



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**SUSTENTANTE MODELOS DEL COLAPSO CUÁNTICO DE UNA  
CASCARA DE POLVO**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

PRESENTA:

**ORTIZ HERNÁNDEZ, LEONARDO**

ASESOR: RYAN ALLEN, MICHAEL PATRICK

MÉXICO, D. F.

2006



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Modelos del colapso cuántico de una cáscara de polvo

Fís. Leonardo Ortíz Hernández

7 de Noviembre de 2006



# Dedicatoria

A mi madre, quien en todo momento está a mi lado y me da infinitas atenciones e incontables cuidados.

A mi padre, quien me indujo a los extraordinarios hábitos de la lectura y de la reflexión.

A Olga, quien nunca se rinde ante los momentos difíciles y, estoy seguro, logrará lo que desea.



# Agradecimientos

Al Dr. Michael Patrick Ryan Allen por haber aceptado ser mi tutor y proponerme tan interesante tema de tesis: el estudio de modelos del colapso cuántico de una cáscara de polvo; por su cuidadosa y diligente guía durante la elaboración de este trabajo, y sus explicaciones, siempre claras y profundas, de los conceptos físicos y matemáticos involucrados en el mismo; así como por su disposición a responder a todas mis, a veces ingenuas, preguntas.

Al Dr. Antonmaria Minzoni Alessio por su disposición a ser mi sinodal, por la confianza que tuvo en mi trabajo, por las atenciones que me brindó en todo momento, y por haberme dado un espacio entre sus muchas ocupaciones cotidianas.

Al Dr. Alfredo Macías Alvarez por haber aceptado ser mi sinodal; por darme la oportunidad de exponer mi trabajo en un seminario en la UAM-I, el cual me motivó a pensar más profundamente sobre algunos aspectos del trabajo, y por sus consejos y sugerencias sobre el mismo.

Al Dr. Jemal Janer Guven Seery por aceptar ser mi sinodal e interesarse en mi trabajo desde el inicio; por estar siempre dispuesto a platicar algunas de mis inquietudes acerca de física, así como por facilitarme algunos trabajos muy interesantes, aunque con otro enfoque, relacionados con el colapso cuántico.

Al Dr. Miguel Alcubierre Moya por haber aceptado ser mi sinodal, por haber sido parte de mi comité tutorial, y haberme permitido interrumpir en varias ocasiones sus muchas actividades; también por todas sus preguntas acerca de este trabajo, que sin duda, me ayudaron a entender mejor el mismo.

Al Dr. Hernando Quevedo Cubillos por haber sido parte de mi comité tutorial, por todos sus comentarios siempre positivos sobre este trabajo, que me dieron más confianza; así como por responder amablemente a todas mis preguntas durante esas extraordinarias clases de relatividad general.

Al Dr. Angel Prieto Ruíz por todos los consejos que me ha dado, que sin

lugar a dudas han sido de gran ayuda durante la elaboración de este trabajo; por brindarme siempre su apoyo para seguir disponiendo de un espacio para trabajar en el Departamento de Física de la Facultad de Ciencias de la UNAM; también por apoyarme para seguir trabajando como académico en la Facultad de Ciencias durante mis estudios de posgrado.

A la Dra. Laura Lizarraga Saucedo por el inmenso apoyo que me ha dado durante mis estudios de maestría.

Al posgrado en Ciencias Físicas de la UNAM por haberme brindado la oportunidad de formar parte de él.

Al Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM por todas las facilidades que me dio, especialmente, al Departamento de Gravitación y Teoría de Campos.

Al CONACYT por haberme otorgado una beca de maestría durante el período de Agosto de 2004 a Julio de 2006, sin la cual no hubiera podido realizar mis estudios de maestría.

A la DGEP-UNAM por haberme otorgado una beca complementaria de maestría durante el período de Agosto de 2004 a Julio de 2006, sin la cual la realización de mis estudios de maestría hubiera sido más difícil.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Colapso clásico en 3+1</b>	<b>5</b>
2.1. Elementos de geometría diferencial . . . . .	5
2.2. Ecs. clásicas de movimiento de una cáscara . . . . .	7
<b>3. Colapso cuántico en 3+1</b>	<b>15</b>
3.1. Problemas en la cuantización del colapso . . . . .	15
3.2. Hamiltoniano del problema . . . . .	16
3.3. Formación de horizonte . . . . .	18
3.4. Resultados numéricos . . . . .	20
<b>4. Colapso clásico en modelos</b>	<b>23</b>
4.1. Colapso clásico en la teoría Newtoniana . . . . .	23
4.2. Colapso clásico en una teoría conforme . . . . .	25
4.3. Colapso clásico en relatividad linealizada . . . . .	33
4.4. Colapso clásico en 2+1 con $\Lambda \neq 0$ . . . . .	37
<b>5. Colapso cuántico en modelos</b>	<b>45</b>
5.1. Colapso cuántico en la teoría newtoniana . . . . .	45
5.2. Colapso cuan. en Nordström mod. y rel. linealizada . . . . .	54
5.2.1. Colapso cuántico en Nordström modificada . . . . .	54
5.2.2. Colapso cuántico en relatividad linealizada . . . . .	55
<b>6. Colapso cuántico en 2+1</b>	<b>57</b>
6.1. Ecuación de Schrödinger del problema . . . . .	57
6.2. Evolución del paquete de ondas . . . . .	60
6.3. Formación de horizonte . . . . .	65

<b>7. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>71</b>
A. Cálculos de la sección 2.2	75
B. El teorema de Birkhoff en RL	79
C. La métrica de Schwarzschild-(anti) de Sitter	81
D. Masa de la métrica de un hoyo negro en 2+1	85
Bibliografía	89

# Capítulo 1

## Introducción

La teoría de gravitación de Einstein, basada en las ecuaciones de campo de Einstein, actualmente, es la teoría más aceptada para describir la interacción gravitacional. Estas ecuaciones predicen varios fenómenos muy interesantes, uno de éstos es un hoyo negro. De acuerdo a la teoría de Einstein, un hoyo negro es el estado final del colapso gravitacional de un cuerpo masivo. La geometría de espacio-tiempo fuera de un hoyo negro es la familia de Kerr-Newman, que incluye la geometría de Schwarzschild.

Al colapso gravitacional mencionado en el párrafo anterior se le llama colapso clásico, ya que está dentro del marco teórico de la teoría de la relatividad general, que es una teoría clásica. Cuando se toman en cuenta efectos cuánticos, que se espera sean relevantes cerca de la formación de la singularidad de curvatura tipo Schwarzschild en  $r = 0$ , no se sabe si se forma tal singularidad. Cuando se consideran efectos cuánticos al colapso se le llama colapso cuántico. Estrictamente, debido a que la naturaleza es cuántica, el colapso cuántico es el que debería suceder en la naturaleza (el colapso clásico es una aproximación, que en algunos casos es suficiente para estudiar el fenómeno, pero que cuando nos interesa conocer qué pasa cerca de la formación de la singularidad no es adecuado).

Existe interés en el estudio del colapso cuántico, ya que, entre otras cosas, éste podría ayudar a comprender mejor la física en una región del espacio-tiempo donde la curvatura es muy grande. Dicho estudio se podría hacer completamente dentro del marco teórico de la gravedad cuántica, sin embargo existe un problema: aún no se ha construido una teoría de la gravedad cuántica que sea completamente satisfactoria. Teniendo en cuenta ésto, es natural recurrir a modelos de gravitación en donde se tomen en cuenta efec-

tos cuánticos en el estudio del colapso, y con ésto ir avanzando en el entendimiento de la física en regiones del espacio-tiempo con curvatura muy grande.

Debido a lo complicado del estudio del colapso cuántico de un objeto con forma arbitraria, es usual restringir la forma del objeto a una forma muy simétrica, por ejemplo: una cáscara hecha de polvo que sólo interacciona gravitacionalmente. El estudio del colapso cuántico de este sistema utilizando la teoría de gravitación de Einstein ya ha sido realizado por diversos autores [5], [7], [8], [9], [10], [11], [13]; también se ha utilizado la teoría newtoniana de gravitación para hacer dicho estudio [20]. Algunas de las conclusiones de los trabajos antes citados son: existe un umbral para la masa del sistema a partir del cual se forma un “horizonte”, la conservación de la densidad de probabilidad de la función de onda impide que se forme una singularidad y se forman franjas de interferencia de la función de onda del sistema cuando el radio de la cáscara se hace pequeño.

El objetivo de este trabajo es estudiar el colapso cuántico de dicho sistema utilizando otros modelos de gravitación, y esperamos contribuir, aunque sea de manera muy modesta, al mejor entendimiento del colapso cuántico. Los modelos de gravitación que utilizaremos son: una teoría conforme, la teoría linealizada de Einstein y gravedad en dimensión 2+1 (gravedad 2+1). Es oportuno mencionar que el modelo de gravedad 2+1 tiene una ventaja sobre los otros. La ecuación de Schrödinger que resulta se puede resolver analíticamente. Las ideas principales para abordar el estudio del colapso cuántico en estos modelos las tomaremos, esencialmente, de un artículo de Ryan [20], donde se utiliza la teoría Newtoniana de gravitación como modelo de gravitación.

El estudio del colapso cuántico de una cáscara esférica de polvo que sólo interacciona gravitacionalmente tiene varias bondades, entre las más relevantes están: (quizá la más importante) no hay radiación gravitacional, debido al teorema de Birkhoff; y las métricas que resultan en diversos modelos son relativamente sencillas, y muy simétricas.

Una de las preguntas más interesantes que se desea responder cuando se estudia el colapso cuántico de la cáscara es si se forma un “horizonte”, o no. La palabra horizonte la escribimos entre comillas, ya que, actualmente, no se sabe como definir un horizonte cuando se toman en cuenta efectos cuánticos en el colapso. Sin embargo, se pueden hacer aproximaciones para indagar sobre la formación de éste. En este trabajo seguiremos este camino, utilizando una aproximación que llamaremos semiclásica, ya que en ésta se

utilizan conceptos clásicos y cuánticos para investigar la formación, o no formación de un horizonte.

La idea principal detrás de la aproximación semiclásica antes mencionada la tomaremos de [5] y [20]. Ésta consiste, esencialmente, en analizar si el valor esperado del radio de la cáscara de polvo (que es un operador cuántico) en algún momento, durante el colapso, es menor al radio del horizonte *clásico* del sistema en cuestión. Si ésto sucede, entonces diremos que sí se forma un horizonte, si no, no. Para realizar este análisis es necesario conocer la ecuación de Schrödinger para el radio de la cáscara. Ésto se consigue cuantizando el Hamiltoniano clásico del sistema, que a su vez, da la ecuación de movimiento clásica del radio de la cáscara. Esta ecuación de movimiento resulta de la discontinuidad de la curvatura extrínseca al pasar a través de la cáscara de polvo, y se obtiene mediante el método para analizar dicha discontinuidad dado a conocer en el artículo seminal de Israel [12].

Ya mencionamos anteriormente que los modelos que utilizaremos son: una teoría conforme de gravitación, la teoría linealizada de Einstein y gravedad 2+1. La ecuación de Schrödinger que resulta en la teoría conforme es muy complicada, y requeriría un análisis más amplio para indagar en sus consecuencias, por lo que en este trabajo no haremos dicho análisis. El colapso cuántico en la teoría linealizada de Einstein da los *mismos* resultados que en la teoría completa, mientras que en gravedad 2+1 la ecuación de Schrödinger resultante es la de un medio oscilador armónico. Esto se debe esencialmente a que se toma la constante cosmológica distinta de cero. El análisis semiclásico de la formación de un horizonte implica que hay un umbral para la masa de la cáscara a partir del cual se forma un horizonte. También, se encuentra que la función de onda del sistema presenta franjas de interferencia cuando el radio de la cáscara decrece. Adicionalmente, un resultado interesante es que existe una relación discreta entre la masa-energía total del sistema y la masa en reposo del mismo, esta relación depende de los niveles de energía del medio oscilador armónico.

