UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

(k,l)-NUCLEOS Y NUCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMATICAS EN LA COMPOSICION Y DUPLICACION DE DIGRAFICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

LUIS ALBERTO JIMENEZ RAMIREZ

DIRECTORA DE TESIS: DRA. HORTENSIA GALEANA SANCHEZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2006

FACULTAD DE CIENCIAS

Universidad Nacional Autónoma de México

División de Estudios Profesionales

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:
"(k,l)- núcleos y núcleos por trayectorias monocromáticas en la composición y duplicación de digráficas"

realizado por Luis Alberto Jiménez Ramírez

con número de cuenta 09632197-1, quien cubrió los créditos de la licenciatura en Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Tutor (a) Propietario	Dra. Hortensia Galeana Sánchez	
Propietario	Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía	Hugo A. Rincón M.
Propietario	Mat. Laura Pastrana Ramírez	Laura Pastrana R.
Suplente	Mat. Pietra Adriana Delgado Escalante	
Suplente	M. en C. Mucuy-Kak del Carmen Guevara Aguirre	

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D.F., a 31 **de** Mayo **del** 2006
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMÁTICAS

Dra. Edith Corina Sáenz Valadez

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

Quiero dedicar este trabajo a mi madre María Inés. Quiero agradecer a mi familia José Luis, Rodrigo y Vania. También a mis amigos Raúl, Ilan, Rafael y Leo. Y de manera muy afectuosa quiero agredecer a la Dra. Hortensia Galeana por su infinita paciencia.

Indice General

Introducción

El concepto de núcleo fue introducido por John Von Neumann y Morgenstern en [**13**], en el ámbito de la teoría de juegos y su aplicación en la economía, desde entonces este concepto ha desarrollado una teoría propia, en el contexto de la teoría de digráficas, que a su vez a impulsado el crecimiento de la aplicación de las digráficas a otras áreas de la matemática, como son la lógica, el álgebra, teoría de juegos y otras.

Una de las cuestiones que ha tenido particular interés, es la de existencia, es decir, bajo que condiciones una digráfica tiene núcleo. Autores como Richardson [**11**], Duchet [**2**], Galeana S. y Neumann L. [**3, 4, 8**] han dado respuestas a esta cuestión. Por ejemplo, el teorema debido a Richardson: *Toda digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar posee núcleo*, fue uno de los primeros resultados importantes en núcleos.

También se han desarrollado generalizaciones del concepto como es el (k, l)- núcleo, introducido por Kwasnik M. en [**10**] y con el cual probó una generalización del teorema de Richardson: *Si D es una digráfica fuertemente conexa tal que para todo ciclo dirigido, γ, de D se tiene que $l(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{k}$, entonces D tiene $(k, k-1)$-núcleo.*

Autores mexicanos como Galeana S. y Rincón Mejía [**5, 7**], han desarrollado este tema con teoremas importantes de existencia como: *Sea D una digráfica que satisface las siguientes condiciones:*

(1) *Existe* $m_0 \in V(D)$ *tal que para cada* $x \in V(D)$ *existen un* xm_0*-camino dirigido contenido en* $Asym(D)$*, tal que su longitud* $\equiv i \pmod{k}$ *para alguna* $0 \leq i \leq l$ *y un* m_0x*-camino dirigido.*

(2) *Todo ciclo dirigido* γ *tal que* $l(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{k}$ *cumple alguna de las siguientes condiciones: a) Toda flecha de* γ *es una flecha simétrica de* D *b)* γ *tiene al menos* k *flechas simétricas*

Entonces D *tiene un* (k, l)*-núcleo.*

Otra generalización de núcleo, es el concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas, introducido por Galeana S. en [**6**], donde se establecen condiciones suficientes para la existencia de núcleo por trayectorias monocromáticas en torneos m-coloreados. Este concepto pertenece a la teoría de digráficas coloreadas en las flechas y a pesar de ser un concepto importante en la teoría de núcleos aún está en etapa de desarrollo y difusión. Dentro de los autores que han obtenido teoremas importantes en este tema tenemos a B. Sands, N. Sauer, R. Woodrow y H. Galeana en [**6, 12**].

El presente trabajo no pretende abarcar todo lo hecho en el tema, pero si trata de dar una panorama de las ideas labradas actualmente por algunos autores que han trabajado en los temas de núcleos, (k, l)-núcleos y núcleos por trayectorias monocromáticas.

En los primeros cuatro capítulos se dan los conceptos básicos y se prueban teoremas que dan condiciones suficientes para que una digráfica tenga (k, l)-núcleo y núcleo, pruebas dadas por matemáticos mexicanos (Dra. Hortensia Galeana, Dr. Hugo Rincón)

En el quinto capítulo se detallan teoremas que tienen que ver con la conservación de (k, l)-núcleo bajo varias operaciones de digráficas (Magdalena Kucharska [**9**]).

En el sexto y último capítulo se dan resultados nuevos, obtenidos en colaboración con la Dra. Hortensia Galeana, con respecto a núcleos por trayectorias monocromáticas y su relación con dos operaciones importantes en digráficas.

1

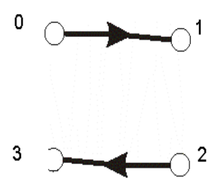
Conceptos Básicos

Definición 1. Una digráfica D es una pareja (V, F) de conjuntos ajenos, tal que $V \neq \phi$ y $F \subseteq V \times V$, llamados conjunto de vértices y flechas respectivamente, y denotados por $V(D)$ y $F(D)$.

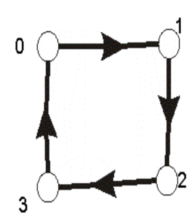
Ejemplo:

Sea $V = \{0, 1, 2, 3\}$

con $F = \{(0, 1), (2, 3)\}$



con $F = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0)\}$



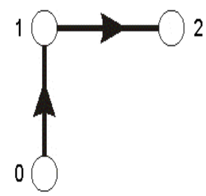
Definición 2. Sea D digráfica, una subdigráfica de D, es una digráfica D' tal que $(V(D') \subset V(D), F(D') \subset F(D))$.

Definición 3. Sea D una digráfica. La subdigráfica inducida por $B \subset V(D)$, denotada $D[B]$, es la subdigráfica maxima, por contensión en D, con $V(D[B]) = B$.

Ejemplo:

Sea $D = (V = \{0, 1, 2, 3\}, F = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0)\})$, como antes.

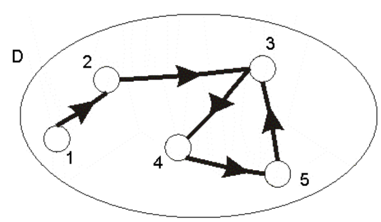
Entonces $D' = (V = \{0, 1, 2\}, F = \{(0, 1), (1, 2)\})$ es una subdigráfica de D.



Definición 4. Sea D una digráfica. Un camino dirigido $W = (x_0, \ldots, x_n)$, es una sucesión de vértices de D, tal que, $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Ejemplo:

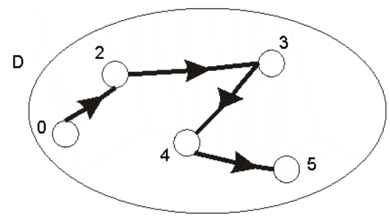
$W = (1, 2, 3, 4, 5, 3)$



Definición 5. Sea D una digráfica. Una trayectoria dirigida $T = (x_0, \ldots, x_n)$, una sucesión de vértices de D, tal que, $(x_i, x_{i+1}) \in A(D)$ y no se repiten vértices.

Ejemplo.

$T = (1, 2, 3, 4, 5)$



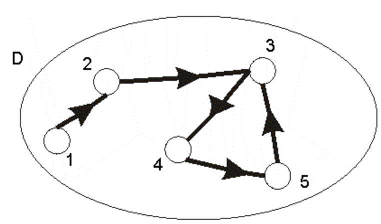
NOTACIÓN 1. Sean D una digráfica y W un camino dirigido en D. Si $x_i, x_j \in V(W)$ entonces $[x_i, W, x_j]$ denota el camino dirigido de x_i a x_j contenido en W.

Definición 6. Un ciclo de una digráfica D, es un ciclo en la gráfica subyacente de D

Definición 7. Un ciclo dirigido en una digráfica D, es una sucesión de vértices distintos $\gamma = (x_0, \ldots, x_n, x_0)$ tal que, $(x_i, x_i + 1), (x_n, x_0) \in F(D)$. La longitud de un ciclo (dirigido) C, denotada por $l(C)$, es $l(C) = n + 1$.

Ejemplo:

En



tenemos el ciclo dirigido $\gamma = (3, 4, 5, 3)$ y ciclo $(3, 5, 4, 3)$

Definición 8. Una digráfica es asimétrica si no contiene ciclos dirigidos de longitud dos. Es decir, que no existen en F elementos de la forma (a, b) y (b, a) al mismo tiempo.

$Asym(D)$ denota la subdigráfica de D que es asimétrica.

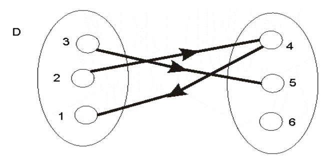
Ejemplo:

En $D = (V = \{1, 2\}, F = \{(1, 2)\})$

Definición 9. Una digráfica es bipartita si $V = V_1 \cup V_2$ con $V_1 \cap V_2 = \phi$ y $si(a, b) \in F \Rightarrow (a \in V_1 \wedge b \in V_2$ ó $a \in V_2 \wedge b \in V_1)$

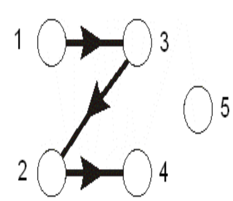
Ejemplo:

Sea $D = (V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, F = \{(3, 5), (2, 4), (4, 1)\})$



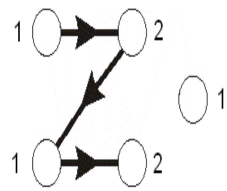
Definición 10. Sea D una digráfica y $\{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunto de naturales (que representan n colores diferentes). Una n-coloración de $V(D)$ es una función $f : V(D) \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ejemplo: Sea D como en la figura, con $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tenemos:



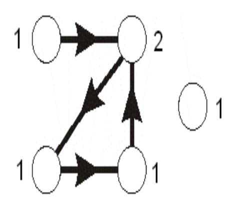
Definición 11. Sea D una digráfica. El número cromático de D, $\chi(D)$, lo definimos como $\chi(D) = min\{|\{1, 2, \ldots, n\}| : \forall x, y \in V(D)$ $x\, ady_D\, y \Rightarrow f(x) \neq f(y)\}$.

Ejemplo: Tomemos la digráfica del ejemplo anterior con la coloración $\{1,2\}$, y así obtenemos que $\chi(D) = 2$.



Definición 12. Sea D una digráfica. El número dicromático de D, $d_k(D)$, es $d_k(D) = min\{|\{1,2,\ldots,n\}| : D[f^{-1}(n)]$ no tiene ciclos dirigidos$\}$.

Ejemplo: Si tomamos la siguiente digráfica tenemos que $d_k(D) = 2$



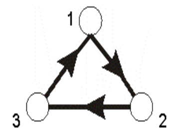
Definición 13. Sea D una digráfica, $\widetilde{\alpha} = (\alpha_v, J_v)_{v\in V(D)}$ una familia donde las α_v son digráficas ajenas y J_v es un subconjunto no vacío de $V(\alpha_v)$ con $v \in V(D)$. Definimos la digráfica composición $\sigma(D,\widetilde{\alpha})$ como sigue:

i) $V(\sigma(D,\widetilde{\alpha})) = \bigcup\limits_{v\in V(D)} V(\alpha_v)$,

ii) $F(\sigma(D,\widetilde{\alpha})) = (\bigcup\limits_{v\in V(D)} F(\alpha_v)) \cup \{(x,y) \mid x \in J_u, y \in J_v$, con $(u,v) \in F(D)\}$

Ejemplo:

Sea $D = (V = \{1,2,3\}, F = \{(1,2),(2,3),(3,1)\})$



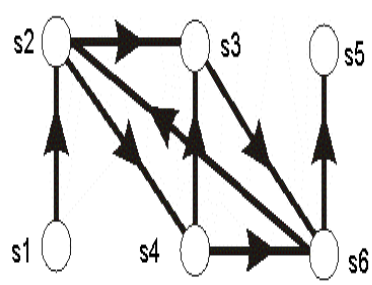
y $\alpha_u = (V = \{a,b\}, F = \{(a,b)\})$ para cad $u \in V(D)$.

$J_1 = \{a\},\ J_2 = \{b\},\ J_3 = \{a,b\}$

entonces

$\sigma(D,\widetilde{\alpha})$= $(V = \{s1, s2, s3, s4, s5, s6\},$

$F = \{(s1,s2),(s2,s3),(s2,s3),(s3,s6),(s4,s6),(s6,s5),(s6,s2),$
$(s4,s3)\})$



Definición 14. Para cada $U \subset V(\sigma(D,\widetilde{\alpha}))$ definimos la proyección de U en D como:

$$Proy_D(U) = D[\{v \in V(D) \mid U \cap V(\alpha_v) \neq \phi\}]$$

Definición 15. Sea $\gamma = (x_0,\ldots,x_n,x_0)$ un ciclo (dirigido) de $\sigma(D,\widetilde{\alpha})$, decimos que $B \subset V(\gamma)$ es una componente (dirigida) de γ si $Proy_D(U)$ es un ciclo (dirigido) de D.

Definición 16. Sean D digráfica y $B \subset V(D)$. Sea E una digráfica isomorfa a $D[B]$, con $V(E) = B'$. Definimos la digráfica duplicación de B, D^B, como sigue:

i) $V(D^B) = V(D) \cup V(E)$.

ii) $F(D^B) = F(D) \cup F(E) \cup F_0 \cup F_1$, donde

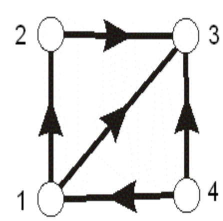
$$F_0 = \{(x', y) \mid x' \in V(E), y \in V(D) \wedge (x, y) \in F(D)\}$$

$$F_1 = \{(x, y') \mid y' \in V(E), x \in V(D) \wedge (x, y) \in F(D)\}$$

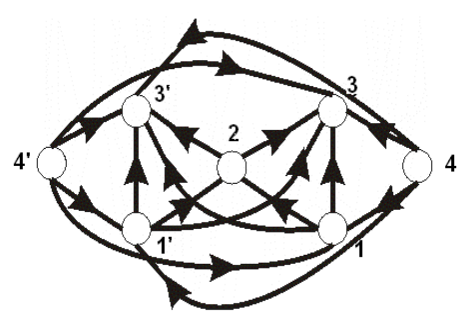
Si $x \in B$, llamamos a $x' \in B'$ la copia de x, y a x el original de x'.

Ejemplo:

Si D es de la siguiente forma con $B = \{1, 3, 4\}$



entonces D^B es de la forma



Definición 17. Sean D una digráfica, $x, y \in V(D)$ y $B \subset V(D)$. Definimos la distancia de x a y, $d_D(x, y)$, como la mínima longitud de todas las xy-trayectorias en D, y $d_D(x, B) = \min_{z \in B}\{d_D(x, z)\}$.

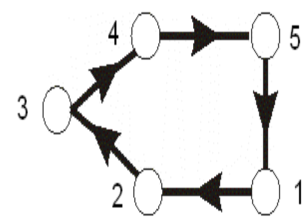
Definición 18. Sea D una digráfica. $N \subset V(D)$ es núcleo de D si se satisfacen las siguientes condiciones:

i) $F(D[N]) = \phi$, se dice que N es independiente.

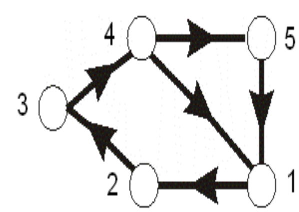
ii) $\forall z \in (V(D) \setminus N) \, \exists x \in N$ tal que $(z, x) \in A(D)$, se dice que N es absorbente.

Ejemplo:

digráfica sin núcleo



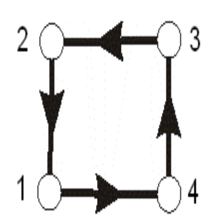
digráfica con núcleo



el núcleo es el conjunto $\{1, 3\}$.

Definición 19. Una digráfica D es núcleo perfecta cuando cada subdigráfica inducida de D tiene núcleo.

Ejemplo:



Definición 20. Sea D una digráfica y $N \subset V(D)$. Decimos que N es un (k, l)-núcleo de D, con $k \geq 2$ y $l \geq 1$, si se satisfacen las siguientes condiciones:

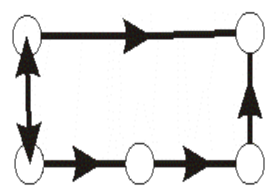
i) $\forall x, y \in N$ y $x \neq y$ se tiene que $d_D(x, y) \geq k$ y $d_D(y, x) \geq k$.

ii) $\forall z \in V(D) \setminus N, d_D(z, N) \leq l$.

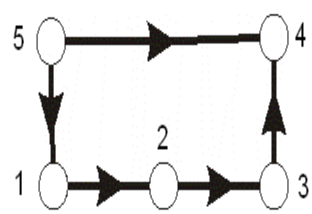
En el primer caso se dice que N es k-independiente y en el segundo l-absorbente.

Ejemplo:

Digráfica sin $(3, 2)$-núcleo.



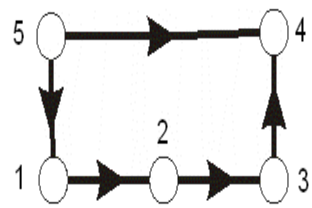
Digráfica con $(3, 2)$-núcleo.



el $(3, 2)$-núcleo sería el conjunto $\{1, 4\}$.

Definición 21. Toda digráfica D en la cual toda subdigráfica inducida tiene (k, l)-núcleo, se le llama digráfica (k, l)-núcleo perfecta.

Ejemplo:



Definición 22. Sea D una digráfica. Si $\psi : F(D) \to \{1, 2, \ldots, n\}$ es una función, donde el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ representa n colores distintos, decimos que D es una digráfica coloreada en sus flechas

Definición 23. Sean D y $\widetilde{\alpha} = (\alpha_v, \alpha_v)_{v \in V(D)}$ una familia donde α_v son digráficas ajenas, coloreadas en sus flechas, es decir, tenemos funciones $\psi : F(D) \to \{1, 2, \ldots, n\}$ y $f_v : F(\alpha_v) \to \{1(v), 2(v), \ldots, m(v)\}$.

Definimos la coloración en las flechas de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ como:

$\phi : F(\sigma(D, \widetilde{\alpha})) \to \{1, 2, \ldots, n\} \cup (\underset{v \in V(D)}{\cup} \{1(v), 2(v), \ldots, m(v)\})$ de tal manera que: $\phi|_{\alpha_v} = f_v$ y $\phi((x, y)) = \psi(u, v)$ donde $x \in \alpha_u, y \in \alpha_v$ con $(u, v) \in F(D)\}$

Definición 24. Sea D una digráfica y $B \subset V(D)$.

Sean $\psi : F(D) \to \{1, 2, \ldots, n\}$ y $\chi : F(E) \to \{1, 2, \ldots, n\}$, la coloración de D y de E respectivamente (isomorfismos de digráficas preservan coloración).

Definimos la coloración de la duplicación de B, D^B, como:

La función $\phi : F(D^B) \to \{1, 2, \ldots, n\}$ con las siguientes propiedades: $\phi|_{F(D)} = \psi$, $\phi|_{F(E)} = \chi$ y $\phi|_{F_0} = \psi = \phi|_{F_1}$

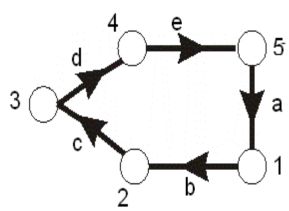
Definición 25. Sea D digráfica coloreada en sus flechas y $N \subset V(D)$. Decimos que N es núcleo por trayectorias monocromáticas de D si se satisfacen las siguientes condiciones

i) $\forall\, x, y \in N$, $x \neq y$, no existe xy-trayectoria dirigida monocromática en D.

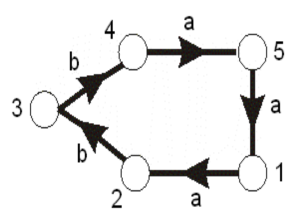
ii) $\forall\, z \in V(D) \setminus N$, existe una zN-trayectoria dirigida monocromática en D.

Ejemplo:

Digráfica sin núcleo por trayectorias monocromáticas, ya que se tienen todas las flechas de diferentes colores



La misma digráfica pero coloreada de diferente manera si tiene núcleo por trayectorias monocromáticas a saber, el conjunto $\{1, 3\}$



2

Existencia de (k, l)-núcleos en digráficas

El objetivo de esta sección es probar un teorema que generaliza el resultado obtenido por Kwaśnik en [**10**], el cual es a su vez una generalización del teorema de Richardson. La presente generalización es sobre digráficas cuya parte asimétrica es fuertemente conexa.

Además se prueba que existe una relación entre digráficas fuertemente conexas, de las que habla Kwaśnik, y su número cromático.

Definición 26. Sea D una digráfica. Decimos que D es fuertemente conexa si $\forall x, y \in V(D)$ existe un xy-camino dirigido y un yx-camino dirigido en D.

Lema 1. *Todo camino dirigido cerrado W, que satisface, $l(W) \not\equiv 0 \pmod k$, con $k \geq 2$, contiene un ciclo dirigido γ, tal que $l(\gamma) \not\equiv 0 \pmod k$.*

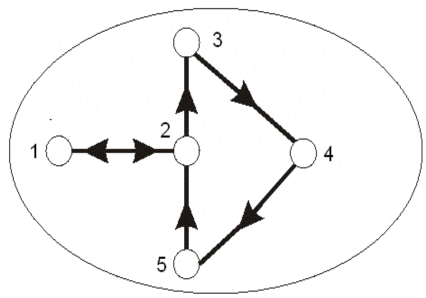
Dem. Sea $W = (x_0, x_1, \ldots, x_n, x_0)$ un camino dirigido en una digráfica D cualquiera, tal que $l(W) \not\equiv 0 \pmod k$, y $k \geq 2$.

Como W es un camino dirigido cerrado, entonces $W = \bigcup \gamma_i$ con γ_i ciclos dirigidos.

Entonces si para todo ciclo dirigido de W, $l(\gamma_i) \equiv 0 \pmod k$, y ya que $l(W) = \sum l(\gamma_i)$ se tendría que $l(W) \equiv 0 \pmod k$, contradiciendo la hipótesis. $\|$

Ejemplo:

Sea $k = 4$ y D una digráfica que tiene el camino dirigido cerrado $W = (1, 2, 3, 4, 5, 2, 1)$



entonces contiene el ciclo dirigido $\gamma = (1, 2, 1)$, cuya longitud no es un múltiplo de 4.

