UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FUNCION DE GRUNDY

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

RAUL GONZALEZ SILVA

DIRECTORA DE TESIS: DRA. HORTENSIA GALEANA SANCHEZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2006

FACULTAD DE CIENCIAS

División de Estudios Profesionales

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente.

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

"Función de Grundy"

realizado por **González Silva Raúl,** con número de cuenta **09804221-6,** quien opta por titularse en la opción de **Tesis** de la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Tutor(a) Propietario	Dra.	Hortensia Galeana Sánchez	
Propietario	Dr.	Hugo Alberto Rincón Mejía	Hugo A. Rincón M.
Propietario	Dr.	Ricardo Gómez Aíza	
Suplente	Mat.	Laura Pastrana Ramírez	Laura Pastrana R.
Suplente	M. en C.	Berta Zavala Santana	Berta Zavala S.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D.F., a 17 de ~~octubre del~~ 2006.
EL COORDINADOR DEL COMITÉ DE TITULACIÓN
DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

M. EN C. AGUSTÍN ONTIVEROS PINEDA

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

Agradecimientos

Quiero agradecer a María, María de Lourdes, Raquel, Hugo y Manuel, que son la familia que escogí y sin la cual no hubiera tenido ninguna de las oportunidades que he tenido y que ahora tengo.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El concepto de núcleo fue introducido por Von Neumann y Morgenstern [16] en el contexto de la Teoría de Juegos. El problema de la existencia de núcleo ha sido estudiado por varios autores, por ejemplo; P. Duchet [5], [6], P. Duchet y H. Meyniel [7], H. Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara [10], [11], M. Richardson [17]. Este concepto tiene aplicaciones en la Teoría de Juegos, Teoría de Conjuntos, Lógica, Inteligencia Artificial, etc.

La función de Grundy fue introducida por Grundy en 1939 [13] para digráficas sin ciclos dirigidos. Este concepto fue extendido por C. Berge y Shützenberger en 1956 [1],[2] respectivamente.

El concepto de núcleo y de función de Grundy están muy relacionados por los siguientes resultados: Una digráfica que tiene función de Grundy tiene núcleo; y toda digráfica núcleo perfecta tiene función de Grundy. Además como la función de Grundy da una partición de los vértices de la digráfica en conjuntos independientes, da una cota para el número cromático de la digráfica.

En [4] C. Berge usa la función de Grundy al estudiar los juegos de tipo Nim. En artículos de Gutiérrez Cabria [12], Schrage [18] la función de Grundy se utiliza para dar una estrategia ganadora o al menos no perdedora en juegos de tipo Nim. En otro artículo Matula, D. W. utiliza la función de Grundy para dar una mejor cota del número cromático. En otros artículos Erdös, P.[8], [9], Masgras, V. V.[15] dan aplicaciones de la función de Grundy a la Teoría de Números.

En el presente trabajo no estudiaremos cómo se relacióna la función de Grundy con el concepto de número cromático, con los juegos de tipo Nim, ni tampoco sus aplicaciones a la Teoría de Números. Sólo estudiaremos su relación con con el concepto de núcleo y encontraremos condiciones suficientes y necesarias para que se preserve bajo ciertas operaciones que definiremos más adelante.

En el Capítulo 1, daremos las definiciones básicas de la Teoría de Gráficas (gráfica, subdigráfica inducida, digráfica, núcleo, etc.,) que utilizaremos en este trabajo. Además, definiremos operaciones sobre digráficas (producto cartesiano, suma de Zykov y suma entre otras) que estudiaremos en los capitulos 3 y 4.

En el Capítulo 2, expondremos resultados básicos sobre el concepto de núcleo, que serán necesarios para los capítulos 3 y 4.

En el Capítulo 3, daremos dos definiciones de función de Grundy, veremos que son equivalentes, estudiaremos la relación que tiene con el concepto de núcleo y expondremos algunas condiciones suficientes para que una digráfica tenga función de Grundy.

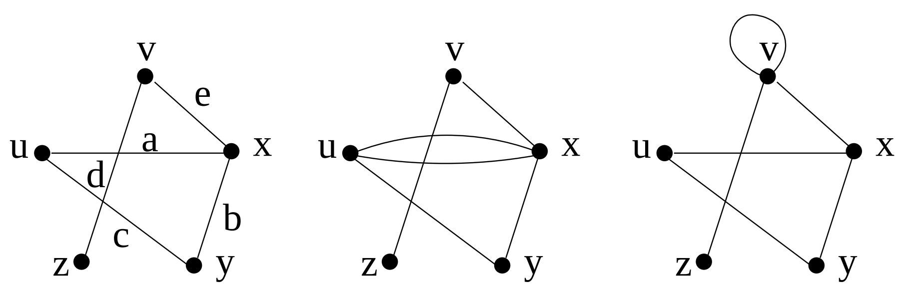
En el Capítulo 4, estudiaremos el comportamiento de la función de Grundy en la *suma de Zykov* y en la suma. Daremos condiciones suficientes y necesarias para que la suma de Zykov de una familia de digráficas tenga función de Grundy y encontraremos una cota para ésta.

Por medio de ejemplos, mostraremos que no podemos debilitar las condiciones requeridas.
En el caso de la *suma*, enontraremos una propiedad que llamaremos A, para que dadas dos digráficas con función de Grundy su suma tenga función de Grundy. Además diremos cual es el valor máximo de ésta, en términos de las funciones de cada digráfica. Por último, mostraremos que si una suma tiene función de Grundy entonces cada sumando (digráfica) tiene función de Grundy.

Capítulo 2

Definiciones

Definición 1. *Una* gráfica G *es una pareja* $(V(G), A(G))$, *donde* $V(G)$ *es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices y* $A(G)$ *es un conjunto de parejas no ordenadas de vértices distintos, llamadas aristas.*



G1 G2 G3

Figura 2.1:

En la Figura 2.1 tenemos tres ejemplos. G_1 y G_2 son gráficas, pero en este trabajo sólo trataremos con gráficas como G_1, es decir, gráficas que entre

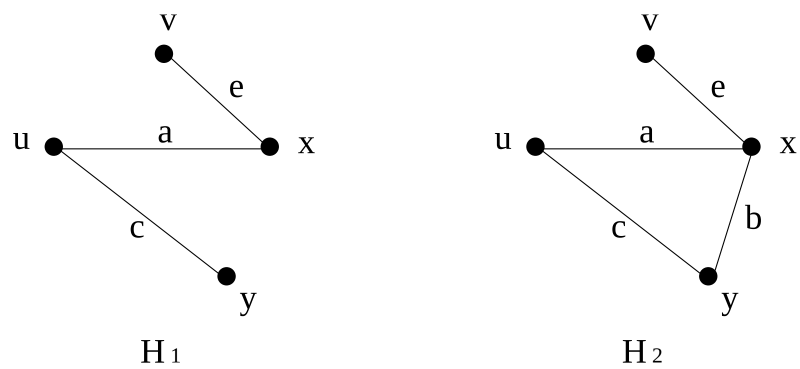


Figura 2.2:

cualesquiera dos vértices hay a lo más una arista. Además sólo trabajaremos con gráficas tales que el conjunto de vértices es finito. G_3 no es una gráfica porque la definición de gráfica pide pares no ordenados de distintos vértices, y aquí tendríamos la arista (v, v).

Definición 2. *Si* $a \in A(G)$ *y* $a = (u, v)$ *con* $u, v \in V(G)$*, decimos que* u *y* v *son* adyacentes *y que* u *y* v *son los* extremos *de* a*.*

En la Figura 2.1 tenemos que u y x son los extremos de la arista a y v y z son adyacentes, ya que esta la arista d en la gráfica G_1.

Definición 3. *Una* subgráfica H *de* G*, es una gráfica tal que* $V(H) \subseteq V(G)$ *y* $A(H) \subseteq A(G)$*.*

Definición 4. *Sea* $U \subseteq V(G)$*, la* subgráfica inducida *de* G *por* U*, es aquella que tiene como conjunto de vértices a* U *y como conjunto de aristas a las aristas de* G *que tienen sus extremos en* U*.*

En la Figura 2.2 tenemos dos ejemplos de subgráficas de la gráfica G_1 de la Figura 2.1. La primera H_1, tiene por conjunto de vértices a $\{u, v, x, y\}$

y por conjunto de aristas a $\{a, c, e\}$. Esta subgráfica no es una subgráfica inducida de G_1 por que falta la arista $b = (x, y)$. La subgráfica H_2 es la subgráfica inducida de G_1 por $U = \{u, v, x, y\}$.

Definición 5. *Una gráfica G es bipartita si existe una partición $\{U, W\}$ de los vértices de G tal que cualquier arista de G tiene un extremo en U y el otro en W.*

La gráfica H_1 de la Figura 2.2 es un ejemplo de gráfica bipartita donde la partición es $U = \{u, v\}$ y $W = \{x, y\}$.
La gráfica H_2 no es bipartita, ya que de haber una bipartición y tendría que estar en alguno de los dos conjuntos y como es adyacente con u y x, entonces u y x tendrían que estar en el otro conjunto, pero son adyacentes. Por lo tanto no existe tal partición y H_2 no es bipartita.

Definición 6. *Una* digráfica *D es una pareja $(V(D), F(D))$ tal que $V(D)$ es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices y $F(D)$ es un conjunto de parejas ordenadas de vértices distintos, llamadas flechas.*

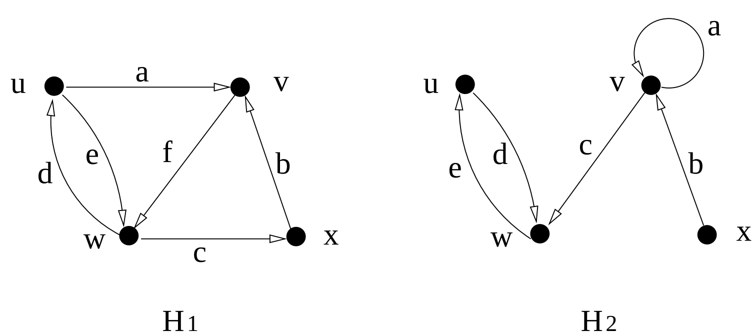


Figura 2.3:

En la Figura 2.3 tenemos dos ejemplos, sólo H_1 es una digráfica mientras que H_2 no es digráfica porque tiene la flecha $a = (v, v)$ que no es permitido en la definición de digráfica.

Definición 7. *Si $a \in F(D)$ y $a = (u, v)$ con $u, v \in V(D)$ decimos que u y v son los* extremos *de a; u es el* extremo inicial *de a y v el* extremo final. *También decimos que u es* adyacente hacia *v y que v es* adyacente desde *u. Para $v \in V(D)$ denotamos por $\Gamma_D^+(v)$ al conjunto de todos los vértices $x \in V(D)$ tales que v es adyacente hacia x. Por $\Gamma_D^-(v)$ denotamos al conjunto de vértices x tales que v es adyacente desde x, por $\Gamma_D(v)$ a la unión de $\Gamma_D^+(v)$ y $\Gamma_D^-(v)$.*

En la digráfica H_1 de la Figura 2.3 tenemos que u y v son los extremos de a, donde u es el extremo inicial y v el extremo final. Tenemos que w es adyacente hacia x y v es adyacente desde x. En la Figura 2.3, $\Gamma_{H_1}^+(x) = \{v\}$, $\Gamma_{H_1}^-(x) = \{w\}$; $\Gamma_{H_1}^+(w) = \{u, x\}$, $\Gamma_{H_1}^-(w) = \{u, v\}$.

Definición 8. *Si D es una digráfica y $a \in F(D)$ con $a = (u, v)$, a es una flecha* simétrica *si $(v, u) \in F(D)$. Decimos que una digráfica es* simétrica *si todas sus flechas son simétricas.*

Definición 9. *Si D es una digráfica y $a \in F(D)$ con $a = (u, v)$, a es una flecha* asimétrica *si $(v, u) \notin F(D)$. Decimos que una digráfica es* asimétrica *si todas sus flechas son asimétricas.*

En la Figura 2.3, la flecha $e = (u, w)$ es simétrica porque la flecha $d = (w, u)$ esta en la digráfica. Mientras que la flecha $a = (u, v)$ es asimétrica por que la flecha (v, u) no esta en la digráfica.

Definición 10. *Una digráfica D se dice que es* transitiva, *si para todos $x, y, z \in V(D)$ tales que $(x, y) \in F(D)$ y $(y, z) \in F(D)$ se tiene que $(x, z) \in F(D)$.*

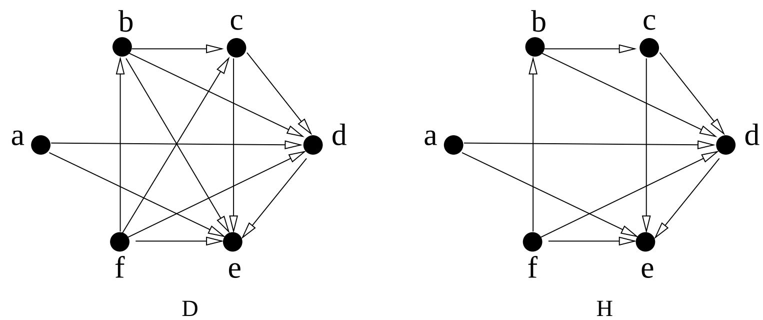


Figura 2.4:

La digráfica D de la Figura 2.4, es una digráfica transitiva. Por ejemplo tenemos que (a, d) y (d, e) son flechas en esta digráfica y también (a, e) es flecha de esta digráfica. También $(b, c), (c, e)$ y (b, e) son flechas de esta digráfica. Otros ejemplos son las flechas (c, d), (d, e) y (c, e); (b, c), (c, d) y (b, d); (f, b), (b, d) y (f, d); (f, d), (d, e) y (f, e); (f, b), (b, c) y (f, c); (f, c), (c, d) y (f, d). La digráfica H de la Figura 2.4, no es una digráfica transitiva porque tenemos que $(b, d) \in F(H)$, $(d, e) \in F(H)$ y $(b, e) \notin F(H)$.

Definición 11. *Una digráfica D es una* digráfica completa *si para cualquier par de vértices de D, existe una flecha entre ellos.*

En la Figura 2.5 la digráfica D_1 es una digráfica completa, entre todos sus vértices hay al menos una flecha. La digráfica D_2 no es una digráfica completa porque no hay flecha entre los vértices x y y.

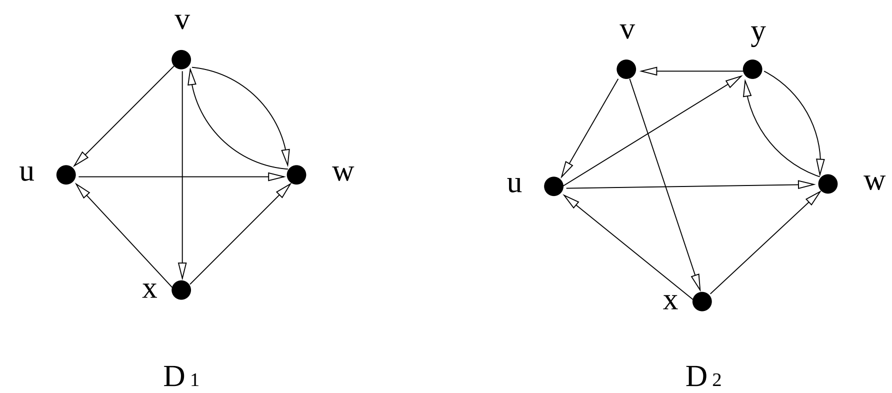


Figura 2.5:

Definición 12. *Una* subdigráfica *H de D es una digráfica tal que $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$. Es* subdigráfica propia *si $V(H) \subset V(D)$ y $F(H) \subset F(D)$.*

En la Figura 2.6 tenemos que H_1 es una subdigráfica propia de D, y aunque $V(H_2) \subseteq V(D)$, H_2 no es subdigráfica de D porque la flecha (w, z) no pertenece a $F(D)$.

Definición 13. *Sea $U \subseteq V(D)$, la* subdigráfica inducida *de D por U, es aquella que tiene como conjunto de vértices a U y como conjunto de flechas a las flechas de D que tienen sus extremos en U. Denotamos a esta subdigráfica por $D[U]$.*

En la Figura 2.7 tenemos la digráfica D y H_1, H_2 y H_3 subdigráficas inducidas de D donde H_1 es la subdigráfica inducida por $U_1 = \{a, b, c, f\}$, H_2 es la subdigráfica de D inducida por $U_2 = \{b, c, d, f\}$ y H_3 es la subdigráfica inducida de D por $U_3 = \{b, c, d, e, f\}$.