La organización del trabajo es la siguiente: en el capítulo uno se hace una breve introducción, en el capítulo dos se exponen las ideas principales del colapso clásico en gravedad en dimensión 3+1 (gravedad 3+1), en el capítulo tres se muestran algunos aspectos relevantes del colapso cuántico en 3+1, en el capítulo cuatro se encuentran las ecuaciones de movimiento que describen el colapso clásico en varios modelos de gravitación, en el capítulo cinco se tratan algunos aspectos del colapso cuántico en algunos de estos modelos, en el capítulo seis se hace el análisis del colapso cuántico en gravedad 2+1 y en

el capítulo siete se dan las conclusiones y perspectivas del trabajo. También, en la parte final del trabajo, se incluyen algunos apéndices en donde se hacen algunos cálculos que se utilizan en la exposición general del trabajo.

# Capítulo 2

## Colapso clásico en 3+1

En este capítulo haremos la deducción de la ecuación de movimiento de una cáscara esférica bidimensional hecha de polvo. En esta deducción nos basaremos esencialmente en el artículo seminal de Israel [12]. Dicha deducción la tomaremos como modelo en deducciones que haremos en el capítulo 4.

Para nuestros propósitos, necesitaremos algunos elementos de geometría diferencial, los cuales presentaremos en la sección 2.1. Una vez hecho esto, encontraremos la ecuación de movimiento de la cáscara en la sección 2.2.

### 2.1. Elementos de geometría diferencial

Sea  $V$  una variedad Riemanniana cuatridimensional de clase  $C^4$ . Sea  $\Sigma$  una hipersuperficie tridimensional suave de  $V$ . Sea  $\mathbf{n}$  el vector normal unitario a  $\Sigma$ . En lo que sigue consideraremos que  $\Sigma$  es tipo tiempo, es decir<sup>1</sup>,  $n^\alpha n_\alpha = 1$ .

Sean  $\mathbf{e}_a$  vectores linealmente independientes que pertenecen al espacio tangente de  $V$  y que generan el espacio tangente de  $\Sigma^2$ . Sea  $\mathbf{A}$  un vector tangente. Las componentes covariantes y contravariantes intrínsecas a  $\Sigma$  de

---

<sup>1</sup>En este trabajo usaremos la convención de Einstein de suma sobre índices repetidos; utilizaremos índices griegos y latinos, los índices griegos  $\alpha, \beta, \dots$  van de 0 hasta 3, los índices latinos  $a, b, \dots$  de 1 hasta 3, a menos que se especifique otra cosa. También asumiremos que la norma es positiva para vectores tipo espacio y negativa para vectores tipo tiempo.

<sup>2</sup>Estos vectores están definidos en cada punto de  $\Sigma$ . Ver Lovelock y Rund (1989), p. 267.

$\mathbf{A}$  están definidas por<sup>3</sup>

$$A_a \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_a, \quad \mathbf{A} \equiv A^a \mathbf{e}_a.$$

Sean  $\xi^a$  coordenadas intrínsecas a  $\Sigma$ . La derivada de  $\mathbf{A}$  con respecto a estas coordenadas está dada por

$$\partial \mathbf{A} / \partial \xi^b = A^a{}_{;b} \mathbf{e}_a - A^a K_{ab} \mathbf{n}, \quad (2.1)$$

donde  $K_{ab}$  es el tensor de curvatura extrínseca

$$K_{ab} = \mathbf{e}_b \cdot \partial \mathbf{n} / \partial \xi^a \quad (2.2)$$

y  $A^a{}_{;b}$  es la derivada covariante de  $\mathbf{A}$  con respecto a  $\xi^a$

$$A^a{}_{;b} = \partial A_a / \partial \xi^b - A^c \Gamma_{c,ab}, \quad (2.3)$$

con

$$\Gamma_{c,ab} = \mathbf{e}_c \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_a}{\partial \xi^b},$$

los símbolos de Christoffel de la geometría intrínseca a  $\Sigma$ . La métrica intrínseca a  $\Sigma$  está dada por

$$g_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b.$$

Si introducimos en  $V$  coordenadas  $x^\alpha$ , la ecuación para  $\Sigma$  en forma paramétrica es

$$x^\alpha = f^\alpha(\xi^i).$$

En estas circunstancias, los vectores  $\mathbf{e}_a$  están dados por

$$e^\alpha{}_a = \partial x^\alpha / \partial \xi^a. \quad (2.4)$$

En el estudio de una hipersuperficie embebida en una variedad Riemanniana las ecuaciones de Gauss y Codazzi son importantes. Éstas se pueden escribir respectivamente, en términos del tensor de Einstein,  $G_{\alpha\beta}$ , como

$$-2G_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = {}^3R + K_{ab} K^{ab} - K^2, \quad (2.5)$$

$$G_{\alpha\beta} e^\alpha{}_a n^\beta = K_a{}^b{}_{;b} - K_{;a}, \quad (2.6)$$

---

<sup>3</sup>Las relaciones de geometría diferencial que se presentan en esta sección se pueden consultar más ampliamente en Israel (1966) o Misner *et al.* (1968), p. 509.



donde  ${}^3R$  es el escalar de curvatura de  $\Sigma$  y  $K = g_{ab}K^{ab}$ .

Otro concepto que utilizaremos es el de derivada absoluta de un vector. Consideremos una curva en  $V$  parametrizada por  $\tau$ . Las componentes de la derivada absoluta de un campo vectorial,  $\mathbf{A}$ , definido en esta curva están definidas como

$$(\partial\mathbf{A}/\partial\tau)^\alpha \equiv \delta A^\alpha/\delta\tau \equiv \partial A^\alpha/\partial\tau + A^\lambda\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}dx^\mu/d\tau.$$

Si  $A^\alpha = dx^\alpha/d\tau$ , la derivada absoluta coincide con la derivada covariante:

$$\delta A^\alpha/\delta\tau = A^\alpha{}_{;\nu}A^\nu. \quad (2.7)$$

## 2.2. Ecuaciones clásicas de movimiento de una cáscara

Consideremos una cáscara bidimensional esférica hecha de polvo. La evolución de la cáscara en el espacio-tiempo determina una hipersuperficie tridimensional. Identificando el espacio-tiempo con la variedad Riemanniana,  $V$ , de la sección anterior, esta hipersuperficie es  $\Sigma$ . Los vectores  $d\xi^a/d\tau = u^a$  tangentes a  $\Sigma$  determinan las curvas que describen las partículas que forman la cáscara. El tensor de energía-momento de la cáscara es

$$S^{ab} = \sigma u^a u^b,$$

con

$$u^a u_a = -1,$$

y  $\sigma$  la densidad de masa en reposo de la cáscara. Para polvo

$$u^a{}_{;b}u^b = 0. \quad (2.8)$$

Llamemos  $V^+$  y  $V^-$  a las variedades en que divide  $\Sigma$  al espacio-tiempo. Utilizando (2.1) y (2.8) se encuentra que la aceleración, medida en  $V^+$  y  $V^-$ , es<sup>4</sup>

$$\partial\mathbf{u}/\partial\tau|^\pm = \partial\mathbf{u}/\partial\xi^a|^\pm d\xi^a/d\tau = -u^a K^\pm{}_{ab}u^b \mathbf{n}. \quad (2.9)$$

---

<sup>4</sup>El símbolo  $|^{+(-)}$  indica que la expresión que lo precede está evaluada en el límite cuando nos acercamos a  $\Sigma$  por  $V^+$  ( $V^-$ ). Así, las ecuaciones en donde hay expresiones con  $|^{+(-)}$  sólo tienen sentido sobre la hipersuperficie  $\Sigma$ . El índice  $+$  ( $-$ ) en  $K_{ab}$  o en  $K$  significa que dicha cantidad está evaluada con respecto a  $V^+$  ( $V^-$ ).

En términos de la derivada absoluta

$$[u^\alpha{}_{;\nu}u^\nu + u^a u^b K_{ab} n^\alpha]^\pm = 0. \quad (2.10)$$

De (2.10) se sigue que

$$e^\alpha{}_a u_{\alpha;\nu} u^\nu|^\pm = 0, \quad (2.11)$$

$$n_\alpha u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu|^+ + n_\alpha u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu|^- = -2\tilde{K}_{ab} u^a u^b, \quad (2.12)$$

$$n_\alpha u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu|^+ - n_\alpha u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu|^- = -\gamma_{ab} u^a u^b, \quad (2.13)$$

donde

$$\tilde{K}_{ab} = \frac{1}{2}(K^+{}_{ab} + K^-{}_{ab}), \quad (2.14)$$

$$\gamma_{ab} = (K^+{}_{ab} - K^-{}_{ab}). \quad (2.15)$$

Las ecuaciones (2.11)-(2.13) determinan la dinámica del sistema. Los términos individuales de estas ecuaciones se pueden evaluar usando cartas en  $V^+$  y en  $V^-$  mutuamente independientes, ya que éstos son escalares.

Si consideramos que la cáscara está en el vacío, entonces  $G_{\alpha\beta} = 0$  en  $V^+$  y en  $V^-$ . Así, las ecuaciones de Gauss y Codazzi, en este caso, son

$${}^3R + K^\pm{}_{ab} K^\pm{}{}^{ab} - K^2 = 0, \quad (2.16)$$

$$K^\pm{}{}_a{}^b{}_{;b} - K^\pm{}{}_{;a} = 0. \quad (2.17)$$

Sumando y restando (2.16)

$${}^3R + \tilde{K}_{ab} \tilde{K}{}^{ab} - \tilde{K}^2 = -\frac{1}{4}(8\pi)^2(S_{ab} S^{ab} - \frac{1}{2}S^2) \quad (2.18)$$

y

$$\tilde{K}_{ab} S^{ab} = 0, \quad (2.19)$$

donde hemos usado la ecuación de Lanczos<sup>5</sup> [15],

$$\gamma_{ab} - g_{ab}\gamma = -8\pi S_{ab}, \quad (2.20)$$

y

$$\gamma_{ab} = -8\pi(S_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}S), \quad (2.21)$$

---

<sup>5</sup>Ver Israel (1966), ec. (19).

con  $\gamma = \gamma^a_a$ . Sumando y restando (2.17)

$$\tilde{K}_a^b{}_{;b} - \tilde{K}_{;a} = 0. \quad (2.22)$$

y

$$S^{ab}{}_{;b} = 0. \quad (2.23)$$

Utilizando (2.19) en (2.12) y (2.21) en (2.13) resulta

$$n_\alpha u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu|^{+} + n_\alpha u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu|^{-} = 0 \quad (2.24)$$

y

$$\begin{aligned} n_\alpha u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu|^{+} - n_\alpha u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu|^{-} &= 8\pi(S_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}S)u^a u^b \\ &= 4\pi\sigma. \end{aligned} \quad (2.25)$$

La ecuación de movimiento de la cáscara, i.e., la ecuación diferencial que satisface el radio de curvatura de la cáscara, se obtiene de (2.24).

La ecuación de  $\Sigma$  en forma paramétrica, en coordenadas con simetría esférica,  $x^\alpha = (t, r, \theta, \phi)$ , es

$$t = t(\tau), \quad r = R(\tau), \quad \theta = \theta, \quad \phi = \phi,$$

donde  $\xi^a = (\tau, \theta, \phi)$  son coordenadas intrínsecas a  $\Sigma^6$ . La métrica sobre la cáscara es

$$ds^2 = -d\tau^2 + R^2(\tau)(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2). \quad (2.26)$$

Por el teorema de Birkhoff, la métrica en  $V^+$  es

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{1}{f} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2), \quad (2.27)$$

donde  $f = 1 - \frac{2M}{r}$ . La métrica (2.27) se conoce como la métrica de Schwarzschild. La métrica en  $V^-$  es la métrica plana ([2.27] con  $M = 0$ ).