Teorema 1. *Si D es digráfica fuertemente conexa tal que todo ciclo dirigido γ de D cumple que $l(\gamma) \equiv 0 \pmod{k}$, entonces $\chi(D) \leq 3$*

Dem. Sea D una digráfica fuertemente conexa tal que todo ciclo dirigido γ de D tiene $l(\gamma) \equiv 0 \pmod{k}$, sea $m_0 \in V(D)$, para cada $0 \leq i < k$ y sea $N_i \subset V(D)$ definido como sigue:

$N_i = \{z \in V(D) \mid$ existe un $C = m_0z$-camino dirigido con $l(C) \equiv i \pmod{k}\}$.

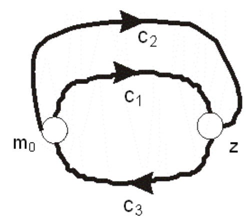
Probaremos que N_i tiene las siguientes propiedades.

1) $N_i \cap N_j = \phi$, con $i \neq j$ $i, j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Supongamos que $z \in N_i \cap N_j$, entonces existe $C_1 = m_0z$-camino dirigido tal que $l(C_1) \equiv i \pmod{k}\}$ y existe $C_2 = m_0z$-camino dirigido tal que $l(C_2) \equiv j \pmod{k}\}$, además como D es fuertemente conexa existe $C_3 = zm_0$-camino dirigido, como en la figura 1. Así $C_1 \cup C_3$ y $C_2 \cup C_3$ son caminos dirigidos cerrados de D. Si $l(C_1 \cup C_3) \not\equiv 0$

(mod k) entonces, aplicando el lema anterior contendría un ciclo dirigido cuya longitud sería no congruente con cero $\pmod k$ contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto $l(C_1 \cup C_3) \equiv 0 \pmod k$, análogamente para $C_2 \cup C_3$. Lo que implica que $l(C_1 \cup C_3) \equiv l(C_2 \cup C_3) \equiv 0 \pmod k$, es decir $l(C_1) + l(C_3) \equiv l(C_2) + l(C_3) \equiv 0 \pmod k$, que nos lleva a que $l(C_1) \equiv i \equiv l(C_2) \equiv j \pmod k$ lo que es imposible, ya que $i \neq j$.

Figura 1:



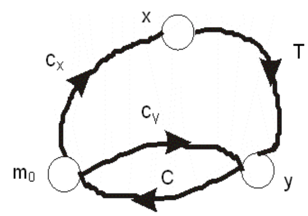
2) Para cada par $x, y \in N_i$, $x \neq y$ se tiene que $d_D(x,y) \geq k$.

Sean $x, y \in N_i$, $x \neq y$ y supongamos que existe una xy-trayectoria dirigida, T, tal que $l(T) \leq k-1$.

Como $x, y \in N_i$, tomamos C_x un m_0x-camino dirigido, C_y un m_0y-camino dirigido tal que $l(C_x) \equiv l(C_y) \equiv i \pmod k$ y C un ym_0-camino dirigido, C existe ya que D es fuertemente conexa, figura 2.

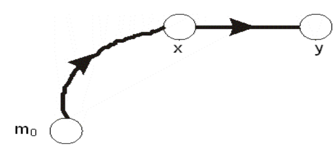
De esta manera tenemos que $C_x \cup T \cup C$ y $C_y \cup C$ son caminos dirigidos cerrados, si $l(C_x \cup T \cup C) \not\equiv 0 \pmod k$ entonces aplicando el lema anterior tendríamos que contiene un ciclo dirigido con longitud $\not\equiv 0 \pmod k$ contradiciendo la hipótesis; de aquí tenemos que, $l(C_x \cup T \cup C) \equiv 0 \pmod k$, de manera análoga se tiene que $l(C_y \cup C) \equiv 0 \pmod k$, por lo tanto tenemos que $l(C_x \cup T \cup C) \equiv l(C_y \cup C) \equiv 0 \pmod k$ de donde se sigue que, $l(C_x \cup T) \equiv l(C_y) \pmod k$; por otro lado tenemos que $l(C_y \cup T \cup C) \equiv l(T) \pmod k$, aplicando lo anterior obtenemos $l(C_x \cup T \cup C) \equiv l(T) = r \pmod k$, con $1 \leq r \leq k-1$ lo cual es imposible.

Figura 2:



3) Claramente cada flecha de D con punto inicial en N_i tiene punto final en N_{i+1} y $V(D) = \cup_{i=0}^{k-1} N_i$.

Esquema:

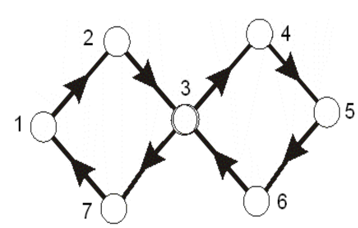


Así si k es par, se sigue de 1, 2 y 3 que $N_0 \cup N_2 \cup, \ldots, \cup N_{k-2}$ y $N_1 \cup N_3 \cup, \ldots, \cup N_{k-1}$ son dos conjuntos independientes que cubren a $V(D)$, y por lo tanto $\chi(D) \leq 2$.

Si k es impar, se sigue de 1, 2 y 3 que $N_0 \cup N_2 \cup, \ldots, \cup N_{k-3}$, $N_1 \cup N_3 \cup, \ldots, \cup N_{k-2}$ y N_{k-1} son tres conjuntos independientes que cubren $V(D)$ y por lo tanto $\chi(D) \leq 3$, ademas en ambos casos se tiene que N_i es $(k, k-1)$-núcleo de D. $\|$

Ejemplo:

Si $k = 4$ y D es como en la figura, entonces



si tomamos $m_0 = 1$ tenemos que $N_0 = \{1, 5\}$, $N_1 = \{2, 6\}$, $N_2 = \{3\}$ y $N_3 = \{4, 7\}$ y podemos colorear la digráfica dando a los vértices $1, 3, 5$ un color y otro color distinto a $2, 4, 6, 7$, por lo que $\chi(D) \leq 3$

Teorema 2. *Sea D una digráfica tal que $Asym(D)$ es fuertemente conexa. Además supóngase que todo ciclo dirigido γ, tal que $l(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{k}$, satisface alguna de las siguientes condiciones.*

(1) *Toda flecha de γ es una flecha simétrica de D*

(2) *γ tiene al menos k flechas simétricas.*

Entonces D tiene $(k, k-1)$-núcleo.

Dem. Sea $m_0 \in V(D)$ y para cada $0 \leq i < k$ sea $N_i \subset V(D)$ definido como sigue: $N_i = \{z \in V(D) \mid$ existe un m_0z-camino dirigido de longitud $\equiv i \pmod{k}$ contenido en $Asym(D)\}$.

Demostraremos las siguientes afirmaciones:

1) $N_i \cap N_j = \phi$, con $i \neq j$ $i, j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

La prueba es análoga a la del Teorema 1, usando caminos dirigidos contenidos en $Asym(D)$ en lugar de caminos dirigidos en D.

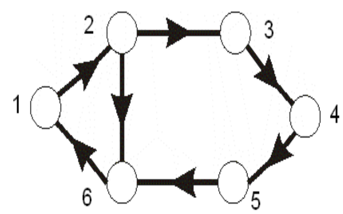
2) Para cada par $x, y \in N_i$, $x \neq y$ se tiene que $d_D(x, y) \geq k$.

Supongamos que existe una $T = xy$-trayectoria dirigida en D con $l(T) \leq k-1$. Argumentando de manera análoga a la prueba de (2) del Teorema 1 y tomando caminos dirigidos C_x, C_y y C en $Asym(D)$ en lugar de caminos dirigidos en D, concluimos que $C_x \cup T \cup C$ contiene un ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ teniendo al menos una flecha asimétrica y a lo más $k-1$ flechas simétricas, lo cual contradice la hipótesis.

3) Cada flecha asimétrica de D con punto inicial en N_i tiene punto final en N_{i+1} y $V(D) = \cup_{i=0}^{k-1} N_i$.

Así, de los puntos anteriores, tenemos que N_i es $(k, k-1)$-núcleo de D. ‖

Ejemplo: Sea D como en la figura y $k = 3$



entonces tenemos que si $m_0 = 1$ obtenemos $N_0 = \{1\}$, $N_1 = \{2\}$, $N_2 = \{3, 6\}$.

Teorema 3. *Sea D una digráfica que satisface las siguientes condiciones:*

(1) *Existe $m_0 \in V(D)$ tal que para cada $x \in V(D)$ existen, un $C_x = xm_0$-camino dirigido tal que $l(C_x) \equiv i \pmod{k}$ para alguna $0 \leq i \leq l$ y un m_0x-camino dirigido, contenidos en $Asym(D)$.*

(2) *Todo ciclo dirigido γ tal que $l(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{k}$ cumple alguna de las siguientes condiciones:*

a) Toda flecha de γ es una flecha simétrica de D

b) γ tiene al menos k flechas simétricas

Entonces D tiene un (k,l)-núcleo.

Dem. Sea $m_0 \in V(D)$ como en la hipótesis, definamos $N = \{z \in V(D) \mid$ existe un zm_0-camino dirigido de longitud $\equiv 0 \pmod{k}$ contenido en $Asym(D)\}$.

Probaremos que N es (k,l)-núcleo de D.

1) Para cada par $x, y \in N$, $x \neq y$ se tiene que $d_D(x, y) \geq k$.

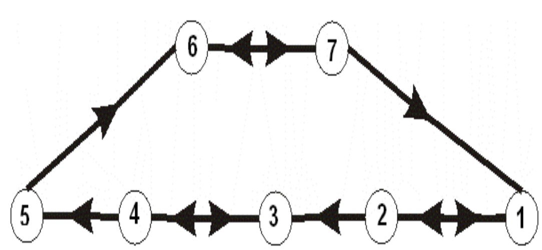
Sean $x, y \in N$ con $x \neq y$ y supongamos que existe una xy-trayectoria dirigida T con $l(T) \leq k-1$; sean C_x un xm_0-camino dirigido con $l(C_x) \equiv 0 \pmod{k}$, C_y un ym_0-camino dirigido con $l(C_y) \equiv 0 \pmod{k}$ y C un m_0x-camino dirigido, todos contenidos en $Asym(D)$. Así tenemos que $C \cup T \cup C_y$ y $C_x \cup C$ son caminos dirigidos cerrados.

Si $l(C_x \cup C) \not\equiv 0 \pmod{k}$, entonces aplicando el lema 1 tendríamos que contiene un ciclo dirigido con longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ sin flechas simétricas, contradiciendo la hipótesis, por lo tanto $l(C_x \cup C) \equiv 0 \pmod{k}$, por otro lado tenemos que $l(C_x \cup C) \equiv l(C_y \cup C) \equiv 0 \pmod{k}$ de donde, $l(C_y \cup C \cup T) \equiv l(T) \pmod{k}$, con $l(T) \leq k-1$, por lo tanto $l(C_y \cup C \cup T) \not\equiv 0 \pmod{k}$, aplicando el lema 1 tendríamos que $C \cup T \cup C_y$ contendría un ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ con al menos una flecha asimétrica y a lo más $k-1$ flechas simétricas, contradiciendo la hipótesis 2 del teorema. Por lo tanto N es k-independiente.

2) Prueba de la absorbencia de N.

Sea $x \in V(D) \setminus N$, sea C un xm_0-camino dirigido de longitud $\equiv i \pmod{k}$ e $0 \leq i \leq l$ contenido en $Asym(D)$; claramente existe $z \in V(C)$ tal que $l([z, C, m_0]) \equiv 0 \pmod{k}$ y $l([x, C, z]) \leq k-1$, así que existe una trayectoria dirigida de longitud a lo más $k-1$ del vértice x en N. Por lo tanto N es l-absorbente. $\|$

Ejemplo: Sea D como en la figura y $k = 3$, $l = 2$, si tomanmos $m_0 = 5$ tenemos que $N = \{1, 5\}$



3

Existencia de $(k, k-1)$-núcleos en digráficas

En esta sección se darán condiciones suficientes para la existencia de $(k, k-1)$-núcleo en una digráfica. En particular se probará que dada D una digráfica cuya parte asimétrica es fuertemente conexa y tal que todo triángulo dirigido tiene al menos dos flechas simétricas, y si todo ciclo dirigido γ de D con $l(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{k}$, $k \geq 2$ satisface al menos una de las siguientes propiedades: (a) γ tiene dos flechas simétricas, (b) γ tiene cuatro cuerdas cortas. Entonces D tiene $(k, k-1)$-núcleo.

Este resultado da otra generalización del teorema de Richardson.

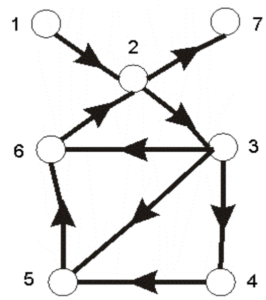
Definición 27. Sean D una digráfica y T un camino dirigido en D, con $l(T) = n$.

Una cuerda de T es una flecha de D de la forma (z_i, z_j), con $j \neq i+1$ y $z_i, z_j \in V(T)$.

Una cuerda corta de T es una flecha de la forma (z_i, z_j), con $j = i+2$ y $0 \leq i \leq n-2$.

Ejemplo:

Sea D como en la figura,



entonces tomando el camino dirigido $W = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 7)$ tenemos que $(3, 6)$ es una cuerda y $(3, 5)$ es una cuerda corta.

Lema 2. *Sean D una digráfica, $u, v, w \in V(D)$, T_1 una uv-trayectoria dirigida, T_2 una vw-trayectoria dirigida (puede pasar $v = w$), T_3 una wu-trayectoria dirigida y denotamos $\gamma = T_1 \cup T_2 \cup T_3$. Si $l(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{k}$, $k \geq 2$, entonces existe C un ciclo dirigido contenido en γ con $l(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$ y vértices $u', v', w' \in V(C)$ tal que $[u', C, v'] \subset T_1$, $[v', C, w'] \subset T_2$ y $[w', C, u'] \subset T_3$.*

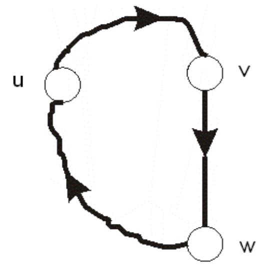
Dem. Procederemos por inducción sobre $l(\gamma)$.

Si $l(\gamma) = 2$, entonces, claramente γ es ciclo dirigido con las propiedades requeridas.

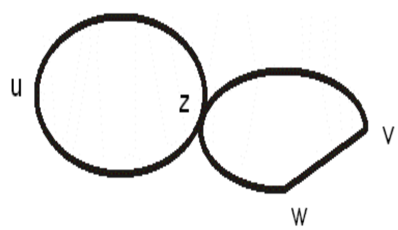
Supongamos que el resultado es válido para γ' con las condiciones del lema, tal que $l(\gamma') < n$ y sea $\gamma = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ con $l(\gamma) = n$.

Si $V(T_1) \cap V(T_3) = \{u\}$.

Entonces $v \neq w$ y γ es el ciclo dirigido buscado.



Si $V(T_1) \cap V(T_3) \neq \{u\}$.



Entonces sea $z \neq u$ el primer vértice de T_1 que está en T_3. Como $l(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{k}$, tenemos que, al menos una de las siguientes afirmaciones se cumple:

$$l([u, T_1, z] \cup [z, T_3, u]) \not\equiv 0 \pmod{k} \tag{1}$$

$$l([z, T_1, v] \cup T_2 \cup [w, T_3, z]) \not\equiv 0 \pmod{k} \tag{2}$$

Ya que si $l([u, T_1, z]) + l([z, T_3, u]) = n_1k$ y $l([z, T_1, v]) + l(T_2) + l([w, T_3, z]) = n_2k$ tendríamos que $l([u, T_1, z]) + l([z, T_3, u]) + l([z, T_1, v]) + l(T_2) + l([w, T_3, z]) = l(\gamma) = n_1k + n_2k = (n_1 + n_2)k$ contradiciendo que $l(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{k}$.

Si (1) se cumple, tenemos que tomando $\gamma' = [u, T_1, z] \cup [z, T_3, u]$, $u' = u$, $v' = w' = z$, entonces $l(\gamma') < n$; y por la hipótesis de inducción sobre γ' obtenemos que existe un ciclo dirigido $C \subset \gamma' \subset \gamma$ con las propiedades requeridas.

Si (2) se cumple, tomamos $\gamma' = [z, T_1, v] \cup T_2 \cup [w, T_3, z]$, $u' = z, v' = v, w' = w$; así tenemos que $l(\gamma') < n$ y por la hipótesis de inducción sobre γ', obtenemos que existe un ciclo dirigido $C \subset \gamma' \subset \gamma$ con las propiedades requeridas. ||

Teorema 4. *Sea D una digráfica tal que $Asym(D)$ es fuertemente conexa y todo triángulo dirigido tiene al menos dos flechas simétricas.*

Si para todo ciclo dirigido γ de D, con $l(\gamma) \not\equiv 0 \pmod k$, se satisface alguna de las siguientes condiciones:

(1) *γ tiene dos flechas simétricas,*

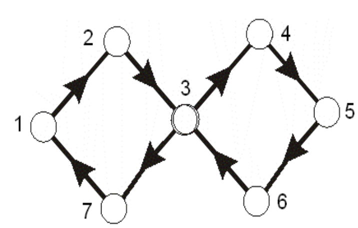
(2) *γ tiene cuatro cuerdas cortas,*

entonces D tiene $(k, k-1)$-núcleo $(k \geq 2)$.

Dem. Sea $m_0 \in V(D)$ cualquier vértice, y para cada $0 \leq i < k$ sea $N_i \subset V(D)$ definido como sigue:

$N_i = \{z \in V(D) \mid$ existe una trayectoria dirigida mínima de m_0 a z contenida en $Asym(D)$ con longitud $\equiv i \pmod k\}$.

Ejemplo: Sea D como en la siguiente figura, con $k = 4$ y $m_0 = 1$.



entonces $N_0 = \{1, 5\}$, $N_1 = \{2, 6\}$, $N_2 = \{3\}$ y $N_3 = \{4, 7\}$

Observemos que se cumplen las siguientes propiedades:

(1) Claramente $N_i \cap N_j = \phi$ para $i \neq j$, $0 \leq i, j < k$.

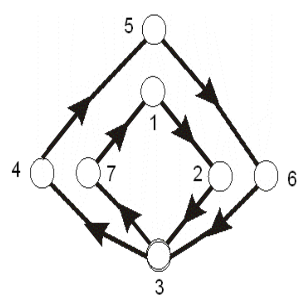
(2) $\cup_{i=0}^{k-1} N_i = V(D)$.

Es claro que por contrucción $\cup_{i=0}^{k-1} N_i \subset V(D)$. Por otro lado, $\cup_{i=0}^{k-1} N_i \supset V(D)$ se sigue de que $Asym(D)$ es fuertemente conexa.

Por otro lado tenemos que:

(3) Toda flecha de D con vértice inicial en N_i tiene su vértice terminal en N_{i+1} (notación modulo k).

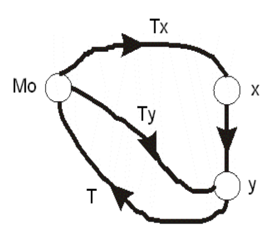
Esto se hace claro en nuestro ejemplo si lo vemos como:



Para probarlo:

Sea (x, y) una flecha de D con $x \in N_i$, y tomemos: T_x una trayectoria dirigida mínima de m_0 a x contenida en $Asym(D)$, T_y una trayectoria dirigida mínima de m_0 a y contenida en $Asym(D)$ y T una trayectoria dirigida mínima de y a m_0 contenida en $Asym(D)$, T existe porque $Asym(D)$ es fuertemente conexa.

Esto se representa como:



(3.1) $l(T_x) \equiv i \pmod{k}$.

Esto se sigue directamente de la definición de N_i y de que $x \in N_i$.

(3.2) T_x no tiene cuerdas cortas en D.

Denotemos $T_x = (m_0 = z_0, z_1, \ldots, z_n = x)$, es claro que no existe (z_i, z_{i+2}) en $Asym(D)$ ya que T_x es mínima entre m_0 y x. Así que (z_i, z_{i+2}) tendría que ser una cuerda corta simétrica de T_x, pero si tomamos $(z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_i)$ formamos un triángulo dirigido con a lo más una flecha simétrica contradiciendo la hipótesis del teorema. Por lo tanto T_x no tiene cuerdas cortas en D.

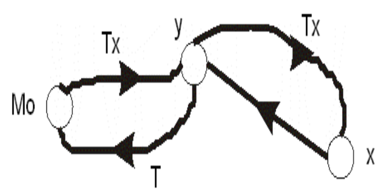
De manera análoga se prueba que:

(3.3) T_y no tiene cuerdas cortas en D.

(3.4) T no tiene cuerdas cortas en D.

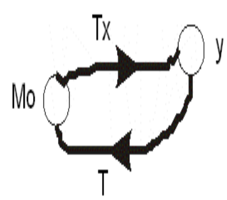
Ahora analizaremos los dos posibles casos:

Caso 1: $y \in T_x$.



Esto se divide en varios subcasos:

Caso 1.a $l([m_0, T_x, y] \cup T) \not\equiv 0 \pmod k$.



En este caso aplicando el lema 2 (tomando $u = m_0, v = w = y = z_i, T_1 = [m_0, T_x, y], T_2 = [v = w = y = z_i]$ y $T_3 = T$), tenemos que existe C un ciclo dirigido contenido en $[m_0, T_x, y] \cup T$ con $l(C) \not\equiv 0$

(mod k) y vértices u', v', w' tal que $[u', C, v'] \subset [m_0, T_x, y]$,$v' = w'$ ya que $w = v$, y $(v', C, u') \subset T$, y como $C \subseteq [m_0, T_x, y] \cup T \subseteq T_x \cup T \subset Asym(D)$, se sigue:

(1.a.1) $C \subset Asym(D)$.

Además,

(1.a.2) $[u', C, v']$ no tiene cuerdas cortas.

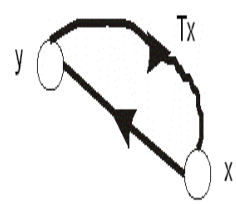
Esto es consecuencia de (3.2) y de que $[u', C, v'] \subset [m_0, T_x, y]$.

De manera análoga,

(1.a.3) $[v', C, u']$ no tiene cuerdas cortas.

Ahora, como $l(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$, se sigue de (1.a.1) y la hipótesis del teorema que C tiene cuatro cuerdas cortas. Si $C = (u' = z_0, z_1, \ldots, z_{i-1}, z_i = v', z_{i+1}, \ldots, z_n, z_0)$; así tenemos de (1.a.2) y (1.a.3) que las unicas cuerdas cortas de C serían (z_{i-1}, z_{i+1}) y (z_n, z_1), contradiciendo la hipótesis.

Caso 1.b: $l([y, T_x, x] \cup [x, y]) \not\equiv 0 \pmod{k}$.



En este caso tenemos el ciclo dirigido $C = [y, T_x, x] \cup [x, y] = [y = w_0, w_1, \ldots, w_n = x, w_0]$, con $l(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$. Como $[y, T_x, x] \subset T_x \subset Asym(D)$, tenemos que la única flecha simétrica posible de C es (x, y). Por lo tanto se sigue de la hipótesis del teorema que C tiene cuatro cuerdas cortas. Pero de (3.2) y de que $[y, T_x, x] \subset T_x$ se sigue que las únicas cuerdas cortas serían (w_{n-1}, w_0) y (w_n, w_1), contradiciendo la hipótesis.