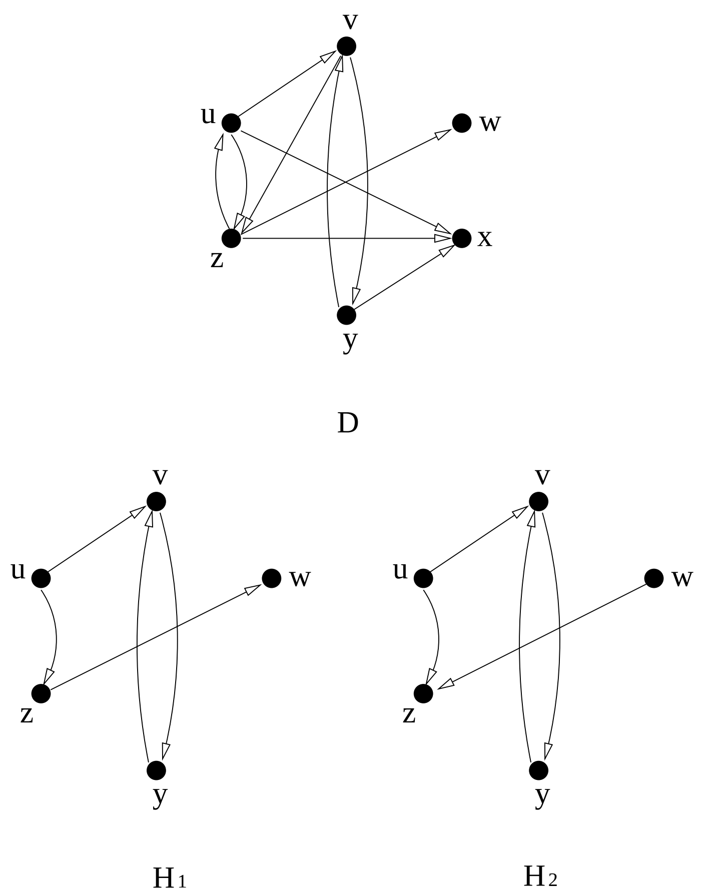


Figura 2.6:

Definición 14. *Un* camino *en una digráfica D es una sucesión de vértices $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ tal que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ se tiene $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ o $(u_{i+1}, u_i) \in F(D)$. En este caso decimos que u_1 y u_n son los extremos del camino y que el camino es un u_1u_n-camino de la digráfica.*

En la Figura 2.8 tenemos los siguientes caminos entre los vértices u y z, $C_1 = (u, v, y, z)$, $C_2 = (u, v, w, y, z)$, $C_3 = (u, v, w, x, v, y, z)$, $C_4 = (u, v, y, w, v, x, w, y, z)$ y $C_5 = (u, v, x, w, y, z)$ entre otros.

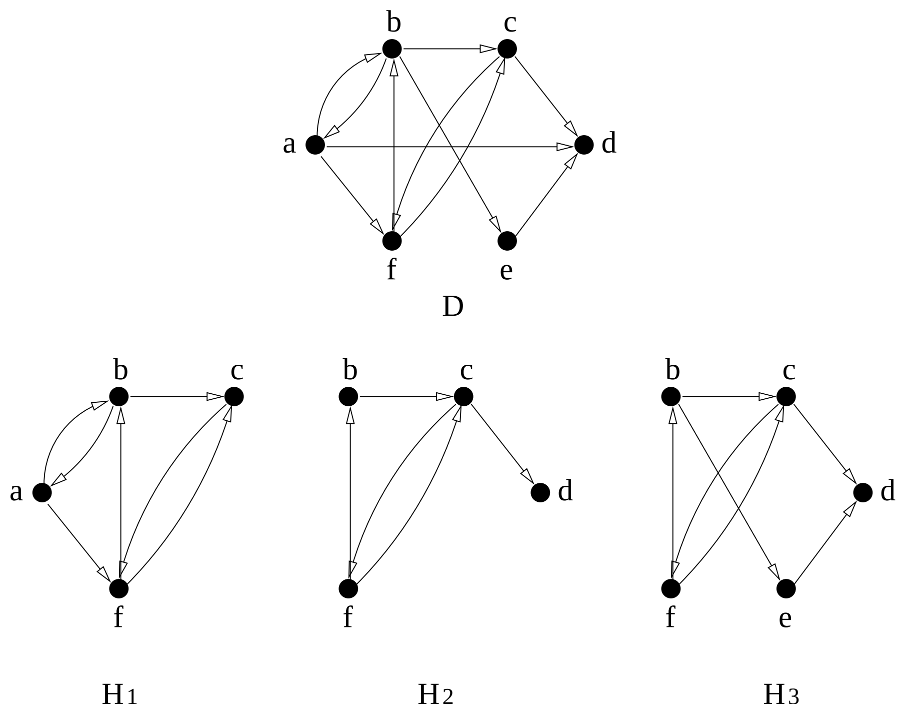


Figura 2.7:

Definición 15. *Una* trayectoria *es un camino tal que* $u_i \neq u_j$ *si* $i \neq j$.

En la Figura 2.8 las trayectorias entre u y z son $C_1 = (u, v, y, z)$, $C_2 = (u, v, w, y, z)$ y $C_5 = (u, v, x, w, y, z)$.

Definición 16. *Un* camino cerrado *en una digráfica es un camino* $(u_1, u_2 \ldots, u_n)$ *tal que* $u_1 = u_n$.

En la Figura 2.9 algunos caminos cerrados son: $C_1 = (u, v, y, z, u)$, $C_2 = (z, u, v, w, x, v, y, z)$, $C_3 = (v, y, w, x, v)$, $C_4 = (v, u, z, y, w, x, v)$ entre otros.

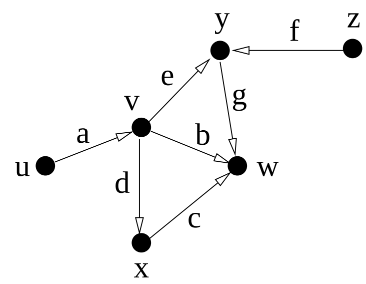


Figura 2.8:

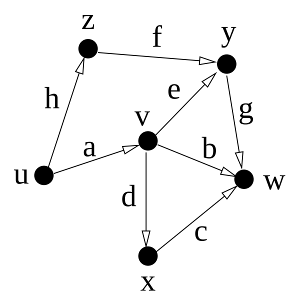


Figura 2.9:

Definición 17. *Un* ciclo *en una digráfica, es un camino cerrado* $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, *en el cual no se repiten vértices (excepto el primero que es igual al último).*

En la Figura 2.9 tenemos los siguientes ciclos:

$C_1 = (u, v, y, z, u)$, $C_3 = (v, y, w, x, v)$, $C_4 = (v, u, z, y, w, x, v)$, $C_5 = (w, y, v, w)$ y $C_6 = (v, w, x, v)$

Definición 18. *Un* camino dirigido *en una digráfica es un camino* $(u_1, \ldots, u_n)$ *tal que para cada* $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ *se tiene* $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$.

En la Figura 2.10 algunos de los caminos dirigidos entre u y y son:
$C_1 = (u, v, y)$, $C_2 = (u, v, w, y)$, $C_3 = (u, v, y, z, x, w, y)$, $C_4 = (u, z, x, w, y)$ y

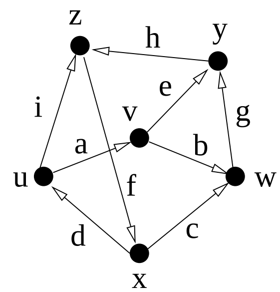


Figura 2.10:

$C_5 = (u, z, x, u, v, w, y)$ entre otros.

Definición 19. *Una digráfica es una* digráfica conexa, *si para todo par de vértices u y v, hay uv-camino dirigido o vu-camino dirigido en la digráfica.*

La digráfica de la Figura 2.10, es una digráfica conexa. Para u y z existe el camino dirigido (u, z); para u e y existe el camino (u, v, y); para u y v, existe el camino dirigido (u, v); para u y w; existe el camino dirigido (w, y, z, x, u); para u y x existe el camino dirigido (u, x). Para z e y existe el camino dirigido (y, z); para z y v existe el camino dirigido (z, x, u, v); para z y w existe el camino dirigido (z, x, w); para z y x existe el camino dirigido (z, x). Para y y v existe el camino dirigido (y, z, x, u, v); para y y w existe el camino dirigido (w, y); para y y x existe el camino dirigido (x, w, y). Para v y w existe el camino dirigido (v, w); para v y x existe el camino dirigido (x, u, v). Por último, para w y x exiaste el camino dirigido (x, w).

Definición 20. *Una* componente fuertemente conexa *C de una digráfica, es un subconjunto de los vértices de la digráfica, máxima por contención, tal que para todo par de vértices u y v en C, hay uv y vu-camino dirigido en la digráfica.*

Definición 21. *Una* trayectoria dirigida *en una digráfica, es un camino dirigido que además es una trayectoria.*

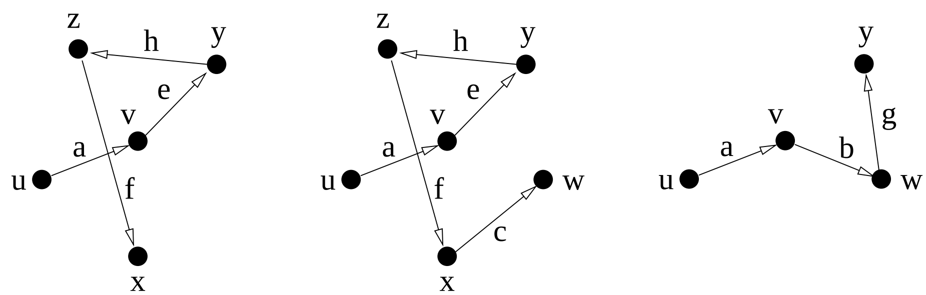


Figura 2.11:

En la Figura 2.11 tenemos algunas de las trayectorias dirigidas que hay en la digráfica de la Figura 2.10.

Definición 22. *Un* camino dirigido cerrado *en una digráfica es un camino dirigido que además es un camino cerrado.*

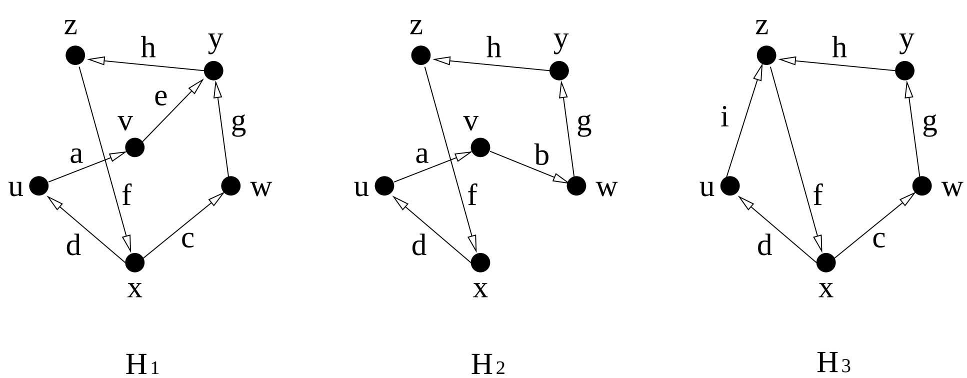


Figura 2.12:

En la Figura 2.12, tenemos los siguientes ejemplos de caminos dirigidos cerrados de la digráfica de la Figura 2.10, $H_1 = (w, y, z, x, u, v, y, z, x, w)$, $H_2 = (x, u, v, w, y, z, x)$ y $H_3 = (z, x, u, z, x, w, y, z)$

Definición 23. *Un* ciclo dirigido *en una digráfica es un camino dirigido cerrado en el cual no se repiten vértices (excepto el primero que es igual al último).*

En la Figura 2.12, la subdigráfica H_1 tiene el ciclo dirigido (u, v, y, z, x, u), la subdigráfica H_2 es un ciclo dirigido. Si quitamos de H_3 el vértice u, nos queda el ciclo dirigido $H_4 = (x, w, y, z, x)$.

Definición 24. *Dada una digráfica D y $C = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ un camino en D. Decimos que n es la* longitud *de C, donde n es el número de flechas que recorre C y la denotamos por $\ell(C)$.*

En la digráfica H_1 de la Figura 2.12, el camino $C = (u, v, y, w, x, z)$ tiene longitud 5. El camino $C' = (u, v, y)$ tiene longitud 2.

Definición 25. *Una digráfica es una* digráfica bipartita *si existe una bipartición $\{U, W\}$ de los vértices de D tal que cualquier flecha de D tiene un extremo en U y otro en W.*

En la Figura 2.13 tenemos un ejemplo de una digráfica bipartita D donde la partición es $U = \{a, c, e, g\}$ y $W = \{b, d, f\}$. La digráfica H no es bipartita porque, como hay flecha entre el vértice e y los vértices b y d estos vértices tendrían que estar en el otro conjunto, pero también hay flecha entre ellos, entonces no pueden estar en el mismo conjunto. Por lo tanto la digráfica H no es bipartita.

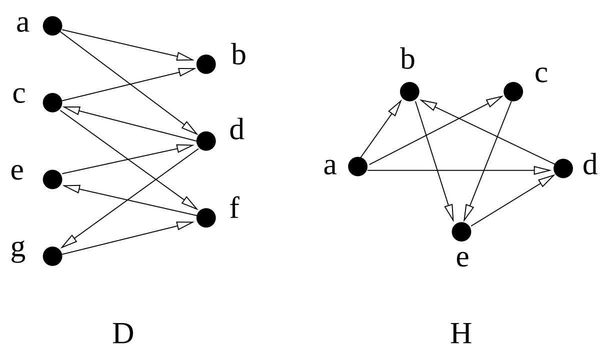


Figura 2.13:

Definición 26. *Sea D una digráfica y $N \subseteq V(D)$, N es un* conjunto independiente *de la digráfica D si para cualquier par de elementos de N no existen flechas entre ellos en D.*

Notemos que en cualquier digráfica D, un punto es un conjunto independiente, ya que la definición de digráficas no permite aristas de la forma (v, v) con $v \in V(D)$.

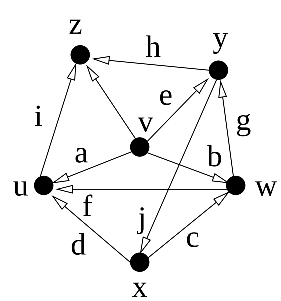


Figura 2.14:

En la digráfica de la Figura 2.14 los conjuntos independientes son:
$I_0 = \{u\}$, $I_1 = \{v\}$, $I_2 = \{w\}$, $I_3 = \{x\}$, $I_4 = \{y\}$ e $I_5 = \{z\}$ tienen

cardinalidad 1.
$I_6 = \{u, y\}$, $I_7 = \{v, x\}$, $I_8 = \{w, z\}$ e $I_9 = \{x, z\}$ de cardinalidad 2. No hay de cardinalidad mayor a 2.

Definición 27. *Sea D digráfica. Un subconjunto $S \subseteq V(D)$ se dice que es* seminúcleo *de D, si es un conjunto independiente y para toda $y \in V(D) \setminus S$ tal que hay Sy-flecha en D, se tiene que hay yS-flecha.*

En la Figura 2.14, el conjunto $S = \{z, w\}$ es seminúcleo. Es un conjunto independiente, y $u, y \in \Gamma^+_D(S)$, ((w, u) y (w, y) son flechas de la digráfica). Pero también (u, z) y (y, z) son flechas de la digráfica. Por lo tanto es seminúcleo de la digráfica.
En la misma digráfica el conjunto $S' = \{u, y\}$ es un conjunto independiente, pero $z \in \Gamma^+_D(u)$ y no hay zS'-flecha en la digráfica. Entonces S' no es seminúcleo de la digráfica.

Definición 28. *Sea D una digráfica y $N \subseteq V(D)$, N es un* conjunto absorbente *de la digráfica D si para cualquier vértice $u \in V(D) \setminus N$ tenemos que u es adyacente hacia algún elemento de N.*

En la digráfica de la Figura 2.14, los conjuntos absorbentes son:
$A_0 = \{u, v, w, x, y, z\}$ de cardinalidad 6.
$A_1 = \{u, v, w, x, z\}$, $A_2 = \{u, v, w, y, z\}$, $A_3 = \{u, v, x, y, z\}$, $A_4 = \{u, w, x, y, z\}$ y $A_5 = \{v, w, x, y, z\}$ de cardinalidad 5. El conjunto $\{u, v, w, x, y\}$ no es conjunto absorbente porque ninguno de sus elementos absorbe al vértice z.
$A_6 = \{u, v, w, z\}$, $A_7 = \{u, v, x, z\}$, $A_8 = \{u, v, y, z\}$, $A_9 = \{u, w, x, z\}$, $A_{10} = \{u, w, y, z\}$, $A_{11} = \{u, x, y, z\}$, $A_{12} = \{v, w, x, z\}$, $A_{13} = \{v, w, y, z\}$, $A_{14} = \{v, x, y, z\}$ y $A_{15} = \{w, x, y, z\}$ de cardinalidad 4. Observvemos que

z tiene que estar en todos los conjuntos absorbentes porque no hay ningún vértice que lo absorba.

$A_{15} = \{u, w, z\}$, $A_{16} = \{u, x, z\}$, $A_{17} = \{u, y, z\}$, $A_{18} = \{v, w, z\}$, $A_{19} = \{w, x, z\}$, $A_{20} = \{w, y, z\}$ y $A_{21} = \{x, y, z\}$ de cardinalidad 3.

$A_{22} = \{u, z\}$ y $A_{23} = \{w, z\}$ de cardinalidad 2. No hay ningún conjunto absorbente de cardinalidad 1.

Definición 29. *Sea D una digráfica y $N \subseteq V(D)$, N es un* núcleo *de D si es un conjunto independiente y absorbente de D.*

En la Figura 2.14 $N = I_8 = A_{23}$ es el único núcleo de la digráfica.

Definición 30. *Una digráfica D es una* digráfica núcleo perfecta *si toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo.*

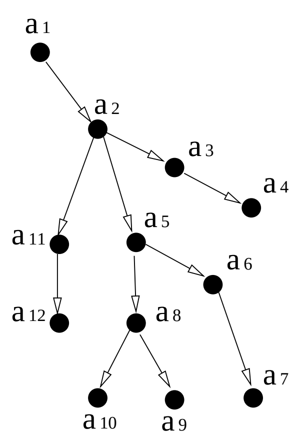


Figura 2.15:

En la Figura 2.15 tenemos una digráfica que es núcleo perfecta. Su núcleo es el conjunto $\{a_4, a_7, a_9, a_{10}, a_{12}, a_5, a_1\}$. Por ejemplo un núcleo de la subdigráfica inducida por el conjunto $\{a_4, a_8, a_9, a_{10}, a_3, a_1, a_6\}$ es $\{a_9, a_{10}, a_6, a_1, a_4\}$.

Esta digráfica es núcleo perfecta porque es una digráfica sin ciclos dirigidos, que según el Teorema 3 que luego veremos, esto implica que tenga núcleo. Y como toda subdigráfica inducida tampoco tiene ciclos dirigidos, entonces también tiene núcleo.