Para encontrar la ecuación de movimiento necesitamos conocer  $n_\alpha u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu|^\pm$ . Calculemos primero  $n_\alpha u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu|^{+}$ ; en la expresión que resulte basta hacer  $M = 0$  para obtener  $n_\alpha u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu|^{-}$ .

---

<sup>6</sup> $\tau$  se puede pensar como el tiempo propio de un observador sobre la cáscara;  $\theta$  y  $\phi$  son las coordenadas angulares esféricas usuales.

La componente radial de  $u^\alpha|^{+} = (u^t, u^r, u^\theta, u^\phi)|^{+}$  es

$$u^r|^{+} = \left. \frac{dr}{d\tau} \right|_{r \rightarrow R} = \frac{dR}{d\tau} = \dot{R}. \quad (2.28)$$

Como estamos considerando sólo movimiento radial, entonces  $u^\theta|^{+} = 0$  y  $u^\phi|^{+} = 0$ . En el límite<sup>7</sup>  $r \rightarrow R$ , tenemos  $f(r) \rightarrow f(R)$ , con lo cual de  $u^\mu|^{+}u_\mu|^{+} = -1$ , se obtiene

$$\frac{1}{f(R)}\dot{R}^2 - f(R)(u^t|^{+})^2 = -1.$$

Despejando  $u^t|^{+}$

$$u^t|^{+} = \frac{\sqrt{f(R) + \dot{R}^2}}{f(R)} \equiv X^+. \quad (2.29)$$

Así,

$$u^\mu|^{+} = (X^+, \dot{R}, 0, 0). \quad (2.30)$$

El vector normal,  $n^\alpha|^{+}$ , lo podemos encontrar utilizando

$$g^{ab}e^\alpha_a e^\beta_b = g^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta, \quad (2.31)$$

donde

$$g^{ab} = \text{diag} \left( -1, \frac{1}{R^2}, \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \right), \quad (2.32)$$

$$g^{\alpha\beta} = \text{diag} \left( -\frac{1}{f}, f, \frac{1}{R^2}, \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \right), \quad (2.33)$$

$$e^\alpha_\tau = \left( \frac{dt}{d\tau}, \dot{R}, 0, 0 \right), \quad (2.34)$$

$$e^\alpha_\theta = (0, 0, 1, 0), \quad (2.35)$$

$$e^\alpha_\phi = (0, 0, 0, 1). \quad (2.36)$$

Haciendo  $\alpha = \beta = 0$  en (2.31) y utilizando (2.32)-(2.34) resulta

$$n_t|^{+} = -\dot{R}. \quad (2.37)$$

---

<sup>7</sup>Veáse nota 4.

De manera análoga,  $\alpha = \beta = r$ ,  $\alpha = \beta = \theta$  y  $\alpha = \beta = \phi$  dan como resultado, respectivamente,

$$n_r|^+ = X^+, \quad (2.38)$$

$$n_\theta|^+ = 0, \quad (2.39)$$

y

$$n_\phi|^+ = 0. \quad (2.40)$$

Por lo tanto,

$$n_\alpha|^+ = \left( -\dot{R}, X^+, 0, 0 \right). \quad (2.41)$$

Teniendo en cuenta (2.30)

$$n_\mu u^\mu{}_{;\nu} u^\nu|^+ = n_t u^t{}_{;\nu} u^\nu|^+ + n_r u^r{}_{;\nu} u^\nu|^+. \quad (2.42)$$

Por otro lado

$$u_\mu u^\mu{}_{;\nu} = \frac{1}{2} (u_\mu u^\mu)_{;\nu} = \frac{1}{2} (u_\mu u^\mu)_{,\nu} = 0,$$

así

$$u_t (u^t{}_{;\nu} u^\nu)^+ + u_r (u^r{}_{;\nu} u^\nu)^+ = 0,$$

o bien

$$u^t{}_{;\nu} u^\nu|^+ = -\frac{u_r}{u_t} (u^r{}_{;\nu} u^\nu)^+. \quad (2.43)$$

Insertando (2.43) en (2.42)

$$n_\mu (u^\mu{}_{;\nu} u^\nu)^+ = \left( n_r - \frac{n_t u_r}{u_t} \right) (u^r{}_{;\nu} u^\nu)^+. \quad (2.44)$$

Utilizando (2.30) y (2.41) en (2.44)

$$n_\mu (u^\mu{}_{;\nu} u^\nu)^+ = \frac{1}{fX} (u^r{}_{;\nu} u^\nu)^+. \quad (2.45)$$

Ahora calculemos  $u^r{}_{;\nu} u^\nu|^+$ . Tenemos que

$$u^r{}_{;\nu} u^\nu|^+ = \left( \frac{du^r}{d\tau} + \Gamma_{tt}^r (u^t)^2 + 2\Gamma_{tr}^r u^t u^r + \Gamma_{rr}^r (u^r)^2 \right)^+|. \quad (2.46)$$

Se encuentra que

$$\Gamma_{tt}^r = -\frac{1}{2} g^{rr} g_{tt,r} \quad (2.47)$$

$$\Gamma_{tr}^r = 0 \quad (2.48)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} g^{rr} g_{rr,r}. \quad (2.49)$$

Insertando (2.47)-(2.49) en (2.46)

$$u^r_{;\nu} u^\nu|^+ = \ddot{R} + \frac{M}{R^2}. \quad (2.50)$$

Así, de (2.45) y (2.50) se sigue que

$$n_\mu u^\mu_{;\nu} u^\nu|^+ = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R} + \dot{R}^2}} \left( \ddot{R} + \frac{M}{R^2} \right). \quad (2.51)$$

Haciendo  $M = 0$  en (2.51)

$$n_\mu u^\mu_{;\nu} u^\nu|^- = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{R}^2}} \ddot{R}. \quad (2.52)$$

Sustituyendo (2.51) y (2.52) en (2.24)

$$\ddot{R} \left[ \sqrt{1 + \dot{R}^2} + \sqrt{1 + \dot{R}^2 - \frac{2M}{R}} \right] = -\frac{M}{R^2} \sqrt{1 + \dot{R}^2}. \quad (2.53)$$

Esta es la ecuación de movimiento de la cáscara de polvo. Una primera integral de esta ecuación es

$$\left( 1 + \dot{R}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = a + M/(2aR), \quad (2.54)$$

donde  $a$  es una constante.

El significado físico de  $a$  se puede conocer mediante la ecuación (2.25). Sustituyendo (2.51) y (2.52) en (2.25)

$$\frac{\ddot{R} + \frac{M}{R^2}}{\left( 1 - \frac{2M}{R^2} + \dot{R}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\ddot{R}}{\left( 1 + \dot{R}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} = 4\pi\sigma. \quad (2.55)$$

Utilizando (2.54) obtenemos

$$\left( 1 - \frac{2M}{R^2} + \dot{R}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = a - \frac{M}{2aR}. \quad (2.56)$$

Insertando (2.54) y (2.56) en (2.55) encontramos

$$\frac{M}{aR}\ddot{R} + \frac{M}{R^2}\left(a + \frac{M}{2aR}\right) = 4\pi\sigma\left(a + \frac{M}{2aR}\right)\left(a - \frac{M}{2aR}\right) \quad (2.57)$$

Por otro lado, utilizando (2.54) y (2.56) en (2.53)

$$\ddot{R} = -\frac{M}{2aR^2}\left(1 + \frac{M}{2aR}\right). \quad (2.58)$$

Sustituyendo (2.58) en (2.57)

$$4\pi\sigma R^2 = \frac{M}{a}. \quad (2.59)$$

El lado izquierdo de esta ecuación es la masa en reposo,  $m$ , de la cáscara. Por otro lado,  $M$  es la masa-energía total<sup>8</sup>. Así,  $M(1-a)/a$  es una medida de la energía (negativa) de amarre de la cáscara.

Utilizando (2.59) la ecuación (2.54) se puede escribir como

$$M = m\left(1 + \dot{R}^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{m^2}{2R}. \quad (2.60)$$

De (2.59) se sigue que  $a$  no tiene unidades, lo cual implica que (2.54) se puede escribir como

$$\left(1 + \left[\dot{R}/c\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{Gm}{2Rc^2}, \quad (2.61)$$

donde  $G$  es la constante universal de gravitación y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Si  $\dot{R} \ll c$ , de (2.61) se sigue que

$$a - 1 \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{R}}{c}\right)^2 - \frac{Gm}{2Rc^2}. \quad (2.62)$$

Ahora, si  $(a-1)mc^2$  es la energía de amarre, es decir la contribución de energía cinética y potencial a la gravitacional, entonces se cumple

$$(a-1)mc^2 = E\frac{m}{\mu}, \quad (2.63)$$

---

<sup>8</sup>Misner *et al.* (1968), p. 453.

donde,  $E$  y  $\mu$  son, respectivamente, la energía, cinética más potencial, y la masa de cada partícula de polvo. Así, de (2.62) y (2.63) se sigue que

$$\frac{E}{\mu} \simeq \frac{\dot{R}^2}{2} - \frac{Gm}{2R}. \quad (2.64)$$

Esta expresión se puede comparar con la que resulta de analizar el problema con la teoría Newtoniana, ver ec. (4.11).



# Capítulo 3

## Colapso cuántico en $3+1$

En este capítulo expondremos las ideas generales del colapso cuántico de una cáscara bidimensional de polvo.

En la sección 3.1 mencionaremos algunos de los problemas más relevantes que se encuentran en la cuantización del colapso de la cáscara. En la sección 3.2 mostraremos dos de los hamiltonianos que existen para el problema y mencionaremos los métodos por lo cuales éstos se han obtenido. En la sección 3.3 hablaremos de la formación de un horizonte en el colapso cuántico de la cáscara. Finalmente, en la sección 3.4 mostraremos algunos resultados numéricos.

### 3.1. Problemas en la cuantización del colapso

En la cuantización del colapso de una cáscara bidimensional de polvo hay varios problemas. Los más relevantes tienen que ver con el tamaño de la masa de la cáscara y con el hamiltoniano del sistema.

En la cuantización del colapso de la cáscara se hace una aproximación de minisuperespacio con la idea de hacer el problema cuántico más asequible. Esta aproximación consiste, esencialmente, en congelar los grados de libertad correspondientes a radiación gravitacional y en suponer que la ecuación de Schrödinger resultante es el análogo de la ecuación de Schrödinger de una partícula. Sin embargo, aún en esta aproximación, la ecuación de Schrödinger tiene un comportamiento patológico cuando se espera que aparezcan gravitones. Además, se encuentra que la masa de la cáscara no puede ser mucho mayor que la masa de Planck. Por ejemplo, Hájíček [9] ha dado una condi-

ción suficiente, aunque no necesaria, que muestra que puede haber problemas cuando la masa del cáscara es alrededor de dos masas de Planck. Con respecto a este problema, también, se han dado argumentos basados en consideraciones que usan la longitud de Compton, los cuales dan cotas similares para la masa de la cáscara [5].

