

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA



TEORÍA Y TÉCNICAS PARA LA EVALUACIÓN
DE LA CONFIABILIDAD DE SISTEMAS DE
DISTRIBUCIÓN DE ENERGÍA ELÉCTRICA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

PRESENTA

MANUEL GARCÍA MARTÍNEZ

DIRECTOR: DR. EDUARDO ARRIOLA VALDÉS



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Porque: "Grande es el Señor Dios nuestro,
grande su poderío,
y sin límites su sabiduría";
"Engrandeced conmigo al Señor,
y todos a una ensalcemos su Nombre".

"Porque me has recreado,
oh Señor, con tus obras,
y al contemplar las obras de tus manos
salto de placer".

¡Gracias, Señor!

Salmos: CXLVI, 5; XXXIII, 4; XCI, 5.

*Con cariño, a mi esposa Lupita,
quien con su amor comprometido,
su gran inteligencia
y su arduo trabajo
siempre ha impulsado
todos los proyectos importantes, y los no importantes,
de mi vida.*

A mis hijos:

*María Guadalupe
José Manuel
y Fátima Paulina*

¡ Ustedes saben que los amo !

*A mi Tutor y Director de Tesis
Dr. Eduardo Arriola Valdés
por su apoyo
y la gran paciencia que me tuvo
para poder lograr
la terminación de este trabajo.*

*A la Universidad Nacional Autónoma de México
y a mi Facultad de Ingeniería.*

*A todos mis maestros;
desde los que me enseñaron
las primeras letras
hasta los que me ayudaron
en la revisión de este trabajo.*

CONTENIDO

| | Página |
|---|--------|
| ÍNDICE DE TABLAS..... | ix |
| ÍNDICE DE FIGURAS..... | x |
| LISTA DE SÍMBOLOS..... | xi |
| RESUMEN..... | xiii |
| | |
| CAPÍTULO 1 | |
| INTRODUCCIÓN | |
| 1.1 ANTECEDENTES..... | 1 |
| 1.2 OBJETIVOS..... | 3 |
| 1.3 JUSTIFICACIÓN..... | 4 |
| 1.4 APORTACIONES..... | 4 |
| 1.5 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 5 |
| | |
| CAPÍTULO 2 | |
| MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL ESTUDIO DE LA CONFIABILIDAD DE COMPONENTES | |
| 2.1 EDAD Y TIEMPO DE VIDA DE UN COMPONENTE..... | 7 |
| 2.2 FUNCIÓN DE SOBREVIVENCIA..... | 9 |
| 2.3 PROBABILIDAD DE FALLA Y TASA DE FALLA..... | 11 |
| 2.4 MOMENTOS DE UNA LEY DE SOBREVIVENCIA Y EDAD MEDIA DE FALLA..... | 13 |
| 2.5 PRINCIPALES LEYES DE SOBREVIVENCIA QUE SE UTILIZAN EN EL ESTUDIO DE EQUIPOS..... | 15 |
| 2.5.1 LEYES DEL TIPO I..... | 15 |
| 2.5.2 LEYES DEL TIPO II..... | 17 |
| 2.6 FORMA DE LA FUNCIÓN DE LA TASA DE FALLA..... | 18 |
| 2.7 CONCLUSIONES..... | 19 |
| 2.8 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 19 |
| | |
| CAPÍTULO 3 | |
| FUNCIONES DE ESTRUCTURA, REDES DE CONFIABILIDAD Y ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD DE SISTEMAS | |
| 3.1 HIPÓTESIS PARA LA ESTRUCTURA Y FUNCIONAMIENTO DE SISTEMAS..... | 20 |
| 3.2 FUNCIÓN DE ESTRUCTURA..... | 20 |
| 3.2.1 COMPARACIÓN DE r-UPLAS..... | 22 |
| 3.2.2 REJILLA BOOLEANA DE ESTADOS DEL CONJUNTO DE COMPONENTES..... | 22 |
| 3.2.3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN SISTEMA..... | 23 |
| 3.3 ESLABONES Y CORTES..... | 24 |
| 3.3.1 ESLABONES DE UNA ESTRUCTURA..... | 24 |
| 3.3.2 CORTES DE UNA ESTRUCTURA..... | 24 |
| 3.3.3 ESLABONES Y CORTES MÍNIMOS..... | 24 |
| 3.4 PROPIEDADES MATEMÁTICAS DE ESLABONES Y CORTES; DUALIDAD..... | 25 |

| | | |
|----------|--|----|
| 3.4.1 | LONGITUD DE UN SISTEMA..... | 25 |
| 3.4.2 | ANCHO DE UN SISTEMA..... | 25 |
| 3.4.3 | SISTEMAS DEGENERADOS..... | 25 |
| 3.4.4 | DUALIDAD..... | 26 |
| 3.5 | TEORÍA DE GRÁFICAS..... | 26 |
| 3.5.1 | GRÁFICAS..... | 26 |
| 3.5.2 | GRÁFICAS r-FOLD..... | 27 |
| 3.6 | REDES DE CONFIABILIDAD..... | 30 |
| 3.6.1 | ESLABONES Y CORTES DE UNA RED DE CONFIABILIDAD..... | 31 |
| 3.6.2 | REDES DEGENERADAS..... | 32 |
| 3.6.3 | PROPIEDAD FUNDAMENTAL Y TEOREMAS DE LAS REDES DE CONFIABILIDAD..... | 32 |
| 3.6.4 | DUALIDAD EN REDES DE CONFIABILIDAD..... | 33 |
| 3.7 | EQUIVALENCIA ENTRE FUNCIONES DE ESTRUCTURA Y REDES DE CONFIABILIDAD..... | 33 |
| 3.7.1 | FUNCIONES DE ESTRUCTURA EQUIVALENTES..... | 33 |
| 3.7.2 | REDES DE CONFIABILIDAD EQUIVALENTES..... | 34 |
| 3.7.3 | EQUIVALENCIA ENTRE UNA FUNCIÓN DE ESTRUCTURA Y UNA RED DE CONFIABILIDAD..... | 34 |
| 3.8 | ESTRUCTURAS MONÓTONAS O COHERENTES..... | 35 |
| 3.9 | CONSTRUCCIÓN Y SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES DE ESTRUCTURA Y DE REDES DE CONFIABILIDAD..... | 36 |
| 3.9.1 | CONSTRUCCIÓN DE UNA FUNCIÓN DE ESTRUCTURA MONÓTONA EQUIVALENTE A UNA RED..... | 38 |
| 3.9.2 | CONSTRUCCIÓN DE UNA RED EQUIVALENTE A UNA FUNCIÓN DE ESTRUCTURA MONÓTONA..... | 38 |
| 3.10 | DETERMINACIÓN DE ESLABONES Y CORTES..... | 38 |
| 3.10.1 | BÚSQUEDA DE UN CONJUNTO DE ESLABONES QUE INCLUYA TODOS LOS ESLABONES MÍNIMOS DE UNA RED..... | 39 |
| 3.10.2 | MÉTODO DE "COMPOSICIÓN LATINA" O "CONCATENACIÓN"..... | 40 |
| 3.10.3 | DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO DE CORTES QUE INCLUYAN TODOS LOS CORTES MÍNIMOS DE UNA RED..... | 47 |
| 3.11 | ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD DE SISTEMAS..... | 47 |
| 3.11.1 | DEFINICIONES E HIPÓTESIS..... | 47 |
| 3.11.2 | LA FUNCIÓN DE CONFIABILIDAD..... | 48 |
| 3.11.2.1 | OTRA EXPRESIÓN PARA LA FUNCIÓN DE CONFIABILIDAD..... | 50 |
| 3.11.2.2 | CASO EN QUE TODOS LOS COMPONENTES TIENEN LA MISMA CONFIABILIDAD..... | 50 |
| 3.11.2.3 | PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE CONFIABILIDAD DE ESTRUCTURAS MONÓTONAS..... | 51 |
| 3.11.3 | COMPOSICIÓN DE ESTRUCTURAS..... | 52 |
| 3.11.4 | COMPOSICIÓN DE FUNCIONES DE CONFIABILIDAD..... | 53 |
| 3.11.5 | USO DE LA COMPOSICIÓN PARA EL CÁLCULO DE FUNCIONES DE ESTRUCTURA Y FUNCIONES DE CONFIABILIDAD..... | 53 |
| 3.11.6 | COMPOSICIÓN LINEAL DE FUNCIONES DE ESTRUCTURA..... | 55 |
| 3.11.7 | COMPOSICIÓN LINEAL DE REDES..... | 57 |
| 3.11.8 | FUNCIÓN DE SOBREVIVENCIA DE UN SISTEMA..... | 58 |
| 3.12 | CONCLUSIONES..... | 59 |
| 3.13 | REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 59 |

CAPÍTULO 4

GENERALIDADES PARA LA EVALUACIÓN DE LA CONFIABILIDAD DE SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

| | | |
|-------|---|----|
| 4.1 | CONSIDERACIONES GENERALES PARA EL ANÁLISIS DE LA CONFIABILIDAD EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA..... | 61 |
| 4.2 | PANORAMA VISUALIZADO POR EL IEEE..... | 62 |
| 4.2.1 | DIFICULTADES PRINCIPALES PARA LA EVALUACIÓN DE LA CONFIABILIDAD DE LOS SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA..... | 62 |
| 4.2.2 | MODOS DE FALLA DE LOS SISTEMAS..... | 65 |
| 4.2.3 | ÍNDICES DE CONFIABILIDAD..... | 66 |
| 4.2.4 | PRINCIPALES USOS Y MÉTODOS PARA EL ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD DE LOS SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA..... | 69 |
| 4.2.5 | PROCEDIMIENTOS DE CÁLCULO Y DISPOSITIVOS UTILIZADOS..... | 71 |
| 4.3 | CONCLUSIONES..... | 73 |
| 4.4 | REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 73 |

CAPÍTULO 5

TÉCNICAS PARA LA EVALUACIÓN DE LA CONFIABILIDAD DE SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

| | | |
|---------|---|----|
| 5.1 | EVALUACIÓN DE LA CONFIABILIDAD UTILIZANDO DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD..... | 74 |
| 5.1.1 | TERMINOLOGÍA DE LAS DISTRIBUCIONES..... | 74 |
| 5.1.2 | SISTEMAS EN SERIE..... | 77 |
| 5.1.3 | SISTEMAS EN PARALELO..... | 79 |
| 5.2 | EVALUACIÓN DE LA CONFIABILIDAD UTILIZANDO CADENAS DE MARKOV..... | 81 |
| 5.2.1 | MODELADO DE UN SISTEMA REPARABLE..... | 81 |
| 5.2.1.1 | DEFINICIONES GENERALES..... | 81 |
| 5.2.1.2 | EVALUACIÓN DE LAS PROBABILIDADES EN EL TIEMPO..... | 83 |
| 5.2.1.3 | EVALUACIÓN DE LAS PROBABILIDADES DE ESTADO ESTABLE..... | 84 |
| 5.2.2 | DIAGRAMA DE ESPACIO DE ESTADOS..... | 85 |
| 5.2.2.1 | COMPONENTE SENCILLO REPARABLE..... | 85 |
| 5.2.2.2 | SISTEMA CON DOS COMPONENTES REPARABLES..... | 86 |
| 5.2.2.3 | SISTEMA CON UN NÚMERO GRANDE DE COMPONENTES REPARABLES..... | 87 |
| 5.2.3 | MATRIZ ESTOCÁSTICA DE PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN..... | 87 |
| 5.2.4 | TÉCNICAS DE FRECUENCIA Y DURACIÓN..... | 88 |
| 5.2.5 | EVALUACIÓN APROXIMADA DE LA CONFIABILIDAD DE UN SISTEMA..... | 91 |
| 5.2.5.1 | SISTEMAS EN SERIE..... | 91 |
| 5.2.5.2 | SISTEMAS EN PARALELO..... | 93 |
| 5.3 | CONCLUSIONES..... | 95 |
| 5.4 | REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 96 |

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD DE SISTEMAS DE DISTRIBUCIÓN RADIALES

| | | |
|-----|--|-----|
| 6.1 | ÍNDICES GLOBALES DE CONFIABILIDAD DEL SISTEMA..... | 97 |
| 6.2 | ÍNDICES ORIENTADOS AL USUARIO..... | 99 |
| 6.3 | ÍNDICES ORIENTADOS A LA CARGA Y ENERGÍA..... | 100 |

| | | |
|-----|-------------------------------------|-----|
| 6.4 | APLICACIÓN A SISTEMAS RADIALES..... | 102 |
| 6.5 | CONCLUSIONES..... | 114 |
| 6.6 | REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 116 |

CAPÍTULO 7

CONFIABILIDAD DE SISTEMAS DE DISTRIBUCIÓN EN PARALELO O EN MALLA

| | | |
|-------|--|-----|
| 7.1 | TÉCNICAS DE EVALUACIÓN DE SISTEMAS EN MALLA..... | 117 |
| 7.1.1 | EVALUACIÓN MEDIANTE EL USO DE LOS DIAGRAMAS DE ESPACIO DE ESTADOS..... | 117 |
| 7.1.2 | MÉTODOS APROXIMADOS..... | 117 |
| 7.1.3 | MÉTODO DE REDUCCIÓN DE LA RED..... | 118 |
| 7.1.4 | ANÁLISIS DE LOS MODOS DE FALLA Y SUS EFECTOS..... | 120 |
| 7.2 | INCLUSIÓN DE LAS FALLAS DE BUSES E INTERRUPTORES..... | 121 |
| 7.3 | REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 122 |

CAPÍTULO 8

| | | |
|-------|--|-----|
| 8.1 | ¿QUÉ ES UNA INTERRUPCIÓN?..... | 123 |
| 8.2 | NIVEL ADECUADO DE LA CONFIABILIDAD DEL SISTEMA DE DISTRIBUCIÓN.... | 124 |
| 8.3 | EVALUACIÓN ECONÓMICA DE LA CONFIABILIDAD..... | 125 |
| 8.3.1 | GASTOS VARIABLES (X)..... | 127 |
| 8.3.2 | INVERSIÓN (C)..... | 128 |
| 8.3.3 | FACTOR DE CARGO DE LA INVERSIÓN (F)..... | 128 |
| 8.4 | PASOS PARA LA COMPARACIÓN ECONÓMICA..... | 130 |
| 8.5 | REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 130 |

| | |
|------------|-----|
| APÉNDICE A | A-1 |
| APÉNDICE B | B-1 |
| APÉNDICE C | C-1 |

| | |
|----------------------|------|
| BIBLIOGRAFÍA GENERAL | BG-1 |
|----------------------|------|

ÍNDICE DE TABLAS

| | |
|---|------|
| Tabla 3. 1 Valores de la función de estructura del Ejemplo 3C..... | 57 |
| Tabla 6. 1 Índices de confiabilidad para los componentes del sistema de la Fig. 6.1..... | 99 |
| Tabla 6. 2 Índices de confiabilidad para los puntos de carga del sistema de la Fig.6.1..... | 99 |
| Tabla 6. 3 Número de consumidores y cargas promedio(Sistema de la Fig.6.1)..... | 101 |
| Tabla 6. 4 Parámetros de confiabilidad para el Caso 1(Caso Base)..... | 105 |
| Tabla 6. 5 Número de consumidores y carga conectada..... | 105 |
| Tabla 6. 6 Índices básicos de confiabilidad para el Caso 1..... | 105 |
| Tabla 6. 7 Índices básicos de confiabilidad para el Caso 2..... | 107 |
| Tabla 6. 8 Índices básicos de confiabilidad para el Caso 3..... | 109 |
| Tabla 6. 9 Índices básicos de confiabilidad para el Caso 4..... | 111 |
| Tabla 6. 10 Índices básicos de confiabilidad para el Caso 5..... | 113 |
| Tabla 7. 1 Parámetros de entrada del sistema..... | 119 |
| Tabla 7. 2 Índices básicos de confiabilidad (Ejemplo 7.1)..... | 121 |
| Tabla 7. 3 Índices de confiabilidad para los buses del Ejemplo 6.1..... | 121 |
| Tabla 7. 4 Índices básicos de confiabilidad incluyendo fallas en buses..... | 122 |
| Tabla 8. 1 Duración crítica de pérdida de servicio en plantas industriales..... | 124 |
| Tabla 8. 2 Duración crítica de pérdida de servicio en edificios comerciales..... | 124 |
| Tabla 8. 3 Tiempo de reinicio de operaciones..... | 124 |
| Tabla A1. Procesos de Markov clasificados en sus cuatro tipos básicos..... | A-2 |
| Tabla A2. Métodos para determinar las probabilidades de primer paso..... | A-15 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|---|-----|
| Fig.2. 1 Histograma relativo..... | 7 |
| Fig.2. 2 Histograma acumulativo..... | 8 |
| Fig.2. 3 Histograma complementario..... | 9 |
| Fig.2. 4 Curva de supervivencia..... | 9 |
| Fig.2. 5 Función de supervivencia discreta..... | 10 |
| Fig.2. 6 Función de supervivencia continua..... | 11 |
| Fig.2. 7 Forma típica de la curva de la tasa de falla en función del tiempo..... | 18 |
| Fig.2. 8 Curva de daño modificada para sistemas reparables..... | 19 |
| Fig.3. 1 Diagrama de Hasse de un sistema de tres componentes..... | 23 |
| Fig.3. 2 Representación gráfica de un sistema..... | 23 |
| Fig.3. 3 (a) Representación gráfica; (b) Matriz Booleana; (c) Diccionario de sucesores..... | 27 |
| Fig.3. 4 Representación de una gráfica r-fold..... | 28 |
| Fig.3. 5 Diagrama de árbol..... | 29 |
| Fig.3. 6 Ejemplo de una red de confiabilidad..... | 30 |
| Fig.3. 7 Red simplificada..... | 31 |
| Fig.3. 8 Red para el Ejemplo 3.9.1..... | 37 |
| Fig.3. 9 Red para el Ejemplo 3.10.1..... | 39 |
| Fig.3. 10 Gráfica para el ejemplo 3.10.2..... | 40 |
| Fig.3. 11 Trayectorias elementales..... | 43 |
| Fig.3. 12 Red para el Ejemplo (3A) de composición de estructuras..... | 54 |
| Fig.3. 13 Red para el ejemplo (3B) de composición de estructuras..... | 55 |
| Fig.3. 14 Representación gráfica de la Ec.3.102..... | 58 |
| Fig.5. 1 Sistema de dos componentes en serie..... | 78 |
| Fig.5. 2 Sistema de dos componentes en paralelo..... | 80 |
| Fig.5. 3 Sistema reparable de un solo componente. (a) Diagrama de espacio de estados. (b) Variación de la confiabilidad y disponibilidad dependiente del tiempo..... | 82 |
| Fig.5. 4 Diagrama de espacio de estados de un componente con estado de salida parcial... | 86 |
| Fig.5. 5 Diagrama de espacio de estados para un sistema de dos componentes..... | 86 |
| Fig.5. 6 Diagrama de espacio de estados para un sistema de tres componentes..... | 88 |
| Fig.5. 7 Sistema de un solo componente.(a) Diagrama de espacio de estados.(b) Diagrama de tiempo medio/estado..... | 89 |
| Fig.5. 8 Representación de un sistema de dos componentes en serie..... | 91 |
| Fig.5. 9 Diagrama de espacio de estados de un sistema de dos componentes..... | 93 |
| Fig.5. 10 Representación de un sistema de dos componentes en paralelo..... | 94 |
| Fig.6. 1 Sistema radial con tres puntos de carga..... | 98 |
| Fig.6. 2 Sistema de distribución radial con cuatro puntos de carga..... | 103 |
| Fig.6.3 Sistema radial con laterales protegidos por fusibles..... | 107 |
| Fig.6. 4 Sistema reforzado con fusibles y cuchillas desconectoras..... | 109 |
| Fig.6. 5 Sistema con posibilidad de transferencia de carga a otro sistema adyacente..... | 112 |
| Fig.6. 6 Mejora de índices orientados al usuario..... | 114 |
| Fig.6. 7 Mejora de índices de carga y energía..... | 115 |
| Fig.6. 8 Cambios de la disponibilidad e indisponibilidad para los diferentes esquemas..... | 115 |
| Fig.7. 1 Alimentador con dos transformadores en paralelo..... | 119 |
| Fig.8. 1 Gráfica de Costo vs. Confiabilidad del sistema..... | 125 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|----------------------|---|
| A_k | número de eslabones de k componentes |
| a | eslabón de una estructura |
| B_k | número de cortes de k componentes |
| b | corte de una estructura |
| $E[T^k]$ | momento no central de orden k de la variable aleatoria T |
| e | conjunto de componentes de un sistema |
| e_i | componente de un sistema |
| G | gráfica |
| $h(p)$ | función de confiabilidad de un sistema |
| $i(t)$ | función de densidad del tiempo de vida |
| O | origen de una red de confiabilidad |
| p | vector de confiabilidades de componentes |
| p_t | confiabilidad. de un componente (probabilidad de que funcione en un cierto instante t) |
| $p(n)$ | probabilidad de que el tiempo de vida sea igual a n |
| $p_c(n)$ | probabilidad condicional de falla |
| \mathfrak{R} | red de confiabilidad |
| $\bar{\mathfrak{R}}$ | red de confiabilidad dual a la red \mathfrak{R} |
| r | número de componentes u orden de un sistema |
| S | sistema |
| \mathcal{S} | conjunto de vértices de una gráfica |
| T | tiempo de vida |
| \bar{T} | esperanza matemática del tiempo de vida |
| U | conjunto de arcos de una gráfica |
| u_i | arco de una gráfica |
| $v(t)$ | función de sobrevivencia |
| x | estado de un conjunto de componentes |
| x_i | estado de un conjunto de componentes e_i |
| Z | punto terminal de una red de confiabilidad |
| $\binom{n}{k}$ | número de combinaciones de n objetos tomados k a la vez |
| Δ | mapeo que asocia un componente de un sistema con cada arco de una gráfica |
| λ | longitud de un sistema |
| $\lambda(t)$ | tasa instantánea de falla |
| μ | ancho de un sistema |
| $\Phi(X)$ | función de estructura aleatoria |

| | |
|--------------------|--|
| $\Phi(t)$ | función de distribución del tiempo de vida |
| $\varphi(x)$ | función de estructura de un sistema |
| $\bar{\varphi}(x)$ | función de estructura dual a $\varphi(x)$ |
| \cong | relación de equivalencia entre redes y funciones de estructura |
| $[a,b]$ | intervalo (a,b) cerrado |
| $]a,b]$ | intervalo (a,b) abierto por la izquierda |
| $[a,b)$ | intervalo (a,b) abierto por la derecha |
| \in | relación de pertenencia de un elemento a un conjunto |
| \subset | relación de inclusión no estricta de un conjunto en otro |
| $\subset\subset$ | relación de inclusión estricta de un conjunto en otro |

RESUMEN

El concepto de sistema se encuentra involucrado, prácticamente, en todas las organizaciones del mundo actual. La confiabilidad de sistemas complejos, es decir, de sistemas que están compuestos por un gran número de componentes interactuando entre sí, es un tema que interesa a la mayoría de los ingenieros y técnicos de todas las disciplinas. Cuando se estudian sistemas cuyo funcionamiento es muy importante, no es posible ignorar el aspecto de su confiabilidad. En los últimos años se han desarrollado muchos métodos de análisis en este campo y es posible encontrar la teoría necesaria para resolver la mayoría de los casos que se puedan presentar en la vida real. Sin embargo, el análisis serio de la confiabilidad de sistemas reales y complejos, requiere del uso de métodos que no sean sólo de uso general, demasiado teóricos o únicamente de interés académico.

Por otra parte, existen trabajos que tratan, específicamente, sobre la confiabilidad de sistemas de distribución, pero no incluyen las bases teóricas en profundidad. Este trabajo se desarrolla con la intención de llenar ese vacío.

Con la finalidad de lograr el objetivo planteado, en los primeros capítulos de este trabajo, se definen los conceptos generales que se utilizan para estudiar la confiabilidad de un componente o sistema; como es el caso de la función de sobrevivencia. También se establecen las principales distribuciones de probabilidad que se utilizan para la evaluación de la confiabilidad, así como sus momentos y características especiales que las ligan con la función de sobrevivencia. Se hace la definición formal de la confiabilidad, de un componente o sistema, de tal manera que no sea únicamente un concepto intuitivo sino que se pueda modelar matemáticamente de una manera precisa. Se introducen los conceptos de *función de estructura y red de confiabilidad* y se establecen, también, las técnicas matemáticas que nos llevan a la definición de los conjuntos de *cortes mínimos*.

Después de definir los principios fundamentales; se establecen los conceptos generales, que permiten ligar las técnicas anteriores con la problemática de la evaluación de la confiabilidad de los Sistemas Eléctricos de Potencia; así pues, se hace una recopilación de los índices de confiabilidad que se utilizan a nivel mundial. También se definen los índices que se deben evaluar para cuantificar la confiabilidad de los diferentes subsistemas que integran un sistema eléctrico de potencia haciendo énfasis en lo relativo a los sistemas de distribución.

Posteriormente se analiza la confiabilidad de los Sistemas de Distribución, tanto para sistemas radiales como para sistemas en malla o paralelo. Allí se establecen las técnicas para definir los índices globales del sistema así como los índices orientados al usuario y a la energía. Se hace también, en el Apéndice A, una introducción a los *Procesos de Markov* los cuales, juntamente con los cortes mínimos son parte fundamental para el análisis de la confiabilidad de los sistemas de distribución.

Finalmente, se hace un breve análisis del impacto económico del incremento de la confiabilidad de los sistemas eléctricos y de sus efectos y limitaciones tanto desde el punto de vista de la compañía suministradora como del usuario. Este es un tema por demás complicado y su análisis exhaustivo está fuera del alcance de este trabajo; sin embargo, se establecen los criterios que permiten, aunque sea de una manera muy preliminar, definir el nivel adecuado de confiabilidad que debe asignar a cada sistema de distribución en particular.

ABSTRACT

The notion of a system is found in all organizations of the living world. The reliability of a complex system, that is, one containing a rather large number of interactive elements, is a question that interest almost all engineers and technicians of all disciplines. When we must study large systems, it is evidently appropriate not to neglect to take into account the aspect of reliability. One finds that in the past years, methods in this domain have been very obviously improved and that it is possible to find a sufficiently global theory for solving the most frequently encountered cases.

However, the analysis of the reliability of complex systems with numerous elements, often interdependent, involves the use of methods that are not yet sufficiently general and that are often too theoretical and of rather academic interest. On the other hand, there exist a number of works that treat the reliability of distribution systems, but none treats the theoretical bases in deep. This work is intended to fill this gap.

In order to meet this aim, in the first chapters we review the classical notions concerning the lifetime of an element, the survival function and failure rate. The general method for studying systems with n components is developed from the point of view of the logic of their functioning. The notion of *structure function* and *reliability network* are presented.

After that, the concepts related to the reliability of electric power systems are introduced; the reliability indices and analysis methods of general use are defined.

And in the final chapters we analyze the problem of distribution system reliability including radial, parallel and meshed networks. We also include , in Appendix A, an introduction of the *Markov Processes* which together with *minimal cuts* theory are fundamental in reliability analysis.

It is important to realize that this work is focused to the technical evaluation of the reliability of distribution systems and that the economical aspect are only briefly analyzed.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 ANTECEDENTES

La Ingeniería de Sistemas Eléctricos de Potencia es una rama de la ingeniería eléctrica que se ocupa del desarrollo y aplicación de tecnologías para la generación, transmisión y distribución de energía eléctrica. Los sistemas de energía eléctrica con que cuentan todos los países, del mundo moderno, son los más extensos y costosos de todos los sistemas desarrollados por el hombre. Es por ello que el ingeniero de sistemas eléctricos de potencia, responsable de su diseño y operación, se enfrenta constantemente a los retos más interesantes que se puedan encontrar en cualquier rama de la ingeniería.

Los objetivos de un sistema eléctrico de potencia se puede establecer, de una manera muy simple, como sigue:

- Generar energía eléctrica en cantidades suficientes en los puntos de generación más adecuados
- Transmitirla en forma masiva a los centros de carga
- Distribuirlos a los consumidores individuales de la manera que éstos lo requieran, con buena calidad, con el menor deterioro ecológico y con el menor costo posible

Por lo tanto, un sistema eléctrico de potencia, bien diseñado y operado adecuadamente, deberá satisfacer los siguientes requisitos:

- I. Abastecer de energía eléctrica prácticamente cualquier sitio que el consumidor demande
- II. La demanda de potencia, tanto real como reactiva, varía con el tiempo. Por lo tanto el sistema debe ser capaz de abastecer esta potencia siempre cambiante
- III. La energía abastecida debe satisfacer ciertos requisitos mínimos con relación a su "calidad". La calidad está determinada básicamente por tres factores:
 - frecuencia constante
 - voltaje constante
 - alta confiabilidad

IV. La energía deberá abastecerse con los menores costos ecológicos y económicos posibles

Además, para el diseño de un sistema eléctrico de potencia, deberán tomarse en consideración las necesidades y limitaciones geográficas, históricas, políticas, tecnológicas y económicas aplicables en cada caso. Debido a lo anterior y a la gran diversidad en la magnitud de los sistemas, no es posible dar reglas generales para definir la estructura de cualquier sistema, sin embargo todos ellos tienen una cosa en común; operan a diferentes niveles de tensión separados, entre sí, por transformadores.

Es por ello que las funciones de los sistemas eléctricos de potencia, se subdividen tradicionalmente en los siguientes niveles:

- a) Nivel de generación
- b) Nivel de transmisión
- c) Nivel de distribución

Los circuitos de distribución constituyen las redes más finas de todo el sistema. Usualmente se utilizan dos niveles para los voltajes de los alimentadores de distribución:

- Primario (6, 13.8, 23 y 34 kV)
- Secundario (120/240 V)

Estos circuitos, se alimentan desde las subestaciones de distribución y abastecen de energía a los consumidores pequeños (domésticos), medianos (pequeñas industrias y comercios) o grandes (industrias de mayor tamaño). La ingeniería de distribución es, en sí misma, una subtecnología de considerable importancia y variedad; cubre los problemas de líneas aéreas y subterráneas, conexión de subestaciones, servicios directos al usuario, etc.

Debido, precisamente, a esta diversidad de servicios e instalaciones, los sistemas de distribución son una parte muy importante de todo el sistema. Un sistema eléctrico de potencia típico, invierte en su sistema de distribución al menos un 40% de su costo total.^{1 2}

En varios países con alto desarrollo tecnológico, se reporta que más del 95% del total de las fallas de los sistemas eléctricos, ocurren en componentes del sistema de distribución. En términos de usuario-horas o MVA-minutos interrumpidos los cuales son, probablemente, dos de los índices más importantes para definir el comportamiento, rentabilidad y confiabilidad de un sistema; los sistemas primarios de distribución, contribuyen con aproximadamente el 80% del total.

A pesar de ello, en las últimas décadas, la mayor cantidad de esfuerzo se ha dedicado a estudiar la confiabilidad de los sistemas de generación, de los sistemas de transmisión y de

los sistemas compuestos de generación/transmisión (Bulk Power Systems); quedando en un grado menor de desarrollo el análisis de la confiabilidad de los sistemas de distribución.

1.2 OBJETIVOS

Los conceptos anteriores son los que han motivado el desarrollo de este trabajo; el cual tiene como objetivo, primeramente definir las bases teóricas necesarias para manejar adecuadamente el problema general de confiabilidad en sistemas de ingeniería, para posteriormente estudiar con éxito el problema de la confiabilidad en sistemas de distribución, el cual como ya se dijo, es diferente al de los otros subsistemas que integran los sistemas eléctricos de potencia. Es conveniente dejar en claro que el objetivo específico de este trabajo es el de establecer las bases teóricas para la **evaluación técnica** de la confiabilidad de sistemas de distribución analizando únicamente en forma breve el tema de la evaluación económica.

En el Capítulo 2 se definen los conceptos generales que se utilizan para estudiar la confiabilidad de un componente o sistema; como es el caso de la función de sobrevivencia. También se establecen las principales distribuciones de probabilidad que se utilizan para la evaluación de la confiabilidad, así como sus momentos y características especiales que las ligan con las funciones de sobrevivencia.

En el Capítulo 3 se hace la definición formal de la confiabilidad, de un componente o sistema, de tal manera que no sea únicamente un concepto intuitivo sino que se pueda modelar matemáticamente de una manera precisa. Se establecen también las técnicas matemáticas que nos llevan a la definición de los conjuntos de cortes mínimos; los cuales conjuntamente con los Procesos de Markov, que se analizan en el Apéndice A, son dos herramientas esenciales para la evaluación de la confiabilidad. En el Apéndice B se presenta un método de cálculo por computadora para el cálculo de eslabones de una red, de los cuales se pueden deducir los cortes mínimos.

Una vez definidos los principios fundamentales; en el Capítulo 4, se establecen los conceptos generales, que permitan ligar las técnicas anteriores con la problemática de la evaluación de la confiabilidad de los Sistemas Eléctricos de Potencia; así pues, se hace una recopilación de los índices de confiabilidad que utilizan, a nivel mundial, las principales compañías suministradoras. También se definen los índices que se deben evaluar para cuantificar la confiabilidad de los diferentes subsistemas que integran un sistema de eléctrico de potencia.

En el Capítulo 5, se analiza ya en forma detallada la confiabilidad de los Sistemas Eléctricos de Potencia y se definen los índices de confiabilidad globales del sistema.

En los Capítulos 6 y 7 se analiza la confiabilidad de los Sistemas de Distribución. En el Capítulo 6 se analizan, específicamente, los sistemas radiales y en el Capítulo 7 los sistemas en malla o paralelo. Allí se establecen las técnicas para definir los índices globales del sistema así como los índices orientados al usuario y a la energía. También se elabora un

programa de computadora digital para el análisis sistemático de ambos tipos de sistemas. Los listados del programa para el cálculo de los índices de confiabilidad se dan en el Apéndice C

Finalmente, en el Capítulo 8, se hace un breve análisis del impacto económico del incremento de la confiabilidad de los sistemas eléctricos y de sus efectos y limitaciones tanto desde el punto de vista de la compañía suministradora como del usuario. Este es un tema por demás complicado y su análisis exhaustivo está fuera del alcance de este trabajo; sin embargo, se establecen los criterios que permiten, aunque sea de una manera muy preliminar, definir el nivel adecuado de confiabilidad que se debe asignar a cada sistema de distribución en particular.

1.3 JUSTIFICACIÓN

Con base en lo establecido en los párrafos anteriores, a continuación se resumen los criterios que justifican el desarrollo de este trabajo:

- i. Los sistemas de distribución, tradicionalmente, han sido estudiados y diseñados con menor cuidado que los sistemas de generación y transmisión
- ii. Las fallas de los sistemas de distribución son las que tienen un mayor impacto directo sobre el consumidor
- iii. Las fallas de los sistemas de distribución son, por mucho, las que presentan una mayor frecuencia de ocurrencia con relación a las de los otros subsistemas del sistema eléctrico
- iv. Además, según algunos autores en muchos países los sistemas de distribución llegan a representar, en costo y extensión desde un mínimo del 40% hasta un 80% del total de los sistemas eléctricos

1.4 APORTACIONES

En este trabajo, partiendo de una investigación bibliográfica retrospectiva, se analizan fuentes de información, para un periodo de más de cuarenta años y se establecen las bases teóricas para el análisis de la confiabilidad de sistemas de ingeniería, así como las tendencias de investigación en dicho campo.

Se desarrollan algunos modelos matemáticos que permiten aplicar dichas teorías al análisis específico de sistemas reparables, característica que permite prolongar la vida útil de un sistema y la cual es una característica inherente de los sistemas de distribución, en particular, y de los sistemas eléctricos de potencia en general.

1.5 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

¹ "Evaluate Distribution System Design by Cost Reliability Indices". N.E. Chang, IEEE Transactions, PAS-96, 1977, pp. 1480-1490

² "Assessing the Reliability of Distribution Systems". R.E. Brown, A.P. Hanson,, H.L. Willis, F.A. Luedtke, M.F. Born, IEEE Computer Application in Power, January 2001, pp 44-49.

CAPÍTULO 2

MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL ESTUDIO DE LA CONFIABILIDAD DE COMPONENTES

La manera más simple de estudiar un componente de un sistema o equipo desde el punto de vista de su confiabilidad y de su mantenimiento, es considerando que dicho componente está en un dado instante en buen estado -funcionando o capaz de funcionar- o que de hecho está dañado y no puede proporcionar el servicio para el cual fue creado.

El uso del concepto anterior, tan simple como parece, suele presentar, sin embargo, ciertas variantes que pudieran complicar su aplicación práctica. Por ejemplo, en el caso de una lámpara eléctrica, si se le observa cuidadosamente, o con la ayuda de algún instrumento de medición, se nota que dicha lámpara muestra una reducción en su salida luminosa a medida de que va envejeciendo; esta disminución se presenta de una manera más notoria algún tiempo antes de que ocurra la ruptura del filamento que produce la falla definitiva. Sin embargo, se puede estar de acuerdo, que para la mayoría de las aplicaciones prácticas la reducción de la salida luminosa puede ser ignorada.

Lo antes dicho pudiera no ser válido para un equipo más complejo como, por ejemplo, un receptor de radio. Éste pudiera funcionar de una manera más o menos satisfactoria, a pesar del deterioro de las características eléctricas de sus componentes. Sin embargo en este caso se puede distinguir entre dos tipos de fallas; la falla "catastrófica" (Por ejemplo, un módulo dañado o un cortocircuito), la cual se presenta de una manera inesperada y tiene consecuencias graves, y una falla "progresiva" la cual va evolucionando en el tiempo debido al cambio en las características de sus componentes.

En los casos en que las características del equipo se van degradando lentamente, y sin importar que ello ocurra de una manera continua o de una manera errática, se pueden fijar "límites de tolerancia" que permitan determinar en todo momento, de una manera precisa, si el sistema está o no está en buen estado. A pesar del carácter arbitrario de los límites de tolerancia, estos sirven para reducir el problema al caso en que el equipo tiene solamente dos estados posibles.

El problema de definición se complica, cuando se toman en cuenta la diversidad de funciones que pueden ser ejecutadas por un sistema complejo. Para dar un ejemplo extremo, la falla de un encendedor de cigarrillos de un automóvil no afecta en ningún sentido el manejo del mismo ya que solamente está cumpliendo una función secundaria. La definición de si un componente está o no en buen estado depende entonces del uso preciso (primario) que deba tener dicho componente.

Posteriormente veremos que al descomponer equipos complejos en elementos más simples se pueden superar las dificultades antes mencionadas. Por ahora supondremos que un componente tiene solamente dos estados posibles: funcionando o dañado.

Comenzaremos, en este capítulo desarrollando los conceptos teóricos fundamentales aplicables directamente a equipos simples; esto será el punto de partida para el estudio posterior de sistemas más complejos.

2.1 EDAD Y TIEMPO DE VIDA DE UN COMPONENTE

Adicionalmente a la hipótesis anterior, de acuerdo a la cual todos los componentes de un sistema tienen únicamente dos estados posibles, funcionamiento o falla, también supondremos que dicha falla es irreversible. Con ello descartaremos la posibilidad de una falla intermitente, capaz de desaparecer sin intervención externa. Además no nos preocuparemos de las posibilidades de reparación de los componentes. La "vida" de un componente sigue entonces un esquema muy simple: un componente nuevo se pone en servicio, funciona por un cierto tiempo, y después "muere".

Si se observa la vida de un gran número de componentes, y se hace uso de los métodos clásicos de la estadística descriptiva, podremos presentar los resultados de dichas observaciones de una manera muy simple.

Supongamos que ponemos en servicio "n" componentes en un tiempo $t=0$. En cada tiempo (t) determinaremos el número de componentes que salen de servicio en el intervalo $[t, t+1]$, $t=0, 1, 2, 3, \dots$. Supongamos que un componente dañado no se reemplaza. El resultado de las observaciones, se puede representar en un histograma en el cual se muestran las frecuencias relativas (Fig.2.1). También podemos dibujar un histograma acumulativo (Fig.2.2) el cual indica, para cada tiempo t , la proporción de componentes fuera de servicio en el intervalo $]0, t]$.

De la Fig.2.2 se puede obtener fácilmente un diagrama complementario calculando, con base en el histograma acumulativo, la función $v(t) = 1 - \Phi(t)$. Dicho diagrama, el cual se muestra en la Fig.2.3, permite la evaluación, en el tiempo t , del número de componentes que están todavía en servicio. El diagrama de la Fig.2.2 constituye una "estadística de mortalidad"; mientras que el diagrama complementario de la Fig.2.3 es una "estadística de sobrevivencia", el cual presentado en la forma de una curva continua (Fig.2.4) toma el nombre de "curva de sobrevivencia".

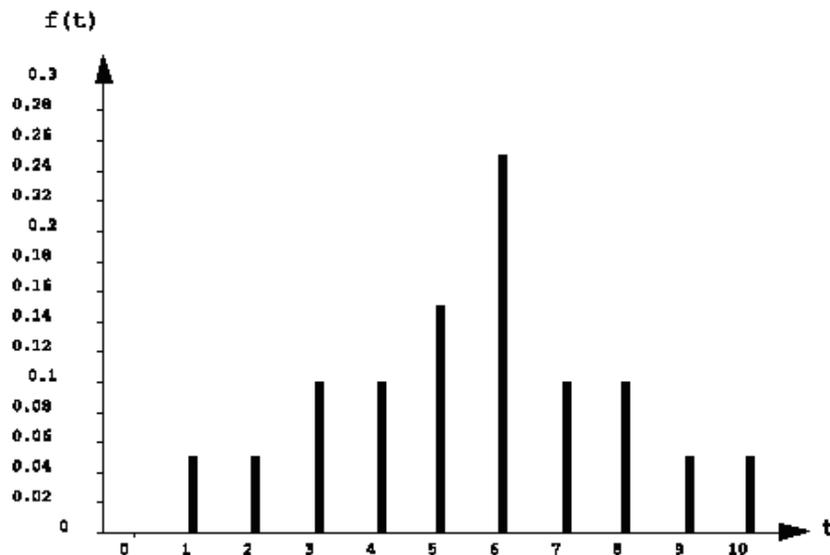


Fig.2. 1 Histograma relativo

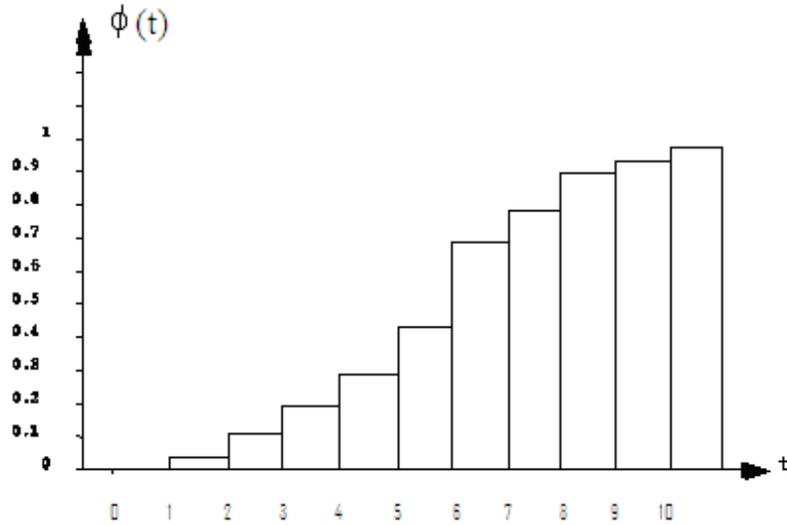


Fig.2. 2 Histograma acumulativo

El tipo de descripción estadística antes mencionada no presenta dificultad, en principio, cuando el equipo funciona continuamente desde el momento en que es puesto en servicio hasta que muere. A reserva de que las condiciones de funcionamiento sean suficientemente bien definidas, el número de horas (o cualquier otra unidad de tiempo) de funcionamiento mide realmente, en cada instante, la "cantidad de uso" que ha tenido el equipo hasta el instante considerado.

Si el equipo se usa de una manera intermitente, la solución más simple, es evidentemente, definir la edad de un componente en un instante dado como la suma de tiempo efectivo de uso. Sin embargo esto es válido, únicamente si el componente no se deteriora cuando no está en uso o cuando el arranque y paro no tienen influencia en el detrimento del tiempo de vida. Una solución, cuando el arranque y paro acortan el tiempo de vida de un componente o de un sistema, es medir su edad con una función de la forma $h+kn$, donde h es el número de horas de funcionamiento y n el número de veces que el componente o sistema ha sido puesto en operación. El coeficiente k se escogerá de tal manera de que el tiempo de vida del componente sea estadísticamente el mismo sin importar el modo de uso.

Otra variable que tiene considerable influencia en el tiempo de vida de un componente o sistema es el medio ambiente. Es fácil estar de acuerdo en que un equipo que se usa en un laboratorio, en una atmósfera de calma y con personal acostumbrado a manejar aparatos delicados no está sujeto a las mismas exigencias de un equipo que se utiliza en lugares de trabajo pesado, a la intemperie o a bordo de un vehículo. En el resto del presente trabajo supondremos que las funciones que se definan para cuantificar la "cantidad de uso" o tiempo de vida de un equipo o sistema tendrán en cuenta condiciones de uso bien definidas.

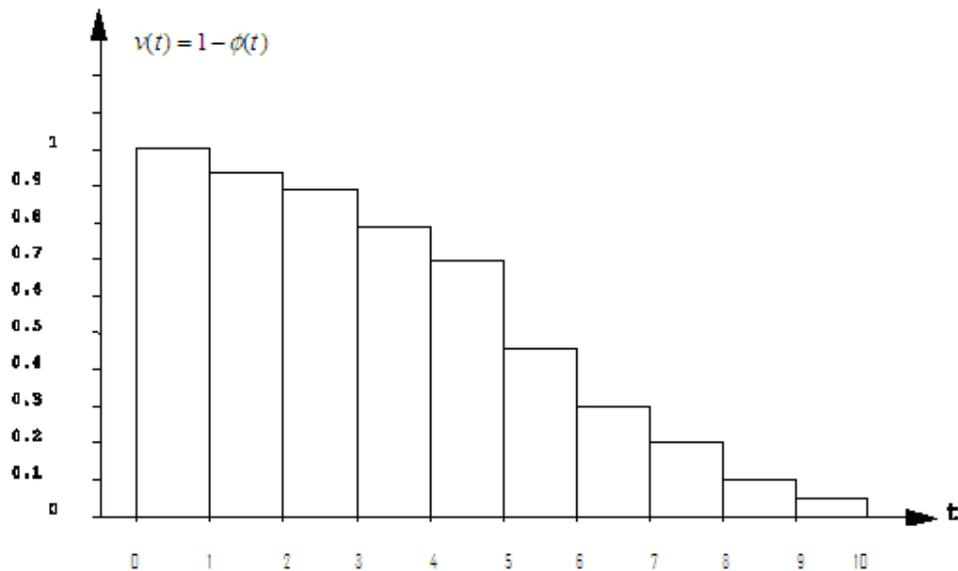


Fig.2. 3 Histograma complementario

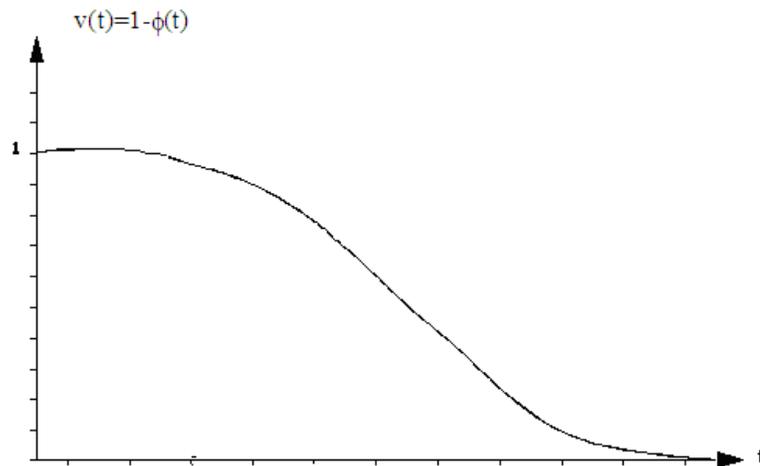


Fig.2. 4 Curva de sobrevivencia

2.2 FUNCIÓN DE SOBREVIVENCIA

La discusión del inciso anterior muestra que el tiempo de vida de un equipo no se puede describir de una manera precisa sin usar el lenguaje de la teoría de probabilidades. Supongamos entonces que el tiempo de vida de un componente puede representarse por una variable aleatoria T , para la cual la "función de sobrevivencia" $v(t)$ se define de la siguiente manera

$$v(t) = P\{T > t\} \quad \text{Ec. 2 . 1}$$

Esta hipótesis fundamental determina toda la teoría que se desarrollará en este capítulo. La aplicación práctica de esta teoría nos llevará a la estimación de la ley de probabilidad de T .

La probabilidad de que un componente tenga una falla en un tiempo T menor que t es

$$P\{T \leq t\} = 1 - v(t) = \Phi(t) \quad \text{Ec. 2 . 2}$$

De acuerdo a la terminología usual del cálculo de probabilidades, $\Phi(t)$ es una función de distribución y $v(t)$ es una función de distribución complementaria. En problemas de falla de equipo, esta última función, se denomina "función de sobrevivencia", como ya se dijo previamente.

Normalmente se usan tres tipos de leyes de probabilidad:

TIPO I. La variable aleatoria T que representa el tiempo de vida de un componente es una variable discreta. La función de sobrevivencia es una función escalonada (Fig.2.5).

TIPO IIa. La variable aleatoria T toma valores en $[0, \infty)$; su función de distribución $\Phi(t)$, y como consecuencia su función de distribución complementaria $v(t)$, son continuas para toda t . (Fig.2.6). También ambas tienen derivadas en el intervalo en que están definidas.