Definición 31. *Una digráfica es una* digráfica núcleo imperfecta crítica *si no tiene núcleo pero toda subdigráfica inducida propia de D tiene núcleo.*

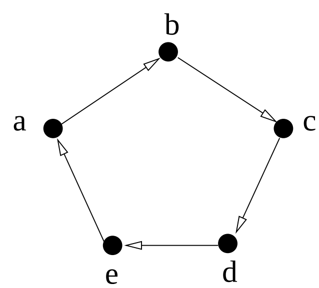


Figura 2.16:

En la Figura 2.16 tenemos un ciclo dirigido de longitud 5, que es una digráfica núcleo imperfecta crítica. No tiene núcleo. Supongamos que a pertenece a un núcleo, como absorbe a e, entonces e no está en el núcleo y como es adyacente a b, tampoco b esta en el núcleo, pero b tiene que ser absorbido por ningún elemento del núcleo, por lo tanto, c tiene que pertenecer a él. Como d es adyacente a c, no está en el núcleo, y como tiene que ser absorbido por el núcleo, entonces e tiene que estar en el núcleo. Pero ya habíamos visto que e no estaba en el núcleo. Por lo tanto a no está en el núcleo. Por la simétria del ciclo es lo mismo si empezamos suponiendo que cualquier otro vértice esta en el núcleo. Por lo tanto no tiene núcleo.

Las siguientes son definiciones de operaciones con las que trabajaremos más adelante.

Definición 32. *Sean $D_1, \ldots, D_p$ digráficas y sea $P = \{1, 2, \ldots, p\}$. El producto normal de estas digráficas, que se denota $D_1 \cdot D_2 \cdot \cdots \cdot D_p$ es la digráfica D tal que:*

$$V(D) = V(D_1) \times \cdots \times V(D_p) = \prod_{i \in P} V(D_i)$$

y donde

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_p) = \bigcup_{I \subseteq P, |I| \neq 0} (\prod_{i \in I} \Gamma_i(x_i) \times \prod_{j \in P \setminus I} \{x_j\})).$$

En la Figura 2.18 tenemos el producto normal de las siguientes digráficas:

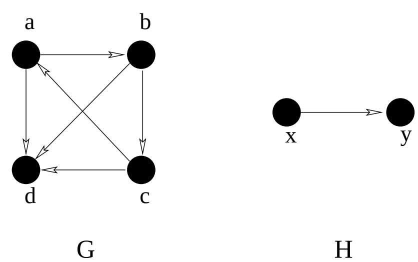


Figura 2.17:

Definición 33. *Sean $D_1, \ldots, D_p$ digráficas y sea $p = \{1, 2, \ldots, p\}$. La* suma cartesiana *de estas digráficas que se denota por $D_1 + D_2 + \cdots + D_p$, es la digráfica D tal que:*

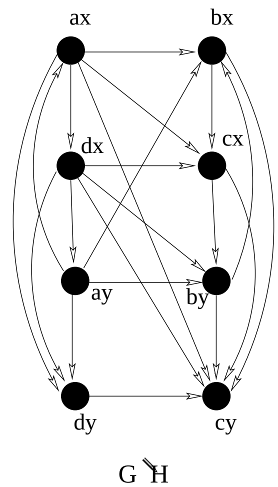


Figura 2.18:

$$V(D) = V(D_1) \times \cdots \times V(D_p) = \prod_{i \in P} V(D_i)$$
$$\Gamma(x_1, \ldots, x_p) = \bigcup_{i \in P} (\{x_1\} \times \cdots \times \{x_{i-1}\} \times \Gamma_i(x_i) \times \cdots \times \{x_p\})$$

En la Figura 2.19 tenemos la suma cartesiana de las digráficas de la Figura 2.17.

Definición 34. *Sean $D_1, \ldots, D_p$ digráficas y sea $p = \{1, 2, \ldots, p\}$. El producto cartesiano de estas digráficas que se denota por $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_p$, es la digráfica D tal que:*

$$V(D) = V(D_1) \times \cdots \times V(D_p) = \prod_{i \in P} V(D_i)$$
$$\Gamma(x_1, \ldots, x_p) = \prod_{i \in P} \Gamma_i(x_i)$$

En la Figura 2.20 tenemos el producto cartesiano de las digráficas de la Figura 2.17.

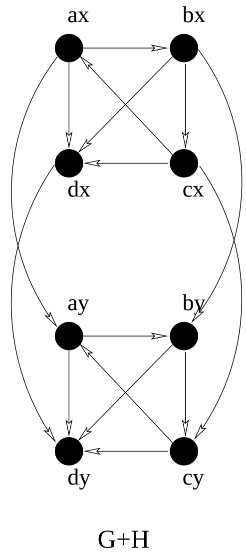


Figura 2.19:

Definición 35. *Sea D digráfica y $\alpha = (\alpha_v)_{v \in V(D)}$ una familia de digráficas ajenas dos a dos. La* suma de Zykov *de α sobre D, denotada por $\sigma(D, \tilde{\alpha})$, es la digráfica definida de la siguiente manera:*

$$V(\sigma(D,\tilde{\alpha})) = \bigcup_{v \in V(D)} V(\alpha_v)$$
$$F(\sigma(D,\tilde{\alpha})) = \bigcup_{v \in V(D)} F(\alpha_v) \cup \bigcup_{(u,v) \in F(D)} \{(x,y) | x \in V(\alpha_v), y \in V(\alpha_v)\}$$

En la Figura 2.22 tenemos la suma de Zykov de las digráficas de la Figura 2.21. Ya que tenemos que $(a,b) \in F(D)$, entonces en la suma de Zykov de estás digráficas tenemos que hay flecha de todos los vértices de D_a hacia todos los vértices de D_b. Ya que tenemos que $(b,c) \in F(D)$, entonces en la suma de Zykov de estás digráficas tenemos que hay flecha de todos los vértices de D_b hacia todos los vértices de D_c. Y por último ya que tenemos

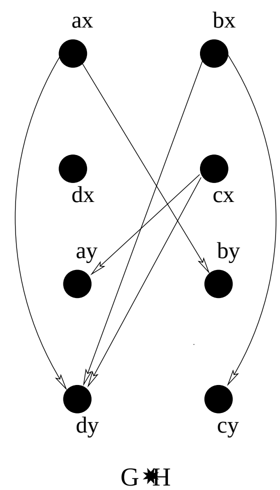


Figura 2.20:

que $(c, a) \in F(D)$, *entonces en la suma de Zykov de estás digráficas tenemos que hay flecha de todos los vértices de* D_c *hacia todos los vértices de* D_a.

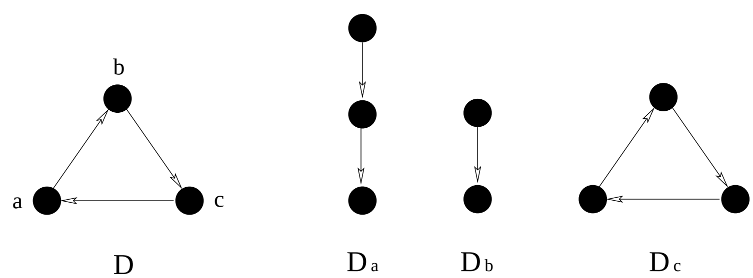


Figura 2.21:

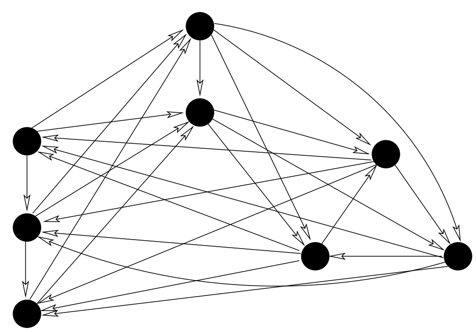


Figura 2.22:

Definición 36. *Sean* D_1 *y* D_2 *digráficas. Una* suma *de* D_1 *y* D_2 *es una digráfica, denotada* $\sigma(D_1, D_2)$*, tal que:*
$V(\sigma(D_1, D_2)) = V(D_1) \cup V(D_2)$ *y en donde para toda* $x \in V(D_1)$ *y* $y \in V(D_2)$ *tenemos que* $(x, y) \in F(\sigma(D_1, D_2))$ *ó* $(y, x) \in F(\sigma(D_1, D_2))$*.*

En la Figura 2.23 tenemos dos sumas de la digráfica con dos puntos y una flecha, consigo misma.

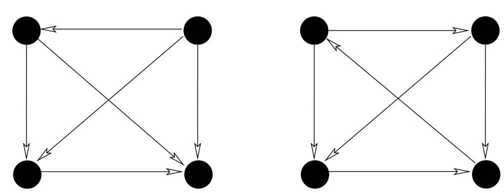


Figura 2.23:

Definición 37. *Sea* $\alpha = D_1 + D_2$*, donde* D_1 *y* D_2 *son digráficas. Diremos que* α *tiene la* propiedad A *si se cumplen las siguientes condiciones:*

1*) Si para todo* $\{x_1, x_2, x_3\} \subseteq V(\alpha)$ *tal que* $x_1 \in V(D_i)$ *y* $x_2, x_3 \in V(D_j)$*,*

($i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 2$) y $(x_1, x_2) \in F(\alpha)$ y $(x_2, x_3) \in F(\alpha)$ se tiene que $(x_1, x_3) \in F(\alpha)$.

2*) Si para todo $\{x_1, x_2, x_3\} \subseteq V(\alpha)$ tal que $x_1, x_2 \in V(D_i)$ y $x_3 \in V(D_j)$, ($i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 2$) y $(x_1, x_2) \in F(\alpha)$ y $(x_2, x_3) \in F(\alpha)$ se tiene que $(x_1, x_3) \in F(\alpha)$.*

En la Figura 2.23, sólo la digráfica de la izquierda tiene la propiedad A.

Capítulo 3

Núcleos

En esta sección expondremos algunos resultados sobre núcleos que serán muy importantes en el desarrollo de la función de Grundy.

Lema 1. *Si para cada subconjunto no vacío $A \subseteq V(D)$, la subdigráfica inducida $D[A]$ tiene seminúcleo, entonces D tiene núcleo.*

Demostración. Sea D una digráfica que cumple las hipótesis.
Si tomamos $A = V(D)$, por la hipótesis D tiene seminúcleo.
Sea S seminúcleo máximo de D.
Sea $B = V(D) \setminus (S \cup \Gamma_D(S))$.
Si $B = \emptyset$. Veamos que entonces S, es núcleo de D.
Ya tenemos que S es un conjunto independiente por ser seminúcleo, sólo falta ver que es un conjunto absorbente.
Sea $y \in V(D) \setminus S$, como $V(D) \setminus (S \cup \Gamma_D(S)) = B = \emptyset$, entonces $y \in \Gamma_D(S)$.
Entonces $y \in \Gamma_D^+(S)$ ó $y \in \Gamma_D^-(S)$.
Si $y \in \Gamma_D^-(S)$, entonces hay yS flecha en D, es decir, S absorbe a y. Si $y \in \Gamma_D^+(S)$, entonces hay Sy flecha en D. Pero como S es seminúcleo, entonces

hay yS flecha en D, es decir, S absorbe a y.

Por lo tanto, S es núcleo de D.

Supongamos que $B \neq \emptyset$.

Por hipótesis, $D[B]$ tiene seminúcleo, digamos S_B.

Tenemos que $S_B \subseteq V(D[B]) = V(D) \setminus (S \cup \Gamma_D(S))$, entonces para toda $x \in S_B$ tenemos que $x \notin (S \cup \Gamma_D(S))$. Esto es que no hay Sx ó xS flecha en D, para toda $x \in S_B$.

Por lo tanto $S \cup S_B$ es un conjunto independiente.

Y como para toda $y \in V(D) \setminus (S \cup S_B)$ tal que hay $(S \cup S_B)y$, entonces tenemos que hay $y(S \cup S_B)$-flecha.

Entonces $S \cup S_B$ es seminúcleo de D y esto contradice que S sea seminúcleo máximo. Por lo tanto S es núcleo de D. □

Teorema 1. *Toda digráfica simétrica tiene núcleo.*

Demostración. Sea D digráfica simétrica.

Un sólo vértice x, es un conjunto independiente de D. Podemos tomar un conjunto independiente máximo de D. Sea N un conjunto independiente máximo.

Por demostrar que N es núcleo de D.

Ya tenemos que N es independiente por definición de N. Sólo falta ver que es absorbente.

Sea $y \in V(D) \setminus N$. Como N es un conjunto independiente máximo, tenemos que el conjunto $N \cup y$ no es independiente, es decir, hay flecha entre N y y en alguna dirección. Pero como D es una digráfica simétrica, hay flecha en ambas direcciones, en particular hay yN flecha en D. Esto es N absorbe a y.

Por lo tanto, N es núcleo de D. □

Teorema 2. *Toda digráfica transitiva tiene núcleo.*

Demostración. Sea D una digráfica transitiva. El conjunto $V(D)$ es un conjunto absorbente de D. Podemos tomar un conjunto absorbente mínimo. Sea N un conjunto absorbente mínimo de D.

Por demostrar que N es núcleo de D.

Por definición de N, ya es un conjunto absorbente, sólo falta comprobar que es independiente.

Supongamos que N no es independiente, es decir, existen $x, y \in N$ tal que $(x, y) \in F(D)$.

Por ser D digráfica transitiva, para toda $z \in V(D)$ tal que $(z, x) \in F(D)$, tenemos que $(z, y) \in F(D)$ $((x, y) \in F(D))$. Esto es $N \setminus x$ es un conjunto absorbente, y es mas chico que N, que era conjunto absorbente mínimo.

Por lo tanto, N es un conjunto independiente de D. Por lo tanto N es núcleo de D. □

Teorema 3. *Una digráfica sin ciclos tiene núcleo y su núcleo es único.*

Demostración. Sea $A_0 = \{x \in V(D) | \Gamma^+_D(x) = \emptyset\}$. $A_0 \neq \emptyset$ (de lo contrario podemos formar un ciclo de la siguiente manera: tomamos un vértice x_0 y luego otro vértice x_1 en su vecindad exterior, y luego otro vértice x_2 en la vecindad exterior de x_1. De esta forma, obtenemos una sucesión de vértices $(x_0, x_1, ..., x_n, ...)$ y dado que el conjunto de vértices es finito, para cierta r, $x_r = x_s$ donde $s < r$. Así tendríamos el ciclo $(x_s, x_{s+1}, \ldots, x_r)$).

$D_1 = D[V(D) \setminus (A_0 \cup \Gamma^-_D(A_0))]$.

Como D_1 es subdigráfica inducida de D, tenemos que tampoco tiene ciclos.

Sea $A_1 = \{x \in V(D_1) | \Gamma^+_{D_1}(x) = \emptyset\}$.

$A_1 = \emptyset$ si y solo si $V(D_1) = \emptyset$.

Sea $D_2 = D[V(D_1) \setminus (A_1 \cup \Gamma^-_{D_1}(A_1))]$.

De esta manera tenemos una sucesión de subcojuntos $A_0, A_1, \ldots, A_p$ de $V(D)$ tal que,

$\bigcup\limits_{i=0}^{p}(A_i \cup \Gamma^-_{D_{i-1}}(A_i)) = V(D)$

Esto pasa porque el número de vértices es finito, y cada A_i es distinto del $\emptyset$. Por definición de cada A_i estos conjuntos son independientes. Tomemos un $x \in A_i$ y un $y \in A_j$ con $i \neq j$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $i < j$, entonces no hay flecha de x a y porque en D_{i-1} $\Gamma^+_D(x) = \emptyset$ y $y \in V(D_{i-1})$. Tampoco hay flecha de y a x, porque de haber flecha $y \in \Gamma^-_{D_{i-1}}(A_i)$ y entonces y ya no estaría en A_l para toda $l > i$ contradiciendo que $y \in A_j$. Por lo tanto $\bigcup\limits_{i=0}^{p} A_i$ es un conjunto independiente.

Veamos que es un conjunto absorbente.

Sea $y \in V(D) \setminus (\bigcup\limits_{i=0}^{p} A_i)$. Como $\bigcup\limits_{i=0}^{p}(A_i \cup \Gamma^-_{D_{i-1}}(A_i)) = V(D)$ y y no esta en $\bigcup\limits_{i=0}^{p} A_i$, entonces $y \in \Gamma^-_{D_{i-1}}(A_i)$ para una cierta i. Entonces existe $x \in A_i$ tal que $(y, x) \in F(D)$: Por lo tanto $\bigcup\limits_{i=0}^{p} A_i$ es núcleo de D.

La unicidad del núcleo se da porque el conjunto A_0 debe de ser parte de cualquier núcleo por no ser absorbido por ningún vértice. Con el mismo argumento vemos que $A_1, A_2, \ldots, A_p$ tienen que estar en el núcleo. $\square$

Teorema 4. *(Richardson [1953]) Una digráfica sin ciclos de longitud impar tiene núcleo.*

Demostración. Sea D digráfica sin ciclos impares. Usando el Lema 1 sólo probaremos que D tiene seminúcleo. Supongamos que D es una digráfica conexa.

Sea A una componente fuertemente conexa de D tal que $\Gamma^+_D(A) \subseteq V(A)$. Si $|A| = 1$, entonces A es seminúcleo.

Si $|A| > 1$, tomemos $x_0 \in A$. Para cualquier vértice $y \in A$ tenemos que las x_0y trayectorias tienen la misma paridad de lo contrario podríamos formar un ciclo de longitud impar, contradiciendo la hipótesis, además de que todos los vértices de las trayectorias están en A por ser componente fuertemente conexa.

Sea S el conjunto de todos los vértices y en A tales que hay una trayectoria de longitud par de x_0 a y.

S es un conjunto, sean x y y en S. Si son adyacentes, entonces $(x_0, y) \cup (y, x) \cup (x, x_0)$ es un ciclo de longitud impar, contradiciendo la hipótesis.