Por otro lado, para hacer la formulación cuántica del problema es necesario tener un Hamiltoniano. Se han seguido varios caminos para encontrarlo. Un camino seguido por varios autores está basado en el método ADM en su versión completa. Siguiendo este método, ellos han escogido un tiempo interno para el sistema con la idea de tener un Hamiltoniano verdadero y una ecuación de Schrödinger que permitan estudiar la evolución del sistema. Sin embargo, hay algunos problemas: las formulaciones cuánticas que resultan de escoger diferentes tiempos internos no son unitariamente equivalentes. Otro problema con estas formulaciones hamiltonianas es que con frecuencia éstas requieren una selección *ad hoc* de un hamiltoniano en términos de variables definidas sobre la cáscara. Otra variante usando ADM completo la han dado Kuchař y Hájíček, quienes, en lugar de foliar el espacio-tiempo mediante hipersuperficies tipo espacio, han foliado el espacio-tiempo con hipersuperficies tipo tiempo. Mediante este método el hamiltoniano se obtiene de manera coherente y no es necesario hacer selecciones *ad hoc*. Otro camino que se ha seguido está basado en la ecuación de Wheeler-DeWitt. En las primeras dos formas de encontrar el hamiltoniano arriba mencionadas hay límites para la masa de la cáscara, en la tercera parece que no. Estos límites son de algunas masas de Planck. Además, como hay varios hamiltonianos, queda abierta la cuestión de cuál es el hamiltoniano apropiado.

Adicionalmente a los problemas conceptuales antes mencionados, hay problemas técnicos: los hamiltonianos son muy complicados y es muy difícil, prácticamente imposible, encontrar soluciones analíticas a las ecuaciones de Schrödinger correspondientes.

## 3.2. Hamiltoniano del problema

La dinámica del colapso cuántico está determinada por la ecuación de Schrödinger que resulta de cuantizar un hamiltoniano del problema clásico. Decimos un hamiltoniano y no el hamiltoniano, ya que, como hemos visto en la sección anterior, hay varios hamiltonianos para el problema. En esta sección mostraremos dos de estos hamiltonianos.

Un hamiltoniano del problema se puede obtener apoyándose en la ecuación<sup>1</sup> (2.60):

$$M = m \left(1 + \dot{R}^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{m^2}{2R}. \quad (3.1)$$

Definiendo el hamiltoniano como  $H \equiv \frac{M}{m}$ , y las variables  $x \equiv \frac{R}{M_{\text{pl}}}$ ,  $V \equiv \frac{dx}{d(T/M_{\text{pl}})} = \dot{R}$ , donde hemos usado  $m/M_{\text{pl}} \rightarrow m$  con  $M_{\text{pl}}$  la masa de Planck, resulta ( $c = G = 1$ )

$$H = (1 + V^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{m}{2x}. \quad (3.2)$$

Si suponemos que  $V$  sólo depende de una variable  $P$ , que llamaremos momento, entonces de  $\frac{\partial H}{\partial P} = V(P)$  se sigue que

$$\frac{dV}{(1 + V^2)^{\frac{1}{2}}} = dP. \quad (3.3)$$

Integrando (3.3) resulta que  $V = \sinh P$ . Por lo tanto,

$$H = \cosh P - \frac{m}{2x}. \quad (3.4)$$

Es oportuno mencionar que este hamiltoniano es *ad hoc*, ya que escogimos de manera *ad hoc* nuestro hamiltoniano como  $H = \frac{M}{m}$ , y no utilizamos el método ADM completo para encontrarlo.

Con la idea de evitar selecciones *ad hoc* del hamiltoniano Kuchař y Hájíček [11] han utilizado el método ADM completo. El problema que surge por este camino está relacionado con la función que describe a la materia de la cáscara en el espacio-tiempo,  $\delta(r - R(\tau))$ , donde  $R(\tau)$  es la posición de la cáscara como función del tiempo propio de la cáscara. Ya que es prácticamente imposible reducir las derivadas con respecto al tiempo de esta función a variables razonables del lagrangiano de la materia, del cual se esperaría obtener el Hamiltoniano del sistema, que a su vez describiría el movimiento de la cáscara en términos de variables canónicas definidas sobre la cáscara.

---

<sup>1</sup>La ecuación de Israel con unidades es:

$$M = m \left(1 + \left(\frac{\dot{R}}{c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{Gm^2}{2c^2R},$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío y  $G$  es la constante de gravitación universal.

Sin embargo, Kuchař y Hájíček, inteligentemente, han encontrado una manera de rodear el problema: en lugar de hacer la foliación del espacio-tiempo mediante hipersuperficies tipo espacio, ellos han hecho la foliación del espacio-tiempo por medio de hipersuperficies tipo tiempo. Con esta manera de utilizar el método ADM completo, y formulando la velocidad del polvo que forma la cáscara en términos de potenciales de velocidad, ellos encuentran el siguiente hamiltoniano:

$$H = -\sqrt{2}R \left( 1 - \frac{M}{R} - \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} \cosh \frac{P}{R} \right)^{1/2} \quad R \geq 2M, \quad (3.5)$$

$$H = -\sqrt{2}R \left( 1 - \frac{M}{R} - \sqrt{\frac{2M}{R} - 1} \sinh \frac{P}{R} \right)^{1/2} \quad 0 \leq R \leq 2M. \quad (3.6)$$

Este hamiltoniano no es *ad hoc*, sin embargo, es más complicado que (3.4). Se puede demostrar que, si escogemos  $m$  como el hamiltoniano y suponemos que  $P = P(V, R)$ , es posible encontrar (3.5) y (3.6) de la misma manera *ad hoc* como se encontró (3.4).

### 3.3. Formación de horizonte

La dinámica del colapso cuántico de la cáscara se estudia analizando el comportamiento de un paquete de ondas. Este paquete se construye con las soluciones estacionarias de la ecuación de Schrödinger correspondiente al hamiltoniano que se utilice. La conservación de la probabilidad, garantizada por la hermiticidad de los hamiltonianos, implica que el paquete de ondas siempre va a rebotar a  $R = \infty$  cuando los estados que forman el paquete no están ligados.

Por otro lado, durante el colapso se puede, o no, formar un horizonte<sup>2</sup>. Cuando se forma un horizonte podemos decir que se forma algo parecido a un “hoyo negro”. En este caso, un observador sobre la cáscara vería que en un tiempo finito el radio de la cáscara disminuye hasta ser menor que  $2M$ , y después aumenta, debido a la conservación de la densidad de probabilidad, hasta ser mayor que  $2M$ . Sin embargo, para un observador en infinito, el

---

<sup>2</sup>Estrictamente, en gravedad cuántica aún no se sabe como definir un horizonte de eventos, sin embargo, podemos hablar de horizonte apoyandonos en el concepto de horizonte clásico. En este sentido, el horizonte que estamos considerando es un horizonte semiclásico.

tiempo que pasa para que el radio de la cáscara sea igual a  $2M$  es infinito. Lo que ve el observador montado en la cáscara cuántica lo podemos interpretar apoyandonos en el análisis del colapso de una cáscara clásica. A un observador, sobre una cáscara clásica, que por alguna razón se contrae hasta un radio menor a  $2M$  y después se expande, se le presentaría un escenario similar al que se le presenta al que está sobre la cáscara cuántica, pero en el caso clásico, cuando el radio, durante la expansión, es mayor que  $2M$  se puede decir que la cáscara está más allá de nuestro tiempo futuro infinito ( $i_+$ ), o “en otro universo”. Así, extendiendo esta interpretación al caso cuántico, podemos decir que cuando en el colapso cuántico se forma un horizonte, la cáscara se reexpande en otro universo.

Cuando no se forma un horizonte el colapso continua hasta que el principio de incertidumbre permite, y en este punto comienza una reexpansión de la cáscara en el mismo universo.

En general se espera que para masas grandes el paquete de ondas no se disperse mucho, es decir, se espera que se mantenga bastante coherente durante su evolución, permitiendo la formación de un horizonte y que el radio de la cáscara pueda ser menor que el radio del horizonte, dando lugar a una reexpansión en otro universo. Para masas pequeñas se espera que el paquete de ondas se disperse muy rápido, de manera que no se forma un horizonte y la cáscara rebota irremediamente en el mismo universo.

El estudio de la formación de un horizonte se puede hacer de distintas maneras, tres de éstas son:

1. Debido a que un horizonte de eventos es una característica global, para estudiar la formación de un horizonte se debe definir una característica global en la variedad fluctuante asociada con la cáscara. Esta variedad fluctuante se debe construir en términos del superespacio completo de gravedad cuántica canónica asociado con la métrica del sistema. En el problema que estamos considerando se puede intentar hacer una aproximación para construir la métrica del espacio-tiempo. Kuchař argumenta [13] que para el minisuperespacio de la cáscara basta con reemplazar la masa y el radio de la cáscara por operadores en la métrica exterior para obtener un operador métrico. Sin embargo, hay un problema: el operador métrico es función del tiempo propio de la cáscara, y analizando la métrica cerca a la cáscara [8] no podemos decir si para un observador en infinito se forma un horizonte.

2. Se pueden calcular  $\langle R(\tau) \rangle$  y  $\Delta R(\tau) = \sqrt{\langle (R - \langle R(\tau) \rangle)^2 \rangle}$ , y analizar el comportamiento de  $\Delta R(\tau)$  cuando  $\langle R(\tau) \rangle$  se hace pequeño. Si  $\Delta R(\tau)$  se hace muy grande cuando  $\langle R(\tau) \rangle$  se hace pequeño de tal manera que  $\Delta R(\tau)$  es más grande que el radio del horizonte clásico, entonces, se puede considerar que no se forma un horizonte [7]. Esta manera de analizar la formación de un horizonte parece ser la más sencilla.
3. Se puede considerar a  $M|\psi(R, \tau)|^2$  como la densidad clásica,  $\rho(R, \tau)$ , de un fluido, y calcular la métrica clásica para este fluido. Después analizar si en esta métrica se forma un horizonte [7]. Por este camino también hay algunos problemas. Por ejemplo, no es claro si la masa  $M$  es la masa en reposo de la cáscara o es la masa de Schwarzschild. Además, la densidad  $\rho$  que se obtiene de la solución de la ecuación de Schrödinger no necesariamente satisface la ecuación de conservación  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ , con  $T^{\mu\nu}$  el tensor de energía-momento del fluido.

### 3.4. Resultados numéricos

Los hamiltonianos (3.4) y (3.5)-(3.6) son tan complicados que es prácticamente imposible encontrar soluciones analíticas que se puedan interpretar. Así, es natural buscar soluciones numéricas. Corichi *et al* [5] han dado soluciones numéricas para estos hamiltonianos. Ellos consideran funciones de onda iniciales con un pico muy pronunciado en un radio un poco mayor al radio del horizonte clásico,  $R = 2M$ . Los resultados que se obtienen se muestran en las figuras 3.1 y 3.2. Estas figuras están tomadas de [5].

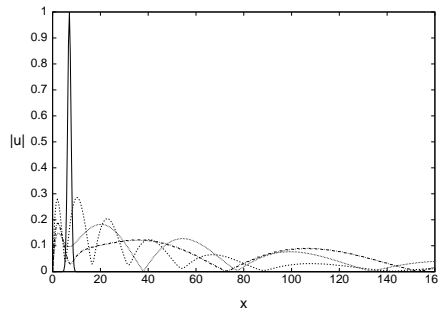


Figura 3.1: Raíz cuadrada de la densidad de probabilidad,  $|u|^2$ , que resulta del hamiltoniano (3.4) evaluada en distintos tiempos. Cada tipo de gráfica corresponde a cada tiempo. La gráfica continua es la gráfica de la densidad inicial.

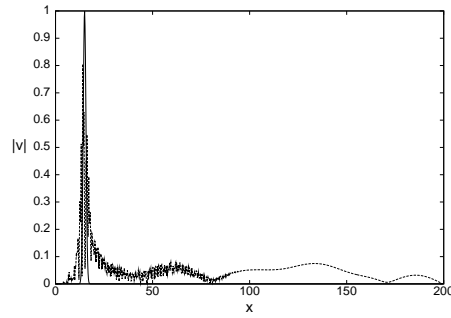


Figura 3.2: Raíz cuadrada de la densidad de probabilidad,  $|v|^2$ , que resulta del hamiltoniano (3.5)-(3.6) evaluada en un tiempo dado. La gráfica continua es la gráfica de la densidad inicial.