TIPO IIb. La variable aleatoria T toma valores en $[0, \infty)$ donde $\Phi(t)$ y $v(t)$ son continuas a tramos y tienen al menos una discontinuidad.

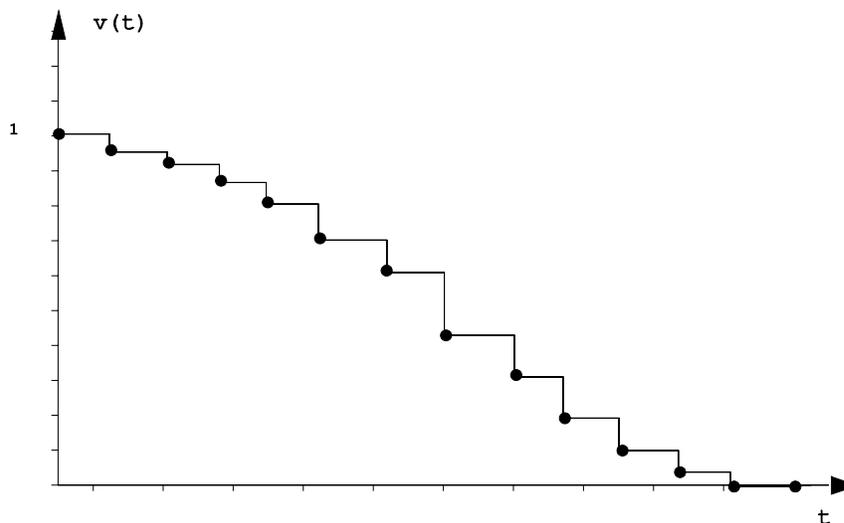


Fig.2. 5 Función de sobrevivencia discreta

Para que una función $v(t)$ sea una función de distribución complementaria de una variable aleatoria $T \geq 0$, es necesario que

a) $v(t)=1$ para todo $t < 0$

b) $v(\infty)=0$ y

Ec. 2 . 3

c) $v(t)$ es monótona creciente en $(-\infty, \infty)$

De las definiciones del presente inciso, se concluye que las funciones $v(t)$ que se consideren aquí serán continuas y diferenciables por la derecha.

2.3 PROBABILIDAD DE FALLA Y TASA DE FALLA

Considérese una función de sobrevivencia $v(t)$ del tipo IIa; y definamos la función de "densidad de probabilidad del tiempo de vida" $i(t)$ tal que

$$\begin{aligned} i(t)dt &= P[t < T \leq t + dt] \\ &= P[T \leq t + dt] - P[T \leq t] \end{aligned}$$

Ec. 2 . 4

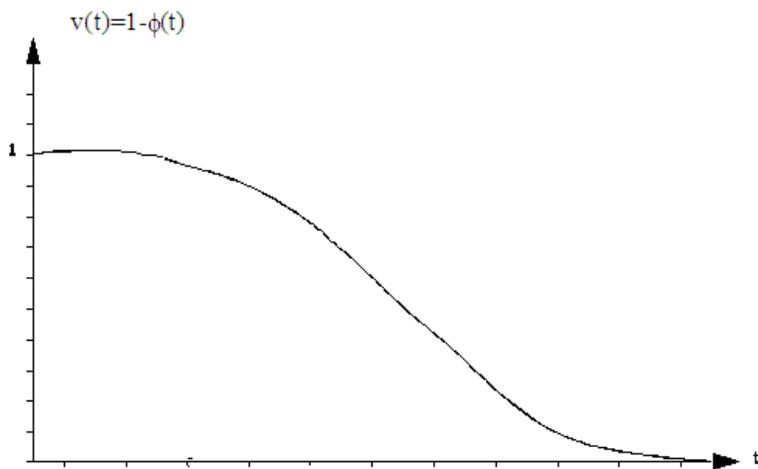


Fig.2. 6 Función de sobrevivencia continua

Entonces

$$i(t) = \frac{dF}{dt} = - \frac{dv}{dt} \quad \text{o} \quad v(t) = \int_t^{\infty} i(u) du$$

Ec. 2 . 5

La cantidad 2.4 representa la probabilidad de que un componente tenga una falla en el

intervalo $[t, t+dt]$

Cuando tenemos una ley del tipo I, t toma sus valores en $N=\{0,1,2,3,\dots\}$, y la probabilidad de que el componente tenga una falla en el tiempo $n+1$ es:

$$\begin{aligned} P[T = n + 1] &= P[T \leq n + 1] - P[T \leq n] \\ &= \Phi(n + 1) - \Phi(n), n = 0, 1, 2, \dots \\ \text{con } P[T = 0] &= \Phi(0) \end{aligned} \quad \text{Ec. 2 . 6}$$

O lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} P[T = n + 1] &= (1 - P[T > n + 1]) - (1 - P[T > n]) \\ &= P[T > n] - P[T > n + 1] \\ &= v(n) - v(n + 1), n = 0, 1, 2, \dots \\ \text{con } P[T = 0] &= 1 - v(0). \end{aligned} \quad \text{Ec. 2 . 7}$$

Entonces tendremos

$$\Phi(n) = P[T = 0] + P[T = 1] + \dots + P[T = n - 1] + P[T = n] = P[T \leq n] \quad \text{Ec. 2 . 8}$$

y además

$$v(n) = P[T = n + 1] + P[T = n + 2] + \dots = P[T > n] \quad \text{Ec. 2 . 9}$$

Retornando al caso de una ley del tipo IIa, se puede escribir

$$P[t < T \leq t + dt] = P[T > t] * P[T < t + dt | T > t] \quad \text{Ec. 2 . 10}$$

Además si, $v(t) = P[T > t] > 0$,

$$\begin{aligned} P[t < T \leq t + dt | T > t] &= \frac{P[t < T \leq t + dt]}{P[T > t]} \\ &= \frac{i(t)}{v(t)} dt \\ &= - \frac{v'(t)}{v(t)} dt \quad \text{donde } v'(t) = \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad \text{Ec. 2 . 11}$$

Designaremos a la expresión anterior por $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = - \frac{v'(t)}{v(t)} \quad \text{Ec. 2 . 12}$$

Esta función se llama "tasa instantánea de falla" o más simplemente "tasa de falla". La cantidad $\lambda(t)dt$ representa la probabilidad de que el componente falle en el intervalo $[t, t+dt]$, sabiendo que está en buen estado en el instante t . Entonces ésta es una probabilidad condicional, mientras que $i(t) dt$ es la probabilidad "**a priori**" de que la componente falle en $[t, t+dt]$. Estadísticamente, $\lambda(t)\Delta t$ se puede estimar por la relación entre el número de componentes que han fallado entre t y $t + \Delta t$ y el número de componentes en buen estado en el instante t .

Si consideramos una ley del tipo I en vez de una del tipo II, tendremos

$$P[T = n + 1] = P[t > n] p_c(n) \quad \text{Ec. 2 . 13}$$

donde $p_c(n) = P[t = n + 1 | T > n]$

De donde se puede deducir que

$$p_c(n) = \frac{p[T = n + 1]}{P[T > n]}$$

$$= \frac{v(n) - v(n + 1)}{v(n)} \quad \text{Ec. 2 . 14}$$

La cantidad anterior se llama "probabilidad condicional de falla", donde se debe notar que:

$$p_c(-1) = \frac{1 - v(0)}{1} = P[T = 0] \quad \text{Ec. 2 . 15}$$

A la tasa de falla usualmente se le conoce también como "tasa de mortalidad".

2.4 MOMENTOS DE UNA LEY DE SOBREVIVENCIA Y EDAD MEDIA DE FALLA

Hagamos que $\Phi(t)$ sea la función de distribución del tiempo de vida T . Los momentos de esta ley son

$$E[T^k] = \int_0^{\infty} t^k d\Phi(t). \quad \text{Ec. 2 . 16}$$

Si se considera la función de sobrevivencia

$$v(t) = 1 - \Phi(t) \quad \text{Ec. 2 . 17}$$

Entonces se puede escribir

$$E[T^k] = -\int_0^{\infty} t^k dv(t). \quad \text{Ec. 2 . 18}$$

En el caso de una ley del tipo IIa se puede escribir

$$E[T^k] = \int_0^{\infty} t^k i(t) dt \quad \text{Ec. 2 . 19}$$

En el caso de leyes del tipo I donde t toma valores en $n = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ la ecuación 2.16 se convierte de la siguiente manera:

$$E[T^k] = \sum_{n=0}^{\infty} n^k p(n) \quad \text{Ec. 2 . 20}$$

Donde $p(n) = P[T = n]$

Definamos ahora la media y la varianza de la variable aleatoria no negativa T

$$\bar{T} = E[T] \quad y \quad \sigma_T^2 = E[(T - \bar{T})^2] \quad \text{Ec. 2 . 21}$$

Si definimos la variable

$$w(t) = \int_0^{\infty} v(u) d(u) \quad \text{Ec. 2 . 22}$$

para todo t mayor o igual a cero se tiene que

$$\bar{T} = - \int_0^{\infty} v(t) dt = w(0) \quad \text{Ec. 2 . 23}$$

y

$$E[T^2] = 2 \int_0^{\infty} w(t) dt \quad \text{Ec. 2 . 24}$$

Haciendo

$$k_1 = \int_0^{\infty} v(t) dt = w(0) \quad \text{Ec. 2 . 25}$$

y

$$k_2 = \frac{1}{2} E[T^2] = \int_0^{\infty} w(t) dt, \quad \text{Ec. 2 . 26}$$

Finalmente tenemos que

$$\bar{T} = k_1 \quad \text{Ec. 2 . 27}$$

y

$$\sigma_T^2 = E[T^2] - (\bar{T})^2 = 2k_2 - k_1^2 \quad \text{Ec. 2 . 28}$$

2.5 PRINCIPALES LEYES DE SOBREVIVENCIA QUE SE UTILIZAN EN EL ESTUDIO DE EQUIPOS

2.5.1 LEYES DEL TIPO I

Supongamos que el tiempo de vida de un componente es una cantidad discreta; más precisamente, supongamos que los n valores que puede tomar t pertenecen a $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Las principales leyes de sobrevivencia que se utilizan son:

ley binomial,

ley de Poisson,

ley geométrica y

ley binomial negativa.

La probabilidad de que $T = n$ se designará por $p(n)$, la función de distribución complementaria por $v(n)$, y la tasa de falla por $p_c(n)$

$$p(n) = P[T = n] \quad \text{Ec. 2 . 29}$$

$$v(n) = P[T > n] \quad \text{Ec. 2 . 30}$$

$$p_c(n) = \frac{p(n+1)}{v(n)} \quad \text{Ec. 2 . 31}$$

A continuación se dan las fórmulas correspondientes a las dos primeras leyes, las cuales son las de mayor uso:

(A) LEY BINOMIAL

$$p(n) = \binom{m}{n} p^n q^{m-n}$$

$$v(n) = \sum_{i=n+1}^m \binom{m}{i} p^i q^{m-i}$$

$$p_c(n) = \frac{\binom{m}{n+1} p^{n+1} q^{m-n-1}}{\sum_{i=n+1}^m \binom{m}{i} p^i q^{m-i}}$$

$$\bar{T} = E[T] = m p$$

$$\sigma_T^2 = m p q$$

Ec. 2 . 32

(B) LEY DE POISSON

$$p(n) = \frac{\lambda_0^n e^{-\lambda_0}}{n!}, n \in N, \lambda_0 \in R^+$$

$$v(n) = e^{-\lambda_0} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\lambda_0^i}{i!}$$

$$p_c(n) = \frac{\lambda_0^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\lambda_0^i}{i!}}$$

$$\bar{T} = E[T] = \lambda_0$$

$$\sigma - T^2 = \lambda_0$$

Ec. 2 . 33

2.5.2 LEYES DEL TIPO II²

(A) LEY EXPONENCIAL

$$i(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}, t \geq 0, \lambda_0 > 0,$$

$$v(t) = e^{-\lambda_0 t}, t \geq 0,$$

$$\lambda(t) = \lambda_0, t \geq 0,$$

$$\bar{T} = \frac{1}{\lambda_0},$$

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{\lambda_0^2}$$

Ec. 2 . 34

(B) LEY GAMMA.

$$i(t) = \frac{\lambda_0 e^{-\lambda_0 t} (\lambda_0 t)^{(k-1)}}{\Gamma(k)}, t \geq 0, k \in R_0^+, \lambda_0 > 0$$

$$\bar{T} = \frac{k}{\lambda_0}$$

$$\sigma_T^2 = \frac{k}{\lambda_0^2}$$

Ec. 2 . 35

Cuando k es entera e igual o mayor que 1;

$$\Gamma(k) = (k - 1)!$$

$$p_c(n) = \frac{p(n+1)}{v(n)}$$

Ec. 2 . 36

(C) LEY WEIBULL.

$$i(t) = \beta \lambda_0 (\lambda_0 t)^{(\beta-1)} e^{-(\lambda_0 t)^\beta}, t \geq 0, \beta, \lambda_0 \in R_0^+$$

$$v(t) = e^{-(\lambda_0 t)^\beta}$$

$$\lambda(t) = \beta \lambda_0 (\lambda_0 t)^{(\beta-1)}$$

$$\Lambda(t) = (\lambda_0 t)^\beta$$

Ec. 2 . 37

LEY LOG-NORMAL O LEY DE GALTON.

$$i(t) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \mu \in R, \quad \sigma \in R_0^+, \quad t \geq 0.$$

Ec. 2 . 38

$$v(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_t^\infty \frac{1}{u} e^{-\frac{(\ln u - \mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

2.6 FORMA DE LA FUNCION DE LA TASA DE FALLA

La forma típica de la curva que describe el comportamiento de la tasa de falla $\lambda(t)$, a través del tiempo, es la que se ilustra en la Fig.2.7; por razones de similitud se le conoce como la curva del "lavabo" o de "la tina de baño" y generalmente se le descompone o divide para su análisis en tres zonas o regiones diferentes.

A la zona I se le conoce como zona de mortalidad infantil (Debugging) y es la región en la cual se tiene una tasa de falla variable y decreciente en función del tiempo o edad y está relacionada normalmente con errores de manufactura o diseño inadecuado de los componentes.

La zona II se conoce como periodo de vida útil o fase de operación normal; en esta región la tasa de falla tiende a ser constante.

Finalmente, la zona III se conoce como fase de fatiga o desgaste y se caracteriza por una tasa de falla que se incrementa rápidamente con el tiempo.

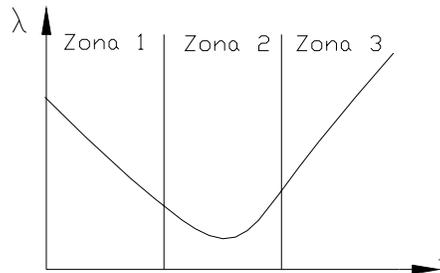


Fig.2. 7 Forma típica de la curva de la tasa de falla en función del tiempo

La forma y la duración de cada una de las zonas varía considerablemente, dependiendo del tipo y características específicas del componente o sistema que se está analizando. En muchos casos, y afortunadamente este es el caso de los sistemas de potencia y sus componentes, se puede lograr que el sistema permanezca dentro de la zona de vida útil por un periodo muy grande de tiempo, efectuando sobre él un mantenimiento preventivo constante y cuidadoso. De esta forma la zona II se puede modificar como se muestra en la Fig.2.8.

Este hecho es de extrema importancia, ya que nos permitirá utilizar una función de distribución exponencial, la cual juega un papel fundamental en el desarrollo de este trabajo, y la cual solamente es válida para una λ constante, como la que se presenta en la zona II de la curva de daño.

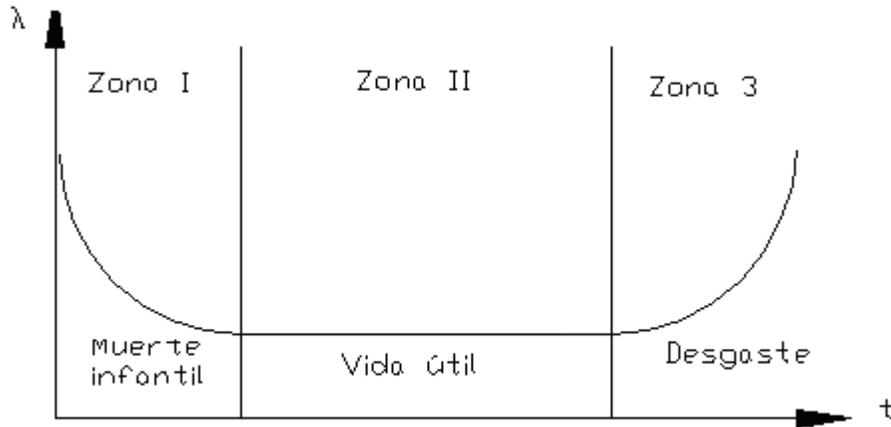


Fig.2. 8 Curva de daño modificada para sistemas reparables

2.7 CONCLUSIONES

Actualmente, para el caso de sistemas electrónicos de muy alta precisión, la función de distribución que más se utiliza es la de Weibull, sin embargo para sistemas reparables, como es el caso de los sistemas de distribución es mejor seguir trabajando con la distribución exponencial ya que esto permite analizar con un menor grado de complicación una mayor diversidad de estados de operación.³

2.8 BIBLIOGRAFÍA

- ¹ "Mathematical Models for the Study of the Reliability of Systems". A. Kaufmann, D. Grouchko, R. Cruon, Academic Press, 1977.
- ² "Probability, Random Variables and Stochastic Processes. Athanasios Papoulis". McGraw-Hill.1965.
- ³ "Reliability Analysis Using Weibull Lifetime Data and Expert Opinion". N.D. Singpurwalla, M.S. Song, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 37, No. 3, 1988, pp. 340-347.

CAPÍTULO 3

FUNCIONES DE ESTRUCTURA, REDES DE CONFIABILIDAD Y ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD DE SISTEMAS

En el capítulo anterior analizamos a un equipo como una " caja negra " a la cual se podía observar únicamente si estaba o no funcionando, y describimos los métodos probabilísticos que permiten estudiar el tiempo de vida de esa caja negra. Ahora penetraremos a la caja; la mayoría de los equipos son, de hecho, mas complejos, y el estudio detallado de su confiabilidad supone que debe ser considerados como un " sistema " formado de elementos simples.^{1 2}

Para ello procederemos en dos etapas:

Primeramente definiremos como se puede describir la estructura de un sistema, esto es, la manera en que el estado de un sistema depende del estado de sus elementos.

Después veremos como representar y estudiar el tiempo de vida de un sistema por una parte, y sus elementos por otra ; también veremos como pasar de los tiempos de vida de los elementos a la determinación del tiempo de vida de un sistema como una función de su estructura.

3.1 HIPÓTESIS PARA LA ESTRUCTURA Y FUNCIONAMIENTO DE SISTEMAS

La teoría que estableceremos a continuación será aplicable a sistemas o a equipo complejo (de hecho podemos hablar de un sistema y el equipo que lo constituye, o de un equipo complejo y sus componentes) que satisfagan las siguientes hipótesis:

(A) En cualquier instante dado, el equipo puede estar únicamente en uno de los siguientes estados: está funcionando, o está dañado.

(B) El equipo puede descomponerse en r componentes, numeradas como $1, \dots, r$, de tal manera que cada componente está, en un instante dado, ya sea funcionando o dañado; y el estado de dicho equipo (bueno o fallado) depende únicamente del estado de sus componentes.

3.2 FUNCIÓN DE ESTRUCTURA

Considérese un sistema S compuesto de r componentes

$$e_i \quad i= 1,2,\dots,r$$

Primeramente asociemos con cada componente e_i una variable de estado x_i tal que

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si el componente } e_i \text{ está en buen estado.} \\ 0 & \text{si el componente } e_i \text{ está dañado.} \end{cases} \quad \text{Ec. 3. 1}$$

Si $e=\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ es el conjunto de componentes, la r -upla (x_1, x_2, \dots, x_r) se llamará el

"estado del conjunto de componentes"; éste también será denotado por (\mathbf{x}) :

$$(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_r).$$

Sabemos que existen 2^r r-uplas como la anterior; y por lo tanto existen 2^r estados diferentes del conjunto de componentes.

Sea (\mathbf{y}) la variable de estado del sistema tal que

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si el sistema está en buen estado} \\ 0 & \text{si el sistema está dañado.} \end{cases} \quad \text{Ec. 3. 2}$$

Evidentemente, (\mathbf{y}) depende de (\mathbf{x}) , y las hipótesis de la sección 3.1 implican que existe una función $(\mathbf{x}) \rightarrow y$ la cual denotaremos por

$$y = \varphi(\mathbf{x}) \quad \text{o} \quad y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_r) \quad \text{Ec. 3. 3}$$

Esta función es una "función de estructura" del sistema. Una función de estructura que depende de r variables se llamará de "orden r "

Para componentes en serie tendremos que:

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_r) \\ &= x_1 \bullet x_2 \dots \bullet x_r \\ &= \prod_{i=1}^r x_i \end{aligned} \quad \text{Ec. 3. 4}$$

La función de estructura anterior corresponde a un sistema que funciona solamente bajo la condición de que todas sus componentes estén en buen estado. Esta estructura se llama "estructura serie".

Para componentes en paralelo se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_r) \\ &= 1 - (1 - x_1) \bullet (1 - x_2) \bullet \dots \bullet (1 - x_r) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^r (1 - x_i) \end{aligned} \quad \text{Ec. 3. 5}$$

La función de estructura anterior corresponde a un sistema que funciona bajo la condición de que al menos una de sus componentes esté en buen estado.

La estructura anterior se llama "estructura paralelo"; también se dice que los componentes están en paralelo. El uso de dos o más componentes en paralelo cuando es suficiente con uno introduce el concepto de "redundancia".

3.2.1 COMPARACIÓN DE r-UPLAS

Supóngase que los elementos E_i del conjunto $E = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ son ordenados; entonces usaremos la notación $E_i \leq E_j$ para indicar la existencia de esta relación ordenada entre los elementos del par (E_i, E_j) .

Ahora consideremos dos r-uplas

$$(a) = (a_1, a_2, \dots, a_r) \quad y \quad (b) = (b_1, b_2, \dots, b_r). \quad \text{Ec. 3. 6}$$

Entonces diremos que:

(1) (a) "iguala" a (b), denotado por $(a) = (b)$, si y sólo si

$$\forall i, \quad i = 1, 2, \dots, r : a_i = b_i. \quad \text{Ec. 3. 7}$$

(2) (a) excede o "domina" (b), denotado por $(a) \geq (b)$, si y sólo si

$$\forall i, \quad i = 1, 2, \dots, r : a_i \geq b_i \quad \text{Ec. 3. 8}$$

(3) (a) es menor que o "es dominado por" (b), denotado por $(a) \leq (b)$, si y sólo si

$$\forall i, \quad i = 1, 2, \dots, r : a_i \leq b_i. \quad \text{Ec. 3. 9}$$

(4) (a) domina estrictamente (b), denotado por $(a) > (b)$, si y sólo si

$$a_i \geq b_i \quad y \quad \exists i : a_i > b_i. \quad \text{Ec. 3. 10}$$

(5) (a) es estrictamente dominada por (b), denotado por $(a) < (b)$, si y sólo si

$$\forall i : a_i \leq b_i \quad y \quad \exists i : a_i < b_i. \quad \text{Ec. 3. 11}$$

3.2.2 REJILLA BOOLEANA DE ESTADOS DEL CONJUNTO DE COMPONENTES

La relación de orden definida arriba introduce en el conjunto de las 2^r r-uplas, esto es, en el conjunto de estados del conjunto de componentes una rejilla Booleana de la estructura. La Fig.3.1 da una representación (diagrama de Hasse) de la rejilla correspondiente a un sistema de tres componentes. Una 3-upla (a) es dominada por (b) si y sólo si se puede ascender de (a) a (b) a través de las conexiones del diagrama. Por ejemplo, (001) es dominado por (011), (101) y (111), pero no por (000), (010) ó (110).

Adicionalmente, podemos, como se hizo en dicha figura, usar la misma representación para indicar los valores que toma la función de estructura, esto es, el estado del sistema para cada uno de los estados del conjunto de componentes. Para ello es suficiente con utilizar un diferente símbolo dependiendo de si el sistema funciona ($\varphi = 1$) o está en falla ($\varphi = 0$). Los estados en los cuales el sistema funciona se representan con pequeños círculos; y aquellos en los que no funciona se representan con cruces.

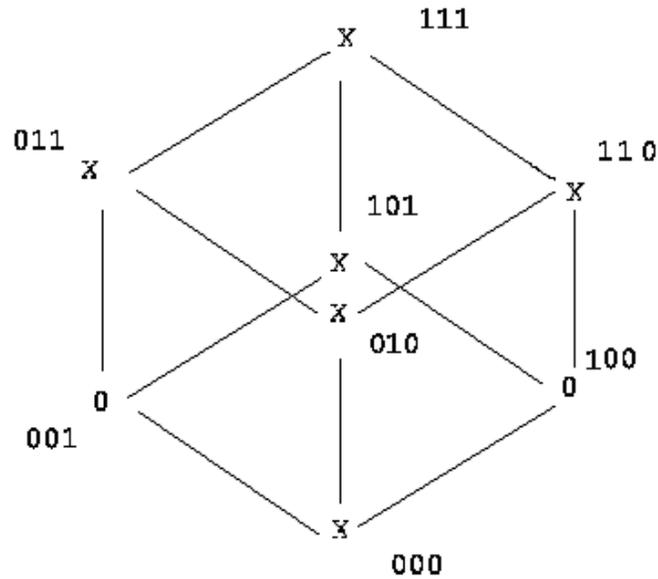


Fig.3. 1 Diagrama de Hasse de un sistema de tres componentes

3.2.3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN SISTEMA

En algunos casos, y con miras a estudiar la confiabilidad de sistemas, es conveniente representar sus componentes por medio de gráficas no orientadas, como se muestra en la Fig.3.2.a. para componentes en serie; en la Fig.3.2.b. para componentes en paralelo y en la Fig.3.2.c. para una configuración serie-paralelo.

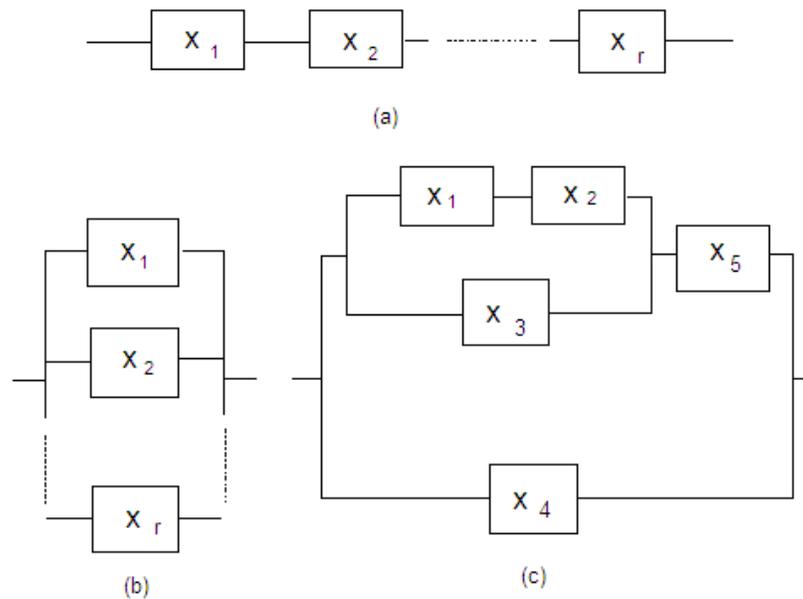


Fig.3. 2 Representación gráfica de un sistema

3.3 ESLABONES Y CORTES

3.3.1 ESLABONES DE UNA ESTRUCTURA

Consideremos una estructura definida por la función

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_r) \quad \text{Ec. 3. 12}$$

cuyos componentes son

$$e = \{e_1, e_2, \dots, e_r\} \quad \text{Ec. 3. 13}$$

Hagamos que $a = \{e_i, i \in I\} \subset e$ sea un subconjunto de componentes definidas por el subconjunto $I \subset \{1, 2, \dots, r\}$ de índices.

Si

$$\left. \begin{array}{l} x_i = 1, i \in I \\ x_i = 0, i \notin I \end{array} \right\} \Rightarrow y = 1, \quad \text{Ec. 3. 14}$$

se dice que a es un eslabón. Entonces un eslabón es un subconjunto de componentes tal que si todas las componentes de ese subconjunto están en buen estado, y si las demás componentes han fallado, entonces el sistema está en buen estado.

3.3.2 CORTES DE UNA ESTRUCTURA

Nuevamente consideremos la estructura definida anteriormente y hagamos que $b = \{e_j, j \in J\} \subset e$ sea el subconjunto de componentes cuyos índices pertenecen a J . Si

$$\left. \begin{array}{l} x_j = 0, j \in J \\ x_j = 1, j \notin J \end{array} \right\} \Rightarrow y = 0, \quad \text{Ec. 3. 15}$$

entonces se dice que b es un corte; si las componentes de b han fallado, y si las otras componentes están en buen estado, entonces el sistema no funciona.

3.3.3 ESLABONES Y CORTES MÍNIMOS

Si un eslabón

$$a = \{e_{a1}, e_{a2}, \dots, e_{al}\} \quad \text{Ec. 3. 16}$$

es tal que no existe un subconjunto $a' \subset\subset a$ que sea también un eslabón, decimos que a es un "eslabón mínimo".

Si un corte $b = \{e_j, j \in J\}$ tal que no existe un subconjunto $b' \subset\subset b$ que sea también un corte, entonces decimos que b es un "corte mínimo".

De las definiciones de eslabón y de corte se deducen inmediatamente las siguientes propiedades:

a es un eslabón $\leftrightarrow \bar{a}$ no es un corte;

b es un corte $\leftrightarrow \bar{b}$ no es un eslabón.

Ec. 3. 17

3.4 PROPIEDADES MATEMÁTICAS DE ESLABONES Y CORTES; DUALIDAD

Teorema 3.4.I. Cualquier r -upla (x_1, x_2, \dots, x_r) con $x_i = 0$ ó 1 corresponde necesariamente a un eslabón o un corte.

Teorema 3.4.II. Hagamos que A_k sea el número de eslabones que tienen k componentes y B_k el número de cortes que tienen k componentes. Entonces

$$A_k + B_{r-k} = \binom{r}{k}$$

Ec. 3. 18

donde $\binom{r}{k}$ es el número de combinaciones de r objetos tomados k a la vez.

3.4.1 LONGITUD DE UN SISTEMA

La longitud de un sistema S es el entero más pequeño λ tal que $A_\lambda > 0$. En otras palabras, es el número de componentes en el eslabón (mínimo) que tiene la "cardinalidad" más pequeña. Esta longitud se denota por $\lambda(S)$.

3.4.2 ANCHO DE UN SISTEMA

El ancho de un sistema S es el entero más pequeño μ tal que $B_\mu > 0$. En otras palabras, es el número de componentes del corte (mínimo) que tiene la mínima "cardinalidad". Este ancho se denota por $\mu(S)$.

Teorema 3.4.III. La longitud y el ancho de un mismo sistema S satisfacen la siguiente desigualdad

$$\lambda(S) + \mu(S) \leq r + 1$$

Ec. 3. 19

donde r es el número de componentes del sistema.

3.4.3 SISTEMAS DEGENERADOS

Se dice que un sistema es degenerado si y sólo si

$$\varphi(x) \equiv 1 \quad \text{ó} \quad \varphi(x) \equiv 0$$

Ec. 3. 20

En palabras; cualquiera que sea el estado de sus componentes, el sistema siempre está funcionando o siempre está en falla. O desde otro punto de vista, que siempre se tendría ya

sea longitud cero o ancho cero, si extendemos a valores de cero las nociones de longitud y ancho.

3.4.4 DUALIDAD

Hagamos que S sea un sistema cuya función de estructura es $\varphi(x)$; el sistema \bar{S} cuya función de estructura es

$$\bar{\varphi}(x) = 1 - \varphi(1 - x) \quad \text{Ec. 3. 21}$$

donde $(1 - x) = (1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_r)$, se llama "dual de S ".

Algunas de las propiedades de la dualidad son las siguientes:

$$(A) \overline{[\bar{\varphi}(x)]} = \varphi(x), \overline{(\bar{S})} = S. \quad \text{Ec. 3. 22}$$

(B) Un eslabón de S es un corte de \bar{S} y viceversa.

(C) Un corte de S es un eslabón de \bar{S} y viceversa.

(D) Un eslabón mínimo de S es un corte mínimo de \bar{S} y viceversa.

(E) Un corte mínimo de S es un eslabón mínimo de \bar{S} y viceversa.

3.5 TEORÍA DE GRÁFICAS

3.5.1 GRÁFICAS

Considérese un conjunto finito S y el producto $S \times S$. Hagamos que U sea un subconjunto del producto anterior; entonces el par ordenado

$$G = (S, U) \quad \text{Ec. 3. 23}$$

se llama una gráfica. Los elementos de S se llaman "vértices de la gráfica"; los elementos de U , los cuales son pares de vértices, se llaman "arcos de la gráfica".

La Fig.3.3.a, nos da una representación de la gráfica. Los vértices se representan por puntos, y los arcos por líneas continuas dirigidas que unen los vértices.

El conjunto de vértices es

$$S = \{A, B, C, D\} \quad \text{Ec. 3. 24}$$

y el conjunto de arcos es

$$U = \{(AB), (AD), (BB), (BC), (BD), (CC), (DA), (DB), (DC), (DD)\} \quad \text{Ec. 3. 25}$$

Dado un arco tal como (A, B) , a A se la llama "punto inicial del arco" y B es el "punto terminal del arco". Un arco tal como (B, B) se llama una "automalla". Un vértice B se llama sucesor de A , si (A, B) es un arco; por ejemplo en la gráfica de la Fig.3.3.a, C no es un sucesor de A .

Una gráfica puede también describirse por su matriz Booleana, esto es por una matriz cuadrada cuyos renglones y columnas corresponden a los vértices de la gráfica y cuyos elementos tienen valores 1 ó 0 dependiendo si el par que corresponde a los vértices pertenece o no pertenece a U (ver Fig.3.3.b).

Con la finalidad de almacenar una gráfica en la memoria de una computadora, normalmente se utiliza un "diccionario de sucesores" y/o un "diccionario de precedentes". Como su nombre lo indica, el diccionario de sucesores, da para cada vértice de la gráfica su lista de sucesores, los cuales describen la matriz Booleana renglón por renglón (Fig.3.3.c). El diccionario de precedentes, por otro lado, da para cada vértice X la lista de vértices que son puntos iniciales de un arco que tienen al vértice X como punto terminal; y corresponde a las columnas de la matriz Booleana.

3.5.2 GRAFICAS r-FOLD

En ciertas aplicaciones es conveniente permitir que existan entre ciertos vértices, no solamente un arco sino dos o más. Este concepto no es una gráfica en el sentido estricto de la definición que se dio anteriormente; llamaremos a ésta una "gráfica r-fold", donde r es el número máximo de arcos que tienen el mismo punto inicial y el mismo punto terminal. Tales arcos deberán de distinguirse, por ejemplo por un índice, como se ilustra en la Fig.3.4.

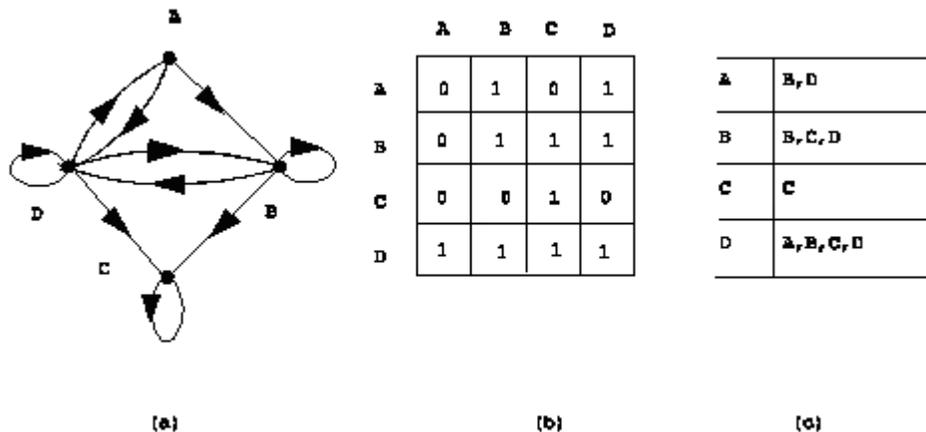


Fig.3. 3 (a) Representación gráfica; (b) Matriz Booleana; (c) Diccionario de sucesores de sucesores

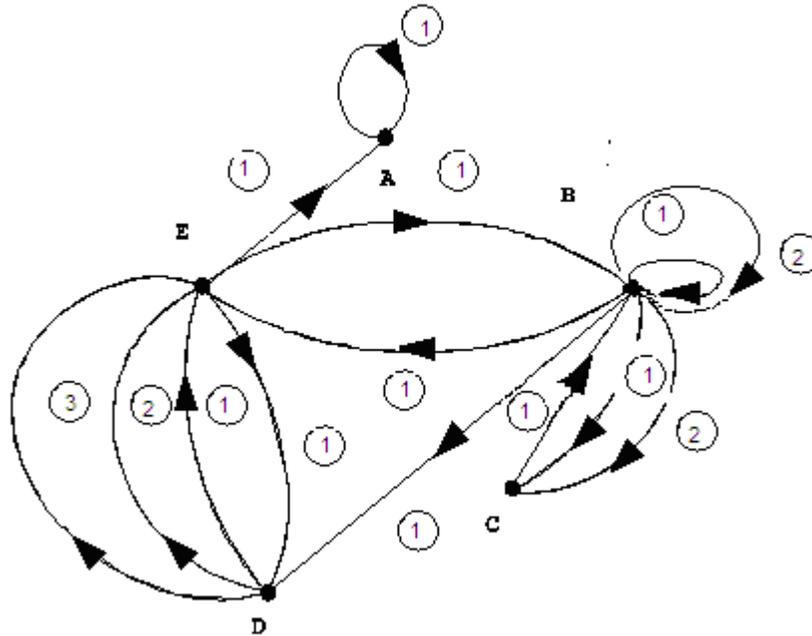


Fig.3. 4 Representación de una gráfica *r*-fold

De una manera más precisa, una gráfica *r*-fold se puede definir como la gráfica formada por:

- (a) un conjunto de vértices **S** y
- (b) un conjunto de arcos **U** un mapeo Ω de **U** en $S \times S$ que asocia a cada arco un punto inicial y un punto terminal.

La notación que aquí utilizaremos para designar los arcos, prescindirá de mencionar explícitamente el mapeo: por ejemplo, $(DE)_2$ designa un arco con punto inicial **D** y punto terminal **E**. Entonces la Fig.3.4. representa una gráfica 3-fold

$$G = (S, U) \tag{Ec. 3. 26}$$

$$S = \{A, B, C, D, E\} \tag{Ec. 3. 27}$$

$$U = \{(AA)_1, (BB)_1, (BB)_2, (BC)_1, (BC)_2, (BD)_1, (BE)_1, (CB)_1, (DE)_1, (DE)_2, (DE)_3, (EA)_1, (EB)_1, (ED)_1\} \tag{Ec. 3. 28}$$

En lo sucesivo, utilizaremos el término gráfica para designar las gráficas *r*-fold sin importar el valor de *r*, esto es, incluyendo el valor de 1. También, los conceptos que se definirán a continuación son aplicables a la definición de gráfica que se dio anteriormente, la cuales pueden ser consideradas como gráficas 1-fold.

Dada una gráfica $G = (S, U)$, una gráfica parcial de G es una gráfica $G_p = (S', U')$ tal que $U' \in U$. Entonces se puede obtener una gráfica parcial de G suprimiendo algunos arcos.

Una "trayectoria" es una secuencia de arcos

$$\mu = (u_1, u_2, \dots, u_l) \text{ con } u_i \in U, i = 1, \dots, l, \quad \text{Ec. 3. 29}$$

tal que el punto terminal de cada arco u_i ($i = 1, 2, \dots, l - 1$) coincide con el punto inicial del siguiente arco u_{i+1} . Una trayectoria tal que el punto terminal del arco u_l coincide con el punto inicial del arco u_1 se llama "circuito".

La longitud de una trayectoria es el número de arcos que ella contiene.

Se dice que una trayectoria es elemental, si no pasa dos veces por el mismo vértice.

Dados dos vértices arbitrarios de una gráfica G , si existe una trayectoria entre dichos vértices, entonces existe una trayectoria elemental entre ellos.

Considérese un subconjunto de vértices $S_l \subset S$. Un corte de la gráfica G relativo al subconjunto S_l será el conjunto $\bar{\omega}(S_l)$ de arcos cuyos puntos finales no pertenecen a S_l y cuyos puntos terminales si le pertenecen.

Finalmente, un árbol con raíz en A , es una gráfica sin circuitos tal que:

- i) A es un vértice que no es el punto terminal de ningún arco, y
- ii) Cada vértice diferente de A es el punto terminal de un arco.

Nótese que un árbol es una gráfica 1-fold.

Los vértices de un árbol pueden ser divididos en niveles: Si A representa el nivel 0, cualquier otro vértice tendrá un nivel igual a la longitud de la (única) trayectoria que va desde A hasta ese vértice (Ver Fig.3.5).

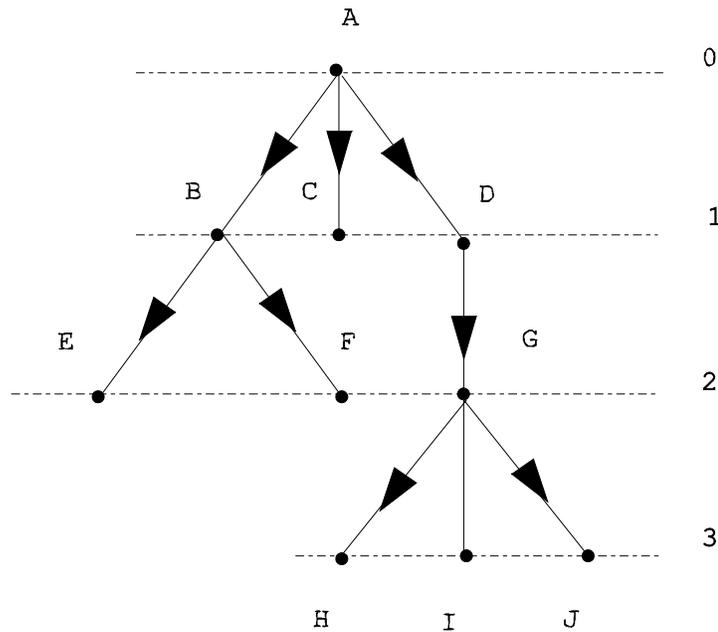


Fig.3. 5 Diagrama de árbol

3.6 REDES DE CONFIABILIDAD

Una red de confiabilidad \mathfrak{R} definida en un conjunto $e = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ de componentes consiste de:

(1) Una gráfica r-fold $g = (\mathbf{S}, \mathbf{U})$ sin automallas, en la cual se distinguen dos vértices $O \in S$ y $Z \in S$ y se llaman, respectivamente, origen y fin

(2) Un mapeo $\Delta: U \xrightarrow{\Delta} e$ tal que

$$\Omega(u_j) = (S_i, S_k), \quad \Omega(u_j') = (S_i, S_k) \Rightarrow \Delta(u_j) \neq \Delta(u_j'), \quad \text{Ec. 3. 30}$$

donde Ω es el mapeo que relaciona a cada arco con su par de extremos.

El mapeo Δ correlaciona un componente con cada arco de la gráfica. Pueden corresponder varios arcos al mismo componente; también puede suceder que no exista arco alguno que corresponda a un componente dado. La Fig.3.6. da un ejemplo de una red de confiabilidad donde

$$e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} \quad \text{Ec. 3. 31}$$

$$S = \{ O, Z, A, B, C \} \quad \text{Ec. 3. 32}$$

$$U = \{ (O, A)_2, (O, A)_3, (O, B), (A, B), (A, Z), (B, C), (B, Z), (C, B), (Z, B) \}. \quad \text{Ec. 3. 33}$$

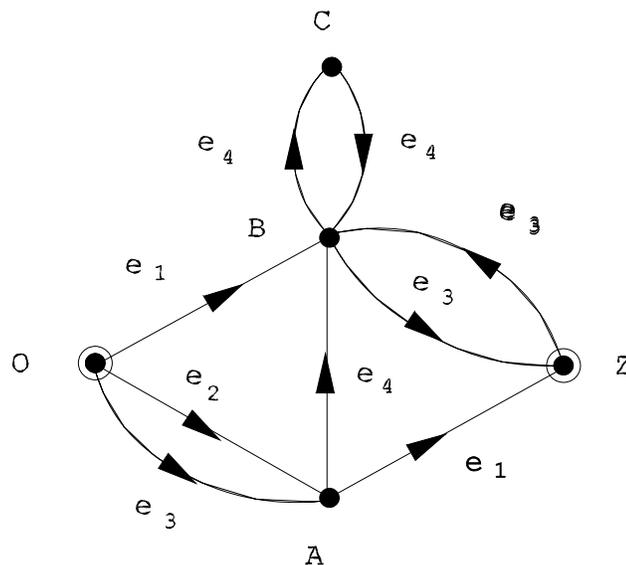


Fig. 3. 6 Ejemplo de una red de confiabilidad

El mapeo Δ se indica por las e_i agregadas a los arcos.

Para simplificar las figuras, si dos arcos simétricos (X_i, X_j) y (X_j, X_i) se refieren a la misma componente, será conveniente reemplazar los dos arcos simétricos por un solo arco con dos flechas opuestas (Fig.3.7).

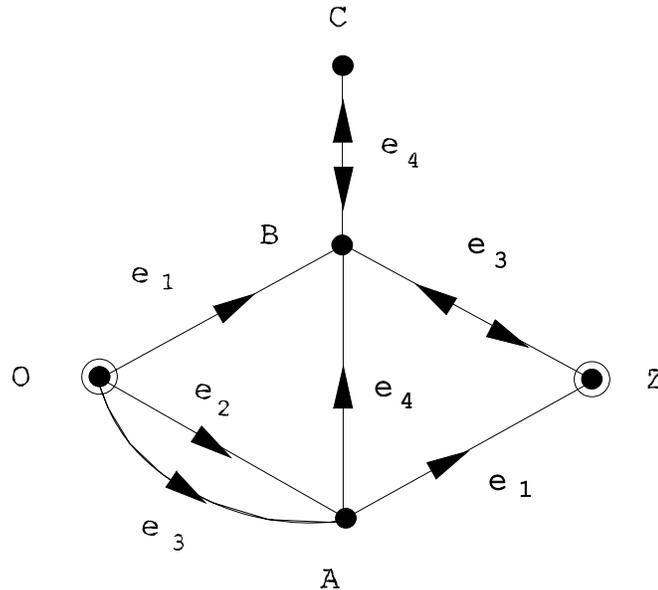


Fig.3. 7 Red simplificada

3.6.1 ESLABONES Y CORTES DE UNA RED DE CONFIABILIDAD

A cualquier subconjunto $e_l \subset e$ de componentes se puede relacionar la gráfica parcial $G_p(e_l)$ de la gráfica G , obtenida al incluir sólo los arcos de G a los cuales corresponde una componente que pertenece a e_l :

$$G_p(e_l) = (S, U_p(e_l)) \quad \text{Ec.3. 34}$$

con

$$u_p(e_l) = \{u \in U \mid \Delta(u) \in e_l\} \quad \text{Ec.3. 35}$$

Un eslabón de una red \mathfrak{R} se referirá a un subconjunto $a \in e$ de componentes tal que existe en la gráfica $G_p(a)$ una trayectoria desde O hasta Z.

Un corte de una red de confiabilidad \mathfrak{R} se referirá a un subconjunto $b \subset e$ de componentes tal que el subconjunto de arcos $U_p(b)$ como se definió anteriormente, contiene un corte de la gráfica G relativa a un subconjunto de vértices que incluyan a O pero excluyan a Z.

Es importante hacer notar que los conceptos de corte en una gráfica y de corte en una red de confiabilidad no son idénticos.

Un eslabón a es mínimo si ningún subconjunto $a' \subset\subset a$ es un eslabón de la red. Un corte b

es mínimo si ningún subconjunto $b' \subset b$ es un corte de la red.

3.6.2 REDES DEGENERADAS

Se dice que una red es degenerada si:

- (1) No posee ningún eslabón (el sistema nunca funciona), o
- (2) No posee ningún corte (el sistema funciona cualquiera que sea el estado de sus componentes); entonces sus extremos O y Z son idénticos.

3.6.3 PROPIEDAD FUNDAMENTAL Y TEOREMAS DE LAS REDES DE CONFIABILIDAD

Adicionar uno o más arcos a una gráfica no puede suprimir una trayectoria existente entre el origen O y el fin Z . Entonces, la reparación de un componente dañada no podría ocasionar la falla de un sistema representado por una red de confiabilidad (esta hipótesis es razonable pero no absoluta para sistemas reales).

Esta propiedad puede ser escrita de la siguiente forma:

$$a' \subset a, (a' \text{ es un eslabón}) \Rightarrow (a \text{ es un eslabón}). \quad \text{Ec. 3. 36}$$

Además se tiene la misma propiedad para cortes:

$$b' \subset b, (b' \text{ es un corte}) \Rightarrow (b \text{ es un corte}). \quad \text{Ec. 3. 37}$$

Lo anterior se puede expresar de la siguiente manera:

Teorema 3.6.I. En una red de confiabilidad, un subconjunto de componentes que incluye un eslabón es también un eslabón; un subconjunto de componentes que incluye un corte es también un corte.