Sea $y \in V(D)$ tal que hay Sy flecha en D. Sea $x \in S$ con $(x, y) \in F(D)$. Ya que A es una componente fuertemente conexa tenemos que $y \in A$ por lo tanto hay una trayectoria P de y a x_0. Sea $P = (y = z_0, z_1 \ldots, z_m)$. Ya que $x \in S$ hay una trayectoria P' de x_0 a x, entonces $P' \cup (x, y) \cup (y, z_1)$ es una trayectoria de longitud par de x_0 a z_1 y asi $z_1 \in S$ y como $(y, z_1) \in F(D)$ tenemos que hay yS flecha en D. Por lo tanto, S es un seminúcleo de D, y asi D tiene núcleo. $\square$

Capítulo 4

Función de Grundy

En esta sección expondremos los resultados básicos sobre la función de Grundy. Veremos la relación de la función de Grundy con núcleo, así como algunas condiciones suficientes para que una digráfica tenga función de Grundy.

Definición 38. *Sea D una digráfica. Una función entera no negativa es una* función de Grundy *sobre D, si para cada vértice x, $g(x)$ es el mínimo entero no negativo que no pertenece al conjunto $\{g(y) |\ y \in \Gamma_D^+(x)\}$.*

Otra forma de definir la función de Grundy es la siguiente:

Definición 39. *Sea D una digráfica. Una función entera no negativa sobre D, es una función de Grundy si:*
i) $g(x) = k > 0$, implica que para toda $j, 0 \leq j < k$ existe $y \in \Gamma^+$ que cumple $g(y) = j$.
ii) $g(x) = k$, implica que para toda $y \in \Gamma^+(x)$, $g(y) \neq k$.

Ahora veamos que las dos definiciones son equivalentes.

Sea g función de Grundy de D según la primera definición.

Probaremos que cumple la primera condición de la segunda definición.

i) $g(x) = k > 0$, implica que para toda $j, 0 \leq j < k$, existe $y \in \Gamma_D^+(x)$ con $g(y) = j$.

Por la primera definición de función de Grundy, tenemos que $g(x)$ es el mínimo entero no negativo que no pertenece al conjunto $\{g(y)|y \in \Gamma_D^+(x)\}$. Es decir, que toda $j < k$ esta en el conjunto $\{g(y)|y \in \Gamma_D^+(x)\}$, de lo contrario $g(x) \neq k$, es decir, existe $y \in \Gamma_D^+(x)$ con $g(y) = j$.

Ahora veamos que cumple la segunda condición de la segunda definición.

ii)$g(x) = k$ implica que para toda $y \in \Gamma_D^+(x)$, $g(y) \neq k$.

$g(x)$ es el mínimo entero no negativo que no pertenece al conjunto $\{g(y)|y \in \Gamma_D^+(x)\}$. Si existe $y \in \Gamma_D^+(x)$ tal que $g(y) = k$, entonces $k \in \{g(y)|y \in \Gamma_D^+(x)\}$, así $g(x)$ no puede ser k porque contradice la prijmera definición. Entonces $g(y) \neq k$ para toda $y \in \Gamma_D^+(x)$.

Por lo tanto, la primera definición implica la segunda definición.

Probaremos que la segunda definición implica la primera definición.

Sea g función de Grundy de D según la segunda definición.

Demostraremos que $g(x)$ es el mínimo entero no negativo que no pertenece al conjunto $\{g(y)|y \in \Gamma_D^+(x)\}$, para toda $x \in V(D)$.

Considerando primero el caso $g(x) = 0$.

Por el inciso ii) de la segunda definición, tenemos que para toda $y \in \Gamma_D^+(x)$, $g(y) \neq 0$, es decir, $0 \notin \{g(y)|y \in \Gamma_D^+(x)\}$. Por lo tanto, en este caso, $g(x)$ es el mínimo entero no negativo, que no pertenece al conjunto $\{g(y)|y \in \Gamma_D^+(x)\}$. En este caso si se cumple la primera definición.

Ahora podemos suponer que $g(x) = k > 0$

El inciso i) de la segunda definición, dice que si $g(x) = k > 0$, entonces para toda $j, (0 \leq j < k)$ existe $y \in \Gamma_D^+(x)$ tal que $g(y) = j$. Esto quiere decir que que si $0 \leq j < k$, entonces $j \in \{g(y)|y \in \Gamma_D^+(x)\}$.

El inciso ii) de la segunda definición dice que $g(x) = k$, implica que para toda $y \in \Gamma_D^+(x)$, $g(y) \neq k$, es decir, $k \notin \{g(y)|y \in \Gamma_D^+(x)\}$. Entonces k es el mínimo entero no negativo que no pertenece al conjunto $\{g(y)|y \in \Gamma_D^+(x)\}$.

Por lo tanto g es función de Grundy según la primera definición.

Así las dos definiciones son equivalentes

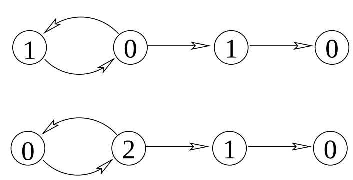


Figura 4.1:

Hay digráficas que tienen más de una función de Grundy. La figura anterior muestra una digráfica que admite más de una función de Grundy.

Para encontrar digráficas que no admiten función de Grundy es útil la siguiente proposición.

Proposición 1. *Si D tiene función de Grundy entonces D tiene núcleo.*

Demostración. Sea g función de Grundy de D, consideremos el siguiente conjunto:

$$S = \{x \in V(D) | g(x) = 0\}.$$

Entonces S es núcleo de D.

Primero veamos que es independiente.

Sea $x \in S$, es decir, $g(x) = 0$. Usando el inciso ii) de la segunda definición tenemos que para toda $y \in \Gamma_D^+(x)$, $g(x) \neq 0$, es decir, para toda $z \in S$, $(x, z) \notin F(D)$. Es decir, S es un conjunto independiente.

Falta ver que S es un conjunto absorbente.

Sea $y \in V(D) \setminus S$.

Como $y \notin S$, entonces $g(y) \neq 0$, es decir, $g(y) > 0$, (g es una función entera no negativa) por el inciso i) de la segunda definición de función de Grundy, existe $x \in \Gamma_D^+(y)$, tal que $g(x) = 0$, asi $(y, x) \in F(D)$ y $x \in S$. Entonces S es un conjunto absorbente.

Por lo tanto S es un núcleo de D. $\square$

De la proposición anterior, tenemos que una forma fácil de encontrar una digráfica que no admita función de Grundy es dando una digráfica sin núcleo, por ejemplo:

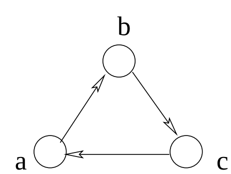


Figura 4.2:

Está digráfica no tiene función de Grundy. Si le damos al vértice a el valor 0, entonces c no puede tener valor 0 (por el inciso ii) de la segunda definición). Como el único vecino de b es c y c no tiene valor 0, entonces el valor de b es 0 (por el inciso i) de la segunda definición). Entonces, tanto a como b tienen valor 0, contradiciendo el inciso ii) de la segunda definición. Por la simetría de la digráfica pasa lo mismo sí empezamos dando el valor 0 a c o a b. Por lo tanto, está digráfica no tiene función de Grundy.

Sin embargo, que una digráfica tenga núcleo no es una condición suficiente para que tenga función de Grundy. La siguiente digráfica tiene núcleo pero no tiene función de Grundy. Esto pasa porque el núcleo de está digráfica es d, entonces el valor de este vértice tendría que ser 0. Si tratamos de asignar el valor 1 a cualquiera de los vértices a, b, c, entonces tendremos el mismo problema que con la digráfica de la Figura 4.2

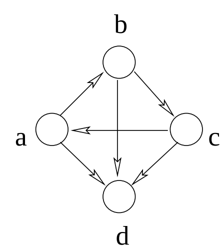


Figura 4.3:

Proposición 2. *Una digráfica núcleo perfecta tiene función de Grundy.*

Demostración. Sea D digráfica núcleo perfecta.

Definamos los siguientes conjuntos.

Sea S_0 núcleo de D, este existe por ser D digráfica núcleo perfecta, esto es $S_0 \neq \emptyset$.

Si $S_0 \neq V(D)$, entonces nos fijamos en la subdigráfica inducida

$D_1 = D[V(D) \setminus S_0]$.

Por ser subdigráfica inducida de D y por ser D digráfica núcleo perfecta, tenemos que existe S_1, núcleo de D_1.

$S_1 \neq \emptyset$ y ya que $S_1 \subseteq V(D_1) = V(D) \setminus S_0$ tenemos que $S_0 \cap S_1 = \emptyset$.

Si $S_0 \cup S_1 \neq V(D)$, entonces nos fijamos en la subdigráfica inducida $D_2 = D[V(D) \setminus (S_0 \cup S_1)]$.

Por ser subdigráfica inducida de D y por ser D digráfica núcleo perfecta, tenemos que existe S_2, núcleo de D_2.

$S_2 \neq \emptyset$ y $S_2 \cap (S_0 \cup S_1) = \emptyset$ por que $S_2 \subseteq V(D_2) = V(D) \setminus (S_0 \cup S_1)$.

De esta manera seguimos definiendo subconjuntos S_i de $V(D)$, hasta encontrar una $r \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{i=0}^{r} S_i = V(D)$ y $\bigcup_{i=0}^{r-1} S_i \neq V(D)$.

Esta r existe porque las S_i's son subconjuntos disjuntos no vacíos de $V(D)$ y $|V(D)| = m$ para alguna $m \in \mathbb{N}$.

Definimos una función g de la siguiente manera:

$$g : V(D) \to \mathbb{N}$$
$$g(x) = k \Leftrightarrow x \in S_k.$$

Mostraremos que g es función de Grundy de D.

i) $g(x) = k > 0$, implica para toda $j, 0 \leq j < k$, existe $y \in \Gamma_D^+(x)$ tal que $g(y) = j$.

Como $g(x) = k$, entonces $x \in S_k$ por definición de g. Tomamos $j,\ 0 \leq j < k$.

Ya que $0 \leq j < k$, entonces $x \in V(D_1) = V(D) \setminus (\bigcup_{i=0}^{j-1} S_i)$, de lo contrario x no podría estar en $V(D_k) = V(D) \setminus (\bigcup_{i=0}^{k-1} S_i)$.

Por ser S_j núcleo de D_j, entonces existe $y \in S_j$ tal que $(x, y) \in F(D)$ y por definición de g, $g(y) = j$.

ii) $g(x) = k$, implica que para toda $y \in \Gamma_D^+(x)$, $g(y) \neq k$.

Por definición de g, $g(x) = k$ implica que $x \in S_k$. Como S_k es núcleo D_k, tenemos que para toda $y \in \Gamma_D^+(x)$, $g(y) \neq k$, de lo contrario, se contradice la independencia de S_k.

Por lo tanto g es función de Grundy de D. $\square$

Corolario 1. *Toda digráfica simétrica tiene función de Grundy.*

Demostración. Sea D digráfica simétrica. Por el Teorema 1, tenemos que toda digráfica simétrica tiene núcleo. Sea N núcleo de D.

Sea $D_1 = D[V(D) \setminus N]$. Veamos que también es una digráfica simétrica.

Sean $x, y \in V(D_1)$, supongamos que $(x, y) \in F(D_1)$.

Por definición de D_1, $(x, y) \in F(D)$. Y por ser D simétrica, $(y, x) \in F(D)$. Entonces por ser D_1 subdigráfica inducida de D, $(y, x) \in F(D_1)$. Asi D_1 es digráfica simétrica y por el Teorema 1 tiene núcleo, digamos N_1.

De esta manera obtenemos una sucesión $N_0, N_1, \ldots, N_m$ de subconjuntos de $V(D)$ tal que $\bigcup\limits_{j=0}^{m} N_j = V(D)$, $N_i \cap N_j = \emptyset$ si $i \neq j$, donde N_i es núcleo de $D[V(D) \setminus \bigcup\limits_{j=0}^{i-1} N_j]$.

Definimos $f : D \longrightarrow \mathbb{N}$ donde

$f(x) = k \Leftrightarrow x \in N_k$

Veamos que f es función de Grundy de D.

(1) $f(x) = k > 0$ implica que para toda $j, 0 \leq j < k$ existe $y \in \Gamma_D^+(x)$ con $f(y) = j$.

Sea $x \in V(D)$ tal que $f(x) = k > 0$ y sea $j, 0 \leq j < k$. Como $j < k$ tenemos que $N_k \subseteq V(D_j)$ y como N_j es núcleo de D_j existe $y \in N_j$ tal que

$(x, y) \in F(D_j)$.
Entonces $y \in \Gamma_D^+(x)$ y $f(y) = j$.

(2)$f(x) = k$ implica que para toda $y \in \Gamma_D^+(x)$, $f(y) \neq k$.
Sea $y \in \Gamma_D^+(x)$. Como $f(x) = k \Leftrightarrow x \in N_k$ donde N_k es núcleo (de D_k), y por lo tanto es un conjunto independiente. Ya que $f(y) = k$ contradice la independencia de N_k, $f(y) \neq k$. □

Corolario 2. *Toda digráfica transitiva tiene función de Grundy.*

Demostración. Sea D digráfica transitiva. Por el Teorema 2, toda digráfica transitiva tiene núcleo. Sea N_0 núcleo de D. Sea $D_1 = [V(D) \setminus N_0]$. Veamos que D_1 es una digráfica transitiva. Sean $x, y, z \in V(D_1)$ tal que (x, y) y $(y, z) \in F(D_1)$. Como D_1 es subdigráfica inducida de D, tenemos que (x, y) y $(y, z) \in F(D)$ y como D es transitiva, entonces $(x, z) \in F(D)$. Ya que $x, z \in V(D_1)$, entonces $(x, z) \in F(D_1)$ y por lo tanto D_1 es transitiva. Por el Teorema 2 tiene núcleo. Sea N_1 núcleo de D_1.
De esta manera obtenemos una sucesión $N_0, N_1, \ldots, N_m$ de subconjuntos de $V(D)$ tal que $\bigcup\limits_{j=0}^{m} N_j = V(D)$, $N_i \cap N_j = \emptyset$ si $i \neq j$, donde N_i es núcleo de $D[V(D) \setminus \bigcup\limits_{j=0}^{i-1} N_j]$.
Definimos $f : D \longrightarrow \mathbb{N}$
donde $f(x) = k \Leftrightarrow x \in N_k$
Veamos que f es función de Grundy de D. (1) $f(x) = k > 0$ implica que para toda $j, 0 \leq j < k$ existe $y \in \Gamma_D^+(x)$ con $f(y) = j$.
Sea $x \in V(D)$ tal que $f(x) = k > 0$ y sea $j, 0 \leq j < k$. Como $j < k$ tenemos que $N_k \subseteq V(D_j)$ y como N_j es núcleo de D_j existe $y \in N_j$ tal que

$(x, y) \in F(D_j)$.

Entonces $y \in \Gamma^+_D(x)$ y $f(y) = j$.

(2)$f(x) = k$ implica que para toda $y \in \Gamma^+_D(x)$ $f(y) \neq k$.

Sea $y \in \Gamma^+_D(x)$.Como $f(x) = k \Leftrightarrow x \in N_k$ donde N_k es núcleo (de D_k), y por lo tanto es un conjunto independiente. Ya que $f(y) = k$ contradice la independencia de N_k.

Por lo tanto $f(y) \neq k$. □

Corolario 3. *Toda digráfica sin ciclos impares tiene función de Grundy.*

Demostración. Sea D digráfica sin ciclos impares. Por el Teorema 4, toda digráfica sin ciclos impares tiene núcleo. Sea N_0 núcleo de D. Sea $D_1 = D[V(D) \setminus N_0]$. Como D_1 es subdigráfica inducida de D y D no tiene ciclos impares, tenemos que D_1 tampoco tiene ciclos impares, y por el Teorema 4 tiene núcleo. Sea N_1 núcleo de D_1. De esta manera obtenemos una sucesión $N_0, N_1, \ldots, N_m$ de subconjuntos de $V(D)$ tal que $\bigcup_{j=0}^{m} N_j = V(D)$, $N_i \cap N_j = \emptyset$ si $i \neq j$, donde N_i es núcleo de $D[V(D) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} N_j]$.

Definimos $f : D \longrightarrow \mathbb{N}$ donde

$f(x) = k \Leftrightarrow x \in N_k$

Veamos que f es función de Grundy de D. (1) $f(x) = k > 0$ implica que para toda $j, 0 \leq j < k$ existe $y \in \Gamma^+_D(x)$ con $f(y) = j$.

Sea $x \in V(D)$ tal que $f(x) = k > 0$ y sea $j, 0 \leq j < k$. Como $j < k$ tenemos que $N_k \subseteq V(D_j)$ y como N_j es núcleo de D_j existe $y \in N_j$ tal que $(x, y) \in F(D_j)$.

Entonces $y \in \Gamma^+_D(x)$ y $f(y) = j$.

(2)$f(x) = k$ implica que para toda $y \in \Gamma_D^+(x)$ $f(y) \neq k$.
Sea $y \in \Gamma_D^+(x)$.Como $f(x) = k \Leftrightarrow x \in N_k$ donde N_k es núcleo (de D_k), y por lo tanto es un conjunto independiente. Ya que $f(y) = k$ contradice la independencia de N_k, $f(y) \neq k$. $\square$

Teorema 5. *Una digráfica sin ciclos, tiene una única función de Grundy. Además, para cada vértice x, $g(x)$ no excede la longitud de la trayectoria máxima desde x.*

Demostración. Por el Teorema 3 tenemos que D tiene un único núcleo. Sea N_0 el único núcleo de D. Sea $D_1 = D[V(D) \setminus N_0]$. Como D_1 es subdigráfica inducida de D y D no tiene ciclos, entonces D_1 tampoco tiene ciclos y por el Teorema 3, D_1 tiene un único núcleo, digamos N_2.
De esta manera obtenemos una sucesión $N_0, N_1, \ldots, N_m$ de subconjuntos de $V(D)$ tal que $\bigcup\limits_{j=0}^{m} N_j = V(D)$, $N_i \cap N_j = \emptyset$ si $i \neq j$, donde N_i es núcleo de $D[V(D) \setminus \bigcup\limits_{j=0}^{i-1} N_j]$.
Definimos $f : D \longrightarrow \mathbb{N}$ donde
$f(x) = k \Leftrightarrow x \in N_k$
Veamos que f es función de Grundy de D. (1) $f(x) = k > 0$ implica que para toda $j, 0 \leq j < k$ existe $y \in \Gamma_D^+(x)$ con $f(y) = j$.
Sea $x \in V(D)$ tal que $f(x) = k > 0$ y sea $j, 0 \leq j < k$. Como $j < k$ tenemos que $N_k \subseteq V(D_j)$ y como N_j es núcleo de D_j existe $y \in N_j$ tal que $(x, y) \in F(D_j)$.
Entonces $y \in \Gamma_D^+(x)$ y $f(y) = j$.