Vemos que en ambos casos la posición del pico de la función de onda se mueve hacia  $R = 0$ , donde rebota debido a las condiciones de frontera, y después se dispersa. Notemos que las funciones de onda del hamiltoniano (3.5)-(3.6) presentan muchas oscilaciones rápidas superpuestas, mientras que las funciones de onda del hamiltoniano (3.4) no.





# Capítulo 4

## Colapso clásico en modelos de gravitación

En este capítulo haremos la deducción de la ecuación de movimiento clásica de una cáscara bidimensional de polvo utilizando la teoría Newtoniana de gravitación (sec. 4.1), una teoría conforme de gravitación (sec. 4.2) y la teoría de Einstein linealizada (sec. 4.3); así como la deducción de la ecuación de movimiento de un anillo unidimensional de polvo utilizando gravedad 2+1 (sec. 4.4).

En la deducción de la ecuación de movimiento supondremos que sólo hay movimiento radial.

### 4.1. Colapso clásico en la teoría Newtoniana

La deducción que damos a continuación ya se ha hecho en [20].

Consideremos que la cáscara está formada por partículas de masa  $\mu$ . Supongamos que sobre cada partícula sólo actúa el campo de todas las otras. Escogamos una partícula y analicemos la acción del campo de todas las otras. Pongamos nuestro sistema de referencia de manera que la partícula que escogimos esté sobre el eje  $z$ . Consideremos que la cáscara está formada de anillos que están sobre planos paralelos al plano  $xy$ . Fijémonos en un anillo. La fuerza que ejercen dos masas infinitesimales,  $dM$ , que están sobre el anillo y que son diametralmente opuestas, sobre la masa que escogimos sólo tiene componente  $z$ , ya que las componentes paralelas al plano  $xy$  se cancelan

mutuamente. La magnitud de esta fuerza es

$$dF = -2\mu G \frac{\cos \gamma dM}{r^2}, \quad (4.1)$$

donde  $\gamma$  es el ángulo que hace la línea que une  $\mu$  con  $dM$  y  $r$  es la longitud de esta línea. Si la cáscara tiene una densidad de masa uniforme  $\sigma = M/4\pi R^2$ , entonces

$$dM = \sigma dS = \sigma R^2 \sin \theta d\theta d\phi, \quad (4.2)$$

donde hemos usado coordenadas esféricas para expresar el elemento infinitesimal de área  $dS$ . Además,

$$dz = -R \sin \theta d\theta. \quad (4.3)$$

Así,

$$dF = \frac{G\mu M \cos \gamma dz d\phi}{2\pi R r^2}. \quad (4.4)$$

Por otro lado,

$$r^2 = 2R(R - z) \quad (4.5)$$

y

$$\cos \gamma = \frac{R - z}{[2R(R - z)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.6)$$

Sustituyendo (4.5) y (4.6) en (4.4)

$$dF = \frac{G\mu M}{2\pi R (2R)^{\frac{3}{2}}} \frac{d\phi dz}{(R - z)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.7)$$

Por lo tanto, la fuerza que la cáscara ejerce sobre  $\mu$ , la cual se obtiene sumando la contribución de todos los anillos, es

$$\begin{aligned} F &= \frac{G\mu M}{2\pi R (2R)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-R}^R \frac{dz}{(R - z)^{\frac{1}{2}}} \\ &= -G \frac{\mu M}{2R^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Es interesante notar que esta fuerza es la media aritmética de la fuerzas que la cáscara ejerce sobre la masa  $\mu$  cuando ésta está dentro,  $F = 0$ , y cuando está justo fuera de la cáscara,  $F = -G \frac{\mu M}{R^2}$ .

La ecuación de movimiento que resulta de la segunda ley de Newton,  $F = \mu\ddot{R}$ , es

$$\ddot{R} = -G\frac{M}{2R^2}. \quad (4.9)$$

Multiplicando (4.9) por  $\dot{R}$  e integrando lo que resulta tenemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{R}^2}{2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{GM}{2R} + A \right), \quad (4.10)$$

donde  $A$  es una constante. Si escogemos  $A = \frac{E}{\mu}$ , con  $E$  la energía de la partícula, entonces

$$\frac{E}{\mu} = \frac{\dot{R}^2}{2} - \frac{GM}{2R}. \quad (4.11)$$

Esta ecuación es el límite no relativista de (2.54), ver (2.64).

La formulación hamiltoniana del problema se puede hacer si definimos el hamiltoniano como  $H \equiv \frac{E}{\mu}$  y el momento conjugado a  $R$  como  $P_R \equiv \dot{R}$ . En estas circunstancias

$$H = \frac{P_R^2}{2} - \frac{GM}{2R}. \quad (4.12)$$

Las ecuaciones de Hamilton aplicadas a este hamiltoniano son equivalentes a la ecuación de movimiento (4.9).

## 4.2. Colapso clásico en una teoría conforme

La teoría conforme que vamos a utilizar es similar a la teoría de Nordström<sup>1</sup> [18].

En la teoría de Nordström la métrica del espacio-tiempo es

$$ds^2 = \phi^2 ds_p^2, \quad (4.13)$$

donde  $ds_p^2$  es la métrica plana y  $\phi$  es un campo escalar. La ecuación que  $\phi$  satisface es

$$\square\phi \equiv \eta^{\mu\nu} \phi_{,\nu\mu} = -4\pi\phi\eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu}, \quad (4.14)$$

---

<sup>1</sup>Es oportuno mencionar que parece que hay alguna confusión entre la comunidad de relativistas en cuanto a la forma correcta de escribir Nordström. Las formas más usadas para escribir esta palabra son Nordstrøm y Nordström así como, ocasionalmente, Nordstrom. Sin embargo, la forma correcta es Nordström, ver Brill y Dray (1993).

donde  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica plana y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento. En esta teoría, la métrica  $g_{\nu\mu} = \phi^2 \eta_{\nu\mu}$  sólo tiene un grado de libertad, el de  $\phi$ . Lo demás de  $g_{\nu\mu}$  ya está determinado por la métrica de fondo  $\eta_{\nu\mu}$ <sup>2</sup>. Esta teoría es geométrica, en el sentido de que (4.13) y (4.14) se pueden escribir en términos de entes geométricos como

$$R = 24\pi T, \quad C^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = 0, \quad (4.15)$$

donde  $R$  es el escalar de Ricci,  $T = \frac{1}{\phi^2} \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$  y  $C^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}$  es el tensor de Weyl calculado a partir de  $g_{\mu\nu}$ . La igualdad de la izquierda de (4.15) es una consecuencia de que

$$R = -\frac{6\Box\phi}{\phi^3}. \quad (4.16)$$

El tensor de energía-momento del sistema que estamos considerando es

$$T_{\mu\nu} = \sigma u_\mu u_\nu, \quad (4.17)$$

donde  $\sigma$  es la densidad uniforme de masa y  $u^\mu$  es la velocidad de las partículas que forman la cáscara. Utilizando este tensor en (4.14), la ecuación que resulta para  $\phi$  es

$$\Box\phi = 4\pi\phi^3\sigma. \quad (4.18)$$

Esta ecuación es altamente no lineal, lo que hace muy difícil resolverla analíticamente.

Teniendo en cuenta los problemas técnicos que se presentan en la teoría de Nordström, utilizaremos una versión modificada de ésta. En esta teoría de Nordström modificada supondremos que la métrica del espacio-tiempo y la ecuación que  $\phi$  satisface son, respectivamente,

$$g_{\mu\nu} = \phi\eta_{\mu\nu} \quad (4.19)$$

y

$$\Box\phi = \eta^{\mu\nu} \phi_{,\nu\mu} = -8\pi \frac{1}{\phi} \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu}. \quad (4.20)$$

La teoría de Nordström modificada no es geométrica, ya que la ecuación que determina  $\phi$  no se puede escribir como

$$R = \alpha T,$$

---

<sup>2</sup>Misner *et al.* (1968), p. 429.

con  $R$  el escalar de Ricci,  $\alpha$  una constante y  $T = \frac{1}{\phi}\eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ . Esto es una consecuencia de que en esta teoría

$$R = \frac{3}{\phi^2} \left( -\square\phi + \frac{1}{2\phi} \left( \tilde{\nabla}\phi \right)^2 \right), \quad (4.21)$$

donde  $\left( \tilde{\nabla}\phi \right)^2 \equiv \phi^{\mu}\phi_{,\mu} = \eta^{\mu\alpha}\phi_{,\mu}\phi_{,\alpha}$ .

Insertando el tensor de energía-momento (4.17) en (4.20) y utilizando que  $g^{\mu\nu}u_{\mu}u_{\nu} = \frac{1}{\phi}\eta^{\mu\nu}u_{\mu}u_{\nu} = -1$ , la ecuación resultante para  $\phi$  es

$$\square\phi = 8\pi\sigma. \quad (4.22)$$

Por otro lado,

$$\sigma = \frac{M}{4\pi R^2} \delta(r - R), \quad (4.23)$$

donde  $R = R(t)$ . Así, la ecuación diferencial para  $\phi$  es

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \nabla^2\phi = \frac{2M}{R^2} \delta(r - R), \quad (4.24)$$

donde  $\nabla^2$  es el operador laplaciano en coordenadas esféricas. Una solución aproximada de esta ecuación diferencial es<sup>3</sup>

$$\phi = \begin{cases} 1 - \frac{2M}{r}; & r > R(t) \\ 1 - \frac{2M}{R(t)}; & r < R(t) \end{cases} \quad (4.25)$$

Por lo tanto, dentro de la cáscara el potencial es constante para cada  $t$ , y fuera disminuye como el potencial Newtoniano. Además, en el límite  $r \rightarrow \infty$ , la métrica de la teoría de Nordström modificada se reduce a la métrica plana.

Ahora encontraremos la ecuación de movimiento de la cáscara de polvo mediante un procedimiento análogo al utilizado en la sec. 2.2.

Sea  $\Sigma$  la hipersuperficie en el espacio-tiempo,  $V$ , determinada por la evolución de la cáscara. Sean  $V^+$  y  $V^-$  las variedades en que divide  $\Sigma$  al espacio-tiempo. Sean  $\xi^a = (\tau, \theta, \phi)$  coordenadas sobre  $\Sigma$ <sup>4</sup>.

Las ecuaciones (2.24) y (2.25) que determinan la dinámica del sistema en relatividad 3+1 son una consecuencia de las ecuaciones de Einstein. Por lo cual, en la teoría de Nordström modificada, en principio, no tenemos todas

---

<sup>3</sup>Ver apéndice A.

<sup>4</sup>Ver nota 6 del cap. 2.

las ecuaciones correspondientes a éstas. Empero, el significado físico de la ec.(2.24) es que la aceleración medida por dos observadores sobre la cáscara, uno fuera, el otro dentro, es la misma en magnitud, pero con dirección opuesta<sup>5</sup>. Si esto no sucediera, las partículas que forman la cáscara se separarían, y no habría cáscara. Así, aunque la ec.(2.24) es una consecuencia de ecuaciones de Einstein que no tenemos, ésta se puede justificar sólo con argumentos físicos. Por lo tanto, si queremos que haya cáscara, la ec.(2.24) debe seguir siendo válida en la teoría de Nordström modificada, aún cuando no podamos deducirla de otras ecuaciones. De la discusión anterior se sigue que la ecuación de movimiento de la cáscara en la teoría de Nordström modificada se puede obtener de<sup>6</sup>

$$n_\alpha u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu|^{+} + n_\alpha u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu|^{-} = 0, \quad (4.26)$$

donde  $n^\alpha$  es el vector normal a  $\Sigma$  y  $u^\alpha$  es la velocidad de la cáscara. Calculemos, pues, (4.26).