En términos más concretos, podemos decir que los sistemas definidos por redes de confiabilidad son de tal naturaleza que la reparación de un componente dañado no puede ocasionar la falla de un sistema, y que la falla de un componente no puede ocasionar el funcionamiento de un sistema dañado.

Teorema 3.6.II. Un corte contiene al menos un componente de cada eslabón, y un eslabón contiene al menos un componente de cada corte. En otras palabras, cada eslabón y cada corte tienen al menos un componente en común.

Teorema 3.6.III. Cada eslabón incluye al menos un eslabón mínimo, y cada corte incluye al menos un corte mínimo.

Teorema 3.6.IV. En una red no degenerada, un conjunto b de componentes es un corte si y sólo si contiene un componente de cada eslabón mínimo.

Teorema 3.6.V. El número r de componentes de una red es al menos igual al producto de la longitud por el ancho de la red; en símbolos:

$$r \geq \lambda \cdot \mu \quad \text{Ec. 3. 38}$$

3.6.4 DUALIDAD EN REDES DE CONFIABILIDAD

Una red \mathfrak{R} es dual de otra red $\bar{\mathfrak{R}}$ si tienen la siguiente propiedad:

Cada eslabón de la primera es un corte de la segunda y viceversa.

La dualidad en redes de confiabilidad establece las siguientes propiedades:

- (A) $\bar{\bar{\mathfrak{R}}} = \mathfrak{R}$
- (B) Un eslabón de \mathfrak{R} es un corte de $\bar{\mathfrak{R}}$ y viceversa.
- (C) Un corte de \mathfrak{R} es un eslabón de $\bar{\mathfrak{R}}$ y viceversa.

Las propiedades (A) y (B) anteriores son también válidas para el caso de eslabones y cortes mínimos.

3.7 EQUIVALENCIA ENTRE FUNCIONES DE ESTRUCTURA Y REDES DE CONFIABILIDAD

3.7.1 FUNCIONES DE ESTRUCTURA EQUIVALENTES

A cualquier sistema que satisfaga las condiciones establecidas en el inciso 3.1 se le puede asociar una función de estructura única, en el sentido de que para estado del conjunto de componentes, se puede definir un valor único. Esta función de estructura puede sin embargo expresarse por medio de varias fórmulas algebraicas.

Consideremos por ejemplo lo siguiente:

- (1) Tres conjuntos disjuntos de componentes e, e_1, e_2 , los cuales contienen respectivamente r, r_1 y r_2 componentes; designemos por

$x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_{r_1})$, y $v = (v_1, v_2, \dots, v_{r_2})$ a los estados de esos conjuntos de componentes;

- (2) Dos funciones de estructura $\varphi_1(x, u)$ y $\varphi_2(x, v)$, definidas respectivamente en los conjuntos de componentes $e \cup e_1$ y $e \cup e_2$.

Se dice que tales funciones de estructura son "equivalentes" si

$$\forall x \in \{0, 1\}^r, u \in \{0, 1\}^{r_1}, v \in \{0, 1\}^{r_2} : \varphi_1(x, u) = \varphi_2(x, v) \quad \text{Ec. 3. 39}$$

De la definición anterior se deduce inmediatamente que, cualquiera que sea el estado \mathbf{x} del conjunto de componentes \mathbf{e} , $\varphi_1(x,u)$ tiene un valor independiente de u , y $\varphi_2(x,v)$ tiene un valor independiente de v . Los componentes de e_1 y e_2 se llaman "componentes inútiles"; su estado, bueno o malo, no tiene influencia en el funcionamiento de los sistemas representados por las funciones de estructura equivalentes $\varphi_1(x,u)$ y $\varphi_2(x,v)$.

Pudiera parecer no muy realista el considerar sistemas que tengan componentes inútiles, pero de hecho esto es necesario en ciertos casos en los que los sistemas tienen varias y diferentes funciones o en el caso en que tienen varios modos de uso. Es necesario llevar a cabo un análisis de confiabilidad separado para cada uno de los diferentes usos, y ciertas componentes pueden ser inútiles para algunos de ellos.

La posible existencia de componentes inútiles exige tener ciertas precauciones para la comparación de funciones de estructura. Con el fin de evitar dichas dificultades, se puede utilizar el siguiente teorema.

Teorema 3.7.1. Dos funciones de estructura, no necesariamente definidas sobre conjuntos de componentes idénticos, son equivalentes si después de suprimir cualquier componente inútil, cada eslabón de una es un eslabón de la otra (o si cualquier corte de una es un corte de la otra).

3.7.2 REDES DE CONFIABILIDAD EQUIVALENTES

La definición anterior para equivalencia entre funciones de estructura se puede extender a redes de confiabilidad. Esto es, que dos redes de confiabilidad \mathfrak{R}_1 y \mathfrak{R}_2 son "equivalentes", y escribimos

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 \quad \text{Ec. 3. 40}$$

si, después de suprimir las posibles componentes inútiles, cualquier eslabón de la primera es un eslabón de la segunda y viceversa(respectivamente, cualquier corte de la primera es un corte de la segunda.

Definición. Un componente X_i de una red de confiabilidad es inútil si cada eslabón que lo contiene sigue siendo un eslabón después de suprimir dicho componente (respectivamente, si cada corte que contiene al componente sigue siendo corte después de suprimirla).

3.7.3 EQUIVALENCIA ENTRE UNA FUNCIÓN DE ESTRUCTURA Y UNA RED DE CONFIABILIDAD

Una red de confiabilidad \mathfrak{R} y una función de estructura $\varphi(x)$ se dice que son equivalentes, y se simboliza por $\mathfrak{R} \cong \varphi$, si después de suprimir todas las componentes inútiles, cada eslabón de \mathfrak{R} es un eslabón de $\varphi(x)$ y viceversa (cada corte de \mathfrak{R} es un corte de $\varphi(x)$).

Dos funciones de estructura equivalentes (o dos redes de confiabilidad o una red de confiabilidad y una función de estructura) corresponden al mismo sistema, y pueden ser reemplazadas indiferentemente una por otra.

3.8 ESTRUCTURAS MONÓTONAS O COHERENTES

Una función de estructura $\varphi(x)$ es monótona si posee la siguiente propiedad:

$$(x^{(2)}) \geq (x^{(1)}) \Rightarrow \varphi(x^{(2)}) \geq \varphi(x^{(1)}) \quad \text{Ec. 3. 41}$$

También se usa el término "coherente" para indicar que el incremento de las estructuras monótonas corresponde a sistemas cuyo diseño es normal es decir tiene coherencia.

Teorema 3.8.I. Una función de estructura es monótona si y sólo si cada conjunto de componentes que incluye un eslabón es también un eslabón.

Teorema 3.8.II. Una función de estructura equivalente a una red de confiabilidad es monótona.

Teorema 3.8.III. Una componente de una red de confiabilidad o de una función de estructura monótona es inútil si y sólo si no pertenece a algún eslabón mínimo (o respectivamente, a algún corte mínimo).

Teorema 3.8.IV. Sean $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ funciones de estructura monótonas y \mathfrak{R}_1 y \mathfrak{R}_2 redes de confiabilidad. Existe una equivalencia entre estas cuatro entidades si tienen el mismo conjunto de eslabones mínimos(o respectivamente, el mismo conjunto de cortes mínimos).

Definición. El orden de una red de confiabilidad o de una función de estructura es el número de sus componentes no inútiles. Una estructura degenerada es de orden 0.

Teorema 3.8.V. Dada una función de estructura $\varphi(x)$ que posee n componentes, hagamos que

A_k sea el número de eslabones que tienen k componentes;

B_k sea el número de cortes que tienen k componentes;

A'_k sea el número de eslabones mínimos que tienen k componentes;

\mathcal{B}_k^i sea el número definido de la siguiente manera:

Si

$$b_1^{n-k}, b_2^{n-k}, \dots, b_{B_{n-k}}^{n-k} \quad \text{Ec. 3. 42}$$

son los cortes que tienen $n-k$ componentes. Para i arbitrarias ($1 \leq i \leq B_{n-k}$), el subconjunto complementario b_i^{n-k} entonces no es un eslabón; tiene k componentes. Considérense los $n-k$ conjuntos que se obtienen al adicionar a b_i^{n-k} un componente que todavía no aparece en él; \mathcal{B}_k^i es el número de esos conjuntos que son eslabones no mínimos.

Una condición necesaria y suficiente para que la estructura $\varphi(x)$ sea monótona es que se tenga, para todos los valores de k tales que $0 \leq k \leq n$ lo siguiente

$$(n-k) A_k + \sum_{i=1}^{B_{n-k}} \mathcal{B}_k^i = (k+1)(A_{k+1} - A'_{k+1}) \quad \text{Ec. 3. 43}$$

o la igualdad equivalente:

$$kB_k = (n-k+1)(A'_{n-k+1} + B_{k-1}) + \sum_{i=1}^{B_k} \mathcal{B}_{n-k}^i \quad \text{Ec. 3. 44}$$

La ecuación Ec.3.43 expresa el hecho de que al adicionar un componente arbitrario a los eslabones que tienen k componentes y a los complementarios de ciertos cortes que tienen $n-k$ componentes, se obtienen todos los eslabones no mínimos que tienen $k+1$ componentes.

La Ec.3.44 establece que al suprimir un componente arbitrario de los cortes que tienen k componentes, se obtienen todos los cortes que tienen $k-1$ componentes, todos los eslabones mínimos que tienen $n-k+1$ componentes, y los eslabones no mínimos que tienen $n-k+1$ componentes obtenidos por la Ec.3.42.

Teorema 3.8.VI. Una estructura monótona satisface la siguiente desigualdad

$$(k+1) A_{k+1} \geq (n-k) A_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{Ec. 3. 45}$$

y las desigualdades equivalentes

$$\frac{A_{k+1}}{\binom{n}{k+1}} \geq \frac{A_k}{\binom{n}{k}} \quad \text{Ec. 3. 46}$$

$$k B_k \geq (n-k+1) B_{k-1} \quad \text{Ec. 3. 47}$$

Teorema 3.8.VII. El número $\psi(n)$ de estructuras monótonas de orden menor que o igual a n satisfacen la siguiente desigualdad

$$2^{\binom{n}{\langle n/2 \rangle}} \leq \psi(n) \leq 3^{\binom{n}{\langle n/2 \rangle}} \quad \text{Ec. 3. 48}$$

donde $\langle n/2 \rangle$ es el entero más grande menor o igual a $n/2$.

3.9 CONSTRUCCIÓN Y SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES DE ESTRUCTURA Y DE REDES DE CONFIABILIDAD

3.9.1 CONTRUCCIÓN DE UNA FUNCIÓN DE ESTRUCTURA MONÓTONA EQUIVALENTE A UNA RED

A. Método de eslabones. Supóngase que hemos determinado todos los eslabones mínimos a_1, a_2, \dots, a_k de una red \mathfrak{R} , y hagamos que x_i sea la variable de estado de la componente \mathcal{E}_i ; la función de estructura

$$\varphi(x) = 1 - \prod_{j=1}^k (1 - \prod_{i \in a_j} x_i) \quad \text{Ec. 3. 49}$$

Es equivalente a la red \mathfrak{R} .

Ejemplo 3.9.1. La red de la Fig.3.8. posee tres trayectorias de O a Z que son $\{(O,C,B,D,Z), (O,C,B,A,Z), (O,A,Z)\}$.

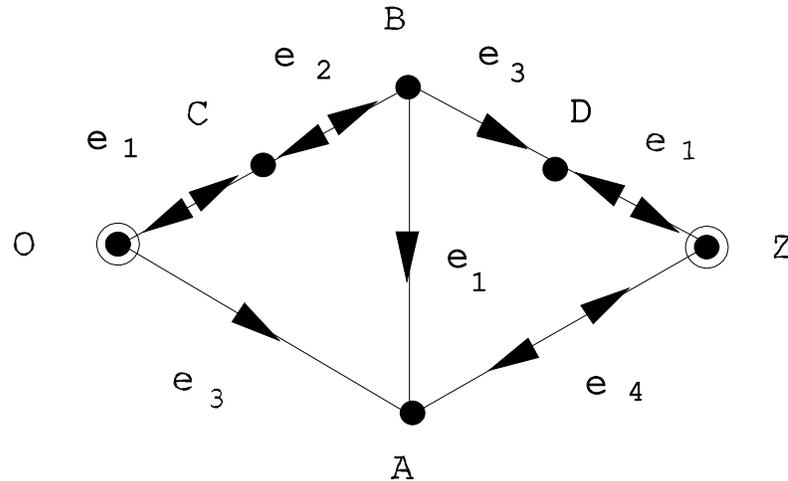


Fig.3. 8 Red para el Ejemplo 3.9.1

A esas trayectorias corresponden los siguientes eslabones, los cuales son mínimos

$$\{\{e_1, e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_4\}, \{e_3, e_4\}\} \quad \text{Ec. 3. 50}$$

Entonces tenemos

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 - (1 - x_1 x_2 x_3)(1 - x_1 x_2 x_4)(1 - x_3 x_4) \quad \text{Ec. 3. 51}$$

B. Método de cortes. Supóngase que se ha determinado un conjunto de cortes $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ incluyendo todos los cortes mínimos y tal vez algunos cortes no mínimos de una red de confiabilidad \mathfrak{R} . Entonces la función de estructura

$$\varphi(x) = \prod_{j=1}^k \left[1 - \prod_{e_i \in b_j} (1 - x_i) \right] \quad \text{Ec. 3. 52}$$

es equivalente a \mathfrak{R} .

Ejemplo 3.9.2. Considerando la misma Fig.3.8 del ejemplo anterior, si examinamos dicha red podemos ver que existen cinco cortes mínimos

$$\{\{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_3, e_4\}\}.$$

Teniendo entonces que:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [1 - (1 - x_1)(1 - x_3)]$$

$$\bullet [1 - (1 - x_1)(1 - x_4)] \bullet [1 - (1 - x_2)(1 - x_3)]$$

$$\bullet [1 - (1 - x_2)(1 - x_4)] \bullet [1 - (1 - x_3)(1 - x_4)]$$

Efectuando los productos se puede verificar que las dos funciones anteriores, son equivalentes a

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_3 x_4 - 2 x_1 x_2 x_3 x_4$$

3.9.2 CONSTRUCCIÓN DE UNA RED EQUIVALENTE A UNA FUNCIÓN DE ESTRUCTURA MONÓTONA

Conociendo un conjunto de eslabones $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ que incluya todos los eslabones mínimos de una función de estructura monótona, podemos obtener una red equivalente poniendo en paralelo k subredes, formadas cada una por las componentes de cada eslabón puestas en serie.

Similarmente, conociendo un conjunto de cortes $\{b_1, b_2, \dots, b_l\}$ que incluya todos los cortes mínimos de una función de estructura monótona, podemos obtener una red equivalente poniendo esos cortes en serie, teniendo cada uno sus componentes en paralelo.

3.9.3. SIMPLIFICACIÓN DE UNA FUNCIÓN DE ESTRUCTURA MONÓTONA; FORMA SIMPLE

Hagamos que $\varphi(x)$ sea una función de estructura monótona para la cual conocemos un conjunto de eslabones $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ que incluye todos los eslabones mínimos. Como ya lo establecimos en la Ec.3.49, tenemos que

$$\varphi(x) = 1 - \prod_{j=1}^k (1 - \prod_{i \in a_j} x_i) \quad \text{Ec. 3. 53}$$

Entonces $\varphi(x)$ es un polinomio con respecto a las variables Booleanas x_i ; dado que estas variables pueden tomar únicamente valores 0 y 1, se tiene entonces

$$(x_i)^r = x_i, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad \text{Ec. 3. 54}$$

Se concluye entonces que $\varphi(x)$ se puede escribir siempre en la forma de un polinomio de primer grado con respecto a cada variable x_i . Lo llamaremos "forma simple" y la simbolizaremos por $\varphi_s(x)$.

3.10 DETERMINACIÓN DE ESLABONES Y CORTES

Como hemos visto en las secciones precedentes, la determinación de una estructura equivalente a una red es sencilla si se conoce un conjunto de eslabones que incluya todos los eslabones mínimos, o un conjunto de cortes que incluya todos los cortes mínimos de la red que se está considerando.

A la inversa, conociendo un conjunto de eslabones (o cortes) que incluya todos los eslabones (o cortes) mínimos de una función de estructura monótona podemos determinar fácilmente una red equivalente.

Por lo tanto, a continuación describiremos algunos algoritmos simples que permitan determinar tales conjuntos.

3.10.1 BÚSQUEDA DE UN CONJUNTO DE ESLABONES QUE INCLUYA TODOS LOS ESLABONES MÍNIMOS DE UNA RED

Teorema 3.10.1. Hagamos que \mathfrak{T} sea el conjunto de trayectorias elementales con punto inicial O y punto terminal Z de una gráfica G de una red de confiabilidad. A cada trayectoria $\mu = (u_1, \dots, u_l) \in \mathfrak{T}$ asociemos el eslabón $a(\mu)$ formado por los componentes correspondientes a los arcos de la trayectoria

$$a(\mu) = \{\Delta(u_1)\} \cup \dots \cup \{\Delta(u_j)\} \cup \dots \cup \{\Delta(u_l)\} \quad \text{Ec. 3. 55}$$

Hagamos que \mathfrak{L} sea el conjunto de eslabones obtenidos de \mathfrak{T}

$$\mathfrak{L} = \bigcup_{\mu \in \mathfrak{T}} \{a(\mu)\} \quad \text{Ec. 3. 56}$$

Entonces el conjunto \mathfrak{L} incluye todos los eslabones mínimos de la red.

Ejemplo. 3.10.1. Las trayectorias elementales de la red mostrada en la Fig.3.9 son: (OB,BC,CZ) , (OB,BC,CA,AZ) , (OA,AZ) , (OA,AC,CZ) , (OA,AB,BC,CZ) .

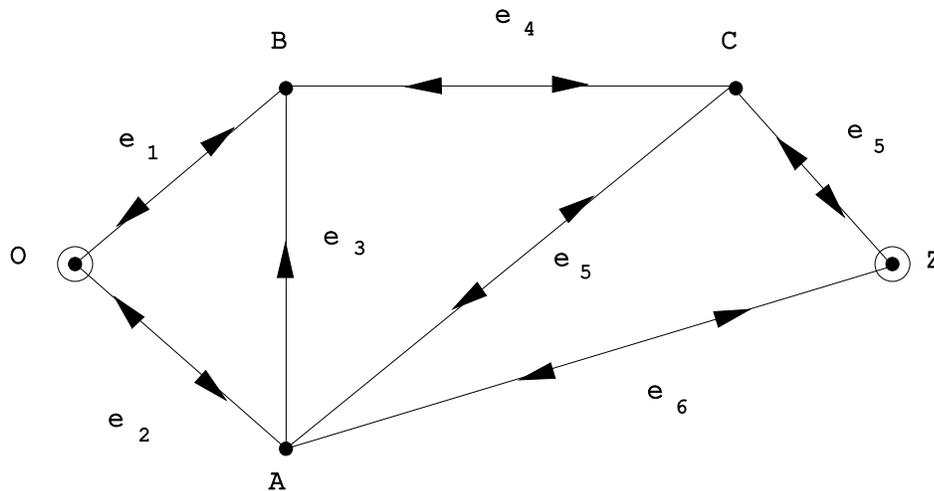


Fig.3. 9 Red para el Ejemplo 3.10.1

El conjunto \mathfrak{L} de eslabones que se obtiene de esas trayectorias es

$$\mathfrak{L} = \{\{1,4,5\}, \{1,4,5,6\}, \{2,6\}, \{2,5\}, \{2,3,4,5\}\}.$$

Este conjunto incluye los eslabones mínimos, los cuales son

$$\{1,4,5\}, \{2,6\} \text{ y } \{2,5\}.$$

3.10.2 MÉTODO DE "COMPOSICIÓN LATINA" O "CONCATENACIÓN"

El método anterior nos permitió conocer los principios básicos que permiten determinar los eslabones de una red. Ahora veamos un método que es más adecuado para el cálculo en computadora y, que por lo tanto permite estudiar redes más complejas.

Primeramente veamos como aplicar este método para enumerar, sin redundancia ni omisión, todas las trayectorias elementales de una gráfica 1-fold; el caso de una gráfica p-fold ($p > 1$) se deduce fácilmente de este primer caso. Después de un primer ejemplo dedicado a la búsqueda de trayectorias elementales, en un segundo ejemplo, mostraremos la aplicación del método en el caso de la búsqueda de trayectorias elementales entre dos vértices dados, el cual es el caso que nos interesa.

Con la ayuda de un tipo particular de multiplicación de matrices, será posible enumerar sucesivamente, sin redundancia ni omisión, todas las trayectorias elementales de longitud $1, 2, 3, \dots, n-1$, donde n es el número de vértices de la gráfica. El método será presentado con dos ejemplos, y como veremos es muy fácil de entender.

Ejemplo 3.10.2. Consideremos la gráfica de la Fig.3.10. y construyamos una "matriz latina" de la siguiente manera: si un vértice X_i se une a un vértice X_j por un arco (X_i, X_j) se pone $X_i X_j$ en el cuadro (X_i, X_j) de la matriz; si el par no tiene un arco, se pone \emptyset en la posición correspondiente de la matriz. Además, se pone también \emptyset en todos los cuadros donde $X_i = X_j$ (la diagonal principal).

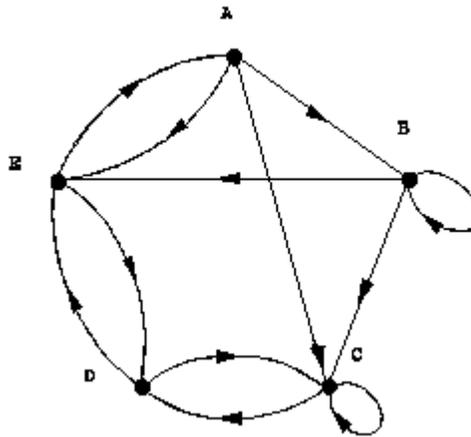


Fig.3. 10 Gráfica para el ejemplo 3.10.2

Entonces la matriz latina relativa a la gráfica de la Fig.3.10 es $[M]^{(1)}$.

Deduzcamos además de la matriz latina anterior otra matriz latina $[\bar{M}]^{(1)}$ en la cual se ha suprimido la primera letra; teniéndose entonces

| | A | B | C | D | E |
|---|----|----|----|----|----|
| A | ∅ | AB | AC | ∅ | AE |
| B | ∅ | ∅ | BC | ∅ | BE |
| C | ∅ | ∅ | ∅ | CD | ∅ |
| D | ∅ | ∅ | DC | ∅ | DE |
| E | EA | ∅ | ∅ | ED | ∅ |

$[M]^{(1)}$

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | ∅ | B | C | ∅ | E |
| B | ∅ | ∅ | C | ∅ | E |
| C | ∅ | ∅ | ∅ | D | ∅ |
| D | ∅ | ∅ | C | ∅ | E |
| E | A | ∅ | ∅ | D | ∅ |

$[\bar{M}]^{(1)}$

En lo sucesivo, para mayor claridad, cualquier cuadrado que contenga \emptyset se dejará en blanco.

Procedamos a multiplicar $[M]^{(1)}$ y $[\bar{M}]^{(1)}$ de una cierta manera que formemos $[M]^{(2)}$.

Denotemos a los elementos de esas matrices por

$m_{i,j}^{(1)}, \bar{m}_{i,j}^{(1)}, m_{i,j}^{(2)}$. Por ejemplo, los elementos $m_{i,j}^{(1)}$ se encontrarán en el cuadro (i,j) , esto es, en el renglón i y columna j de la matriz $[M]^{(1)}$.

Y obtenemos $m_{i,j}^{(2)}$ por la relación

$$m_{i,j}^{(2)} = \sum_k m_{i,k}^{(1)} \bullet \bar{m}_{k,j}^{(1)} \tag{Ec. 3. 57}$$

donde los símbolos \sum y \bullet no tienen su significado algebraico ordinario, sino que más bien se definen de la siguiente manera

(a) $m_{i,k}^{(1)} = \emptyset$ ó $\bar{m}_{k,j}^{(1)} = \emptyset \Rightarrow m_{i,j}^{(2)} \bullet m_{k,j}^{(1)} = \emptyset$

(b) Si hay una letra común a $m_{i,k}^{(1)}$ y $\bar{m}_{k,j}^{(1)}$ entonces su producto es \emptyset ; Ec. 3. 58

(c) En cualquier otro caso, el producto $m_{i,k}^{(1)} \bullet \bar{m}_{k,j}^{(1)}$ se obtiene combinando las letras de los dos términos;

El símbolo \sum simplemente indica la unión de todos los productos $m_{i,k}^{(1)} \bullet \bar{m}_{k,j}^{(1)}$

Ilustremos estas reglas con un ejemplo

hagamos $m_{i,k}^{(1)} = \{AB, AC\}$ y $\bar{m}_{k,j}^{(1)} = \{D, C\}$ entonces se sigue que

$$m_{i,k}^{(1)} \bullet \bar{m}_{k,j}^{(1)} = \{ABD, ABC, ACD, ACC\}$$

y finalmente obtenemos

$$m_{i,k}^{(1)} \bullet \bar{m}_{k,j}^{(1)} = \{ABC, ABD, ACD\}$$

Ahora pues, efectuemos el producto de las dos matrices

| | A | B | C | D | E |
|---|----|----|----|----|----|
| A | | AB | AC | | AE |
| B | | | BC | | BE |
| C | | | | CD | |
| D | | | DC | | DE |
| E | EA | | | ED | |

| |
|---|
| * |
|---|

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | | B | C | | E |
| B | | | C | | E |
| C | | | | D | |
| D | | | C | | E |
| E | A | | | D | |

| |
|---|
| = |
|---|

| | A | B | C | D | E |
|---|-----|-----|------------|------------|-----|
| A | | | ABC | ACD AED | ABE |
| B | BEA | | | BCD BED | |
| C | | | | | CDE |
| D | DEA | | | | |
| E | | EAB | EAC EDC | | |

$$[M]^{(1)} \bullet [\bar{M}]^{(1)} = [M]^{(2)}$$

Ec. 3. 59

| | A | B | C | D | E |
|---|-----|-----|------------|------------|-----|
| A | | | ABC | ACD AED | ABE |
| B | BEA | | | BCD BED | |
| C | | | | | CDE |
| D | DEA | | | | |
| E | | EAB | EAC EDC | | |

| |
|---|
| * |
|---|

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | | B | C | | E |
| B | | | C | | E |
| C | | | | D | |
| D | | | C | | E |
| E | A | | | D | |

| | A | B | C | D | E |
|---|------|------|--------------|--------------|------|
| A | | | AEDC | ABCD ABDE | ACDE |
| B | | | BEAC BECD | | BCDE |
| C | CDEA | | | | |
| D | | DEAB | DEAC | | |
| E | | | EABC | EACD | |

$$[M]^{(2)} \bullet [\bar{M}]^{(1)} = [M]^{(3)}$$

Ec. 3. 60

| | A | B | C | D | E |
|---|------|------|--------------|--------------|------|
| A | | | AEDC | ABCD ABDE | ACDE |
| B | | | BEAC BECD | | BCDE |
| C | CDEA | | | | |
| D | | DEAB | DEAC | | |
| E | | | EABC | EACD | |

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | | B | C | | E |
| B | | | C | | E |
| C | | | | D | |
| D | | | C | | E |
| E | A | | | D | |

| | A | B | C | D | E |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| A | | | ABEDC | | ABCDE |
| B | BCDEA | | | BEACD | |
| C | | CDEAB | | | |
| D | | | DEABC | | |
| E | | | | EABCD | |

$$[M]^{(3)} \bullet [\bar{M}]^{(1)} = [M]^{(4)} \quad \text{Ec. 3. 61}$$

La matriz latina $[M]^{(1)}$ nos da todas las trayectorias elementales de longitud 1; la matriz $[M]^{(2)}$ nos da todas las trayectorias de longitud 2. Continuando con este proceso, tendremos que las matrices $[M]^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, nos dan en ese orden, las trayectorias elementales de longitud $i = 1, 2, 3, 4$.

Ejemplo. 3.10.3. Tomando como base la Fig.3.11., consideremos ahora la enumeración de todas las trayectorias elementales entre dos vértices dados O y Z de una gráfica p-fold ($p=2$) en este ejemplo. Se puede reducir ésta a una gráfica 1-fold al no tomar en cuenta los dos arcos $(A,B)_{(3)}$ y $(A,B)_{(7)}$ sino un arco simple (A,B). Cuando hemos enumerado los eslabones de la red de confiabilidad, reintroducimos los dos arcos (dos componentes) que unen A y B.

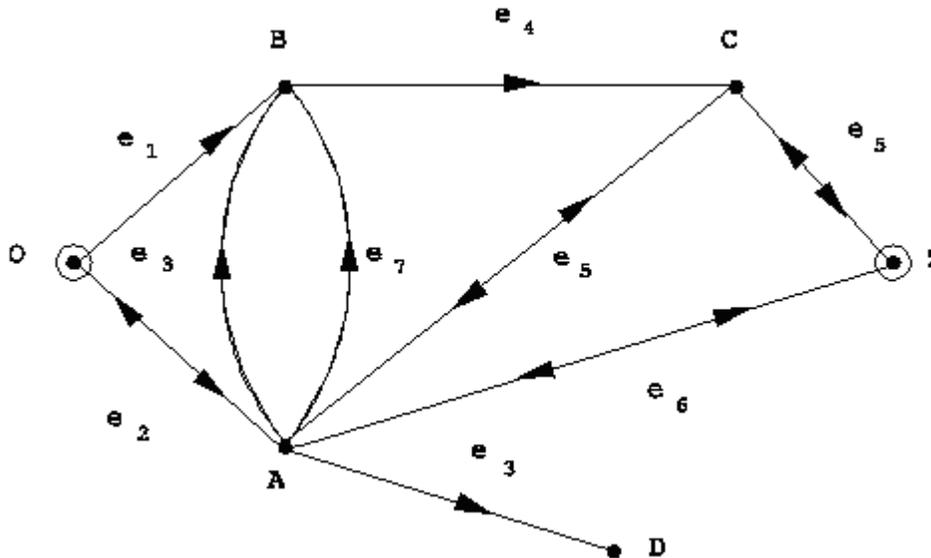


Fig.3. 11 Trayectorias elementales

Escribamos las matrices $[M]^{(1)}$ y $[\bar{M}]^{(1)}$

en las cuales, evidentemente, podemos dejar la columna O y el renglón Z en blanco, ya que las trayectorias que terminan en O y las que comienzan en Z no interesan en una red de confiabilidad.

La matriz latina $[M]^{(2)}$ nos da una trayectoria elemental de longitud 2, que es (O,A,Z).

En la matriz latina $[M]^{(3)}$ hay dos trayectorias elementales de longitud 3: (O,A,C,Z) y (O,B,C,Z).

Finalmente, la matriz $[M]^{(4)}$ nos da dos trayectorias de longitud 4: (O,B,C,A,Z) y (O,A,B,C,Z).

Es claro que no existen trayectorias elementales de longitud 5 de O a Z.

| | O | A | B | C | D | Z |
|---|---|----|----|----|----|----|
| O | | OA | OB | | | |
| A | | | AB | AC | AD | AZ |
| B | | | | BC | | |
| C | | CA | | | | CZ |
| D | | | | | | |
| Z | | | | | | |

| | O | A | B | C | D | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|
| O | | A | B | | | |
| A | | | B | C | D | Z |
| B | | | | C | | |
| C | | A | | | | Z |
| D | | | | | | |
| Z | | | | | | |

| | O | A | B | C | D | Z |
|---|---|-----|-----|------------|-----|-----|
| O | | | OAB | OAC OBC | OAD | OAZ |
| A | | | | ABC | | ACZ |
| B | | BCA | | | | BCZ |
| C | | CAB | | | CAD | CAZ |
| D | | | | | | |
| Z | | | | | | |

$$[M]^{(1)} \cdot [\bar{M}]^{(1)} = [M]^{(2)}$$

Ec. 3. 62

Funciones de estructura, redes de confiabilidad y análisis de confiabilidad de sistemas

| | O | A | B | C | D | Z |
|---|---|-----|-----|------------|-----|-----|
| O | | | OAB | OAC OBC | OAD | OAZ |
| A | | | | ABC | | ACZ |
| B | | BCA | | | | BCZ |
| C | | | CAB | | CAD | CAZ |
| D | | | | | | |
| Z | | | | | | |

| | O | A | B | C | D | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|
| O | | A | B | | | |
| A | | | B | C | D | Z |
| B | | | | C | | |
| C | | A | | | | Z |
| D | | | | | | |
| Z | | | | | | |

| | O | A | B | C | D | Z |
|---|---|------|---|------|------|--------------|
| O | | OBCA | | OABC | | OACZ OBCZ |
| A | | | | | | ABCZ |
| B | | | | | BCAD | BCAZ |
| C | | | | | | |
| D | | | | | | |
| Z | | | | | | |

$$[M]^{(2)} \bullet [\bar{M}]^{(1)} = [M]^{(3)}$$

Ec.3. 63

| | O | A | B | C | D | Z |
|---|---|------|---|------|------|--------------|
| O | | OBCA | | OABC | | OACZ OBCZ |
| A | | | | | | ABCZ |
| B | | | | | BCAD | BCAZ |
| C | | | | | | |
| D | | | | | | |
| Z | | | | | | |

| | O | A | B | C | D | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|
| O | | A | B | | | |
| A | | | B | C | D | Z |
| B | | | | C | | |
| C | | A | | | | Z |
| D | | | | | | |
| Z | | | | | | |

| | O | A | B | C | D | Z |
|---|---|---|---|---|-------|----------------|
| O | | | | | OABCD | OBCAZ OABCZ |
| A | | | | | | |
| B | | | | | | |
| C | | | | | | |
| D | | | | | | |
| Z | | | | | | |

Ec. 3. 64

$$[M]^{(3)} \bullet [\bar{M}]^{(1)} = [M]^{(4)}$$

A las trayectorias elementales de la gráfica corresponden los siguientes eslabones de la red de confiabilidad

$(O,A,Z) : \{2,6\}$

$(O,A,C,Z) : \{2,5\}$

$(O,B,C,Z) : \{1,4,5\}$

$(O,B,C,A,Z) : \{1,4,5,6\}$

$(O,A,B,C,Z) : \{2,3,4,5\}$ y $\{2,7,4,5\}$.

Con los resultados anteriores, podemos encontrar que los tres eslabones, mínimos de la red son

$\{2,6\}$, $\{2,5\}$, y $\{1,4,5\}$

3.10.3 DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO DE CORTES QUE INCLUYAN TODOS LOS CORTES MÍNIMOS DE UNA RED

Teniendo determinados todos los eslabones mínimos, podemos establecer los cortes, tomando un componente de cada uno de los eslabones mínimos. El conjunto de cortes así obtenido incluye todos los cortes mínimos. (Ver Teorema 3.6.IV).³

Ejemplo 3.10.4. Consideremos otra vez el ejemplo anterior, del cual ya tenemos los eslabones mínimos. Hagamos $A_1 = \{2,6\}$, $A_2 = \{2,5\}$, $A_3 = \{1,4,5\}$ y tomemos un componente de cada uno de ellos a la vez sin repetir componentes y eliminemos los cortes que se repitan. Con lo antes dicho tendremos un conjunto el cual tendrá un máximo de $2 \times 2 \times 3 = 12$ cortes. En este caso queda lo siguiente

$\{\{2,1\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,5,1\}, \{2,5,4\}, \{6,2,1\}, \{6,2,4\},$

$\{6,2,5\}, \{6,5,1\}, \{6,5,4\}, \{6,5\}\}$.

Y los cortes mínimos son: $\{\{2,1\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{5,6\}\}$.

3.11 ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD DE SISTEMAS

3.11.1 DEFINICIONES E HIPÓTESIS

El término "confiabilidad" de un sistema se puede extender, en un sentido muy general, hasta incluir en dicho término todo el conjunto de características del sistema que se presentan en su funcionamiento mas o menos satisfactorio durante un tiempo más o menos largo. Más precisamente, la confiabilidad de un sistema se define generalmente como la probabilidad de que ejecute ciertas tareas específicas, bajo determinadas condiciones de uso, y durante un tiempo definido. Esta definición es todavía, sin embargo, muy general para poder hacer un estudio matemático; para hacer adecuada esta definición, es necesario indicar qué servicios son los que se esperan del sistema, y bajo que condiciones de servicio se encontrará; lo cual no es fácil para poder realizar un estudio teórico. Afortunadamente, el problema se puede simplificar tomando en cuenta las hipótesis que ya hemos mencionado anteriormente y que recordaremos a continuación

- (1) El sistema está funcionando, en buen estado, o está en falla.
- (2) El sistema se puede descomponer en r componentes de tal manera que, cada componente, en un instante dado, está en buen estado o está en falla; el estado del sistema depende únicamente del estado del conjunto de sus componentes.
- (3) Cada uno de los componentes \mathcal{E}_i ($i=1,2,\dots,r$) del sistema tiene un tiempo de vida

aleatorio T_i ; y está en buen estado en el intervalo $(0, T_i)$ y ha fallado después del instante T_i . Designaremos a la función de sobrevivencia del componente como $v_i(t)$.

A las tres hipótesis anteriores deberemos adicionar una cuarta, la cual desafortunadamente no siempre se satisface en la práctica, pero que es necesario considerar para poder desarrollar una teoría general:

(4) Las variables aleatorias T_i ($i=1, 2, \dots, r$) son independientes.

Formalmente, la confiabilidad de un sistema se puede definir de la siguiente manera

Definición. La confiabilidad de un sistema que satisface las hipótesis (1)-(4) es la probabilidad de que esté continuamente en buen estado en el intervalo $(0, t)$, donde t es un tiempo fijo.

La noción de confiabilidad así definida se reduce sencillamente a la noción de función de sobrevivencia que ya definimos anteriormente. De hecho, hagamos que T sea el instante (aleatorio) en el cual el sistema falla por primera vez; entonces llamaremos a T "tiempo de vida" del sistema. La función de sobrevivencia del sistema es

$$v(t) = P \{ T > t \} \quad \text{Ec. 3. 65}$$

y la confiabilidad del sistema para el intervalo $(0, t)$ no es otra cosa que $v(t)$, la probabilidad de que el tiempo de vida T del sistema sea mayor que t .

En el caso de una estructura monótona, la irreversibilidad de la falla de los componentes implica la irreversibilidad de la falla del sistema. Entonces el evento "el sistema está en buen estado en el tiempo t ", es el mismo evento que "el tiempo de vida del sistema es mayor que t ", y la confiabilidad del sistema es la probabilidad de que él esté en buen estado en el instante t . En el caso de una estructura no monótona, el sistema podría estar en buen estado en el tiempo t después de haber fallado entre 0 y t ; y la confiabilidad del sistema puede ser diferente a la probabilidad de que esté en buen estado en el tiempo t .

En lo que resta de este capítulo, estableceremos la relación que existe entre la probabilidad de que el sistema esté en buen estado en el instante t y la confiabilidad de sus componentes; a esta relación la llamaremos "función de confiabilidad"; describiremos una herramienta muy útil para determinar dicha función que se llama "composición" y analizaremos algunas propiedades matemáticas de la función de confiabilidad.

3.11.2 LA FUNCIÓN DE CONFIABILIDAD

En un instante dado t , un componente e_i tiene una probabilidad $p_i = v_i(t)$ de estar en buen estado, y una probabilidad complementaria $1 - p_i$ de haber fallado. Hagamos que X_i sea la variable aleatoria que representa el estado de la componente e_i en el instante t , con la convención

$X_i = 1$ si el componente está en buen estado

$X_i = 0$ si el componente ha fallado.

Se tiene entonces

$$P\{X_i = 1\} = p_i, \quad \text{Ec. 3. 66}$$

$$P\{X_i = 0\} = 1 - p_i$$

con

$$E(X_i) = 1x p_i + 0x(1 - p_i) = p_i. \quad \text{Ec. 3. 67}$$

Es importante notar que la independencia de los tiempos de vida T_i de los componentes ($i=1,2,\dots, r$) implica la independencia de las variables aleatorias X_i ($i = 1,2,\dots, r$).

Hagamos que $(x) = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ sea un posible valor de la r-upla aleatoria

$$(X) = (X_1, X_2, \dots, X_r) \quad \text{Ec. 3. 68}$$

(x) es un estado del conjunto de componentes al cual corresponde el estado $\varphi(x)$ del sistema. La función

$$\Phi = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_r) = \varphi(X) \quad \text{Ec. 3. 69}$$

es una cierta función de las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_r . Por lo tanto, es también una variable aleatoria, la cual toma el valor 1 si el sistema funciona y el valor 0 si ha fallado. La probabilidad de que $\Phi = 1$ es la probabilidad de que el sistema esté en buen estado en el instante considerado. Llamaremos a la variable anterior la "función de estructura aleatoria" del sistema.

La esperanza matemática de esta variable aleatoria es

$$E(\Phi) = E[\varphi(X)] = 1xP\{\Phi = 1\} + 0xP\{\Phi = 0\} = P\{\Phi = 1\} \quad \text{Ec. 3. 70}$$

Llamaremos a la función $h(p_1, p_2, \dots, p_r) = E[\varphi(X)]$ la "función de confiabilidad" del sistema. Es claro que la función anterior depende de las confiabilidades p_1, p_2, \dots, p_r de los componentes, que definen las leyes de probabilidad de las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_r . Supongamos que la función de estructura del sistema está en la forma simple, que ya se definió anteriormente, es decir en la forma de un polinomio $\varphi_s(x)$ de primer grado con respecto a cada una de las variables x_1, x_2, \dots, x_r . Entonces $\varphi(x)$ es una suma de términos de la forma

$$k \bullet X_{i_1} \bullet X_{i_2} \bullet \dots \bullet X_{i_l} \quad (l \leq r) \quad \text{Ec. 3. 71}$$

Dado que las variables aleatorias de la ecuación anterior son independientes, se tiene

$$\begin{aligned} E(k \bullet X_{i_1} \bullet \dots \bullet X_{i_l}) &= k \bullet E(X_{i_1}) \bullet E(X_{i_2}) \bullet \dots \bullet E(X_{i_l}) \\ &= k \bullet p_{i_1} \bullet p_{i_2} \bullet \dots \bullet p_{i_l} \end{aligned} \quad \text{Ec. 3. 72}$$

Se sigue entonces que

$$h(p) = h(p_1, p_2, \dots, p_r) \equiv \varphi_s(p_1, p_2, \dots, p_r) = \varphi_s(p) \quad \text{Ec. 3. 73}$$

donde

$$(p) = (p_1, p_2, \dots, p_r) \quad \text{Ec. 3. 74}$$

En palabras, la función de confiabilidad se obtiene simplemente reemplazando las variables x_1, x_2, \dots, x_r por p_1, p_2, \dots, p_r en la función de estructura del sistema expresada en la forma simple.

3.11.2.1 OTRA EXPRESIÓN PARA LA FUNCIÓN DE CONFIABILIDAD

Al ser los estados del conjunto de componentes eventos disjuntos, en el sentido de teoría de probabilidad, al sumar las probabilidades de todos los eslabones obtenemos la función de confiabilidad. Una r -upla $(x) = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ tiene probabilidad igual a $\alpha_1(x_1) \dots \alpha_i(x_i) \dots \alpha_r(x_r)$ donde

$$\begin{aligned} \alpha_i(x_i) &= p_i & \text{si } x_i = 1, \\ &= 1 - p_i & \text{si } x_i = 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. 3. 75}$$

Podemos entonces escribir

$$h(p) = \sum_{x \in \mathfrak{S}} \varphi(x_1, \dots, x_r) \alpha_1(x_1) \dots \alpha_i(x_i) \dots \alpha_r(x_r) \quad \text{Ec. 3. 76}$$

donde \mathfrak{S} es el conjunto de las 2^r r -uplas. Las r -uplas para las cuales $\varphi = 0$ dan un término cero; aquellas para las cuales $\varphi = 1$, las cuales corresponden a un eslabón, dan un término igual a la probabilidad de la r -upla considerada.

3.11.2.2 CASO EN QUE TODOS LOS COMPONENTES TIENEN LA MISMA CONFIABILIDAD

Si todos los componentes tienen la misma confiabilidad p , la probabilidad de tener un estado fijo correspondiente a k componentes en buen estado con $r-k$ defectuosos está dado por una ley binomial como sigue

$$\pi(k) = p^k (1-p)^{r-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, r. \quad \text{Ec. 3. 77}$$

Hagamos que A_k sea el número de eslabones que tienen k componentes; entonces obtenemos la siguiente expresión para la función de confiabilidad

$$h(p) = \sum_{k=0}^r A_k p^k (1-p)^{r-k}. \quad \text{Ec. 3. 78}$$

Similarmente, hagamos que B_k sea el número de cortes que tienen $r-k$ componentes; entonces obtenemos

$$1 - h(p) = \sum_{k=0}^r B_k p^{r-k} (1-p)^k. \quad \text{Ec. 3. 79}$$

3.11.2.3 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE CONFIABILIDAD DE ESTRUCTURAS MONÓTONAS

A continuación enunciaremos una secuencia de teoremas que establecen algunas propiedades importantes de la función de confiabilidad de estructuras monótonas.

Teorema 3.11.2.3.I. La función de confiabilidad $h(p)$ de una estructura monótona es monótona, esto es

$$(q) \succeq (p) \Rightarrow h(q) \geq h(p) \quad \text{Ec. 3. 80}$$

Teorema 3.11.2.3.II. Hagamos que $\varphi(x)$ sea una estructura monótona; $h(p)$ sea su función de confiabilidad; b_1, b_2, \dots, b_n los cortes mínimos de la estructura; y a_1, a_2, \dots, a_m los eslabones mínimos. Entonces

$$\prod_{k=1}^n \left[1 - \prod_{e_i \in b_k} (1 - p_i) \right] \leq h(p) \leq 1 - \prod_{j=1}^m \left[1 - \prod_{e_i \in a_j} p_i \right] \quad \text{Ec. 3. 81}$$

Debemos establecer que el primer miembro de la igualdad anterior será igual a la función de confiabilidad $h(p)$ si todos los cortes mínimos son disjuntos por pares. Similarmente, $h(p)$ será igual al tercer miembro si ningún par de eslabones mínimos tiene una componente en común.

Teorema 3.11.2.3.III. La función de confiabilidad $h(p)$ de una estructura monótona satisface las siguientes desigualdades

$$h(p)[1 - h(p)] \sum_{i=1}^r p_i (1 - p_i) \geq \left[\sum_{i=1}^r p_i (1 - p_i) \frac{\partial h(p)}{\partial p_i} \right]^2. \quad \text{Ec. 3. 82}$$

$$h(p)[1 - h(p)] \leq \sum_{i=1}^r p_i (1 - p_i) \frac{\partial h(p)}{\partial p_i}. \quad \text{Ec. 3. 83}$$

Esta última ecuación se conoce como desigualdad de Moore-Shannon y se puede escribir en forma abreviada

$$\text{Cov}[S(X), \varphi(X)] \geq \text{Var } \varphi(X) \quad \text{Ec. 3. 84}$$

donde

$$S(X) = X_1 + X_2 + \dots + X_r \quad \text{Ec. 3. 85}$$

y Cov significa "covarianza de" y Var significa "varianza de".

Teorema 3.11.2.3.IV. Hagamos

$$\bar{a} = E [S(X) | \varphi(X) = 1], \quad \text{Ec. 3. 86}$$

$$\bar{b} = E[r - S(X) | \varphi(x) = 0], \quad \text{Ec. 3. 87}$$

donde $S(X)$ tiene el mismo significado que en el teorema anterior, \bar{a} es el número medio de los componentes de los eslabones, y \bar{b} es el número medio de los componentes de los cortes. Se tiene entonces que

$$\bar{a} + \bar{b} \geq n + 1, \quad \text{Ec. 3. 88}$$

donde n es el orden de la función de estructura monótona $\varphi(x)$.

Teorema 3.11.2.3.V. Sea λ la longitud de una estructura monótona y μ su ancho; si la estructura está constituida por r componentes, las cuales tienen la misma confiabilidad p , entonces

$$p^\lambda \leq h(p) \leq 1 - (1 - p)^\mu. \quad \text{Ec. 3. 89}$$

De hecho, el buen funcionamiento de los λ componentes del eslabón más pequeño es suficiente para asegurar que el sistema funcione, y la falla del corte más pequeño es suficiente para que el sistema falle.

3.11.3 COMPOSICIÓN DE ESTRUCTURAS

Definición. Operación de composición para funciones de estructura

Hagamos que $\gamma(x)$ sea una función de estructura donde $(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, x_1, x_2, \dots, x_m constituyen una familia de funciones de estructura

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(u_1, u_2, \dots, u_{k_1}), \\ x_2 &= x_2(v_1, v_2, \dots, v_{k_2}), \\ \dots, x_m &= x_m(z_1, z_2, \dots, z_{k_m}); \end{aligned} \quad \text{Ec. 3. 90}$$

Entonces

$$\varphi(u, v, z) = \gamma(x_1(u), x_2(v), \dots, x_m(z)) \quad \text{Ec. 3. 91}$$

se llama composición de x_1, x_2, \dots, x_m en γ y $x_1(u), x_2(v), \dots, x_m(z)$ se llaman "subestructuras"

de $\varphi(u, v, \dots, z)$.

Si $(u), (v), \dots, (z)$ son r-uplas independientes (esto es, si ningún par de esas r-uplas tiene una componente en común), entonces $x_1(u), x_2(v), \dots, x_m(z)$ se

llaman "módulos" de φ ; en este caso, si γ no tiene componentes inútiles (si es de orden m), el orden de φ es la suma de los órdenes de X_1, X_2, \dots, X_m .