(2)$f(x) = k$ implica que para toda $y \in \Gamma_D^+(x)$ $f(y) \neq k$.

Sea $y \in \Gamma_D^+(x)$.Como $f(x) = k \Leftrightarrow x \in N_k$ donde N_k es núcleo (de D_k), y por lo tanto es un conjunto independiente. Ya que $f(y) = k$ contradice la independencia de N_k, $f(y) \neq k$. Ahora veamos que la función de Grundy de D es única.

Sea g función de Grundy de D. Como cada N_0 es el único núcleo de D, entonces $g^{-1}(0) = N_0 = f^{-1}(0)$. Como N_1 es el único núcleo de D_1, entonces $g^{-1}(1) = N_1 = f^{-1}(1)$. De esta manera vemos que $g^{-1}(i) = f^{-1}(i)$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y entonces f es única.

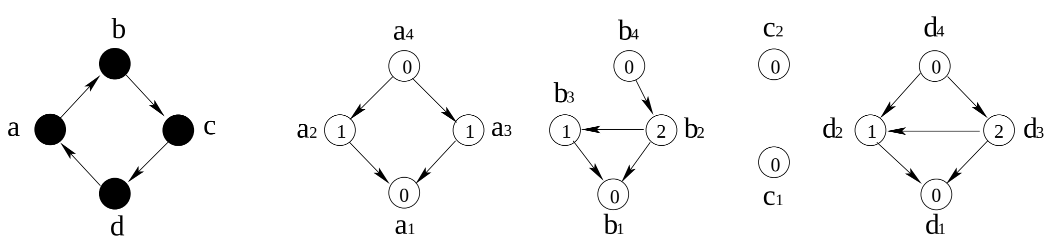
$\square$

Capítulo 5

Suma de Zykov

Teorema 6. *Sea D digráfica y $\alpha = (\alpha_v)_{v \in V(D)}$ una familia de digráficas ajenas dos a dos. Si D es núcleo perfecta y cada α_v tiene función de Grundy, para toda $v \in V(D)$, entonces $\sigma(D, \alpha)$ tiene función de Grundy.*

Antes de dar la demostración de este teorema, ejemplificaremos la idea de la construcción que nos servira para definir la función de Grundy en la suma de Zykov. Tomemos las siguientes digráficas:

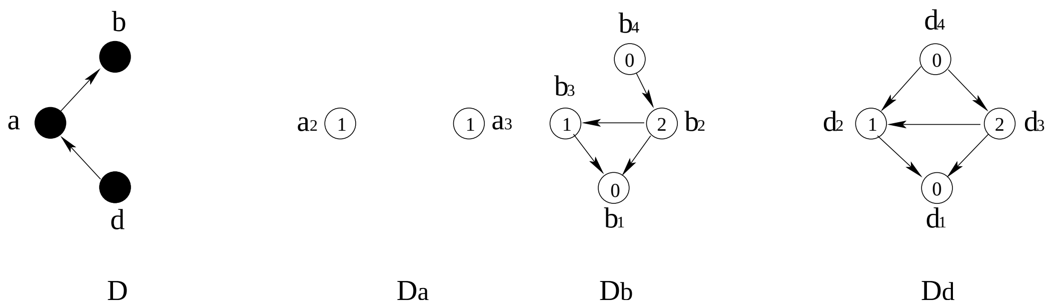


D Da Db Dc Dd

Estas digráficas cumplen con las hipótesis del Teorema

Tomamos un núcleo de D, digamos $S_0 = \{a, c\}$. De las digráficas D_a y D_c, tomamos los vértices tales que $f_a(x) = 0$ o $f_c(y) = 0$, donde f_a y f_c son función de Grundy de D_a y D_c respectivamente. Así tenemos el conjunto $N_0 = \{a_1, a_4, c_1, c_2\}$. Ahora nos fijamos en los vértices de D, (a, b, c y d) tales que $V(D_i) \subseteq N_0$. Con estos vértices formamos el conjunto M_0. En este caso $M_0 = \{c\}$.

Tomamos la digráfica D_1, que es la subdigráfica inducida de D por los vértices a, b y d (Quitamos el conjunto $M_0 = |c|$). Además, de cada digráfica (D_a, D_b, D_c y D_d) quitamos los vértices que estén en el conjunto N_0. Así nos quedan las digráficas*:*



Con estas digráficas podemos volver a realizar la misma construcción y así, obtener el conjunto N_1 (ahora no nos fijaremos en los vértices con valor 0, lo que haremos sera buscar el valor mínimo en cada digráfica y tomar los vértices que lo alcancen. En el caso de digráfica D'_a este valor es 1). Repitiendo la misma construcción obtendremos una sucesión de subconjuntos de los vértices de la suma de Zykov. La función de Grundy que definiremos en la suma de Zykov, estará dada en base a estos subcojuntos N_k. Ahora si dsaremos la demostración

Demostración. Sean D y α como en las hipótesis. Para cada $v \in V(D)$ con-

sideramos una función de Grundy f_v de α_v. Como D es núcleo perfecta, tomamos un núcleo S_0 de D y definimos los siguientes conjuntos:
Sea $N_0 = \{x \in V(\sigma(D,\alpha)) | f_y(x) = 0, \text{ para algún } y \in S_0\}$.
$M_0 = \{y \in V(D) | V(\alpha_y) \subseteq N_0\}$.

Definimos $D_1 = D[V(D) \setminus M_0]$
Ya que $D_1 = D[V(D) \setminus M_0]$ es una subdigráfica inducida de D y como esta es núcleo perfecta, existe N_1 núcleo de D_1.
Para toda $y \in N_1$ denotaremos $m_{(1,y)} = \text{mín}\{f_y(x) | x \in V(\alpha_y) \setminus N_0\}$. Ahora definiremos los siguientes conjuntos:
$N_1 = \{x \in (V(\sigma(D,\alpha))) \setminus N_0) |\ f_y(x) = m_{(1,y)}, \text{ para algún } y \in S_1\}$.
$M_1 = \{y \in V(D) | V(\alpha_y) \subseteq (N_0 \cup N_1)\}$.

Observemos que $N_0 \cap N_1 = \emptyset$. Tomemos $y \in S_0$, entonces tenemos f_y función de Grundy de α_y. Por lo tanto, para algún $z \in V(\alpha_y)$, $f_y(z) = 0$. Lo que implica que $z \in N_0$, $N_0 \neq \emptyset$.
Si $V(D_1) = \emptyset$ tenemos $N_0 = V(\sigma(D,\alpha))$.
Si $V(D_1) \neq \emptyset$, entonces para todo $w \in N_1$, tenemos por definición de N_1, que $w \in (V(\sigma(D,\alpha)) - N_0)$, es decir, $w \notin N_0$.
De esta forma, definimos una sucesión de subconjuntos de $\sigma(D,\alpha))$ y otra de subconjuntos de D. Si S_i es núcleo de D_i, entonces
$N_i = \{x \in (V(\sigma(D,\alpha)) \setminus (\bigcup_{j=o}^{i-1} N_j)) | f_y(x) = m_{(i,y)}, y \in S_k\}$
con $m_{(i,y)} = \text{mín}\{f_y(x) | x \in (V(\alpha_y) \setminus (\bigcup_{j=o}^{i-1} N_j))\}$
$M_i = \{y \in V(D) | V(\alpha_y) \subseteq (\bigcup_{j=o}^{i} N_j)\}$

Ahora podemos definir D_{i+1}, S_{i+1}, N_{i+1} y M_{i+1} de la siguiente manera:
$D_{i+1} = D[V(D) - (\bigcup_{j=o}^{i} M_j)]$; S_{i+1} es un núcleo de D_{i+1} (existe por ser D_{i+1} subdigráfica inducida de D); $m_{(i+1,y)} = \text{mín}\{f_y(x)|x \in V(\alpha_y) \setminus (\bigcup_{j=o}^{i} N_j))\}$
$N_{i+1} = \{x \in (V(\sigma(D,\alpha)) \setminus (\bigcup_{j=o}^{i} N_j))|f_y(x) = m_{(i,y)}, y \in S_k\}$
$M_{i+1} = \{y \in V(D)|V(\alpha_y) \subseteq (\bigcup_{j=o}^{i+1} N_j)\}$.
Al igual que con N_0 y N_1, tenemos que si $i \neq j$, entonces $N_i \cap N_j = \emptyset$.
Este procedimiento termina cuando encontramos el primer número natural r tal que $V(D_r) = \emptyset$. Este número existe porque tenemos una suceción de subconjuntos de $V(D)$ no vacíos N_i.
Definimos $F : V(\sigma(D,\alpha)) \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que
$F(x) = k \Leftrightarrow x \in N_k$. F esta bien definida, ya que $N_i \cap N_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
Veamos primero que N_k es un conjunto independiente de
$\tilde{\sigma}_k = \sigma(D,\alpha)[V(\sigma(D,\alpha)) \setminus (\bigcup_{j=o}^{k-1} N_j))]$ para toda $1 \leq k < r$.
Sean $x, z \in N_k$. Consideremos los siguientes dos casos:
1)$x, z \in V(\alpha_y)$, para alguna $y \in V(D)$
Entonces por definición de N_k, $f_y(x) = f_y(z) = k$ y por ser f_y función de Grundy de α_y, x y z son independientes en α_y y por definición de $\sigma(D,\alpha)$ también son independientes en $\tilde{\sigma}_k$.
2)$x \in V(\alpha_y)$ y $z \in V(\alpha'_y)$ con y, $y' \in V(D)$
Como $x, z \in N_k$, entonces y, $y' \in S_k$, donde S_k es núcleo de D_k. Entonces y y y' son independientes en D, por lo tanto por definición de $\sigma(D,\alpha)$, no hay flecha entre α_y y α'_y, entonces x, z son independientes en $\tilde{\sigma}_k$.
Por lo tanto N_k es un conjunto independiente en $\tilde{\sigma}_k$.

Ahora veamos que N_k es un conjunto absorbente de

$\tilde{\sigma}_k = \sigma(D,\alpha)[V(\sigma(D,\alpha)) \setminus (\bigcup_{j=0}^{k-1} Nj)]$

Sea $z \in V(\tilde{\sigma}_k)$ tal que $z \notin N_k$, $z \in V(\alpha_y)$ para alguna $y \in V(D)$. Consideremos los siguientes casos.

1)$y \in S_k$.

Como $z \notin N_k$, tenemos por definición de N_k que $f_y(z) > m(k,y)$, y por ser f_y función de Grundy $\exists x \in \Gamma^+_{\alpha_y}(z)$ tal que $f_y(x) = m(k,y)$, entonces $x \in N_k$ y $x \in \Gamma^+_{\sigma(\tilde{D},\alpha)(z)}$.

2)$y \notin S_k$

Por ser S_k núcleo de D_k $\exists y' \in S_k$ tal que $(y,y') \in F(D_k)$ y $\exists x \in V(\alpha'_y)$ tal que $f'_y(x) = m(k,y)$. Entonces por definición de $\sigma(D,\alpha)$ y de $\tilde{\sigma}_k$, $(z,x) \in F(\tilde{\sigma}_k)$. Por lo tanto es N_k es núcleo de $\tilde{\sigma}_k$.

Ahora demostraremos que F es función de Grundy.

$i)F(x) = k > 0$. Por demostrar que para toda j, $0 \leq j < k$ existe $y \in \Gamma^+_{\sigma(D,\alpha)}(x)$ tal que $F(y) = j$.

Sea j $(0 \leq j < k)$. Tenemos por lo visto anteriormente que N_j es núcleo de $\tilde{\sigma}_j$. Además $N_j \neq \emptyset$ por ser $V(D_i) \neq \emptyset$, y tenemos que $\tilde{\sigma}_k \subseteq \tilde{\sigma}_j$, entonces N_j absorbe a $\tilde{\sigma}_k$. Por lo tanto existe $y \in N_j$ tal que $(x,y) \in F(\sigma(D,\alpha))$ y $F(y) = j$ porque $y \in N_j$.

$ii)F(x) = k$. Por demostrar que para toda $y \in \Gamma^+_{\sigma(D,\alpha)}(x), F(y) \neq k$.

Sea $y \in \Gamma^+_{\sigma(D,\alpha)}(x)$. Supongamos que $F(y) = k$, pero N_k es núcleo de $\tilde{\sigma}_k$, entonces x y y son independientes en $\tilde{\alpha}_k$ contradiciendo que $y \in \Gamma^+_{\sigma(D,\alpha)}(x)$. Por lo tanto $F(y) \neq k$, para toda $y \in \Gamma^+_{\sigma(D,\alpha)}(x)$.

Por lo tanto F es función de Grundy de $\tilde{\alpha}$. $\square$

Como consecuencia del Teorema 6 obtenemos una cota superior del valor máximo de la función de Grundy F, construída en la prueba del mismo.

Corolario 4. *Sea D digráfica y $\alpha = (\alpha_v)_{v \in V(D)}$ una familia de digráficas ajenas dos a dos. Si D es núcleo perfecta y cada α_v tiene función de Grundy f_v, para toda $v \in V(D)$, entonces $\sigma(D, \alpha)$ tiene función de Grundy F y* $\max\{F(x)|x \in V(\sigma(D, \alpha)) \leq \sum\limits_{u \in V(D)} m_u + |V(D)| - 1$*, donde* $m_u = \max\{f_u(x)|x \in V(\alpha_u)\}$.

Demostración. Como D es núcleo perfecta, tiene función de Grundy. Tomemos f función de Grundy de D. Por el Teorema 6 tenemos que $\sigma(D, \alpha)$ tiene función de Grundy. Sea F la función de Grundy definida en la prueba del Teorema 6.

En un caso extremo, f toma valores distintos en cada vértice de D.

Entonces si $f(x_0) = 0$, tenemos que $S_0 = \{x_0\} = f^{-1}(0)$ es núcleo de D, y así el conjunto $f_{x_0}^{-1}(0)$ es núcleo de $\sigma(D, \alpha)$.

Entonces un núcleo de $\sigma(D, \alpha)[V(\sigma(D, \alpha)) \setminus f_{x_0}^{-1}(0)]$ será: $f_{x_0}^{-1}(1)$ si $V(\alpha_{x_0}) \setminus f_{x_0}^{-1}(0) \neq \emptyset$;

ó $f_y^{-1}(0)$ si $V(\alpha_{x_0}) \setminus f_{x_0}^{-1}(0) = \emptyset$ y $f(y) = 1$.

Así para cada $u \in V(D)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_u^{-1}(n) \neq \emptyset$ tenemos que $f_u^{-1}(n) = F^{-1}(m)$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Debemos agregar $|V(D)| - 1$ a la cota superior porque al menos hay $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$, $n = |V(D)|$, tal que $f_{x_i}(y_i) = 0$ con $y_i \in V(\alpha_{x_i})$. Y sólo uno de ellos conserva su valor en la nueva función de Grundy. $\square$

La digráfica de la Figura 5.1,es un ejemplo de suma de Zykov en donde es alcanzada la cota del Corolario 4.

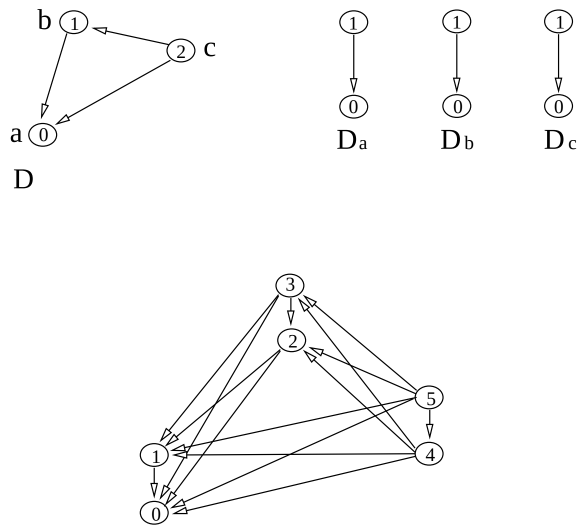


Figura 5.1:

En esta digráfica, $\max f_a = 1$, $\max f_b = 1$, $\max f_c = 1$ y $|V(D)| = 3$. Y tenemos que $\max F = 5 = 2 + 1 + 1 + 1 = (|V(D)| - 1) + \max f_a + \max f_b + \max f_c$.

La digráfica de la Figura 5.2 no tiene función de Grundy. El único núcleo de está digráfica es el conjunto $\{a_2, d_1\}$, entonces estos vértices deben tener valor 0. El conjunto $\{a_1, d_2\}$ es el único núcleo de la subdigráfica inducida por $V(\sigma(D, \alpha)) \setminus \{a_2, d_1\}$, entonces estos vértices deben tener valor 1. La subdigráfica inducida de $\sigma(D, \alpha)$ por el conjunto $\{b_1, b_2, c_1, c_2, d_3\}$ no tiene núcleo porque es una digráfica completa en la que ningún vértice absorbe a los demás. Por lo tanto en la digráfica de la Figura 5.2 tenemos que D tiene función de Grundy pero no es núcleo perfecta, y D_a, D_b, D_c y D_d tienen función de Grundy, y sin embargo la suma de Zykov no tiene función de Grundy. Por lo tanto, es necesaria la condición de que D sea núcleo perfecta.