La ecuación de  $\Sigma$  en forma paramétrica, en coordenadas con simetría esférica,  $x^\alpha = (t, r, \theta, \phi)$ , es

$$t = t(\tau), \quad r = R(\tau), \quad \theta = \theta, \quad \phi = \phi.$$

La métrica sobre la esfera es

$$ds^2 = -d\tau^2 + R^2(\tau)(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2). \quad (4.27)$$

Debido a (4.19) y (4.25), la métrica en  $V^+$  es

$$ds^2 = \phi^+ [-dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2)], \quad (4.28)$$

donde  $\phi^+ = 1 - \frac{2M}{r}$ . De manera análoga, la métrica en  $V^-$  es

$$ds^2 = \phi^- [-dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2)], \quad (4.29)$$

donde  $\phi^- = 1 - \frac{2M}{R(t)}$ .  $R(t)$  es el radio de la cáscara en el tiempo  $t$ .

Para encontrar la ecuación de movimiento necesitamos conocer  $n_\alpha u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu|^\pm$ . Calculemos primero  $n_\alpha u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu|^{+}$ .

<sup>5</sup>Misner *et al.* (1968), p. 555.

<sup>6</sup>En este capítulo el símbolo  $|^{+(-)}$  tiene el mismo significado que en la sección 2.2. Véase nota 4 del cap. 2.

La componente radial de  $u^\alpha|^+ = (u^t, u^r, u^\theta, u^\phi)|^+$  es

$$u^r|^+ = \frac{dr}{d\tau}\Big|_{r \rightarrow R} = \frac{dR}{d\tau} = \dot{R}. \quad (4.30)$$

Como estamos considerando sólo movimiento radial, entonces  $u^\theta|^+ = 0$  y  $u^\phi|^+ = 0$ . En el límite  $r \rightarrow R$ , tenemos  $\phi^+(r) \rightarrow \phi^+(R)$ , con lo cual de  $u^\mu|^+ u_\mu|^+ = -1$ , se obtiene

$$\phi^+(R) \dot{R}^2 - \phi^+(R) (u^t|^+)^2 = -1.$$

Despejando  $u^t|^+$

$$u^t|^+ = \sqrt{\frac{1}{\phi^+(R)} + \dot{R}^2} \equiv X_N^+. \quad (4.31)$$

Así

$$u^\mu|^+ = (X_N^+, \dot{R}, 0, 0). \quad (4.32)$$

El vector normal,  $n^\alpha|^+$ , lo podemos encontrar utilizando

$$g^{ab} e^\alpha_a e^\beta_b = g^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta, \quad (4.33)$$

donde

$$g^{ab} = \text{diag} \left( -1, \frac{1}{R^2}, \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \right), \quad (4.34)$$

$$g^{\alpha\beta} = \text{diag} \left( -\frac{1}{\phi^+(R)}, \frac{1}{\phi^+(R)}, \frac{1}{\phi^+ R^2}, \frac{1}{\phi^+ R^2 \sin^2 \theta} \right), \quad (4.35)$$

$$e^\alpha_\tau = \left( \frac{dt}{d\tau}, \dot{R}, 0, 0 \right), \quad (4.36)$$

$$e^\alpha_\theta = (0, 0, 1, 0), \quad (4.37)$$

$$e^\alpha_\phi = (0, 0, 0, 1). \quad (4.38)$$

Haciendo  $\alpha = \beta = 0$  en (4.33) y utilizando (4.34)-(4.36)

$$n_t|^+ = -\phi^+(R) \dot{R}. \quad (4.39)$$

De manera análoga,  $\alpha = \beta = r$ ,  $\alpha = \beta = \theta$  y  $\alpha = \beta = \phi$  dan como resultado, respectivamente,

$$n_r|^+ = \phi^+(R) X_N^+, \quad (4.40)$$

$$n_\theta|^+ = 0, \quad (4.41)$$

y

$$n_\phi|^+ = 0. \quad (4.42)$$

Por lo tanto,

$$n_\alpha|^+ = \left( -\phi^+(R) \dot{R}, \phi^+(R) X_N^+, 0, 0 \right). \quad (4.43)$$

Teniendo en cuenta (4.32)

$$n_\mu u^\mu{}_{;\nu} u^\nu|^+ = n_t u^t{}_{;\nu} u^\nu|^+ + n_r u^r{}_{;\nu} u^\nu|^+. \quad (4.44)$$

Por otro lado,

$$u_\mu u^\mu{}_{;\nu} = \frac{1}{2} (u_\mu u^\mu)_{;\nu} = \frac{1}{2} (u_\mu u^\mu)_{,\nu} = 0.$$

Así,

$$u^t{}_{;\nu} u^\nu|^+ = -\frac{u_r}{u_t} (u^r{}_{;\nu} u^\nu)|^+. \quad (4.45)$$

Insertando (4.45) en (4.44)

$$n_\mu (u^\mu{}_{;\nu} u^\nu)|^+ = \left( n_r - \frac{n_t u_r}{u_t} \right) (u^r{}_{;\nu} u^\nu)|^+. \quad (4.46)$$

Utilizando (4.32) y (4.43) en (4.46)

$$n_\mu (u^\mu{}_{;\nu} u^\nu)|^+ = \frac{1}{X_N} (u^r{}_{;\nu} u^\nu)|^+. \quad (4.47)$$

Calculemos  $u^r{}_{;\nu} u^\nu|^+$ . Tenemos que

$$u^r{}_{;\nu} u^\nu|^+ = \left( \frac{du^r}{d\tau} + \Gamma_{tt}^r (u^t)^2 + 2\Gamma_{tr}^r u^t u^r + \Gamma_{rr}^r (u^r)^2 \right)|^+. \quad (4.48)$$

Se encuentra que

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{\phi^+(R)_{,r}}{2\phi} \quad (4.49)$$

$$\Gamma_{tr}^r = 0 \quad (4.50)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{\phi^+(R)_{,r}}{2\phi}. \quad (4.51)$$



Insertando (4.49)-(4.51) en (4.48)

$$u^r{}_{;\nu}u^\nu|^{+} = \ddot{R} + \frac{M}{R^2\phi^+(R)} \left( \frac{1}{\phi^+(R)} + 2\dot{R}^2 \right). \quad (4.52)$$

Así, de (4.47) y (4.52)

$$n_\mu u^\mu{}_{;\nu}u^\nu|^{+} = \frac{1}{X_N^+} \left[ \ddot{R} + \frac{M}{R^2\phi^+(R)} \left( \frac{1}{\phi^+(R)} + 2\dot{R}^2 \right) \right]. \quad (4.53)$$

Ahora calculemos  $n_\alpha u^\alpha{}_{;\nu}u^\nu|^{-}$ . En principio, deberíamos hacer todo el cálculo que hicimos para encontrar  $n_\mu u^\mu{}_{;\nu}u^\nu|^{+}$ , pero con la métrica (4.29), sin embargo, como las métricas (4.28) y (4.29) coinciden sobre la cáscara, las ecuaciones (4.32), (4.43), (4.47) y (4.48) siguen siendo válidas, pero con índice - en lugar de +. Así,

$$u^\mu|^{-} = (X_N^-, \dot{R}, 0, 0), \quad (4.54)$$

$$n_\alpha|^{-} = (-\phi^-(R)\dot{R}, \phi^-(R)X_N^-, 0, 0), \quad (4.55)$$

$$n_\mu (u^\mu{}_{;\nu}u^\nu)|^{-} = \frac{1}{X_N^-} (u^r{}_{;\nu}u^\nu)|^{-}, \quad (4.56)$$

$$u^r{}_{;\nu}u^\nu|^{-} = \left( \frac{du^r}{d\tau} + \Gamma_{tt}^r (u^t)^2 + 2\Gamma_{tr}^r u^t u^r + \Gamma_{rr}^r (u^r)^2 \right) |^{-}. \quad (4.57)$$

En este caso los símbolos de Christoffel son

$$\Gamma_{tt}^r = 0 \quad (4.58)$$

$$\Gamma_{tr}^r = \frac{1}{2\phi^-} \frac{d\phi^-}{d\tau} \left[ 1 / \frac{dt}{d\tau} \right] \quad (4.59)$$

$$\Gamma_{rr}^r = 0. \quad (4.60)$$

Insertando (4.58)-(4.60) en (4.57)

$$u^r{}_{;\nu}u^\nu|^{-} = \ddot{R} + \frac{2}{\phi^-} \frac{M}{R^2} \dot{R}^2. \quad (4.61)$$

De (4.56) y (4.61)

$$n_\mu u^\mu{}_{;\nu}u^\nu|^{-} = \frac{1}{X_N^-} \left[ \ddot{R} + \frac{2}{\phi^-} \frac{M}{R^2} \dot{R}^2 \right]. \quad (4.62)$$

De (4.26), (4.53) y (4.62) se sigue que la ecuación de movimiento de la cáscara es

$$\ddot{R} = -\frac{1}{2\left(1 - \frac{2M}{R}\right)} \left[ \frac{M}{\left(1 - \frac{2M}{R}\right) R^2} + \frac{4M}{R^2} \dot{R}^2 \right]. \quad (4.63)$$

Si en (4.63) hacemos el cambio de variable  $y = R - 2M$ , obtenemos

$$\ddot{y} = -\frac{M}{2y^2} + \frac{2M\dot{y}^2}{y(y+2M)}, \quad (4.64)$$

donde  $\dot{y} \equiv \frac{dy}{dt}$ . Dividiendo (4.64) por  $\dot{y}$  y arreglando lo que resulta

$$\frac{d}{dt} \left( \ln \dot{y} - \ln \left[ \frac{y+2M}{y} \right] \right) = -\frac{M}{2y^2 \dot{y}}. \quad (4.65)$$

A partir de aquí no es claro como proceder para encontrar una primera integral de (4.64). Se puede hacer una aproximación<sup>7</sup> cuando  $\dot{y} \simeq 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \ln \dot{y} - \ln \left[ \frac{y+2M}{y} \right] \right) &\simeq -\frac{M\dot{y}}{2y^2} \\ &= \frac{dM}{dt} \frac{1}{2y}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

En esta aproximación, una primera integral de (4.64) es

$$\ln \dot{y} - \ln \left[ \frac{y+2M}{y} \right] - \frac{M}{2y} = a_N, \quad (4.67)$$

donde  $a_N$  es una constante.

Veamos algo más de la dinámica del colapso. Restando (4.62) a (4.53) resulta

$$n_\mu u^\mu{}_{;\nu} u^\nu|^{+} - n_\mu u^\mu{}_{;\nu} u^\nu|^{-} = \frac{M}{y^2}. \quad (4.68)$$

<sup>7</sup>Utilizando Maple 10 para resolver (4.64) se encuentra que  $\dot{y} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{-\frac{t+2M}{t}} (a_1 Y_1(\sqrt{-\frac{t+2M}{t}}) + J_1(\sqrt{-\frac{t+2M}{t}}))}{a_1 Y_0(\sqrt{-\frac{t+2M}{t}}) + J_0(\sqrt{-\frac{t+2M}{t}})}$ , donde  $J_{0(1)}(\sqrt{-\frac{t+2M}{t}})$  es la función de

Bessel de primer tipo de orden 0 (1),  $Y_{0(1)}(\sqrt{-\frac{t+2M}{t}})$  es la función de Bessel de segundo tipo de orden 0 (1) y  $a_1$  es una constante. Esta expresión es poco manejable, así, es natural hacer una aproximación.