Definición. Operación de composición para redes de confiabilidad

Hagamos que Q sea una red de confiabilidad de orden m (con m componentes útiles) y r_1, r_2, \dots, r_m sean una familia de redes de confiabilidad con órdenes k_1, k_2, \dots, k_m respectivamente. Si cada arco correspondiente al componente x_i en la red Q se reemplaza por la red r_i , obtenemos una red \mathfrak{R} llamada la "composición de r_1, r_2, \dots, r_m en Q", y escribimos

$$\mathfrak{R} = Q(r_1, r_2, \dots, r_m) \quad \text{Ec. 3. 92}$$

Llamaremos a r_1, r_2, \dots, r_m "subredes" de \mathfrak{R} . Si r_1, r_2, \dots, r_m son independientes, también les llamaremos "módulos" de \mathfrak{R} .

Teorema 3.11.3.I. Si la red Q es equivalente a una función de estructura \mathfrak{R} , y las redes r_1, r_2, \dots, r_m son, respectivamente, equivalentes a las funciones de estructura $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, entonces la red $\mathfrak{R} = Q(r_1, r_2, \dots, r_m)$ es equivalente a la función

$$\varphi(u, v, \dots, z) = \varphi[\mu_1(u), \mu_2(v), \dots, \mu_m(z)] \quad \text{Ec. 3. 93}$$

3.11.4 COMPOSICIÓN DE FUNCIONES DE CONFIABILIDAD

Hagamos que $\varphi(u, v, \dots, z) = \gamma[x_1(u), x_2(v), \dots, x_n(z)]$ sea una función de estructura que tenga $x_1(u), x_2(v), \dots, x_n(z)$ como módulos (esto es u, v, ..., z son r-uplas independientes), y sean $g(p), f_1(q^1), f_2(q^2), \dots, f_n(q^n)$ las funciones de confiabilidad correspondientes, respectivamente a las estructuras $\gamma, x_1, x_2, \dots, x_n$. Entonces tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.11.4.I. La función de confiabilidad de la estructura φ es

$$h(q_1, q_2, \dots, q_n) = g[f_1(q^1), f_2(q^2), \dots, f_n(q^n)] \quad \text{Ec. 3. 94}$$

3.11.5 USO DE LA COMPOSICIÓN PARA EL CÁLCULO DE FUNCIONES DE ESTRUCTURA Y FUNCIONES DE CONFIABILIDAD

Ejemplo 3A. Considere la red \mathfrak{R} dada en la Fig.3.12.a. Esta red se puede descomponer en tres subredes de las cuales dos son idénticas (Fig.3.12.b.) Las subredes se redibujan como se indica en la Fig.3.12.c.

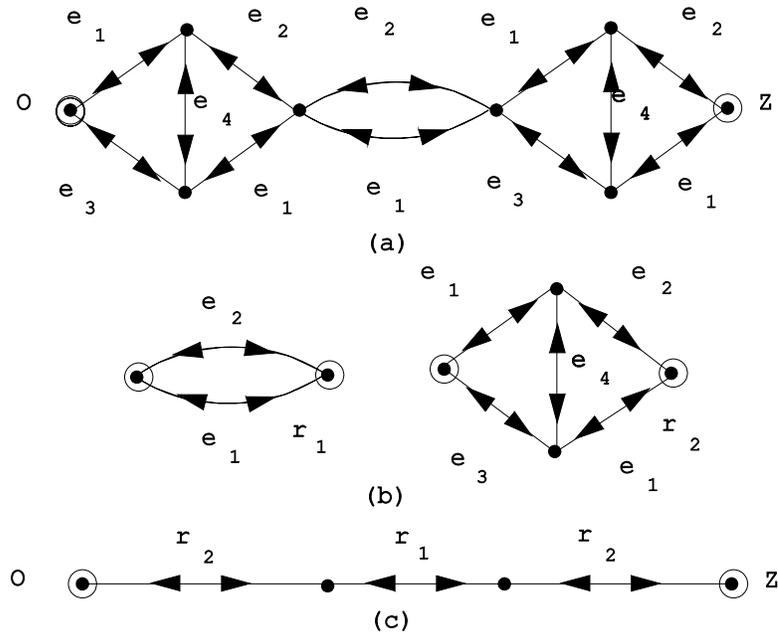


Fig.3. 12 Red para el Ejemplo (3A) de composición de estructuras

La función de estructura correspondiente a la red Q de esta última figura es

$$\gamma = \mu_1 - (\mu_2)^2 = \mu_1 - \mu_2$$

$$\text{con } \mu_1 = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)$$

$$\text{y } \mu_2 = 1 - (1 - x_1 x_2)(1 - x_1 x_3)(1 - x_1 x_4)(1 - x_2 x_3 x_4)$$

ya que los cortes mínimos de \mathfrak{R}_1 son $\{1\}$ y $\{2\}$, y los de \mathfrak{R}_2 son $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}$ y $\{2,3,4\}$.

Sustituyendo valores se tiene

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 - x_1 x_2 x_3 \\ &\quad - x_1 x_2 x_4 - x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 \end{aligned}$$

Si calculamos la forma expandida de μ_2 , encontramos que

$$\mu_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

El hecho de que finalmente la red \mathfrak{R} se reduzca a \mathfrak{R}_2 podría revelarse a priori. En efecto, cada eslabón mínimo de \mathfrak{R}_2 incluye un eslabón mínimo de \mathfrak{R}_1 y por lo tanto constituye un eslabón de \mathfrak{R} .

La función de confiabilidad correspondiente es

$$\begin{aligned} h(p_1, p_2, p_3, p_4) &= p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_1 p_4 - p_1 p_2 p_3 \\ &\quad - p_1 p_2 p_4 - p_1 p_3 p_4 + p_2 p_3 p_4 \end{aligned}$$

Supongamos que todos los componentes tienen la misma confiabilidad p , entonces

$$h(p) = 3p^2 - 2p^3$$

En el ejemplo anterior, las subredes no son independientes y por lo tanto no forman módulos; esto no nos permite calcular la función de confiabilidad pasando directamente de $\gamma = \mu_1 \mu_2$ a esta función; es necesario tomar en cuenta las componentes comunes.

Ejemplo 3B. Considerando ahora las Figuras 3.13.a, 3.13.b y 3.13.c vemos que la red \mathcal{R}' está formada por tres subredes que son módulos. En este caso la función de estructura es

$$\gamma' = \mu_1 _ \mu_2 _ \mu_3.$$

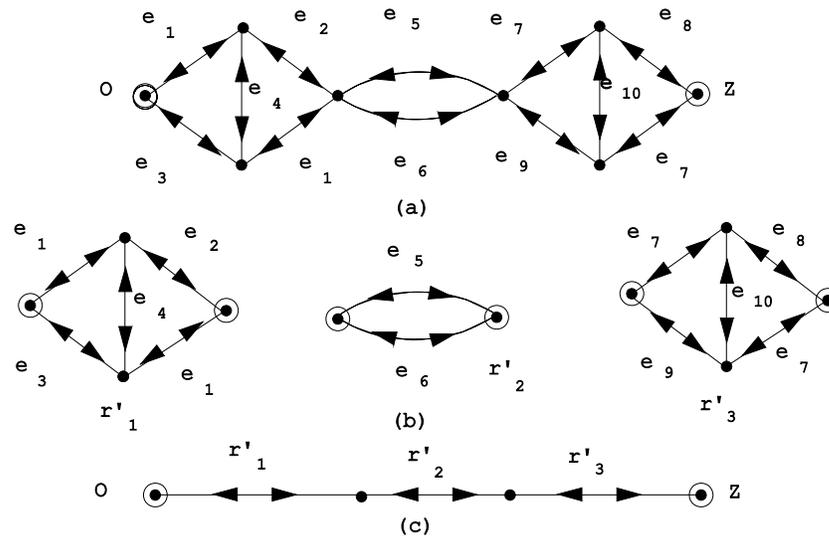


Fig.3. 13 Red para el ejemplo (3B) de composición de estructuras

Supóngase que todos los componentes tienen la misma confiabilidad p . Entonces para la red r_1 tenemos que

$$h_1(p) = 3p^2 - 2p^3.$$

Para la red r_2 ,
$$h_2(p) = 2p - p^2.$$

Para la red r_3 ,
$$h_3(p) = 3p^2 - 2p^3$$

Finalmente para la red \mathcal{R}' ,

$$h(p) = h_1(p) _ h_2(p) _ h_3(p)$$

$$= (2p - p^2)(3p^2 - 2p^3)^2.$$

3.11.6 COMPOSICIÓN LINEAL DE FUNCIONES DE ESTRUCTURA

La composición lineal de dos funciones de estructura de orden máximo n , $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, se define como la estructura de orden máximo $n+1$ siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) &= x_{n+1} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &+ (1 - x_{n+1}) \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad \text{Ec. 3. 95}$$

Entonces φ se obtiene por la composición de estructuras

$$\mu_1 = x_{n+1}, \quad \mu_2 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mu_3 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{Ec. 3. 96}$$

en la estructura

$$\gamma = \mu_1 \mu_2 + (1 - \mu_1) \mu_3. \quad \text{Ec. 3. 97}$$

La estructura anterior no siempre es monótona.

Teorema 3.11.6.I. Cualquier función de estructura de orden n es una composición lineal de dos funciones de estructura de orden máximo igual a $n-1$.

Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) &= x_n \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1) \\ &+ (1 - x_n) \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \end{aligned} \quad \text{Ec. 3. 98}$$

Teorema 3.11.6.II. Cualquier función de estructura $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ puede escribirse en la siguiente forma

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\xi \in _} \varphi(\xi) \prod_{j=1}^n x_j^{\xi_j} (1 - x_j)^{1 - \xi_j} \quad \text{Ec. 3. 99}$$

donde designa el conjunto de 2^n estados $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ del conjunto de componentes.

Esta expresión se puede obtener repitiendo la descomposición presentada en la Ec.3.98. Y se puede reducir a la siguiente forma

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{a \in A} \left[\prod_{j=1}^n x_j^{a_j} (1 - x_j)^{1 - a_j} \right] \quad \text{Ec. 3. 100}$$

donde la suma se extiende al conjunto A de n -uplas (a) tales que

$$\varphi(x) = 1 \quad \text{Ec. 3. 101}$$

Ejemplo 3C. Sea $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 + x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3$.

En la Tabla.3.1 se dan los valores de φ ; la función toma valores de 1 para las siguientes 3-uplas

$(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, y $(1, 1, 1)$

Tabla 3. 1 Valores de la función de estructura del Ejemplo 3C

| x_1 | x_2 | x_3 | φ |
|-------|-------|-------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Usando la Ec.3.100 se tiene

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3) &= (1 - x_1)x_2x_3 + x_1(1 - x_2)x_3 + x_1x_2x_3 \\ &= x_1x_3 + x_2x_3 - x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Teorema 2.11.6.III. Una condición necesaria y suficiente para que una función de estructura $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sea monótona es que esté formada por la composición lineal de dos funciones de estructura monótonas φ_1 y φ_2 de orden máximo igual a $n-1$; o sea

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_n \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) && \text{Ec. 3. 102} \\ &+ (1 - x_n) \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

donde las funciones φ_1 y φ_2 satisfacen

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) : \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) &&& \text{Ec. 3. 103} \\ &\geq \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

3.11.7 COMPOSICIÓN LINEAL DE REDES.

Hagamos que \mathfrak{R}_1 y \mathfrak{R}_2 sean redes de confiabilidad equivalentes, respectivamente, a φ_1 y φ_2 . Entonces la red de la Fig.3.14 es equivalente a la función de estructura dada por 3.102. Si \mathcal{E}_n está en buen estado ($x_n = 1$), el sistema funciona si y sólo si la subestructura \mathfrak{R}_1 funciona ($\varphi_1 = 1$). Si \mathcal{E}_n ha fallado, el sistema funciona si y sólo si las dos subestructuras \mathfrak{R}_1 y \mathfrak{R}_2 están en buen estado; pero $\varphi_1 \geq \varphi_2$ implica que si \mathfrak{R}_2 funciona, \mathfrak{R}_1 también funciona; entonces la única condición, es por lo tanto, que $\varphi_2 = 1$.

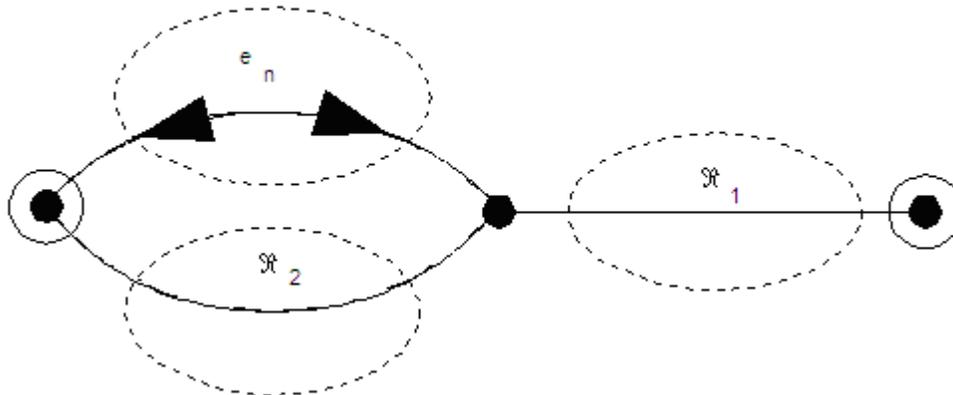


Fig.3. 14 Representación gráfica de la Ec.3.102

También podemos mostrar la equivalencia, escribiendo la función de estructura de la red por el método de los eslabones

$$\varphi_r = 1 - (1 - x_n \varphi_1)(1 - \varphi_1 \varphi_2), \quad \text{Ec. 3. 104}$$

de donde

$$\varphi_r = x_n \varphi_1 + (1 - x_n) \varphi_1 \varphi_2. \quad \text{Ec. 3. 105}$$

como $\varphi_1 \geq \varphi_2$, se tiene que $\varphi_1 \varphi_2 = \varphi_2$, recobrando así la ecuación 2.11.38.

3.11.8 FUNCIÓN DE SOBREVIVENCIA DE UN SISTEMA

La determinación de la función de sobrevivencia de un sistema no monótono es muy complicada, de hecho no existe un método general que permita obtenerla de manera sencilla de hecho se recurre normalmente a soluciones particulares para casos específicos.

En el caso de que el sistema tenga una estructura monótona, dado que la probabilidad de que el sistema falle por primera vez en el instante t es la probabilidad de que esté en buen estado en el tiempo t , se tiene como ya se estableció anteriormente, que

| | |
|---|-------------------|
| $v(t) = h[v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)]$ | Ec. 3. 106 |
|---|-------------------|

donde $v(t), v_1(t), \dots, v_n(t)$ son, respectivamente, las funciones de sobrevivencia del sistema y de sus componentes, y donde $h(p_1, p_2, \dots, p_n)$ es la función de confiabilidad, la cual a su vez se puede obtener de la función de estructura $\varphi(x)$. Para obtener la función de sobrevivencia de un sistema monótono, es suficiente con sustituir en la forma simple de la función de estructura las variables x_i , por las funciones de sobrevivencia $v_i(t)$ de sus componentes.

Ejemplo. Consideremos nuevamente la estructura definida en la Fig.3.9. Primeramente, para la función de estructura.

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 1 - (1 - x_2 x_5)(1 - x_2 x_6)(1 - x_1 x_4 x_5) \\ &= x_2 x_5 + x_2 x_6 + x_1 x_4 x_5 - x_2 x_5 x_6 - x_1 x_2 x_4 x_5\end{aligned}$$

De aquí, se tiene la función de confiabilidad

$$h(p) = p_2 p_5 + p_2 p_6 + p_1 p_4 p_5 - p_2 p_5 p_6 - p_1 p_2 p_4 p_5$$

y la función de sobrevivencia

$$\begin{aligned}v(t) &= v_2(t)v_5(t) + v_2(t)v_6(t) + v_1(t)v_4(t)v_5(t) \\ &\quad - v_2(t)v_5(t)v_6(t) - v_1(t)v_2(t)v_4(t)v_5(t)\end{aligned}$$

En el caso particular de que

$$v_6(t) = v_5(t) = v_4(t) = v_3(t) = v_2(t) = v_1(t)$$

se tiene

$$v(t) = 2v_1^2(t) - v_1^4(t)$$

3.12 CONCLUSIONES

La teoría desarrollada en este capítulo, tiene por objetivo final definir los métodos para encontrar los cortes mínimos de una red de confiabilidad; en el Apéndice B se aplican los métodos aquí desarrollados para definir, por el método de concatenación, los eslabones de una red, para a partir de ellos, definir los cortes mínimos; el cual es uno de los métodos fundamentales en el estudio de la confiabilidad de sistemas.

3.13 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ¹ "Mathematical Models for the Study of the Reliability of Systems". A. Kaufmann, D. Grouchko, R. Cruon, Academic Press, 1977.
- ² "Electric Energy Systems Theory: An Introduction". O.I. Elgerd, McGraw-Hill, 1973.
- ³ "Modeling and Evaluating the Reliability of Distribution Systems". R.N. Allan, E.N. Dialynas, I.R. Homer, IEEE Transactions, PAS-98, 1979, pp. 2181-2189.

CAPÍTULO 4

GENERALIDADES PARA LA EVALUACIÓN DE LA CONFIABILIDAD DE SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

La sociedad moderna depende, para su funcionamiento normal, del abastecimiento continuo de energía eléctrica que satisfaga siempre su demanda. Sin embargo esto no es posible en la realidad debido a que las fallas se presentan aleatoriamente y a que están, por lo general, fuera del control de los responsables del sistema. La probabilidad de que un consumidor quede desconectado se puede reducir incrementando el costo del sistema ya sea en las etapas de planeación, diseño u operación. Las sobreinversiones conducen a costos excesivos de operación los cuales, necesariamente, se reflejarán en la estructura de tarifas. Consecuentemente, las restricciones económicas podrían ser violadas para lograr que el sistema fuese muy confiable. De igual manera, las subinversiones conducen a la situación opuesta. Es evidente entonces que los criterios de economía y confiabilidad compiten entre sí y esto crea situaciones difíciles durante la toma de decisiones. Así pues, los criterios y las técnicas para la planeación, diseño y operación de los sistemas se han desarrollado siempre tratando de resolver y satisfacer el dilema existente entre las restricciones económicas y las necesidades de una mayor confiabilidad.

En este capítulo analizaremos únicamente los criterios técnicos que nos permitan definir los métodos requeridos para evaluar cuantitativamente, de una manera precisa, la confiabilidad de los sistemas y será hasta el último capítulo donde se analizará brevemente el criterio económico.

Los primeros intentos que se hicieron para resolver el problema de confiabilidad fueron desarrollados sobre bases determinísticas; es decir que al tratar de cuantificar las causas y los efectos de las fallas no se consideraba la naturaleza probabilística o estocástica del comportamiento del sistema, de las fluctuaciones en la demanda y de las fallas de los componentes.

La necesidad de una evaluación probabilística del comportamiento del sistema se hizo más urgente a partir de la década de 1930 y se comenzaron a analizar seriamente las razones por las que no se habían utilizado esos métodos anteriormente. Las principales razones que se encontraron fueron la falta de datos, limitaciones en los recursos de cómputo, falta de técnicas de confiabilidad realistas, aversión al uso de técnicas probabilísticas y una falta de entendimiento del criterio probabilístico e índices de riesgo. Ninguna de estas razones es válida actualmente dado que la gran mayoría de las empresas eléctricas cuentan con bancos de datos, los equipos de cómputo han sido mejorados grandemente, las técnicas de evaluación de la confiabilidad están muy desarrolladas y la mayoría de los ingenieros tienen un buen nivel de conocimiento de las técnicas probabilísticas.

Así entonces, el objetivo de este capítulo es ilustrar, de una manera general, el desarrollo secuencial que han tenido las técnicas de evaluación de confiabilidad aplicables a los sistemas eléctricos de potencia y conocer los principales índices de confiabilidad que pueden ser evaluados.

Es importante hacer notar que el análisis probabilístico de los sistemas de potencia no está limitado a la evaluación de la confiabilidad dado que estas técnicas se pueden aplicar, y de hecho ya se han utilizado, para la solución de otros problemas como los flujos de carga (flujos de carga probabilísticos) y estabilidad transitoria (estabilidad transitoria probabilística).

4.1 CONSIDERACIONES GENERALES PARA EL ANÁLISIS DE LA CONFIABILIDAD EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

Los sistemas eléctricos de potencia actuales son complejos, altamente integrados y mucho muy grandes. Aun las grandes instalaciones de cómputo no son lo suficientemente desarrolladas como para poder analizar de una manera completamente real y exhaustiva un sistema de potencia completo. Sin embargo, esto no es problema ya que el sistema se puede dividir en varios subsistemas los cuales, a su vez, se pueden estudiar independientemente.

De hecho, es poco probable que sea necesario e incluso deseable intentar analizar un sistema de manera integral; ya que no únicamente la cantidad de trabajo de computación sería excesivo sino que también los resultados serían tan vastos que sería difícil, si no es que imposible, interpretarlos adecuadamente.

La filosofía que se sigue actualmente, y que muy probablemente se seguirá utilizando en el futuro previsible, es dividir el sistema en los siguientes rubros y subsistemas principales:

(a) Plantas de generación. Cada estación o cada unidad en la planta se analiza separadamente. Este análisis crea un componente equivalente, cuyos índices pueden utilizarse en la evaluación de la confiabilidad de la capacidad de generación integral del sistema.

(b) Capacidad de generación global del sistema. La confiabilidad de la capacidad de generación se evalúa ignorando a la red; combinando por una parte todas las fuentes de generación y por la otra parte todas las cargas juntas.

(c) Redes (transmisión y/o distribución). Se evalúa la confiabilidad de la red ignorando la confiabilidad de las fuentes de generación y considerando sólo la habilidad de la red para abastecer las cargas demandadas.

(d) Sistemas compuestos generación/transmisión (Bulk Power Systems). Si se limita la red únicamente a la transmisión primaria, es realmente posible realizar una evaluación compuesta de la generación y esta parte de la red.

(e) Sistemas interconectados. En este caso se modela la generación de cada sistema y las líneas de enlace entre sistemas, pero se ignoran las redes internas de cada sistema.

(f) Subestaciones y estaciones de interconexión. Estos sistemas son, a menudo, bastante complicados y normalmente se analizan por separado en vez de incluirse como sistemas completos en la evaluación de la confiabilidad de la red. Esto crea componentes equivalentes, cuyos índices pueden utilizarse en la evaluación global de la red.

(g) Sistemas de protección. La confiabilidad de estos sistemas se analizan separadamente. Los índices obtenidos, se pueden utilizar para representar estos sistemas como

componentes equivalentes en la evaluación de la confiabilidad de la red.

El estudio de la confiabilidad de los subsistemas antes mencionados han recibido diferente grado de atención a través del tiempo y, por consecuencia, todos ellos se encuentran actualmente en un diferente grado de desarrollo. Al inicio, los sistemas de generación y los sistemas de transmisión fueron los más estudiados; posteriormente y en forma paralela se realizó algún trabajo con resultados aplicables indistintamente tanto a sistemas de transmisión como a sistemas de distribución. Sin embargo, posteriormente recibió un fuerte impulso el análisis de los sistemas compuestos generación-transmisión (Bulk Power Systems = BPS's), siendo éstos los que han recibido mayor atención en las últimas dos décadas y por lo tanto son los que han alcanzado el mayor grado de madurez a la fecha.

Con el objeto de tener el panorama más amplio posible de la variada problemática que se presenta en la evaluación de la confiabilidad de los sistemas de potencia, y de sus diferentes subsistemas, se analiza a continuación el escenario que visualiza, para este efecto, una institución muy importante como es el Instituto de Ingenieros en Electricidad y Electrónica (IEEE). Otras instituciones internacionales como son la Conferencia Internacional de Grandes Recursos Energéticos (CIGRE) y la CIRED también han desarrollado una buena labor en este campo; pero debido a que en sus grupos de trabajo se cuenta con la participación de los grandes expertos mundiales, los cuales han dirigido desde siempre los trabajos de confiabilidad desarrollados por el IEEE, los conceptos generales y los métodos de solución tienden a coincidir. Por ello, se considera necesario y suficiente, para los fines de este trabajo, analizar únicamente la metodología desarrollada por esta última institución.

4.2 PANORAMA VISUALIZADO POR EL IEEE

El IEEE a través del Application of Probability Methods Subcommittee perteneciente a la Power Engineering Society ¹ ²(PES), define en dos artículos técnicos pioneros, muy trascendentes, el porqué y el cómo se debe efectuar el análisis de confiabilidad en los sistemas de potencia. Aunque este análisis está primordialmente enfocado a los sistemas compuestos generación/transmisión (BPS's) nos permite, sin embargo, obtener el panorama más completo y actualizado de los conceptos generales, la mayoría de los cuales son también aplicables a los otros subsistemas.

4.2.1 DIFICULTADES PRINCIPALES PARA LA EVALUACIÓN DE LA CONFIABILIDAD DE LOS SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

Las complicaciones más importantes que se encuentran durante el desarrollo de metodología para la evaluación de la confiabilidad de los sistemas eléctricos se pueden clasificar dentro de las siguientes categorías:

- problemas conceptuales
- dificultades en el modelado
- dificultades para la solución de los modelos
- las relacionadas con las necesidades de datos

PROBLEMAS CONCEPTUALES

Antes de atacar los problemas técnicos involucrados, es necesario tener una idea clara de lo que se quiere lograr al estudiar la confiabilidad del sistema. La respuesta está muy lejos de ser obvia, y al tratar de encontrarla, es sorprendente el número de preguntas que no tienen respuestas claras. Estas incluyen las siguientes:

- La definición del propósito y usos de los estudios
- La selección adecuada de los eventos considerados como falla del sistema y de los índices de confiabilidad
- La selección de los niveles de riesgo aceptables

Los propósitos y usos de los estudios de confiabilidad en sistemas de potencia integrales son ampliamente debatidos. Sin embargo, la mayoría de los investigadores están de acuerdo en que tales estudios se realizan con el propósito de hacer estimaciones en las siguientes áreas:

- Disponibilidad del sistema (System adequacy), que es la capacidad del sistema para satisfacer la demanda de carga dentro de los valores nominales de sus componentes y dentro de los límites de voltaje establecidos, en cualquier tiempo.
- Seguridad del sistema (System security), que es la habilidad del sistema para soportar el impacto de cambios súbitos.

Mientras que ambos aspectos son igualmente importantes, en muchos estudios de planeación de sistemas solamente se toman en cuenta los índices de disponibilidad, debido principalmente, a las grandes complejidades que involucran las estimaciones de la seguridad.

Los resultados anteriores, se pueden utilizar para diferentes fines:

- comparar diseños alternativos
- comparar la confiabilidad del sistema contra valores normalizados de confiabilidad (si están disponibles)
- buscar el balance óptimo entre beneficios y costos

DIFICULTADES EN EL MODELADO

El objetivo de la etapa de modelado es representar, matemáticamente, todos los factores relevantes y sus efectos sin hacer el modelo resultante difícil de manejar. De cualquier manera, es necesario incluir un gran número de variables, algunas de las cuales son las siguientes:

- modos de falla de los componentes
- fallas dependientes (incluyendo fallas de modo común)

- características eléctricas de la carga
- modelo de demanda
- restricciones de energía
- respuesta del sistema en contingencias
- despacho de generación
- efectos de las condiciones atmosféricas en las líneas
- mantenimiento planeado

Algunos de ellos representan tareas bastante difíciles

PROBLEMÁTICA PARA LA SOLUCIÓN DE LOS MODELOS

En principio, la solución del modelo de confiabilidad de un sistema eléctrico de potencia es una tarea sencilla. Si se han desarrollado las etapas del algoritmo y se cuenta con una computadora de capacidad y velocidad infinitas no debería haber dificultades para la obtención de las soluciones. Sin embargo, como tal situación no existe, la evaluación de la confiabilidad de sistemas grandes requiere de un gran número de simplificaciones y aproximaciones para obtener un programa que sea realmente práctico.

Los programas para el cálculo de confiabilidad de sistemas de potencia constan normalmente de varios algoritmos, entre los cuales se pueden enumerar los siguientes:

- selección de contingencias
- evaluación de las contingencias seleccionadas
- acciones correctivas a través del sistema o del operador
- cálculo de índices

Es obvio que las técnicas que se utilizan para obtener soluciones rápidas, necesariamente involucran aproximaciones que penalizan o reducen la precisión. El reto es entonces balancear la rapidez y la precisión de tal manera que ambas estén dentro de valores aceptables. Un programa de cálculo será aceptado por el usuario únicamente en la medida de que exista una buena conciliación entre ambos factores.

NECESIDADES DE DATOS

Un programa de cálculo es tan bueno como lo son los datos de entrada que él usa. Los complejos modelos que describen los sistemas de potencia, las fallas de sus componentes, condiciones de carga, etc. requieren de una multitud de datos, algunos de los cuales están disponibles y algunos no lo están. Es necesario desarrollar mucho trabajo con el fin de identificar los datos que se necesitan realmente y, además, definir e implementar bases de datos adecuadas para la resolución de cada problema.

4.2.2 MODOS DE FALLA DE LOS SISTEMAS

¿Como se debe medir la confiabilidad de un sistema eléctrico?. Ésta es una pregunta que no es fácil de contestar y de hecho tiene una respuesta diferente para cada tipo de subsistema, como veremos a continuación.

SISTEMAS DE DISTRIBUCIÓN

Para los sistemas de distribución, una medida práctica de la confiabilidad del sistema se efectúa tomando como criterio las interrupciones del servicio a los consumidores individuales. Se pueden calcular diferentes índices; como la frecuencia de interrupción por usuario, la duración de la interrupción por interrupción y el tiempo de interrupción por usuario. Estas medidas de confiabilidad son muy apropiadas ya que la mayoría de las fallas del equipo, en los sistemas de distribución, afectan directamente al servicio del usuario. En otras palabras, la frecuencia y duración de las interrupciones al usuario son, de hecho, las consideraciones básicas para la planeación de un sistema de distribución. Este es un punto clave; un índice de confiabilidad es útil, como herramienta de planeación, únicamente en la medida en que refleja las metas que se están tratando de alcanzar.

Adicionalmente, las interrupciones al usuario, originadas en el sistema de distribución, se pueden relacionar directamente con eventos de interrupción de equipos específicos. Por lo tanto, si se mantienen registros históricos de las interrupciones del equipo de distribución, se pueden calcular fácilmente la confiabilidad de redes futuras.

Resumiendo lo anterior, los puntos clave son:

- a). La falla de un sistema de distribución está bien definida: Es la interrupción del servicio a los consumidores
- b). Los eventos que causan la falla del sistema se correlacionan con interrupciones bien definidas del equipo

SISTEMAS DE GENERACIÓN

En los sistemas de generación los eventos que causan la falla del sistema son un poco mas difíciles de definir; la capacidad de generación del sistema únicamente se reduce por la falla o salida de las unidades generadoras. Típicamente, la salida de una sola unidad no causa la interrupción del servicio. Es necesaria la salida simultánea de varias unidades para que ello ocurra. La distribución de probabilidades de la capacidad disponible se puede estimar utilizando métodos probabilísticos sencillos.

¿Que es entonces lo que se debe considerar como falla de un sistema de generación? Históricamente, se ha aplicado también el concepto de "interrupción del servicio"; entonces, se considera que un sistema de generación ha "fallado" cuando la carga demandada excede la generación disponible.

Sin embargo, algunas personas objetan la exactitud de esta definición. Se reconoce ampliamente, y sobre todo a medida que las interconexiones entre áreas y regiones se incrementan, que el criterio " capacidad igual a carga" no es el punto en el cual ocurre la interrupción al usuario debido a la reducción en la generación. Existe un margen adicional más allá de este punto debido a la posibilidad de importar potencia de emergencia o de

tomar otras medidas. Por otra parte, la iniciación de las "medidas de emergencia", ocurre mucho antes de que el margen entre capacidad y demanda se reduzca a cero. Entonces, en la planeación de sistemas de generación, se acepta que se deben considerar varios niveles de deficiencia de capacidad de generación así como la posibilidad de la aplicación de las acciones correctivas pertinentes.

Resumiendo con respecto a los mismos puntos que se consideraron para los sistemas de distribución se tiene lo siguiente:

a). El concepto falla de un sistema de generación está más indefinido que en un sistema de distribución. En particular, la interrupción de servicio a los consumidores no es la medida directa de la confiabilidad de un sistema de generación. Antes que eso se deben considerar otros eventos (por ejemplo, adquisición de potencia de emergencia, reducción de voltaje)

b). Los eventos que causan la falla de un sistema de generación son bien conocidos: ocurrencia simultánea de interrupciones independientes de las unidades generadoras

SISTEMAS COMPUESTOS GENERACIÓN/TRANSMISIÓN (BPS)

Otra vez, también en este caso, la primera reacción es definir la falla en términos de interrupción o reducción de carga. La literatura sobre confiabilidad de los sistemas de transmisión refleja esta tendencia. El procedimiento inicial es calcular la frecuencia y duración de la interrupción o reducción de carga. Sin embargo, se pueden calcular muchos otros parámetros adicionales.

La utilización del criterio de la interrupción de carga al usuario, no es, por si misma, la consideración más importante para el caso de la planeación de la confiabilidad de los BPS's . En la práctica, la preocupación más importante de los responsables de la planeación de un sistema de este tipo pudiera ser más bien evitar al máximo posible las interrupciones no controlables, en cascada o las generalizadas. De hecho, se puede aceptar la interrupción ocasional de ciertas cargas no críticas.

Otra meta importante de los responsables de la planeación, diseño y operación de los BPS's, es que las interrupciones que se presenten en el equipo no limiten la posibilidad del despacho de la generación.

4.2.3 ÍNDICES DE CONFIABILIDAD

En otra de las actividades tendientes a solucionar la problemática antes mencionada, el mismo organismo (IEEE Application of Probability Methods Subcommittee) publicó, en 1990, un trabajo muy interesante el cual, entre otras cosas, identifica los índices predictivos de confiabilidad para aplicación en la planeación, diseño y operación de los BPS's. A continuación estableceremos detalladamente estos índices ya que aunque fueron estructuralmente pensados para los BPS's, algunos de ellos son aplicables a los sistemas de distribución; ya que es bien importante dejar en claro que la confiabilidad de estos últimos sistemas tampoco queda completamente bien definida considerando únicamente los índices que los relacionan con las interrupciones directas al usuario.

TIPOS DE ÍNDICES.

Se pueden calcular un gran número de índices, los cuales se agrupan en dos diferentes

categorías:

a) Índices del sistema. Reflejan la disponibilidad global de energía del sistema (Recordar la definición de disponibilidad al principio de este capítulo)

b) Índices de los puntos de carga. Reflejan la disponibilidad en los puntos individuales de abastecimiento masivo

Estos dos conjuntos de índices pueden responder de manera muy diferente a las variaciones en los parámetros del sistema.

Los índices de los puntos de carga (o puntos de entrega) se evalúan en cada punto de abastecimiento masivo en el sistema y se pueden dividir en cuatro tipos diferentes: valores básicos, valores máximos, valores promedio y valores de bus aislado (o separación del sistema). Estos valores se presentan a continuación.³

ÍNDICES DE PUNTOS DE CARGA/SISTEMA

(i) Valores Básicos

- probabilidad de falla = $\sum P_j * P_{kj}$ donde P_j es la probabilidad de interrupción en j y P_{kj} es la probabilidad de que la carga en el bus k exceda la máxima carga que puede abastecerse durante la interrupción en j .
- frecuencia esperada de falla = $\sum F_j * P_{kj}$ donde F_j es la frecuencia de interrupción en j .
- frecuencia esperada de violación de voltaje = número de contingencias que causan violación de voltaje en el bus k durante el periodo de tiempo de interés T .
- frecuencia esperada de reducción de carga = número de contingencias que requieren que la carga sea reducida en el bus k o aislamiento del bus k durante el tiempo T .
- carga no abastecida esperada (MW) = carga total no abastecida en el bus k en el tiempo T debido a reducciones de carga en el bus k o debida a aislamiento del bus k .
- energía no abastecida esperada (MWh) = energía total no abastecida en el bus k en el tiempo T debido a reducción de carga o a aislamiento del bus k .
- duración esperada de reducción de carga (h) = tiempo total durante el periodo T durante el cual la carga es reducida en el bus k o en que el bus k es aislado.

(ii) Valores Máximos

- máxima reducción de carga (MW) = el valor más grande de todas las reducciones de carga ocurridas en el bus k en el tiempo T .
- máxima reducción de energía (MWh) = el valor más grande de todas las reducciones de energía en el bus k en el tiempo T .

- máxima duración de reducción de carga (h) = el valor más grande de todas las duraciones de reducción de carga en el bus k durante el tiempo T .

(iii) Valores Promedio

- carga reducida promedio (MW/reducción) = valor esperado de reducción de carga en el bus k en el tiempo T dividido entre el número esperado de reducciones de carga.
- energía promedio no abastecida (MWh/reducción) = valor esperado de energía no abastecida en el bus k en el tiempo T dividido entre el número esperado de reducciones de carga.
- duración promedio de reducción de carga (horas/reducción) = duración esperada de reducción de carga en el bus k en el tiempo T dividida entre el número esperado de reducciones de carga.

(iv) Valores de Bus Aislado (o separación del sistema)

- Número esperado de reducciones de carga.
- Reducción de carga esperada.
- Energía no abastecida esperada.
- Duración esperada de reducción de carga.

Estos últimos cuatro índices se definen de manera similar a sus valores básicos equivalentes con la diferencia de que las contingencias incluidas en los cálculos son únicamente aquellas que causan el aislamiento del bus k de todas las fuentes de generación.

Es importante hacer notar que todos los índices anteriores se pueden calcular para cualquier periodo de tiempo que sea de interés. Normalmente esto se hace con base en un periodo de un año; en este caso se llaman índices anuales. Sin embargo, ellos pueden ser calculados para cualquier otro periodo; por ejemplo mensual, estacional o inclusive se puede considerar cualquier otra condición particular de operación.

A continuación se establecen los índices de sistema; estos índices se calculan para el sistema en forma total o para una área definida del mismo. En este caso los índices se calculan de manera global, ya sea para el sistema o área seleccionados y no bus por bus. Por consecuencia, ello incluye el efecto de la ocurrencia de contingencias en todos los buses de una manera simultánea.

ÍNDICES DE SISTEMA

(i) Valores básicos

- índice global de interrupción de potencia (MW/MW.año) = carga total no abastecida en el sistema/carga pico del sistema.
- potencia promedio global en MW reducidos/disturbio (MW/disturbio) = reducción total

Generalidades para la evaluación de la confiabilidad de sistemas eléctricos de potencia

de carga en el sistema/número total de disturbios. **[Nota:** El número total de disturbios no es igual al número de reducciones puntuales ya que cada disturbio puede causar reducciones de carga en uno o más buses.]

- índice global de energía no abastecida por unidad de potencia del sistema (MWh/mW.año) = energía total no abastecida en el sistema/ carga máxima del sistema.
- índice global modificado de energía no abastecida por unidad de potencia del sistema = índice anterior /número de horas en un año (8760).

(ii) Valores Máximos

- máxima reducción de carga en el sistema bajo cualquier condición de contingencia (MW).
- máxima energía del sistema no abastecida bajo cualquier condición de contingencia (MWh).

Los dos índices anteriores se definen de una manera similar a los valores equivalentes dados antes con la salvedad de que se consideran todos los buses simultáneamente.

(iii) Valores Promedio

- número promedio de reducciones de carga/punto de carga.
- carga promedio reducida (MW)/punto de carga.
- energía promedio no abastecida (MWh)/punto de carga.
- duración promedio de reducciones de carga (h)/punto de carga.
- número promedio de violaciones de voltaje/punto de carga.

Los cinco índices anteriores se evalúan sumando los valores de los índices básicos equivalentes dados anteriormente para todos los buses y dividiéndolos entre el número total de buses del sistema.

4.2.4 PRINCIPALES USOS Y MÉTODOS PARA EL ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD DE LOS SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

Los encargados de la planeación, diseño y operación de las empresas eléctricas están enfrentando constantemente el reto de mantener y mejorar la confiabilidad de los sistemas. Debido a las severas restricciones financieras bajo las cuales deben operar estas empresas, así como a la presión de los usuarios para mantener las tarifas a un mínimo, los directivos de esas compañías están buscando siempre disponer de las herramientas más adecuadas para determinar que proyectos son los más adecuados, basados en su confiabilidad y economía.

Analizando el problema de la confiabilidad desde la perspectiva del tiempo, podemos decir que la estimación de la confiabilidad se puede realizar para dos periodos distintos: el pasado y el futuro.

La estimación del comportamiento pasado del sistema es valioso porque:

- a) identifica las áreas débiles que necesitan reforzarse o modificarse
- b) establece tendencias cronológicas del comportamiento de la confiabilidad
- c) establece índices que sirven como guía para definir los valores aceptables en futuras evaluaciones de la confiabilidad del sistema
- d) permite que predicciones anteriores se puedan comparar con las experiencias reales durante la operación
- e) monitorea la respuesta a los cambios en el diseño del sistema

La estimación de la confiabilidad del comportamiento de sistemas futuros es útil porque predice:

- a) como se espera que se comporte el sistema en el futuro
- b) los beneficios de diseños alternativos del sistema, posibles refuerzos y planes de expansión
- c) los efectos de las políticas alternativas de operación y mantenimiento
- d) las relaciones beneficio/costo de las alternativas asociadas con (b) y (c)

Los métodos cuantitativos que tradicionalmente se han utilizado para definir la confiabilidad de un sistema son:

✓ Análisis Comparativos

En los que se comparan los méritos relativos a la confiabilidad de dos alternativas. Este método se usa para la comparación entre planes similares o alternativos. También se pueden utilizar para establecer el rango de prioridades de proyectos que están compitiendo para obtener un financiamiento. Probablemente, cuando es necesario bajar costos, el análisis comparativo se puede utilizar para seleccionar los proyectos que deben retrasarse o cancelarse.

En estas comparaciones, el valor absoluto o verdadero de la confiabilidad no es muy crítico. Este es un hecho muy importante, dado que el error que se pudiera tener, debido al uso de datos no muy precisos o de las simplificaciones que se tengan que hacer para reducir la complejidad de los cálculos, se puede diluir o "lavar" al comparar las alternativas entre sí.

Aunque esta premisa puede tener en algunos casos sus inconvenientes o restricciones, en términos generales es aceptable y generalmente es aceptada como cierta.

✓ Estimación de la Confiabilidad Absoluta.

Esta es una aplicación más sofisticada de la teoría de la confiabilidad que permite el cálculo de índices absolutos, los cuales se pueden comparar con valores históricos o con valores normalizados en caso de que éstos existan. Este procedimiento tiene la ventaja de que reduce una tarea muy complicada al cálculo de términos simples. Sin embargo, la desventaja es que, en este tipo de cálculos, se debe disponer de datos muy precisos para producir resultados adecuados y este tipo de datos son muy difíciles de obtener. Además, la metodología para el cálculo debe ser también muy precisa, ya que las suposiciones y simplificaciones introducen errores que no pueden ser "lavados", posteriormente, como en el caso de los estudios comparativos.

✓ Evaluación Beneficio-Costo

Este tipo de evaluación compara los ahorros resultantes de la confiabilidad, con el costo de ofrecer ese nivel de confiabilidad.

El método requiere de otra fuente de datos que definan el valor que tiene la confiabilidad para los consumidores, o dicho de otra manera, el costo que tienen las interrupciones para los consumidores. La estimación de estos datos es factible en el caso de consumidores industriales y comerciales y más difícil de obtener en el caso de los consumidores residenciales.

En todos los casos (industrial, comercial o residencial) al costo económico directo se le debe adicionar, de alguna manera, el costo social provocado por las interrupciones; algunos ejemplos pueden ser los daños accidentales que se provocan, el aumento de la criminalidad y el vandalismo y el costo de la aplicación de programas de emergencia.

4.2.5 PROCEDIMIENTOS DE CÁLCULO Y DISPOSITIVOS UTILIZADOS

Procedimientos de Cálculo

Debido a la gran diversidad de sistemas, problemas, objetivos, métodos, etc. que normalmente se utilizan para evaluar la confiabilidad de redes eléctricas; existen, evidentemente, un gran número de técnicas de cálculo. Sin embargo se puede decir que todas ellas se pueden dividir en dos grupos básicos: los procedimientos analíticos y los procedimientos de simulación. Esta última técnica es un procedimiento de simulación estocástica generalmente conocido como simulación de Monte Carlo.

Las técnicas analíticas representan al sistema por medio de un modelo matemático y evalúan los índices de confiabilidad a partir de ese modelo utilizando soluciones matemáticas. Este es un método directo y requiere de tiempos de cómputo relativamente cortos, comparados con los procesos de simulación. Sus limitaciones incluyen la dificultad para modelar el comportamiento de sistemas complejos y la evaluación de funciones de distribución de probabilidades.

Las simulaciones de Monte Carlo estiman los índices de confiabilidad simulando el proceso verdadero y el comportamiento aleatorio del sistema. Este método, entonces, trata el problema como una serie de experimentos reales conducidos en un tiempo simulado. Los grandes tiempos de cómputo asociados con este método pueden, en ciertos casos, ser excesivos y por lo tanto esto es una limitación. Sin embargo, algunas compañías cuentan con

arreglos especiales de cómputo, y para ellas ésta no es una limitación en ninguno de sus estudios.

Existen numerosas diferencias en algunos conceptos que utilizan estos dos grupos básicos. Entre otras se pueden mencionar las siguientes: contingencias seleccionadas, modos de falla que causan las contingencias, procedimientos de restablecimiento y simulación de las acciones correctivas, los modelos utilizados para evaluar los índices de confiabilidad, los modelos de flujos de carga, los modelos de carga, los modelos de generación. etc.

Dispositivos Utilizados⁴

Los dispositivos de cómputo que están en uso, desarrollo e investigación, emplean una gran variedad de soluciones en cuanto a principios de funcionamiento y del equipo que los integra; sin embargo, todos ellos se pueden agrupar en dos grandes categorías. A la primera de ellas corresponden las máquinas que resuelven los problemas en términos puramente matemáticos y por lo tanto requieren de la formulación del modelo matemático antes de programarse (dispositivos analíticos). El segundo grupo lo constituyen los dispositivos que son modelos físicos de los sistemas verdaderos objeto de la investigación, en los cuales las mediciones de cantidades apropiadas en el modelo producen las soluciones (simuladores).

Se puede hacer una segunda distinción: algunos dispositivos son de "propósito general", es decir, que pueden programarse para resolver una gran variedad de problemas. Otros son de "propósito especial" donde el equipo está diseñado para resolver un tipo de problema específico.

Dispositivos Analíticos

- Computadora digital de propósito general (secuencial).
- Computadora digital de propósito general (en paralelo).
- Computadora digital de propósito especial (procesador en paralelo).
- Computadora analógica de propósito general. Está construida de componentes electromecánicas y electrónicas conectadas de manera que los valores de voltaje en determinados puntos de la máquina dan las soluciones del problema matemático que se está investigando.
- Computadora híbrida. Consta de una parte analógica como unidad de solución del problema y de una parte digital para control y almacenamiento de datos; entre otras funciones.

Simuladores

Todos los simuladores son dispositivos de propósito especial y por lo tanto solamente se pueden aplicar para el tipo de problema para el cual se diseñan. Los diferentes tipos que existen son:

- Simulador analógico

- Simulador digital
- Simulador híbrido

4.3 CONCLUSIONES

En este capítulo se hace un resumen de los métodos y procedimientos que tradicionalmente se han utilizado para la determinación de la confiabilidad de sistemas eléctricos de potencia y se presentan los índices de confiabilidad que proponen instituciones como IEEE y CIGRE, esto nos permite aseverar que dichos índices no se pueden definir de una manera personal y caprichosa sino que se deben seleccionar de entre los que ya están propuestos actualmente ya que han sido definidos después de un trabajo muy cuidadoso por grupos de especialistas.

4.4 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

¹ "Bulk Power System Reliability Assessment - Why and How? Part I: Why?". J. Endrenyi, P.F. Albretch, R. Billington, G.E. Marks, N.D. Reppen, L. Salvaderi, IEEE Transactions, PAS-101, 1982, pp. 3439-3445.

² "Bulk Power Systems Reliability Assessment - Why and How? Part II: How?". J. Endrenyi, P.F. Albretch, R. Billington, G.E. Marks, N.D. Reppen, L. Salvaderi, IEEE Transactions, PAS-101, 1982, pp. 3446-3456.

³ "Bulk System Reliability - Predictive Indices". IEEE Task Force on Predictive Indices, APM Subcommittee. IEEE Transactions on Power Systems, Vol.5, 1990, pp. 1204-1213.

⁴ "Computing Methods and Devices for the Reliability Evaluation of Large Power Systems". K. Gallyas, J. Endrenyi, IEEE Transactions, PAS-100, 1981, pp. 1250-1258.

CAPÍTULO 5

TÉCNICAS PARA LA EVALUACIÓN DE LA CONFIABILIDAD DE SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

En el capítulo anterior se estableció que existen una gran variedad de técnicas y dispositivos para evaluar la confiabilidad de los sistemas eléctricos; por lo tanto, y antes que nada, es necesario decir que en este trabajo estudiaremos únicamente los métodos analíticos susceptibles de resolverse con la utilización de computadoras digitales de propósito general.

El procedimiento que normalmente se utiliza para la evaluación de la confiabilidad de un sistema, por métodos analíticos, es como sigue:

- Se descompone al sistema en sus partes constituyentes;
- Se estima la confiabilidad de cada una de ellas;
- Se combinan las confiabilidades de los componentes, utilizando una o más técnicas numéricas, para estimar la confiabilidad del sistema completo.