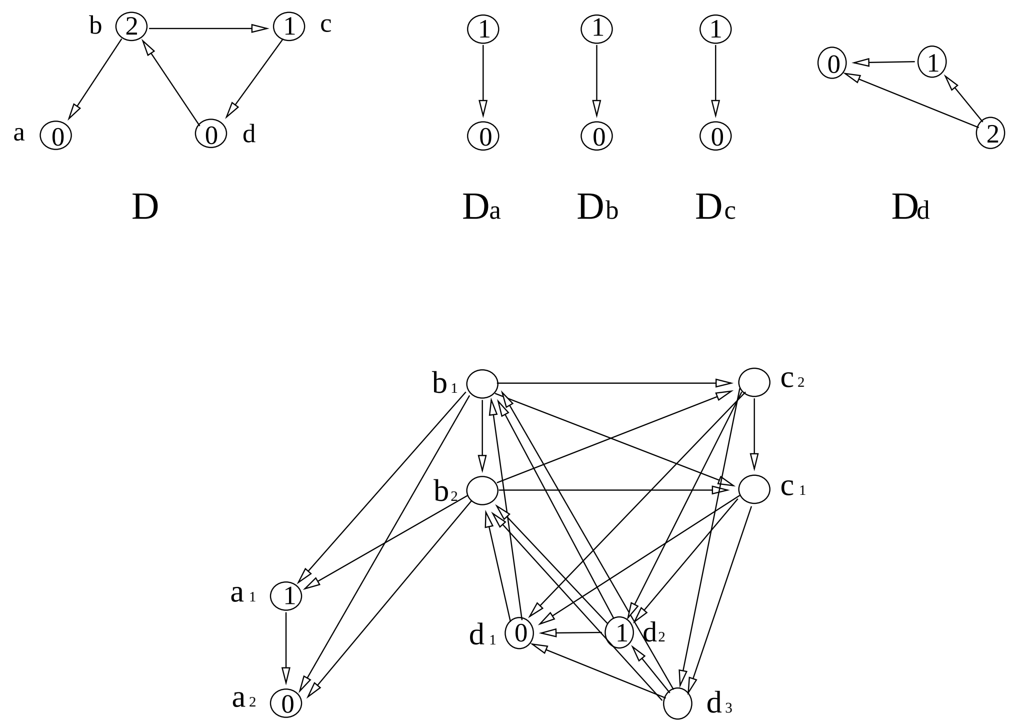


Figura 5.2:

Con la siguiente proposición veremos que no podemos quitar la hipótesis de que α_u tenga función de Grundy para toda $u \in V(D)$.

Teorema 7. *Sea D digráfica y $\alpha = (\alpha_v)_{v \in V(D)}$ una familia de digráficas ajenas dos a dos. Si $\sigma(D, \alpha)$ tiene función de Grundy, entonces D tiene núcleo y α_v tiene función de Grundy para toda $v \in V(D)$.*

Demostración. Primero demostraremos que D tiene núcleo. Sea f función de Grundy de $\sigma(D, \alpha)$.

Sea $S = \{x \in V(\sigma(\alpha)) | f(x) = 0\}$.

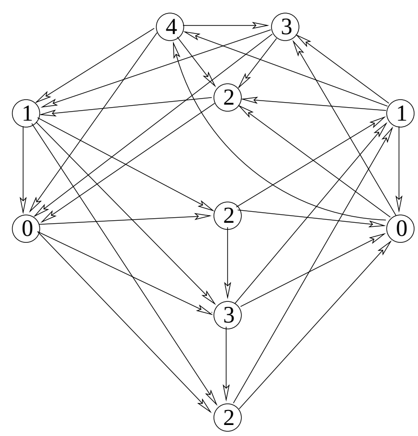
Sea $A = \{u \in V(D) | V(\alpha_u) \cap S \neq \emptyset\}$.

Entonces A es núcleo de D.

Primero probaremos que A es un conjunto independiente.

Sean $u, w \in A$ con $u \neq w$. Por definición de A, tenemos que existe $x \in V(\alpha_u)$ tal que $f(x) = 0$ y existe $y \in V(\alpha_w)$ tal que $f(y) = 0$. Ya que f es función de Grundy de $\sigma(D, \alpha)$ se sigue que no hay flecha entre x y y. Por definición de $\sigma(D, \alpha)$ tenemos que no hay flecha entre u y w, es decir, A es un conjunto independiente.

Para ejemplificar la prueba fijémonos en la siguiente digráfica,que tiene función de Grundy y en donde el conjunto A consta de sólo dos puntos, los dos puntos con valor igual a cero.



Ahora veamos que A es un conjunto absorbente de D.

Sea $u \in V(D) \setminus A$ y tomemos $x \in V(\alpha_u)$. Por definición de A tenemos que $f(x) \neq 0$. Por ser f función de Grundy existe $y \in V(\sigma(D, \alpha))$ tal que $f(y) = 0$ y $y \in \Gamma^+_{\sigma(D,\alpha)}(x)$. Además $y \in V(\alpha_w)$ para alguna $w \in V(D)$ y por definición de $\sigma(D, \alpha)$, $w \in \Gamma^+_D(u)$ y $w \in A$ (ya que $y \in V(\alpha_w)$ y $f(y) = 0$). Entonces A es un conjunto absorbente en D.

Por lo tanto A es un núcleo de D.

Ahora vamos a probar que para toda $v \in V(D)$, α_v tiene función de Grundy. Sea $v \in V(D)$, y $n = \max\{f(x)|x \in V(\sigma(D, \tilde{\alpha}))\}$.
Sea $A_v = \{m \in \mathbb{N}|f^{-1}(m) \cap V(\alpha_v) \neq \emptyset\}$, $(0 \leq m \leq n)$.
Escribimos $A_v = \{n_0, n_1, \ldots, n_r\}$ tal que $n_i < n_j$ si y sólo si $i < j$.
Definimos los siguientes subconjuntos de $V(\alpha_v)$.
$S_0 = f^{-1}(n_0) \cap V(\alpha_v)$
$S_1 = f^{-1}(n_1) \cap V(\alpha_v)$
$S_r = f^{-1}(n_r) \cap V(\alpha_v)$
Cada uno de estos subconjuntos de $V(\alpha_v)$ es distinto del vacío por definición de n_i $(0 \leq i \leq r)$. Además también por la definición de los n_i's y que f es función de Grundy de $\sigma(D, \tilde{\alpha})$ tenemos que $\bigcup\limits_{i=0}^{r} S_i = V(\alpha_v)$. Cada S_i es un conjunto independiente porque $S_i = f^{-1}(n_i) \cap V(\alpha_v)$ y $f^{-1}(n_i)$ es un conjunto independiente (f es función de Grundy de $\sigma(D, \tilde{\alpha})$).

Definimos $f_v : V(\alpha_v) \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f_v(x) = m \Leftrightarrow x \in S_m$.

Veamos que f_v es función de Grundy de α_v.
(1)$f_v(x) = k > 0$ implica que para toda $j, 0 \leq j < k$, existe $y \in \Gamma^+_{\alpha_v}(x)$ con $f_v(y) = j$.
Sea $x \in V(\alpha_v)$ con $f_v(x) = k > 0$ y $j, 0 \leq j < k$. Por definición de f_v, $f_v(x) = k$ implica que $x \in f^{-1}(n_k)$. Ya que $j < k$ esto implica $n_j < n_k$. Por ser f función de Grundy de $\sigma(D, \tilde{\alpha})$, existe $y \in \Gamma^+_{\sigma(D,\tilde{\alpha})}(x)$ tal que $f(y) = n_j$.
Debemos probar que $y \in V(\alpha_v)$.

De la definición de A, tenemos que $n_j \in A$, es decir, existe $z \in V(\alpha_v)$ tal que $f(z) = n_j$. Si $y \notin V(\alpha_v)$, entonces existe $w \in V(D)$ tal que $y \in V(\alpha_w)$, pero como $y \in \Gamma^+_{\sigma(D,\tilde{\alpha})}(x)$ esto implica que hay (w, v)-flecha en D. Lo que implica que hay (y, z) flecha en $\sigma(D, \tilde{\alpha})$, contradiciendo la independencia de $f^{-1}(n_j)$ en $\sigma(D, \tilde{\alpha})$. Por lo tanto $y \in V(\alpha_v)$ y como $y \in \Gamma^+_{\sigma(D,\tilde{\alpha})}(x)$ tenemos que $y \in \Gamma^+_{\alpha_v}(x)$. Entonces ya que $f(y) = n_j$ y $y \in V(\alpha_v)$, $y \in S_j$ lo que implica que $f_v(y) = j$.

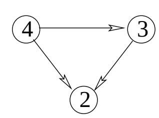
(2)$f_v(x) = k$, implica que $f_v(y) \neq k$ para toda $y \in \Gamma^+_{\alpha_v}(x)$.

Sea $x \in V(\alpha_v)$ con $f_v(x) = k$. $f_v(x) = k \Leftrightarrow x \in S_k$.

Vimos que S_k es un conjunto independiente, entonces no puede haber $y \in S_k \cap \Gamma^+_{\alpha_v}(x)$, porque contradice la independencia de S_k. Por lo tanto, para toda $y \in \Gamma^+_{\alpha_v}(x)$, $f_v(x) \neq k$. Por lo tanto f_v es función de Grundy de α_v.

□

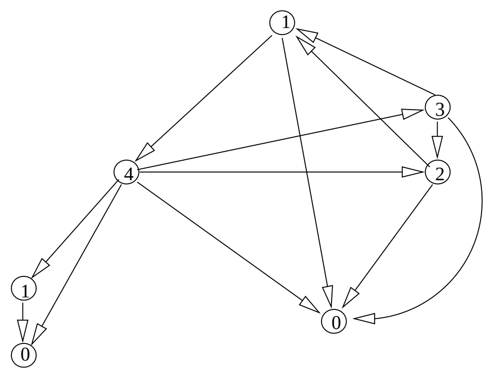
Fijémonos en la siguiente componente de la digráfica anterior, que es:



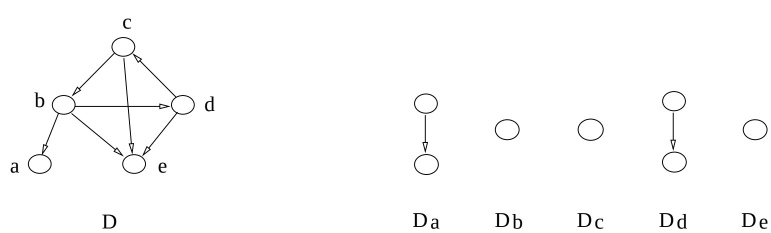
En esta digráfica el conjunto $A = \{2, 3, 4\}$ y sólo hay un vértice con cada uno de esos valores. Así para definir una función de Grundy en esta componente al vértice de valor 2 le asignamos el valor 0; al vértice con valor 3 le asignamos el valor 1 y al vértice con valor 4 le asignamos el valor 2. Esta nueva función es una función de Grundy.

La siguiente digráfica $\tilde{\alpha}$, tiene función de Grundy y además la podemos ver como la composición $(D, D_i)_{i=a,b,c,d,e}$. Sin embargo D no tiene función de

Grundy, ya que el conjunto $\{a, e\}$ es él núcleo de D y al quitarlo nos queda un ciclo dirigido de longitud 3, que no tiene núcleo. Con este ejemplo vemos que no podemos mejorar la conclusión del Teorema 7.



$\tilde{\alpha}$



Teorema 8. *Sea D digráfica y $\alpha = (\alpha_v)_{v \in V(D)}$ una familia de digráficas ajenas dos a dos. Si D tiene función de Grundy y cada α_v tiene función de Grundy, f_v ($v \in V(D)$) tal que* $\text{máx}\{f_v(x)|x \in V(\alpha_v)\} = \text{máx}\{f_u(x)|x \in V(\alpha_u)\}$ *donde $\{v, u\} \subseteq f^{-1}(i)$ para algún $i \in \mathbb{N}$. Entonces $\sigma(D, \tilde{\alpha})$ tiene función de Grundy F que satisface* $\text{máx}\{F(x)|x \in V(\sigma(D, \tilde{\alpha}))\} = n + \sum_{i=0}^{n} m_i$ *donde* $n = \text{máx}\{f(x)|x \in V(D)\}$ *y* $m_i = \text{máx}\{f_v(x)|x \in V(\alpha_v), v \in f^{-1}(i)\}$ *para toda $i, 0 \leq i \leq n$.*

Demostración. Definimos $F : V(\sigma(D, \tilde{\alpha})) \longrightarrow \mathbb{N}$ de la siguiente manera:

Sea $x \in V(\sigma(D,\tilde{\alpha}))$, tenemos que existe una única $y \in V(D)$ tal que $x \in V(\alpha_y)$ y una única $i \in \{0,\ldots,n\}$ tal que $y \in f^{-1}(i)$, entonces definimos

$F(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} m_j + f(y) + f_y(x)$ con $i, 1 \leq i \leq n$

y $F(x) = f_y(x)$ cuando $i = 0$.

Demostraremos que f es función de Grundy de $\sigma(D,\tilde{\alpha})$.

(1)$F(x) = k > 0$ implica que para toda $j, 0 \leq j < k$ existe $z \in \Gamma^+_{\sigma(D,\tilde{\alpha})}(x)$ con $F(y) = j$.

Sea $x \in V(\sigma(D,\tilde{\alpha}))$ tal que $F(x) = k > 0$ y $j, 0 \leq j < k$. Tomamos la única y e i tal que $x \in V(\alpha_y)$ y $y \in f^{-1}(i)$.

Si $i = 0$, entonces $F(x) = f_y(x) = k > 0$. Ya que f_y es función de Grundy de α_y existe $z \in \Gamma^+_{\alpha_y}(x)$ y $F(z) = f_y(z) = j$.

Si $1 \leq i \leq n$, sea $s_0 = 0$ y $s_t = \sum\limits_{j=0}^{t-1} m_j + t$ con $1 \leq t \leq n$. Tenemos que $s_0 \leq s \leq s_n$. Sea $r = \max\{a \in \{0,1,\ldots,n\} | s_a \leq s\}$, r esta bien definida porque $s_0 \leq s \leq s_n$. Por otro lado tenemos que $s \leq k$ y $\sum\limits_{j=0}^{i-1} m_j + f(y) + f_y(x) = k$ donde $f(y) = i$ y $f_y(x) \leq m_i$, entonces $\sum\limits_{j=0}^{i-1} m_j + i + f_y(x) = k > s$ y

$\sum\limits_{j=0}^{i} m_j + i \geq \sum\limits_{j=0}^{i-1} m_j + f_y(x) = k > s$, entonces $\sum\limits_{j=0}^{i} m_j + i \geq s$ y así $r \leq i$.

Si $r = i$ ($f(y) = i$)

$\sum\limits_{j=0}^{i-1} m_j + i \leq s < k = \sum\limits_{j=0}^{i-1} m_j + i + f_y(x)$. Ya que tenemos la desigualdad estricta $f_y(x) > 0$.

Sea $l \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{j=0}^{i-1} m_j + i + l = s$, $l < f_y(x)$ (de lo contrario $s \geq k$). Por ser f_y función de Grundy de α_y existe $z \in \Gamma^+_{\alpha_y}(x)$ tal que $f_y(z) = l$, entonces $F(z) = \sum\limits_{j=0}^{i-1} m_j + i + l = s$ y $z \in \Gamma^+_{\sigma(D,\tilde{\alpha})}(x)$ por ser α_y subdigráfica inducida de $\sigma(D,\tilde{\alpha})$.

Si $r < i$. $(f(y) = i > r \geq 0$.

Por ser f función de Grundy de D existe $w \in \Gamma^+_D(y)$ tal que $f(w) = r$. Tenemos que $s \geq \sum_{j=0}^{r-1} m_j + r$, sea $l \in \mathbb{N}$ tal que $s = \sum_{j=0}^{r-1} m_j + r + l$.
Veamos que $l \leq m_r$.
Si $l > m_r$, entonces $s \geq \sum_{j=0}^{r} m_j + r + 1$ contradiciendo la de r. f_w es función de Grundy de α_w, por lo tanto existe $z \in V(\alpha_w)$ tal que $f_w(z) = l$.
$F(z) = \sum_{j=0}^{r-1} m_j + r + l = s$ y como $(y, w) \in F(D)$, $(x, z) \in F(\sigma(D, \tilde{\alpha}))$, es decir, $z \in \Gamma^+_{\sigma(D,\tilde{\alpha})}(x)$ con $F(z) = s$.

(2) $F(z) = k$ implica que para toda $y \in \Gamma^+_{\sigma(D,\tilde{\alpha})}(x)$, $F(y) \neq k$.

Sea $x \in V(\sigma(D, \tilde{\alpha}))$ con $F(x) = k$ y $y \in \Gamma^+_{\sigma(D,\tilde{\alpha})}(x)$. Sean $w, z \in V(D)$ con $x \in v(\alpha_w)$ y $y \in V(\alpha_z)$ donde $f(w) = i$ y $f(z) = r$.