Si tenemos en cuenta que  $y = R - 2M$  es una medida del radio de la cáscara, entonces podemos proponer:  $\frac{M}{y^2} = 4\pi F(\sigma)$ , con  $F$  una función de  $\sigma$ . En estas circunstancias

$$n_\mu u^\mu{}_{;\nu} u^\nu|^{+} - n_\mu u^\mu{}_{;\nu} u^\nu|^{-} = 4\pi F(\sigma). \quad (4.69)$$

Así, en la teoría de Nordström modificada tenemos una ecuación análoga a la ecuación (2.25) que resulta en relatividad general.

Para hacer la formulación hamiltoniana del problema, el hamiltoniano, en la aproximación que estamos considerando ( $\frac{1}{y} \simeq \dot{y}$ ), lo podemos tomar como

$$H \equiv a_N = \ln P_y - \ln \left[ \frac{y + 2M}{y} \right] - \frac{M}{2y}, \quad (4.70)$$

donde  $P_y \equiv \dot{y}$  es el momento conjugado a  $y$ . Las ecuaciones de Hamilton aplicadas a este hamiltoniano son equivalentes a la ecuación de movimiento (4.64) en la aproximación antes mencionada.

### 4.3. Colapso clásico en relatividad general linealizada

Para encontrar la ecuación de movimiento de la cáscara de polvo en relatividad general linealizada utilizaremos la ecuación (2.24) que debe ser válida en este caso, ya que en su deducción no se hizo ninguna suposición sobre la intensidad del campo gravitacional.

La métrica sobre la cáscara es

$$ds^2 = -d\tau^2 + R^2(\tau) (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2). \quad (4.71)$$

La métrica en  $V^+$  es<sup>8</sup>

$$ds^2 = -(1 + \nu) dt^2 + (1 + \lambda) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2), \quad (4.72)$$

donde  $\nu(t, r)$ ,  $\lambda(t, r) \ll 1$ . De las ecuaciones de Einstein se encuentra que<sup>9</sup>  $\lambda = -\nu = \frac{2M}{r}$  con  $M$  la masa-energía total de la cáscara. Así, la métrica en  $V^+$  es

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left( 1 + \frac{2M}{r} \right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2). \quad (4.73)$$

<sup>8</sup>Los símbolos  $V^+$  y  $V^-$  tienen el mismo significado que en la sección 2.2.

<sup>9</sup>En el problema que estamos considerando  $\nu$  y  $\lambda$  no dependen de  $t$ , i.e., el teorema de Birkhoff también es cierto en relatividad general linealizada. Véase apéndice B.

La métrica en  $V^-$  se obtiene de (4.73) haciendo  $M = 0$ .

Ya hemos dicho que la ecuación de movimiento la obtendremos de<sup>10</sup>

$$n_\alpha u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu|^{+\pm} + n_\alpha u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu|^{-} = 0. \quad (4.74)$$

Calculemos, pues,  $n_\alpha u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu|^\pm$ .

La velocidad de una partícula que forma la cáscara es  $u^\alpha = (u^t, u^r, 0, 0)$ , ya que sólo estamos considerando movimiento radial y consecuentemente  $u^\theta = u^\phi = 0$ .

La componente radial de  $u^\alpha|^{+\pm}$  es

$$u^r|^{+\pm} = \left. \frac{dr}{d\tau} \right|_{r \rightarrow R} = \dot{R}.$$

Utilizando que  $u^\alpha|^{+\pm} u_\alpha|^{+\pm} = -1$

$$-\left(1 - \frac{2M}{R}\right) (u^t|^{+\pm})^2 + \left(1 + \frac{2M}{R}\right) (u^r|^{+\pm})^2 = -1.$$

Despejando  $u^t|^{+\pm}$

$$u^t|^{+\pm} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{R} + \dot{R}^2}}{1 - \frac{2M}{R}} \equiv X_L^\pm. \quad (4.75)$$

Así,

$$u^\alpha|^{+\pm} = (X_L^\pm, \dot{R}, 0, 0). \quad (4.76)$$

El vector normal,  $n^\alpha|^{+\pm}$ , lo podemos encontrar utilizando

$$g^{ab} e^\alpha{}_a e^\beta{}_b = g^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta, \quad (4.77)$$

donde

$$g^{ab} = \text{diag} \left( -1, \frac{1}{R^2}, \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \right), \quad (4.78)$$

$$g^{\alpha\beta} = \text{diag} \left( -\frac{1}{1 - \frac{2M}{R}}, \frac{1}{1 + \frac{2M}{R}}, \frac{1}{R^2}, \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \right), \quad (4.79)$$

$$e^\alpha{}_\tau = \left( \frac{dt}{d\tau}, \dot{R}, 0, 0 \right), \quad (4.80)$$

---

<sup>10</sup>Veáse la nota 4 del cap. 2 para el significado de los símbolos  $|^+$  y  $|^-$ .

$$e^\alpha_\theta = (0, 0, 1, 0), \quad (4.81)$$

$$e^\alpha_\phi = (0, 0, 0, 1). \quad (4.82)$$

Haciendo  $\alpha = \beta = 0$  en (4.77) y utilizando (4.78)-(4.80)

$$n_t|^{+} = -\dot{R}. \quad (4.83)$$

De manera análoga,  $\alpha = \beta = r$ ,  $\alpha = \beta = \theta$  y  $\alpha = \beta = \phi$  dan como resultado, respectivamente,

$$n_r|^{+} = X_L^+, \quad (4.84)$$

$$n_\theta|^{+} = 0, \quad (4.85)$$

y

$$n_\phi|^{+} = 0. \quad (4.86)$$

Por lo tanto,

$$n_\alpha|^{+} = (-\dot{R}, X_L^+, 0, 0). \quad (4.87)$$

Utilizando (4.76)

$$n_\mu u^\mu{}_{;\nu} u^\nu|^{+} = n_t u^t{}_{;\nu} u^\nu|^{+} + n_r u^r{}_{;\nu} u^\nu|^{+}. \quad (4.88)$$

Por otro lado,

$$u_\mu u^\mu{}_{;\nu} = \frac{1}{2} (u_\mu u^\mu)_{;\nu} = \frac{1}{2} (u_\mu u^\mu)_{,\nu} = 0.$$

Así,

$$u^t{}_{;\nu} u^\nu|^{+} = -\frac{u_r}{u_t} (u^r{}_{;\nu} u^\nu)|^{+}. \quad (4.89)$$

Insertando (4.89) en (4.88)

$$n_\mu (u^\mu{}_{;\nu} u^\nu)|^{+} = \left( n_r - \frac{n_t u_r}{u_t} \right) (u^r{}_{;\nu} u^\nu)|^{+}. \quad (4.90)$$

Utilizando (4.76) y (4.87) en (4.90)

$$n_\mu (u^\mu{}_{;\nu} u^\nu)|^{+} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{R}\right) X_L} (u^r{}_{;\nu} u^\nu)|^{+}. \quad (4.91)$$

Ahora calculemos  $u^r{}_{;\nu} u^\nu|^{+}$ . Tenemos que

$$u^r{}_{;\nu} u^\nu|^{+} = \left( \frac{du^r}{d\tau} + \Gamma_{tt}^r (u^t)^2 + 2\Gamma_{tr}^r u^t u^r + \Gamma_{rr}^r (u^r)^2 \right)|^{+}. \quad (4.92)$$

Se obtiene que

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{M}{r^2} \quad (4.93)$$

$$\Gamma_{tr}^r = 0 \quad (4.94)$$

$$\Gamma_{rr}^r = -\frac{M}{r^2}. \quad (4.95)$$

Sustituyendo (4.93)-(4.95) en (4.92)

$$u^r{}_{;\nu} u^\nu|^{+} = \ddot{R} + \frac{M}{R^2} \left[ (u^t|^{+})^2 - (u^r|^{+})^2 \right]. \quad (4.96)$$

Utilizando que  $u_\alpha u^\alpha = -1$

$$\frac{M}{R^2} \left[ (u^t|^{+})^2 - (u^r|^{+})^2 \right] = \frac{M}{R^2} \left[ 1 + \frac{2M}{R} (u^r|^{+})^2 + \frac{2M}{R} (u^t|^{+})^2 \right]. \quad (4.97)$$

A primer orden

$$\frac{M}{R^2} \left[ (u^t|^{+})^2 - (u^r|^{+})^2 \right] = \frac{M}{R^2}. \quad (4.98)$$

Sustituyendo (4.98) en (4.96)

$$u^r{}_{;\nu} u^\nu|^{+} = \ddot{R} + \frac{M}{R^2}. \quad (4.99)$$

Insertando (4.99) en (4.91)

$$n_\mu (u^\mu{}_{;\nu} u^\nu)|^{+} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{R}\right) X_L^+} \left( \ddot{R} + \frac{M}{R^2} \right). \quad (4.100)$$

Haciendo  $M = 0$  en (4.100)

$$n_\mu (u^\mu{}_{;\nu} u^\nu)|^{-} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{R}^2}} \ddot{R}. \quad (4.101)$$

Sustituyendo (4.100) y (4.101) en (4.74)

$$\ddot{R} \left[ \sqrt{1 + \dot{R}^2} + \sqrt{1 + \dot{R}^2 - \frac{2M}{R}} \right] = -\frac{M}{R^2} \sqrt{1 + \dot{R}^2}. \quad (4.102)$$

Esta es la misma ecuación que encontramos en la sección 2.2 mediante relatividad general no linealizada, ver ec. (2.53). Así, la ecuación de movimiento

de la cáscara que resulta en relatividad general linealizada es la misma que resulta en relatividad general completa. Una primera integral de (4.102) es

$$\left(1 + \dot{R}^2\right)^{\frac{1}{2}} = a_L + M / (2a_L R), \quad (4.103)$$

donde  $a_L$  es una constante.

Haciendo los mismos pasos de (2.55) a (2.59) de la sec. 2.2 se puede concluir que  $a_L$  tiene el mismo sentido físico que  $a$  de la sec. 2.2.

El límite no relativista de (4.102) también es la ec. (2.64).

La formulación hamiltoniana del problema se puede hacer de la misma manera que en relatividad general completa.

## 4.4. Colapso clásico en 2+1 con $\Lambda \neq 0$

En gravedad 2+1 consideraremos el colapso de un anillo unidimensional de polvo<sup>11</sup>.

Las relaciones de geometría diferencial que presentamos en las sección 2.2 también son válidas cuando  $V$  es tridimensional y  $\Sigma$  bidimensional<sup>12</sup>.

En el caso que estamos considerando a  $V$  lo identificaremos con el espacio-tiempo y a  $\Sigma$  con la superficie que describe el anillo en el espacio-tiempo. Los vectores  $d\xi^A/d\tau = u^A$ , tangentes a  $\Sigma$ , determinan las curvas que describen las partículas que forman el anillo. Si consideramos que el tensor de energía-momento del anillo es

$$S^{AB} = \sigma u^A u^B,$$

con

$$u^A u_A = -1,$$

y  $\sigma$  la densidad de masa en reposo del anillo, entonces de la misma manera que en la sec. 2.2 se cumple que<sup>13</sup>

$$e^i_{A\alpha} u_{i;j} u^j |^{\pm} = 0, \quad (4.104)$$

<sup>11</sup>Las ideas centrales del desarrollo que se presenta en esta sección las hemos tomado de [19], aunque nosotros seguimos un camino un poco distinto para hacer los cálculos. El análisis del colapso de un anillo unidimensional de polvo también lo han hecho Crisóstomo y Olea [6], utilizando la formulación hamiltoniana de relatividad general en dimensión 2+1.

