.

$$\mathbf{In}[21] = \text{Coefficient}[\psi11Sol1, s]/.s \to l$$

$$\mathbf{In}[22] = \psi11Sol2 = \text{ComplexExpand}[\psi11Sol1/.e1 \to -z, C111, C112]$$

$$\mathbf{In}[23] = \psi11Sol2c = \psi11Sol2/.Complex[0, j_] \to -Complex[0, j]$$

Solución completa a primer orden.

$$\mathbf{In}[24] = \Psi01s = \psi01Sol + \epsilon\psi11Sol2\Psi01sc = \psi01Solc + \epsilon\psi11Sol2c$$

Normalización

$$\mathbf{In}[25] = \text{norm}\Psi = \text{ComplexExpand}[\Psi01sc\Psi01s // \text{Expand}, C111, C112] /. \epsilon^2 \to 0 // \text{Simplify}$$

$$\mathbf{In}[26] = \text{Collect}[\text{Integrate}[\text{Evaluate}[(\text{norm}\Psi // \text{Normal})], s, 0, 2Pi] // \text{Simplify}, \epsilon]$$

Eliminando la parte de la normalización que depende de ϵ , se obtiene una relación entre las constantes.

$$\mathbf{In}[27] = \psi11SolF = \psi11Sol2/.Im[C112] \to -Re[C111] // \text{Simplify}$$

$$\mathbf{In}[28] = \psi11SolFc = \psi11SolF/.Complex[0, j_] \to -Complex[0, j] // \text{Simplify}$$

$$\mathbf{In}[29] = \psi_{11}SubF = \{\psi_1[s] \rightarrow \psi_{11}SolF, \psi_1'[s] \rightarrow D[\psi_{11}SolF, s], \psi_1''[s] \rightarrow D[\psi_{11}SolF, \{s, 2\}]\};$$

Segundo orden.

$$\mathbf{In}[30] = lhs21 = Coefficient[Seqn, \epsilon^2]/.\psi_{01}Sub/.e_{0}Sub/.\sigma \rightarrow 1/.e_1 \rightarrow -z/.\psi_{11}SubF//Simplify$$

Resolviendo para ψ_{21} .

$$\mathbf{In}[31] = \psi_{21}Sub = DSolve[lhs21 == 0, \psi_2[s], s][[1]]//Simplify;
\psi_{21}Sol = (\psi_2[s]/.\psi_{21}Sub//Simplify//Expand)/.{C[1] \rightarrow C_{211}, C[2] \rightarrow C_{212}}$$

Términos no periódicos que eliminándolos obtenemos ecuaciones para e_2 y algunas constantes.

$$\mathbf{In}[32] = Collect[Coefficient[\psi_{21}Sol, s]//Simplify, \{E^{Is}, E^{-Is}\}]$$

$$\mathbf{In}[33] = \psi_{21}Sol1 = ComplexExpand[
\psi_{21}Sol/.{\br/>
e_2 \rightarrow -1/6(x^2 + y^2) + 5z^2/8,
Re[C_{111}] \rightarrow -39\sqrt{2}(x^2 - y^2)/(384\sqrt{\pi}z),
Re[C_{112}] \rightarrow -Im[C_{111}] - 78\sqrt{2}xy/(192\sqrt{\pi}z)
}//Simplify,
\{C_{111}, C_{112}, C_{211}, C_{212}\}]$$

$$\mathbf{In}[34] = \psi_{21}Sol1c = \psi_{21}Sol1/.Complex[0, j_] \rightarrow -Complex[0, j]$$

Solución completa no normalizada.

$$\mathbf{In}[35] = \Psi_{012s} = \psi_{01}Sol + \epsilon\psi_{11}SolF + \epsilon^2\psi_{21}Sol1 + O[\epsilon]^3;
\Psi_{012sc} = \psi_{01}Solc + \epsilon\psi_{11}SolFc + \epsilon^2\psi_{21}Sol1c + O[\epsilon]^3$$

Normalización.