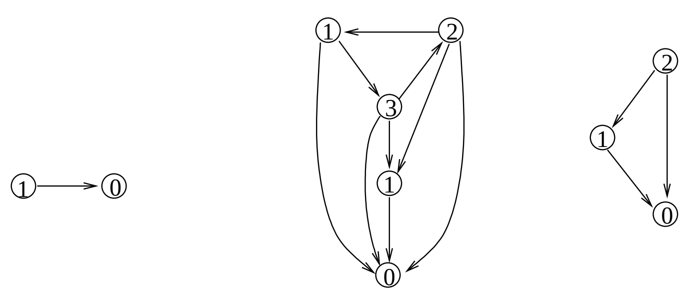
Si $r = i$, entonces ya que $y \in \Gamma^+_{\sigma(D,\tilde{\alpha})}(x)$ $z = w$ de lo contrario $f^{-1}(i)$ no es un conjunto independiente, entonces
$F(x) = \sum_{j=0}^{i-1} m_j + i + f_z(x)$ y
$F(y) = \sum_{j=0}^{i-1} m_j + i + f_z(y)$.
Por ser f_z función de Grundy de α_z y x, y adyacentes en α_z, tenemos que $f_z(x) \neq f_z(y)$. Por lo tanto $F(x) \neq F(y)$.
Si $i \neq r$.
$F(x) = \sum_{j=0}^{i-1} m_j + i + f_z(x)$
$F(x) = \sum_{j=0}^{r-1} m_j + r + f_w(y)$, donde $0 \leq f_w(y) \leq m_r$, entonces
$\sum_{j=0}^{r-2} m_j + r - 1 < \sum_{j=0}^{r-1} m_j + r \leq F(y) \leq \sum_{j=0}^{r-1} m_j + r + m_r < \sum_{j=0}^{r} m_j + r + 1$.
Si $i < r$, $i \leq r - 1$.

$F(x) = \sum_{j=0}^{i-1} m_j + i + f_z(x) < \sum_{j=0}^{r-2} m_j + r - 1 < F(y)$
por lo tanto $F(x) \neq F(y)$.

Si $i > r$, $i \geq r + 1$.
$F(x) = \sum_{j=0}^{r-1} m_j + i + f_z(x) > \sum_{j=0}^{r} m_j + r + 1 > F(y)$. Por lo tanto $F(x) \neq F(y)$.
Por lo tanto F es función de Grundy de $\sigma(D, \tilde{\alpha})$. Tomemos $y \in f^{-1}(n)$ y $x \in V(\alpha_y)$ tal que $f_y(x) = m_n$, entonces
$F(x) = \sum_{j=0}^{n-1} m_j + f(y) + f_y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} m_j + n + m_n = \sum_{j=0}^{n} m_j + n$. Como para toda w, z $w \in V(D)$ y $z \in V(\alpha_w)$ se tiene $f(w) \leq f(y)$, y cuando la igualdad se da $f_w(z) \leq f_y(x)$, entonces $n + \sum_{j=0}^{n} m_j$ es el valor máximo de F. $\square$

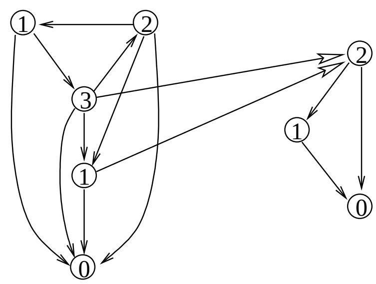
Teorema 9. *Sea D digráfica, $\alpha = (\alpha_v, S_v)_{v \in V(D)}$ una familia de digráficas ajenas dos a dos y S_v un subconjunto no vacío de $V(\alpha_v)$ para toda $v \in V(D)$. Si α_v tiene función de Grundy f_v, tal que $f_u(x) \neq f_v(y)$ cuando $(u, v) \in F(D)$, $x \in S_u$, $y \in S_v$. Entonces $\sigma(D, \tilde{\alpha})$ tiene función de Grundy F tal que* $\max F = \max\{f_u(x) | x \in V(\alpha_u), u \in V(D)\}$

Antes de la demostración ejemplificaremos lo que dice el Teorema 9. Fijémonos en las siguientes digráficas que tienen función de Grundy cada una:



D   Da   Db

Si tomamos la suma de Zykov de D_a y D_b con respecto a D donde sólo unimos los vértices de valor 3 y 1 de la digráfica D_a y el vértice de valor 2 de la digráfica D_b, tenemos:



En donde no necesitamos cambiar los valores de las funciones de ambas digráficas para tener función de Grundy en esta digráfica.

Demostración. Sea $F : V(\sigma(D, \tilde{\alpha})) \longrightarrow \mathbb{N}$ definida de la siguiente manera: Tomemos $x \in V(\sigma(D, \tilde{\alpha}))$ existe una única $y \in V(D)$ con $x \in V(\alpha_y)$. Definimos $F(x) = f_y(x)$.

Demostraremos que F es función de Grundy de $\sigma(D, \tilde{\alpha})$.

(1) $F(x) = k > 0$ implica que para toda $j, 0 \leq j < k$ existe $y \in \Gamma^+_{\sigma(D,\tilde{\alpha})}(x)$ con $F(y) = j$.

Sea $x \in V(\sigma(D, \tilde{\alpha}))$ con $F(x) = k > 0$ y sea $j, 0 \leq j < k$. Por definición de $\sigma(D, \tilde{\alpha})$ existe $z \in V(D)$ con $x \in V(\alpha_z)$. Por definición de F, $F(x) = f_z(x)$. Como f_z es función de Grundy de α_z existe $y \in \Gamma^+_{\alpha_z}(x)$ tal que $f_z(y) = j$. Y por definición de F , $F(y) = f_z(y) = j$ donde $y \in \Gamma^+_{\sigma(D,\tilde{\alpha})}(x)$ por ser subdigráfica inducida de $\sigma(D, \tilde{\alpha})$.

(2)$F(x) = k$ implica que para toda $y \in \Gamma^+_{\sigma(D,\tilde{\alpha})}(x)$, $F(y) \neq k$.

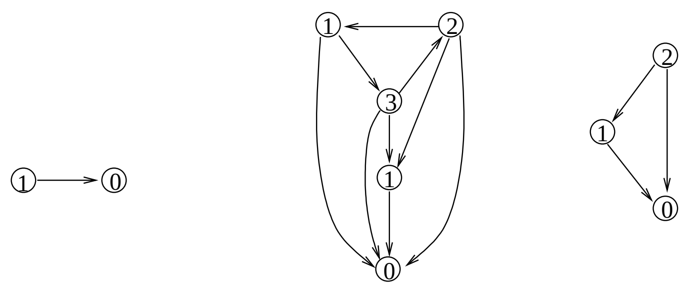
Por definición de $\sigma(D,\tilde{\alpha})$ existe $z \in V(D)$ tal que $x \in V(\alpha_z)$ y por definición de F, $f_z(x) = F(x) = k$. Como f_z es función de Grundy de α_z, $f_z(y) \neq k$ para toda $y \in \Gamma^+_{\alpha_z}(x)$.

Si $x \notin S_z$, entonces $\Gamma^+_{\alpha_z}(x) = \Gamma^+_{\sigma(D,\tilde{\alpha})}(x)$ y así, para toda $y \in \Gamma^+_{\sigma(D,\tilde{\alpha})}(x)$, $F(y) \neq k$.

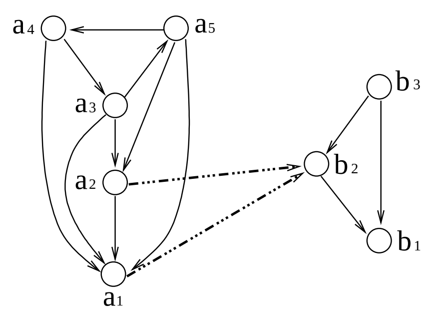
Si $x \in S_z$, por hipótesis tenemos que para toda $y \in V(\alpha_w)$ tal que $(z,w) \in F(D)$ tenemos que $f_z(x) \neq f_w(y)$, pero $f_w(y) = F(y)$, entonces $F(y) \neq K$.

Por lo tanto F es función de Grundy de $\sigma(D,\tilde{\alpha})$.

$\square$



D $\qquad$ D_a $\qquad$ D_b



En el siguiente ejemplo tenemos que D es núcleo perfecta, y D_a y D_b

tienen función de Grundy. Y sin embargo, $\tilde{\alpha}$ no tiene función de Grundy, como veremos a continuación.

$\{a_1, b_1\}$ es núcleo de $\tilde{\alpha}$, no hay flecha entre ellos, es decir, forman un conjunto independiente; y adémas a_1 absorbe a a_2, a_3, a_4 y a a_5 y b_1 absorbe a b_2 y b_3.

Quitando $\{a_1, b_1\}$ de $V(\alpha)$, ya no tenemos núcleo.

Se cumple que $\Gamma^+_{\tilde{\alpha}}(b_2) = \emptyset$, lo que implica que de haber núcleo en

$\tilde{\alpha}[V(\tilde{\alpha}) \setminus \{a_1, b_1\}]$, b_2 debería pertenecer a él. Como $\{a_2, b_3\} = \Gamma^-_{\tilde{\alpha}}(b_2)$, sólo queda encontrar núcleo en la subdigráfica inducida de $\tilde{\alpha}$ por los vértices a_3, a_4 y a_5. Pero esta subdigráfica es un ciclo de longitud 3, que no tiene nucleo, por lo tanto, $\tilde{\alpha}$ no tiene función. Esto sucede por que S_a y S_b no cumplen las hipótesis del teorema, ya que $f_a(a_2) = f_b(b_2) = 2$ y $a_2 \in S_a$ y $b_2 \in S_b$.

Teorema 10. *Sea D digráfica y $\tilde{\alpha} = (\alpha_v, S_v)_{v \in V(D)}$ una familia de digráficas α_v, ajenas dos a dos y S_v un subconjunto no vacío de $V(\alpha_v)$ para toda $v \in V(D)$. Si D es núcleo perfecta y α_v tiene función de Grundy para toda $v \in V(D)$ tal que para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n_v\}$, $f^{-1}(i) \cap S_v \neq \emptyset$ implica $f^{-1}(i) \subseteq S_v$, donde $n_v = \text{máx}\{f_v(x) | x \in V(\alpha_v)\}$, entonces $\sigma(D, \tilde{\alpha})$ tiene función de Grundy.*

Demostración. Supongamos que D y $\tilde{\alpha} = (\alpha_v, S_v)_{v \in V(D)}$ satisfacen las hipótesis. Primero probaremos que $\sigma(D, \tilde{\alpha})$ tiene núcleo.
Sea $A_0 = \{u \in V(D) | S_u \cap f_u^{-1}(0) \neq \emptyset\}$.
Si $A_0 = \emptyset$, entonces para cada $u \in V(D)$ $S_u \cap f_u^{-1}(0) = \emptyset$. Por la definición de $\sigma(D, \tilde{\alpha})$, $\bigcup\limits_{u \in V(D)} f_u^{-1}(0)$ es un conjunto independiente.

Ya que f_u es función de Grundy de α_u, entonces $f^{-1}(0)$ es núcleo de α_u por el Proposición 1, es decir, $f_u^{-1}(0)$ es un conjunto absorbente de α_u, para cada $u \in V(D)$. De esto se sigue que $\bigcup\limits_{u \in V(D)} f_u^{-1}(0)$ es un conjunto absorbente de $\sigma(D, \tilde{\alpha})$. Como ya vimos que también es un conjunto independiente en $\sigma(D, \tilde{\alpha})$, entonces $\bigcup\limits_{u \in V(D)} f_u^{-1}(0)$ es núcleo de $\sigma(D, \tilde{\alpha})$.

Supongamos que $A_0 \neq \emptyset$.

Consideremos el conjunto $T_0 = \bigcup\limits_{u \in V(D) \setminus A_0} f_u^{-1}(0)$.

Tomemos $u \in V(D) \setminus A_0$ como en la definición de T_0. Tenemos que f_u es función de Grundy de α_u lo que implica que $f_u^{-1}(0)$ es un conjunto independiente en α_u y como α_u es una subdigráfica inducida de $\sigma(D, \tilde{\alpha})$, $f_u^{-1}(0)$ es un conjunto independiente en $\sigma(D, \tilde{\alpha})$.

Ya que $u \in V(D) \setminus A_0$, $f_u^{-1}(0) \cap S_u = \emptyset$, entonces $T_0 = \bigcup\limits_{u \in V(D) \setminus A_0} f_u^{-1}(0)$ es un conjunto independiente en $\sigma(D, \tilde{\alpha})$.

Tomamos la subdigráfica inducida $D[A_0]$ de D. Por ser D núcleo perfecta tenemos R_0 núcleo de $D[A_0]$.

Sea $T_0' = \bigcup\limits_{u \in R_0} f_u^{-1}(0)$.

R_0 es núcleo de $D[A_0]$, esto implica que para cualesquiera $u, v \in R_0$ y cualesquiera $x \in V(\alpha_u)$ y $y \in V(\alpha_v)$ tenemos que no hay flecha entre ellos, por definición de $\sigma(D, \tilde{\alpha})$. De aquí que T_0' sea un conjunto independiente en $\sigma(D, \tilde{\alpha})$.

Para toda $u \in V(D) \setminus A_0$ y $v \in R_0$ no tenemos flecha entre $f_u^{-1}(0)$ y $f_v^{-1}(0)$ porque $f_u^{-1}(0) \cap S_u = \emptyset$. Por lo tanto $T_0 \cup T_0'$ es un conjunto independiente en $\sigma(D, \tilde{\alpha})$.

Denotamos $n_u = \text{máx}\{f_u(x) | x \in V(\alpha_u)\}$ y también $m_u = \text{mín}\{n \in$

$\{0,\ldots,n_u\}|f_u^{-1}(n)\cap S_u=\emptyset\}$.
Sea $T_0''=\bigcup\limits_{u\in A_0\setminus R_0} f_u^{-1}(m_u)$.
Por ser f_u función de Grundy de α_u, tenemos que $f_u^{-1}(m_u)$ es un conjunto de α_u y ya que α_u es subdigráfica inducida de $\sigma(D,\tilde{\alpha})$, $f_u^{-1}(m_u)$ es un conjunto independiente en $\sigma(D,\tilde{\alpha})$. Además, por ser $f_u^{-1}(m_u)\cap S_u=\emptyset$ para toda $u\in A_0\setminus R_0$, si tomamos $u,v\in A_0\setminus R_0$ no hay flechas entre $f_u^{-1}(m_u)$ y $f_v^{-1}(m_v)$, es decir, tenemos que T_0'' es un conjunto independiente en $\sigma(D,\tilde{\alpha})$.
Ya que $f_u^{-1}(m_u)\cap S_u=\emptyset$ para toda $u\in A_0\setminus R_0$ y $f_u^{-1}(0)\subseteq S_u$ para $u\in R_0$, tenemos que $T_0'\cup T_0''$ es un conjunto independiente.
Ya que $f_u^{-1}(m_u)\cap S_u=\emptyset$ para toda $u\in A_0\setminus R_0$ y $f_u^{-1}(m_u)\cap S_u=\emptyset$ para toda $u\in V(D)\setminus A_0$ tenemos que $T_0''\cup T_0$ es un conjunto independiente y como ya vimos que también $T_0\cup T_0'$ es un conjunto independiente, tenemos que $T_0\cup T_0'\cup T_0''$ es un conjunto independiente de $\sigma(D,\tilde{\alpha})$.

Ahora probaremos que $T_0'\cup T_0''\cup T_0''$ es un conjunto absorbente.
Sea $x\in V(\sigma(D,\tilde{\alpha}))\setminus T_0\cup T_0'\cup T_0'')$.
Por definición de $\sigma(D,\tilde{\alpha})$ existe $z\in V(D)$ tal que $x\in V(\alpha_z)$. Debemos analizar tres casos posibles para z.
Si $z\in V(D)\setminus A_0$.
Tenemos que $f_z(x)\neq 0$ (porque $x\notin T_0$). Por ser f_z función de Grundy de α_z, y por el Proposición 1 $f_z^{-1}(0)$ es núcleo de α_z. Es decir, existe $y\in f_z^{-1}(0)$ tal que $(x,y)\in F(\sigma(D,\tilde{\alpha}))$. Pero como $z\in V(D)\setminus A_0$ y $y\in f_z^{-1}(0)$, tenemos que $y\in T_0$. Entonces en este caso $T_0\cup T_0'\cup T_0''$ absorbe a x.
Si $z\in R_0$.
Entonces $f_z(x)\neq 0$ (porque $x\notin T_0'$). $f_z^{-1}(0)$ es núcleo de α_z por ser f_z fun-

ción de Grundy de α_z por el Teorema **??**. Entonces existe $y \in f_z^{-1}(0)$ tal que $(x, y) \in F(\sigma(D, \tilde{\alpha}))$. Pero como $z \in R_0$ y $y \in f_z^{-1}(0)$, tenemos que $y \in T_0'$. Por lo tanto en este caso $T_0 \cup T_0' \cup T_0''$ absorbe a x.

Si $z \in A_0 \setminus R_0$.

Consideremos dos casos:

i)$x \in S_z$. Por ser R_0 núcleo de $D[A_0]$, existe $w \in R_0$ tal que $(z, w) \in F(D)$. Tomemos $y \in f_w^{-1}(0)$, por estar w en R_0, $y \in T_0'$ y $(x, y) \in F(\sigma(D, \tilde{\alpha}))$ (ya que $(z, w) \in F(D)$, $x \in S_z$ y $y \in f_w^{-1}(0) \subseteq T_0'$). Entonces $T_0 \cup T_0' \cup T_0''$ absorbe a x en este caso.

ii)$x \notin S_z$.

Probaremos que $f_z(x) > m_z$. Tenemos que $f_z(x) \neq m_z$, porque tenemos que $z \in A_0 \setminus R_0$ y $x \notin T_0''$. Sea $f_z(x) = r$. Supongamos que $r < m_z$.

Si $f_z^{-1}(r) \cap S_z \neq \emptyset$, entonces por hipótesis del teorema, tenemos que $f_z^{-1} \subseteq S_z$ y de aquí tendríamos $x \in S_z$, contradiciendo lo que estamos suponiendo. Entonces tenemos que $f_z^{-1}(r) \cap S_z = \emptyset$, pero $r < m_z$ y m_z era el mínimo con esta propiedad, por lo tanto $r > m_z$.

Por ser f_z función de Grundy de α_z, existe $y \in f_z^{-1}(m_z)$ tal que $(x, y) \in F(\sigma(D, \tilde{\alpha}))$. Como $y \in f_z^{-1}(m_z)$, $y \in T_0''$. Por lo tanto $T_0 \cup T_0' \cup T_0'' = N_0$ es núcleo de $\sigma(D, \tilde{\alpha})$.