Así el único caso posible es:

Caso 1.c: $l([m_0, T_x, y] \cup T) \equiv 0 \pmod{k}$ y $l([y, T_x, x] \cup [x, y]) \equiv 0 \pmod{k}$.

En este caso tenemos que

$$l([m_0, T_x, y] \cup T) + l([y, T_x, x] \cup [x, y]) \equiv 0 \pmod{k}$$

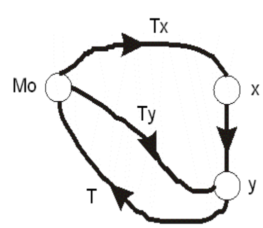
$$(i.e.) l(T_x \cup [x, y] \cup T) \equiv 0 \pmod{k}.$$

Por lo tanto $l(T_x \cup [x, y] \cup T) \equiv l([m_0, T_x, y] \cup T) \equiv 0 \pmod{k}$ y se sigue que $l(T_x \cup [x, y]) \equiv l(m_0, T_x, y) \pmod{k}$. Entonces

$$l(m_0, T_x, y) \equiv l(T_x) + 1 \pmod{k}$$

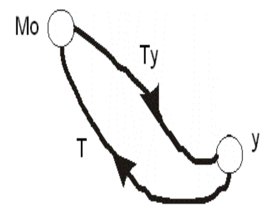
y tenemos de (3.1) que $l(m_0, T_x, y) \equiv i+1 \pmod{k}$. Finalmente, nótese que como T_x es una trayectoria dirigida mínima de m_0 a x contenida en $Asym(D)$ y $[m_0, T_x, y] \subset T_x$ tenemos que $[m_0, T_x, y]$ es una trayectoria dirigida mínima de m_0 a y contenida en $Asym(D)$. Así concluimos de la definición de N_{i+1} que $y \in N_{i+1}$.

Caso 2: $y \notin T_x$.



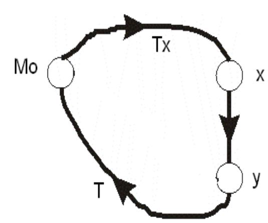
En este caso probaremos que $l(T_y) \equiv i + 1 \pmod{k}$. Otra vez analizaremos varios casos:

Caso 2.a: $l(T_y \cup T) \not\equiv 0 \pmod{k}$.



Aplicando el lema (tomando $u = m_0, v = w = y, T_1 = T_y, T_2 = (v = w = y)$ y $T_3 = T$) tenemos que existe C ciclo dirigido con $l(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$, $u', v' = w' \in V(C)$ tal que $[u', C, v'] \subset T_y$ y $[v', C, u'] \subset T$. Como $T_y, T \subset Asym(D)$, tenemos que $C \subset Asym(D)$. Por lo tanto de la hipótesis, C tiene cuatro cuerdas cortas. Pero se sigue de (3.3), (3.4) y de lo anterior que, si $C = (u' = z_0, z_1, \ldots, z_{i-1}, z_i = v', z_{i+1}, \ldots, z_n, z_0)$, las únicas posibles cuerdas cortas de C son (z_{i-1}, z_{i+1}) y (z_n, z_1), contradiciendo que son cuatro.

Caso 2.b: $l(T_x \cup [x, y] \cup T) \not\equiv 0 \pmod{k}$.



Aplicando el lema 2 (tomando $u = m_0, v = x, w = y, T_1 = T_x, T_2 = (x, y)$ y $T_3 = T$) tenemos que existe C ciclo dirigido de $l(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$ y $u', v', w' \in V(C)$ tal que $[u', C, v'] \subset T_x$, $[v', C, w'] \subset [x, y]$ y $[w', C, u'] \subset T_3$. Como $T_x, T \subset Asym(D)$, tenemos que la única posible flecha simétrica de C es (x, y). Por lo tanto, por la hipótesis, C tiene cuatro cuerdas cortas. Sin embargo: si $C = (u' = z_0, z_1, \ldots, z_{i-1}, z_i = v', z_{i+1}, \ldots, z_n, z_0)$, entonces se sigue de (3.2), (3.4) y de lo anterior que las únicas posibles cuerdas cortas son $(z_{i-1}, z_{i+1}), (z_i, z_{i+2})$ y (z_n, z_1), contradiciendo que son cuatro.

Así concluimos de los casos 2.a y 2.b que:

Caso 2.c: $l(T_y \cup T) \equiv 0 \pmod k$ y $l(T_x \cup [x,y] \cup T) \equiv 0 \pmod k$.

De esta manera, tenemos que:

$$l(T_y \cup T) \equiv l(T_x \cup [x,y] \cup T) \pmod k$$

así que

$$l(T_y) \equiv l(T_x \cup [x,y]) \equiv l(T_x) + 1 \pmod k$$

y como $l(T_x) \equiv i \pmod k$, tenemos que $l(T_y) \equiv i+1 \pmod k$. Por lo tanto $y \in N_{i+1}$. Por lo tanto (3) queda probado.

Así de (1), (2), (3), se sigue que N_i es un $(k, k-1)$-núcleo de D. ||

Nota 1. La hipótesis *Todo triángulo dirigido tiene al menos dos flechas simétricas* no es necesaria para el caso $k \neq 3$, ya que para $k \neq 3$, tenemos que $3 \not\equiv 0 \pmod k$ y se sigue directamente de que todo ciclo dirigido de longitud 3 tiene al menos dos flechas simétricas. Por lo tanto tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1. *Sea D una digráfica tal que $Asym(D)$ es fuertemente conexa. Si todo ciclo dirigido γ de D con $l(\gamma) \not\equiv 0 \pmod k$, $k \geq 2$, $k \neq 3$ satisface alguna de las siguientes condiciones:*

(1) *γ tiene dos flechas simétricas,*

(2) *γ tiene cuatro cuerdas cortas,*

entonces D tiene $(k, k-1)$-núcleo.

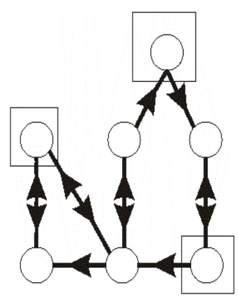
Dem. Se sigue de manera inmediata del teorema anterior. ||

Finalmente mostraremos algunas consecuencias del teorema anterior.

Corolario 1. *Sea D una digráfica. Si todo ciclo dirigido de longitud impar en D, tiene al menos 2 flechas simétricas, entonces D tiene núcleo.*

Dem. Tenemos que $k = 2$, así sea γ es un ciclo dirigido de D entonces si $l(\gamma) \not\equiv 0 \pmod 2$ implica que la longitud es impar, por lo tanto se satisfacen las hipótesis del teorema y por lo tanto D tiene un $(k, k-1)$-núcleo. $\|$

Ejemplo: Los vértices dentro de los rectángulos formarían el núcleo de la digráfica.



Corolario 2. *Sea D una digráfica tal que $Asym(D)$ es fuertemente conexa. Si todo ciclo dirigido γ con $l(\gamma) \not\equiv 0 \pmod k$ tiene al menos 2 flechas simétricas, entonces D tiene $(k, k-1)$-núcleo.*

Corolario 3. *Sea D una digráfica fuertemente conexa. Si todo ciclo dirigido C de D con $l(C) \equiv 0 \pmod k$, $k \geq 2$, entonces D tiene $(k, k-1)$-núcleo.*

4

Cuello, número dicromático y digráficas núcleo perfectas

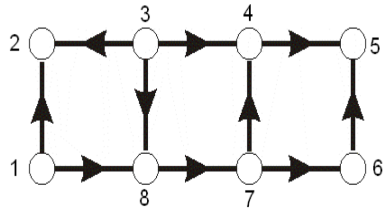
En lo siguiente se probará la existencia de digráficas núcleo perfectas con cualquier número dicromático cuya gráfica subyacente no tenga triángulos y la existencia de digráficas núcleo imperfectas con un número dicromático arbitrario y sin ciclos dirigidos de longitud dos o tres. Además para la existencia de núcleos se verá que es suficiente considerar un número dicromático al menos dos.

Definición 28. Sea D una digráfica. Definimos el cuello de D, $g(D)$, como:

$$g(D) = min\{l(C) \mid C \, \text{ciclo de} D\}$$

Ejemplo:

En la siguiente digráfica, tenemos que $g(D) = 4$, ya que la longitud mínima de sus ciclos dirigidos es 4.



Lema 3. *Si* $g(D) \geq 4$, $g(\alpha_v) \geq 4$ *y* J_v *es independiente en* α_v *para cada* $v \in V(D)$

entonces $g(\sigma(D, \widetilde{\alpha})) \geq 4$.

Dem. Sea $\gamma = (x_0, \ldots, x_0)$ un ciclo de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$, asi $\gamma \subset \alpha_v$ para alguna $v \in V(D)$ o $\gamma \not\subset \alpha_v$ $\forall v \in V(D)$.

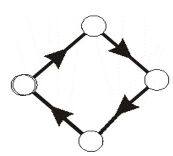
Si $\gamma \subset \alpha_v$ para alguna $v \in V(D)$ como $g(\alpha_v) \geq 4$ para cualquier $v \in V(D)$, entonces $l(\gamma) \geq 4$.

Si $\gamma \not\subset \alpha_v$ $\forall v \in V(D)$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que γ es de una componente, por lo tanto $Proy_D(V(\gamma))$ es un ciclo de D y como $g(D) \geq 4$ tenemos que $l(\gamma) \geq 4$.

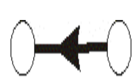
Por lo tanto $g(\sigma(D, \widetilde{\alpha})) \geq 4$. $\|$

Ejemplo:

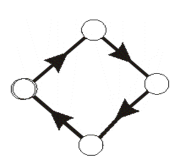
Con D



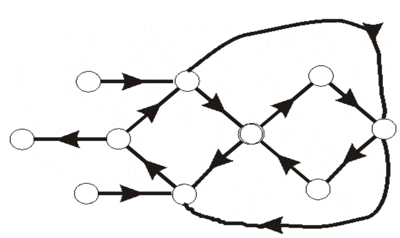
y para tres vértices de D tenemos que α_v es



y para el faltante



tenemos que $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ es



que cumple el teorema.

Lema 4. *Sea D una digráfica tal que $d_k(D) = n$.*

Si la familia $\widetilde{\alpha} = ((\alpha_v, J_v))_{v \in V(D)}$ satisface:

1. $\forall v \in V(D)$, $\alpha_v[J_v]$ es acíclica

2. $\forall v \in V(D)$, $d_k(\alpha_v) = n$ y en cualquier n-coloración aciclica de α_v, J_v es no monocromático,

entonces $d_k(\sigma(D, \widetilde{\alpha})) = n + 1$.

Dem. Sean $\varphi : V(D) \to \{1, ..., n\}$ una n-coloración acíclica de D y $f_v : V(\alpha_v) \to \{1, \ldots, n+1\}$ una (n+1)-coloración acíclica de α_v tal que, para cada $v \in V(D)$, $f_v(J_v) = \varphi(v)$, la existencia de φ se sigue de $d_k(D) = n$ y la de f_v se sigue de $\forall v \in V(D)\, (d_k(\alpha_v) = n$ y $\alpha_v[j_v]$ es acíclica).

De esta manera definimos una (n+1)-coloración, $f : V(\sigma(D, \widetilde{\alpha})) \to \{1, ..., n+1\}$, de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ tal que $\forall v \in V(D)$ $f \mid_{V(\alpha_v)} = f_v$, f esta bien definida por como se definió f_v y φ. Ahora demostraremos que f es acíclica.

Por reducción al absurdo, sea $\gamma = (x_1, ..., x_m, x_1)$ un ciclo en $\sigma(D; \widetilde{\alpha})$ tal que $f(x_i) = c$ con $1 \leq i \leq m$, $c \in \{1, ..., n+1\}$ (supongamos que γ es de una componente, si no fuera el caso tomamos cada componente de γ y procedemos con cada una como en el caso de una componente) así de la definición de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ tenemos que la $Proy_{V(\gamma)}(D)$ es un ciclo dirigido monocromático contradiciendo que φ es una n-coloración acíclica de D.

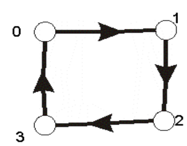
Por lo tanto f es una (n+1)-coloración acíclica de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$, lo que implica que $d_k(\sigma(D, \widetilde{\alpha})) \leq n + 1$

Supongamos que $d_k(\sigma(D, \widetilde{\alpha})) \leq n$ y sea $\psi : V(\sigma(D, \widetilde{\alpha})) \to \{1, ..., n\}$ una n-coloración acíclica de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$. Si definimos $I_{n-1} = \{1, ..., n-1\}$

tenemos que $[\psi^{-1}(I_{n-1}) \cap J_v] \neq \phi$ ya que J_v es no monocromático. Así eligiendo $u_v \in [\psi^{-1}(I_{n-1}) \cap J_v]$ para cada $v \in V(D)$ tenemos que, $\sigma(D, \widetilde{\alpha})[\{u_v\}_{v \in V(D)}] \cong D$, por lo tanto D sería (n-1)-coloreable contradiciendo la hipótesis.

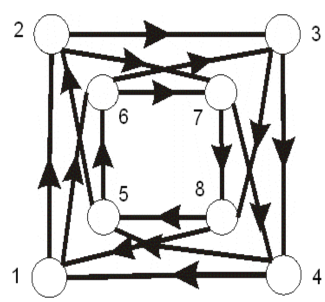
Por lo tanto $d_k(\sigma(D, \widetilde{\alpha})) = n + 1$. $\|$

Ejemplo: Sean $n = 2$, y D



además sea para cada $v \in V(D)$, α_v la digráfica que consiste de dos vértices y sin flechas.

Entonces tenemos que $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ es:

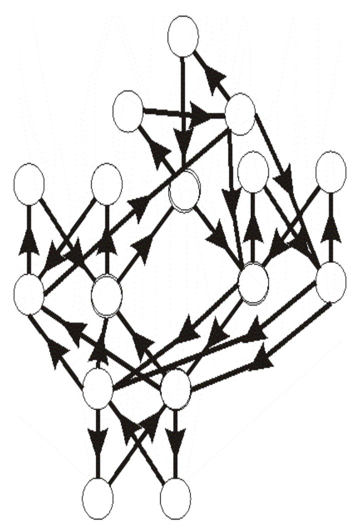


que para que no tenga ciclos dirigidos monocromáticos tenemos que colorear los vértices como sigue: $\{1, 2, 3\}$ de azul, $\{4, 5, 7\}$ de rojo y $6, 8$ de amarillo, por lo que $d_k(\sigma(D, \widetilde{\alpha})) = 3$.

Lema 5. *Si* $d_k(D) = n \geq 2$, $g(D) \geq 4$ *y* $\widetilde{\alpha} = ((\alpha_v, J_v))_{v \in V(D)}$ *una familia tal que* α_v *es una digráfica bipartita, asimétrica y no acíclica con bipartición* $\{J_v,\ J_v^* = (V(\alpha_v) - J_v)\}$ *con* $v \in V(D)$, *entonces* $g(\sigma(D,\widetilde{\alpha})) \geq 4$*,* $d_k(\sigma(D,\widetilde{\alpha})) = n$*,* $J^* = \bigcup_{v\in V(D)} (J_v^*)$ *es independiente, en toda n-coloración acíclica de* $\sigma(D,\widetilde{\alpha})$ *y* J^* *no es monocromático.*

Dem. Tenemos por hipótesis que $g(D) \geq 4$, como α_v es bipartita, asimétrica y no acíclica se deduce que $g(\alpha_v) \geq 4$, además por la bipartición de α_v, J_v es independiente en α_v por lo tanto, por el lema 3, $g(\sigma(D,\widetilde{\alpha})) \geq 4$.

Por la bipartición de α_v, J_v^* es independiente.



Sea $\varphi : V(D) \to \{1,\ldots,n\}$ una n-coloración acíclica de D y asignemos a cada $w \in V(\sigma(D,\widetilde{\alpha}))$ el color $\varphi(v)$ si $w \in J_v$, y cualquier otro color, en $\{1,\ldots,n\}$, diferente de $\varphi(v)$ si $w \in J_v^*$. De esta manera obtenemos una n-coloración acíclica de $\sigma(D,\widetilde{\alpha})$ ya que $d_k(D) \geq 2$. Como $\sigma(D,\widetilde{\alpha})$ contiene una copia isomorfa de D se tiene que $d_k(\sigma(D,\widetilde{\alpha})) = n$.

Por último, sea $\psi : V(\sigma(D,\widetilde{\alpha})) \to \{1,\ldots,n\}$ una n-coloración acíclica de $\sigma(D,\widetilde{\alpha})$ y para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, se tiene que $\exists v(i) \in V(D)$ tal que $J_{v(i)}$ es monocromático de color i, supongamos lo contrario $\exists i_0 \in \{1,\ldots,n\}$ tal que J_v es no monocromático de color i_0 para cada

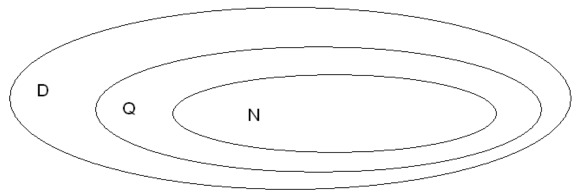
$v \in V(D)$, ahora tomando un vértice u_v en cada J_v tal que $\psi(u_v) \neq i_0$ tenemos que $D[\{u_v\}_{v \in V(D)}] \cong D$ sería (n-1)-coloreable, ya que el color i_0 no se está usando, así que $d_k(D) \leq n-1$ contradiciendo la hipótesis. Tomemos $k \in \psi(J^*)$, sabemos de lo anterior que $J_{v(k)}$ es monocromático de color k, pero como α_v es no acíclica se tiene que $d_k(\alpha_k) \geq 2$, por lo tanto $J^*_{v(k)}$ no es monocromático de color k por lo tanto $\psi(J^*_{v(k)}) = r$ con $r \neq k$. Así para r $\exists v(r)$ tal que $J_{v(r)}$ es monocromático de color r por lo tanto $\psi(J^*_{v(r)}) = s$ con $s \neq r$. Por lo tanto J^* tiene al menos dos colores r *y* s de donde se sigue que J^* es no monocromático. $\|$

Teorema 5. *Si D una digráfica núcleo-perfecta y $\widetilde{\alpha} = ((\alpha_v, J_v))_{v \in V(D)}$ una familia tal que α_v es núcleo-perfecta, entonces $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ es una digráfica núcleo-perfecta.*

Dem. Primeramente nótese que toda subdigráfica inducida conexa de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ tiene la forma $\sigma(D', \widetilde{\alpha'})$ donde D' es una subdigráfica inducida de D y $\widetilde{\alpha'} = ((\alpha'_v, J'_v))_{v \in V(D)}$ tiene a α'_v como una subdigráfica inducida de α_v para cada $v \in V(D)$, por lo que basta probar que $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ tiene núcleo.

Elíjase N_v núcleo de α_v para cada $v \in V(D)$ y sean $Q = \{v \in V(D) | [N_v \cap J_v] \neq \phi\}$, y N un núcleo de $D[Q]$.

El siguiente esquema representa como queda dividida D

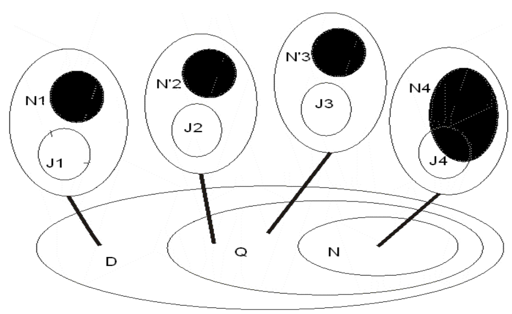


Así definimos:

$$N^* = \bigcup_{v \in [N \cup (V(D)-Q)]} (N_v) \cup \bigcup_{v \in (Q-N)} (N'_v)$$

Donde N'_v es un núcleo de $\alpha_v[V(\alpha_v) - J_v]$, $v \in V(Q-N)$.

Esquema: En la figura tenemos que $N^* = N1 \cup N'2 \cup N'3 \cup N4$



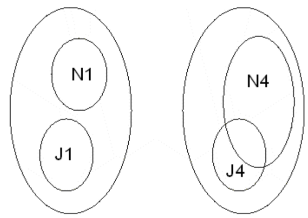
Probaremos primero que N^* es independiente.

Como N es un subconjunto independiente de D y cada N_v es independiente en α_v tenemos que, por la definición de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$, $\cup_{v \in N} N_v$ es independiente. Ahora como $\forall v \in (V(D) - Q)$ tenemos que $(N_v \cap J_v) = \phi$ y con la definición de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ se sigue que $\cup_{v \in (V(D)-Q)} N_v$ es independiente, además para cada $z \in Q$ no hay $[\cup_{v \in (V(D)-Q)} N_v] N_z$-flecha ni $N_z[\cup_{v \in (V(D)-Q)} N_v]$-flecha, por lo tanto

$$\bigcup_{v \in N} N_v \cup \bigcup_{v \in (V(D)-Q)} N_v$$

es independiente.

En nuestro ejemplo:

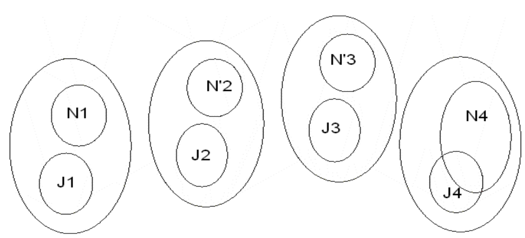


Por otro lado, de la definición de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ y ya que N'_v es independiente tenemos que para cada par $u \neq v \in (Q \setminus N)$ no hay $N'_v V(\alpha_u)$-flecha ni $V(\alpha_u) N'_v$- flecha, por lo tanto $\cup_{v \in (Q-N)} N'_v$ es independiente, además no hay flecha entre N'_v a α_u $\forall u \neq v$, y así tenemos que

$$\bigcup_{v \in [N \cup (V(D)-Q)]} (N_v) \cup \bigcup_{v \in (Q-N)} (N'_v)$$

es independiente.

El esquema es de la forma:



Ahora se probará que N^* es absorbente.

Sean $w \in V(\sigma(D, \widetilde{\alpha}) - N^*)$ y $v \in V(D)$ tal que $w \in V(\alpha_v)$, así tenemos los siguientes casos:

a) $v \in (V(D) - Q)$.

Como $w \notin N^*$ se sigue que $w \in (V(\alpha_v) - N_v)$, por lo tanto $\exists w N_v$-flecha ya que N_v es núcleo de α_v.

b)$v \in N$.

Como $w \notin N^*$ se sigue que de la definición N_v y de N^* que $w \in (V(\alpha_v) - N_v)$ entonces $\exists w N_v$-flecha, ya que N_v es núcleo de α_v.

c)$v \in (Q - N)$.

c.1)$w \in (V(\alpha_v) - J_v))$

Como $w \notin N^*$ tenemos que $w \notin N'_v$ y $\exists w N'_v$-flecha ya que N'_v es núcleo de $\alpha_v[V(\alpha_v) - J_v]$.

c.2)$w \in J_v$.