$$\mathbf{In}[36] = norm\Psi S = ComplexExpand[(\Psi_{012sc}\Psi_{012s}//Expand)//Normal//Simplify,
\{C_{111}, C_{112}, C_{211}, C_{212}\}]/Simplify$$

$$\mathbf{In}[37] = yyint = Collect[Integrate[norm\Psi S, \{s, 0, 2\pi\}]]//Simplify, \epsilon]$$

$$\mathbf{In}[38] = Solve[5/18(x^2 + y^2) + \pi(Im[C_{111}]^2 + 2Re[C_{111}]^2 + Re[C_{112}]^2) + \sqrt{2\pi}(Im[C_{212}] + Re[C_{211}]) ==
0, Re[C_{211}]]//Simplify$$

Eliminando de la norma la parte que depende de ϵ .

$$\mathbf{In}[39] = \psi_{21}SolF = \psi_{21}Sol1/.
Re[C_{211}] \rightarrow -1/(18\sqrt{2\pi})(5x^2 + 5y^2 + 18\pi Im[C_{111}]^2 + 18\sqrt{2\pi} Im[C_{212}] + 36\pi Re[C_{111}]^2 +
18\pi Re[C_{112}]^2)//Simplify$$

Solución final.

$$\mathbf{In}[40] = \Psi F = (\psi_{01}Sol + \epsilon\psi_{11}SolF + \epsilon^2\psi_{21}SolF + O[\epsilon]^3)
\Psi Fc = (\psi_{01}Solc + \epsilon\psi_{11}SolFc + \epsilon^2\psi_{21}SolFc + O[\epsilon]^3);$$

Componente x de la conexión.

$$\mathbf{In}[41] = \Psi Fx = D[\Psi F, x]//Simplify;
tempx = \Psi Fc\Psi Fx//Expand//Simplify;
Ax = IIntegrate[tempx, \{s, 0, 2\pi\}]/Simplify$$

Componente y de la conexión.

$$\mathbf{In}[42] = \Psi Fy = D[\Psi F, y]//Simplify;
tempy = \Psi Fc\Psi Fy//Expand//Simplify;
Ay = IIntegrate[tempy, \{s, 0, 2\pi\}]/Simplify$$

Componente z de la conexión.

```
In[43] =  $\Psi F z = D[\Psi F, z] // \text{Simplify};$   
tempz =  $\Psi F c \Psi F z // \text{Expand} // \text{Simplify};$   
Az =  $I \text{Integrate}[tempz, \{s, 0, 2\pi\}] // \text{Simplify}$ 
```