Ahora veamos que hay núcleo en $\sigma(D, \tilde{\alpha})[V(\sigma(D, \tilde{\alpha})) \setminus N_0]$.

Fijémonos en todos los vértices $u \in V(D)$ tal que $V(\alpha_u) \nsubseteq N_0$ y con ellos tomemos la subdigráfica inducida D_1 de D. Por ser D_1 subdigráfica inducida y por ser D núcleo perfecta, D_1 es digráfica núcleo perfecta.

Sea $u \in V(D_1)$.

Si $u \notin A_0$, entonces por definición de T_0, $f_u^{-1}(0) \subseteq T_0$. Podemos definir una función de Grundy f'_u en $\alpha_u[V(\alpha_u) \setminus f_u^{-1}(0)]$ dada por $f'_u(x) = f_u(x) - 1$, con $x \in V(\alpha_u[V(\alpha_u) \setminus f_u^{-1}(0)])$.

Si $u \in R_0$, entonces por definición de T'_0, $f_u^{-1}(0) \subseteq T'_0$. Podemos definir una función de Grundy f'_u en $\alpha_u[V(\alpha_u) \setminus f_u^{-1}(0)]$ dada por $f'_u(x) = f_u(x) - 1$, con $x \in V(\alpha_u[V(\alpha_u) \setminus f_u^{-1}(0)])$.

Si $u \in A_0 \setminus R_0$, entonces por definición de T''_0, $f_u^{-1}(m_u) \subseteq T''_0$. Podemos definir una función de Grundy f'_u en $\alpha_u[V(\alpha_u \setminus f_u^{-1}(m_u)]$ dada por $f'_u(x) = f_u(x)$, si $f_u(x) < m_u$ y $f'_u(x) = f_u(x) - 1$ si $f_u(x) > m_u$, con $x \in V(\alpha_u[V(\alpha_u) \setminus f_u^{-1}(m_u)])$.

De esta manera tenemos las mismas condiciones que al principio y usando el mismo argumento podemos encontrar un núcleo N_1 de la digráfica $\sigma(D, \tilde{\alpha})[V(\sigma(D, \tilde{\alpha})) \setminus N_0]$.

Continuando de esta manera obtenemos una sucesión de subconjuntos de $V(\sigma(D, \tilde{\alpha}))$, $N_0, N_1, \ldots, N_p$ tal que N_0 es núcleo de $\sigma(D, \tilde{\alpha})$, N_i es núcleo de $\sigma(D, \tilde{\alpha})[V(\sigma(D, \tilde{\alpha})) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} N_j]$ con $1 \leq i \leq p$, y además $\bigcup_{j=0}^{p} N_j = V(\sigma(D, \tilde{\alpha}))$.

Definimos $F : V(\sigma(D, \tilde{\alpha})) \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por;

$$F(x) = r \text{ si y sólo si } x \in N_r$$

Comprobemos que F es función de Grundy de $\sigma(D, \tilde{\alpha})$.

(1) $F(x) = k > 0$ implica que para toda $t < k$, existe $y \in \Gamma^+_{\sigma(D,\tilde{\alpha})}(x)$ tal que $F(y) = t$.

Ya que $t < k$, $x \in (V(\sigma(D, \tilde{\alpha})) \setminus \bigcup_{j=0}^{t-1} N_j)$. Por ser N_t núcleo de $\sigma(D, \tilde{\alpha})[V(\sigma(D, \tilde{\alpha})) \setminus \bigcup_{j=0}^{t-1} N_j]$, existe $y \in N_t$ tal que $(x, y) \in F(\sigma(D, \tilde{\alpha}))$. Y como $y \in N_t$, $F(y) = t$.

(2) $F(x) = k$ implica que toda $y \in \Gamma^+_{\sigma(D,\tilde{\alpha})}(x)$ satisface $F(y) \neq k$.

Supongamos por contradicción que existe $y \in \Gamma^+_{\sigma(D,\tilde{\alpha})}(x)$ tal que $F(y) = k$. De la definición de F, tenemos que $\{x, y\} \subseteq N_k$ y por la definición de N_k, tenemos que N_k es núcleo de $\sigma(D, \tilde{\alpha})[V(\sigma(D, \tilde{\alpha})) \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} N_j]$. En particular N_k es un conjunto independiente de $\sigma(D, \tilde{\alpha})$, por lo tanto $(x, y) \in F(\sigma(D, \tilde{\alpha}))$ con $\{x, y\} \subseteq N_k$ es una contradicción.

Por lo tanto F es función de Grundy de $\sigma(D, \tilde{\alpha})$. □

Teorema 11. *Sean D_1 y D_2 digráficas con núcleo y $\alpha = \sigma(D_1, D_2)$ una suma de D_1 y D_2. Si S_i es núcleo de D_i ($i \in \{1, 2\}$) y α cumple la propiedad A (ver Definición 37), entonces al menos alguno de los S_i es núcleo de α.*

Demostración. Supongamos que S_1 no es núcleo de α. Probaremos que S_2 es núcleo de α.

Sólo falta ver que S_2 es un conjunto absorbente, por ser núcleo de D_2 ya es independiente.

Ya que S_1 no es núcleo de α y S_1 es núcleo de D_1, existe $y \in V(D_2)$ tal que $(w, y) \notin F(\alpha)$ para toda $w \in S_1$. De la definición de α, tenemos que $(w, y) \in F(\alpha)$ para toda $w \in S_1$.

Supongamos que $y \in S_2$.

Por ser S_2 núcleo de D_2, S_2 absorbe a $V(D_2)$ y como $y \in S_2$, S_2 absorbe a S_1. Sea $x \in V(D_1) \setminus S_1$. Por ser S_1 núcleo de D_1 existe $z \in S_1$ tal que $(x, z) \in F(\alpha)$ y además tenemos que $(z, y) \in F(\alpha)$ porque $z \in S_1$. Entonces $(x, z), (z, y) \in F(\alpha)$ y α satisface la propiedad A, por lo tanto $(x, y) \in F(\alpha)$. Por lo tanto S_2 es un conjunto absorbente de α y como ya sabemos que es independiente, S_2 es núcleo de α.

Supongamos que $y \notin S_2$.

Por ser S_2 núcleo de D_2 existe $z \in S_2$ tal que $(y, z) \in F(\alpha)$. Además para toda $x \in S_1$ $(x, y) \in F(\alpha)$ y α satisface la propiedad A, entonces $(x, z) \in F(\alpha)$ para toda $x \in S_1$. Es decir, S_2 absorbe a S_1. Sólo falta ver que S_2 absorbe a $V(D_1) \setminus S_1$.
Sea $x \in V(D_1) \setminus S_1$. Por ser S_1 núcleo de D_1, existe $w \in S_1$ tal que $(x, w) \in F(\alpha)$. Como ya vimos que S_2 absorbe a S_1, existe $z \in S_2$ tal que $(w, z) \in F(\alpha)$. Ya que α satisface la propiedad A, y $(x, w), (w, z) \in F(\alpha)$ tenemos $(x, z) \in F(\alpha)$. Por lo tanto S_2 absorbe a $V(D_1) \setminus S_1$. Por lo tanto S_2 es núcleo de α. □

En la digráfica de la Figura 5.3 (que es la suma de la digráfica con dos puntos y una flecha consigo misma) vemos que si una suma no satisface la propiedad A, entonces no necesariamente tiene núcleo.

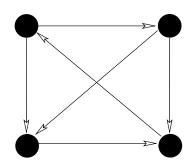


Figura 5.3:

Teorema 12. *Sean D_1 y D_2 digráficas ajenas dos a dos y $\sigma(D_1, D_2)$ una suma de D_1 y D_2. Si D_1 y D_2 tienen función de Grundy f_1 y f_2 respectivamente, y $\sigma(D_1, D_2)$ satisface la propiedad A, entonces $\sigma(D_1, D_2)$ tiene función de Grundy F tal que* $\max F = \max f_1 + \max f_2 + 1$

Demostración. Por ser f_1 y f_2 función de Grundy de D_1 y D_2 respectivamente, tenemos por la Proposición 1 que f_1^{-1} y f_2^{-1} son núcleos de D_1 y D_2, respectivamente.

Además por hipótesis $\sigma(D_1, D_2)$ satisface la propiedad A, así tenemos que se cumplen las hipótesis del Teorema anterior, por lo tanto, f_1^{-1} ó f_2^{-1} es núcleo de $\sigma(D_1, D_2)$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $f_1^{-1} = N_0$ es núcleo de $\sigma(D_1, D_2)$. La función $f_1 - 1$ es función de Grundy de $D_1[V(D_1) \setminus N_0]$ y $\sigma(D_1, D_2)[V(\sigma(D_1, D_2)) \setminus N_0]$ es suma de $D_1[V(D_1) \setminus N_0]$ y de D_2. Siguiendo con este argumento tenemos que $\sigma(D_1, D_2)[V(\sigma(D_1, D_2)) \setminus N_0]$ tiene núcleo N_1. De esta manera obtenemos una sucesión de subconjuntos no vacíos de $V(\sigma(D_1, D_2))$, $N_0, N_1, \ldots, N_p$ tal que N_0 es núcleo de $\sigma(D_1, D_2)$, N_i es núcleo de $\sigma(D_1, D_2)[V(\sigma(D_1, D_2)) \setminus \bigcup\limits_{r=0}^{i-1} N_r]$ $(1 \leq i \leq p)$ y $\bigcup\limits_{r=0}^{p} N_r = V(\sigma(D_1, D_2))$

Por la manera en que fueron definidos los N_i's, tenemos que $N_j = f_i^{-1}(n)$, donde $i \in \{1, 2\}$ y $0 \leq n \leq \text{máx}\, f_i$. Así tenemos que $p = \text{máx}\, f_1 + \text{máx}\, f_2 + 2$, el último 2 es por que no estamos contando f_1^{-1} y f_2^{-1} al considerar el máximo de cada función.

Definimos $F : V(\sigma(D_1, D_2)) \longrightarrow \mathbb{N}$, dada por:

$$F(x) = s \text{ si y sólo si } x \in N_s$$

Por demostrar que F es función de Grundy.

(1) $F(x) = k > 0$ implica que para toda $0 \leq j \leq k$ existe $y \in \Gamma^+_{\sigma(D_1,D_2)}$ con $F(y) = j$.

$j < k$, entonces

$V(\sigma(D_1, D_2)[V(\sigma(D_1, D_2)) \setminus (\bigcup\limits_{r=0}^{k-1} N_r)] \subseteq V(\sigma(D_1, D_2)[V(\sigma(D_1, D_2)) \setminus (\bigcup\limits_{r=0}^{j-1} N_r)]$

y ya que N_j es núcleo de $\sigma(D_1, D_2)[V(\sigma(D_1, D_2)) \setminus (\bigcup\limits_{r=0}^{j-1} N_r)]$, existe $y \in N_j$ tal que $(x, y) \in F(\sigma(D_1, D_2))$. Como $y \in N_j$, $F(y) = j$ por definición de F, y $y \in \Gamma^+_{\sigma(D_1,D_2)}(x)$.

(2) $F(x) = k$ implica $F(y) \neq k$ para toda $y \in \Gamma^+_{\sigma(D_1,D_2)}$.

N_k es núcleo de $\sigma(D_1, D_2)[V(\sigma(D_1, D_2)) \setminus (\bigcup_{r=0}^{k-1} N_r)]$, esto implica que N_k es un conjunto independiente. Ya que $F(x) = ky \in N_k$, $y \in \Gamma^+_{\sigma(D_1,D_2)}(x)$, se contradice la independencia de N_k. Por lo tanto, para toda $y \in \Gamma^+_{\sigma(D_1,D_2)}(x)$, $F(y) \neq k$. Entonces F es función de Grundy de $\sigma(D_1, D_2)$. $\square$

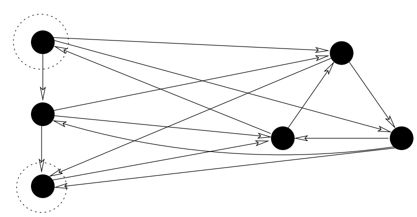


Figura 5.4:

En la digráfica anterior, vemos que el núcleo de la suma, es núcleo de uno de los sumandos. Esto nos motiva al siguiente teorema.

Teorema 13. *Si $\alpha = D_1 + D_2$ tiene núcleo, entonces D_1 ó D_2 tiene núcleo.*

Demostración. Sea S núcleo de α. Por definición de *suma*, $\forall x \in V(D_1)$ y $\forall y \in V(D_2)$ (x, y) ó $(y, x) \in F(\alpha)$. Como S es núcleo de α, es un conjunto independiente en α. Por lo tanto $S \subseteq V(D_1)$ ó $S \subseteq V(D_2)$. Entonces S es núcleo de D_1 ó D_2. $\square$

Teorema 14. *Si $D_1 + D_2$ tiene función de Grundy, entonces D_1 y D_2 tienen función de Grundy.*

Demostración. Probaremos que D_1 tiene función de Grundy. Para D_2 la prueba es analoga.

Sea $A_1 = \{n \in \mathbb{N} | \exists x \in V(D_1) \text{ con } F(x) = n\}$.

$A_1 \neq \emptyset$ si y sólo si$V(D_1) \neq \emptyset$. Si $V(D_1) = \emptyset$, entonces $D_1 + D_2 = D_2$ y no hay nada que probar. Supondremos $V(D_1) \neq \emptyset$.

Como $A_1 \subset \mathbb{N}$ usando el orden "$<$" podemos escribir $A_1 = \{n_0, n_1, \ldots, n_m\}$ donde

$$n_i < n_j \Leftrightarrow i < j \ (0 \leq i, j \leq m)$$

Definamos $f_1 : V(D_1) \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$f_1(x) = r \Leftrightarrow F(x) = n_r$$

Ahora veremos que f_1 es función de Grundy de D_1.

i)Sea $x \in V(D_1)$, con $f_1(x) = k$.

Por demostrar que para toda $j(0 \leq j < k)$, existe $y \in \Gamma^+_{V(D_1)}(x)$ tal que $f_1(y) = j$.

Por definición de f_1, tenemos que $f_1(x) = k \Rightarrow F(x) = n_k$ y ya que $j < k$, $n_j < n_k$ por definición de A_1. Entonces por ser F función de Grundy de $D_1 + D_2$, existe $y \in \Gamma^+_{V(D_1+D_2)}(x)$, con $F(y) = n_j$.

Sólo falta ver que $y \in V(D_1)$. $n_j \in A_1$, lo que implica que existe $z \in V(D_1)$ con $F(z) = n_j$, entonces si $y \notin V(D_1)$, tenemos que $y \in V(D_2)$ y por definición de "suma", hay flecha entre y y z lo que contradice que $F^{-1}(n_j)$ sea un conjunto independiente en $D_1 + D_2$. Por lo tanto $y \in V(D_1)$.

ii) Sea $x \in V(D_1)$, con $f_1(x) = k$.

Por demostrar que para toda $y \in \Gamma^+_{V(D_1)}(x)$, $f_1(y) \neq k$.

Sea $y \in \Gamma^+_{V(D_1)}(x)$, entonces por definición de "suma" $y \in \Gamma^+_{V(D_1+D_2)}(x)$ y así tenemos que $F(x) \neq F(y)$.

Por lo tanto $F(y) \neq n_k$ lo que implica que $f_1(y) \neq k$.

Entonces f_1 es función de Grundy de D_1. $\square$

Bibliografía

[1] C. Berge, *La fonction de Grundy d'un graphe infini.*, C.R. Acad. Sciences, Paris, 242, 1956, 1404–1405.

[2] C. Berge and M.P. Schützenberger, *Jeux de Nim et solutions*,C.R. Acad. Sciences, Paris, 242, 1956, 1672.

[3] C. Berge, *Theory of Graphs and its Applications*, Methuen, London (1962).

[4] C. Berge, *Graphs*, North-Holland Mathematical Library, Vol.6 (1985).

[5] P. Duchet, *Graphes Noyau-Parfaits*, Annals of Discrete Mathematics **9** (1980), 93–101.

[6] P. Duchet, *A sufficient condition for a digraph to be kernel perfect*, J. Graph Theory II (1)(1987), 81–85.

[7] P. Duchet and H. Meyniel, *A note on kernel–critical graphs*, Discrete Mathematics **33** (1981), 103–105.

[8] P. Erdos, *Some applications of graph theory to number theory*, 1969 The Many Facets of Graph Theory (Proc. Conf., Western Mich. Univ., Kalamazoo, Mich., 1968) pp. 77–82 Springer.

[9] P. Erdos, *Some applications of graph theory to number theory*, 1970 Proc. Second Chapel Hill Conf. on Combinatorial Mathematics and its Applications (Univ. North Carolina, Chapel Hill, N.C., 1970) pp. 136–145 Univ. North Carolina, Chapel Hill.

[10] H. Galeana-Sánchez and V. Neumann-Lara, *On kernels and semikernels of digraphs*, Discrete Mathematics **48** (1984), 67–76.

[11] H. Galeana-Sánchez and V. Neumann-Lara, *On the dichromatic number in kernel theory*, Math. Slovaca, **48**(1998), No.3, 213–219.

[12] S. Gutierrez Cabria, *Games of Nim*, Estadistica Española No.25, 27–35 (1964).

[13] P. M. Grundy, *Mathematics and Games*, Eureka **2** (1939) 6–8.

[14] D. W. Matula *A uniform set covering lemma*, Proc. Amer. Math. Soc. **48** (1975), 255–261.

[15] V. V. Masgras *Applications of graph theory to number theory*, Stud. Cerc. Mat. **25** (1973), 533–545.

[16] J. Von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944.

[17] M.Richardson,*Solutions of irreflexive relations*, Ann. Math. (2) 58(1953) 573–580.

[18] G.Schrage,*A two-dimensional generalization of Grundy's game*, Fibonacci Quart. **23** no. 4,(1985) 325–329.