De la definición de N y que $v \in (Q - N)$ se sigue que $\exists v' \in N$ tal que $vv' \in F(D)$. Por lo tanto, por la definición de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$, tenemos que toda $wJ_{v'}$-flecha esta en $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ y por la definición de Q tenemos $(N_{v'} \cap J_{v'}) \neq \phi$. Así concluimos que existe una $wN'_{v'}$-flecha con $v' \in N$.

Por lo tanto de los tres casos anteriores tenemos que hay una wN^*-flecha.

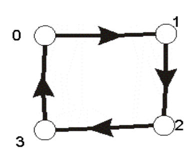
Por lo tanto N^* es núcleo de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$. ||

Teorema 6. *Sea $n > 1$ un número natural. Existe una digráfica asimétrica núcleo-perfecta D_n tal que $d_k(D) = n$ y $g(D) \geq 4$.*

Dem. Procederemos por inducción sobre n

Para $n = 2$. Tomando $D_2 = \overrightarrow{C_4}$, el ciclo dirigido de longitud 4, tenemos que $g(D_2) = l(C_4) = 4$ y $d_k(C_4) = 2$, ya que a C_4 (ver figura 3), se puede colorear a $\{0, 2\}$ de azul y a $\{1, 3\}$ de rojo. Cumpliendose así el teorema.

Figura 3:

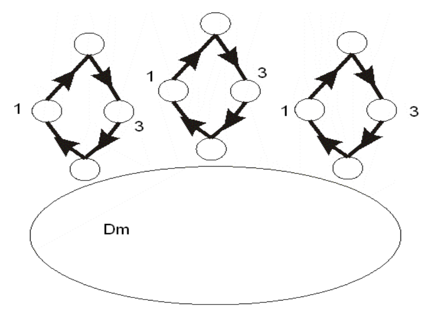


Supongamos que ha sido construida una digráfica asimétrica nucleo-perfecta D_m para $m \geq 2$ tal que $d_k(D_m) = m$ y $g(D_m) \geq 4$.

Probaremos que el teorema es válido para $m+1$. Para ello consideremos la siguiente construcción:

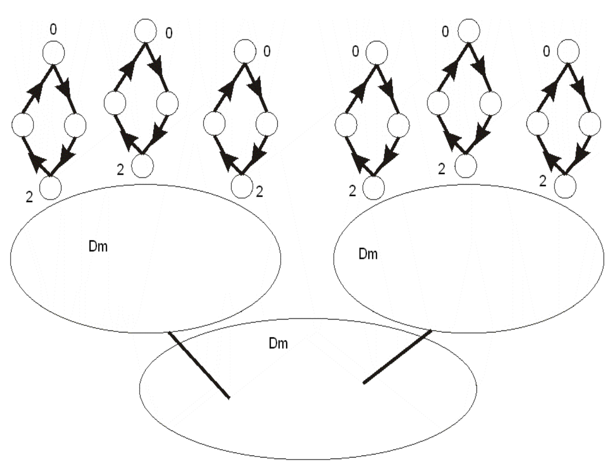
Sean α_v el ciclo dirigido de longitud 4, $(0_v, 1_v, 2_v, 3_v, 0_v)$, $J_v = \{1_v, 3_v\}$ y $J_v^{'} = \{0_v, 2_v\}$ para cada $v \in V(D_m)$. Así aplicando el lema 5 a $\widetilde{\alpha} = (\alpha_v, J_v)_{v\in V(D_m)}$, obtenemos que $d_k(\sigma(D_m, \widetilde{\alpha})) = m$, $g(\sigma(D_m, \widetilde{\alpha})) \geq 4$ y para cada m-coloración acíclica de $\sigma(D_m, \widetilde{\alpha})$, $J^{'} = \bigcup\limits_{v\in V(D_m)} J_v^{'}$ no es monocromático. Además tenemos que como D_m y α_v son núcleo-perfectas entonces, por el Teorema 5, $\sigma(D_m, \widetilde{\alpha})$ es núcleo-perfecta.

Así $\sigma(D_m, \widetilde{\alpha})$ es de la forma:



Ahora tomamos $D \cong D_m$, $\widetilde{\alpha'} = ((\alpha_v', J_v'))_{v\in V(D_m)}$ donde $\alpha_v' \cong \sigma(D_m, \widetilde{\alpha})$, $J_v' = J'$, y proponemos $D_{m+1} \cong \sigma(D, \widetilde{\alpha'})$.

Así $\sigma(D, \widetilde{\alpha'})$ es de la forma:



De esta manera tenemos, por el lema 3, $g(D_{m+1}) \geq 4$ ya que $g(D_m) \geq 4$ y $g(\alpha'_v) \geq 4$ y por el lema 4, $d_k(D_{m+1}) = m+1$, ya que $d_k(D_m) = m$, $\alpha'_v[J'_v]$ es acíclica y $d_k(\sigma(D_m, \widetilde{\alpha})) = m$.

Por otro lado como D_m y $\overrightarrow{C_4}$ son núcleo-perfectas tenemos que, por el Teorema 5, D_{m+1} es núcleo-perfecta. $\|$

5

Conservación de (k, l)-núcleos bajo operaciones en digráficas

En lo que sigue se darán condiciones necesarias y suficientes para la existencia de (k, l)-núcleo en algunas clases especiales de digráficas. Dentro de las cuales la composición y la duplicación de un conjunto de vértices en una digráfica, son las principales.

1. Existencia de (k, l)-núcleos en la composición

Observación: En lo que sigue se tomará $J_v = \alpha_v$ en la definición de composición.

Teorema 7. *Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud menor a k. Sea $\widetilde{\alpha} = ((\alpha_v, \alpha_v))_{v \in V(D)}$ una familia de digráficas dos a dos ajenas. Un subconjunto $N^* \subset V(\sigma(D, \widetilde{\alpha}))$ es k-independiente en $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ si y solo si existe $N \subset V(D)$ k-independiente de D, tal que $N^* = \bigcup_{v \in N} N_v$, $N_v \subset V(\alpha_v)$ y $\forall v \in N$ N_v es k-independiente en α_v.*

Dem. $\Rightarrow$)

Sea N^* k-independiente en la composición $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$. Definamos

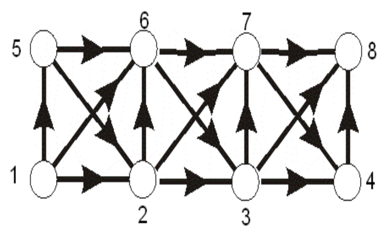
$$N = \{v \in V(D) \mid N^* \cap V(\alpha_v) \neq \phi\}$$

Primero probaremos que N es k-independiente en D. Supongamos por el contrario que existen dos vértices distintos $u, v \in N$ tal que $d_D(u, v) < k$. Como $u, v \in N$, entonces $N^* \cap V(\alpha_u) \neq \phi$ y $N^* \cap V(\alpha_v) \neq$

ϕ. Además de la definición de la composición y del supuesto $d_D(u, v) < k$, se sigue que $d_{\sigma(D,\widetilde{\alpha})}(x, y) < k$ con $x \in N^* \cap V(\alpha_u)$ y $y \in N^* \cap V(\alpha_v)$. Esto significa que N^* no es k-independiente en $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$, contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto N es k-independiente en D.

De la definición del conjunto N se sigue que podemos escribir a N^* de la siguiente manera: $N^* = \bigcup_{v \in N} N_v$ donde, $N_v \subset V(\alpha_v)$ y es claro que para toda $v \in N$ tenemos que N_v es k-independiente en α_v, ya que $N_v \subset N^*$ y N^* es k-independiente en $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$.

Como ejemplo tomemos la siguiente digráfica



que es la digráfica composición de $D = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ trayectoria dirigida y para toda $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tenemos α_{v_i} es:

Si tomamos $N^* = \{1, 8\}$ es 4-independiente en $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$, obtendríamos $N = \{v_1, v_4\}$ que es 4-independiente en D.

$\Leftarrow$)

Sea $N \subset V(D)$ k-independiente en D. Sean N_v k-independiente en α_v para toda $v \in N$. Probaremos que $N^* = \bigcup_{v \in N} N_v$ es k-independiente en $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$. Sea $x, y \in N^*$, $x \neq y$. Supongamos por contradicción que $d_{\sigma(D,\widetilde{\alpha})}(x, y) < k$. De la definición de N^* se desprenden los siguientes casos:

Caso1: $x, y \in N_v$ para alguna $v \in N$.

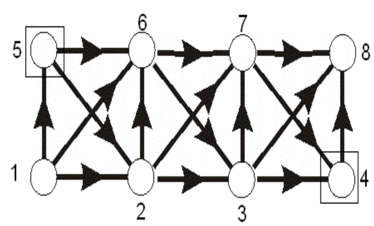
Como N_v es k-independiente en α_v, tenemos que $d_{\alpha_v}(x,y) \geq k$, así por la hipótesis de contradicción, existe una $P = (x, \ldots, z, \ldots, y)$-trayectoria dirigida en $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$, con $z \in V(\alpha_u)$ y $u \neq v$, de longitud menor que k. Por la definición de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$, se sigue que existe un ciclo dirigido $C = (v, \ldots, u, \ldots, v)$ en D de longitud menor que k, contradiciendo nuestra hipótesis.

Caso 2: $x \in N_u$ y $y \in N_v$ con $u \neq v$.

Como $d_{\sigma(D,\widetilde{\alpha})}(x,y) < k$ y de la definición de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ se tiene que $d_D(u,v) < k$ contradiciendo que $u, v \in N$.

De los casos anteriores tenemos que N^* es k-independiente.

En nuestro ejemplo si tomamos a $N = \{v_1, v_4\}$, podemos formar a $N^* = \{4, 5\}$.



$\|$

Teorema 8. *Sean* $N \subset V(D)$, $N_v \subset V(\alpha_v)$ $\forall v \in N$. *Si* N *es* l-*absorbente en* D *y* N_v *es* l-*absorbente en* α_v *para cada* $v \in N$, *entonces* $N^* = \bigcup\limits_{v \in N} N_v$ *es* l-*absorbente en la composición* $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$.

Dem. Supongamos que N es l-absorbente, N_v es l-absorbente en α_v, para cada $v \in N$. Sea $N^* = \bigcup\limits_{v \in N} N_v$ y $x \in V(\sigma(D, \widetilde{\alpha})) \setminus N^*$. Como $x \in V(\sigma(D, \widetilde{\alpha}))$ existe v_0 tal que $x \in V(\alpha_{v_0})$.

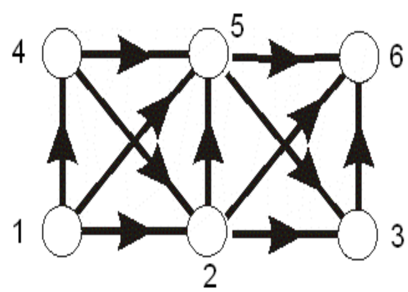
Caso 1: Si $v_0 \in N$, entonces x es l-absorbido por $N_{v_0} \subset N^*$, ya que N_{v_0} es l-absorbente en α_{v_0}.

Caso 2: Si $v_0 \notin N$, tenemos que $d_D(v_0, u) \leq l$ con $u \in N$, ya que N es l-absorbente en D, de esta manera, por la definición de la composición, $d_{\sigma(D,\widetilde{\alpha})}(x, y) \leq l$ para todo $y \in V(\alpha_u)$, en particular $d_{\sigma(D,\widetilde{\alpha})}(x, N_u) \leq l$ con $N_u \subset N^*$, por lo tanto x es l-absorbido por N_u.

Así, hemos probado que N^* es l-absorbente en $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$. ‖

Observación: No es difícil mostrar que la condición de suficiencia en el Teorema 8 no es necesaria para que el conjunto N^* sea l-absorbente en $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$. Por ejemplo, sea $D = P_{l+1}$, la trayectoria dirigida con $l+1$ vértices, con $V(P_{l+1}) = \{v_1, \ldots, v_{l+1}\}$ y $\alpha_{v_i} = P_2$, la trayectoria dirigida con 2 vértices, donde $V(\alpha_{v_i}) = \{x_1^i, x_2^i\}$ para todo $i = 1, \ldots, l+1$. Así $N^* = \{x_1^1, x_2^{l+1}\}$ es l-absorbente en $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$, pero $N^* \cap V(\alpha_{v_1})$ no es l-absorbente en α_{v_1}.

Ejemplo $l = 2$, entonces tenemos que $N^* = \{1, 6\}$



Corolario 4. *Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud menor a k y sea $\widetilde{\alpha} = ((\alpha_v, \alpha_v))_{v \in V(D)}$ una familia de digráficas ajenas. Si $N \subset V(D)$ es un (k,l)-núcleo de D, N_v es un (k,l)-núcleo de α_v para cada $v \in N$, entonces $N^* = \bigcup_{v \in N} N_v$ es un (k,l)-núcleo de la composición $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$.*

Dem. Se sigue de manera inmediata de los teoremas 7 y 8. ‖

Teorema 9. *Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud menor a k y sea $\widetilde{\alpha} = ((\alpha_v, \alpha_v))_{v \in V(D)}$ una familia de digráficas ajenas. Si N^* es un $(k, k-1)$-núcleo de la composición $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$, entonces existe un $N \subset V(D)$ $(k, k-1)$-núcleo de D tal que $N^* = \bigcup_{v \in N} N_v$, $N_v \subset V(\alpha_v)$ y N_v es un $(k, k-1)$-núcleo de α_v para cada $v \in N$.*

Dem. Sea N^* un $(k, k-1)$-núcleo de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$. Por el Teorema 7 tenemos que, $N^* = \bigcup_{v \in N} N_v$, donde $N \subset V(D)$ es k-independiente en D y $N_v \subset V(\alpha_v)$ es k-independiente en α_v para toda $v \in N$. Mostraremos que N es $(k-1)$-absorbente en D. Sea $u \notin V(D) \setminus N$, por lo tanto $N^* \cap V(\alpha_u) = \phi$. Esto significa que si $x \in V(\alpha_u)$, entonces $x \in V(\sigma(D, \widetilde{\alpha})) \setminus N^*$. Como N^* es $(k, k-1)$-núcleo de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$, se tiene que $d_{\sigma(D,\widetilde{\alpha})}(x, N^*) \leq k-1$. Así existe $y \in N^*$ tal que $d_{\sigma(D,\widetilde{\alpha})}(x, y) \leq k-1$. Por lo tanto $y \in V(\alpha_w)$, con $w \in N$. De la definición de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$, se sigue que $d_D(u, v) \leq k-1$, así que u es $(k-1)$-absorbido por N en D.

Ahora probaremos que N_v es $(k-1)$-absorbente en α_v, para toda $v \in N$. Supongamos por lo contrario que existe $u \in V(D)$ tal que N_u no es $(k-1)$-absorbente en α_u. Esto significa que existe $x \in \alpha_u$ tal que $d_{\sigma(D,\widetilde{\alpha})}(x, N_u) > k-1$. Como N^* es $(k-1)$-absorbente en $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$, tenemos que existe $y \in N^* \setminus V(\alpha_u)$ tal que $d_{\sigma(D,\widetilde{\alpha})}(x, y) \leq k-1$. De la definición de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$, obtenemos la desigualdad $d_{\sigma(D,\widetilde{\alpha})}(V(\alpha_u), y) \leq k-1$ y finalmente $d_{\sigma(D,\widetilde{\alpha})}(N_u, y) \leq k-1$, contradiciendo el supuesto que N^* es un $(k, k-1)$-núcleo de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$. Por lo tanto N_v es $(k-1)$-absorbente en α_v para toda $v \in N$. ‖

Corolario 5. *Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud menor a k, y sea $\widetilde{\alpha} = ((\alpha_v, \alpha_v))_{v \in V(D)}$ una familia dos a dos disjunta. $N^* \subset \sigma(D, \widetilde{\alpha})$ es un $(k, k-1)$-núcleo de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ si y solo si existe* *un* $N \subset V(D)$ $(k,k-1)$*-núcleo de* D *tal que* $N^* = \bigcup_{v \in N} N_v$*, donde* $N_v \subset V(\alpha_v)$ *es* $(k,k-1)$*-núcleo en* α_v *para toda* $v \in N$*.*

Dem. Se sigue de corolario 4 y Teorema 9. $\|$

2. Existencia de (k, l)-núcleo en la duplicación

Lema 6. *Sea D^B la duplicación de B, $B \subset V(D)$. Sean $x, y \in B$, $x', y' \in B'$ y $w, z \in V(D) \setminus B$. Entonces*

(1) $d_D(x, y) = d_{D^B}(x, y) = d_{D^B}(x', y') = d_{D^B}(x, y') = d_{D^B}(x', y)$

(2) $d_D(w, z) = d_{D^B}(w, z)$

(3) $d_D(w, x) = d_{D^B}(w, x) = d_{D^B}(w, x')$

(4) $d_D(x, w) = d_{D^B}(x, w) = d_{D^B}(x', w)$

Dem. Primero demostraremos que si $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ es una trayectoria dirigida tal que $l(P) = n$ entonces $l(P'(I)) = n$, donde $P'(I) = (x_0, x_1, \ldots, x'_i, \ldots, x_n)$ es trayectoria dirigida, con $i \in I$, donde $I = \{i \mid x_i \in P \cap B\}$.

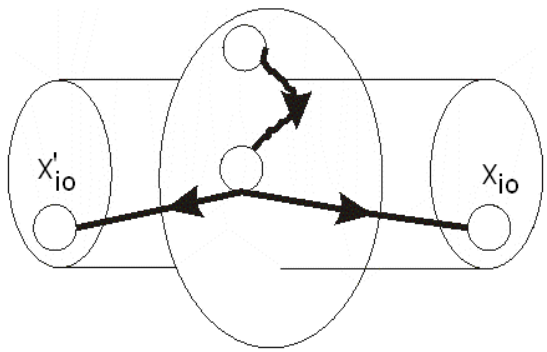
Lo demostraremos por inducción sobre la cardinalidad de I.

Si $|I| = 0$, entonces $P \cap B = \phi$, lo que implica que $P'(I) = P$ por lo tanto $l(P'(I)) = n$.

Supongamos que el resultado se cumple para $|I| \leq m \leq n - 1$, lo mostraremos para $|I| = m + 1$.

Sea $x_{i_0} \in P$ con $i_0 \in I$, entonces tenemos dos casos:

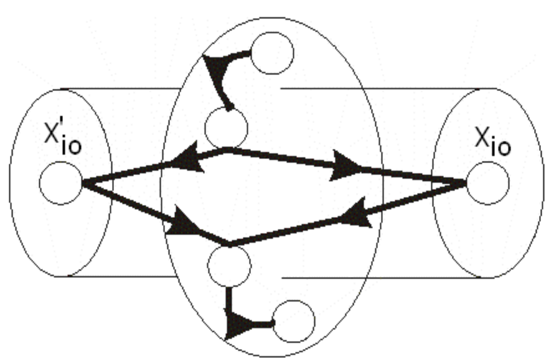
Caso 1: x_{i_0} es un extremo de P.



Supongamos que x_{i_0} es el extremo final i.e $i_0 = n$. Tenemos que $l(P) = l(P_2 = [x_0, P, x_{n-1}]) \cup l(P_1 = (x_{n-1}, x_n))$. Denotando $I = I_1 \cup I_2$, donde $I_1 = \{n\}$ y $I_2 = I \setminus I_1$, tenemos que I_1 corresponde a P_1 y I_2 corresponde a P_2. Además tenemos que $|I_2| = m < |I|$, aplicando la hipótesis de inducción tenemos que $l(P_2) = l(P'_2(I_2))$ y de la definición de D^B, se sigue que $l(x_{n-1}, x_n) = l(x_{n-1}, x'_n)$, por lo tanto $l(P) = l(P_1) + l(P_2) = l((x_{n-1}, x'_n)) + l(P'_2(I_2)) = l(P'(I))$. Por lo tanto $l(P) = l(P')$.

Análogamente se procede si x_{i_0} es el extremo inicial de P.

Caso 2: x_{i_0} no es un vértice extremo de P.



Tenemos que $l(P) = l(P_1 = [x_0, P, x_{i_0-1}]) + l(P_2 = (x_{i_0-1}, x_{i_0}, x_{i_0+1})) + l(P_3 = [x_{i_0+1}, P, x_n])$, tomando $I_1 = \{j \in I | j < i_0\}$, $I_2 = \{i_0\}$, y $I_3 = \{j \in I \mid j > i_0\}$ tenemos que $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, de esta manera I_1 corresponde a P_1, I_2 corresponde a P_2 y I_3 corresponde a P_3. Además tenemos que $|I_1| < |I| \leq m$ y $|I_2| < |I| \leq m$, aplicando la hipótesis de inducción a estos conjuntos tenemos que $l(P_1(I_1)) = l(P'_1(I_1))$ y $l(P_3(I_3)) = l(P'_3(I_3))$, por otro lado de la definición de D^B se sigue que $l(P_2) = l((x_{i_0-1}, x_{i_0}, x_{i_0+1})) = l((x_{i_0-1}, x'_{i_0}, x_{i_0+1})) = l(P'_2(I_2))$. Por lo tanto $l(P) = l(P_1) + l(P_2) + l(P_3) = l(P'_1(I_1)) + l(P'_2(I_2)) + l(P'_3(I_3)) = l(P')$.

Por lo tanto $l(P) = l(P'(I))$.

Como la distancia entre dos vértices es la longitud mínima de las trayectorias dirigidas entre ellos, entonces de la definición de D^B y dado que las longitudes se preservan, se siguen las igualdades del lema. $\|$

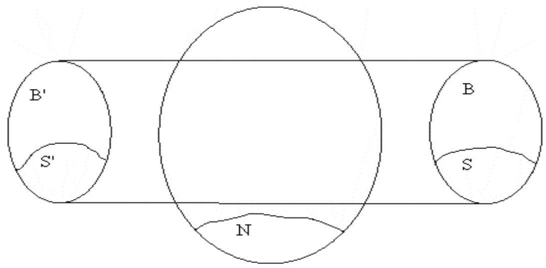
Corolario 6. *Sea D^B la duplicación de B, con $B \subset V(D)$. Si $x, y \in V(D)$, entonces $d_D(x, y) = d_{D^B}(x, y)$.*

Dem. Se sigue de manera inmediata del lema 6. $\|$

Lema 7. *Sea $B \subset V(D)$. Si $N^* \subset V(D^B)$ es k-independiente en la duplicación D^B, entonces $N^* \cap V(D) \cup S$ es k-independiente en D, donde S es el conjunto original de $N^* \cap B'$.*

Dem. Supongamos que $N^* \subset V(D^B)$ es k-independiente en D^B y S es el conjunto original de $S' = N^* \cap B'$.

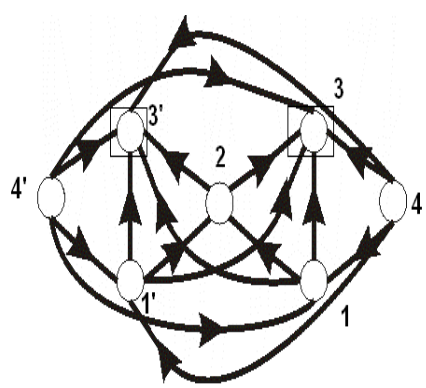
Denotemos $N = N^* \cap V(D)$.



Es claro que N, S' y S son k-independientes en D^B, ya que N^* es k-independiente en D^B, y como $D \subset D^B$ tenemos que, N y S son k-independientes en D.