El nivel al cual se debe llegar al descomponer el sistema debe ser tal que las confiabilidades individuales de cada una de los componentes se pueda conocer con un nivel de precisión razonable y aceptable; por lo tanto, no es necesario descomponerlo en sus partes reales individuales, sino mas bien, en un conjunto de dispositivos o subsistemas cuyas confiabilidades se conozcan de la experiencia.

Los métodos analíticos, utilizados para la evaluación de la confiabilidad de sistemas, hacen uso de los modelos probabilísticos que se definieron en el Capítulo 2; de las técnicas generales de la teoría de la confiabilidad discutidas en el Capítulo 3; y de las Cadenas de Markov, cuya teoría se establece en el Apéndice A.

El objetivo principal de este capítulo es definir el significado y la simbología de los principales parámetros que se utilizan de manera generalizada en este tipo de estudios. El otro objetivo es definir un conjunto de técnicas generales que puedan utilizarse para evaluar, de una manera adecuada, la confiabilidad de un sistema real y que consideren para ello: la estructura del sistema, su topología, lógica de operación y las distribuciones de probabilidad asociadas con los componentes del sistema.

5.1 EVALUACIÓN DE LA CONFIABILIDAD UTILIZANDO DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

5.1.1 TERMINOLOGÍA DE LAS DISTRIBUCIONES

La terminología y el significado de las distribuciones de probabilidad se establecieron en el Capítulo 2; sin embargo, es importante en este punto recordar de una manera muy breve los principales resultados. Al mismo tiempo, trataremos de "traducir" la simbología que utilizan los matemáticos, desde una perspectiva general, a la que se utiliza de una manera casi

universal en el estudio de la confiabilidad de sistemas eléctricos de potencia.

La función de distribución acumulativa de falla o función de distribución de falla se designa por $Q(t)$. Su función complementaria, como ya se estableció, se llama función de sobrevivencia y se designará en lo sucesivo como $R(t)$, entonces

$$R(T) = 1 - Q(t) \quad \text{Ec.5. 1}$$

La derivada de la función de distribución de una variable aleatoria continua se llama función de densidad; en este caso la función de densidad de falla, $f(t)$, se define

$$f(t) = \frac{d Q(t)}{dt} = - \frac{d R(t)}{dt} \quad \text{Ec.5. 2}$$

o

$$Q(t) = \int_0^t f(t) dt \quad \text{Ec.5. 3}$$

y

$$R(t) = 1 - \int_0^t f(t) dt \quad \text{Ec.5. 4}$$

Como el área bajo la curva de la función de densidad debe ser igual a la unidad, la ecuación anterior también se puede escribir como

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(t) dt \quad \text{Ec.5. 5}$$

En el caso de variables aleatorias discretas, las tres últimas integrales se pueden reemplazar por sumatorias.

Otra función, especialmente importante, es la tasa de daño; ya se definió matemáticamente en el Capítulo 2 pero es importante redefinirla en palabras, ya que será básico su entendimiento para el resto de este trabajo

$$\lambda(t) = \frac{\text{número de fallas por unidad de tiempo}}{\text{número de componentes expuestos a la falla}} \quad \text{Ec.5. 6}$$

Se debe hacer notar que esta tasa de transición tiene un uso más amplio y que se usa, por ejemplo, en conjunción con la ocurrencia de otros eventos, tales como la reparación.

Considérese el caso en el cual se tiene un número fijo N_0 de componentes idénticos. Sean

$$N_s(t) = \text{número de sobrevivientes en el tiempo } t$$

$$N_f(t) = \text{número de componentes fallados en el tiempo } t$$

$$N_0 = N_s(t) + N_f(t)$$

En cualquier tiempo t , la confiabilidad o función de sobrevivencia $R(t)$ está dada por

$$R(t) = \frac{N_s(t)}{N_0} = \frac{N_0 - N_f(t)}{N_0} = 1 - \frac{N_f(t)}{N_0} \quad \text{Ec.5. 7}$$

Similarmente, la probabilidad de falla o función de distribución de falla $Q(t)$ es

$$Q(t) = \frac{N_f(t)}{N_0} \quad \text{Ec.5. 8}$$

Lo cual concuerda con la relación dada en la ecuación 5.1

Además

$$\frac{dR(t)}{dt} = - \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{-1}{N_0} \frac{dN_f(t)}{dt} \quad \text{Ec.5. 9}$$

Cuando $dt \rightarrow 0$, de acuerdo a la ecuación 5.2

$$f(t) = \frac{1}{N_0} \frac{dN_f(t)}{dt} \quad \text{Ec.5. 10}$$

Considerando las ecuaciones 5.6, la ecuación 5.10 da el valor de la tasa de falla cuando el número de componentes expuestas a falla es N_0 es decir cuando $t=0$. Por lo tanto, la función de densidad de falla y la tasa de falla son idénticas en $t=0$, pero únicamente en ese tiempo.

De la ecuación 5.6, la expresión general para la tasa de falla en el tiempo t es

$$\lambda(t) = \frac{1}{N_s(t)} \frac{dN_f(t)}{dt} \quad \text{Ec.5. 11}$$

Si multiplicamos la ecuación anterior por $\frac{N_0}{N_0}$, reagrupamos variables y aplicamos las ecuaciones 5.7 y 5.11 se tiene que

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad \text{Ec.5. 12}$$

y de acuerdo con la ecuación 5.2

$$\lambda(t) = -\frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} \quad \text{Ec.5. 13}$$

La ecuación 5.12 es una ecuación muy interesante por varias razones; primeramente confirma el hecho de que $\lambda(0) = f(0)$ ya que $R(0)=1$. Adicionalmente, muestra que la tasa de falla es una función condicional de la función de densidad de falla; la relación condicional es la función de sobrevivencia. En términos físicos esta relación significa que la función de densidad de falla permite evaluar la probabilidad de falla en cualquier periodo de tiempo en el futuro; mientras que la tasa de falla permite evaluar la probabilidad de falla en el siguiente periodo de tiempo dado que se ha sobrevivido hasta el tiempo t .

Ahora bien, de la ecuación 5.13

$$\int_1^{R(t)} \frac{1}{R(t)} \bullet dR(t) = \int_0^t -\lambda(t) dt \quad \text{Ec.5. 14}$$

$$\ln R(t) = \int_0^t -\lambda(t) dt$$

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(t) dt\right]$$

Para el caso especial en que λ es una constante la ecuación anterior se simplifica a

$$R(t) = e^{-\lambda t} \quad \text{Ec.5. 15}$$

Que es la distribución exponencial.

5.1.2 SISTEMAS EN SERIE

Considérese un sistema que consta de dos componentes independientes 1 y 2 conectadas en serie, desde el punto de vista de confiabilidad, como se muestra en la Fig.5.1. Este arreglo implica que ambos componentes deben trabajar para asegurar el éxito del sistema.

Sea

R_1, R_2 = probabilidad de la operación exitosa de los componentes 1 y 2 respectivamente, y
 Q_1, Q_2 = probabilidad de falla de los componentes 1 y 2 respectivamente.

Dado que el éxito y falla son mutuamente exclusivos y complementarios

$$R_1 + Q_1 = I \quad \text{y} \quad R_2 + Q_2 = I \quad \text{Ec.5. 16}$$

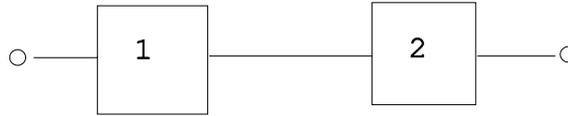


Fig.5. 1 Sistema de dos componentes en serie

El requisito para el éxito del sistema es que 1 y 2 deben estar trabajando simultáneamente. Entonces la probabilidad de éxito del sistema está dada por

$$R_S = R_1 R_2 \quad \text{Ec.5. 17}$$

Si existen n componentes en serie, la ecuación anterior se puede generalizar de la siguiente manera

$$R_S = \prod_{i=1}^n R_i \quad \text{Ec.5. 18}$$

Ahora bien, si se introducen probabilidades dependientes del tiempo, por ejemplo, la probabilidad de sobrevivir por un periodo de tiempo t , entonces las ecuaciones anteriores también son función del tiempo y se pueden describir como

$$R_S(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \quad \text{Ec.5. 19}$$

Entonces introduciendo la definición de tasa de falla se tiene

$$R_S(t) = \exp \left[- \int_0^t \lambda_1(t) dt \right] \cdot \exp \left[- \int_0^t \lambda_2(t) dt \right] \quad \text{Ec.5. 20}$$

y para un sistema de n componentes en serie con tasas de falla $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$

$$R_S(t) = \prod_{i=1}^n \exp \left[- \int_0^t \lambda_i(t) dt \right] \quad \text{Ec.5. 21}$$

Estas dos últimas ecuaciones son aplicables para todas las distribuciones de falla. Las ecuaciones no exigen que todas las componentes deban tener la misma distribución y por lo tanto cada componente del sistema se puede representar por su propia distribución. Consecuentemente, si se conoce la expresión analítica de $\lambda_i(t)$ y puede ser integrada, la evaluación de $R_S(t)$ para cualquier conjunto de componentes en serie es totalmente posible. Si la expresión de $\lambda_i(t)$ no se puede definir analíticamente y no es fácil o posible integrarla directamente, todavía se tiene el recurso de evaluarla $R_S(t)$ utilizando técnicas numéricas de

integración.

En el caso especial de una distribución exponencial y para el caso de un sistema de n componentes en serie

$$R_S(t) = \prod_{i=1}^n \exp(-\lambda_i t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i t\right) \quad \text{Ec.5. 22}$$

En el caso de que se considere un solo componente equivalente teniendo una tasa de falla $\lambda_e(t)$ para representar el sistema completo tenemos

$$R_S(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda_e(t) dt\right] = \prod_{i=1}^n \exp\left[-\int_0^t \lambda_i(t) dt\right] \quad \text{Ec.5. 23}$$

y para el caso exponencial

$$R_S(t) = \exp(-\lambda_e t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i t\right) \quad \text{Ec.5. 24}$$

No se puede deducir una relación analítica simple entre $\lambda_e(t)$ y $\lambda_i(t)$. Sin embargo la ecuación anterior muestra que para el caso de una distribución exponencial; es decir cuando la tasa de daño es constante

$$\lambda_e = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{Ec.5. 25}$$

lo cual indica que la tasa efectiva de falla de un sistema en serie que está integrado por componentes cuyas confiabilidades siguen una distribución exponencial es simplemente la suma de las tasas de falla de las componentes individuales.

5.1.3 SISTEMAS EN PARALELO

Para el caso de un sistema integrado por dos componentes en paralelo como en la Fig.5.2. y considerando probabilidades dependientes del tiempo se tiene que

$$Q_p(t) = Q_1(t)Q_2(t) \quad \text{Ec.5. 26}$$

$$R_p(t) = 1 - Q_1(t)Q_2(t) \quad \text{Ec.5. 27}$$

y para un sistema en paralelo de n componentes

$$Q_p(t) = \prod_{i=1}^n Q_i(t) \quad \text{Ec.5. 28}$$

$$R_p(t) = 1 - \prod_{i=1}^n Q_i(t) \quad \text{Ec.5. 29}$$

Por lo tanto usando la ecuación 5.14 y considerando que el sistema presenta las tasas de daño $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$, se tiene

$$Q_p(t) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \exp \left[- \int_0^t \lambda_i(t) dt \right] \right) \quad \text{Ec.5. 30}$$

$$R_p(t) = 1 - \prod_{i=1}^n \left(1 - \exp \left[- \int_0^t \lambda_i(t) dt \right] \right) \quad \text{Ec.5. 31}$$

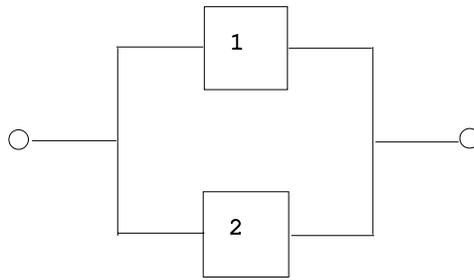


Fig.5. 2 **Sistema de dos componentes en paralelo**

Los comentarios que se hicieron para el sistema serie son también válidos para este caso. Consecuentemente, estas últimas ecuaciones se pueden resolver para cualquier tipo de distribución para obtener la probabilidad de que el sistema sobreviva o, alternativamente, falle en un periodo de tiempo t .

Consideremos otra vez el caso especial de una tasa de falla constante, es decir, una distribución exponencial. Para un sistema de n componentes se tiene

$$Q_p(t) = \prod_{i=1}^n [1 - \exp(-\lambda_i t)] \quad \text{Ec.5. 32}$$

$$R_p(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - \exp(-\lambda_i t)] \quad \text{Ec.5. 33}$$

Es evidente que no se puede derivar una tasa de falla equivalente para representar el sistema paralelo completo debido a que, en este caso, la confiabilidad del sistema no se puede expresar como una función exponencial sencilla sino como una serie de funciones

exponenciales. Por lo tanto, se puede concluir que mientras que la distribución resultante de un sistema en serie, que tiene las confiabilidades de sus componentes exponencialmente distribuidas, es también una distribución exponencial; la distribución resultante de un sistema paralelo que tiene las confiabilidades de sus componentes exponencialmente distribuidas es no-exponencial y por tanto la tasa de daño resultante no es constante sino que es función del tiempo.

5.2 EVALUACIÓN DE LA CONFIABILIDAD UTILIZANDO CADENAS DE MARKOV

En el inciso anterior se describieron las técnicas analíticas para evaluar la confiabilidad de sistemas eléctricos. Aunque estas técnicas se pueden aplicar tanto a sistemas reparables como no reparables; en el primer caso se asume que el proceso de reparación es instantáneo o despreciable, comparado con el tiempo de operación. Esta es una restricción inherente a el método anterior y por lo tanto se necesita utilizar otra técnica si dicha suposición no es válida. Una técnica importante que resuelve ese problema, la cual ha recibido considerable atención y uso en los últimos años, se conoce como proceso de Markov o modelado de Markov.¹

Los técnicas que utilizan los procesos de Markov se pueden aplicar al estudio del comportamiento aleatorio de sistemas que varían, discreta o continuamente, tanto con respecto al espacio de estados como al tiempo. Los problemas de confiabilidad tratan, normalmente, con sistemas que son discretos en el espacio (tienen un número discreto e identificable de estados) y continuos en el tiempo. Este tipo de procesos reciben el nombre de Cadenas de Markov y sus características se definen en el Apéndice A^{2,3}. Los requisitos, necesarios y suficientes, para poder aplicar esta técnica, son que el sistema sea estacionario, el proceso no tenga memoria y que los estados del sistema sean identificables; todas estas características se encuentran definidas en el mismo apéndice.

Es necesario insistir en que las técnicas que utilizaremos en los sucesivo se aplican sólo a sistemas que se puedan modelar como procesos de Markov estacionarios; es decir, que las probabilidades de falla y reparación durante un intervalo de tiempo fijo sean constantes. Esto implica que las características de falla y reparación de las componentes están asociadas con distribuciones exponenciales.

5.2.1 MODELADO DE UN SISTEMA REPARABLE

5.2.1.1 DEFINICIONES GENERALES

Considérese el caso de un solo componente reparable para el cual la tasa de falla y reparación son constantes. El diagrama de estados de transición para este componente se muestra en la Fig.5.3. Definamos:

$P_0(t)$ = probabilidad de que el componente esté operable en el tiempo t

$P_1(t)$ = probabilidad de que el componente esté fallado en el tiempo t

λ = tasa de falla

μ = tasa de reparación

La función de densidad de falla para un componente con una tasa de daño constante λ , como ya se estableció, está dada por $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

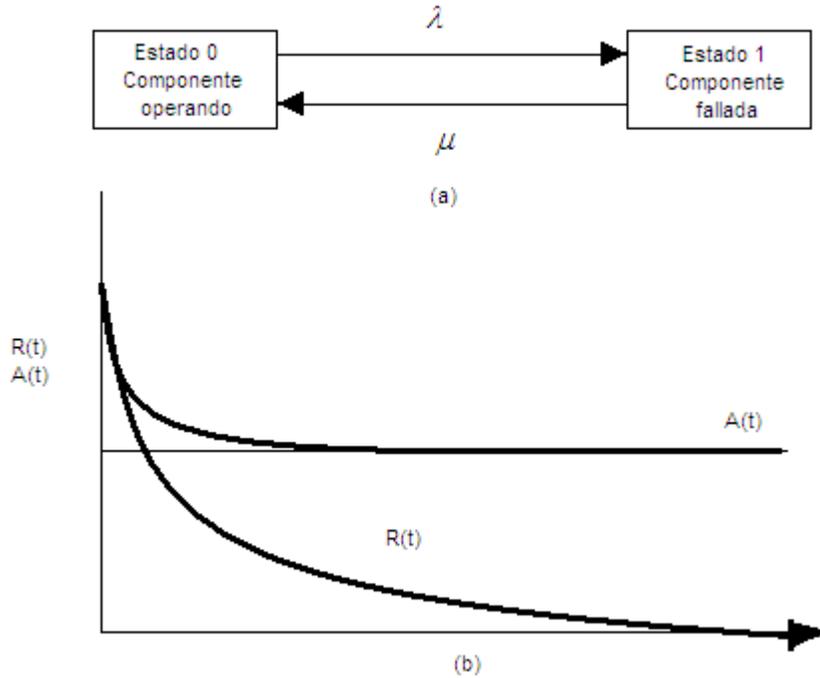


Fig.5. 3 Sistema reparable de un solo componente. (a) Diagrama de espacio de estados. (b) Variación de la confiabilidad y disponibilidad dependiente del tiempo

Las funciones de densidad para los estados de operación y falla son entonces

$$f_0(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad y \quad f_1(t) = \mu e^{-\mu t}, \text{ respectivamente}$$

Los parámetros λ y μ se conocen como tasa de transición de estados, ya que representan la tasa a la cual transita el sistema de un estado a otro y se definen como sigue

$$\lambda = \frac{\text{número de fallas de un componente en el periodo de tiempo dado}}{\text{periodo total de tiempo en que el componente estuvo operando}}$$

$$\mu = \frac{\text{número de reparaciones de un componente en el periodo de tiempo dado}}{\text{periodo total de tiempo en que el componente estuvo en reparación}}$$

Ec.5. 34

El concepto de tasa de transición conduce a la siguiente definición

$$\text{Tasa de transición} = \frac{\text{Número de veces que ocurre una transición desde un estado dado}}{\text{Tiempo en ese estado}} \quad \text{Ec.5. 35}$$

5.2.1.2 EVALUACIÓN DE LAS PROBABILIDADES EN EL TIEMPO

Consideremos un intervalo de tiempo incremental, dt , el cual es lo suficientemente pequeño de tal manera que la probabilidad de que ocurran dos o más eventos sea prácticamente cero.

La probabilidad de que el sistema esté en el estado de operación después de este intervalo dt esta dada por[*Probabilidad de estar operando en el tiempo t y no fallar en el tiempo dt*] + [*Probabilidad de estar en falla en el tiempo t y de ser reparado en el tiempo dt*]. Expresando lo anterior en forma de ecuaciones se tiene

$$P_0(t + dt) = P_0(t)(1 - \lambda dt) + P_1(t)(\mu dt) \quad \text{Ec.5. 36}$$

Similarmente

$$P_1(t + dt) = P_1(t)(1 - \mu dt) + P_0(t)(\lambda dt) \quad \text{Ec.5. 37}$$

De la ecuación 5.36 se tiene

$$\frac{P_0(t + dt) - P_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \quad \text{Ec.5. 38}$$

Pero

$$\frac{P_0(t + dt) - P_0(t)}{dt} \Big|_{dt \rightarrow 0} = \frac{dP_0(t)}{dt} = P_0'(t) \quad \text{Ec.5. 39}$$

Entonces

$$\begin{aligned} P_0'(t) &= (-\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)) \\ P_1'(t) &= \lambda P_0(t) - \mu P_1(t) \end{aligned} \quad \text{Ec.5. 40}$$

Las ecuaciones anteriores forman un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, que puede expresarse en forma matricial como sigue

$$\begin{bmatrix} P_0'(t) & P_1'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0(t) & P_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} \quad \text{Ec.5. 41}$$

La matriz de coeficientes 5.41 no es una matriz estocástica de probabilidades de transición porque los renglones de ella suman cero y los de la matriz estocástica de probabilidades de transición debe ser igual a la unidad.

Resolviendo el sistema anterior por cualquier método, por ejemplo por transformadas de Laplace, y con las condiciones iniciales $P_0(0) = 1$ y $P_1(0) = 0$, la solución para las probabilidades dependientes del tiempo para un sistema de un solo componente reparable está dada por

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda e^{-(\lambda + \mu)t}}{\lambda + \mu} \quad \text{Ec.5. 42}$$

$$P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda e^{-(\lambda + \mu)t}}{\lambda + \mu} \quad \text{Ec.5. 43}$$

Las ecuaciones 5.42 y 5.43 dan las probabilidades de que el sistema de un solo componente reparable se encuentre operando o en estado de falla, respectivamente, dado que el sistema estaba operando en el tiempo $t=0$.

5.2.1.3 EVALUACIÓN DE LAS PROBABILIDADES DE ESTADO ESTABLE

El estado límite o las probabilidades de estado estable no tendrán un valor cero suponiendo que el sistema es ergódico. De las dos últimas ecuaciones se puede ver claramente que cuando $t \rightarrow \infty$

$$P_0 = P_0(\infty) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{Ec.5. 44}$$

$$P_1 = P_1(\infty) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad \text{Ec.5. 45}$$

Estas expresiones para probabilidades límite son aplicables independientemente del estado en que se encuentre el sistema en el tiempo $t=0$.

Cuando se tiene una distribución exponencial, el tiempo medio a la falla (*MTTF*) es

$$MTTF = m = 1 / \lambda \quad \text{Ec.5. 46}$$

Similarmente, el tiempo medio de reparación (*MTTR*) es

$$MTTR = r = 1 / \mu \quad \text{Ec.5. 47}$$

Sustituyendo en 5.44 y 5.45

$$P_0 = \frac{m}{m+r} \quad \text{Ec.5. 48}$$

$$P_1 = \frac{r}{m+r} \quad \text{Ec.5. 49}$$

Los valores anteriores de P_0 y P_1 se conocen, respectivamente, como la disponibilidad de estado estable o disponibilidad límite A e indisponibilidad U del sistema.

La disponibilidad dependiente del tiempo $A(t)$, del sistema, está entonces dada por 5.42

$$A(t) = P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \quad \text{Ec.5. 50}$$

Como ya se dijo, esta es la probabilidad de que el sistema esté operando en un tiempo t , dado que estaba operando en el tiempo $t=0$. Esto es diferente a la confiabilidad $R(t)$ dada por $R(t) = e^{-\lambda t}$, que es la probabilidad de que el sistema permanezca operando, en función del tiempo, dado que inició su estado de operación en $t=0$.

Una relación conceptual semejante se puede establecer entre $U(t)$ y $Q(t)$.

5.2.2 DIAGRAMA DE ESPACIO DE ESTADOS

Con el objeto de facilitar la solución de las cadenas de Markov, ya sean discretas o continuas, es deseable construir el diagrama apropiado de espacio de estados e insertar en él todas las tasas de transición relevantes. Se deben incluir en el diagrama todos los estados relevantes en el cual puede residir el sistema; también se deben incluir todas las formas posibles en las que pueden ocurrir las transiciones. Básicamente no hay restricciones sobre el número de estados o el tipo y número de transiciones que pueden insertarse.

A continuación presentaremos algunas de las variaciones más importantes que pueden ocurrir en la práctica.

5.2.2.1 COMPONENTE SENCILLO REPARABLE

En la Fig.5.3 se muestra el diagrama de espacio de estados para un sistema de un solo componente reparable, para el cual se asume que existen solamente dos estados: operando o fallado. En algunas situaciones prácticas, un componente o sistema se puede representar mejor por más de dos estados y específicamente se le puede adicionar un tercer estado correspondiente a un estado intermedio al cual se le conoce como salida parcial o estado reducido (por ejemplo, reducciones de carga definidas como aceptables).

En el diagrama de la Fig.5.4. se da un ejemplo de lo anterior; en él se incluyen todas las tasas de transición factibles de ocurrir, sin embargo algunas de ellas pudieran no ser físicamente posibles; en cuyo caso deberán omitirse en el diagrama.

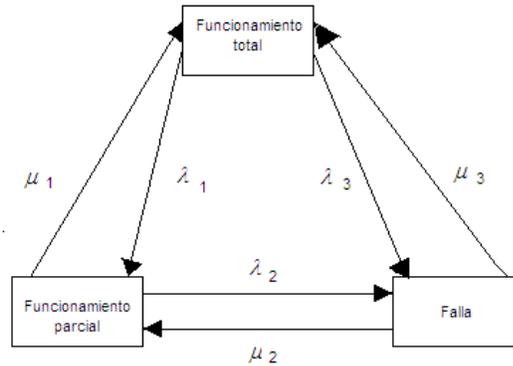


Fig.5. 4 **Diagrama de espacio de estados de un componente con estado de salida parcial**

5.2.2.2 SISTEMA CON DOS COMPONENTES REPARABLES

Cuando el sistema consta de dos componentes reparables, existen cuatro estados posibles. Si λ_1, μ_1 y λ_2, μ_2 son las tasas de falla y reparación de los componentes 1 y 2 respectivamente, el diagrama de espacio de estados correspondiente se ilustra en la Fig.5.5.

Es importante hacer notar que, en este caso, el diagrama es el mismo independientemente de que se trate de componentes en serie o en paralelo y el estado del sistema dependerá de la interconexión de los componentes.

Además, este diagrama se puede modificar, como en el caso anterior, eliminando los estados que no son factibles o adicionando, cuando sea necesario, las salidas parciales o estados reducidos.

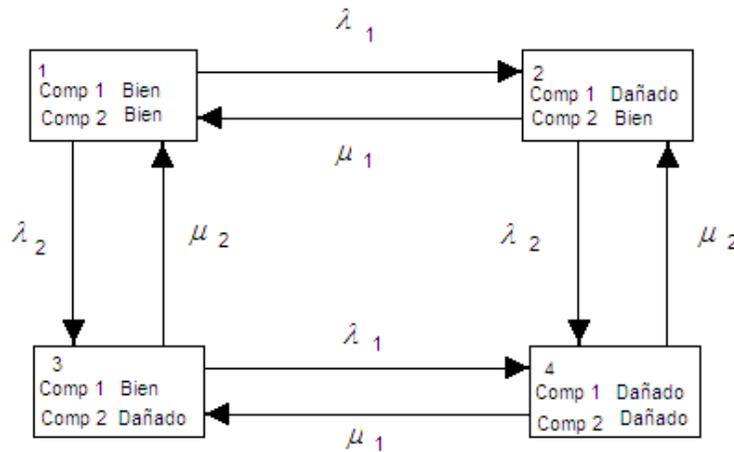


Fig.5. 5 Diagrama de espacio de estados para un sistema de dos componentes

5.2.2.3 SISTEMA CON UN NÚMERO GRANDE DE COMPONENTES REPARABLES

El número máximo de estados en un sistema de tres componentes, en el cual cada uno de ellos puede estar en dos estados diferentes, es 2^3 o sea 8, como se muestra en la Fig.5.6, donde λ_i, μ_i representan las tasas de falla y reparación del componente i . Además O y F indican si el componente está operando o en falla.

Cuando el número de componentes y el número de estados en que cada componente puede residir crece; el número de estados en el diagrama también aumenta de una manera más que proporcional. De hecho, si se representan todos los estados, el número de estados en el diagrama es 2^n si el sistema consta de n componentes y cada componente se representa por el modelo de dos estados o 3^n si cada componente tiene un estado de operación reducido. Debido a esto el sistema se hace difícil de manejar para sistemas grandes.

Para la solución de este caso se puede utilizar el truncamiento de estados, o sea que se ignoran los estados que tienen muy poca probabilidad de ocurrencia; o como alternativa se hace uso de las técnicas de solución aproximada basada en el modelado de Markov

5.2.3 MATRIZ ESTOCÁSTICA DE PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

Como se establece en el Apéndice A, en el caso de las cadenas de Markov discretas, se puede definir la matriz estocástica de probabilidades de transición la cual presenta las probabilidades de hacer una transición de un estado del sistema a otro. Es relativamente fácil apreciar en ese caso como cada etapa en la cadena representa un intervalo de tiempo igual y la probabilidad de transición en cada intervalo es constante.

Se puede derivar una matriz similar para un proceso de Markov continuo. La diferencia fundamental es que, en este último caso, el intervalo discreto de tiempo no es parte de la

especificación del problema. Como ya se hizo anteriormente, se puede introducir un intervalo de tiempo incremental Δt el cual sea suficientemente pequeño de tal manera que la probabilidad de ocurrencia de dos o más transiciones en ese intervalo sea despreciable. Entonces la matriz estocástica de probabilidades de transición se puede derivar en términos de esta forma "discretizada" del proceso continuo dado que la probabilidad de ocurrencia de una transición en ese intervalo de tiempo es igual a la tasa de transición multiplicado por el intervalo de tiempo.

Si la tasa de falla de un componente es λ entonces la probabilidad de una transición hacia la falla en el tiempo $\Delta t = \lambda\Delta t$ y la probabilidad de no fallar en el tiempo $\Delta t = I - \lambda\Delta t$.

En el caso de un componente simple reparable representado por el diagrama de espacio de estados mostrado en la Fig.5.3. la matriz estocástica de probabilidades de transición P es

$$P = \begin{bmatrix} I - \lambda\Delta t & \lambda\Delta t \\ \mu\Delta t & I - \mu\Delta t \end{bmatrix} \quad \text{Ec.5. 51}$$

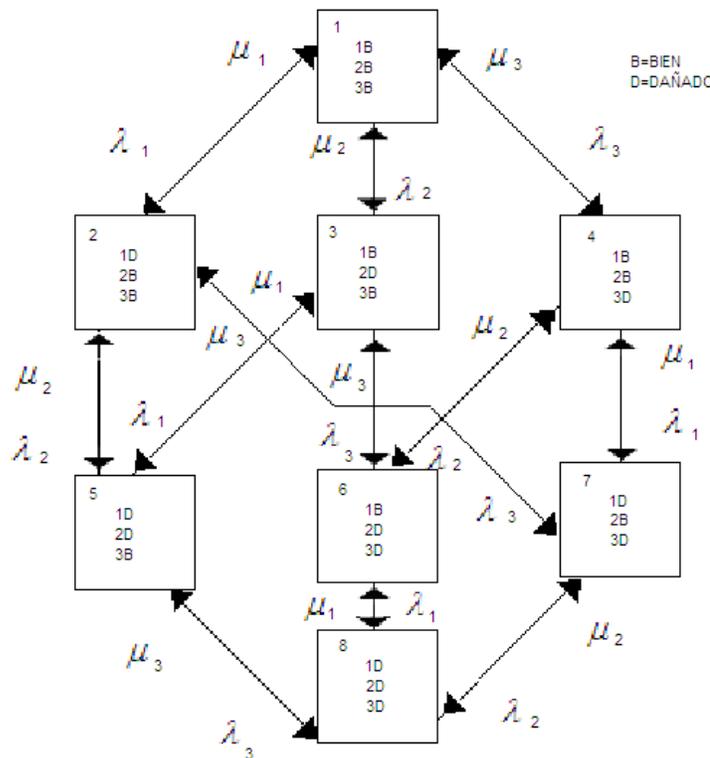


Fig.5. 6 Diagrama de espacio de estados para un sistema de tres componentes

5.2.4 TÉCNICAS DE FRECUENCIA Y DURACIÓN

Las técnicas de Markov descritas en los incisos anteriores permiten calcular la probabilidad de residencia en cada estado del sistema, las probabilidades de que el sistema esté en buen estado o en estado de falla. Sin embargo es muy benéfico, para el entendimiento completo del comportamiento del sistema, evaluar índices adicionales de confiabilidad para sistemas que se encuentran de una manera continua ya sea operando, en reparación o recibiendo mantenimiento. Esto índices adicionales son la frecuencia con que se presenta un estado del sistema y la duración promedio de residencia en ese estado.

Los conceptos asociados con estas técnicas se pueden describir mejor analizando el sistema reparable de un solo componente que hemos utilizado en los incisos anteriores. Considérese el diagrama de espacio de estados de la Fig.5.7 y la probabilidad de residencia en el estado de operación (disponibilidad) y la probabilidad de residencia en el estado de falla (indisponibilidad) definidas en las ecuaciones 5.44 a 5.49

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{m}{m + r} \quad \text{Ec.5. 52}$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{r}{m + r} \quad \text{Ec.5. 53}$$

donde

λ = tasa de falla del componente

μ = tasa de reparación del componente

m = tiempo medio operando del componente

r = tiempo medio de reparación del componente

En la Fig.5.7b, el periodo T es el tiempo del ciclo del sistema y es igual a la suma de del tiempo medio a la falla ($MTTF$) y el tiempo medio de reparación ($MTTR$). Este ciclo de tiempo se define como el tiempo medio entre fallas ($MTBF$). Algunos autores usan $MTBF$ en vez de $MTTF$; sin embargo como se puede ver en la figura, existe una diferencia conceptual importante entre ambas. Así, pues, se pueden definir también las siguientes relaciones

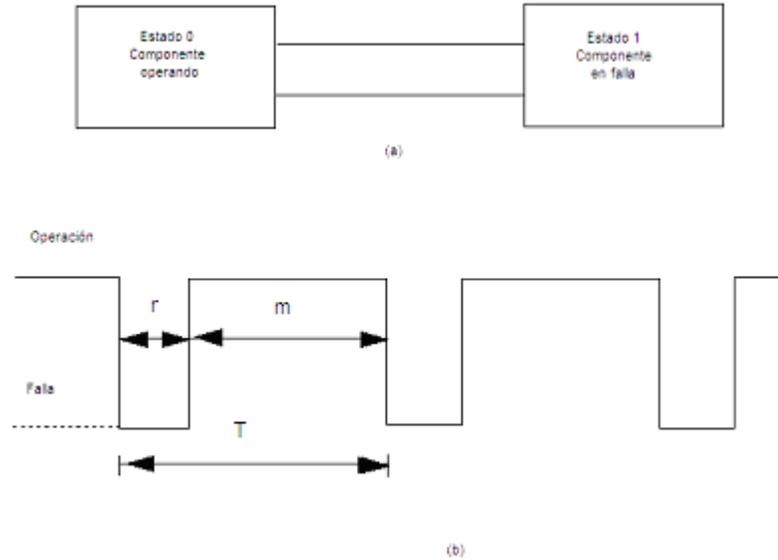


Fig.5. 7 Sistema de un solo componente.(a) Diagrama de espacio de estados.(b) Diagrama de tiempo medio/estado

$$m = MTTF = 1 / \lambda \quad \text{Ec.5. 54}$$

$$r = MTTR = 1 / \mu \quad \text{Ec.5. 55}$$

$$T = MTB = m + r = 1/f \quad \text{Ec.5. 56}$$

donde $f = \text{frecuencia del ciclo}$, es decir, la frecuencia de encontrar un estado del sistema.

De las ecuaciones 5.52 y 5.53, la probabilidad de residencia en cualquier estado del sistema es igual a tiempo de residencia media de ese estado dividida entre el tiempo medio del ciclo requerido para que ocurra el estado. Aunque este concepto se está definiendo con base en el sistema de dos estados; es aplicable, sin embargo, a cualquier sistema reparable sin importar el número de estados del sistema. Por lo tanto si $P(S)$ es la probabilidad de residencia en el estado S , $m(S)$ es el tiempo medio ocupado en ese estado S y $T(S)$ es el tiempo medio entre encuentros del estado S .

$$P(S) = \frac{m(S)}{T(S)} \quad \text{Ec.5. 57}$$

Aplicando entonces estas definiciones se tiene que

$$f = P_0 \lambda = P_1 \mu \quad \text{Ec.5. 58}$$

En palabras la ecuación anterior se puede establecer como sigue:

i) La frecuencia de encontrar al sistema en el estado de operación es igual a la probabilidad de estar en ese estado multiplicado por la tasa de partida de ese estado.

ii) La probabilidad de que el sistema esté en el estado de falla es igual a la probabilidad de NO estar en ese estado, multiplicado por la tasa de entrada a ese estado.

Este concepto es aplicable únicamente a tiempos largos o el comportamiento promedio del sistema y no vale para el estado transitorio.

Por lo tanto si $f(S)$ es la frecuencia de encontrar un estado, $P(S)$ es la probabilidad de estar en ese estado, $\bar{P} = (\bar{S})$ es la probabilidad de NO estar en el estado, $\lambda_d(S)$ es la tasa de partida del estado y $\lambda_e(S)$ es la tasa de entrada al estado, entonces

$$f(S) = P(S) \lambda_d(S) = \bar{P}(\bar{S}) \lambda_e(S) \quad \text{Ec.5. 59}$$

Finalmente, dado que $T(S) = 1/f(S)$

$$m(S) = \frac{P(S)}{f(S)} = \frac{1}{\lambda_d(S)} \quad \text{Ec.5. 60}$$

En palabras, la ecuación anterior establece que la duración media de un estado es igual al inverso de su tasa de partida de ese estado, como se estableció previamente. La ecuación también muestra que esa duración media es igual a la probabilidad de residir en un estado dividida entre la frecuencia de encontrar el estado.

5.2.5 EVALUACIÓN APROXIMADA DE LA CONFIABILIDAD DE UN SISTEMA

Los procedimientos que se definieron en los párrafos anteriores, son difíciles de manejar, inclusive con la ayuda de computadoras digitales, cuando los sistemas que se desea analizar se vuelven más grandes o más complejos. En tales casos, existen métodos alternativos basados en los procedimientos de Markov, los cuales utilizan ecuaciones aproximadas. La esencia de estas técnicas aproximadas es derivar un conjunto de ecuaciones adecuadas para aplicarse en un sistema serie en el cual deben operar todos los componentes para el éxito del sistema o para un sistema en paralelo en el cual se necesita que trabaje al menos un componente para opere el sistema. Estas ecuaciones se pueden utilizar en conjunción con las técnicas de modelado de redes de confiabilidad que se establecieron en el Capítulo 3, para obtener resultados rápidos y suficientemente precisos para un amplio rango de sistemas prácticos.

5.2.5.1 SISTEMAS EN SERIE

Consideremos el caso de dos componentes conectados en serie. El diagrama de espacio de estados para este sistema se muestra en la Fig.5.5; suponiendo que existen todos los estados. La probabilidad de que el sistema esté en el estado de operación es

$$P_{operación} = \frac{\mu_1 \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} \quad \text{Ec.5. 61}$$

Donde $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ y μ_2 son las tasas de falla y reparación, de las dos componentes, respectivamente. Entonces, es necesario encontrar las tasas de falla y reparación, λ_S y μ_S de un componente simple equivalente a los dos componentes en serie, como se muestra en la Fig.5.8. La probabilidad de que el componente sencillo esté en el estado de operación es

$$P_{operación} = \frac{\mu_S}{\lambda_S + \mu_S} \quad \text{Ec.5. 62}$$

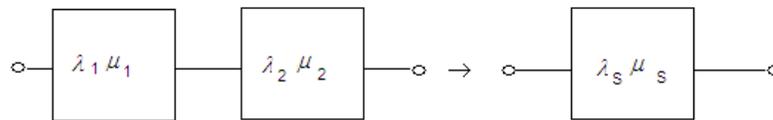


Fig.5. 8 Representación de un sistema de dos componentes en serie

Para que el componente sencillo sea equivalente al original se necesita que

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} = \frac{\mu_S}{\lambda_S + \mu_S} \quad \text{Ec.5. 63}$$

También dado que la tasa de transición desde el estado de operación, para el componente

sencillo equivalente, es λ_s , y para el sistema de dos componentes es $(\lambda_1 + \lambda_2)$, entonces

$$\lambda_s = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{Ec.5. 64}$$

Sustituyendo 5.64 en 5.63 y reemplazando las tasas de reparación, μ_i por el inverso de los tiempos de reparación, r_i , se tiene

$$r_s = \frac{1}{\mu_s} = \frac{\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_1 \lambda_2 r_1 r_2}{\lambda_s} \quad \text{Ec.5. 65}$$

En muchos sistemas el producto $(\lambda_i r_i)$ es muy pequeño y por lo tanto $\lambda_1 \lambda_2 r_1 r_2 \gg \lambda_1 r_1$ y $\lambda_2 r_2$; en tales casos la ecuación anterior se reduce a

$$r_s = \frac{\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2}{\lambda_s} \quad \text{Ec.5. 66}$$

Utilizando la lógica establecida en 5.64 y 5.65 la tasa de falla y la duración promedio de falla de un sistema general de n componentes en serie se puede definir como

$$\lambda_s = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{Ec.5. 67}$$

$$r_s = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i r_i}{\lambda_s} \quad \text{Ec.5. 68}$$

Y la probabilidad de que el sistema esté en falla, de acuerdo a lo encontrado en el inciso anterior queda

$$U_s = f_s r_s \quad \text{Ec.5. 69}$$

Como en muchos casos prácticos $1/\lambda \approx 1/f$

Entonces podemos obtener la ecuación aproximada

$$U_s \approx \lambda_s r_s = \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i \quad \text{Ec.5. 70}$$

Se deben hacer notar lo siguiente:

(a) Antes de usar este conjunto de ecuaciones, es necesario establecer si éstas son válidas para el sistema que se analiza.

(b) Las ecuaciones dan, únicamente, los valores medios o esperados de los parámetros que se evalúan. Adicionalmente, existe una distribución asociada con esos valores la cual no es exponencial, a pesar de que los índices de los componentes fuesen exponencialmente distribuidos.

(c) Aunque las ecuaciones se derivaron basados en la teoría de las cadenas de Markov y se supuso una distribución exponencial, son igualmente aplicables para evaluar los valores medios de tiempo largo de otras distribuciones.

5.2.5.2 SISTEMAS EN PARALELO

Considérese inicialmente el caso de un sistema de dos componentes para el cual el diagrama de espacio de estados se muestra en la Fig.5.9. La probabilidad de que el sistema esté en el estado de falla está dado por

$$P_{falla} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} \tag{Ec.5. 71}$$

En este caso se necesita obtener la tasa de falla λ_p y tasa de reparación μ_p de un componente sencillo que sea equivalente a los dos componentes en paralelo. Este hecho se ilustra en la Fig.5.10.

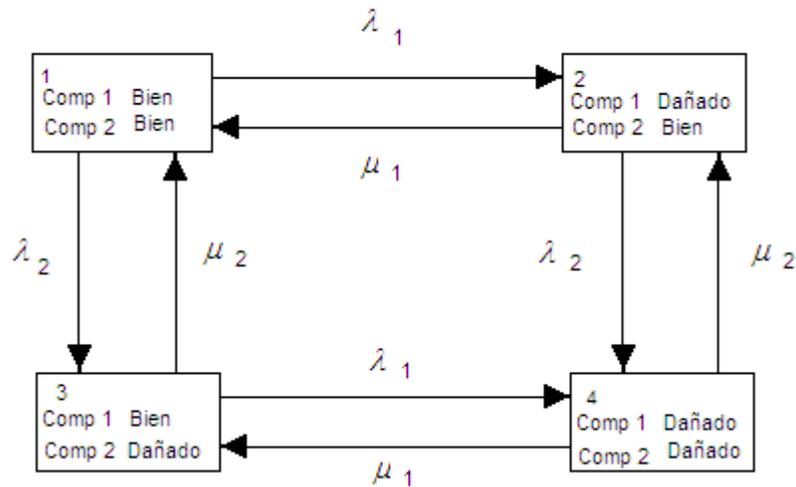


Fig.5. 9 Diagrama de espacio de estados de un sistema de dos componentes

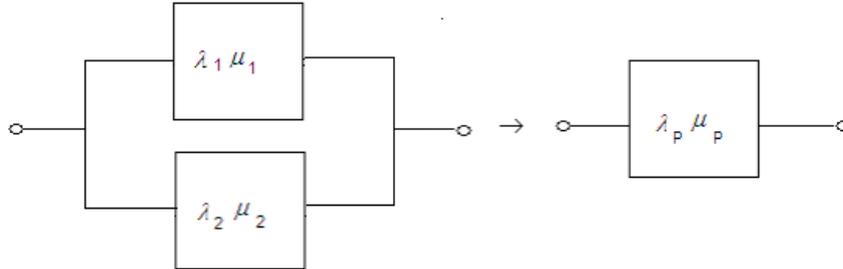


Fig.5. 10 **Representación de un sistema de dos componentes en paralelo**

La probabilidad de que el componente sencillo esté en el estado de falla es

$$P_{falla} = \frac{\lambda_P}{\lambda_P + \mu_P} \quad \text{Ec.5. 72}$$

Dado que las dos ecuaciones anteriores deben ser idénticas

$$\frac{\lambda_P}{\lambda_P + \mu_P} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} \quad \text{Ec.5. 73}$$

La tasa de transición del estado de falla del sistema de dos componentes es

$$\mu_P = \mu_1 \mu_2 \quad \text{Ec.5. 74}$$

ó

$$\frac{1}{r_P} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \quad \text{Ec.5. 75}$$

o lo que es lo mismo

$$r_P = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \quad \text{Ec.5. 76}$$

Este último valor representa el periodo promedio de tiempo durante el cual ambos componentes están de manera simultánea fuera de servicio. Este evento se conoce como un evento de falla traslapada.

Sustituyendo 5.76 en 5.73

$$\lambda_P = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (r_1 + r_2)}{1 + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2} \quad \text{Ec.5. 77}$$

Como es frecuente en la práctica ($\lambda_1 r_1$) y ($\lambda_2 r_2$) son mucho menores que la unidad, entonces

$$\lambda_P \cong \lambda_1 \lambda_2 (r_1 + r_2) \quad \text{Ec.5. 78}$$

Y finalmente

$$U_P = \lambda_P r_P = \lambda_1 \lambda_2 r_1 r_2 \quad \text{Ec.5. 79}$$

Es importante hacer notar que los tres comentarios que se hicieron para el caso de el sistema serie; son también aplicables en este caso. La única diferencia es que, en este último caso, no es posible extender las ecuaciones del sistema paralelo de dos componentes a un sistema general de n componentes.

5.3 CONCLUSIONES

Este capítulo se ha desarrollado con dos objetivos básicos:

(a) Correlacionar los conceptos y parámetros que se utilizan en la teoría general de la confiabilidad (los cuales se establecen en el Capítulo 2, Capítulo 3 y en el Apéndice A con las variables y términos que se utilizan normalmente para la evaluación de la confiabilidad de sistemas eléctricos de potencia. Por ejemplo, la función de distribución de probabilidades con la confiabilidad (R) del sistema; el valor medio o esperado λ , con el tiempo medio a la falla ($MTTF$), etc.

(b) Introducir, de una manera muy breve, la terminología y técnicas generales (probabilísticas y cadenas de Markov) que se utilizan para evaluar la confiabilidad de sistemas eléctricos.

Existen varios conceptos que no se han analizado en este capítulo; por ejemplo, la inclusión de mantenimiento programado, componentes de repuesto, efectos de las condiciones atmosféricas, fallas en modo común (o dependiente), sistemas con un número grande de componentes, etc., ya que ello haría este capítulo confuso y de dimensiones inaceptables. Sin embargo, en los capítulos que siguen, tomaremos de entre ellos los que sean necesarios para el análisis adecuado de los sistemas de distribución que son el tema objetivo de este trabajo.

5.4 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

¹ "Reliability Evaluation of Engineering Systems: Concepts and Techniques". R. Billington, R.N. Allan, Pitman Books Limited, 1983.

² "Reliability Evaluation of Power Systems", R. Billington, R.N. Allan, Plenum Press, 1984, Third Printing- January 1990.

³ "Transmission System Reliability Evaluation Using Markov Processes". R. Billington, K.E. Bollinger, IEEE Transactions,PAS-87, 1968, pp. 538-547.

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD DE SISTEMAS DE DISTRIBUCIÓN RADIALES

Ya hemos mencionado en capítulos anteriores las razones que justifican sobradamente la importancia de evaluar de una manera adecuada la confiabilidad de los sistemas de distribución; resumiendo dichas conceptos podríamos decir lo siguiente:

- Tradicionalmente los sistemas de distribución han recibido poca atención debido a que sus fallas tienen menos impacto (sobre todo en el aspecto político o en la operación total del sistema) que las fallas en otros subsistemas como podrían ser, por ejemplo, las fallas de los sistemas de generación.
- Aunque los sistemas de distribución son generalmente menos costosos que los otros subsistemas, si se consideran colectivamente, representan un porcentaje muy importante del costo total del sistema.^{1 2}
- Es necesario obtener un balance razonable en la confiabilidad de las diferentes partes constituyentes del sistema (generación, transmisión, distribución).

Existen un gran número de procedimientos que permiten obtener buenos niveles de confiabilidad de los sistemas de distribución, sobre todo con relación al usuario, entre los cuales se pueden mencionar: los esquemas alternativos de refuerzo, la inclusión de componentes de repuesto, mejoras a las políticas de mantenimiento y políticas alternativas de operación. No es posible comparar, cuantitativamente, los beneficios de tales alternativas si no se hace uso de las técnicas de evaluación cuantitativa de la confiabilidad.

Las técnicas que se necesitan para analizar un sistema de distribución dependen del tipo de sistema que se está considerando y de la profundidad de análisis requerida. En este capítulo nos ocuparemos de las técnicas básicas de evaluación, las cuales son completamente satisfactorias para el análisis de sistemas radiales. Posteriormente, en el capítulo siguiente, extenderemos estas técnicas básicas a la evaluación de sistemas en malla o en paralelo e incluiremos otros conceptos más finos en el modelado.