Curvatura.

```
In[44] =  $K z = D[Ay, x] - D[Ax, y] // \text{Simplify}$ 
```

Bibliografía

- [Aharonov y Anandan, 1987] Aharonov, Y. y Anandan, J. *Phase Change During a Cyclic Quantum Evolution*, Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 1593-1596.
- [Berry, 1984] M.V. Berry. Proc. Roy. Soc. London **392**, 45 (1984)
- [Berry, 1990] Berry, M V, *Quantum adiabatic anholonomy in Anomalies, phases, defects*, eds U M Bregola, G Marmo and G Morandi, Italia, 1990, 125-181.
- [Bohm] Bohm, A. *Quantum Mechanics: Foundations and Applications*. 3 ed. Springer-Verlag. E.U, 1993.
- [Bohm, Boya y Kendrick, 1991] Bohm, A, Boya, L, Kendrick B. *Derivation Of Geometrical Phase*. Phys Rev A **43** (1991) 1206-1210.
- [Chiao y Wu, 1986] Chiao, R. y Wu, Y. *Manifestations of Berry's Topological Phase for the Photon*. Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 933-936.
- [Chruscinski y Jamiolkowski] Dariusz Chruscinski, D. Jamiolkowski, a. *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*, Birkhauser, E.U. 2004.
- [da Costa, 1981] Da Costa, R. *Quantum Mechanics of a Constrained Particle*. Phys. Rev. A **23** (1981) 1982-1987.
- [DeWitt, 1952] DeWitt, B. *Point Transformation in Quantum Mechanics* Phys. Rev. **85** (1952) 653-661.
- [Exner, Seba, y Stovicek, 1990] Exner, P, Seba, P. y Stovicek, P. *Semiconductor Edges can Bind Electrons* Phys. Lett. A. **150** (1990) 179-182.
- [Fenchel, 1951] Fenchel, W. *On the Differential Geometry of Closed Space Curves*. Bull. Amer. Math. Soc. **57** (1951) 44- 55
- [Fujii, Ogawa, Uchiyama y Chepilko, N, 1997] Fujii, K, Ogawa, N, Uchiyama, S. y Chepilko, N. *Geometrically Induced Gauge Structure on Manifolds Embedded in a Higher-Dimensional Space* Int. J. of Mod. Phys. A. **12** (1997) 5235-5277.
- [Ikegami y Nagaoka , 1991] Ikegami, M. y Nagaoka, Y. *Quantum Mechanics of an Electron on a Curved Interface*. Prog. Theor. Phys. Supp.**106** (1991) 235-248.
- [Kugler y Shtrikman, 1988] Kugler, M. y Shtrikman, S. *Berry's Phase, Locally Inertial Frames, and Classical Analogues* Phys. Rev D. **37** (1988) 934-937.
- [Maraner, 1994] Maraner, P. *A Complete Perturbative Expansion for Constrained Quantum Dynamics*, arXiv, **hep-th/9409080 v1** (1994).
- [Maraner, 1994a] Maraner, P. *Monopole Gauge Fields and Quantum Potentials Induced by the Geometry in Simple Dynamical Systems* Ann. of Phys. **246** (1996) 325-346.
- [Mead y Truhlar, 1979] Mead, C y Truhlar, D *On the Determination of Born-Oppenheimer Nuclear Motion Wave Functions Including Complications due to Conical Intersections and Identical Nuclei*, J. Chem Phys. **70** 2284-2296.

- [Messiah] Messiah A, *Quantum Mechanics, Volume II*, 1 ed. North-Holland Publishing Company, Amsterdam. E.U, 1972.
- [Nakahara] Nakahara, M. *Geometry, Topology and Physics*, 2^oed. Taylor and Francis Group. USA, 2003.
- [Nash] Nash, Ch. *Topology and Geometry for Physicists*, Academic Press Inc. London, 1987.
- [Okon] Okon, E. Comunicación privada, Noviembre 2006.
- [Sakurai] Sakurai, J. *Modern Quantum Mechanics Revised Edition*, Addison-Wesley Publishing Company, E.U, 1994.
- [Samuel y Bhandari,1988] Samuel, J. y Bhandari, r. *General Setting for Berry's Phase*, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 2339-2342.
- [Schuster y Jaffe, 2003] Schuster, P. y Jaffe, R. *Quantum Mechanics on Manifolds Embedded in Euclidean Space* arXiv, **hep-th/0302216v1** (2003)
- [Schutz] Schutz, B. *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press, Great Britain, 1990.
- [Shapere y Wilczek] Shapere, A. y Wilczek, F. *Geometric Phases in Physics*, World Scientific, Singapore, 1989.
- [Simon, 1983] Simon, B. *Holonomy, The Quantum Adiabatic Theorem, And Bery's Phase*, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 2167-2170.
- [Suter, Chingas, Harris y Pines, 1987] Suter, D, Chingas, G, Harris, R y Pines, A. *Berry's Phase in Magnetic Resonance*, Mol. Phys. **61** (1987) 1327-1340.
- [Suter, Mueller y Pines, 1988] Suter, D. Mueller, K.T. y Pines, A. *Study of the Aharonov-Anandan Quantum Phase by NMR Interferometry*, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 1218-1220.
- [Tomita y Chiao, 1986] Tomita, A y Chiao, R. *Observation of Berry's Topological Phase by Use of an Optical Fiber*, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 937-940.
- [Tycko, 1987] Tycko, R. *Adiabatic Rotational Splittings and Berry's Phase in Nuclear Quadrupole Resonance*, Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 2281-2284.