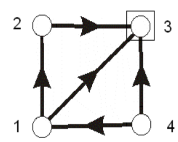
Para probar que $N \cup S$ es k-independiente en D, es suficiente probar que $d_D(N,S) \geq k$ y $d_D(S,N) \geq k$. Sea $x \in N \setminus S$ y $y \in S \setminus N$, por el lema 6 tenemos que $d_D(x,y) = d_{D^B}(x,y')$ y $d_D(y,x) = d_{D^B}(y',x)$ con $y' \in S' \setminus (N \cap B)'$. Como N^* es k-independiente en D^B, entonces $d_D(x,y^{'}) \geq k$ y $d_D(y^{'},x) \geq k$, lo que implica que $d_D(N,S) \geq k$ y $d_D(S,N) \geq k$. Por lo tanto $N \cup S$ es k-independiente en D. $\|$

Ejemplo: Tomando a D^B como:



con $N^* = \{3', 3\}$ como conjunto $k-$independiente tendríamos que

D es:



Teorema 10. *Sea D una digráfica y $B \subset V(D)$. Si N^* es un (k,l)-núcleo de la duplicación D^B, entonces $N^* \cap V(D) \cup S$ es (k,l)-núcleo de D, donde S es el conjunto original de $N^* \cap B'$.*

Dem. Supongamos que N^* es un (k,l)-núcleo de la duplicación D^B. Del lema anterior se sigue que N^* es k-independiente.

Ahora probaremos que $N^* \cap V(D) \cup S$ es l-absorbente. Sea $x \in V(D) \setminus (N^* \cup S)$. Como N^* es l-absorbente en D^B, tenemos que $d_{D^B}(x, N^*) \leq l$. Esto significa que existe $y \in N^*$ tal que $d_{D^B}(x,y) \leq l$, de aquí tenemos los siguientes casos:

Caso 1: Si $x \in B$.

Si $y \in (N^* \cap V(D))$, entonces del Corolario 6 se sigue que $d_D(x,y) = d_{D^B}(x,y) \leq l$.

Si $y \in (N^* \cap B')$, entonces por la condición (3) del lema 6 tenemos que $d_D(x,z) = d_{D^B}(x,y) \leq l$, donde $z \in S$ es el vértice original de y.

Caso 2: Si $x \in V(D) \setminus B$.

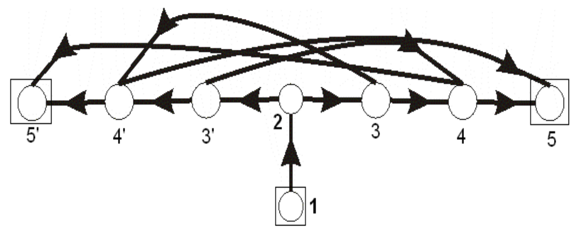
Si $y \in (N^* \cap V(D))$, entonces del Corolario 6 se sigue que $d_D(x,y) = d_{D^B}(x,y) \leq l$.

Si $y \in (N^* \cap B')$, entonces por la condición (3) del lema 6 tenemos que $d_D(x,z) = d_{D^B}(x,y) \leq l$, donde $z \in S$ es el vértice original de y.

Finalmente $d_D(x, N^* \cap V(D) \cup S) \leq l$, lo que implica que $N^* \cap V(D) \cup S$ es l-absorbente en D. $\|$

Ejemplo:

Sea D^B la siguiente digráfica:

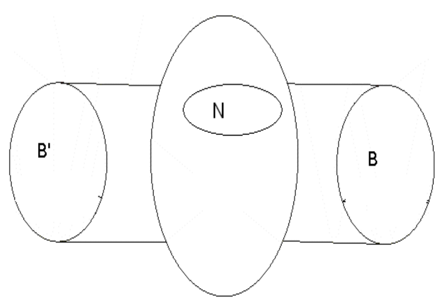


con $N^* = \{1, 5, 5'\}$, entonces $N = \{1, 5\}$.

Lema 8. *Sea D una digráfica, en la cual existe $B \subset V(D)$ tal que D no tenga ciclos dirigidos de longitud menor a k que incluyan vértices de B. Sea D^B la duplicación de B. Si N es k-independiente en D, entonces $N \cup (N \cap B)'$ es k-independiente en D^B.*

Dem. Supongamos que D es una digráfica, en la cual existe $B \subset V(D)$ tal que D no tenga ciclos dirigidos de longitud menor a k que incluyan vertices de B. Sea $N \subset V(D)$. Supongamos que $N \cup (N \cap B)'$ no es k-independiente en D^B. Consideremos dos casos:

Caso 1: Si $N \cap B = \phi$, entonces $N \cup (N \cap B)' = N$. De la suposición el conjunto N no es k-independiente en D^B, por lo tanto N no es k-independiente en D.

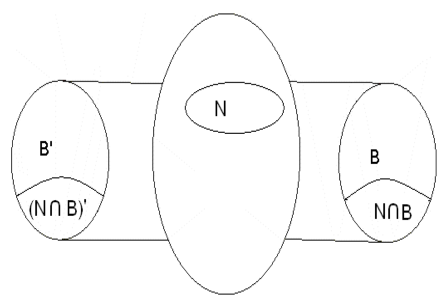


Caso 2: Si $N \cap B \neq \phi$, entonces existe dos vértices distintos $x, y \in N \cup (N \cap B)'$ tal que $d_{D^B}(x, y) < k$.

Si $x, y \in N$, entonces del corolario 6 se obtenemos que $d_D(x,y) = d_{D^B}(x,y) < k$

Si $x, y \in (N \cap B)'$, entonces de la condición (1) del lema 6 obtenemos que $d_D(z,w) = d_{D^B}(x,y) < k$, donde $z, w \in N \cap B$ son las copias de los vértices x, y respectivamente.

Si $x \in N$ y $y \in (N \cap B)'$, entonces por el lema 6 tenemos que $d_D(x,w) = d_{D^B}(x,y) < k$, donde $w \in N \cap B$ es el vértice original de y. Además tenemos que $w \neq x$, ya que de otra manera existiría un ciclo dirigido de longitud menor a k incluyendo un vértice de B, una contradición con la hipótesis.



De lo anterior tenemos que N no es k-independiente en D. ||

Teorema 11. *Sea D una digráfica, en la cual existe $B \subset V(D)$ tal que no hay ciclos dirigidos de D de longitud menor a k que incluyan vértices de B. Sea D^B la duplicación de B. Si N es un (k,l)-núcleo de D, entonces $N \cup (N \cap B)'$ es un (k,l)-núcleo de D^B.*

Dem. Supongamos que N es (k,l)-núcleo en D. Mostraremos que $N \cup (N \cap B)'$ es (k,l)-núcleo en D^B.

Si $N \cap B = \phi$, entonces $(N \cap B)' = \phi$. Por lo tanto $N \cup (N \cap B)' = N$. Como N es (k,l)-núcleo en D, entonces $d_D(x,y) \geq k$ y $d_D(z,N) \leq l$ $\forall x, y \in N$ y $z \in V(D) \setminus N$. Así que del lema 6 se sigue que $d_{D^B}(x,y) \geq$

k, $d_{D^B}(z,N) \leq l$ y $d_{D^B}(z',N) \leq l$, donde z' es la copia del vértice z, si $z \in B \setminus N$. Por lo tanto $N \cup (N \cap B)'$ es un (k,l)-núcleo de D^B.

Si $N \cap B \neq \phi$. Del lema 8 tenemos que $N \cup (N \cap B)'$ es k-independiente en D^B. Ahora probaremos que es l-absorbente en D^B. Como $V(D^B) \setminus (N \cup (N \cap B)') = (V(D) \setminus N) \cup (B' \setminus (N \cap B)')$, se tienen los siguientes casos:

*Caso*1: Si $x \in V(D) \setminus N$.

Entonces x es l-absorbido por N en D, ya que N es (k,l)-núcleo de D. Por lo tanto x es l- absorbido por N en D^B.

Caso 2: Si $x \in B' \setminus (N \cap B)'$.

Entonces su original $y \in B \setminus N$ es l-absorbido por N en D. Por lo tanto $d_D(y,z) \leq l$ con $z \in N$.

Si $z \in N \cap B$, entonces de la condición (1) del lema 6 tenemos que $d_{D^B}(x,z') = d_D(y,z) \leq l$, donde $z' \in (N \cap B)'$, lo que significa que $d_{D^B}(x,(N \cap B)') \leq l$.

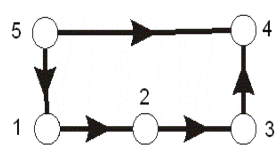
Si $z \in N \cup (V(D) \setminus B)$, entonces de la condición (3) del lema 6, tenemos que $d_{D^B}(x,z) \leq l$. Así que $d_{D^B}(x,N) \leq l$.

Por lo tanto x es l-absorbido por $N \cup (N \cap B)'$ en D^B.

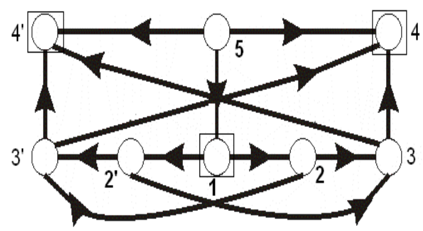
Por lo tanto $N \cup (N \cap B)'$ es (k,l)-núcleo en D^B. $\|$

Ejemplo:

Tomemos a D como en la figura siguiente con $N = \{1,4\}$ como $(3,2)$-núcleo, :



entonces D^B es:



con $\{1, 4, 4'\}$ como $(3, 2)$-núcleo.

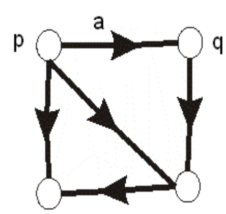
Corolario 7. *Sea D una digráfica, en la cual existe $B \subset V(D)$ tal que D no tiene ciclos dirigidos de longitud menor a k que incluyan vértices de B. Entonces D^B tiene (k,l)-núcleo si y solo si D tiene (k,l)-núcleo.*

Dem. Se sigue de los teoremas 10 y 11. $\|$

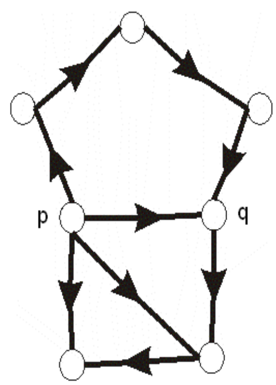
3. Existencia de $(k, k-1)$-núcleo en la digráfica $D(a, P_m)$

Definición 29. Sean D una digráfica y P_m una trayectoria dirigida vista como digráfica para $m \geq 2$, donde $V(P_m) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ y $V(D) \cap V(P_m) = \phi$. Si $a = \overrightarrow{pq}$ es una flecha de D, entonces $D(a, P_m)$es la digráfica tal que $V(D(a, P_m)) = V(D) \cup V(P_m)$ y $A(D(a, P_m)) = A(D) \cup A(P_m) \cup \{\overrightarrow{px_1}, \overrightarrow{x_m q}\}$.

Ejemplo: P_2 y D como en la figura:



entonces $D(a, P_2)$ es:



Teorema 12. *Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud menor a k. Sea $a = \overrightarrow{pq} \in A(D)$ y $n \geq 1$. N^* es un $(k, k-1)$-núcleo de la digráfica $D(a, P_{nk})$ si y solo si existe un $(k, k-1)$-núcleo N de D tal que $N^* = N \cup N'$, donde $N' = \{x_{1+s}, x_{1+k+s}, \ldots, x_{1+(n-1)k+s}\} \subset V(P_{nk})$ y $s = d_D(q, N)$.*

Dem. $\Rightarrow$)

Sea $a = \overrightarrow{pq} \in A(D)$ y sea N^* un $(k, k-1)$-núcleo de la digráfica $D(a, P_{nk})$. Probaremos que $N^* \cap V(P_{nk}) = N'$ y $N^* \cap V(D) = N$ es $(k, k-1)$-núcleo de D. Sea $s = d_D(q, N)$. Es fácil ver que $N^* \cap V(P_{nk}) = \{x_{1+s}, x_{1+k+s}, \ldots, x_{1+(n-1)k+s}\} = N'$, ya que $s < k-1$.

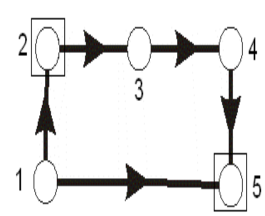
Es claro que N y N' son k-independientes en $D(a, P_n k)$, y por lo tanto N es k-independiente en D, ya que $D \subset D(a, P_{nk})$. Sólo falta mostrar que N es $(k-1)$-absorbente en D. Sea $x \in V(D(a, P_n k)) \setminus N^*$. Como N^* es $(k, k-1)$-núcleo en $D(a, P_{nk})$, se cumple que, $d_{D(a,P_{nk})}(x, N^*) \leq k-1$. Así es suficiente probar que si x es $(k-1)$-absorbido por N' en $D(a, P_{nk})$, entonces x es $(k-1)$-absorbido por N en D. Sea x $(k-1)$-absorbido en $D(a, P_{nk})$ por un vértice de N'. Por lo tanto $d_{D(a,P_{nk})}(x, x_{1+s}) \leq k-1$. Al mismo tiempo $d_{D(a,P_{nk})}(x, x_{1+s}) = d_D(x, p) + d_{D(a,P_{nk})}(p, x_{1+s}) = d_D(x, p) + s + 1$. Por lo tanto $d_D(x, p) \leq k - s - 2$. Por otro lado de la suposición tenemos que $s = d_D(q, N)$. Así tenemos que $d_D(x, N) \leq d_D(x, p) + d_D(p, q) + d_D(q, N) = d_D(x, p) + 1 + s \leq k-1$, lo que significa que x es $(k-1)$-absorbido por N en D. De lo anterior se sigue que N es un $(k, k-1)$-núcleo de D.

$\Leftarrow$)

Sea N un $(k, k-1)$-núcleo de D y $N' = \{x_{1+s}, x_{1+k+s}, \ldots, x_{1+(n-1)k+s}\} \subset V(P_{nk})$, donde $s = d_D(q, N)$. Probaremos que $N \cup N'$ es un $(k, k-1)$-núcleo de $D(a, P_{nk})$. Como N es un $(k, k-1)$-núcleo de D, entonces $\forall x \in V(D) \setminus N$ es $(k-1)$-absorbido por N en D, lo que significa que x es $(k-1)$-absorbido por $N \cup N'$ en $D(a, P_{nk})$, ya que $D \subset D(a, P_{nk})$. Ahora falta probar que $\forall x_i \in V(P_{nk}) \mid x_i \notin N \cup N'$ son $(k-1)$-absorbidos por $N \cup N'$ en $D(a, P_{nk})$. Sea $x_i \in V(P_{nk}) \setminus N'$. Si $1 \leq i \leq 1 + (n-1)k + s$, entonces $d_{P_{nk}}(x_i, N) \leq k-1$. Por lo tanto $d_{D(a,P_{nk})}(x_i, N \cup N') \leq k-1$. Si $2 + (n-1)k + s \leq i \leq nk$, entonces $d_{D(a,P_{nk})}(x_i, N) = d_{P_{nk}}(x_i, q) = nk + 1 - i + s \leq nk + 1 -$

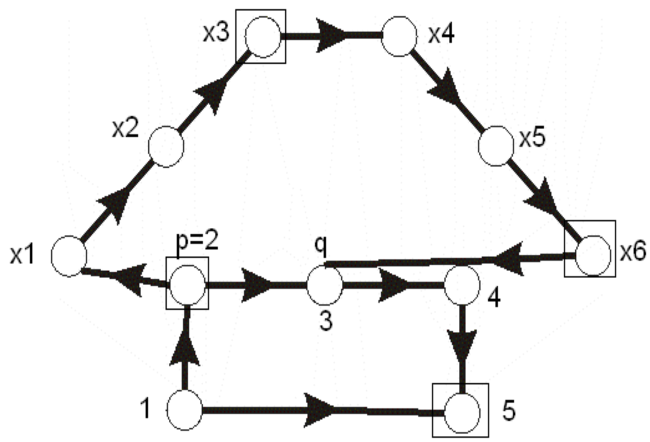
$(2+(n-1)k+s)+s = k-1$. Por lo tanto $N \cup N'$ es $(k-1)$-absorbente en $D(a,P_{nk})$. Mas aún, de la definición de $D(a,P_{nk})$ se sigue que N y N' son k-independientes en $D(a,P_{nk})$. Así para probar que $N \cup N'$ es k-independiente en $D(a,P_{nk})$ es suficiente mostrar que $d_{D(a,P_{nk})}(N',N) \geq k$ y $d_{D(a,P_{nk})}(N,N') \geq k$. Como $d_D(q,N) = s$, entonces $d_{D(a,P_{nk})}(x_{1+(n-1)k+s},N) = d_{P_{nk}}(x_{1+(n-1)k+s},q) + d_D(q,N) = (k-s)+s = k$. Por lo tanto $d_{D(a,P_{nk})}(N',N) \geq k$. Ahora probaremos que $d_{D(a,P_{nk})}(N,N') \geq k$. Supongamos lo contrario que $d_{D(a,P_{nk})}(N,N')$ $< k$. Por lo tanto existe un vértice $y \in N$ tal que existe una trayectoria dirigida $(y,\dots,p,\dots,x_{1+s})$ de longitud menor a k en D. Esto significa que existe una trayectoria dirigida $(y,\dots,p)$ de longitud menor a $k-s-1$ en D. Al mismo tiempo, como $s = d_D(q,N)$, existe $z \in N$ tal que $d_D(q,z) = s$. Así concluimos que si $y \neq z$, entonces N no es k-independiente en D y si $y = z$, entonces existe un ciclo dirigido $(y,\dots,p,q,\dots,z=y)$ en D de longitud menor a k, contradiciendo la hipótesis. Finalmente tenemos que $d_{D(a,P_{nk})}(N',N) \geq k$. De lo anterior tenemos que $N \cup N'$ es un $(k,k-1)$-núcleo en $D(a,P_{nk})$. $\|$

Ejemplo: Tomando $n=2$ y $k=3$ consideremos las digráficas P_6 y como D la de la figura:



tenemos que D tiene $(3,2)$-núcleo, a saber $N = \{2,5\}$.

De esta manera $D(a, P_6)$ es la digráfica:



con $(3, 2)$-núcleo $N^* = N \cup N'$ con $N' = \{x_3, x_6\}$.

4. Digráficas (k,l)-núcleo perfectas

Proposición 2. *Si D es una digráfica (k,l)-núcleo perfecta, entonces toda subdigráfica inducida de D es (k,l)-núcleo perfecta.*

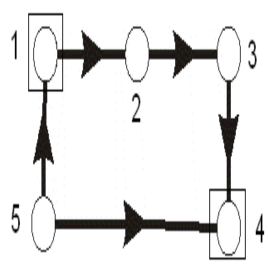
Dem. Sean D una digráfica (k,l)-núcleo perfecta y $B \subset V(D)$.

P.d. $D[B]$ tiene (k,l)-núcleo y $\forall C \subset V(B)$ $B[C]$ tiene (k,l)-núcleo.

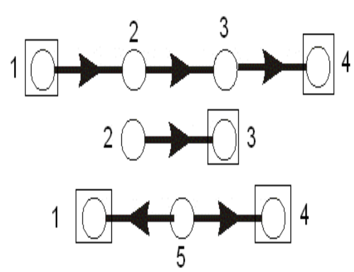
Como $B \subset V(D)$, entonces $D[B]$ tiene (k,l)-núcleo, ya que D es (k,l)-núcleo perfecta.

Sea $C \subset V(B)$, como $B \subset V(D)$ tenemos que, $D[C] = B[C]$ entonces C es una subdigráfica inducida de D, por lo tanto tiene (k,l)-núcleo. $\|$

Ejemplo: tomando a D como en la figura con $(3,2)$-núcleo:



y algunas de sus subdigráficas serian:



todas con $(3,2)$-núcleo.

Proposición 3. *La unión disjunta de D_1 y D_2 es una digráfica (k,l)-núcleo perfecta si y solo si D_1, D_2 son digráficas (k,l)-núcleo perfectas.*

Dem. $\Rightarrow$)

Como la unión es (k,l)-núcleo perfecta, entonces $(D_1 \cup D_2)[V(D_1)] \cong D_1$ y $(D_1 \cup D_2)[V(D_2)] \cong D_2$, por la proposición anterior, son (k,l)-núcleo perfectas, de donde se sigue que D_1 y D_2 son (k,l)-núcleo perfectas.

$\Leftarrow$)

Sea $Y \subseteq D_1 \cup D_2$.

Si $Y \subseteq D_i$ para alguna $i \in \{1,2\}$, entonces $(D_1 \cup D_2)[Y] \cong D_i[Y]$ y como D_i son (k,l)-núcleo perfectas, entonces $(D_1 \cup D_2)[Y]$ es (k,l)-núcleo perfecta.

Si $Y \cap D_1 \neq \phi$ y $Y \cap D_2 \neq \phi$, denotemos $Y_1 = Y \cap D_1$ y $Y_2 = Y \cap D_2$. Tenemos que $(D_1 \cup D_2)[Y_1] \cong D_1[Y_1]$, $(D_1 \cup D_2)[Y_2] \cong D_2[Y_2]$ y además tenemos que $D_1[Y_1]$ y $D_2[Y_2]$ son (k,l)-núcleo perfectas, así sean N_1, N_2 sus (k,l)-núcleos respectivamente.

Afirmamos que $N_1 \cup N_2$ es (k,l)-núcleo de $(D_1 \cup D_2)[Y]$.

Primeros probaremos que $N_1 \cup N_2$ es k-independiente en $(D_1 \cup D_2)[Y]$.

Como N_1 es k-independiente en $D_1[Y_1]$ y N_2 es k-independiente en $D_2[Y_2]$, basta probar que $d_{D[Y]}(N_1, N_2) \geq k$ y $d_{D[Y]}(N_2, N_1) \geq k$. Sea $x \in N_1$, $y \in N_2$. De la definición de $D_1 \cup D_2$ tenemos que no hay trayectorias dirigidas de D_1 a D_2, por lo tanto se tiene por vacuidad que $d_{D[Y]}(x,y) \geq k$, por lo tanto $d_{D[Y]}(N_1, N_2) \geq k$. Análogamente se muestra que $d_{D[Y]}(N_2, N_1) \geq k$.

Por lo tanto $N_1 \cup N_2$ es k-independiente en $(D_1 \cup D_2)[Y]$.

Ahora mostraremos que $N_1 \cup N_2$ es l-absorbente en $(D_1 \cup D_2)[Y]$.

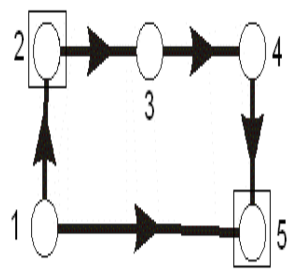
Sea $z \in V((D_1 \cup D_2)[Y]) \setminus N_1 \cup N_2$.

Así $z \in D_1[Y_1]$ ó $z \in D_2[Y_2]$.