6.1 ÍNDICES GLOBALES DE CONFIABILIDAD DEL SISTEMA

Un sistema de distribución radial consiste de un conjunto de componentes en serie, el cual incluye líneas, cables, equipos de interrupción, barras colectoras, etc. Un usuario conectado a cualquier punto de carga del sistema requiere que todos los componentes localizados entre él y el punto de abastecimiento, estén operando. Consecuentemente, se puede aplicar el principio de sistema en serie que se definió en el capítulo anterior. Así pues, como ya se estableció, los tres parámetros básicos de confiabilidad del sistema son: la tasa media de falla (λ_s), el tiempo medio de interrupción (R_s) y tiempo promedio anual de interrupción (U_s), los cuales están dados por³

$$\lambda_s = \sum_i \lambda_i \quad \text{Ec.6. 1}$$

$$U_s = \sum_i \lambda_i r_i \quad \text{Ec.6. 2}$$

$$r_s = \frac{U_s}{\lambda_s} = \frac{\sum_i \lambda_i r_i}{\sum_i \lambda_i} \quad \text{Ec.6. 3}$$

Considérese el sistema radial mostrado en la Fig. 6.1. para el cual las tasas de falla y tiempos de reparación de cada línea se muestran en la Tabla 6.1. En este ejemplo se asume que las fallas de las líneas son independientes; o sea que no influye la falla de cualquiera de las líneas sobre la operación de las restantes. En este ejemplo se muestra el hecho, típico y generalmente aceptado, de que a medida de que un usuario está más alejado del punto de abastecimiento tiende a sufrir un mayor número de interrupciones y a tener una mayor indisponibilidad del sistema. Este último no es, sin embargo, un hecho universal y definitivo como se demostrará mas adelante.

Los índices globales que se definieron en 6.1, 6.2 y 6.3, para efectos de brevedad, los llamaremos: tasa de falla, duración de interrupción y tiempo anual de interrupción. Sin embargo, es importante recalcar el hecho de que no son valores determinísticos sino que son valores esperados o promedio de una distribución de probabilidad y que por lo tanto únicamente representan valores medios para tiempos muy largos.

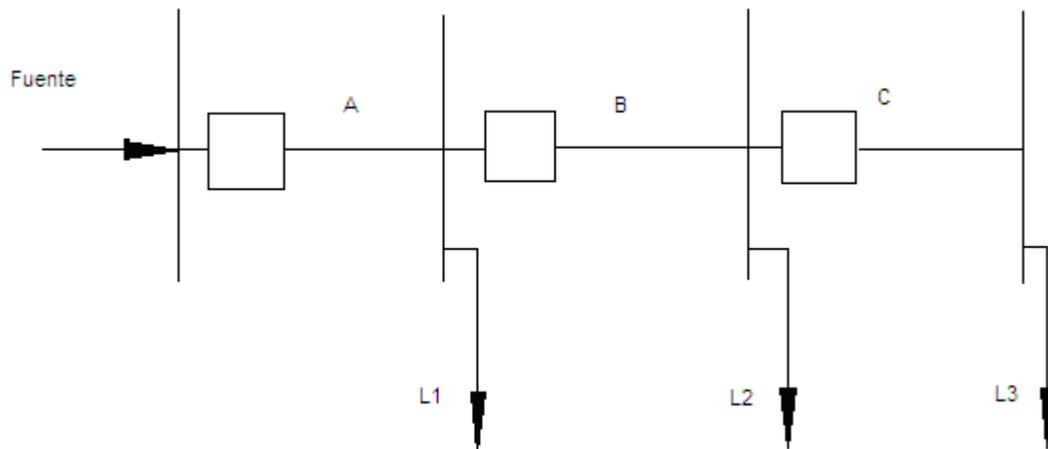


Fig.6. 1 Sistema radial con tres puntos de carga

Aunque los tres índices primarios o **básicos** son de fundamental importancia; no siempre dan una representación completa del comportamiento del sistema. Por lo tanto y con el fin de

reflejar la severidad o importancia de una interrupción, es necesario evaluar otros índices **adicionales** de confiabilidad. Estos últimos se pueden dividir en dos grupos: **índices orientados al usuario** e **índices orientados a la carga**. Para el ejemplo de la Fig. 6.1, los índices básicos para los componentes del sistema (A, B, y C) se dan en la Tabla 6.1; y a partir de ellos se calculan los índices de confiabilidad de los puntos de carga (L1,L2 y L3) que se muestran en la Tabla 6.2. Los índices **adicionales** se definen y analizan en los próximos incisos.

Tabla 6. 1 Índices de confiabilidad para los componentes del sistema de la Fig. 6.1

| Línea | λ_L (f/año) | $\frac{r_L}{}$ (horas) |
|-------|------------------------|---------------------------|
| A | 0.20 | 6.0 |
| B | 0.10 | 5.0 |
| C | 0.15 | 8.0 |

Tabla 6. 2 Índices de confiabilidad para los puntos de carga del sistema de la Fig.6.1

| Punto de carga | λ_L (f/año) | $\frac{r_L}{}$ (horas) | U_L (horas/año) |
|----------------|------------------------|---------------------------|----------------------|
| L1 | 0.20 | 6.0 | 1.2 |
| L2 | 0.30 | 5.7 | 1.7 |
| L3 | 0.45 | 6.4 | 2.9 |

6.2 ÍNDICES ORIENTADOS AL USUARIO

Las compañías suministradoras de energía eléctrica han desarrollado diferentes índices de este tipo; pero los más utilizados a nivel mundial son los siguientes:

- a) Índice de frecuencia de interrupción promedio del sistema,(SAIFI).

$$SAIFI = \frac{\text{Número total de interrupciones usuario}}{\text{Número total de usuarios servidos}} = \frac{\sum \lambda_i N_i}{\sum N_i} \quad \text{Ec.6. 4}$$

- b) Índice de frecuencia de interrupción promedio del usuario, (CAIFI).

$$CAIFI = \frac{\text{Número total de interrupciones usuario}}{\text{Número total de usuarios afectados}} \quad \text{Ec.6. 5}$$

Este índice difiere de SAIFI únicamente en el valor del denominador. En la aplicación de este índice, los usuarios afectados deberán contarse sólo una vez, sin importar el número de interrupciones que pudieran haber experimentado durante el año.

c) Índice de duración promedio de interrupción del sistema, (SAIDI).

$$SAIDI = \frac{\text{Suma de duraciones de interrupción por usuario}}{\text{Número total de usuarios}} = \frac{\sum U_i N_i}{\sum N_i} \quad \text{Ec.6. 6}$$

d) Índice de duración promedio de interrupción del consumidor, (CAIDI).

$$CAIDI = \frac{\text{Suma de duraciones de interrupción por usuario}}{\text{Número total de interrupciones por usuario}} = \frac{\sum U_i N_i}{\sum \lambda_i N_i} \quad \text{Ec.6. 7}$$

e) Índice de disponibilidad (indisponibilidad) promedio del servicio, (ASAI, ASUI).

$$ASAI = \frac{\text{horas usuario de servicio disponible}}{\text{horas usuario demandadas}} = \frac{\sum N_i \times 8760 - \sum U_i N_i}{\sum N_i \times 8760} \quad \text{Ec.6. 8}$$

$$ASUI = 1 - ASAI = \frac{\text{horas usuario de servicio no disponible}}{\text{horas usuario demandadas}} = \frac{\sum U_i N_i}{\sum N_i \times 8760} \quad \text{Ec.6. 9}$$

En las ecuaciones anteriores λ_i es la tasa de falla, U_i es el tiempo anual de falla, N_i es el número de consumidores para el punto "i" en todos los casos y 8760 es el número de horas en un año calendario.

6.3 ÍNDICES ORIENTADOS A LA CARGA Y ENERGÍA

Uno de los parámetros requeridos para la evaluación de estos índices es la carga promedio en cada punto de carga. La carga promedio L_a está dada por

(i)

$$L_a = L_p \cdot f \quad \text{Ec.6. 10}$$

donde

L_p = valor pico de la demanda de carga

f = factor de carga

(ii)

$$L_a = \frac{\text{energía total demandada en el periodo de interés}}{\text{periodo de interés}} = \frac{E_d}{t} \quad \text{Ec.6. 11}$$

Los índices normalmente utilizados son los siguientes:

a) Energía total no abastecida por el sistema, (ENS)

$$ENS = \sum L_a(i) U_i \quad \text{Ec.6. 12}$$

donde $L_a(i)$ es la carga promedio conectada al punto i .

- b) Energía promedio no abastecida, (AENS), o índice de reducción de carga promedio del sistema (ASCI).

$$AENS = \frac{\text{energía total no abastecida}}{\text{número total de usuarios servidos}} = \frac{\sum L_{a(i)} U_i}{\sum N_i} \quad \text{Ec.6. 13}$$

- c) Índice de reducción de carga promedio al usuario, (ACCI)

$$ACCI = \frac{\text{energía total no abastecida}}{\text{número total de consumidores afectados}} \quad \text{Ec.6. 14}$$

Este último índice difiere de AENS de la misma manera que CAIFI difiere de SAIFI; es por lo tanto un índice muy útil para monitorear los cambios de energía promedio no abastecida entre un año calendario dado y otro.

Regresando al sistema mostrado en la Fig. 6.1 y definiendo el número de consumidores y cargas promedio que se muestran en la Tabla 6.3; calcularemos a continuación los índices orientados a la carga y al usuario.

Tabla 6. 3 Número de consumidores y cargas promedio(Sistema de la Fig.6.1)

| Punto de carga | Número de consumidores | Carga promedio (kW) |
|----------------|------------------------|---------------------|
| L1 | 200 | 1000 |
| L2 | 150 | 700 |
| L3 | 100 | 400 |
| Total | 450 | 2100 |

Haciendo uso de las definiciones hechas en los incisos anteriores y utilizando el programa INCORAD.m, elaborado en MATLAB, cuyo código se presenta en el Anexo C se obtienen los siguientes resultados

Número de puntos de carga = 3

mdat =

1.0e+003 *

| | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| 0.0002 | 0.0060 | 0.2000 | 1.0000 |
| 0.0003 | 0.0057 | 0.1500 | 0.7000 |
| 0.0004 | 0.0064 | 0.1000 | 0.4000 |

SAIFI =

0.2889 Interrupciones/consumidor.año

SAIDI =

1.7433 Horas/consumidor

CAIDI =

6.0346 Horas/consumidor.interrupción

ASAI = 0.9998

ASUI = 1.9901e-004

ENS = 3549 kWh/año

AENS = 7.8867 kWh/consumidor.año

6.4 APLICACION A SISTEMAS RADIALES

Muchos sistemas de distribución se construyen por medio de un conjunto de secciones de línea conectados en serie, alimentando varios puntos de carga a lo largo de toda su longitud y reciben el nombre de alimentadores radiales. Constan normalmente de varias secciones de línea, que conforman el alimentador principal, a lo largo del cual se van conectando los diferentes puntos de carga a través de alimentadores derivados o laterales. Los sistemas mas complejos se construyen interconectando varios sistemas radiales ya sea en paralelo o formando una malla cerrada, dejando, sin embargo, la posibilidad de abrir la malla en varios puntos para aislarlos cuando ocurren fallas o se requiera aislar algunos puntos para efectuar mantenimiento.

Así pues, en este capítulo estudiaremos la confiabilidad de sistemas radiales y dejaremos el análisis de las redes mas complicadas para el capítulo siguiente⁴. Consideremos ahora el sistema radial que se presenta en la Fig. 6.2. y establezcamos las siguientes características del mismo:

- i) Se conocen las tasas de falla y tiempos de falla promedio (reparación) de todos los equipos, líneas y cables que integran el sistema.
- ii) Se conoce el número de usuarios y la carga promedio(kW) de todos los puntos de carga.
- iii) La ocurrencia de una falla (ya sea monofásica, o de cualquier otro tipo) siempre

provocará la desconexión de las tres fases, por medio de la operación del interruptor.

iv) Como no existe posibilidad de aislamiento de las fallas, más que a través del interruptor, cualquier falla que se presente en el sistema debe repararse antes de volver a cerrar el sistema.

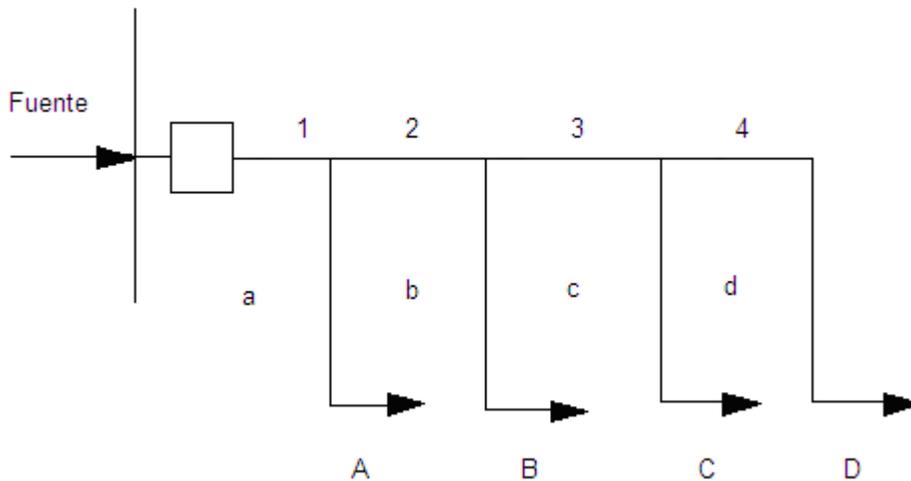


Fig. 6. 2 Sistema de distribución radial con cuatro puntos de carga

Bajo estas condiciones, la confiabilidad de todos los puntos del sistema es idéntica.

La configuración de este sistema no es recomendable para ser utilizada en la práctica, sin embargo es la más simple que puede existir y nos servirá de base para comparar como varía su confiabilidad a medida que se incluyen en el sistema más posibilidades de aislamiento de la falla; se le adicionen protecciones o se mejoren sus políticas de operación.

Para este análisis, evaluaremos cinco casos, los cuales se describen a continuación

CASO 1. Evaluación del caso base o sea del sistema tal y como aparece en la Fig. 6.2.

CASO 2. Se agrega protecciones al caso base, por medio de fusibles, en cada uno de los distribuidores laterales.

CASO 3. Al sistema del Caso 2 se le adiciona la posibilidad de desconexión en cada una de las secciones del alimentador principal a la salida de los puntos de conexión de los distribuidores laterales.

CASO 4. Al caso anterior se le adiciona la posibilidad de que fallen ocasionalmente los fusibles de protección de los laterales.

CASO 5. Al sistema del Caso 4 se le adiciona la posibilidad de transferir cargas a un segundo circuito, o circuito de respaldo a través de una conexión manual.

Para la evaluación de los **índices básicos**, se utilizan tablas elaboradas en Excel; y con los datos obtenidas de ellas, se calculan los **índices adicionales** de confiabilidad, que incluyen tanto los índices orientados al usuario como los índices orientados a la carga y la energía.

Para efectuar la evaluación de los índices de confiabilidad de sistemas radiales se utiliza nuevamente el programa de cómputo INCORAD.m. Este programa es de uso general para sistemas radiales con cualquier número de nodos, teniendo como único límite la capacidad de la computadora que se utilice; tiene la posibilidad de analizar los cuatro casos antes mencionados y fue verificado con los resultados presentados en la Referencia 4.

Como entradas del programa se requieren los parámetros que caracterizan el sistema y que se ingresan como datos en las tablas de **Excel**; estos datos son:

- a). Número de secciones del alimentador principal; el cual es igual al número de laterales
- b). Tasa de falla y tiempo medio de interrupción (de reparación del sistema)
- c). Número de consumidores
- d). Demanda promedio para cada punto de carga

Con los datos mencionados se calculan los índices básicos λ , r y U globales del sistema; y estos datos son la entrada para el programa INCORAD.m. Este último programa calcula e imprime

- a). Los índices de confiabilidad orientados al usuario
- b). Los índices de confiabilidad orientados a la carga y energía

CASO 1

A continuación, en las Tablas 6.4 y 6.5 se dan los datos de entrada para el Caso 1 (Caso Base) mostrado en la Fig. 6.2.

Tabla 6. 4 Parámetros de confiabilidad para el Caso 1(Caso Base)

| Componente | λ (fallas/año) | r (horas) |
|--------------|---------------------------|--------------|
| Sección | | |
| 1 | 0.2 | 4 |
| 2 | 0.1 | 4 |
| 3 | 0.3 | 4 |
| 4 | 0.2 | 4 |
| Distribuidor | | |
| a | 0.2 | 2 |
| b | 0.6 | 2 |
| c | 0.4 | 2 |
| d | 0.2 | 2 |

Tabla 6. 5 Número de consumidores y carga conectada

| Punto de carga | Número de consumidores | Carga promedio conectada(kW) |
|----------------|------------------------|------------------------------|
| A | 1000 | 5000 |
| B | 800 | 4000 |
| C | 700 | 3000 |
| D | 500 | 2000 |

Tabla 6. 6 Índices básicos de confiabilidad para el Caso 1

| Componente | Punto de carga A | | | Punto de carga B | | | Punto de carga C | | | Punto de carga D | | |
|--------------|----------------------|-----|-----------|----------------------|-----|-----------|----------------------|-----|-----------|----------------------|-----|-----------|
| | λ (f/año) | r | U (h/año) |
| Sección | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0.2 | 4 | 0.8 | 0.2 | 4 | 0.8 | 0.2 | 4 | 0.8 | 0.2 | 4 | 0.8 |
| 2 | 0.1 | 4 | 0.4 | 0.1 | 4 | 0.4 | 0.1 | 4 | 0.4 | 0.1 | 4 | 0.4 |
| 3 | 0.3 | 4 | 1.2 | 0.3 | 4 | 1.2 | 0.3 | 4 | 1.2 | 0.3 | 4 | 1.2 |
| 4 | 0.2 | 4 | 0.8 | 0.2 | 4 | 0.8 | 0.2 | 4 | 0.8 | 0.2 | 4 | 0.8 |
| Distribuidor | | | | | | | | | | | | |
| a | 0.2 | 2 | 0.4 | 0.2 | 2 | 0.4 | 0.2 | 2 | 0.4 | 0.2 | 2 | 0.4 |
| b | 0.6 | 2 | 1.2 | 0.6 | 2 | 1.2 | 0.6 | 2 | 1.2 | 0.6 | 2 | 1.2 |
| c | 0.4 | 2 | 0.8 | 0.4 | 2 | 0.8 | 0.4 | 2 | 0.8 | 0.4 | 2 | 0.8 |
| d | 0.2 | 2 | 0.4 | 0.2 | 2 | 0.4 | 0.2 | 2 | 0.4 | 0.2 | 2 | 0.4 |
| Total | 2.2 | 2.7 | 6 | 2.2 | 2.7 | 6 | 2.2 | 2.7 | 6 | 2.2 | 2.7 | 6 |

Con los datos obtenidos en la tabla anterior se calculan los índices adicionales obteniendo

» INCORAD

Número de puntos de carga = 4

mdat =

1.0e+003 *

| | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| 0.0022 | 0.0027 | 1.0000 | 5.0000 |
| 0.0022 | 0.0027 | 0.8000 | 4.0000 |
| 0.0022 | 0.0027 | 0.7000 | 3.0000 |
| 0.0022 | 0.0027 | 0.5000 | 2.0000 |

SAIFI = 2.2000 Interrupciones/consumidor.año

SAIDI = 6.0060 Horas/consumidor

CAIDI = 2.7300 Horas/consumidor.interrupción

ASAI = 0.9993

ASUI = 6.8562e-004

ENS = 84084 kWh/año

AENS = 28.0280 kWh/consumidor.año

»

CASO 2

En la Fig. 6.3. se muestra una variación del sistema que se considera como caso base; en la cual se instalan fusibles en cada uno de los distribuidores laterales. Bajo estas condiciones, en caso de que ocurra una falla en un lateral, actúa el fusible que lo protege, desconectando ese punto de carga hasta que se repara la falla pero sin desconectar los demás puntos de carga. De esta forma son mejorados los índices de confiabilidad de todos los puntos de carga aunque esa mejora es diferente para cada uno de ellos. Para este caso, el programa calcula, en adición a lo ya mencionado anteriormente, cual es el punto de carga con menor confiabilidad. Los resultados correspondientes a los índices básicos se establecen en la Tabla 6.7 continuación.

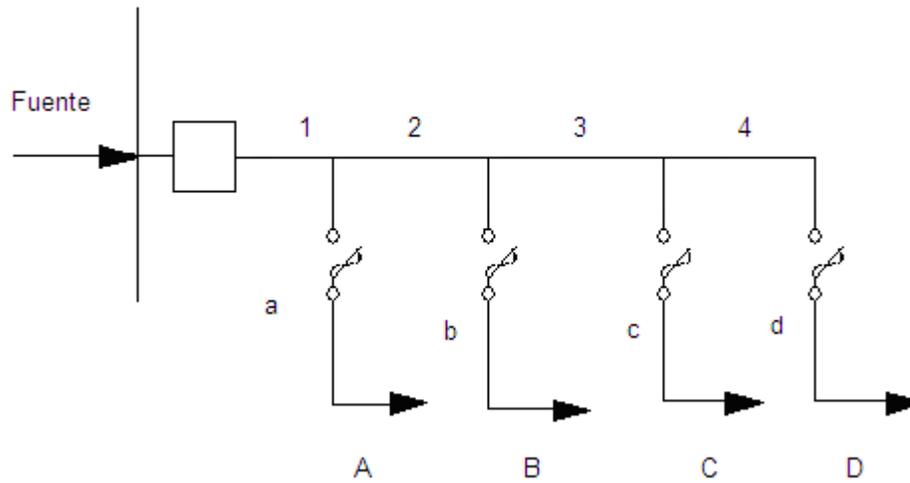


Fig.6.3 Sistema radial con laterales protegidos por fusibles

Tabla 6. 7 Índices básicos de confiabilidad para el Caso 2

| Componente | Punto de carga A | | | Punto de carga B | | | Punto de carga C | | | Punto de carga D | | |
|--------------|----------------------|-----|-----------|----------------------|-----|-----------|----------------------|-----|-----------|----------------------|-----|-----------|
| | λ (f/año) | r | U (h/año) |
| Sección | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0.2 | 4 | 0.8 | 0.2 | 4 | 0.8 | 0.2 | 4 | 0.8 | 0.2 | 4 | 0.8 |
| 2 | 0.1 | 4 | 0.4 | 0.1 | 4 | 0.4 | 0.1 | 4 | 0.4 | 0.1 | 4 | 0.4 |
| 3 | 0.3 | 4 | 1.2 | 0.3 | 4 | 1.2 | 0.3 | 4 | 1.2 | 0.3 | 4 | 1.2 |
| 4 | 0.2 | 4 | 0.8 | 0.2 | 4 | 0.8 | 0.2 | 4 | 0.8 | 0.2 | 4 | 0.8 |
| Distribuidor | | | | | | | | | | | | |
| a | 0.2 | 2 | 0.4 | | | | | | | | | |
| b | | | | 0.6 | 2 | 1.2 | | | | | | |
| c | | | | | | | 0.4 | 2 | 0.8 | | | |
| d | | | | | | | | | | 0.2 | 2 | 0.4 |
| Total | 1 | 3.6 | 3.6 | 1.4 | 3.1 | 4.4 | 1.2 | 3.3 | 4 | 1 | 3.6 | 3.6 |

Y los índices adicionales se modifican de la siguiente manera

» INCORAD

Número de puntos de carga = 4

mdat =

1.0e+003 *

| | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| 0.0010 | 0.0036 | 1.0000 | 5.0000 |
| 0.0014 | 0.0031 | 0.8000 | 4.0000 |
| 0.0012 | 0.0033 | 0.7000 | 3.0000 |
| 0.0010 | 0.0036 | 0.5000 | 2.0000 |

SAIFI = 1.1533 Interrupciones/consumidor.año

SAIDI = 3.9047 Horas/consumidor

CAIDI = 3.3855 Horas/consumidor.interrupción

ASAI = 0.9996

ASUI = 4.4574e-004

ENS = 54772 kWh/año

AENS = 18.2573 kWh/consumidor.año

»

CASO 3

En la Fig. 6.4. se incluye la mejora, con relación al caso 2, de incluir cuchillas desconectadoras de operación manual en puntos adecuados a lo largo del alimentador principal. En caso de una falla en este circuito, opera el interruptor principal, pero éste puede cerrarse en cuanto se localice la falla y se aisle con la apertura manual de la cuchilla adecuada. Bajo estas circunstancias no es necesario entonces esperar a que se repare la falla para conectar los puntos de carga que están localizados entre la fuente y el punto fallado. El tiempo total requerido para la localización de la falla y reconexión del sistema es generalmente menor que el tiempo de reparación. En el ejemplo que estamos resolviendo se considera que es de 0.5 horas y se da como dato de entrada al programa, los resultados de los índices básicos para esta opción se muestran en la Tabla 6.8.

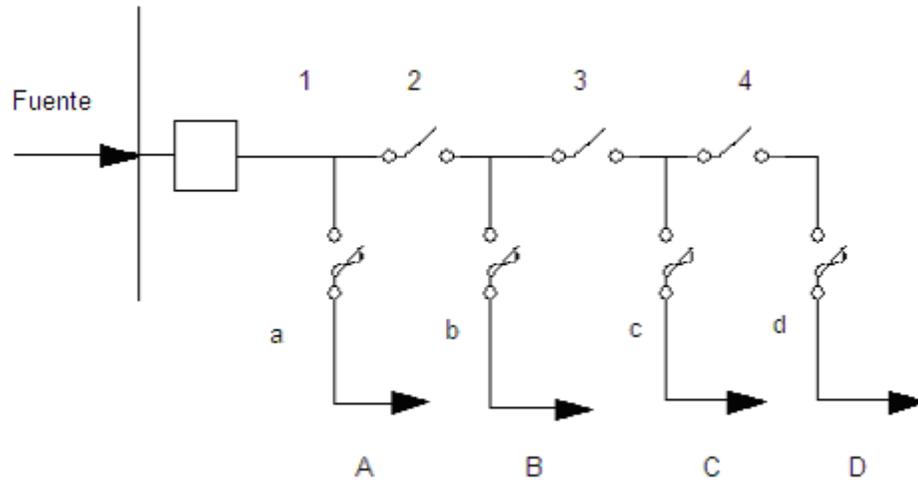


Fig. 6. 4 Sistema reforzado con fusibles y cuchillas desconectoras

Tabla 6. 8 Índices básicos de confiabilidad para el Caso 3

| Componente | Punto de carga A | | | Punto de carga B | | | Punto de carga C | | | Punto de carga D | | |
|--------------|----------------------|-----|-----------|----------------------|-----|-----------|----------------------|-----|-----------|----------------------|-----|-----------|
| | λ (f/año) | r | U (h/año) |
| Sección | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0.2 | 4 | 0.8 | 0.2 | 4 | 0.8 | 0.2 | 4 | 0.8 | 0.2 | 4 | 0.8 |
| 2 | 0.1 | 0.5 | 0.05 | 0.1 | 4 | 0.4 | 0.1 | 4 | 0.4 | 0.1 | 4 | 0.4 |
| 3 | 0.3 | 0.5 | 0.15 | 0.3 | 0.5 | 0.15 | 0.3 | 4 | 1.2 | 0.3 | 4 | 1.2 |
| 4 | 0.2 | 0.5 | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 0.1 | 0.2 | 4 | 0.8 |
| Distribuidor | | | | | | | | | | | | |
| a | 0.2 | 2 | 0.4 | | | | | | | | | |
| b | | | | 0.6 | 2 | 1.2 | | | | | | |
| c | | | | | | | 0.4 | 2 | 0.8 | | | |
| d | | | | | | | | | | 0.2 | 2 | 0.4 |
| Total | 1 | 1.5 | 1.5 | 1.4 | 1.9 | 2.65 | 1.2 | 2.8 | 3.3 | 1 | 3.6 | 3.6 |

» INCORAD

Número de puntos de carga = 4

mdat =

1.0e+003 *

| | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| 0.0010 | 0.0015 | 1.0000 | 5.0000 |
| 0.0014 | 0.0019 | 0.8000 | 4.0000 |
| 0.0012 | 0.0027 | 0.7000 | 3.0000 |
| 0.0010 | 0.0036 | 0.5000 | 2.0000 |

SAIFI = 1.1533 Interrupciones/consumidor.año

SAIDI = 2.5756 Horas/consumidor

CAIDI = 2.2332 Horas/consumidor.interrupción

ASAI = 0.9997

ASUI = 2.9402e-004

ENS = 35184 kWh/año

AENS = 11.7280 kWh/consumidor.año

CASO 4

En este punto se analiza el caso anterior pero con la variante que la protección primaria (fusibles) puede fallar ocasionalmente. En tal caso, opera la protección de respaldo. El sistema tiene la misma estructura del caso anterior, como se muestra en la Fig. 6.4, pero la única variante es que supondremos que los fusibles operan con una probabilidad de 0.9; es decir que operan adecuadamente 9 de cada 10 veces que son requeridos. En este caso los índices de confiabilidad son diferentes al caso anterior debido a que por ejemplo; en el caso de una falla en los alimentadores b, c, y d contribuyen a los índices del punto de carga A. Para este caso la tasa de falla, para los diferentes puntos del circuito, se puede evaluar de la siguiente manera

$$Tasa\ de\ falla = (Tasa\ de\ falla\ | fusible\ opera) \times P(Fusible\ opere) + (Tasa\ de\ falla\ | fusible\ falla) \times P(Fusible\ falle)$$

Por ejemplo, la contribución del alimentador b para la tasa de falla del punto de carga A será:

$$Tasa\ de\ falla = 0 \times 0.9 + 0.6 \times 0.1 = 0.06$$

Los índices modificados para este caso se muestran en la Tabla 6.9, suponiendo que las fallas pueden ser aisladas en 0.5 horas.

Como se puede observar, y como era de esperarse, los índices de este caso se han degradado con respecto a los índices del caso anterior.

Tabla 6. 9 Índices básicos de confiabilidad para el Caso 4

| Componente | Punto de carga A | | | Punto de carga B | | | Punto de carga C | | | Punto de carga D | | |
|--------------|----------------------|-----|-----------|----------------------|-----|-----------|----------------------|-----|-----------|----------------------|-----|-----------|
| | λ (f/año) | r | U (h/año) |
| Sección | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0.2 | 4 | 0.8 | 0.2 | 4 | 0.8 | 0.2 | 4 | 0.8 | 0.2 | 4 | 0.8 |
| 2 | 0.1 | 0.5 | 0.05 | 0.1 | 4 | 0.4 | 0.1 | 4 | 0.4 | 0.1 | 4 | 0.4 |
| 3 | 0.3 | 0.5 | 0.15 | 0.3 | 0.5 | 0.15 | 0.3 | 4 | 1.2 | 0.3 | 4 | 1.2 |
| 4 | 0.2 | 0.5 | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 0.1 | 0.2 | 4 | 0.8 |
| Distribuidor | | | | | | | | | | | | |
| a | 0.2 | 2 | 0.4 | 0.02 | 0.5 | 0.01 | 0.02 | 0.5 | 0.01 | 0.02 | 0.5 | 0.01 |
| b | 0.06 | 0.5 | 0.03 | 0.6 | 2 | 1.2 | 0.06 | 0.5 | 0.03 | 0.06 | 0.5 | 0.03 |
| c | 0.04 | 0.5 | 0.02 | 0.04 | 0.5 | 0.02 | 0.4 | 2 | 0.8 | 0.04 | 0.5 | 0.02 |
| d | 0.02 | 0.5 | 0.01 | 0.02 | 0.5 | 0.01 | 0.02 | 0.5 | 0.01 | 0.2 | 2 | 0.4 |
| Total | 1.12 | 1.4 | 1.56 | 1.48 | 1.8 | 2.69 | 1.3 | 2.6 | 3.35 | 1.12 | 3.3 | 3.66 |

Quedando los índices adicionales de la siguiente manera

» INCORAD

Número de puntos de carga = 4

mdat =

1.0e+003 *

| | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| 0.0011 | 0.0014 | 1.0000 | 5.0000 |
| 0.0015 | 0.0018 | 0.8000 | 4.0000 |
| 0.0013 | 0.0026 | 0.7000 | 3.0000 |
| 0.0011 | 0.0033 | 0.5000 | 2.0000 |

SAIFI = 1.2580 Interrupciones/consumidor.año

SAIDI = 2.6302 Horas/consumidor

CAIDI = 2.0908 Horas/consumidor.interrupción

ASAI = 0.9997

ASUI = 3.0025e-004

ENS = 3.5945e+004 kWh/año

AENS = 11.9817 kWh/consumidor.año

»
CASO 5

Finalmente, en la Fig. 6.5 y Tabla 6.10 se muestran las características y resultados obtenidos para el sistema que hemos venido analizando pero, en este caso, se tiene la posibilidad adicional de transferir carga a un circuito con el cual se tiene una conexión normalmente abierta. Este procedimiento de operación tiene una importante influencia en los índices de confiabilidad ya que permite, de una manera rápida, abastecer puntos de carga que de otra manera quedarían desconectados hasta que se terminara la reparación. Para este caso también se considera el tiempo de reconexión igual a 0.5 horas y se da como dato de entrada al programa.

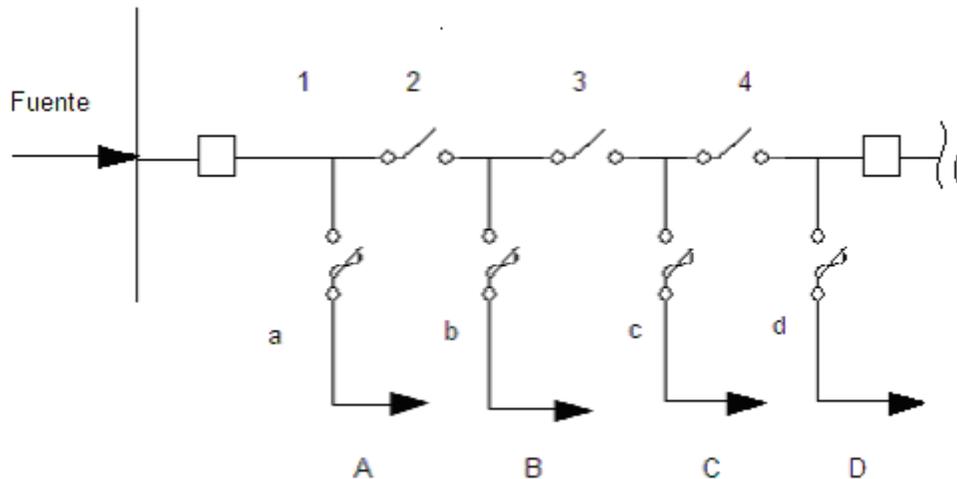


Fig.6. 5 Sistema con posibilidad de transferencia de carga a otro sistema adyacente

Tabla 6. 10 Índices básicos de confiabilidad para el Caso 5

| Componente | Punto de carga A | | | Punto de carga B | | | Punto de carga C | | | Punto de carga D | | |
|--------------|----------------------|-----|-----------|----------------------|-----|-----------|----------------------|-----|-----------|----------------------|-----|-----------|
| | λ (f/año) | r | U (h/año) |
| Sección | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0.2 | 4 | 0.8 | 0.2 | 0.5 | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 0.1 |
| 2 | 0.1 | 0.5 | 0.05 | 0.1 | 4 | 0.4 | 0.1 | 0.5 | 0.05 | 0.1 | 0.5 | 0.05 |
| 3 | 0.3 | 0.5 | 0.15 | 0.3 | 0.5 | 0.15 | 0.3 | 4 | 1.2 | 0.3 | 0.5 | 0.15 |
| 4 | 0.2 | 0.5 | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 0.1 | 0.2 | 4 | 0.8 |
| Distribuidor | | | | | | | | | | | | |
| a | 0.2 | 2 | 0.4 | | | | | | | | | |
| b | | | | 0.6 | 2 | 1.2 | | | | | | |
| c | | | | | | | 0.4 | 2 | 0.8 | | | |
| d | | | | | | | | | | 0.2 | 2 | 0.4 |
| Total | 1 | 1.5 | 1.5 | 1.4 | 1.4 | 1.95 | 1.2 | 1.9 | 2.25 | 1 | 1.5 | 1.5 |

Los índices adicionales para este caso son

» INCORAD

Número de puntos de carga = 4

mdat =

1.0e+003 *

| | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| 0.0010 | 0.0015 | 1.0000 | 5.0000 |
| 0.0014 | 0.0014 | 0.8000 | 4.0000 |
| 0.0012 | 0.0019 | 0.7000 | 3.0000 |
| 0.0010 | 0.0015 | 0.5000 | 2.0000 |

SAIFI = 1.1533 Interrupciones/consumidor.año

SAIDI = 1.7953 Horas/consumidor

CAIDI = 1.5566 Horas/consumidor.interrupción

ASAI = 0.9998

ASUI = 2.0495e-004

ENS = 25052 kWh/año

AENS = 8.3507 kWh/consumidor.año

»

6.5 CONCLUSIONES

En este capítulo, hemos analizado diferentes opciones de reforzamiento o prácticas operativas que permiten mejorar la confiabilidad de sistemas de distribución radiales; obviamente éstas no son las únicas posibilidades, de hecho existe un gran número de combinaciones y variantes que se pueden presentar, restricciones impuestas a la transferencia de carga, inclusión de equipos o circuitos redundantes, etc.

A manera de resumen en las Figuras 6.6, 6.7 y 6.8 se muestra en forma gráfica la manera en que varían los índices orientados al usuario, los índices orientados a la carga y la disponibilidad e indisponibilidad de un sistema radial, para el ejemplo que hemos analizado a lo largo de este capítulo.

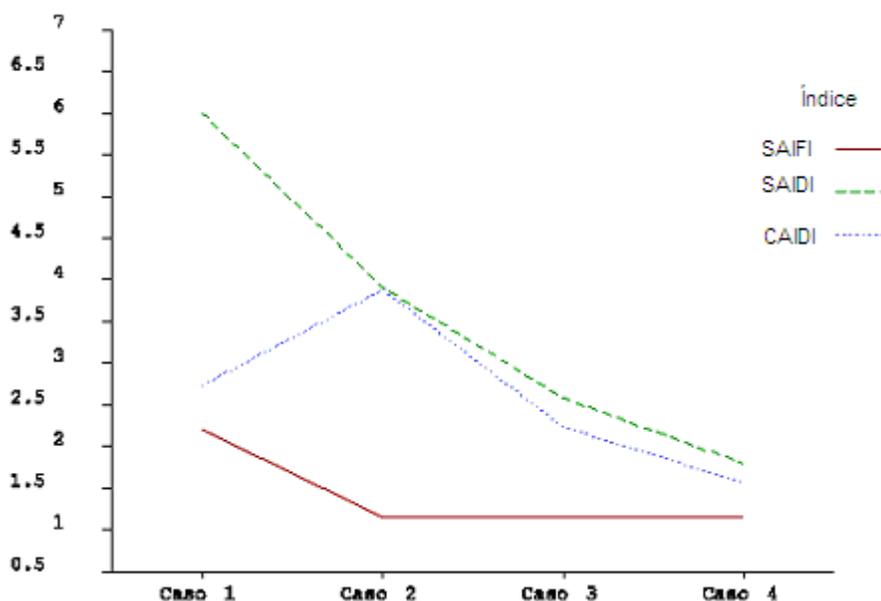


Fig.6. 6 Mejora de índices orientados al usuario

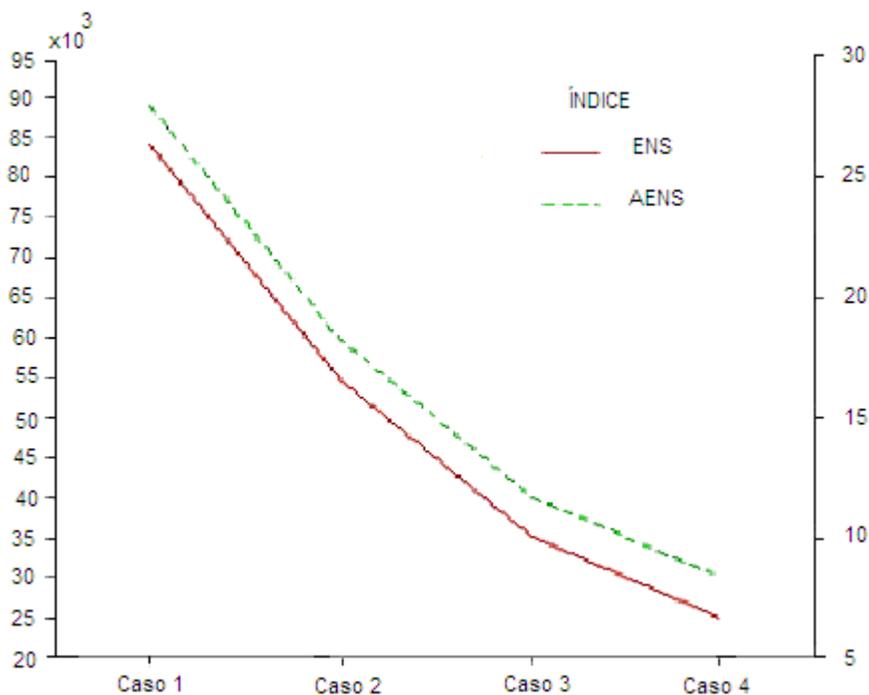


Fig.6. 7 Mejora de índices de carga y energía

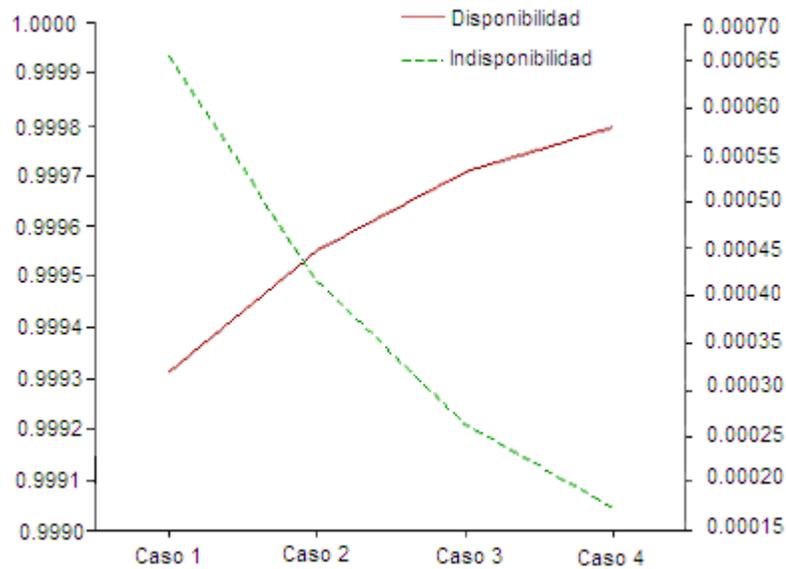


Fig.6. 8 Cambios de la disponibilidad e indisponibilidad para los diferentes esquemas

6.6 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ¹ "Evaluate Distribution System Design by Cost Reliability Indices". N.E. Chang, IEEE Transactions, PAS-96, 1977, pp. 1480-1490.
- ² "Assessing the Reliability of Distribution Systems". R.E. Brown, A.P. Hanson,, H.L. Willis, F.A. Luedtke, M.F. Born, IEEE Computer Application in Power, January 2001, pp 44-49.
- ³ "Reliability Evaluation of Power Systems", R. Billington, R.N. Allan, Plenum Press, 1984, Third Printing- January 1990.
- ⁴ "Reliability Evaluation of Engineering Systems: Concepts and Techniques". R. Billington, R.N. Allan, Pitman Books Limited, 1983.

CAPÍTULO 7

CONFIABILIDAD DE SISTEMAS DE DISTRIBUCIÓN EN PARALELO O EN MALLA

Las técnicas de evaluación de la confiabilidad, que hemos establecido en los dos capítulos anteriores, pueden desarrollarse y perfeccionarse de manera que puedan ser utilizadas para evaluar de una manera completa y precisa la confiabilidad de sistemas de distribución mas complicados, como es el caso de los sistemas en paralelo y en malla; con esto se logra cubrir el análisis de todas las configuraciones que se pueden presentar en los sistemas de distribución reales.¹

Aunque todas estas técnicas se han estado desarrollando con relación a los sistemas de distribución, es importante establecer que también son aplicables a otros subsistemas integrantes de los sistemas eléctricos de potencia, como es el caso de los sistemas de transmisión y subtransmisión, efectuando solamente algunas ligeras modificaciones para tomar en cuenta las características particulares de cada uno de ellos. Por ejemplo; en el caso de estos últimos subsistemas no son relevantes los índices dirigidos al usuario; en cambio, se deberán calcular índices relacionados con los puntos de carga con los cuales se interconectan y que les siguen en nivel de importancia en la red. Los índices evaluados con este procedimiento se pueden usar como índices de entrada para el análisis de la confiabilidad del siguiente nivel del sistema. Este proceso se puede continuar secuencialmente hasta llegar al nivel que se desea evaluar; incluyendo por supuesto los puntos de carga de los usuarios individuales.

7.1 TÉCNICAS DE EVALUACIÓN DE SISTEMAS EN MALLA ²

Fundamentalmente existen tres técnicas básicas, todas ellas definidas en capítulos anteriores, para la evaluación de este tipo de sistemas, las cuales son:

7.1.1 EVALUACIÓN MEDIANTE EL USO DE LOS DIAGRAMAS DE ESPACIO DE ESTADOS

El primer método es muy preciso pero tiene el inconveniente que se vuelve difícil de manejar a medida de que el tamaño del sistema crece; de hecho, si el sistema consta de " n " componentes y cada componente puede tener dos estados (operando o dañado), entonces el sistema tiene 2^n estados; ésta es la razón por la que el método es inadecuado para usarse en sistemas grandes.

7.1.2 MÉTODOS APROXIMADOS

La segunda opción es el método aproximado; el cual utiliza, como ya se estableció en el Capítulo 5, un conjunto de ecuaciones que permiten calcular la tasa de falla, el tiempo de reparación, y la indisponibilidad anual; los cuales son los tres índices básicos del sistema; pero es difícil de utilizar para definir los índices complementarios que se requieren para caracterizar completamente al sistema; así como para calcular otros parámetros que influyen en los índices globales de confiabilidad del mismo.

Es importante recordar que el conjunto de ecuaciones que se utilizan en este método son las siguientes:

Para dos componentes en paralelo

$$\lambda_{pp} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (r_1 + r_2)}{1 + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2} \approx \lambda_1 \lambda_2 (r_1 + r_2) \text{ cuando } \lambda_i r_i \ll 1 \quad \text{Ec.7. 1}$$

$$r_{pp} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \quad \text{Ec.7. 2}$$

$$U_{pp} = \lambda_1 \lambda_2 r_1 r_2 \quad \text{Ec.7. 3}$$

a) Para tres componentes en paralelo

$$\lambda_{pp} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) \quad \text{Ec.7. 4}$$

$$r_{pp} = \frac{r_1 r_2 r_3}{(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)} \quad \text{Ec.7. 5}$$

$$U_{pp} = \lambda_{pp} r_{pp} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 r_1 r_2 r_3 \quad \text{Ec.7. 6}$$

Para sistemas de orden mayor se pueden utilizar las ecuaciones anteriores conjuntamente con procesos de reducción de la red o con el método de cortes mínimos.

7.1.3 MÉTODO DE REDUCCIÓN DE LA RED

Como se mencionó en el inciso anterior, también se puede utilizar el método de reducción de la red; el cual define un conjunto de componentes equivalentes, las cuales se obtienen combinando en una forma secuencial todos los componentes del sistema y obteniendo componentes equivalentes en serie y en paralelo.

Como ejemplo, analicemos el sistema mostrado en la Fig. 7.1; y supongamos, por ahora, que los interruptores son 100% confiables y que los demás componentes tienen las características mostradas en la Tabla 7.1

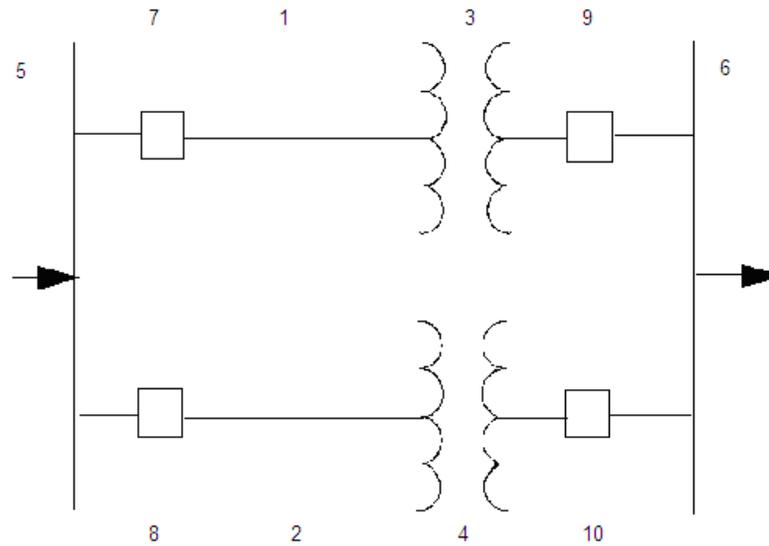


Fig.7. 1 Alimentador con dos transformadores en paralelo

Tabla 7. 1 Parámetros de entrada del sistema

| Componente | λ (fallas/año) | r(horas) |
|------------|------------------------|----------|
| 1 | 0.5 | 10 |
| 2 | 0.5 | 10 |
| 3 | 0.01 | 100 |
| 4 | 0.01 | 100 |

Utilizando las ecuaciones para sistemas serie, establecidas en el capítulo anterior

$$\lambda_s = \sum_i \lambda_i \quad \text{Ec.7. 7}$$

$$U_s = \sum_i \lambda_i r_i \quad \text{Ec.7. 8}$$

$$r_s = \frac{U_s}{\lambda_s} = \frac{\sum_i \lambda_i r_i}{\sum_i \lambda_i} \quad \text{Ec.7. 9}$$

Se obtiene

$$\lambda_{13} = \lambda_{24} = 0.51 \text{ fallas/año}$$

$$r_{13} = r_{24} = 11.76 \text{ horas}$$

$$U_{13} = U_{24} = 6 \text{ horas/año}$$

Combinándolas ahora en paralelo, utilizando las ecuaciones (6.2.1) a (6.2.3), se obtiene:

$$\lambda_{pp} = 6.984 \times 10^{-4} \text{ fallas/año}$$

$$r_{pp} = 5.88 \text{ horas}$$

$$U_{pp} = 4.107 \times 10^{-3} \text{ horas/año}$$

Este método, sin embargo, tiene tres desventajas que son

A). No se puede utilizar para el análisis de componentes que tengan una configuración que no sea serie o paralelo; por ejemplo las configuraciones en delta o en estrella que son muy comunes en los sistemas eléctricos de potencia.