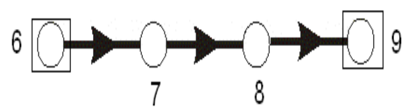
Si $z \in D_1[Y_1]$, como N_1 es l-absorbente en $D_1[Y_1]$, entonces $d_{D_1[Y_1]}(z, N_1) \leq l$ lo que implica que $d_{(D_1 \cup D_2)[Y]}(z, N_1) \leq l$, de donde se tiene que $d_{(D_1 \cup D_2)[Y]}(z, N_1 \cup N_2) \leq l$. De manera análoga se prueba cuando $z \in D_2[Y_2]$. Por lo tanto $N_1 \cup N_2$ es l-absorbente en $(D_1 \cup D_2)[Y]$.

Por lo tanto $D_1 \cup D_2$ es (k, l)-núcleo perfecta. $\|$

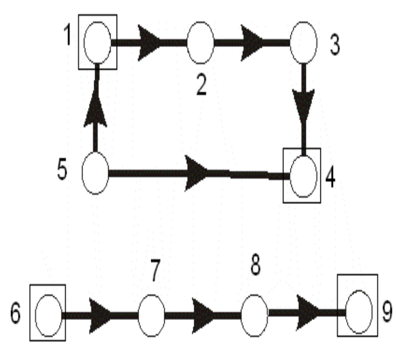
Ejemplo: Tomando nuevamente D_1 como:



que tiene $(3, 2)$-núcleo $\{2, 5\}$ y D_2 con $(3, 2)$-núcleo $\{6, 9\}$ como:



tenemos que $D_1 \cup D_2$ es:



con $(3,2)$-núcleo $\{2,5,6,9\}$.

Teorema 13. *Sea D una digráfica, en la cual existe $B \subset V(D)$ tal que D no tiene ciclos dirigidos de longitud menor a k que incluyan vértices de B. Entonces la duplicación D^B es (k,l)-núcleo perfecta si y solo si D es (k,l)-núcleo perfecta.*

Dem. $\Rightarrow$)

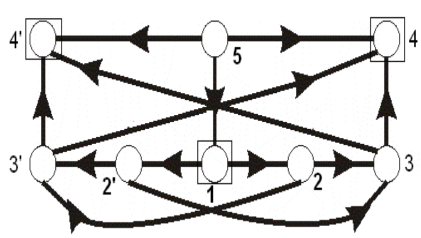
Si la duplicación D^B es (k,l)-núcleo perfecta, entonces de la proposición 2, la subdigráfica inducida por $V(D)$, $D^B[V(D)]$, es (k,l)-núcleo perfecta, y de la definición de D^B, es isomorfa a D. Por lo tanto D es (k,l)-núcleo perfecta.

$\Leftarrow$)

Sea D una digráfica (k,l)-núcleo perfecta, en la cual existe $B \subset V(D)$ tal que D no tiene ciclos dirigidos de longitud menor a k que incluyan vértices de B. Sea $Y \subseteq V(D^B)$. Probaremos que $D^B[Y]$ tiene (k,l)-núcleo.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo: Nuevamente tomemos a D^B como en la figura y D la digráfica inducida por los vértices $\{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{1,5\}$:



con $\{1,4,4'\}$ como $(3,2)$-núcleo.

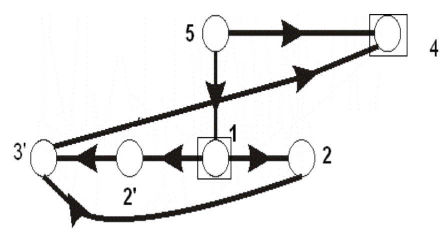
Si $Y \subseteq V(D)$ ó $Y \subseteq B'$, entonces $D^B[Y] \cong D[Y]$ y como D es (k,l)-núcleo perfecta entonces $D[Y]$ tiene (k,l)-núcleo, por lo tanto $D^B[Y]$ lo tiene.

Ahora supongamos que $Y \cap V(D) \neq \phi$ y $Y \cap B' \neq \phi$ y denotemos $Y_D = Y \cap V(D)$, $Z' = Y \cap B'$. Así $Y = Y_D \cup Z'$.

Como D es (k,l)-núcleo perfecta, entonces la subdigráfica inducida $D[Y_D \cup Z]$ tiene (k,l)-núcleo, denotémoslo por N. Sea $K = N \cap Z$ y $K' = (N \cap Z)'$ la copia.

Ahora mostraremos que $N^* = (N \cap Y_D) \cup K'$ es un (k,l)-núcleo de $D^B[Y]$.

En nuestro ejemplo, si tomamos $Y = \{5,1,2,2',3',4\}$ la subdigráfica inducida sería:



que tiene a $\{1,4\}$ como $(3,2)$-núcleo.

Continuando con la prueba, primero mostraremos que N^* es l-absorbente en $D^B[Y]$.

Sea $x \in V(D^B[Y]) \setminus N^*$. Como $V(D^B[Y]) \setminus N^* = Y \setminus N^* = (Y_D \cup Z') \setminus N^* = (Y_D \setminus N^*) \cup (Z' \setminus N^*)$, consideraremos dos casos:

Caso 1: Si $x \in Y_D \setminus N^*$.

Entonces $d_{D[Y_D \cup Z]}(x,N) \leq l$, ya que N es l-absorbente en $D[Y_D \cap Z]$. Esto significa que existe $P = (x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y)$ una trayectoria dirigida de longitud menor o igual a l en la digráfica $D[Y_D \cap Z]$, con $y \in N$. Tomando $P'(I) = (x_0, \ldots, x_i', \ldots, x_n = y)$ trayectoria dirigida, con $i \in I$ y $I = \{i \mid x_i \in V(P) \cap Z\}$, tenemos una trayectoria dirigida de longitud menor o igual a l, con $y \in N^*$, por lo tanto $d_{D^B[Y]}(x, N^*) \leq l$.

Caso 2: $x \in Z' \setminus N^* = Z' \setminus K'$ y $z \in Z$ es el vértice original de x.

Entonces $d_{D[Y_D \cup Z]}(z, N) \leq l$, ya que N es l-absorbente en $D[Y_D \cap Z]$. De manera análoga al caso 1, tomando $P = (z = x_0, x_1, \ldots, x_n = y)$ y $P'(I) = (x = x'_0, \ldots, x'_i, \ldots, x_n = y)$, obtenemos que $d_{D[Y]}(x, N^*) \leq l$.

De los casos anteriores concluimos que N^* es l-absorbente en $D^B[Y]$.

Ahora probaremos que N^* es k-independiente en $D^B[Y]$.

Como N es k-independiente en $D[Y_D \cup Z]$ y de la definición de D^B, tenemos que, $N \cap Y_D$ y K son k-independientes en $D^B[Y_D \cup Z]$.

Supongamos que $N \cap Y_D$ (respectivamente K') no es k-independiente en $D^B[Y]$. Esto significa que existe $P = (x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y)$ una trayectoria dirigida en $D^B[Y]$ de longitud menor a k, con $x, y \in N \cap Y_D$ (respectivamente $x, y \in K'$). Tomando $P'(I) = (x_0, \ldots, x'_i, \ldots, x_n)$ trayectoria dirigida, con $i \in I$ y $I = \{i \mid x_i \in V(P) \cap Z'\}$, de x a y (respectivamente de w a z, donde w, z son los vértices originales de x y y, y $w, z \in K$) en la digráfica $D[Y_D \cup Z]$ de longitud menor a k contradiciendo que $N \cap Y_D$ y K son k-independientes en $D^B[Y_D \cup Z]$. Por lo tanto $N \cap Y_D$ y K' son k-independientes en $D^B[Y]$.

Como $N^* = (Y_D \cap N) \cup K'$ sólo falta mostrar que $d_{D^B[Y]}(N \cap Y_D, K') \geq k$ y $d_{D^B[Y]}(K', N \cap Y_D) \geq k$. Sean $x \in N \cap Y_D$ y $y' \in K'$. Si $x \in B \cap N \cap Y_D$, entonces existe su copia x'. Como los vértices x', y' no son necesariamente distintos, consideraremos dos casos:

Caso 1: Sea $x \in B \cap N \cap Y_D$ y $x' \neq y'$.

Si $d_{D^B[Y]}(x, y') < k$, entonces existe $P = (x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y')$ una trayectoria dirigida de longitud menor a k en $D^B[Y]$. Tomando $P'(I) = (x_0, \ldots, x'_i, \ldots, x_n = y)$ trayectoria dirigida, con $i \in I$ y $I = \{i \mid x_i \in V(P) \cap Z'\}$, tenemos una trayectoria dirigida de longitud menor k del vértice $x \in N \cap Y_D$ a $y \in K = N \cap Z$ en $D[Y_D \cup Z]$, contradiciendo que N es un (k,l)-núcleo de $D[Y_D \cup Z]$. Por lo tanto $d_{D^B[Y]}(x, y') \geq k$. De manera análoga se prueba que $d_{D^B[Y]}(y', x) \geq k$.

Caso 2: Sea $x \in B \cap N \cap Y_D$ y $x' = y'$.

Esto implica que $d_{D^B[Y]}(x, y') \geq k$ y $d_{D^B[Y]}(y', x) \geq k$. De lo contrario existiria un ciclo dirigido en D con longitud menor a k que incluiría vértices de B, contradiciendo la hipótesis del teorema.

Caso 3: $x \notin B$. Se demuestra de manera análoga al caso 1.

De los casos anteriores tenemos que N^* es k-independiente en $D^B[Y]$ y finalmente N^* es (k,l)-núcleo de $D^B[Y]$.

Por lo tanto D^B es (k,l)-núcleo perfecta. $\|$

De la definición de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ se sigue el siguiente resultado:

Proposición 4. *En $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ toda subdigráfica inducida tiene la forma:*

(1) *la composición $\sigma(D_0, \widetilde{\beta})$, donde D_0 es una subdigráfica inducida de D $\widetilde{\beta}$ es una familia de digráficas $(\beta_v)_{v \in V(D_0)}$, tal que β_v son subdigráficas de α_v, $v \in V(D_0)$.*

(2) *una subdigráfica inducida de α_v para alguna $v \in V(D)$ o*

(3) *la unión disjunta de digráficas de (1) y (2).*

Teorema 14. *Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud menor a k y $\widetilde{\alpha} = (\alpha_v, \alpha_v)_{v \in V(D)}$ una familia de digráficas ajenas dos a dos. Entonces la composición $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ es (k,l)-núcleo perfecta si y solo si D y α_v son (k,l)-núcleo perfectas $\forall v \in V(D)$.*

Dem. $\Rightarrow$)

Como $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ es (k,l)-núcleo perfecta, entonces la digráfica $\sigma(D, \widetilde{\alpha})[V(\alpha_v)]$ es (k,l)-núcleo perfecta, pero $\sigma(D, \widetilde{\alpha})[V(\alpha_v)] \cong \alpha_v$, por lo tanto α_v es (k,l)-núcleo perfecta.

Ahora consideremos $B \subset V(\sigma(D, \widetilde{\alpha}))$ tal que $B \cap \alpha_v = \{x_v\}$ para cada $v \in V(D)$. Así de la definición de la composición $\sigma(D, \widetilde{\alpha})[B] \cong D$

y de la proposición 2, $\sigma(D,\widetilde{\alpha})[B]$ es (k,l)-núcleo perfecta, por lo tanto D es (k,l)-núcleo perfecta.

$\Leftarrow$)

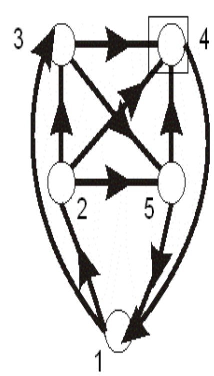
Sea D y α_v digráficas (k,l)-núcleo perfectas $\forall v \in V(D)$.

Sean $Y \subset V(\sigma(D,\widetilde{\alpha}))$, $I = \{v \in V(D) \mid Y \cap V(\alpha_v) \neq \phi\}$.

De esta manera tenemos que, por la proposición anterior $\sigma(D,\widetilde{\alpha})[Y]$ es como en (1), (2) o (3). Así $\sigma(D,\widetilde{\alpha})[Y] = \sigma(D_0,\widetilde{\beta})$, con D_0 y (β_v) subdigráficas de D y α_v respectivamente, para cada $v \in V(D_0)$. Como D y α_v son digráficas (k,l)-núcleo perfectas $\forall v \in V(D)$, entonces D_0 y (β_v) son (k,l)-núcleo perfectas para cada $v \in V(D)$, por lo tanto $\sigma(D,\widetilde{\alpha})[Y] \cong \sigma(D_0,\widetilde{\beta})$ tiene (k,l)-núcleo.

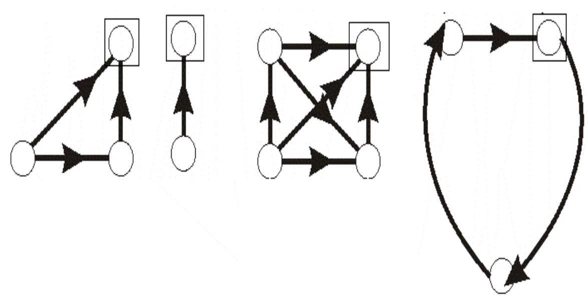
Por lo tanto $\sigma(D,\widetilde{\alpha})$ es (k,l)-núcleo perfecta. $\|$

Ejemplo: Sea D el ciclo dirigido de longitud 3, con vértices $\{1,2,3\}$ y sean α_1, α_2 la digráfica P_2 y α_3 un vértice aislado, todas son $(3,2)$-núcleo perfectas. Entonces $\sigma(D,\widetilde{\alpha})$ es:



que como $(3,2)$-núcleo tiene al conjunto $\{4\}$. Además es $(3,2)$-núcleo perfecta.

Ejemplos de subdigráficas serían:



todas con $(3, 2)$-núcleo en los recuadros.

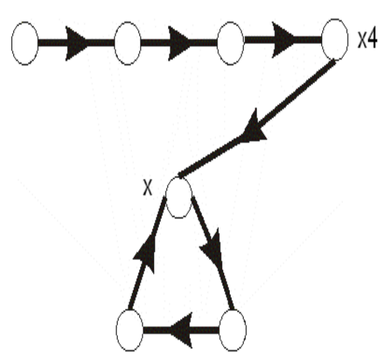
Definición 30. Sea D una digráfica y P_m una trayectoria dirigida, para $m \geq 2$, donde $V(P_m) = \{x_1, \ldots, x_m\}$ y $V(D) \cap V(P_m) = \phi$. Sea $x \in V(D)$, definimos las digráficas $D(x^+, P_m)$ y $D(x^-, P_m)$ como sigue:

$V(D(x^+, P_m)) = V(D(x^-, P_m)) = V(D) \cup V(P_m)$ y

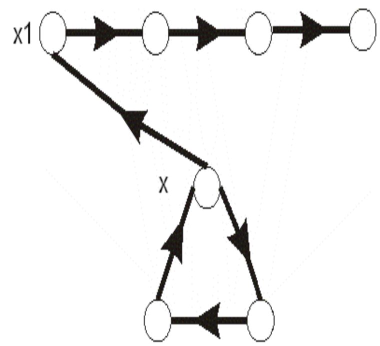
$F(D(x^+, P_m)) = F(D) \cup F(P_m) \cup (\overrightarrow{xx_1})$

$F(D(x^-, P_m)) = F(D) \cup F(P_m) \cup (\overrightarrow{x_mx})$.

Ejemplo: Sea D el ciclo dirigido de longitud 3 y P_4. Entonces $D(x^-, P_4)$ es:



y $D(x^+, P_4)$ es:



De la definición de $D(x^+, P_m)$ y $D(x^-, P_m)$ obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 5. *Toda subdigráfica inducida de la digráfica $D(x^+, P_m)$ (respectivamente $D(x^-, P_m)$), donde $x \in V(D)$, es:*

(1) *una digráfica de la forma $D_0(x^+, P_s)$ (respectivamente $D_0(x^-, P_s)$), donde D_0 es una subdigráfica inducida de D y $2 \leq s \leq m$ o*
(2) *una subdigráfica inducida de D o*
(3) *una subdigráfica inducida de P_m o*
(4) *la unión disjunta de digráficas de los casos (2) o (3).*

Dem. Sea $Y \subseteq V(D(x^+, P_m))$.

Si $Y \subseteq V(D)$. Entonces $D(x^+, P_m)[Y] \cong D[Y]$, por lo tanto es de la forma (2).

Si $Y \subseteq V(P_m)$. Entonces $D(x^+, P_m)[Y] \cong P_m[Y]$, por lo tanto es de la forma (3)

Si $Y \cap V(D) \neq \phi$ y $Y \cap V(P_m) \neq \phi$. Tenemos los siguientes casos:

Caso 1: $Y \cap V(P_m)$ no es una trayectoria dirigida.

Entonces, denotemos $Y_1 = Y \cap V(P_m)$ y $Y_2 = Y \cap V(D)$, así $Y_1 \cup Y_2 = Y$ y $D(x^+, P_m)[Y] = P_m[Y_1] \cup D[Y_2]$, por lo tanto es de la forma (4).

Caso 2: $Y \cap V(P_m)$ es una trayectoria dirigida.

Entonces, denotemos $Y_1 = Y \cap V(P_m)$ y $Y_2 = Y \cap V(D)$, y consideremos los siguientes casos:

Caso 2.1: Si $x_m \in Y_1$ y $x \in Y_2$.

Entonces tenemos que, $D(x^+, P_m)[Y_1] \cong P_s$, con $2 \leq s \leq m$ y $D(x^+, P_m)[Y] \cong D_0 = D[Y_2]$. Por lo tanto tenemos que, $D(x^+, P_m)[Y] \cong D_0(x^+, P_s)$, es decir, de la forma (1).

Caso 2.2: Si $x_m \notin Y_1$ o $x \notin Y_2$.

Entonces tenemos que, $D(x^+, P_m)[Y] = P_m[Y_1] \cup D[Y_2]$, por lo tanto es de la forma (4).

Análogamente para $Y \subset V(D(x^-, P_m))$. $\|$

Proposición 6. *Una digráfica D es $(k, k-1)$-núcleo perfecta si y solo si $D(x^-, P_m)$ es $(k, k-1)$-núcleo perfecta, $\forall x \in V(D)$, con $m \geq 2$.*

Dem. $\Rightarrow$)

Sean $x \in V(D)$ y $Y \subseteq V(D(x^-, P_m))$. Probaremos que $D(x^-, P_m)[Y]$ tiene $(k, k-1)$-núcleo.

De la proposición anterior tenemos que:

Si $D(x^-, P_m)[Y]$ es de la forma (2), entonces $D(x^-, P_m)[Y] \cong D[Y]$ que tiene $(k, k-1)$-núcleo.

Si $D(x^-, P_m)[Y]$ es de la forma (3), entonces $D(x^-, P_m)[Y] \cong P_m[Y]$ que tiene $(k, k-1)$-núcleo.

Si $D(x^-, P_m)[Y]$ es de la forma (1), entonces $D(x^-, P_m)[Y] \cong D_0(x^-, P_s)$, con $2 \leq s \leq m$ y D_0 subdigráfica de D. Pero por la proposición 2, D_0 tiene $(k, k-1)$-núcleo y de manera similar a la demostración del Teorema 12, dado un $(k, k-1)$-núcleo de D_0, podemos extenderlo a un $(k,k-1)$-núcleo de $D_0(x^-,P_s)$ agregando vértices de P_s.

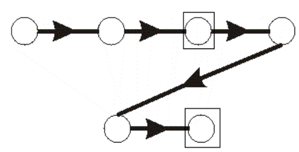
Si $D(x^-,P_m)[Y]$ es de la forma (4), entonces tenemos que, $Y = Y_1 \cup Y_2$, con $Y_1 = Y \cap V(P_m)$ y $Y_2 = Y \cap V(D)$. Por lo tanto, $D(x^-,P_m)[Y_2] \cong D[Y_2]$ y $D(x^-,P_m)[Y_1] \cong P_m[Y_1]$ que tienen $(k,k-1)$-núcleo y de la proposición 3 tenemos que $D(x^-,P_m)[Y] = D(x^-,P_m)[Y_1 \cup Y_2] \cong D[Y_2] \cup P_m[Y_1]$ tiene $(k,k-1)$-núcleo.

Por lo tanto, de los casos anteriores, $D(x^-,P_m)[Y]$ tiene $(k,k-1)$-núcleo y por lo tanto $D(x^-,P_m)$ es $(k,k-1)$-núcleo perfecta.

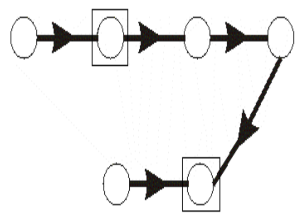
$\Leftarrow$)

Como $D(x^-,P_m)$ es $(k,k-1)$-núcleo perfecta, entonces por la proposición 2 $D(x^-,P_m)[V(D)]$ y $D(x^-,P_m)[V(P_m)]$ son $(k,k-1)$-núcleo perfectas, pero $D(x^-,P_m)[V(D)] \cong D$ y $D(x^-,P_m)[V(P_m)] \cong P_m$, por lo tanto D y P_m son $(k,k-1)$-núcleo perfectas. $\|$

Ejemplo: Sea $D = P_2$ y $P_m = P_4$, entonces $D(x^-, P_4)$ es:



y como es para toda x, entonces también tenemos:



Teorema 15. *Sean D_1, D_2 y D digráficas tal que $V(D_1) \cap V(D_2) = \{x\}$ y $D = D_1 \cup D_2$, donde x es un emisor de D_1 y D_2, i.e. donde x es tal que $\forall y \in V(D_i)$ $\nexists \overrightarrow{yx}$ en D_i, con $i = 1, 2$.*

La digráfica D es $(k, k-1)$-núcleo perfecta si y solo si D_i son $(k, k-1)$-núcleo perfectas con $i = 1, 2$.

Dem. $\Rightarrow$)

Como D es $(k, k-1)$-núcleo perfecta entonces de la proposición 1 tenemos que, $D[V(D_i)]$ son $(k, k-1)$-núcleo perfectas, pero $D[V(D_i)] \cong D_i$, con $i = 1, 2$, por lo tanto D_i son $(k, k-1)$-núcleo perfectas.

$\Leftarrow$).

Sea $Y \subseteq V(D)$.

Si $Y \subseteq V(D_i)$ para algún $i = 1, 2$, entonces tenemos que $D[Y] \cong D_i[Y]$ que tiene $(k, k-1)$-núcleo. Por lo tanto $D[Y]$ tiene $(k, k-1)$-núcleo.

Si $x \in V(D) \setminus Y$ y $Y \cap V(D_i) \neq \phi$ para cada $i = 1, 2$, tenemos que $d_{D[Y]}(Y \cap V(D_1), Y \cap V(D_2)) \geq k$ y $d_{D[Y]}(Y \cap V(D_2), Y \cap V(D_1)) \geq k$, ya que no hay trayectorias dirigidas entre estos conjuntos. Lo que implica que $N_1 \cup N_2$, con N_i un $(k, k-1)$-núcleo de $D_i[Y \cap V(D_i)]$ y $i = 1, 2$, es $(k, k-1)$-núcleo de $D[Y]$.

Si $x \in Y$ y $Y \cap V(D_i) \neq \phi$ para cada $i = 1, 2$, entonces sea N_i un $(k, k-1)$-núcleo de la sudigráfica de $D[Y]$ inducida por $Y \cap V(D_i) \setminus \{x\}$, con $i = 1, 2$, que existen ya que D_i es $(k, k-1)$-núcleo perfecta. Consideremos los siguientes casos:

Si $d_{D[Y]}(x, N_1 \cup N_2) \leq k-1$, entonces $N_1 \cup N_2$ es $(k-1)$-absorbente en $D[Y]$. Y como x es emisor de D_i, no hay trayectorias dirigidas de N_1 a N_2 ni viceversa, por lo tanto $N_1 \cup N_2$ es k-independiente en $D[Y]$. Por lo tanto $N_1 \cup N_2$ es un $(k, k-1)$-núcleo de $D[Y]$.

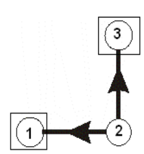
Si $d_{D[Y]}(x, N_1 \cup N_2) \geq k$, entonces $N_1 \cup N_2 \cup \{x\}$ es k-independiente en $D[Y]$, ya que N_i lo son y que $d_{D[Y]}(x, N_i) \geq k$ y $d_{D[Y]}(N_i, x) \geq k$ se sigue del hecho que x es emisor en D_i. Por otro lado $N_1 \cup N_2 \cup \{x\}$ es $(k-1)$-absorbente, ya que N_i lo es en D_i, con $i = 1, 2$. Por lo tanto $N_1 \cup N_2 \cup \{x\}$ es $(k, k-1)$-núcleo de $D[Y]$.

De los casos anteriores tenemos que D es $(k, k-1)$-núcleo perfecta.

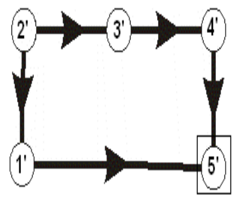
$\|$

Ejemplo:

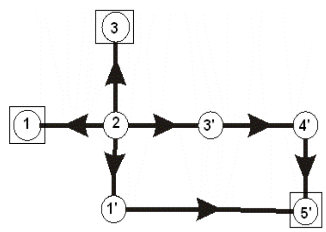
Sea D_1



y D_2



así tenemos que las dos son digráficas $(3, 2)$-núcleo perfectas, sea $x = 2 = 2'$, entonces D es:



que es $(3, 2)$-núcleo perfecta.

Como caso particular tenemos que para $k = 2$ da como resultado un teorema dado por H. Jacob que dice:

Teorema 16. *Sean D_1, D_2 y D digráficas tal que $V(D_1) \cap V(D_2) = \{x\}$ y $D = D_1 \cup D_2$, entonces*

La digráfica D es núcleo perfecta si y solo si D_i son núcleo perfectas con $i = 1, 2$.

Dem. $\Rightarrow$)

Se sigue de la proposición 2.

$\Leftarrow$)

Sea $Y \subseteq V(D)$. Mostraremos que $D[Y]$ tiene núcleo.

Si x es emisor de D_i, con $i = 1, 2$, entonces se sigue de manera inmediata del teorema anterior.

Supongamos que $Y \cap V(D_i) \neq \phi$ y $x \in Y$, para $i = 1, 2$. En otro caso se sigue de manera directa de la proposición 2.

Supongamos que x no es emisor de D_1 o D_2.

Como D_i son núcleo perfectas, tomemos N_i núcleo de $D_i[Y]$, con $i = 1, 2$. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1: Si $\forall i \, x \notin N_i$.

Entonces $N_1 \cup N_2$ es núcleo de $D[Y]$. Es absorbente ya que N_i lo es en $D_i[Y]$ y es independiente, ya que $x \notin N_i$.

Caso 2: Si $\forall i \, x \in N_i$.

Entonces afirmamos que $N_1 \cup N_2$ es núcleo de $D[Y]$.

Es absorbente ya que N_i lo son en $D_i[Y]$, y es independiente, ya que no existen xN_i ni $N_i x$ flechas.

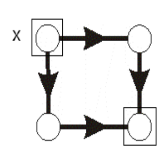
Caso 3: Si $x \in N_1$ y $x \notin N_2$.

En este caso tomemos N_1' núcleo de $D_1[Y] \setminus \{x\}$, existe ya que D_1 núcleo perfecta. Y afirmamos que $N_1' \cup N_2$ es núcleo de $D[Y]$. Tenemos que N_1' es independiente y N_2 tambien. Las únicas flechas de N_1' a N_2 y viceversa tienen que pasar por x, por lo tanto $N_1' \cup N_2$ es independiente en $D[Y]$. Ahora N_2 absorbe todo en $D_2[Y]$ y N_1' absorbe todo en $D_1[Y] \setminus \{x\}$, por lo tanto $N_1' \cup N_2$ absorbe todo en $D[Y]$.

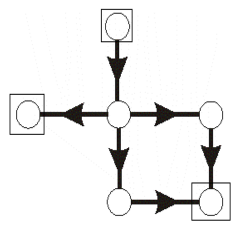
Por lo tanto $N_1' \cup N_2$ es núcleo de $D[Y]$.

Por lo tanto, de los casos anteriores, D es núcleo perfecta. ||

Ejemplo: Sea $D_1 = P_3$ y D_2 como en la figura:



entonces D es:



que es núcleo perfecta.

Corolario 8. *Si $x \in V(D)$ es un emisor de D, entonces $D(x^+, P_m)$ es $(k, k-1)$-núcleo perfecta si y solo si D es $(k, k-1)$-núcleo perfecta.*

Dem. Sea $D_1 = D$ y $D_2 = P_{m+1}$, con $x_{m+1} = x$, si denotemos a $H = D_1 \cup D_2$ entonces se cumplen las hipótesis del Teorema 15 y además $H \cong D(x^+, P_m)$. Por lo tanto tenemos el corolario. $\|$

Proposición 7. *Toda subdigráfica inducida de la digráfica $D(a, P_m)$, donde $a \in A(D)$ y $a = \overrightarrow{pq}$, es:*

(1) *una digráfica de la forma $D_0(a, P_m)$, donde D_0 es una subdigráfica inducida de D o*
(2) *una subdigráfica inducida de D o*
(3) *una subdigráfica inducida de P_m o*
(4) *una subdigráfica inducida de $D(p^+, P_m)$ o una subdigráfica inducida de $D(q^-, P_m)$ o*
(5) *la unión disjunta de digráficas de 1, 2, 3 o 4.*

Dem. Sea $Y \subseteq V(D(a, P_m))$.

Si $Y \subseteq V(D)$, entonces $D(a, P_m)[Y] \cong D[Y]$ y por lo tanto de la forma 2.

Si $Y \subseteq V(P_m)$, entonces $D(a, P_m)[Y] \cong P_m[Y]$ y por lo tanto de la forma 3.

Si $Y \cap V(P_m) = V(P_m)$ y $a \in A(D(a,P_m)[Y])$, entonces $D(a,P_m)[Y] \cong D_0(a,P_m)[Y]$, con $D_0 \cong D[Y \cap V(D)]$, por lo tanto es de la forma 1.

Si $Y \cap V(P_m) \neq \phi$ y $Y \cap V(D) \neq \phi$ con $p \in Y$ ó $q \in Y$, entonces $D(a,P_m)[Y]$ se reduce a $D(p^+,P_m)[Y]$ o $D(q^-,P_m)[Y]$ y por lo tanto de la forma 4.

En cualquier otro caso es la unión de digráficas de 1, 2, 3, 4. ||

Teorema 17. *Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud menor a k, con $k \geq 2$. Si $a \in A(D)$ y el vértice inicial de la flecha a es un emisor de D, entonces la digráfica D es $(k,k-1)$-núcleo perfecta si y solo si la digráfica $D(a,P_{nk})$ es $(k,k-1)$-núcleo perfecta, para $n \geq 1$.*

Dem. $\Rightarrow$)

Sea $Y \subseteq V(D(a,P_{nk}))$. Probaremos que $D(a,P_{nk})[Y]$ tiene $(k,k-1)$-núcleo.

Por la proposición anterior y tomando $m = nk$ tenemos que $D(a,P_{nk})[Y]$ tiene varias formas:

Si es de la forma (1), i.e. $D_0(a,P_m)$, con D_0 una subdigráfica inducida de D, así por el Teorema 12 tenemos que, $D_0(a,P_m)$ tiene $(k,k-1)$-núcleo si y solo si D_0 no tiene ciclos dirigidos de longitud menor a k y tiene $(k,k-1)$-núcleo. Por lo tanto $D(a,P_{nk})[Y]$ tiene $(k,k-1)$-núcleo.

Si es una subdigráfica inducida de D tiene $(k,k-1)$-núcleo ya que D es $(k,k-1)$-núcleo perfecta.

Si es una subdigráfica inducida de P_m tiene $(k,k-1)$-núcleo ya que P_m es $(k,k-1)$-núcleo perfecta.

Si es una subdigráfica inducida de $D(x^+,P_m)$, entonces como D es $(k,k-1)$-núcleo perfecta y ya que x es emisor de D, tenemos que por el corolario 8 tiene $(k,k-1)$-núcleo.

Si es una subdigráfica inducida de $D(x^-, P_m)$, entonces como D es $(k, k-1)$-núcleo perfecta tenemos que tiene $(k, k-1)$-núcleo.

Si es la unión de las digráficas de 1, 2, 3 o 4, entonces por la proposición 2 tiene $(k, k-1)$-núcleo.

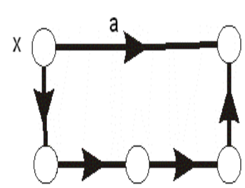
De lo anterior tenemos que $D(a, P_{nk})[Y]$ tiene $(k, k-1)$-núcleo.

Por lo tanto $D(a, P_{nk})$ es $(k, k-1)$-núcleo perfecta.

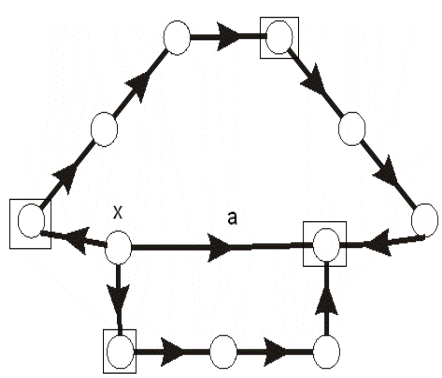
$\Leftarrow)$

Como $D(a, P_{nk})$ es $(k, k-1)$-núcleo perfecta, entonces de la proposición 2, tenemos que $D(a, P_{nk})[V(D)]$ es $(k, k-1)$-núcleo perfecta, pero $D(a, P_{nk})[V(D)] \cong D$, por lo tanto D es $(k, k-1)$-núcleo perfecta. $\|$

Ejemplo: Sea $P_{nk} = P_6$ y D como en la figura:



entonces $D(a, P_6)$



que es $(3, 2)$-núcleo perfecta.

6

Núcleos por trayectorias monocromáticas

En esta sección se darán condiciones necesarias y suficientes para la preservación de núcleo por trayectorias monocromáticas en las operaciones de digráficas: composición y duplicación.

Lema 9. *Sean D y $\widetilde{\alpha} = ((\alpha_v, \alpha_v))_{v \in V(D)}$ una familia de digráficas ajenas. Sea $T = (x_o, x_1, \ldots, x_n)$ una trayectoria dirigida en la composición $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ tal que $x_0, x_n \in \alpha_v$ para alguna $v \in V(D)$. Entonces la $Proy_D(V(T))$ es la unión de ciclos dirigidos en D.*

Observación. *Como la $Proy_D(V(T))$ toma todos los vértices de T que estan en una α_v y los manda al vértice v en D, entonces podemos tomar sólo las trayectorias que no tienen vértices consecutivos en una misma digráfica α_v.*

Dem. Sea $T = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ una trayectoria dirigida en la composición $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ tal que $x_0, x_n \in \alpha_v$ para alguna $v \in V(D)$. La prueba será por inducción sobre la longitud de T.

Si $l(T) = 2$, entonces T es de la forma $T = (x_o, x_1, x_2)$, con $x_0, x_2 \in V(\alpha_v)\, v \in V(D)$ y $x_1 \in V(\alpha_u)$, con $u \neq v$. De esta manera $Proy_D(V(T)) = D[\{v, u\}]$ y por la definición de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$, tenemos que, $D[\{v, u\}] = (v, u, v)$ que es un ciclo dirigido en D.

Supongamos que para toda trayectoria Y, tal que $l(Y) < n$, su proyección es la unión de ciclos dirigidos en D.

Sea $T = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ tal que $l(T) = n$ y $x_0, x_n \in V(\alpha_v)$ para alguna $v \in V(D)$.

P.d. $Proy_D(V(T))$ es la unión de ciclos dirigidos en D.

Sea x_j el primer vértice de T tal que $\exists x_i\, i < j\, i, j = 0, 1, \ldots, n$ y que $x_j, x_i \in V(\alpha_u)$ para alguna $u \in V(D)$.

Si $j = n$, entonces x_0 y x_n son los únicos vértices que estan en una α_v, ademas de la definición de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$, tenemos que, $Proy_D(V(T)) = (v, v_1, \ldots, v_{n-1}, v)$ que es un ciclo dirigido de D.

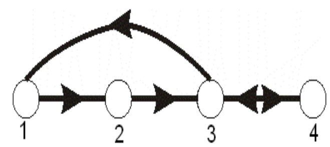
Si $j < n$, tenemos dos casos.

Caso 1 Si $i = 0$, entonces $T = T_1 \cup T_2$, donde $T_1 = (x_0, \ldots, x_j)$ y $T_2 = (x_j, \ldots, x_n)$. Estas trayectorias tienen longitud menor a n, por lo tanto aplicando la hipótesis de inducción a cada una tenemos que sus proyecciones son la unión de ciclos dirigidos en D, por lo tanto la proyección de T es la unión de ciclos dirigidos en D.

Caso 2 Si $i > 0$, entonces tenemos que $T_3 = [x_i, T, x_j]$ es de longitud menor a n y aplicando la hipótesis de inducción tenemos que $Proy_D(V(T_3))$ es unión de ciclos dirigidos en D. Además tenemos que $Proy_D(V(T)) = Proy_D(\{x_0, \ldots, x_i\}) \cup Proy_D(\{x_{j+1}, \ldots, x_n\}) \cup Proy_D(V(T_3))$, pero por la definición de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$, $(x_0, \ldots, x_i)$ y $(x_{j+1}, \ldots, x_n)$ son trayectorias dirigidas de longitud menor a n y por lo tanto, aplicando la hipótesis de inducción, tenemos que cada proyección es la unión de ciclos dirigidos en D. Por lo tanto $Proy_D(V(T))$ es la unión de ciclos dirigidos en D.

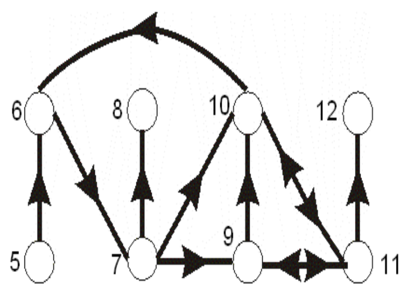
Si existen más vértices que se repiten aplicamos el razonamiento del caso 2 a las repeticiones faltantes. $\|$

Ejemplo: Si D es:

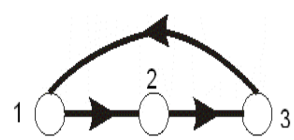


y para cada $v \in D$ tenemos que α_v es:

con $J_1 = \{b\}$, $J_2 = \{a\}$, $J_3 = \{b\}$ y $J_4 = \{a\}$, entonces $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ es:



Si tomamos la trayectoria dirigida $(10, 6, 7, 9)$, tenemos que $Proy_D(10, 6, 7, 9)$ es:



que es un ciclo dirigido en D y si tomamos la trayectoria dirigida $(10, 11, 9)$, entonces $Proy_D(10, 11, 9)$ es:

que un ciclo dirigido de D.

Teorema 18. *Sea D digráfica tal que si $\psi : F(D) \to \{1, \dots, n\}$ es una n-coloración de las flechas de D, tenemos que $D[\psi^{-1}\{i\}]$ es acíclica con $i \in \{1, \dots, n\}$ y sea $\widetilde{\alpha} = (\alpha_v, \alpha_v)_{v \in V(D)}$ una familia de digráficas ajenas coloreadas en las flechas. $N^* \subset V(\sigma(D, \widetilde{\alpha}))$ es núcleo por trayectorias monocromáticas si y solo si $\exists N \subset V(D)$ núcleo por trayectorias monocromáticas de D tal que $N^* = \cup_{v \in I} N_v$, donde N_v es núcleo por trayectorias monocromáticas de α_v y $I = \{v \mid v \in N\}$.*

Dem. $\Leftarrow$)

Sean N y N^* como en la hipótesis.

Demostraremos primero que N^* es absorbente por trayectorias monocromáticas.

Sea $z \in V(\sigma(D, \widetilde{\alpha})) - N^*$ así $\exists v_0 \in V(D)$ tal que $z \in \alpha_{v_0}$, de esta manera tenemos dos opciones: $v_0 \in N$ o $v_0 \notin N$.

Si $v_0 \in N$ tenemos que $\exists zx$-trayectoria monocromática en α_{v_0} con $x \in N_{v_0} \subset N^*$ ya que N_{v_0} es núcleo por trayectorias monocromáticas de α_{v_0}.

Si $v_0 \notin N$, entonces $\exists T = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, u)$ trayectoria monocromática en D con $u \in N$, ya que N es núcleo por trayectorias monocromáticas de D, como $z \in \alpha_{v_0}$ y tomando $z_i \in \alpha_{v_i}$ con $i = 1, ..., n-1$ y $z_u \in N_v$ construimos la trayectoria monocromática $T' = (z, z_1, \dots, z_{n-1}, z_u)$.

Por lo tanto N^* es absorbente por trayectorias monocromáticas.

Ahora demostraremos que N^* es independiente por trayectorias monocromáticas.

Sean $x_0, x_n \in N^*$ $x_0 \neq x_n$, supongamos que existe $T = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ una x_0x_n-trayectoria, asi tenemos dos opciones: $x_0, x_n \in \alpha_v$ para alguna $v \in V(D)$ o $x_0 \in \alpha_v$ y $x_n \in \alpha_u$ con $v \neq u$.

Caso 1: Si $x_0, x_n \in \alpha_v$ para alguna $v \in V(D)$.

Tenemos dos opciones: $T \subset \alpha_v$ o $T \not\subset \alpha_v$

Caso 1.a: Si $T \subset \alpha_v$ entonces T es no monocromática ya que como $x_0, x_n \in N^*$ se tiene que $x_0, x_n \in N_v$.

Caso 1.b: Si $T \not\subset \alpha_v$, supongamos, por contradicción que T es monocromática, entonces del lema anterior tenemos que $Proy_D(V(T))$ es la unión de ciclos dirigidos monocromáticos contradiciendo la hipótesis.

Caso 2: Si $x_0 \in \alpha_v$ y $x_n \in \alpha_u$ con $v \neq u$, por la definición de N^* y ya que $x_0, x_n \in N^*$ se tiene que $x_0 \in N_v$ y $x_n \in N_u$ con $u, v \in N$, ahora supongamos por contradicción que T es monocromática con lo que $Proy_D(T)$ es una vu-trayectoria monocromática en D contradiciendo que N es núcleo por trayectorias monocromáticas de D.

Por lo tanto N^* es independiente por trayectorias monocromáticas.

Por lo tanto N^* es núcleo por trayectorias monocromáticas.

$\Rightarrow$)

Sea N^* núcleo por trayectorias monocromáticas de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$. Sea $N = \{v \in V(D) \mid N^* \cap V(\alpha_v) \neq \phi\}$.

Primero demostraremos que N es absorbente por trayectorias monocromáticas en D.

Sea $v \in V(D) - N$ y sea $z_0 \in V(\alpha_v)$, como $v \notin N$ tenemos que $z_0 \notin N^*$ por lo que $\exists T = (z_0, \ldots, z_n)$ trayectoria monocromática con $z_n \in N^*$ además podemos suponer sin pérdida de generalidad que $z_i \in V(\alpha_i)\, i = 1, ..., n$ (ya que T es monocromática), de esta manera tenemos que $Proy_D(T)$ es una vu_{z_n}-trayectoria monocromática con $u_{z_n} \in N$.

Por lo tanto N es absorbente por trayectorias monocromáticas.

Ahora probaremos que N es independiente por trayectorias monocromáticas.

Sea $v_0, v_n \in N$ y supongamos que existe $T = (v_0, \ldots, v_n)$ una trayectoria entre ellos contenida en D. Supongamos que T es monocromática, así como $v_0, v_n \in N$ se tiene que $\exists z_0 \in V(\alpha_{v_0}) \cap N^*$ y $z_n \in V(\alpha_{v_n}) \cap N^*$, tomando un punto $z_i \in \alpha_{v_i}$, $i = 1, ..., n-1$, T induce una $z_0 z_n$-trayectoria monocromática contradiciendo que N^* es núcleo por trayectorias monocromáticas.

Por lo tanto N es independiente por trayectorias monocromáticas.

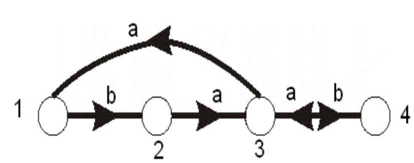
De lo anterior se tiene que N es núcleo por trayectorias monocromáticas de D.

Por otro lado si denotamos $N_v = N^* \cap V(\alpha_v)$, es claro que, $\cup_{v \in I} N_v \subseteq N^*$ con $I = \{v \mid v \in N\}$. Ahora tomemos $z \in N^*$, por la definición de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ tenemos que $z \in N^* \cap V(\alpha_{v_0})$, por lo cual $v_0 \in N$, por lo tanto $z \in N_{v_0}$ y como consecuencia $z \in \cup_{v \in I} N_v$.

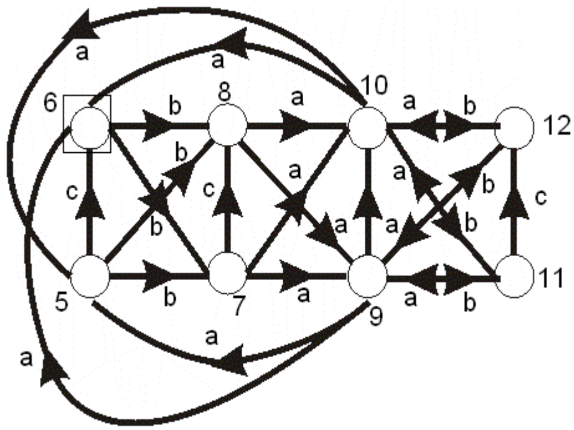
Por lo anterior $N^* = \cup_{v \in I} N_v$.

$\|$

Ejemplo: Tomemos a D y α_v como en el ejemplo anterior con la coloración:



Con lo que D tiene como núcleo por trayectorias monocromáticas al conjunto $\{1\}$ y $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ es:



que tiene a $\{6\}$ como núcleo por trayectorias monocromáticas.