B). Las áreas y componentes de baja confiabilidad son absorbidas por los componentes equivalentes en los que quedan incluidos y por lo tanto es difícil o imposible su identificación particular.

C). Es difícil adaptar esta técnica a estudios en los que se tenga que considerar necesariamente diferentes tipos de fallas, políticas de mantenimiento o los efectos del medio ambiente sobre la operación del sistema.

Como consecuencia de lo anterior, se ha desarrollado el método de análisis de los modos de falla y sus efectos que se describe a continuación.

7.1.4 ANÁLISIS DE LOS MODOS DE FALLA Y SUS EFECTOS

Este método se basa en la determinación del conjunto de cortes mínimos y por lo tanto se utiliza para identificar los modos de falla. Aunque los modos de falla están directamente relacionados con los conjuntos de corte mínimos del sistema; no es necesario utilizar siempre el algoritmo formal de cortes mínimos dado que muchas veces es posible identificar los modos de falla partiendo de una inspección visual. Sin embargo la excepción a la regla anterior se presenta, cuando el análisis se hace por medio de una computadora digital o cuando se estudian sistemas muy complejos.

En este método, los "modos de falla" identifican los conjuntos de componentes que deben quedar fuera de servicio, de una manera traslapada (conjuntos de falla simultánea), para que ocurra una interrupción del sistema.

Cada uno de los conjuntos así definidos es un conjunto de elementos en paralelo y el efecto de su falla simultánea puede calcularse utilizando las ecuaciones y conceptos establecidos en el Capítulo 5, para sistemas en paralelo.

Adicionalmente, dado que cada uno de los "conjuntos de falla simultánea" causan, por sí mismos, la falla total del sistema; todos estos conjuntos quedan conectados en serie desde el punto de vista de confiabilidad; y por lo tanto, se pueden calcular los índices del sistema utilizando las ecuaciones para componentes en serie, definidas también en el Capítulo 6.

Ejemplo 7.1. Considérese, de nuevo, el sistema mostrado en la Fig. 7.1; puede observarse fácilmente que las fallas simultáneas de los componentes 1 y 2; 1 y 4; 2 y 3 ó 3 y 4 causan la falla total del sistema.

En la Tabla 7.2. se muestran los valores de los índices básicos del sistema, los cuales se calcularon con una hoja de Excel.

7.2 INCLUSIÓN DE LAS FALLAS DE BUSES E INTERRUPTORES

Los resultados obtenidos en el inciso anterior, presuponen que tanto los buses como los interruptores tienen una confiabilidad absoluta (100%). Sin embargo esto no es una limitante; ya que utilizando este método se pueden incluir los parámetros que consideren el verdadero nivel de confiabilidad de dichos elementos. A continuación, se calcularán los índices de confiabilidad del sistema, incluyendo las tasas de falla y tiempo de reparación de los buses 5 y 6, que se muestran en la Tabla 7.3.

Tabla 7. 2 Índices básicos de confiabilidad (Ejemplo 7.1)

| Elementos en falla | $\lambda_{pp} (f / año)$ | $r_{pp} (horas)$ | $U_{pp} (horas / año)$ |
|--------------------|--------------------------|------------------|------------------------|
| 1&2 | 0.000570776 | 5 | 0.00285388 |
| 1&4 | 6.27854E-05 | 9.090909091 | 0.00057078 |
| 2&3 | 6.27854E-05 | 9.090909091 | 0.00057078 |
| 3&4 | 2.28311E-06 | 50 | 0.00011416 |
| Total | 0.00069863 | 5.882352941 | 0.00410959 |

Tabla 7. 3 Índices de confiabilidad para los buses del Ejemplo 6.1

| Bus | $\lambda (f / año)$ | $r (horas)$ |
|-----|---------------------|-------------|
| 5 | 0.01 | 5 |
| 6 | 0.02 | 2 |

Tabla 7. 4 Índices básicos de confiabilidad incluyendo fallas en buses

| Elementos en falla | $\lambda_{pp} (f / año)$ | $r_{pp} (horas)$ | $U_{pp} (horas / año)$ |
|--------------------|--------------------------|------------------|------------------------|
| Total anterior | 0.00069863 | 5.882352941 | 0.00410959 |
| 5 | 0.01 | 5 | 0.05 |
| 6 | 0.02 | 2 | 0.04 |
| Total | 0.03069863 | 3.065595761 | 0.09410959 |

Finalmente, conviene establecer que con este método se pueden incluir también los efectos de la confiabilidad de los interruptores, de las políticas de mantenimiento, los efectos del clima y otros parámetros que afecten la confiabilidad del sistema.

7.3 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

¹ "Reliability Evaluation of Power Systems", R. Billington, R.N. Allan, Plenum Press, 1984, Third Printing- January 1990.

² "Reliability Evaluation of Engineering Systems: Concepts and Techniques". R. Billington, R.N. Allan, Pitman Books Limited, 1983.

CAPÍTULO 8

EVALUACIÓN ECONÓMICA DE LA CONFIABILIDAD

Conceptualmente, las compañías suministradoras abastecen a los consumidores tratando de hacerlo siempre de una manera continua y con el mejor nivel de calidad. Sin embargo, en la práctica, esto es realmente posible únicamente a niveles en los que la empresa suministradora puede hacer un uso, económicamente justificado, de sus sistemas y equipos. Además, para mantener un servicio confiable las compañías suministradoras, deben invertir en equipos e instalaciones a fin de que sus sistemas tengan un nivel de redundancia que evite que una falla de un componente ocasione la interrupción del servicio a los usuarios. Por lo tanto, el nivel de confiabilidad del sistema depende, desde la perspectiva de la compañía suministradora, básicamente de limitaciones financieras antes que de limitaciones técnicas.

Por otra parte, los usuarios, sobre todo en el caso de muchos consumidores industriales y comerciales, necesitan de un abastecimiento continuo de energía eléctrica y la ocurrencia de una interrupción de ésta les ocasiona pérdidas originadas por el paro de la producción o de la no prestación de servicios. Dicho en otras palabras, la interrupción de energía eléctrica siempre tiene un costo para el consumidor.

Considerando lo anterior, es necesario establecer técnicas que permitan definir el nivel de confiabilidad que deberá tener el sistema de manera tal que satisfaga, adecuadamente, las limitaciones y las necesidades de ambas partes.¹

8.1 ¿QUE ES UNA INTERRUPCIÓN?

Lo primero que se requiere para hacer la evaluación económica de la confiabilidad es definir lo que es una interrupción. Tal definición debe especificar las variaciones del voltaje de la alimentación y la duración mínima del periodo durante el cual dicha variación causa una pérdida de la producción, afecta algún proceso, o impide la operación normal de la industria o el edificio comercial involucrado.

Normalmente, las definiciones de interrupción se establecen en función de la duración de la falla y se supone que el voltaje es cero durante ese periodo.

En una investigación efectuada por el IEEE, en empresas de EEUU y Canadá, para determinar el tiempo mínimo o duración crítica de pérdida del servicio, se encontró que existe una gran variación en los valores críticos, dependiendo de si se trata de una planta industrial o de un edificio comercial.

En la Tabla 8.1 se establecen los valores encontrados para plantas industriales y en la Tabla 8.2 los valores correspondientes para edificios comerciales.

Otro factor que es importante para determinar el costo de una interrupción es el tiempo de restablecimiento de operaciones de una planta industrial, después de la ocurrencia de una interrupción que ha provocado el paro completo de la misma. Los valores encontrados por el IEEE en la investigación antes mencionada, se establecen en la Tabla 8.3

Así pues el primer paso para el análisis de costos de una interrupción es la determinación del tiempo crítico de interrupción y del tiempo de restablecimiento de operaciones de la planta; incluyendo el tiempo de reparación o de reemplazo de equipo debido a problemas originados por la interrupción.

Una vez que se tienen los valores anteriores, se deberán incluir en el análisis los costos inherentes a las pérdidas de la producción, productos defectuosos o servicios no prestados a causa de la interrupción.

Tabla 8. 1 Duración Crítica de Pérdida de Servicio en Plantas Industriales

| 25 Percentil | Mediana | 75 Percentil |
|--------------|---------|--------------|
| 10 ciclos | 10 seg | 15 min |

Tabla 8. 2 Duración Crítica de Pérdida de Servicio en Edificios Comerciales

| 1 ciclo (%) | 2 ciclos (%) | 8 ciclos (%) | 1 seg (%) | 5 min (%) | 30min (%) | 1 h (%) | 12 h (%) |
|----------------|-----------------|-----------------|--------------|--------------|--------------|------------|-------------|
| 3 | 6 | 9 | 15 | 36 | 64 | 74 | 100 |

Tabla 8. 3 Tiempo de Reinicio de Operaciones

(Después de que la falla ocasiona el paro total de la planta)

| Promedio (h) | Mediana (h) |
|-----------------|----------------|
| 17.4 | 4.0 |

8.2 NIVEL ADECUADO DE LA CONFIABILIDAD DEL SISTEMA DE DISTRIBUCIÓN

Uno de los problemas a los que se enfrentan los responsables de la planeación de los sistemas de distribución es el de definir "el nivel adecuado de confiabilidad" del sistema.

Es lógico que mientras un sistema es más confiable, es más costoso tanto para la compañía suministradora como para el usuario.

Así pues se hace necesario definir el nivel de confiabilidad que es económicamente

adecuado tener en el sistema. El NERC (National Electric Reliability Council) de Estados Unidos, da una solución interesante a este problema y establece que: Nunca es posible ni deseable evitar todas las fallas posibles de los componentes o combinaciones de componentes que ocasionan interrupciones de servicio. El nivel de confiabilidad se puede considerar adecuado cuando el costo de evitar interrupciones adicionales excede el costo, para el usuario, de esas interrupciones. Entonces el nivel "adecuado" de confiabilidad se puede definir como el nivel de confiabilidad al cual la suma de los costos de abastecimiento de energía mas los costos originados por la interrupción alcanzan su valor mínimo. La Fig. 8.1 ilustra este concepto teórico.

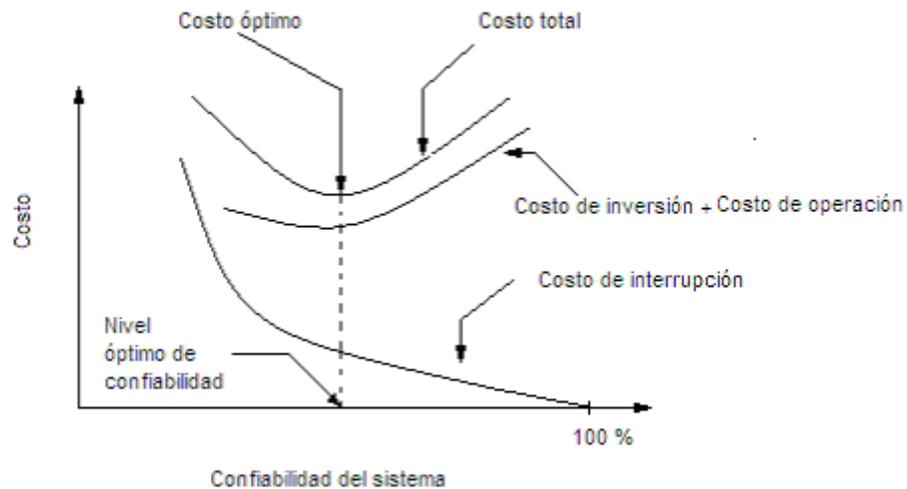


Fig.8. 1 Gráfica de Costo vs. Confiabilidad del sistema

8.3 EVALUACION ECONÓMICA DE LA CONFIABILIDAD

Tratando de resumir los conceptos establecidos en los párrafos anteriores, podemos decir que los niveles de confiabilidad que puede o debe tener un sistema de distribución se definen desde dos perspectivas virtualmente diferentes; la primera de ellas es la de la compañía suministradora y la otra es la del propio consumidor. En cada caso, los tipos de análisis que se lleven a cabo deberán ser totalmente diferentes.

Sin embargo, y a pesar de lo anterior, los criterios que deberán prevalecer deberán ser conjuntos desde el punto de vista de los beneficios para el usuario y de costos de inversión y de operación para el suministrador. Así entonces se tratará de maximizar el beneficio neto (BN):

$$BN_{max} = B_{consumidor} - C_{sistema}$$

$B_{consumidor}$ = Beneficio para el consumidor por tener disponible la energía eléctrica

$C_{sistema}$ = Costo de inversión y operación debido al incremento de la confiabilidad

Dicho de otra forma, el nivel de confiabilidad "adecuado" que deberá tener un sistema de distribución será diferente para cada caso y tanto la compañía suministradora como el usuario deberán, de manera coordinada, efectuar los análisis y las acciones que permitan satisfacer los requerimientos de cada caso particular; sobre todo cuando se trata de usuarios comerciales e industriales. Para ello, una vez que se han realizado los análisis económicos pertinentes se deberán definir el tipo y número de equipos redundantes que se requieren para tener la confiabilidad deseada.

Debido a la gran cantidad de datos que se requieren para efectuar un estudio de este tipo, y al tiempo que se requiere para obtenerlos, se pueden realizar estudios que nos indiquen solamente el "orden de magnitud" del costo de las interrupciones. Sin embargo, en caso de ser necesario, se pueden realizar análisis más detallados.

Algunos de los métodos más utilizados para el análisis económico de la confiabilidad son los siguientes:

- Renta mínima requeridos(MRR)
- Tiempo de recuperación de la inversión(ROI)
- Costo del ciclo de vida(LCC)

Cada uno de ellos tiene sus propias virtudes, defectos y debilidades. Sin embargo, en este trabajo, trataremos únicamente el método de la renta mínima requerida (MRR), el cual es una medida de la rentabilidad mínima que se desea obtener al invertir en un proyecto de confiabilidad. Es aceptado, en forma general, que este método es matemáticamente riguroso y cuantitativamente correcto siempre y cuando se tengan predicciones adecuadas de los costos.

La esencia de este método consiste en evaluar, para cada alternativa considerada, su costos y compararlos con los ingresos mínimos requeridos. Esto significa que debemos calcular la cantidad de producto que se debe vender para obtener un nivel mínimo de ganancias preestablecido para la inversión realizada considerando todos los gastos asociados con esa inversión.

Esto puede expresarse por la siguiente ecuación

$$G = X + CF \quad \text{Ec.8. 1}$$

donde

G = Requerimientos de costos mínimos para alcanzar las ganancias mínimas aceptables

X = Gastos de operación variables

C = Capital invertido

F = Factor de cargo por inversión fija

8.3.1 GASTOS VARIABLES (X)

El efecto de la falla de un componente es que causa un incremento en los gastos variables. La importancia de dicho incremento depende de la influencia del componente fallado en el circuito y de las características del sistema de distribución utilizado. La calidad de un componente puede, también, tener un efecto significativo en el número de fallas ocurridas; por ejemplo, un componente de mala calidad puede incrementar el número de fallas con relación a las que se tendrían con un componente de buena calidad.

Cuando ocurre una falla, los gastos variables se incrementan de dos formas: primeramente se tiene un incremento en los gastos por la falla misma y además se tiene un costo que es proporcional a la duración de la falla.

El incremento de los costo atribuibles a la falla misma incluyen los siguientes conceptos:

- a) Equipo dañado.
- b) Producto inservible o fuera de especificaciones.
- c) Costos extras de mantenimiento.
- d) Costo de reparación del componente dañado

El incremento de costos proporcionales al tiempo de falla incluye lo siguiente:

- I. Tiempo requerido para volver a arrancar la planta
- II. Tiempo para efectuar las reparaciones, si se trata de un sistema radial
- III. Tiempo para efectuar la transferencia de la fuente dañada a una fuente en buenas condiciones

Durante el tiempo que la planta no trabaja, se tiene una pérdida de producción. Como no se puede disponer de la producción perdida para su venta, se tiene entonces una pérdida de ingresos. Sin embargo, durante el tiempo en que la planta está fuera de servicio, no se efectúan algunos gastos como los inherentes a los materiales de consumo, energía y costos de combustible. Por lo tanto, el costo de la pérdida de producción es igual a los ingresos no obtenidos, debido al paro de la producción, menos los gastos ahorrados durante el paro. Se debe observar que tanto el valor de las pérdidas de producción como los gastos en que se incurre son proporcionales a la tasa de falla. Así entonces si el valor de las pérdidas de producción por hora se considera constante podemos escribir la siguiente ecuación

$$X = \lambda [x_i + (g_p - x_p)(r + s)]$$

Ec. 8. 2

donde

X = Gastos variables (\$ por año)

λ = Tasa de falla (Fallas por año)

x_i = Gastos extraordinarios debidos a la falla (\$ por falla)

g_p = Pérdida de ingresos por hora de paro (\$ por hora)

x_p = Gastos variables ahorrados por hora de paro (\$ por hora)

r = Tiempo de reparación o reemplazo del componente o tiempo de transferencia si el sistema no es radial (horas)

s = Tiempo de restablecimiento de la planta después de la falla (horas)

8.3.2 INVERSIÓN (C)

Cada una de los diferentes esquemas posibles para construir un sistema de distribución requiere de diferentes niveles de inversión. Obviamente el tipo de sistema que requiere una inversión menor es el radial; a medida que se hace más sofisticado el tipo de esquema o que se incrementa la calidad de las componentes del sistema la inversión requerida aumenta considerablemente.

Para este tipo de análisis se pueden utilizar, alternativamente, las inversiones totales de cada uno de los esquemas posibles o los costos incrementales de los diferentes esquemas escogiéndose el plan menos costoso. Sin embargo es preferible el análisis mediante el método de inversión total ya que permite utilizar el factor de cargo (F) que se explica a continuación, el cual considera otros parámetros que tienen considerable influencia en los resultados del análisis.

8.3.3 FACTOR DE CARGO DE LA INVERSIÓN (F)

El factor F incluye los siguientes conceptos, los cuales se consideran constantes con relación a la inversión

- i. Tasa de retorno mínima aceptable para la inversión
- ii. Impuestos
- iii. Depreciación
- iv. Gastos fijos

El factor F se calcula por medio de la siguiente ecuación

$$F = \left[\frac{(S_c a_L / f_t) - t \bar{d}_t}{1 - t} \right] + e \quad \text{Ec. 8. 3}$$

La cual puede también tomar la forma

$$F = \bar{r} + \bar{d} + \bar{t} + e \quad \text{Ec. 8. 4}$$

donde

$a_n = R + d_n$, factor de amortización o nivelación

$d_n = r / (S_n - 1)$, factor de fondo de amortización

$S_n = (1 + R)^n$, factor de crecimiento o de valor futuro

n = Periodo de años, aplicable tanto a c como a L

c = Años entre el arranque del proyecto y el momento en que se hace la inversión

L = Vida útil de la inversión en años

R = Ganancias mínimas aceptables por \$ de inversión (C)

f_i = Probabilidad de éxito o factor de ajuste de riesgo

I = Impuestos por \$ de inversión (C).

\bar{d}_i = Impuestos asociados a la depreciación.

e = Gastos fijos por \$ de inversión C.

\bar{r} = Retorno nivelado sobre la inversión por \$ de inversión (C).

\bar{d} = Depreciación nivelada sobre la inversión \$ de la inversión C.

\bar{i} = Impuestos nivelados por \$ de inversión C.

Y además

$$S_c = (1 + R)^c$$

$$S_L = (1 + R)^L$$

$$d_L = (R / S_L - 1)$$

$$a_L = (R + d_L)$$

Ec. 8. 5

El término "e" cubre parámetros tales como seguros, impuestos sobre la propiedad, costos fijos de mantenimiento, etc. En los Estados Unidos de Norteamérica un valor típicamente utilizado es del orden de 0.0825.

8.4 PASOS PARA LA COMPARACIÓN ECONÓMICA

- a) Preparar los diagramas unifilares de los planes alternativos, asignar las tasas de falla, tiempos de reparación, costo de componentes y determinación de la inversión total C correspondiente a cada plan
- b) Determinar el valor de los gastos variables X
- c) Determinar el factor de cargos por inversión F
- d) Calcular $G = X + CF$
- e) Seleccionar el plan que tenga el menor valor de G

8.5 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

¹ "IEEE Recommended Practice for the Design of Reliable Industrial and Commercial Power Systems". IEEE Std 493-1990. IEEE Standards Board, 1991.

CONCLUSIONES

Cuando el caso así lo ameritaba; los resultados mas importantes se fueron estableciendo en el apartado de conclusiones al final de los diferentes capítulos. Sin embargo, a manera de resumen general podemos concluir lo siguiente:

- ❑ Es necesario analizar la confiabilidad de los sistemas de distribución de energía eléctrica ya que ellos representan una parte muy importante (más del 50% en promedio) del total de un sistema eléctrico de potencia y es en donde se presentan las fallas que afectan directamente al usuario.
- ❑ En este trabajo, partiendo de una investigación bibliográfica retrospectiva, se analizan fuentes de información para un periodo de más de cuarenta años y se establecen las bases teóricas para el análisis de la confiabilidad de **sistemas de ingeniería**, así como las tendencias de investigación en dicho campo. Se hace un especial énfasis, como es lógico, en los **sistemas eléctricos de potencia** en general y en los **sistemas de distribución de energía eléctrica** en particular.
- ❑ Se desarrollan algunos modelos matemáticos que permiten aplicar dichas teorías al análisis específico de sistemas reparables, característica que permite prolongar la vida útil de un sistema y la cual es una característica inherente de los sistemas de distribución de energía eléctrica
- ❑ Como el tiempo de vida de un componente o sistema es una variable aleatoria se necesita conocer, en detalle, las características de las funciones de distribución de probabilidad que se pueden utilizar. Actualmente, para el caso de sistemas de ingeniería de muy alta precisión, la función de distribución que más se utiliza es la de Weibull , sin embargo para sistemas reparables, como es el caso de los sistemas de distribución de energía eléctrica es mejor seguir trabajando con la distribución exponencial ya que esto permite analizar con un bajo grado de complicación una gran diversidad de estados de operación.
- ❑ Se hace un análisis detallado de la teoría de gráficas con el objetivo final de definir los métodos para encontrar los cortes mínimos de una red de confiabilidad; el método de los "cortes mínimos" es uno de los métodos fundamentales en el estudio de la confiabilidad de sistemas. Se hace la definición formal de red de confiabilidad para definir, por el método de concatenación, los eslabones de una red, y a partir de ellos, definir los cortes mínimos.
- ❑ Se hace un resumen de los métodos y procedimientos que tradicionalmente se han utilizado para la determinación de la confiabilidad de sistemas eléctricos de potencia y se presentan los índices de confiabilidad que proponen instituciones como IEEE y CIGRE, esto nos permite aseverar que dichos índices no se pueden definir de una manera personal y caprichosa sino que se deben seleccionar de entre los que ya están propuestos actualmente ya que han sido definidos después de un trabajo muy cuidadoso por grupos de especialistas.
- ❑ Por lo que se refiere a los métodos de análisis es conveniente hacer énfasis en que aquí no se estudian los métodos de simulación, como es el caso del método de Monte Carlo; esta es una alternativa interesante que complementaría la cobertura del presente trabajo

- Además de conocer los principios fundamentales de probabilidad, antes mencionados, es absolutamente necesario, para evaluar la confiabilidad de sistemas eléctricos, tener un conocimiento mínimo de los "Procesos de Markov", razón por la cual se incluye un apéndice con una introducción a esta técnica.
- La confiabilidad de los sistemas de distribución radiales se puede mejorar sin realizar grandes inversiones. Muchas veces se puede lograr una mejora en la confiabilidad del sistema, simplemente cambiando la forma de operación del mismo o con un reacomodo del equipo que lo integra. Lo anterior se demuestra con el análisis realizado en el Capítulo 6.
- Existen, varias mejoras que no se han analizado; por ejemplo, la inclusión de mantenimiento programado, componentes de repuesto, efectos de las condiciones atmosféricas, fallas en modo común (o dependiente), sistemas con un número grande de componentes, etc., ya que ello haría este trabajo confuso y de dimensiones inaceptables. Sin embargo, con la teoría y técnicas expuestas se pueden estudiar todos esos casos.
- Finalmente conviene recordar que la evaluación económica de la confiabilidad se analizó únicamente de manera muy general, ya que nunca fue éste un tema central de este trabajo. Para realizar un análisis serio del tema se requiere de mucha información la cual no se tiene disponible para los sistemas de nuestro país y la que existe a nivel internacional no es aplicable a nuestros sistemas.

A P É N D I C E A

PROCESOS DE MARKOV

En la física clásica, el principio fundamental del determinismo científico juega un papel muy importante. Esto implica que el estado de un sistema físico en un instante t puede deducirse del estado en que se encontraba en un tiempo anterior t_0 .

Existen también sistemas físicos que obedecen mas bien a ciertas leyes probabilísticas, en vez de comportarse de acuerdo a leyes determinísticas, para los cuales puede enunciarse un principio análogo, es decir: La probabilidad de que un sistema físico alcance un estado dado en un tiempo establecido t_2 se puede calcular conociendo su estado en un tiempo anterior t_1 , y no depende de la historia del sistema antes de ese tiempo. Los procesos estocásticos que representan observaciones de sistemas físicos que satisfacen la condición anterior se llaman procesos de Markov.

A-1 DEFINICIÓN FORMAL DE UN PROCESO DE MARKOV

Un proceso estocástico de parámetro discreto $\{X(t), t = 0, 1, 2, \dots\}$ o un proceso estocástico de parámetro continuo $\{X(t), t \geq 0\}$ se llama "proceso de Markov", si para cualquier conjunto de "n" puntos en el tiempo $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ en el conjunto de índices de proceso, la función de distribución condicional de $X(t_n)$, para valores dados de $X(t_1), \dots, X(t_{n-1})$ depende únicamente de $X(t_{n-1})$, o sea de su valor más reciente. Lo anterior se puede expresar mas precisamente de la siguiente manera. Para cualesquiera números reales x_1, \dots, x_n , se tiene que

$$\begin{aligned} P[X(t_n) \leq x_n \mid X(t_1) = x_1, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}] \\ = P[X(t_n) \leq x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}] \end{aligned} \quad \text{A1. 1}$$

Los procesos de Markov se clasifican de acuerdo a ¹

- (i) la naturaleza del conjunto de índices del proceso (ya sea parámetro discreto o parámetro continuo) y
- (ii) la naturaleza del espacio de estados del proceso.

Se dice que un número real x es un valor posible, o un estado de un proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$ si existe un tiempo t en T tal que la probabilidad $P[x - h < X(t) < x + h]$ es positiva para toda $h > 0$. El conjunto de todos los valores posibles de un proceso estocástico se llama espacio de estados. El espacio de estados se llama discreto si contiene un número finito o contable finito de estados. Un espacio de estados que no es discreto se llama continuo.

Un proceso de Markov cuyo espacio de estados es discreto se llama "cadena de Markov". Usualmente se usa el conjunto de enteros $\{0, 1, \dots\}$ como el espacio de estados de una cadena de Markov. Lo anterior se puede resumir en la Tabla A1.

Un proceso de Markov se describe por medio de una función de probabilidad de transición, usualmente denotado por $P(x, t_0; E, t)$ o $P(E, t \mid x, t_0)$ lo cual representa la probabilidad condicional de que el estado del sistema en el tiempo t pertenecerá al conjunto E , dado que en el tiempo $t_0 (< t)$ el sistema está en el estado x .

Tabla A1. Procesos de Markov clasificados en sus cuatro tipos básicos

| | | Espacio de estados | |
|--------------------------|----------|--|---|
| | | Discreto | Continuo |
| Naturaleza del parámetro | Discreto | Cadena de Markov de parámetro discreto | Proceso de Markov de parámetro discreto |
| | Continuo | Cadena de Markov de parámetro continuo | Proceso de Markov de parámetro continuo |

Se dice que un proceso de Markov tiene una probabilidad de transición estacionaria, o que es homogéneo en el tiempo si $P(x, t_0; E, t)$ depende de t y t_0 únicamente por la diferencia $(t - t_0)$.

Considerando que el problema de confiabilidad trata normalmente con sistemas que son continuos en el tiempo y discretos en el espacio; y como éste es el caso de la confiabilidad de sistemas eléctricos, en este apéndice se analizará exclusivamente la teoría de las cadenas de Markov.

Los principales problemas que se analizarán son los siguientes:

- (i) El comportamiento transitorio, o dependiente del tiempo, de las cadenas de Markov, para encontrar la función transitoria de probabilidad.
- (ii) El comportamiento en estado estable de una cadena de Markov.
- (iii) El comportamiento de los tiempos de ocupación y tiempos de primer paso; con el fin de estudiar la distribución de probabilidad del monto de tiempo que la cadena dura en los diferentes estados, así como la cantidad de tiempo que le toma al sistema pasar de un conjunto de estados a otro.

A-2 CADENAS DE MARKOV DE PARÁMETRO DISCRETO

Con el fin de lograr un entendimiento claro de los conceptos básicos, primeramente se analizarán éstos para el caso de cadenas de Markov de parámetro discreto y posteriormente se hará su adecuación para el caso de cadenas de Markov de parámetro continuo.²

A-2.1 PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN Y ECUACIÓN DE CHAPMAN-KOLMOGOROV

Para especificar la ley de probabilidad de una cadena de Markov de parámetro discreto $\{X_n\}$ es suficiente establecer para todos los tiempos $n \geq m \geq 0$ y estados j y k , la función de densidad de probabilidad

$$p_j(n) = P[X_n = j] \tag{A2. 1}$$

y la función de densidad de probabilidad condicional

$$p_{j,k}(m,n) = P[x_n = k \mid x_m = j] \quad \text{A2. 2}$$

La función $p_{j,k}(m,n)$ se llama función de probabilidad de transición de la cadena de Markov. La ley de probabilidad de una cadena de Markov se determina por las funciones de las ecuaciones (A2.1) y (A2.2), dado que para todos los enteros q ; cualquier tiempo $n_1 < n_2 < \dots < n_q$ y estados k_1, \dots, k_q

$$P[X_{n_1} = k_1, \dots, X_{n_q} = k_q] = p_{k_1}(n_1) p_{k_1, k_2}(n_1, n_2) p_{k_2, k_3}(n_2, n_3) \dots \\ \dots \dots \dots p_{k_{q-1}, k_q}(n_{q-1}, n_q) \quad \text{A2. 3}$$

Se dice que una cadena de Markov es homogénea (que es homogénea en el tiempo o que tiene probabilidades de transición estacionarias) si $p_{j,k}(m,n)$ depende únicamente de la diferencia $n-m$. Entonces

$$p_{j,k}(n) = P[X_{n+t} = k \mid X_t = j] \quad \text{para todo entero } \geq 0 \quad \text{A2. 4}$$

se llama función de probabilidad de transición de n-etapas de la cadena de Markov $\{X_n\}$.

En otra palabras, $p_{j,k}(n)$ es la probabilidad condicional de que la cadena de Markov, que ahora se encuentra en el estado j , se moverá después de n etapas al estado k . La probabilidad de transición de una etapa $p_{j,k}(1)$ se escribe usualmente como $p_{j,k}$. En símbolos

$$p_{j,k} = P[X_{t+1} = k \mid X_t = j] \quad \text{para todo entero } \geq 0 \quad \text{A2. 5}$$

Similarmente, si $\{X(t), t \geq 0\}$ es una cadena de Markov de parámetro continuo, para especificar la ley de probabilidad de ella es suficiente establecer para todo tiempo $t \geq s \geq 0$ y estados j y k , la función de densidad de probabilidad

$$p_k(t) = P[X(t) = k] \quad \text{A2. 6}$$

y la función de densidad de probabilidad condicional

$$p_{j,k}(s,t) = P[X(t) = k \mid X(s) = j] \quad \text{A2. 7}$$

La función $p_{j,k}(s,t)$ se llama función de probabilidad de transición de la cadena de Markov. $\{X(t), t \geq 0\}$ es homogénea si $p_{j,k}(s,t)$ depende únicamente de la diferencia $t-s$.

Entonces

$$p_{j,k}(t) = P[X(t+u) = k \mid X(u) = j] \quad \text{A2. 8}$$

para toda $u \geq 0$

se llama función de probabilidad de transición de la cadena de Markov $\{X(t), t \geq 0\}$.

Una relación fundamental que satisface la función de probabilidad de transición de una cadena de Markov $\{X_n\}$ es la llamada ecuación de Chapman - Kolmogorov, que establece que para todo tiempo $n > u > m \geq 0$ y estados j y k

$$p_{j,k}(m,n) = \sum_{\text{estados } i} p_{j,i}(m,u) p_{i,k}(u,n) \quad \text{A2. 9}$$

Es necesario observar que la sumatoria anterior se efectúa sobre todos los estados de la cadena de Markov.

Similarmente en el caso de una cadena de Markov de parámetro continuo $\{X(t), t \geq 0\}$ para todo tiempo $t > u > s \geq 0$ y estados j y k se satisface la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$p_{j,k}(s,t) = \sum_{\text{estados } i} p_{j,i}(s,u) p_{i,k}(u,t) \quad \text{A2. 10}$$

A-2.2 MATRICES DE PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN

Las probabilidades de transición de una cadena de Markov $\{X_n\}$ con espacio de estados $\{0, 1, 2, \dots\}$ se puede manejar mejor en forma de matriz de la siguiente manera:

$$P(m,n) = \begin{bmatrix} p_{0,0}(m,n) & p_{0,1}(m,n) & p_{0,2}(m,n) & \dots & p_{0,k}(m,n) & \dots \\ p_{1,0}(m,n) & p_{1,1}(m,n) & p_{1,2}(m,n) & \dots & p_{1,k}(m,n) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{j,0}(m,n) & p_{j,1}(m,n) & p_{j,2}(m,n) & \dots & p_{j,k}(m,n) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad \text{A2. 11}$$

Nótese que los elementos de una matriz de probabilidad de transición $P(m,n)$ satisface las condiciones

$$p_{j,k}(m,n) \geq 0 \quad \text{para toda } j,k \quad \text{A2. 12}$$

$$\sum_k p_{j,k}(m,n) = 1 \quad \text{para toda } j \quad \text{A2. 13}$$

En términos de multiplicación de matrices de probabilidad de transición la ecuación de Chapman-Kolmogorov para todos los tiempos $n > u > m \geq 0$ se puede escribir

$$P(m,n) = P(m,u) P(u,n) \quad \text{A2. 14}$$

Entonces, dada una cadena de Markov $\{X_n\}$ se puede definir una familia de matrices $\{P(m,n)\}$ las cuales satisfacen las ecuaciones (A2.12), (A2.13) y (A2.14). La inversa también es cierta: dada una familia de matrices $\{P(m,n)\}$ que satisfagan las ecuaciones (A2.12),

(A2.13) y (A2.14); se puede definir una cadena de Markov $\{X_n\}$ para la cual $P(m,n)$ es una matriz de probabilidad de transición cuyos elementos $p_{j,k}(m,n)$ satisfacen la ecuación (A2.2).

A-2.3 DETERMINACIÓN DE LAS PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN DE UNA CADENA DE MARKOV

De la ecuación de Chapman-Kolmogorov se pueden derivar varias ecuaciones recursivas (en el caso de parámetro discreto) y ecuaciones diferenciales (en el caso de parámetro continuo) para las funciones de probabilidad de transición. A continuación se discutirá el caso de parámetro discreto, dejando para una sección posterior, como ya se dijo, el caso de parámetro continuo.

Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov con una matriz de probabilidad de transición $\{P(m,n)\}$. De la ecuación (2,14) se sigue que:

$$\begin{aligned}
 P(m,n) &= P(m,n-1) P(n-1,n) \\
 &= P(m,n-2) P(n-2,n-1) P(n-1,n) \\
 &= P(m,m+1) P(m+1,m+2) \dots P(n-1,n)
 \end{aligned}
 \tag{A2.15}$$

Entonces para conocer $P(m,n)$ para toda $m < n$ es suficiente conocer la secuencia de matrices de probabilidades de transición de una etapa

$$P(0,1), P(1,2), \dots, P(n,n+1),
 \tag{A2.16}$$

Ahora definamos los vectores de probabilidad incondicional para $n=0,1,2,\dots$

$$p(n) = \begin{bmatrix} p_0(n) \\ p_1(n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_j(n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}
 \tag{A2.17}$$

donde $p_j(n) = P[X_n = j]$

Se puede verificar que

$$p(n) = P(0,n) p(0)
 \tag{A2.18}$$

Con base en las ecuaciones (A2.18), (A2.15) y (A2.3) se puede concluir que la ley de probabilidad de una cadena de Markov $\{X_n\}$ está completamente determinada una vez que se conocen las matrices de probabilidad de transición dadas en (A2.16) y el vector de probabilidad incondicional $p(0)$ en el tiempo 0.

En el caso de una cadena de Markov homogénea, hagamos que

$$P(n) = \{p_{j,k}(n)\}, P = \{p_{j,k}\} \quad \text{A2. 19}$$

denoten respectivamente las matrices de probabilidad de transición de n-etapas y una-etapa. De las ecuaciones (A2.16) y (A2.18) se sigue que:

$$p(n) = P^n \quad \text{A2. 20}$$

$$p(n) = p(0) P^n \quad \text{A2. 21}$$

Consecuentemente, la ley de probabilidad de una cadena de Markov homogénea está completamente determinada una vez que se conoce la matriz de probabilidad de transición de una etapa $P = \{p_{j,k}\}$ y el vector de probabilidad incondicional $p(0) = \{p_j(0)\}$ en el tiempo 0.

Se dice que una cadena de Markov es finita con K estados cuando el número de posibles valores de las variables aleatorias es finito e igual a K .

Las probabilidades de transición $p_{j,k}$ son diferentes de cero únicamente para un número finito valores de j y k y la matriz de probabilidad de transición E es entonces una matriz de $K \times K$.

A-2.4 CADENAS DE MARKOV DE DOS ESTADOS

Tan simples como son, las cadenas de Markov homogéneas con dos estados son, sin embargo, muy importantes. La matriz de probabilidades de transición para una cadena de Markov de este tipo, con dos estados llamados 0 y 1 es de la forma

$$P = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} \end{bmatrix}$$

La matriz de probabilidades de transición de dos etapas está dada por

$$P(2) = P^2 = \begin{bmatrix} p_{0,0}^2 + p_{0,1}p_{1,0} & p_{0,1}(p_{0,0} + p_{1,1}) \\ p_{1,0}(p_{0,0} + p_{1,1}) & p_{1,1}^2 + p_{0,1}p_{1,0} \end{bmatrix}$$

En el caso de que $|p_{0,0} + p_{1,1} - 1| < 1$ se puede demostrar por inducción matemática que la matriz de transición de n-etapas es

$$P(n) = \frac{1}{2 - p_{0,0} - p_{1,1}} \begin{bmatrix} 1 - p_{1,1} & 1 - p_{0,0} \\ 1 - p_{1,1} & 1 - p_{0,0} \end{bmatrix} + \frac{(p_{0,0} + p_{1,1} - 1)^n}{2 - p_{0,0} - p_{1,1}} \begin{bmatrix} 1 - p_{0,0} & -1(1 - p_{0,0}) \\ -1(1 - p_{1,1}) & 1 - p_{1,1} \end{bmatrix} \quad \text{A2. 22}$$

De la ecuación anterior se pueden obtener las expresiones asintóticas simples para las probabilidades de transición de n etapas, que se muestran a continuación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{0,0}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{1,0} = \frac{1 - p_{1,1}}{2 - p_{0,0} - p_{1,1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{0,1}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{1,1}(n) = \frac{1 - p_{0,0}}{2 - p_{0,0} - p_{1,1}} \quad \text{A2. 23}$$

A-2.5 EJEMPLO

Un sistema de comunicaciones transmite los dígitos 0 y 1. Cada dígito transmitido debe pasar a través de diferentes etapas; en cada una de las cuales hay una probabilidad "p" de que el dígito que entra, salga de esa etapa sin ser afectado por un cambio. Si X_0 es el dígito que entra a la primera etapa del sistema y, para n mayor o igual que cero, X_n representa el dígito que sale de la n -ésima etapa, la secuencia X_0, X_1, X_2, \dots es una cadena de Markov homogénea. Si además se define que $q = 1 - p$ como la probabilidad de cambio, entonces la matriz de probabilidad de transición será

$$P = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$$

Y la matriz de probabilidades de transición de n -etapas correspondiente $P(n)$ se puede escribir:

$$P(n) = \begin{bmatrix} 1/2 + 1/2(p - q)^n & 1/2 - 1/2(p - q)^n \\ 1/2 - 1/2(p - q)^n & 1/2 + 1/2(p - q)^n \end{bmatrix}$$

Como un ejemplo de lo anterior si $p=2/3$, entonces $q=1/3$ y

$$P(2) = \begin{bmatrix} 5/9 & 4/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{bmatrix}$$

de donde

$$p[X_2 = 1 | X_0 = 1] = p_{1,1}(2) = 5/9$$

$$P[X_3 = 1 | X_0 = 1] = p_{1,1}(3) = 14/27$$

En palabras, si $p=2/3$, entonces un dígito que entra al sistema como un 1, tiene una probabilidad de 5/9 de ser transmitido correctamente después de dos etapas y una probabilidad de 14/27 de transmitirse correctamente después de tres etapas.

A-2.6 DESCOMPOSICIÓN DE CADENAS DE MARKOV EN CLASES COMUNICANTES

En el resto de esta sección se estudiará la evolución en el tiempo de las cadenas de Markov homogéneas de parámetro discreto. Es conveniente comenzar clasificando los estados de una cadena de acuerdo a si es posible ir de un estado a otro.

Se dice que un estado k es accesible desde el estado j si para algún entero $N > 1, p_{j,k}(N) > 0$. Se dice que dos estados j y k se comunican si j es accesible desde k y k es accesible desde j . Si k es accesible desde j se simboliza $j \rightarrow k$; si j y k se comunican, se simboliza $j \leftrightarrow k$.

Teorema 2.6.1. Si

$$i \rightarrow j \text{ y } j \rightarrow k, \text{ entonces } i \rightarrow k \quad \text{A2. 24}$$

Teorema 2.6.2. La comunicación es simétrica y transitiva, en el sentido de que para todo estado $i, j, y k$:

$$j \leftrightarrow k \text{ implica que } k \leftrightarrow j \quad \text{A2. 25}$$

$$i \leftrightarrow j \text{ y } j \leftrightarrow k \text{ implica que } i \leftrightarrow k \quad \text{A2. 26}$$

Dado un estado j de una cadena de Markov, su clase comunicante $C(j)$ se define como el conjunto de todos los estados k de la cadena los cuales se comunican con j ; en símbolos,

$$k \in C(j) \text{ si y sólo si } k \leftrightarrow j \quad \text{A2. 27}$$

Pudiera suceder que $C(j)$ fuera vacío, es decir que j no se comuniqua con ningún estado, ni con él mismo; en este caso j se llama un estado de no retorno.

Sí $C(j)$ es no vacío, entonces j pertenece a $C(j)$; para ver ésto, nótese que según el teorema 2.6.2. existe un estado k tal que $j \leftrightarrow k$ y $k \leftrightarrow j$ si y sólo si $j \leftrightarrow j$. Un estado que se comunica con él mismo se llama un estado de retorno.

Una clase no vacía C de estados en una cadena de Markov se llama clase comunicante, si para algún estado j , C es igual a $C(j)$.

Teorema 2.6.3. Si C_1 y C_2 son clases comunicantes, entonces $C_1 = C_2$ o $C_1 C_2 = \phi$ (C_1 y C_2 son disjuntos).

Teorema 2.6.4. El conjunto S de estados de una cadena de Markov se puede escribir como la unión de una familia finita o una familia infinita contable $\{C_r\}$ de conjuntos disjuntos de estados,

$$S = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r \cup \dots \text{ con } C_i C_j = \phi \text{ para } i \neq j \quad \text{A2. 28}$$

donde cada conjunto C_r es una clase comunicante de estados, o contiene exactamente un estado de no retorno.

Un conjunto C no vacío de estados se llama cerrado si ningún estado fuera del conjunto es accesible desde cualquier estado dentro del conjunto mismo. En símbolos, C es cerrado si y sólo si, para cada j en C y cada k no existente en C , $p_{j,k}^n = 0$ para toda $n = 1, 2, \dots$

Se debe observar que una vez que una cadena de Markov entra en una clase cerrada permanecerá allí siempre. El conjunto C que no cumple con las características anteriores se llama no-cerrado.

Una clase comunicante cerrada C de estados constituye esencialmente una cadena de Markov la cual se puede separar para estudiarse separadamente. Si se escribe la matriz de probabilidades de transición P de una cadena de Markov tal que los estados de C se anoten primero, entonces se puede simbolizar

$$P = \begin{bmatrix} P_c & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$$

donde (*) denota a una matriz diferente de cero y P_c es una submatriz de P cuyos elementos tienen índices de estados en C . la matriz de probabilidades de transición de n etapas, se puede entonces escribir como sigue:

$$P(n) = \begin{bmatrix} (P_c)^n & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$$

Dado que una clase comunicante cerrada C se puede extraer de una cadena de Markov (eliminando de la matriz de probabilidades de transición de la cadena todos los renglones y columnas correspondientes a los estados fuera de C) y tratarse por si misma como una cadena de Markov; se concluye que para el estudio de las propiedades asintóticas de una cadena de Markov es suficiente con estudiar las propiedades asintóticas de una cadena de Markov en la cual existe exactamente una clase comunicante cerrada y en la cual todas las otras clases comunicantes son no cerradas.

A-2.7 TIEMPOS DE OCUPACIÓN Y TIEMPOS DE PRIMER PASO

Con el fin de estudiar la evolución en el tiempo de una cadena de Markov, se deben clasificar los estados de la cadena en dos categorías: aquellos que el sistema visita infinitamente a menudo y aquellos que el sistema visita únicamente de manera finita. En un tiempo largo la cadena no estará en un estado de esta última clase y por lo tanto bastará únicamente estudiar la evolución de la cadena cuando ella se mueve entre los diferentes estados que visita frecuentemente de una manera infinita. En esta sección se desarrollarán criterios para clasificar los estados de una cadena de Markov en esas categorías. Con ese propósito a continuación se introduce el concepto de tiempos de ocupación de un estado.

Considérese una cadena de Markov $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$. Para cualesquiera estado k y $n = 1, 2, \dots$, se define $N_k(n)$ como el número de veces que el estado k es visitado en las

primeras n transiciones; mas precisamente $N_k(n)$ es igual al número de enteros v que satisfacen $1 \leq v \leq n$ y $X_v = k$. Entonces $N_k(n)$ se llamará el tiempo de ocupación del estado k en las primeras n transiciones.

La variable aleatoria

$$N_k(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} N_k(n) \quad \text{A2. 29}$$

se llama tiempo de ocupación de k .

Los tiempos de ocupación se pueden representar útilmente como las sumas de variables aleatorias. Definamos para cualquier estado k y $n=1,2,\dots$

$$\begin{aligned} Z_k(n) &= 1 \quad \text{si } X_n = k \\ &= 0 \quad \text{si } X_n \neq k \end{aligned} \quad \text{A2. 30}$$

O sea, $Z_k(n)$ es igual a 1 ó 0 dependiendo de si en el tiempo n la cadena está o no en el estado k . Entonces se puede escribir

$$N_k(n) = \sum_{m=1}^n Z_k(m) \quad \text{A2. 31}$$

$$N_k(\infty) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_k(m) \quad \text{A2. 32}$$

Definamos ahora las siguientes probabilidades, para cualquier estado j y k :

$$f_{j,k} = P [N_k(\infty) > 0 | X_0 = j] \quad \text{A2. 33}$$

$$g_{j,k} = P [N_k(\infty) = \infty | X_0 = j] \quad \text{A2. 34}$$

En palabras, $f_{j,k}$ es la probabilidad condicional de que en cualquier tiempo se visite el estado k , dado que la cadena de Markov estaba inicialmente en el estado j , mientras que $g_{j,k}$ es la probabilidad condicional de un número infinito de visitas al estado k , dado que la cadena de Markov estaba inicialmente en el estado j .

Se debe notar que las probabilidades definidas en (A2.33) y (A2.34) podrían no estar definidas en algún caso en que $P[X_0 = j] = 0$. Sin embargo lo que esas ecuaciones significan realmente es que

$$f_{j,k} = P [N_k(\infty) - N_k(m) > 0 | X_m = j] \quad \text{A2. 35}$$

$$g_{j,k} = P [N_k(\infty) - N_k(m) = \infty | X_m = j] \quad \text{A2. 36}$$

para todos los valores de m para los cuales la probabilidad condicional está definida. Para cadenas de Markov con probabilidades de transición homogéneas, los valores que toman las ecuaciones anteriores son independientes de los valores m para los cuales ellas están

definidas.

En lo sucesivo, para simplicidad, las definiciones anteriores se escribirán como en (A2.33) y (A2.34) pero deberán interpretarse como en (A2.35) y (A2.36).