Lema 10. *Sean D una digráfica coloreada en sus flechas, $B \subset D$ y D^B la duplicación de B. Además sea $\psi : D[B] \to B'$ el isomorfismo definido por la duplicación.*

Definimos $\phi : D \to D^B \setminus D[B]$ como:

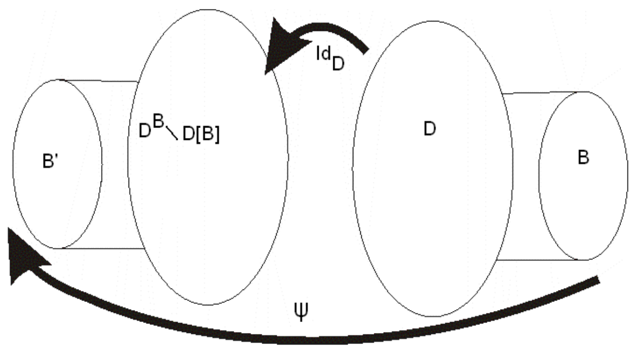
$$\phi(x) = \begin{cases} Id_D(x), & si\ x \notin B \\ \psi(x), & si\ x \in B \end{cases}$$

Entonces ϕ es un isomorfismo y $T \subset D$ es una trayectoria monocromática si y solo si $\phi(T) \subset D^B \setminus D[B]$ es una trayectoria monocromática.

Dem. Primero demostraremos que ϕ es isomorfismo.

Probaremos que ϕ es inyectiva. Sean $x, y \in V(D)$, con $x \neq y$, tenemos los siguientes casos: $x, y \in B$ y $x \notin B$, $y \notin B$ y $x \in B$, $y \notin B$. Como ψ y Id_D son isomorfismos, los primeros dos casos se siguen de manera directa de la definición de ϕ.

Esquema:



Revisemos el tercer caso, como $x \in B$ y $y \notin B$ tenemos $\phi(x) = \psi(x) \neq Id_D(y) = \phi(y)$ por lo tanto ϕ es inyectiva.

Ahora probaremos que ϕ es suprayectiva.

Sea $z' \in D^B \setminus D[B]$, entonces $z' \in B'$ o $z' \notin B'$.

Si $z' \in B'$, como ψ es isomorfismo, existe una única $z \in B \subset V(D)$ tal que $\phi(z) = \psi(z) = z'$

Si $z' \notin B'$, entonces $z' \in V(D^B) \setminus V(D[B] \cup B')$ por lo tanto $\phi(z') = Id_D(z') = z'$.

Por lo tanto ϕ es suprayectiva.

Por lo tanto es biyectiva.

Ahora tenemos que mostrar que $x \; ady_D \; y$ si y solo si $\phi(x) \; ady_{D^B \setminus D[B]} \; \phi(y)$

Sean $x, y \in V(D)$ tal que $x \; ady_D \; y$ así tenemos los siguientes casos: $x, y \in B$, $x, y \notin B$ y $x \in B$, $y \notin B$

Si $x, y \in B$, tenemos que como ψ es isomorfismo $x \; ady_D \; y$ si y solo si $\phi(x) = \psi(x) \; ady_{D^B \setminus D[B]} \; \psi(y) = \phi(y)$

Si $x, y \notin B$, tenemos que como Id_D es isomorfismo $x \; ady_D \; y$ si y solo si $\phi(x) = Id_D(x) \; ady_{D^B \setminus D[B]} \; Id_D(y) = \phi(y)$

Si $x \in B$, $y \notin B$, tenemos que $x\ ady_D\ y$ si y solo si $\phi(x) = \psi(x)\ ady_{D^B \setminus D[B]}$
$Id_D(y) = \phi(y)$ por la definición de la duplicación.

Por lo tanto ϕ es isomorfismo.

Ahora demostraremos que $T \subset D$ es una trayectoria monocromática si y solo si $\phi(T) \subset D^B\ D[B]$ es una trayectoria monocromática.

Sea $T = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ una trayectoria monocromática en D. Consideremos los siguientes casos

Caso1 $T \cap B = \phi \Leftrightarrow \phi(T) = Id_D(T) = T$ que es una trayectoria monocromática de D^B

Caso 2 $T \cap B \neq \phi$, sea $T \cap B = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \mid i_1, \ldots, i_k \subset 1, \ldots, n\}$ $\Leftrightarrow \phi(T) = Id_D(T \setminus x_{i_j}) \cup \{\psi(\{x_{i_j} \mid j = 1, \ldots, k\})\} = (T \setminus x_{i_j}) \cup \{x'_{i_j}\}$ con $x'_{i_j} \in B'$ que es monocromática por la definición de D^B, además tenemos que $\delta_D(x_j) = \delta_{D^B}(x'_j)$

Por lo tanto las trayectorias monocromáticas son invariantes a traves de ϕ. $\|$

Teorema 19. *Sea D una digráfica coloreada en sus flechas sin ciclos dirigidos monocromáticos, $B \subset V(D)$ y D^B la duplicación de B. D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas si y solo si D^B tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Dem. $\Rightarrow$)

Sea N un núcleo por trayectorias monocromáticas de D. Considerémos los siguientes casos.

Caso 1 Si $N \cap B = \phi$.

Entonces N es núcleo por trayectorias monocromáticas de D^B.

Primero probaremos que N es independiente por trayectorias monocromáticas.

Sean $x \neq y \in N$, y sea $T = (x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y)$ una trayectoria dirigida en D^B. Supongamos que T es monocromática.

Consideraremos los siguientes casos: $T \cap B = \phi$ o $T \cap B \neq \phi$

Si $T \cap B = \phi$, entonces $T \subset V(D^B) \setminus V(D[B])$, y del lema anterior tenemos que, $\phi^{-1}(T)$ es una xy-trayectoria dirigida monocromática contradiciendo que N es núcleo por trayectorias monocromáticas.

Si $T \cap B \neq \phi$, tomamos $T(I) = (x = x_0, x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n = y)$ trayectoria dirigida, con $i \in I$ e $I = \{j \mid x_j \in V(T) \cap B\}$, que por la definición de D^B es monocromática, ya que T lo es, y además $T(I) \subset D^B \setminus D[B]$, así aplicando el lema anterior $\phi^{-1}(T(I))$ es una trayectoria dirigida monocromática contradiciendo que N es núcleo por trayectorias monocromáticas de D

Por lo tanto T no es monocromática y por lo tanto N es independiente por trayectorias monocromáticas.

Ahora probaremos que N es absorbente por trayectorias monocromáticas.

Sea $z \in V(D^B) \setminus N$, consideremos los siguientes casos $z \in B'$ o $z \notin B'$.

Si $z \notin B'$, entonces $z \in V(D)$, por lo tanto existe zN-trayectoria dirigida monocromática con $T \subset V(D) \subset V(D^B)$.

Si $z = y' \in B'$, entonces existe $y \in B$ el original de y' y por lo tanto existe $T = (y, x_1, \ldots, x_n)$ trayectoria dirigida monocromática con $x_n \in N$, de esta manera tomando $T' = (y', x_1, \ldots, x_n)$ es una trayectoria dirigida monocromática de y' a N. Por lo tanto N es absorbente por trayectorias monocromáticas.

Y por lo tanto N es núcleo por trayectorias monocromáticas de D^B.

Caso 2 Si $N \cap B \neq \phi$.

Sea $Z = N \cap B$, así afirmamos que $N^* = N \cup Z'$ es núcleo por trayectorias monocromáticas de D^B.

Primero probaremos que N^* es independiente por trayectorias monocromáticas.

Sean $x \neq y \in N^*$ y $T = (x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y)$ una trayectoria dirigida en D^B. Supongamos que T es monocromática.

Como $x \neq y \in N^*$ tenemos los siguientes casos.

Si $x, y \in N$, entonces tomamos $T(I) = (x = x_0, x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n = y)$ trayectoria dirigida, con $i \in I$ e $I = \{i \mid x_i \in V(T) \cap B'\}$, de esta manera $T(I) \subset V(D)$ y como T es monocromática también $T(I)$. contradiciendo que N es núcleo por trayectorias monocromáticas de D.

Si $x \in N$, $y \in Z'$ y $x \notin B$, repetimos el razonamiento anterior.

Si $x \in N$, $y \in Z'$ y $x \in B$, tenemos dos casos.

Caso 1 x es el vértice original de y.

Entonces al tomar $T(I) = (x = x_0, x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n = y)$, con $i \in I$ e $I = \{j \mid x_j \in V(T) \cap B'\}$ obtenemos un ciclo dirigido monocromático de D contradiciendo la hipótesis.

Caso 2 x no es el vértice original de y.

Entonces al tomar $T(I) = (x = x_0, x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n = y)$, con $i \in I$ e $I = \{j \mid x_j \in V(T) \cap B'\}$ obtenemos una trayectoria dirigida monocromática en N, contradiciendo que N es núcleo por trayectorias monocromáticas de D.

Por lo tanto T no es monocromática y de aquí que N^* es independiente por trayectorias monocromáticas.

Ahora probaremos que N^* es absorbente por trayectorias monocromáticas.

Sea $z \in V(D^B) \setminus N^*$, así tenemos dos casos.

Si $z = y' \in B'$, entonces existe $y \in B$ el original y como N es núcleo por trayectorias monocromáticas de D existe $T = (y = x_0, x_1, \ldots, x_n)$ monocromática, con $x_n \in N$, de esta manera tomamos $T' = (z = y', x_1, \ldots, x_n)$ que es una zN^*-trayectoria dirigida monocromática, ya que T lo es.

Si $z \notin B'$, entonces $z \in V(D)$ y es absorbido por N y por lo tanto por N^*.

Por lo tanto N^* es núcleo por trayectorias monocromáticas de D^B.

$\Leftarrow$)

Sea N^* núcleo por trayectorias monocromáticas de D^B.

Consideremos los siguientes casos.

Caso 1: $N^* \cap B' = \phi$.

Entonces N^* es núcleo por trayectorias monocromáticas de D, ya que $N^* \subset D \subset D^B$.

Caso 2: $N^* \cap B' \neq \phi$.

Sea $Z' = N^* \cap B'$ y $N = N^* \setminus Z'$. Entonces afirmamos que $H = N \cup Z$, con Z el original de Z', es núcleo por trayectorias monocromáticas de D.

Probaremos que H es independiente por trayectorias monocromáticas

Sean $x \neq y \in H$ y $T = (x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y)$ una trayectoria dirigida en D.

Supongamos por contradicción que T es monocromática.

De esta manera tenemos tres opciones $x, y \in N$, $x \in N$ y $y \in Z$ o $x, y \in Z$.

Si $x, y \in N$ entonces, al ser T monocromática y ya que $T \subset D \subset D^B$, contradecimos que N^* es independeinte por trayectorias monocromáticas de D^B.

Si $x \in N$ y $y \in Z$, entonces tomamos $T' = (x = x_0, x_1, \ldots, x'_n = y')$ es una trayectoria dirigida monocromática, ya que T lo es, con $x, y' \in N^*$, contradiciendo que N^* es núcleo por trayectorias monocromáticas.

Si $x, y \in Z$, entonces tomamos $T' = (x' = x'_0, x_1, \ldots, x'_n = y')$ es una trayectoria dirigida monocromática ya que T lo es, con $x', y' \in N^*$, contradiciendo que N^* es núcleo por trayectorias monocromáticas.

Por lo tanto H es independiente por trayectorias monocromáticas.

Ahora probaremos que H es absorbente por trayectorias monocromáticas.

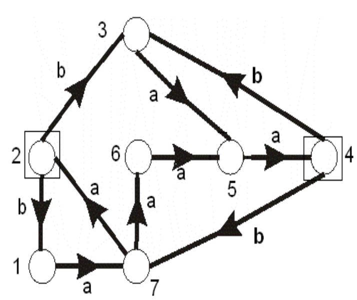
Sea $z \in V(D) \setminus H$. Como $D \subset D^B$, entonces $z \in V(D^B)$

Y como N^* es núcleo por trayectorias monocromáticas de D^B, entonces existe $T = (z = x_0, x_1, \ldots, x_n)$ trayectoria monocromática con $x_n \in N^*$, así tomando $T(I) = (z = x_0, x_1, \ldots, x'_i, \ldots, x_n)$, con $i \in I$ e $I = \{i \mid x_i \in V(T) \cap B'\}$ obtenemos una trayectoria dirigida monocromática contenida en D y con $x_n \in H$

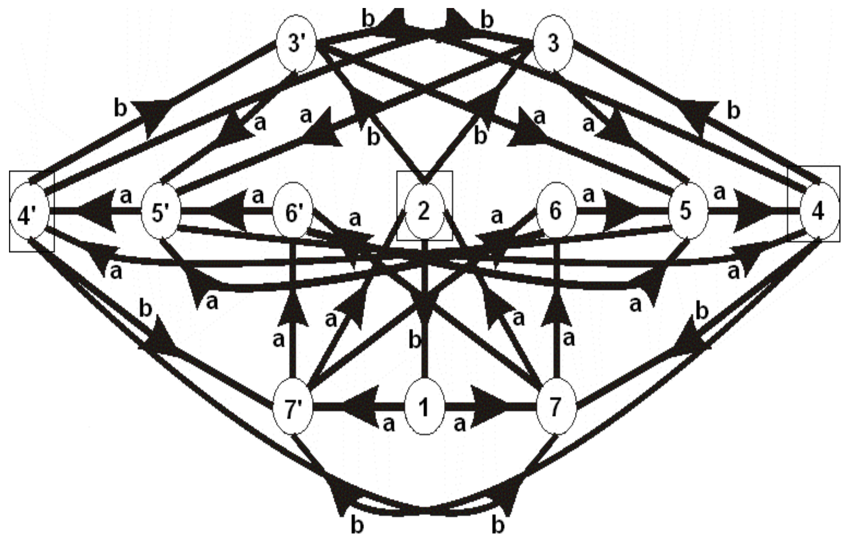
Por lo tanto H es absorbente por trayectorias monocromáticas.

Por lo tanto H es núcleo por trayectorias monocromáticas de D. $\|$

Ejemplo: Sea D como en la figura, $B = \{1, 2\}$ y con coloración denotada por letras minúsculas:



Así D tiene a $\{2,4\}$ como núcleo por trayectorias monocromáticas y de esta manera D^B es la digráfica:



con $\{2,4,4'\}$ como núcleo por trayectorias monocromáticas.

Definición 31. Sea D una digráfica coloreada en sus flechas.

Decimos que D es núcleo perfecta por trayectorias monocromáticas localmente si $\forall B \subseteq V(D)$, $D[B]$ tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Definición 32. Sea D una digráfica coloreada en sus flechas.

Decimos que D es núcleo perfecta por trayectorias monocromáticas globalmente si $\forall B \subset V(D)$, $\exists N \subset V(D[B])$ tal que N es absorbente por trayectorias monocromáticas en $D[B]$ y N es independiente por trayectorias monocromáticas en D.

Teorema 20. *Sea D una digráfica coloreada en sus flechas y α_v una familia de digráficas ajenas coloreadas en sus flechas.*

D y α_v son núcleo perfectas por trayectorias monocromáticas globalmente si y solo si $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ es núcleo perfecta por trayectorias monocromáticas globalmente.

Dem. $\Rightarrow$)

Sean D y α_v núcleo perfectas por trayectorias monocromáticas globalmente.

Tenemos que por la proposición 4 del capítulo anterior sección 4 toda subdigráfica B de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ es de una de las siguientes tres formas:

(1) la composición $\sigma(D_0, \widetilde{\beta})$, donde D_0 es una subdigráfica inducida de D y $\widetilde{\beta}$ es una familia de digráficas $(\beta_v)_{v \in V(D_0)}$, tal que β_v son subdigráficas de α_v, $v \in V(D_0)$.

(2) una subdigráfica inducida de α_v para alguna $v \in V(D)$ o

(3) la unión disjunta de digráficas de (1) y (2).

Caso 1:

Si es la composición $\sigma(D_0, \widetilde{\beta})$, donde D_0 es una subdigráfica inducida de D y $\widetilde{\beta}$ es una familia de digráficas $(\beta_u)_{u \in V(D_0)}$, tal que β_u son subdigráficas de α_u, $u \in V(D_0)$, entonces existe $N \subset V(D_0)$ y $N_u \subset \beta_u$ conjuntos tal que N es absorbente por trayectorias monocromáticas en D_0 y es independiente por trayectorias monocromáticas en D y N_u es absorbente por trayectorias monocromáticas en β_u e independiente por trayectorias monocromáticas en α_u. Así, sabemos que, por el teorema 18, si tomamos $N^* = \cup_{u \in I} N_u$ con $I = \{u \mid u \in N\}$, es absorbente por trayectorias monocromáticas en $\sigma(D_0, \widetilde{\beta})$.

Además, como N y N_u son independientes por trayectorias monocromáticas en D y α_u respectivamente, entonces N^* es independiente por trayectorias monocromáticas en $\sigma(D_0, \widetilde{\beta})$, ya que si $u \neq v \in N$, no hay trayectorias monocromáticas de N_u a N_v ni viceversa.

Caso 2:

Si B es una subdigráfica inducida de α_v, para alguna $v \in V(D)$.

Entonces sea $A = \{u \in V(D) \mid V(\alpha_u) \cap V(B) \neq \phi\}$.

De esta manera, tomamos $D_0 = D[A]$, y $\beta_u = B \cap \alpha_u$ y formamos $\sigma(D_0, \widetilde{\beta})$, regresandonos así al caso anterior.

Caso 3:

Si B es la unión disjunta de digráficas de (1) y (2).

Entonces B es la unión de $\sigma(D_0, \widetilde{\beta})$, donde D_0 es una subdigráfica inducida de D y $\widetilde{\beta}$ es una familia de digráficas $(\beta_u)_{u \in V(D_0)}$, tal que β_u son subdigráficas de α_u, $u \in V(D_0)$ y subdigráficas inducidas de α_x, para alguna $x \in V(D)$ con $x \neq u$.

De esta manera, tomando $A = \{x \in V(D) \mid V(\alpha_x) \cap V(B) \neq \phi\}$, podemos formar $D' = D_0 \cup D[A]$ y $\gamma_z = \beta_u \cup (\alpha_x \cap B)$ y de esta manera tener $\sigma(D', \widetilde{\gamma})$ cayendo en el caso 1.

$\Rightarrow$)

Como D es subdigráfica de $\sigma(D, \widetilde{\alpha})$ entonces D es núcleo por trayectorias monocromáticas globalmente. $\|$

Teorema 21. *Sea D una digráfica coloreada en sus flechas sin ciclos dirigidos monocromáticos, $B \subset V(D)$ y D^B la duplicación de B.*

D es núcleo perfecta por trayectorias monocromáticas localmente si y solo si D^B es núcleo perfecta por trayectorias monocromáticas localmente.

Dem. $\Leftarrow$)

Sea $A \subset V(D)$

P.d. $D[A]$ tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Por la definición de D^B tenemos que $A \subset V(D) \subset V(D^B)$ y $D[A] = D^B[A]$, así por hipótesis $D^B[A]$ tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, por lo tanto $D[A]$ tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

$\Rightarrow$)

Sea $A \subset V(D^B)$

P.d. $D^B[A]$ tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Asi tenemos dos casos $A \cap B' = \phi$ o $A \cap B' \neq \phi$

Caso 1: Si $A \cap B' = \phi$.

Entonces $A \subset V(D^B \setminus B') \Leftrightarrow A \subset V(D)$. De esta manera, por la definición de D^B, tenemos que $D^B[A] \cong D[A]$ y como $D[A]$ tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, entonces $D^B[A]$ tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Caso 2: Si $A \cap B' \neq \phi$.

Definimos los siguientes conjuntos: Sean $C' = \{x' \in V(D^B) \mid x' \in A \cap B'\}$ y $E = \{x \in V(D^B) \mid x \in A \setminus C'\}$ por lo tanto $A = C' \cup E$.

Así tenemos dos casos: $E \cap C = \phi$ o $E \cap C \neq \phi$.

Caso 2.1: Si $E \cap C = \phi$.

Entonces $D^B[E \cup C'] \cong D^B[E \cup C]$ por lo tanto $D^B[A] \cong D^B[E \cup C] \cong D[E \cup C]$ que tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Caso 2.2: Si $E \cap C \neq \phi$.

De nuestra hipótesis, tenemos que $D[E \cup C]$ tiene núcleo por trayectorias monocromáticas N. Consideremos los casos $N \cap B = \phi$ o $N \cap B \neq \phi$

Si $N \cap B = \phi$, entonces N es núcleo por trayectorias monocromáticas de $D^B[C' \cup E]$, por el Teorema 19.

Si $N \cap B \neq \phi$, como en el caso anterior tomemos N núcleo por trayectorias monocromáticas de $D[E \cup C]$, denotemos $D_1 = D[E \cup C]$

y $H = N \cap C$. Sabemos que por el Teorema 19 $N \cup H'$ es núcleo por trayectorias monocromáticas de D_1^C, la duplicación de C en D_1.

Observemos que $H' \subset C'$ y $(N \setminus H) \subset E$.

Afirmamos que $N' = (N \setminus H) \cup H'$ es núcleo por trayectorias monocromáticas de $D^B[A]$.

Claramente $N \setminus H$ y H' son independientes cada uno. Veamos que no hay trayectorias monocromáticas entre ellos. Si T fuera una trayectoria monocromática entre $N \setminus H$ y H' entonces T' (la trayectoria que cambia cada vértice por su copia) sería una trayectoria monocromática que empieza y termina en N, contradiciendo que N era núcleo por trayectorias monocromáticas. Por lo tanto es independiente por trayectorias monocromáticas.

Que es absorbente por trayectorias monocromáticas se sigue de que $N \cup H'$ es núcleo por trayectorias monocromáticas de D_1^C

Por lo tanto D^B es núcleo perfecta por trayectorias monocromáticas.

$\|$

Referencias

[1] C. Berge.:*Graphs*, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[2] P. Duchet, *Graphes noyau-parfaits*, Ann. Discrete Math. **9** (1980) 93-101

[3] H. Galeana-Sánchez, V. Neumann-Lara, *On kernels and semikernels of digraphs*, Discrete Math. **48** (1984) 67-76.

[4] H. Galeana-Sánchez, V. Neumann-Lara, *On kernel-perfect critical digraphs*, Discrete Math. **59** (1986) 257-265.

[5] H. Galeana-Sánchez,*On the existence of (k,l)-kernels in digraphs*, Discrete Math. **85**, North-Holland, Amsterdam, (1990) 99-102.

[6] H. Galeana-Sánchez, *On monocromatic paths and monocromatic cycles in edge coloured tournaments*, Discrete Math. **156** (1996) 103-112.

[7] H. Galeana-Sánchez, H.A. Rincón-Mejía, *A sufficient condition for the existence of $(k, k-l)$-kernels in digraphs*, Discussiones Math. **18**, North-Holland, Amsterdam, (1998) 197-204.

[8] H. Galeana-Sánchez, V. Neumann-Lara, *On the dichromatic number in kernel theory*, Math. Slovaca **48** (1998) 213-219.

[9] M. Kucharska, *On (k,l)-kernel perfectness of special classes of digraphs*, Por aparecer.

[10] M. Kwaśnik, *The generalization of Richardson theorem*, Discussiones Math. IV (1981) 11-14.

[11] M. Richardson, *Extensions theorems for solutions of irreflexive relations*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **39** (1953), 649.

[12] B. Sands, N. Sauer, R. Woodrow, *On monocromatic paths in edge-coloured digraphs*, J. Combin. Theory Ser. B 33, (1982) 271-275.

[13] Von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944.