También simbolizaremos como $f_{j,k}(n)$ la probabilidad condicional de que el primer paso de j hacia k ocurra exactamente en n etapas; más precisamente

$$f_{j,k}(n) = P [V_k(n) | X_0 = j] \quad \text{A2. 37}$$

donde para todo estado k y entero $n=1,2,\dots$ se define

$$V_k(n) = [X_n = k, X_m \neq k \text{ para } m = 1, 2, \dots, n-1] \quad \text{A2. 38}$$

Teorema 2.7.1. Para todos los estados j y k

$$f_{j,k} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{j,k}(n) \quad \text{A2. 39}$$

Teorema 2.7.2. Para todo estado j y k , y entero n mayor o igual que 1

$$p_{j,k}(n) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{j,k}(m) p_{k,k}(n-m) \quad \text{A2. 40}$$

y definiendo

$$p_{j,k}(0) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \quad \text{A2. 41}$$

En el estudio de las cadenas de Markov se utiliza comúnmente el método llamado de la primera entrada, el cual se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} P[X_n = k | X_0 = j] &= \sum_{m=1}^n P[X_n = k, X_m = k, X_q \neq k \text{ para } q = 1, \dots, m-1 | X_0 = j] \\ &= \sum_{m=1}^n P[X_n = k | X_m = k] P[X_m = k, X_q \neq k \text{ para } q = 1, \dots, m-1 | X_0 = j] \end{aligned} \quad \text{A2. 42}$$

El principio general de la ecuación anterior se puede describir como sigue:

Para un evento A como por ejemplo $A = [X_n = k]$ se puede escribir

$$P[AV_k | X_0 = j] = \sum_{m=1}^{\infty} P[AV_k(m) | X_0 = j] \quad \text{A2. 43}$$

Ahora supongamos que A es un subconjunto de V_k y que por cada entero m existe un evento A_m que depende únicamente de la variable aleatoria $\{X_t, t > m\}$ de tal manera que

$$AV_k(m) = A_m V_k(m) \quad \text{A2. 44}$$

Por la propiedad de las cadenas de Markov

$$\begin{aligned} P[A_m V_k(m) | X_0 = j] &= P[A_m | V_k(m), X_0 = j] P[V_k(m) | X_0 = j] \\ &= P[A_m | X_m = k] f_{j,k}(m) \end{aligned} \quad \text{A2. 45}$$

De las ecuaciones (A2.43) y (A2.45), se puede obtener la fórmula básica del método de la primera entrada

$$P[A | X_0 = j] = \sum_{m=1}^{\infty} f_{j,k}(m) P[A_m | X_m = k] \quad \text{A2. 46}$$

Teorema 2.7.3. Para todos los estados j y k

$$g_{k,k} = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_{k,k})^n \quad \text{A2. 47}$$

$$g_{j,k} = f_{j,k} g_{k,k} \quad \text{A2. 48}$$

Teorema 2.7.4. Ley uno-cero. Para todo estado k , $g_{k,k} = 1$ $g_{k,k} = 0$

Además

$$g_{k,k} = 1 \text{ si y solo si } f_{k,k} = 1 \quad \text{A2. 49}$$

$$g_{k,k} = 0 \text{ si y solo si } f_{k,k} < 1 \quad \text{A2. 50}$$

En palabras, el teorema anterior establece que si partiendo de k , una cadena de Markov tiene probabilidad 1 de retorno a k , entonces con probabilidad de 1 ella hará un número infinitamente grande de visitas a k . Por otro lado, se puede esperar que regrese a k sólo un número finito de veces si existe una probabilidad positiva de que no regrese.

Teorema 2.7.5. Para cualquier estado k de una cadena de Markov

$$f_{k,k} < 1 \text{ si y solo si } \sum_{n=1}^{\infty} p_{k,k}(n) < \infty \quad \text{A2. 51}$$

$$f_{k,k} = 1 \text{ si y solo si } \sum_{n=1}^{\infty} p_{k,k}(n) = \infty \quad \text{A2. 52}$$

Como apoyo a lo que sigue se definen las dos funciones generadoras, para todos los números reales $|z| < 1$

$$P_{j,k}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n P_{j,k}(n) = \delta_{j,k} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n p_{j,k}(n) \quad \text{A2. 53}$$

$$F_{j,k}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n f_{j,k}(n) \quad \text{A2. 54}$$

Teorema 2.7.6. Para cualesquiera dos estados j y k de una cadena de Markov, las funciones generadoras $P_{j,k}(z)$ y $F_{j,k}(z)$, se relacionan entre si, para toda $|z| < 1$, de la siguiente manera

$$P_{j,k}(z) = F_{j,k}(z) P_{k,k}(z) \text{ si } j \neq k \quad \text{A2. 55}$$

$$P_{k,k}(z) - 1 = F_{k,k}(z) P_{k,k}(z) \quad \text{A2. 56}$$

$$P_{k,k}(z) = \frac{1}{1 - F_{k,k}(z)}, F_{k,k}(z) = 1 - \frac{1}{P_{k,k}(z)} \quad \text{A2. 57}$$

La utilidad de las funciones generadoras se deriva de las siguientes dos propiedades que ellas poseen.

Teorema 2.7.7. Teoremas de límite para funciones generadoras. Sea $\{a_n\}$ una secuencia no negativa de números reales con función generadora

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < 1 \quad \text{A2. 58}$$

Para que exista un número finito S tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n a_m = S \quad \text{A2. 59}$$

es necesario y suficiente que exista un número finito S tal que

$$\lim_{z \rightarrow 1} A_z = S \quad \text{A2. 60}$$

Por (\lim) se entiende como el límite cuando z tiende a 1 a través de valores menores de 1 .

$$z \rightarrow 1$$

Para que exista un número finito L tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n a_m = L \quad \text{A2. 61}$$

es necesario y suficiente demostrar que existe un número finito L tal que

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1-z)A(z) = L \quad \text{A2. 62}$$

Teorema 2.7.8. Sea k un estado para el cual $f_{k,k} = 1$ y $m_{k,k} < \infty$ y donde

$$m_{k,k} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{k,k}(n) \quad \text{A2. 63}$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n p_{k,k}(m) = \frac{1}{m_{k,k}} \quad \text{A2. 64}$$

y para cualquier estado j

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n p_{j,k}(m) = f_{j,k} \frac{1}{m_{k,k}} \quad \text{A2. 65}$$

A-2.8 ESTADOS Y CLASES RECURRENTES Y NO RECURRENTES

Con el fin de estudiar el comportamiento asintótico de las cadenas de Markov es necesario poder identificar las clases comunicantes que son cerradas y las que no lo son. Con este propósito se introduce el concepto de clase recurrente.

Se dice que un estado k es recurrente si $f_{k,k} = 1$; en palabras, k es recurrente si la probabilidad de que la cadena de Markov regrese eventualmente a k es igual a 1, habiendo partido de k . Un estado k se llama no recurrente si $f_{k,k} < 1$.

Se dice que una clase C de estados es recurrente si todos los estados en C son recurrentes. Similarmente, una clase C se llama no recurrente si todos los estados en C son no recurrentes.

Teorema 2.8.1. Sea C una clase comunicante de estados en una cadena de Markov. Entonces C es necesariamente recurrente o no recurrente. Más precisamente, (i) si cualquier estado en C es recurrente, entonces todos los estados en C son recurrentes, (ii) si cualquier estado en C es no recurrente, entonces todos los estados en C son no recurrentes.

Teorema 2.8.2. Una clase comunicante recurrente es cerrada. Una clase comunicante no recurrente cerrada posee un número infinito de estados.

Teorema 2.8.3. Sea C una clase comunicante cerrada de estados, y hágase que k sea un estado fijo en C . Entonces C es recurrente si y sólo si para cada estado j en C tal que $j \neq k$

$$f_{j,k} = 1 \quad \text{A2. 66}$$

Se dice que un estado k es esencial si se comunica con cada estado que sea accesible desde él (en símbolos, $k \rightarrow j$ implica que $k \leftrightarrow j$); en caso contrario se le llama estado no esencial.

A-2.9 PROBABILIDADES DE PRIMER PASO

Con el fin de determinar la probabilidad $f_{j,k}$, de que una cadena de Markov comenzando en j visite siempre k , se deben distinguir los cuatro casos que se ilustran en la Tabla A2.

El objetivo de esta sección es mostrar que en el caso de que j sea no recurrente y k sea recurrente, la probabilidad de primer paso $f_{j,k}$ puede ser determinada como la solución de un sistema de ecuaciones lineales que involucren todas las probabilidades de primer paso.

Dada una cadena de Markov, hagamos que S represente al conjunto de todos los estados y t al conjunto de todos los estados no recurrentes. El uso de la letra T para representar al conjunto de todos los estados no recurrentes proviene de la terminología empleada en probabilidad, la cual llama "transitorios" a los estados no recurrentes.

Tabla A2. Métodos para determinar las probabilidades de primer paso

| | | k | |
|-----|---------------|--|---|
| | | Recurrente | No recurrente |
| j | Recurrente | $f_{j,k} = 1$ si y solo si $j \leftrightarrow k$ $f_{j,k} = 0$ de otra manera | $f_{j,k} = 0$ |
| | No recurrente | Satisface el sistema de ecuaciones del teorema 2.9.1 | $f_{j,k} = \frac{\sum_{n=1}^{\alpha} p_{j,k}(n)}{\sum_{n=0}^{\alpha} p_{k,k}(n)}$ |

Teorema 2.9.1. Si k es un estado recurrente, entonces el conjunto de probabilidades de primer paso $\{f_{j,k}, j \in T\}$ satisfacen el sistema de ecuaciones

$$f_{j,k} = \sum_{i \in T} p_{j,i} f_{i,k} + \sum_{i \in C} p_{j,i}, j \in T \tag{A2. 67}$$

donde C denota el conjunto de todos los estados que se comunican con k .

Además, si k_1 y k_2 son estados comunicantes recurrentes, entonces para cualquier estado j

$$f_{j,k_1} = f_{j,k_2} \tag{A2. 68}$$

Consecuentemente, se puede definir la probabilidad $f_{j,C}$ de que una cadena de Markov iniciando en el estado j eventualmente será absorbido en una clase recurrente C , como sigue

$$f_{j,C} = \sum_{i \in T} p_{j,i} f_{i,C} + \sum_{i \in C} p_{j,i}, j \in T \tag{A2. 69}$$

Ahora definamos, para toda j en T

$$y_j = P[X_n \text{ pertenezca a } T \text{ para toda } n \mid X_0 = j] \tag{A2. 70}$$

En palabras, la ecuación anterior expresa la probabilidad de que la cadena de Markov permanezca siempre en el conjunto T de estados no recurrentes, dado que inició en el estado no recurrente j .

Dado que A denota el evento que, para toda n , X_n pertenece a T , entonces

$$y_j = P[A | X_0 = j] = \sum_{i \in S} p_{j,i} P[A | X_1 = i] \quad \text{A2. 71}$$

A-2.10 PROBABILIDADES DE ABSORCIÓN

Un estado k se llama absorbente si $p_{k,k} = 1$, de tal manera que una vez que la cadena visita k permanece allí por siempre. Un estado absorbente es claramente recurrente. En el caso de que k sea un estado absorbente, la probabilidad de primer paso $f_{j,k}$ se llama probabilidad de absorción dentro de k , habiendo partido de j .

Si S es el espacio de estados de una cadena de Markov, y k es un estado absorbente, entonces el conjunto de probabilidades de absorción $\{f_{j,k}, j \in S\}$ satisface el sistema de ecuaciones

$$f_{j,k} = \sum_{i \in S} p_{j,i} f_{i,k}, j \in S, \quad \text{A2. 72}$$

sujeto a las condiciones

$$f_{k,k} = 1,$$

$$f_{j,k} = 0 \text{ si } j \text{ es recurrente y } j \neq k$$

A-2.11 CADENAS DE MARKOV IRREDUCIBLES

Se dice que una cadena de Markov es irreducible si todos los pares de estados de la cadena se comunican, de tal manera que la cadena consiste exactamente de una clase comunicante. Una clase comunicante cerrada se puede estudiar como una cadena de Markov irreducible. Se dice que una cadena irreducible es recurrente (o no recurrente si todo estado del sistema es recurrente (o no recurrente)).

Considérese una cadena de Markov con espacio de estados S , y hágase que T denote el conjunto de estados no recurrentes de la cadena. Es interesante determinar la ley de probabilidades de la variable aleatoria N' , llamada "tiempo antes de la absorción", el cual representa la longitud de tiempo que la cadena pasa en los estados no recurrentes antes de ser absorbida. En símbolos

$$N' = \sum_{j \in T} N_j(\infty) \quad \text{A2. 73}$$

El tiempo antes de la absorción, denotado por N , está dado por

$$N = N' + 1 \quad \text{A2. 74}$$

Defínase

$$m_j = E[N | X_0 = j] = 1 + E[N' | X_0 = j] \quad \text{A2. 75}$$

como el tiempo medio de absorción, dado que la cadena comenzó en j .

De una manera más general y para r mayor o igual que cero

$$m_j^{(r)} = E[N^r \mid X_0 = j] \quad \text{A2. 76}$$

es el momento r -ésimo del tiempo de absorción.

Se puede, también, definir m_j en términos de las probabilidades de transición, como sigue

$$m_j = 1 + \sum_{i \in T} \sum_{n=1}^{\alpha} p_{j,i}(n) = \sum_{i \in T} n_{j,i} \quad \text{A2. 77}$$

definiendo para todo estado j e i en T

$$n_{j,i} = \sum_{n=0}^{\alpha} p_{j,i}(n) \quad \text{A2. 78}$$

En una cadena de Markov finita, el tiempo medio de absorción es finito; en una cadena de Markov con un número infinito de estados no recurrentes puede ser infinito o, bajo ciertas condiciones, finito.

Si se considera una cadena de Markov finita con espacio de estados S , y T es el conjunto de estados no recurrentes, la formulación matricial de las ecuaciones para el tiempo medio de absorción se puede hacer como sigue

Si $Q = \{p_{j,k} : j, k \in T\}$ es la matriz de probabilidades de transición de estados en T a estados en T , y " m " es un vector columna cuyas componentes son los m_j con $j \in T$.

Entonces se puede escribir

$$Im = 1 + Qm \quad \text{A2. 79}$$

donde 1 es un vector columna cuyas componentes son 1 , e I es la matriz identidad. De la ecuación anterior

$$(I - Q)m = 1 \quad \text{A2. 80}$$

Defínase

$$N = (I - Q)^{-1} \quad \text{A2. 81}$$

Entonces

$$m = N1 \quad \text{A2. 82}$$

A-2.12 EJEMPLO

Considérese un camino aleatorio entre los enteros $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ con matriz de probabilidades de transición P .

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $T = \{1, 2, 3\}$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{bmatrix} \quad I - Q = \begin{bmatrix} 1 & -p & 0 \\ -q & 0 & -p \\ 0 & -q & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = (I - Q)^{-1} = \frac{1}{p^2 + q^2} \begin{bmatrix} p + q^2 & p & p^2 \\ q & 1 & p \\ q^2 & q & q + p^2 \end{bmatrix}$$

Como ejemplo, en el caso particular de que $p = 2/3$, entonces:

$$N = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

Y finalmente:

$$m = \begin{bmatrix} \frac{17}{5} \\ \frac{18}{5} \\ \frac{11}{5} \end{bmatrix}$$

A-2.13 TIEMPOS DE PRIMER PASO Y DE RECURRENCIA

Considérese una cadena de Markov recurrente, irreducible y con espacio de estados C . Para cada par de estados j y k en C , la secuencia de probabilidades de primer paso $\{f_{j,k}(n), n = 1, 2, \dots\}$ es una distribución de probabilidades. La media

$$m_{j,k} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{j,k}(n) \quad \text{A2. 83}$$

se llama " tiempo medio de primer paso " de j a k en el caso de que j sea diferente de k y " tiempo medio de recurrencia " del estado k si $j=k$.

Dado un estado fijo k , los tiempos medios de primer paso $\{m_{j,k}, j \neq k\}$ se pueden considerar como tiempos medios de absorción de una cadena de Markov nueva, la cual se obtiene de la original haciendo k un estado absorbente.

Teorema 2.13.1. Sea C una cadena de Markov irreducible y recurrente y sea k un estado fijo en C . El conjunto de tiempos medios de primer paso, satisface el sistema de ecuaciones lineales con solución única, que sigue

$$m_{j,k} = 1 + \sum_{i \neq k} p_{ji} m_{i,k}, j \neq k \quad \text{A2. 84}$$

Por lo tanto el tiempo medio de recurrencia será

$$m_{k,k} = 1 + \sum_{i \neq k} p_{ki} m_{i,k}, k \in C \quad \text{A2. 85}$$

A-2.14 ESTADOS POSITIVOS Y NULOS RECURRENTES

Mientras un estado recurrente k tiene la propiedad de que la cadena de Markov seguramente regresará en algún tiempo a k , el tiempo medio de recurrencia de k pudiera ser infinito. Esto es cierto, por ejemplo, para cualquier estado en un camino aleatorio simétrico en $\{0, 1, 2, \dots\}$ en el cual todos los estados se comunican.

Se dice que un estado recurrente k es positivo si su tiempo medio de recurrencia es finito y se le llama nulo si su tiempo medio de recurrencia es infinito.

Se dice que una cadena de Markov irreducible es positiva recurrente si todos sus estados son positivos recurrentes; y algunos autores le llaman cadenas de Markov ergódicas.

A-2.15 DISTRIBUCIONES DE TIEMPO LARGO Y ESTACIONARIAS

A partir de ahora estudiaremos el comportamiento asintótico de las probabilidades de transición de una cadena de Markov.

Si k es no recurrente, entonces para cualquier estado j

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{j,k}(n) = 0 \quad \text{A2. 86}$$

dado que de hecho

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{j,k}(n) < \infty \quad \text{A2. 87}$$

Si k es recurrente, la situación es más complicada. En general las probabilidades de transición $\{p_{j,k}(n), n = 1, 2, \dots\}$ sólo poseen un límite dado por la siguiente expresión

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n p_{j,k}(m) = f_{j,k} \frac{1}{m_{k,k}} \quad \text{A2. 88}$$

Recordemos que $f_{j,k}$ es la probabilidad de primer paso de j a k , mientras que $m_{k,k}$ es el tiempo medio de recurrencia de k . Si $m_{k,k}$ es infinito, entonces $\frac{1}{m_{k,k}}$ es igual a cero.

Se dice que una cadena de Markov con espacio de estados C posee una distribución de tiempo largo, si existe una distribución de probabilidad $\{\pi_k, k \in C\}$ la cual tiene la propiedad de que para toda j y k en C

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{j,k}(n) = \pi_k \quad \text{A2. 89}$$

El nombre de "distribución de tiempo largo" se deriva del hecho de que sin importar cual es la distribución de probabilidad $\{p_k(0), k \in C\}$ la probabilidad incondicional $p_k(n)$ tiende a π_k cuando $n \rightarrow \infty$.

Se dice que una cadena de Markov con espacio de estados C posee una distribución estacionaria si existe una distribución de probabilidad $\{\pi_k, k \in C\}$ la cual tiene la propiedad de que para toda k en C

$$\pi_k = \sum_{j \in C} \pi_j p_{j,k} \quad \text{A2. 90}$$

El nombre de "distribución estacionaria" se deriva del hecho de que para que la ecuación anterior sea válida, se requiere de que para todo entero n

$$\pi_k = \sum_{j \in C} \pi_j p_{j,k}(n) \quad \text{A2. 91}$$

Teorema 2.15.1. Para toda cadena de Markov irreducible con espacio de estados C existe una secuencia $\{\pi_k, k \in C\}$ tal que para toda j y k en C

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n p_{j,k}(m) = \pi_k \quad \text{A2. 92}$$

En palabras, la ecuación anterior dice que la secuencia converge a un límite π_k el cual es independiente de j .

La secuencia $\{\pi_k, k \in C\}$ es no negativa, esto es

$$\pi_k \geq 0 \text{ para toda } k \in C \quad \text{A2. 93}$$

Si C es una cadena de Markov finita, entonces $\{\pi_k, k \in C\}$ es una distribución de probabilidad; esto es

$$\sum_{k \in C} \pi_k = 1 \quad \text{A2. 94}$$

Teorema 2.15.2. Sea C el espacio de estados de una cadena de Markov irreducible y

hagamos que $\{\pi_k, k \in C\}$ satisfaga la ecuación (A2.92). Entonces

$$\sum_{k \in C} \pi_k \leq I \quad \text{A2. 95}$$

Además, la secuencia satisface el sistema de ecuaciones lineales

$$\pi_k = \sum_{j \in C} \pi_j p_{j,k}, k \in C \quad \text{A2. 96}$$

Si existe la secuencia

$$\{u_k, k \in C\} \text{ tal que } \sum_k |u_k| < \infty \quad \text{A2. 97}$$

La cual satisface el sistema de ecuaciones lineales

$$u_k = \sum_{j \in C} u_j p_{j,k}, k \in C \quad \text{A2. 98}$$

Entonces

$$u_k = \pi_k \left(\sum_{j \in C} u_j \right) \quad \text{A2. 99}$$

Teorema 2.15.3. Sea C el espacio de estados de una cadena de Markov irreducible. Si C es finita, entonces la cadena de Markov posee una distribución estacionaria única. Si C posee un número finito de estados, entonces para que la cadena de Markov posea una distribución estacionaria única, es necesario y suficiente que la secuencia $\{\pi_k, k \in C\}$ que satisfaga la ecuación (A2.92) tenga la propiedad $\pi_k > 0$ para alguna k en C .

Teorema 2.15.4. Sea C el espacio de estados de una cadena de Markov irreducible. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- i) La cadena de Markov posee una distribución estacionaria.
- ii) C es positivo recurrente (esto es, cada estado en C es recurrente y posee un tiempo medio de recurrencia finito).
- iii) Existe una secuencia absolutamente convergente $\{\pi_k, k \in C\}$ no idénticamente nula la cual satisface la ecuación (A2.98).

A-2.16 MATRICES DE PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN DOBLEMENTE ESTOCÁSTICAS

Para ciertas cadenas de Markov irreducibles, es posible determinar por inspección la solución $\{\pi_k, k \in C\}$ de la ecuación (A2.96). Una

matriz de probabilidades de transición $P = \{p_{j,k}\}$ se llama doblemente estocástica si la suma sobre cualquier columna es igual a uno,

esto es

$$\sum_j p_{j,k} = I \quad \text{A2. 100}$$

para toda k

Para una cadena de Markov irreducible con matriz de probabilidades de transición doblemente estocástica cuyo espacio de estados es finito y contiene K estados, la solución (A2.96) está dada por

$$\pi_k = \frac{1}{K}, \quad k \in C \quad \text{A2. 101}$$

Consecuentemente, los tiempos medios de recurrencia están dados por

$$m_{k,k} = K \quad k \in C \quad \text{A2. 102}$$

Para ilustrar lo anterior, considérese la cadena de Markov con matriz de probabilidades de transición

$$Q = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$K = 3 \quad \pi_k = \frac{1}{3} \quad m_{k,k} = 3 \text{ para todo } k$$

A-2.17 ESTADOS PERIÓDICOS Y APERIÓDICOS

Con el fin de establecer las condiciones bajo las cuales una cadena de Markov irreducible posee una distribución de tiempo largo, necesitamos introducir la noción de "periodo" de un estado.

El periodo $d(k)$ de un estado de retorno k de una cadena de Markov, se define como el común divisor mas grande del conjunto de enteros n para los cuales $p_{k,k}(n) > 0$; en símbolos

$$d(k) = \text{g.c.d. } \{n : p_{k,k}(n) > 0\} \quad \text{A2. 103}$$

Se dice que un estado es "aperiódico", si tiene un periodo 1.

El periodo $d(k)$ de un estado es el entero más grande tal que cualquier entero " n " que tiene la propiedad de poder retornar a k en exactamente n etapas es necesariamente un múltiplo de $d(k)$

Teorema 2.17.1. Para una cadena de Markov irreducible aperiódica es válida la siguiente ecuación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{k,k}(n) = \frac{1}{m_{k,k}} \quad \text{A2. 104}$$

para toda k en C . Consecuentemente, existe una secuencia $\{\pi_k, k \in C\}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{j,k}(n) = \pi_k \quad \text{A2. 105}$$

la cual es válida para toda j y k en C .

Es fácil dar un ejemplo para el cual la ecuación (2.104) no es válida para una cadena de Markov periódica. Considérese una cadena de Markov homogénea con espacio de estados $\{0, 1\}$ y matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se puede verificar fácilmente que la cadena es irreducible y que cada estado tiene periodo 2.

Como $P^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ si n es impar y $P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ si n es par.

Se tiene que $p_{0,0}(n) = 1$ si n es par
 $p_{0,0}(n) = 0$ si n es impar

Y la ecuación (2.103) no es válida para $k=0$. Además, se puede observar que la matriz P es doblemente estocástica con $K=2$ por ello $\pi_0 = \pi_1 = \frac{1}{2}$.

Teorema 2.17.2. Una cadena de Markov irreducible, aperiódica, positiva y recurrente posee una distribución de tiempo largo única.

La condición necesaria y suficiente para que se cumpla lo anterior es que exista una secuencia convergente $\{u_k, k \in C\}$ no idénticamente nula que satisfaga (2.98).

Existen varias maneras de probar que una cadena de Markov irreducible es aperiódica. Una manera es encontrar un estado k para el cual $p_{k,k} > 0$; tal estado es claramente aperiódico. Otra manera, factible para cadenas de Markov finitas, es encontrar un entero n tal que $p_{j,k}(n) > 0$ para toda j y k en C . Si tal n existe, puede encontrarse rápidamente por medio del cálculo sucesivo de las matrices de las probabilidades de transición $P^2, P^4, P^8, \dots, P^{2^n}, \dots$

A-2.18 TEOREMA DE LÍMITE PARA LAS PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN DE UNA CADENA DE MARKOV FINITA

Teorema 2.18.1. Sea C una cadena de Markov irreducible, aperiódica y recurrente con espacio de estados finito C , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{j,k}(n) = \frac{1}{m_{k,k}} \text{ para toda } j \text{ y } k \text{ en } C \quad \text{A2. 106}$$

A-3 CADENAS DE MARKOV DE PARÁMETRO CONTINUO

En esta sección se analizarán los principios básicos de las cadenas de Markov de parámetro continuo, tomando como base los procesos de nacimiento-muerte; ya que son los más sencillos y permiten, por ello, un mayor entendimiento de los conceptos fundamentales.

A-3.1 TEOREMAS DE LÍMITE PARA LAS PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN DE UNA CADENA DE MARKOV DE PARÁMETRO CONTINUO

Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ una cadena de Markov con espacio de estados S y función de probabilidades de transición homogénea

$$p_{j,k}(t) = P [N(t+s) = k \mid N(s) = j] \quad \text{A3. 1}$$

la cual es continua en $t=0$

A3. 2

$$\lim_{t \rightarrow 0} p_{j,k}(t) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

La función de probabilidad de transición satisface la ecuación de Chapman-Kolmogorov; o sea que para cualquier estado j y k , y números positivos s y t

$$p_{j,k}(s+t) = \sum_{\text{estados } h} p_{j,h}(s) p_{h,k}(t) \quad \text{A3. 3}$$

Un par de estados j y k se comunican si existen tiempos t_1 y t_2 tal que $p_{j,k}(t_1) > 0$ y $p_{k,j}(t_2) > 0$.

Una cadena de Markov es irreducible si todos los pares de estados de la cadena se comunican.

Se puede demostrar que para cada par de estados j y k , $p_{j,k}(t)$ es uniformemente continua como una función de $t > 0$, y además es siempre cero o siempre positiva. Consecuentemente, en una cadena de Markov irreducible $p_{j,k}(t) > 0$ para todo $t > 0$ y todos los estados j y k .

En una cadena de Markov irreducible con función de probabilidades de transición homogénea, el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{j,k}(t) = \pi_k, \quad k \in S \quad \text{A3. 4}$$

siempre existe y es independiente del estado inicial de la cadena.

Como en el caso de las cadenas de Markov irreducibles de parámetro discreto, los límites $\{\pi_k, k \in S\}$ desaparecen idénticamente

$$\pi_k = 0 \quad \text{para toda } k \text{ en } S \quad \text{A3. 5}$$

o son todas positivas y forman una distribución de probabilidad

$$\pi_k > 0 \quad \text{para toda } k \text{ en } S, \sum_{k \in S} \pi_k = 1 \quad \text{A3. 6}$$

Si la ecuación anterior es cierta, se dice que la cadena irreducible es positiva recurrente.

Para una cadena de Markov de parámetro discreto con probabilidades de transición de una etapa, para determinar si una cadena de Markov irreducible posee una distribución de tiempo

largo (o estacionaria) es suficiente determinar si el sistema de ecuaciones

$$\pi_k = \sum_{j \in S} \pi_j p_{j,k}, j \in S \quad \text{A3. 7}$$

posee una solución absolutamente convergente no nula. Y entonces, si tal solución existe, y normalizada como una suma igual a uno, es la distribución de tiempo largo.

Para una cadena de Markov de parámetro continuo, el papel de las probabilidades de transición de una etapa lo representan las "intensidades de transición", las cuales se definen en términos de las derivadas en cero de las funciones de probabilidad de transición. Supóngase que para todo estado k

$$q_k = -\frac{d}{dt} p_{k,k}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{k,k}(t)}{t} \quad \text{A3. 8}$$

existe y es finita, mientras que para todo par de estados j y k , donde j es diferente de k

$$q_{j,k} = -\frac{d}{dt} p_{j,k}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{j,k}(t)}{t} \quad \text{A3. 9}$$

también existe y es finita.

Los límites anteriores tienen la siguiente interpretación probabilística: Las probabilidades de transición dentro de un intervalo de tiempo de longitud h son asintóticamente proporcionales a h ; La probabilidad $1 - p_{j,j}(h)$ de una transición de un estado j a algún otro estado durante un intervalo de tiempo de longitud h , tiende a cero cuando h también tiende a cero; mientras que la probabilidad $p_{j,k}(h)$ de transición de j a k durante un intervalo de tiempo de longitud h es igual a $h q_{j,k}$ más un remanente, el cual, dividido entre h , tiende a cero cuando $h \rightarrow 0$.

En lo sucesivo a q_j la llamaremos intensidad de paso, dado que la cadena de Markov está en el estado j . A $q_{j,k}$ la llamaremos intensidad de transición a k , dado que la cadena de Markov está en el estado j .

Ahora hagamos que S tienda a infinito en la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Entonces se sigue que la secuencia $\{\pi_k, k \in S\}$ satisface para todo t mayor o igual que cero

$$\pi_k = \sum_{\text{estados } h} \pi_h p_{h,k}(t), k \in S \quad \text{A3. 10}$$

Si se obtiene la diferencial de la ecuación anterior con respecto a t y se intercambian las operaciones de sumatoria y diferenciación, se puede ver que $\{\pi_k, k \in S\}$ satisface el sistema de ecuaciones lineales

$$\pi_k q_k = \sum_{h \neq k} \pi_h q_{h,k}, k \in S \quad \text{A3. 11}$$

A-3.2 PROCESOS DE NACIMIENTO-MUERTE

Una cadena de Markov de parámetro continuo $\{N(t), t \geq 0\}$ con espacio de estados $\{0, 1, 2, \dots\}$ y probabilidades de transición homogéneas se llama "proceso de nacimiento-muerte", si sus intensidades de transición satisfacen la siguiente condición: Si j y k son estados tales que

$$|j - k| \geq 2, \text{ entonces } q_{j,k} = 0 \quad \text{A3. 12}$$

En palabras, un proceso de nacimiento-muerte es una cadena de Markov de parámetro continuo la cual tiene transiciones únicamente entre un estado dado y sus vecinos inmediatos. Para un proceso de este tipo, es conveniente introducir las cantidades λ_j y μ_j como sigue

$$\lambda_j = q_{j,j+1} \text{ para } j \geq 0 \quad \text{A3. 13}$$

$$\mu_j = q_{j,j-1} \text{ para } j \geq 1$$

$$\lambda_j + \mu_j = q_j \text{ para } j \geq 0$$

$$\text{y además } \mu_0 = 0$$

Más explícitamente

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{n,n+1}(h)}{h} = \lambda_n \quad \text{A3. 14}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{n,n-1}(h)}{h} = \mu_n$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - p_{n,n}(h)}{h} = \lambda_n + \mu_n$$

En palabras, las ecuaciones anteriores establecen que en un intervalo de tiempo muy pequeño el tamaño de una población [representado por $N(t)$] puede incrementarse en uno, disminuir en uno, o permanecer la misma. La probabilidad condicional de un incremento de 1 ("nacimiento") puede depender del tamaño de la población n , y es denotado por λ_n . La probabilidad condicional de un decremento en 1 ("muerte") puede también depender del tamaño de la población n , y es denotado por μ_n .

Para un proceso de nacimiento-muerte, el sistema de ecuaciones (A3.11) se convierte en

$$\lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1, \quad \text{A3. 15}$$

$$(\lambda_n + \mu_n) \pi_n = \lambda_{n-1} \pi_{n-1} + \mu_{n+1} \pi_{n+1}, \quad n \geq 1 \quad \text{A3. 16}$$

De las ecuaciones anteriores se puede obtener una relación recursiva la cual puede utilizarse para obtener la secuencia $\{\pi_n\}$

$$\mu_n \pi_n = \lambda_{n-1} \pi_{n-1} \text{ for } n \geq 1. \quad \text{A3. 17}$$

Se puede dar una explicación heurística de la ecuación anterior. Para un valor positivo pequeño de h , y para valores grandes de t

$$\begin{aligned} \pi_{n-1} \lambda_{n-1} &= P[n(t+h) = n \mid N(t) = n-1] P[N(t) = n-1] \\ &= P[N(t+h) = n \text{ y } N(t) = n-1], \end{aligned} \quad \text{A3. 18}$$

$$\begin{aligned} \pi_n \mu_n h &= P[N(t+h) = n-1 \mid n(t) = n] P[N(t) = n] \\ &= P[N(t+h) = n-1 \text{ y } N(t) = n] \end{aligned} \quad \text{A3. 19}$$

A-3.3 ECUACIONES DIFERENCIALES DE KOLMOGOROV PARA LAS FUNCIONES DE

PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN.

Para obtener las funciones de probabilidades de transición de una cadena de Markov de parámetro continuo usualmente se debe resolver el sistema de ecuaciones diferenciales que las define. A continuación se obtendrán estas ecuaciones diferenciales para el caso de cadenas de Markov no-homogéneas $\{N(t), t \geq 0\}$ con funciones de probabilidades de transición

$$p_{j,k}(s,t) = P [N(t) = k \mid N(s) = j] \quad \text{A3. 20}$$

definida para cualesquiera estados j y k y tiempos $t > s \geq 0$.

Hagamos las siguientes suposiciones: para cada estado j existe una función continua no negativa $q_j(t)$ definida por el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{1 - p_{j,j}(t, t+h)\} = q_j(t) \quad \text{A3. 21}$$

y por cada par de estados j y k (con j diferente de k) existe una función continua no negativa $q_{j,k}(t)$ definida por el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} p_{j,k}(t, t+h) = q_{j,k}(t) \quad \text{A3. 22}$$

Estas funciones tienen la siguiente interpretación probabilística. Las probabilidades de transición dentro de un intervalo de tiempo de longitud h son asintóticamente proporcionales a h ; la probabilidad $1 - p_{j,j}(t, t+h)$ de transición de un estado j a algún otro estado durante el intervalo de tiempo $(t, t+h)$ es igual a $h q_j(t)$ más un residuo, el cual dividido entre h , tiende a cero (cuando h tiende a cero) mientras la probabilidad $p_{j,k}(t, t+h)$ de transición de j a k durante el intervalo de tiempo $(t, t+h)$ es igual a $h q_{j,k}(t)$ más un residuo, el cual dividido entre h , tiende a cero (cuando h tiende a cero).

Llamaremos a $q_j(t)$ la intensidad de paso, dado que la cadena de Markov está en el estado j en el tiempo t . Y llamaremos a $q_{j,k}(t)$ la intensidad de transición a k , dado que la cadena de Markov está en el estado j en el tiempo t .

Las funciones de intensidad $q_j(t)$ y $q_{j,k}(t)$ se denominan homogéneas si no dependen de t :

$$q_j(t) = q_j, \quad \text{A3. 23}$$

$$q_{j,k}(t) = q_{j,k}$$

Las funciones de intensidad de una cadena de Markov homogénea son claramente homogéneas.

A-4 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

¹ "Dynamic Programming and Markov Processes". R. A. Howard, The M.I.T. Press, 1960.

² "Reliability Evaluation of Power Systems", R. Billington, R.N. Allan, Plenum Press, 1984, Third Printing- January 1990.

APÉNDICE B

```
%*****
%ENTRADA DE DATOS Y PROGRAMA PARA EL CÁLCULO
%DE LOS ESLABONES DE UN SISTEMA POR
%EL MÉTODO DE LA MATRIZ LATINA O CONCATENACIÓN
%*****
M= sym(' [0, AB, AC, 0, AE; 0, 0, BC, 0, BE; 0, 0, 0, CD, 0; 0, 0, DC, 0, DE; EA, 0, 0, ED, 0] ')
MR=sym(' [0, B, C, 0, E; 0, 0, C, 0, E; 0, 0, 0, D, 0; 0, 0, C, 0, E; A, 0, 0, D, 0] ')

ML1=M*MR;
for I=1:5
    ML1(I, I)=0;
end
ML1

ML2=ML1*MR;
for I=1:5
    ML2(I, I)=0;
end
ML2
```

```
MATLAB Editor/Debugger - [MLAT.m - C:\MATLAB\bin\MLAT.m]
File Edit View Debug Tools Window Help
Stack:

%*****
%ENTRADA DE DATOS Y PROGRAMA PARA EL CÁLCULO
%DE LOS ES LABONES DE UN SISTEMA POR
%EL MÉTODO DE LA MATRIZ LATINA O CONCATENACIÓN
%*****
M= sym(' [0,AB,AC,0,AE;0,0,BC,0,BE;0,0,0,CD,0;0,0,DC,0,DE;EA,0,0,ED,0] ')
MR=sym(' [0,B,C,0,E;0,0,C,0,E;0,0,0,D,0;0,0,C,0,E;A,0,0,D,0] ')

ML1=M*MR;
for I=1:5
    ML1(I,I)=0;
end
ML1

ML2=ML1*MR;
for I=1:5
    ML2(I,I)=0;
end
ML2

MLAT.m - C:\...
Ready Line 13 3:24 PM
Inicio MATLAB Command Wi... MATLAB Editor/Debu... Documento1 - Micros... 03:24 p.m.
```

```

MATLAB Command Window
File Edit Window Help
[Icons] ?

To get started, type one of these: helpwin, helpdesk, or demo.
For product information, type tour or visit www.mathworks.com.

>> MLAT

M =
[ 0, AB, AC, 0, AE]
[ 0, 0, BC, 0, BE]
[ 0, 0, 0, CD, 0]
[ 0, 0, DC, 0, DE]
[ EA, 0, 0, ED, 0]

MR =
[ 0, B, C, 0, E]
[ 0, 0, C, 0, E]
[ 0, 0, 0, D, 0]
[ 0, 0, C, 0, E]
[ A, 0, 0, D, 0]

ML1 =
[ 0, 0, AB*C, AC*D+AE*D, AB*E]
[ BE*A, 0, 0, BC*D+BE*D, 0]
[ 0, 0, 0, 0, CD*E]
[ DE*A, 0, 0, 0, 0]
[ 0, EA*B, EA*C+ED*C, 0, 0]

ML2 =
[ 0, 0, 0, (AC*D+AE*D)*C, AB*C*D+AB*E*D, (AC*D+AE*D)*E]
[ 0, 0, BE*A*C+(BC*D+BE*D)*C, 0, BE*A*E+(BC*D+BE*D)*E]
[ CD*E*A, 0, 0, 0, CD*E*D, 0]
[ 0, 0, DE*A*B, DE*A*C, 0, DE*A*E]
[ 0, 0, 0, EA*B*C, (EA*C+ED*C)*D, 0]

>>

```

APÉNDICE C

LISTADO DEL PROGRAMA E INGRESO DE DATOS PARA EL PROGRAMA INCORAD.m

```
npc=input(' Número de puntos de carga = ');
% Introducir para cada uno de los los puntos de carga
% y en el siguiente orden, la tasa promedio de fallas por año,
% el tiempo promedio de falla, el número de consumidores
% y la carga demandada promedio por punto de carga

mdat=[1.0,1.5,1000,5000;
      1.4,1.39,800,4000;
      1.2,1.88,700,3000 ;
      1.0,1.5,500,2000]
ncons=0;
tnci=0;
scid=0;
tens=0;
for I=1:npc;
    tnci= tnci+mdat(I,1)*mdat(I,3);
    scid=scid+mdat(I,1)*mdat(I,2)*mdat(I,3);
    ncons=ncons+mdat(I,3);
    tens=tens+mdat(I,1)*mdat(I,2)*mdat(I,4);

end
SAIFI=tnci/ncons, 'Interrupciones/consumidor.año'
SAIDI=scid/ncons, 'Horas/consumidor'
CAIDI=scid/tnci, 'Horas/consumidor.interrupción'
ASAI=(ncons*8760-scid)/(ncons*8760)
ASUI=1-ASAI
ENS=tens, ' kWh/año'
AENS=tens/ncons, ' kWh/consumidor.año'
```

BIBLIOGRAFÍA GENERAL

1. "A Computerized Approach to Substation and Switching Station Reliability Evaluation". M.S. Grover, R. Billington, IEE Transactions, PAS-93, 1974, pp. 1488-1497.
2. "A Dual Interval Programming Approach to Power System Reliability Evaluation". G.J. Anders, E.A. Gunn, IEEE Transactions, PAS-100, 1981, pp. 1665-1673.
3. "A Probability Method for Determining the Reliability of Electric Power Systems". C.F. DeSieno, L.L. Stine, IEEE Transactions, PAS-83, 1964, pp. 174-181.
4. "A Probability Method for Transmission and Distribution Outage Calculations". Z.G. Todd, IEEE Transactions, PAS-83, 1964, pp. 695-701.
5. "A Recursive Approach to the Cumulant Method of Calculating Reliability and Production Cost". H. Durán, IEEE Transactions, PAS-104, 1985, pp. 82-90.
6. "An Introduction to Stochastic Processes with Special Reference to Methods and Applications". M.S. Bartlett, Cambridge at the University Press, 1960.
7. "Analysis of Feeder Service Reliability Using Component Failure Rates". S. Goldberg, W.F. Horton, IEEE Transactions on Power Delivery, PWRD-2, 1987, pp. 1292-1296.
8. "Assessing the Reliability of Distribution Systems". R.E. Brown, A.P. Hanson, H.L. Willis, F.A. Luedtke, M.F. Born, IEEE Computer Application in Power, January 2001, pp 44-49.
9. "Bibliography on the Application of Probability Methods in Power System Reliability Evaluation: 1977-1982. IEEE Subcommittee on the Application of Probability Methods, Power System Engineering Committee, IEEE Transactions, PAS-103, 1984, pp. 275-282.
10. "Bibliography on the Application of Probability Methods in Power System Reliability Evaluation: 1982-1987. IEEE Subcommittee on the Application of Probability Methods, Power System Engineering Committee, Paper 88 WM 172-9, IEEE/PES 1988 Winter Meeting, 1988, pp. 1-9.
11. "Bulk Power System Reliability Assessment - Why and How? Part I: Why?. J. Endrenyi, P.F. Albretch, R. Billington, G.E. Marks, N.D. Reppen, L. Salvaderi, IEEE Transactions, PAS-101, 1982, pp. 3439-3445.
12. "Bulk Power Systems Reliability Assessment - Why and How? Part II: How?. J. Endrenyi, P.F. Albretch, R. Billington, G.E. Marks, N.D. Reppen, L. Salvaderi, IEEE Transactions, PAS-101, 1982, pp. 3446-3456.
13. "Bulk System Reliability - Predictive Indices". IEEE Task Force on Predictive Indices, APM Subcommittee. IEEE Transactions on Power Systems, Vol.5, 1990, pp. 1204-1213.
14. "Computing Methods and Devices for the Reliability Evaluation of Large Power Systems". K. Gallyas, J. Endrenyi, IEEE Transactions, PAS-100, 1981, pp. 1250-1258.
15. "Dynamic Programming and Markov Processes". R A. Howard, The M.I.T. Press, 1960.

16. "Effective Techniques for Reliability Worth Assessment in Composite Power System Network Using Monte Carlo Simulation". IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 11, 1996, pp. 1255-1268.
17. "Electric Energy Systems Theory: An Introduction". O.I. Elgerd, McGraw-Hill, 1973.
18. "Electric Power Distribution System Engineering". T. Gönen, McGraw-Hill, Inc., 1986.
19. "Evaluate Distribution System Design by Cost Reliability Indices". N.E. Chang, IEEE Transactions, PAS-96, 1977, pp. 1480-1490
20. "Generalized Computational Method for Reliability Analysis of Electric Power Instalations". D.P. Papadopoulos, B.C. Papadias, Proc. IEE, Vol. 125, No. 1, 1978, pp. 37-40.
21. "IEEE Recommended Practice for the Design of Reliable Industrial and Commercial Power Systems". IEEE Std 493-1990. IEEE Standards Board, 1991.
22. "IEEE Reliability Test System". Reliability Test System Task Force; Application of Probability Methods Subcommittee, IEEE Transactions, PAS-98, 1979, pp. 2047-2054.
23. "Informe del Comportamiento del Sistema Aéreo de Distribución de CLFC en 6 y 23 KV", Superintendencia de Estudios y Normalización, CLFC, Mayo de 1985.
24. "Mathematical Models for the Study of the Reliability of Systems". A. Kaufmann, D. Grouchko, R. Cruon, Academic Press, 1977.
25. "Modeling and Evaluating the Reliability of Distribution Systems". R.N. Allan, E.N. Dialynas, I.R. Homer, IEEE Transactions, PAS-98, 1979, pp. 2181-2189.
26. "On the Interpretation and Interconnection of Characteristics Employed in Estimating and Optimizing Power-System Reliability". S.O. Aleksandrov, V.A. Tufanov, Izvestya Akademii Nauk SSSR, Energetika i Transport, Vol. 25, No. 3, 1987, pp. 34-39.
27. "Performability Analysis Using Semi-Markov Reward Processes". G. Ciardo, R.A. Marie, B. Sericola, K.S. Trivedi, IEEE Transactions on Computers, Vol. 39, No. 10, 1990, pp. 1251-1264.
28. "Power Distribution System Planning with Reliability Modeling and Optimization". Y. Tang, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 11, 1996.
29. "Reliability Evaluation of Power Systems", R. Billington, R.N. Allan, Plenum Press, 1984, Third Printing- January 1990.
30. "Power System Reliability: II-Applications and a Computer Program". F.E. Montmeat, A.D. Patton, J. Zemkoski, IEEE Transactions, PAS-84, 1965, pp. 636-643.
31. "Power System Reliability: I-Measures of Reliability and Methods of Calculation". D.P. Gaver, F.E. Montmeat, A.D. Patton, IEEE Transactions, PAS-83, 1964, pp. 727-737.

32. "Probability, Random Variables and Stochastic Processes". Athanasios Papoulis. McGraw-Hill.1965.
33. "Problems Associated whit Optimization and Standardization of Power-System Reliability". M.N. Rozanov. Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Energetika i Transport, Vol. 26, No. 5, 1988, pp.3-8.
34. "Quantitative Evaluation of Permanent Outages in Distribution Systems". R. Billington, M.S. Grover, IEEE Transactions, PAS-94,1975, pp. 733-741.
35. "Reliability Analysis Using Weibull Lifetime Data and Expert Opinion". N.D. Singpurwalla, M.S. Song, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 37, No. 3, 1988, pp. 340-347.
36. "Reliability Assessment of Transmission and Distribution Schemes". R. Billington, M.S. Groover, IEEE Transactions, PAS-94,1975, pp. 724-732
37. "Reliability Evaluation of Distribution Systems Using Graphic-Based Interactive Computational Methods. R.N. Allan, B. Barazesh, S. Sumar, IEEE Transactions, PAS-101, 1982, pp. 212-218.
38. "Reliability Evaluation of Electrical Systems with Switching Actions". R.N. Allan, R. Billington, Proc. IEE, Vol. 123, No. 4, 1976, pp. 325-330.
39. "Reliability Evaluation of Engineering Systems: Concepts and Techniques". R. Billington, R.N. Allan, Pitman Books Limited, 1983.
40. "Reliability Evaluation of Power Systems", R. Billington, R.N. Allan, Plenum Press, 1984, Third Printing- January 1990.
41. "Reliability Evaluation Program for the Design of Auxiliary Electrical Systems and Distribution Substations". J.F. Jansen,H.B. Püttgen, IEEE transactions on Power Delivery, PWRD-2, 1987, pp. 1067-1072.
42. "Reliability Modeling and Evaluation of Transmission and Distribution System". R.N. Allan, M.F. De Oliveira, Proc. IEE, Vol. 124, 1977, pp. 535-541.
43. "Reliability Modeling in Electric Power Systems". J. Endrenyi.John Wiley & Sons Ltd. 1978.
44. "Reporting Bulk Power System Delivery Point Reliability".IEEE Task Force on Bulk Power System Reliability, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 11, 1966, pp. 1262-1268.
45. "Terminal Effects and Protection System Failures in Composite System Reliability Evaluation". R.N. Allan, A.N. Adraktas, IEEE Transactions, PAS-101, 1982, pp. 4557-4562.
46. "Transmission System Reliability Evaluation Using Markov Processes". R. Billington, K.E. Bollinger, IEEE Transactions,PAS-87, 1968, pp. 538-547.
47. "Uncertainty Considerations in Frequency and Duration Analysis for Radial and Two Interconnected Systems". G. Hamoud, R. Billington, IEEE Transactions, PAS-101, 1982, pp. 3658-3668.