<sup>12</sup>En esta sección los índices latinos minúsculos  $i, j, \dots$  van de 0 hasta 2 y los índices latinos mayúsculos  $A, B, \dots$  van de 1 hasta 2.

<sup>13</sup>Veáse nota 4 del cap. 2 para el significado de los símbolos  $|^+$  y  $|^-$  y del índice  $+(-)$  en  $K_{ab}$  o en  $K$ .

$$n_i u^i{}_{;j} u^j|^{+} + n_i u^i{}_{;j} u^j|^{-} = -2\tilde{K}_{AB} u^A u^B, \quad (4.105)$$

$$n_i u^i{}_{;j} u^j|^{+} - n_i u^i{}_{;j} u^j|^{-} = -2\gamma_{AB} u^A u^B, \quad (4.106)$$

donde

$$\tilde{K}_{AB} = \frac{1}{2}(K^+_{AB} + K^-_{AB}), \quad (4.107)$$

$$\gamma = K^+_{AB} - K^-_{AB}. \quad (4.108)$$

Las ecuaciones (4.104)-(4.106) determinan la dinámica del sistema.

La ecuación de Gauss en 2+1 es

$$-2G_{ij} n^i n^j = {}^2R + K_{AB} K^{AB} - K^2. \quad (4.109)$$

Consideraremos que en  $V^{\pm 14}$

$$G_{ij}^{\pm} = -\Lambda g_{ij}^{\pm}, \quad (4.110)$$

donde  $g_{ij}^{\pm}$  es la métrica de  $V^{\pm}$  y  $\Lambda$  es la constante cosmológica. Estas ecuaciones tienen como soluciones métricas con curvatura constante. Sustituyendo (4.110) en (4.109)

$${}^2R + K_{AB}^{\pm} K_{\pm}^{AB} - K_{\pm}^2 = 2\Lambda. \quad (4.111)$$

Restando (4.111) consigo misma

$$K_{AB}^+ K_+^{AB} - K_+^2 - K_{AB}^- K_-^{AB} + K_-^2 = 0. \quad (4.112)$$

Utilizando  $\tilde{K}_{AB}$  y la ecuación de Lanczos<sup>15</sup>

$$\gamma_{AB} - g_{AB} \gamma = -8\pi S_{AB}, \quad (4.113)$$

la ecuación (4.112) se puede escribir como

$$S_{AB} \tilde{K}^{AB} = 0. \quad (4.114)$$

<sup>14</sup>Consideramos las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica distinta de cero, debido a que las ecuaciones de Einstein en 2+1 en el vacío sin constante cosmológica tienen como solución, necesariamente, una métrica plana, ver Carlip (1998), p. 3. Así, con constante cosmológica igual a cero, en el problema que nos interesa tendríamos métrica plana en  $V^+$  y en  $V^-$ , lo cual no parece prometer mucho si tenemos en cuenta que queremos estudiar un modelo juguete del colapso cuántico gravitacional.

<sup>15</sup>La ecuación de Lanczos es independiente de la dimensión. Ver Crisóstomo y Olea (2004), p. 2.



De (4.105) y (4.114)

$$n_i u^i{}_{;j} u^j|^{+} + n_i u^i{}_{;j} u^j|^{-} = 0. \quad (4.115)$$

Invirtiendo la ecuación de Lanczos

$$\gamma_{AB} = -8\pi (S_{AB} - g_{AB}S). \quad (4.116)$$

Utilizando (4.108) y (4.116) en (4.106)

$$\begin{aligned} n_i u^i{}_{;j} u^j|^{+} - n_i u^i{}_{;j} u^j|^{-} &= 8\pi u^A u^B (S_{AB} - g_{AB}S) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.117)$$

En gravedad 3+1 la ecuación de movimiento de la cáscara la obtuvimos de la ecuación análoga a (4.115), mientras que la interpretación física de la constante que apareció en una primera integral de la ecuación de movimiento la obtuvimos de la ecuación análoga a (4.117). En relatividad general en 2+1 es un *poco* diferente, ya que, como más adelante veremos, de ambas ecuaciones, (4.115) y (4.117), se obtiene la misma ecuación de movimiento.

La ecuación de  $\Sigma$  en forma paramétrica, en coordenadas con simetría circular,  $x^i = (t, r, \theta)$ , es

$$t = t(\tau), \quad r = R(\tau), \quad \theta = \theta,$$

donde  $\xi^A = (\tau, \theta)$  son coordenadas intrínsecas a  $\Sigma$ <sup>16</sup>. La métrica sobre el anillo es

$$ds^2 = -d\tau^2 + R^2(\tau)d\theta^2. \quad (4.118)$$

La solución de  $G_{ij} = -\Lambda g_{ij}$  en  $V^+$  es<sup>17</sup>

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{1}{f} dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad (4.119)$$

donde<sup>18</sup>  $f = 1 - 2M + \frac{r^2}{l^2}$ ,  $-\frac{1}{l^2} \equiv \Lambda$  y  $M$  es la masa-energía total de anillo. La métrica (4.119) se conoce como Schwarzschild-anti de Sitter (versión 2+1). La métrica en  $V^-$  se obtiene de (4.119) haciendo  $M = 0$ .

<sup>16</sup> $\tau$  se puede pensar como el tiempo propio de un observador sobre el anillo;  $\theta$  es la coordenada angular usual.

<sup>17</sup>Ver apéndice C.

<sup>18</sup>La función  $f$  se puede escoger como  $f = -M_{\text{BTZ}} + \frac{r^2}{l^2}$ , donde  $M = \frac{1}{2}M_{\text{BTZ}}$ , esta igualdad es una consecuencia del comportamiento asintótico de la métrica. El subíndice BTZ se pone debido a que la métrica que resulta (ver [1]) con esta elección se conoce como BTZ. La distinta elección de  $f$  corresponde tanto a una elección del parámetro de masa como un corrimiento del cero de la masa-energía total. Ver apéndice D.

Ahora calcularemos  $n_i u^i_{;j} u^j |^\pm$ . Calcularemos primero  $n_i u^i_{;j} u^j |^+$ , en la expresión que resulte basta hacer  $M = 0$  para conocer  $n_i u^i_{;j} u^j |^-$ .

La componente radial de  $u^i |^+ = (u^t, u^r, u^\theta) |^+$  es

$$u^r |^+ = \frac{dr}{d\tau} \Big|_{r \rightarrow R} = \frac{dR}{d\tau} = \dot{R}. \quad (4.120)$$

Como estamos considerando que sólo hay movimiento radial, entonces  $u^\theta |^+ = 0$ . En el límite  $r \rightarrow R$ , tenemos  $f(r) \rightarrow f(R)$ , con lo cual de  $u^i |^+ u_i |^+ = -1$ , se obtiene

$$\frac{1}{f(R)} \dot{R}^2 - f(R) (u^t |^+)^2 = -1.$$

Despejando  $u^t |^+$

$$u^t |^+ = \frac{\sqrt{f(R) + \dot{R}^2}}{f(R)} \equiv X^+. \quad (4.121)$$

Así,

$$u^i |^+ = (X^+, \dot{R}, 0). \quad (4.122)$$

El vector normal,  $n^i |^+$ , lo podemos encontrar utilizando

$$g^{AB} e^i_A e^j_B = g^{ij} - n^i n^j, \quad (4.123)$$

donde

$$g^{AB} = \text{diag} \left( -1, \frac{1}{R^2} \right), \quad (4.124)$$

$$g^{ij} = \text{diag} \left( -\frac{1}{f}, f, \frac{1}{R^2} \right), \quad (4.125)$$

$$e^i_\tau = \left( \frac{dt}{d\tau}, \dot{R}, 0 \right), \quad (4.126)$$

$$e^i_\theta = (0, 0, 1). \quad (4.127)$$

Haciendo  $i = j = 0$  en (4.123) y utilizando (4.124)-(4.126)

$$n_t |^+ = -\dot{R}. \quad (4.128)$$

De manera análoga,  $i = j = r$  y  $i = j = \theta$  dan como resultado, respectivamente,

$$n_r |^+ = X^+ \quad (4.129)$$

y

$$n_\theta|^+ = 0. \quad (4.130)$$

Por lo tanto,

$$n_i|^+ = \left(-\dot{R}, X^+, 0\right). \quad (4.131)$$

Teniendo en cuenta (4.122)

$$n_i u^i{}_{;j} u^j|^+ = n_t u^t{}_{;j} u^j|^+ + n_r u^r{}_{;j} u^j|^+. \quad (4.132)$$

Por otro lado,

$$u_i u^i{}_{;j} = \frac{1}{2} (u_i u^i)_{;j} = \frac{1}{2} (u_i u^i)_{;j} = 0.$$

Así,

$$u^t{}_{;j} u^j|^+ = -\frac{u_r}{u_t} (u^r{}_{;j} u^j)|^+. \quad (4.133)$$

Insertando (4.133) en (4.132)

$$n_i (u^i{}_{;j} u^j)|^+ = \left(n_r - \frac{n_t u_r}{u_t}\right) (u^r{}_{;j} u^j)|^+. \quad (4.134)$$

Utilizando (4.122) y (4.131) en (4.134)

$$n_i (u^i{}_{;j} u^j)|^+ = \frac{1}{fX} (u^r{}_{;j} u^j)|^+. \quad (4.135)$$

Calculemos  $u^r{}_{;j} u^j|^+$ . Tenemos que

$$u^r{}_{;j} u^j|^+ = \left(\frac{du^r}{d\tau} + \Gamma_{tt}^r (u^t)^2 + 2\Gamma_{tr}^r u^t u^r + \Gamma_{rr}^r (u^r)^2\right)|^+. \quad (4.136)$$

Se encuentra que

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} f f_{,r} \quad (4.137)$$

$$\Gamma_{tr}^r = 0 \quad (4.138)$$

$$\Gamma_{rr}^r = -\frac{1}{2} \frac{f_{,r}}{f}. \quad (4.139)$$

Insertando (4.137)-(4.139) en (4.136)

$$u^r{}_{;j} u^j|^+ = \ddot{R} + \frac{R}{l^2}. \quad (4.140)$$

Así, de (4.135) y (4.140)

$$n_i u^i{}_{;j} u^j|^{+} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2M - \frac{R^2}{l^2} + \dot{R}^2}} \left( \ddot{R} + \frac{R}{l^2} \right). \quad (4.141)$$

Haciendo  $M = 0$  en (4.141)

$$n_i u^i{}_{;j} u^j|^{-} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} + \dot{R}^2}} \left( \ddot{R} + \frac{R}{l^2} \right). \quad (4.142)$$

Sustituyendo (4.141) y (4.142) en (4.115) y (4.117)

$$\left( \ddot{R} + \frac{R}{l^2} \right) \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - 2M - \frac{R^2}{l^2} + \dot{R}^2}} \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} + \dot{R}^2}} \right] = 0. \quad (4.143)$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento es

$$\ddot{R} + \frac{R}{l^2} = 0. \quad (4.144)$$

Una primera integral de esta ecuación es

$$\frac{\dot{R}^2}{2} + \frac{R^2}{2l^2} = E, \quad (4.145)$$

donde  $E$  es una constante por determinar.

De (4.143) se sigue que, como ya habíamos anticipado, de ninguna de las ecuaciones (4.115) y (4.117) podemos conocer la constante  $E$ . Así pues, es necesario buscar otra manera para conocer  $E$ . Afortunadamente Peleg y Steif [19] ya nos han dado la respuesta: hay que utilizar la componente  $\tau\tau$  de la ecuación de Lanczos,

$$\gamma_{\tau\tau} - g_{\tau\tau}\gamma = -8\pi S_{\tau\tau}. \quad (4.146)$$

Tenemos que

$$u_A = u_i e^i_A. \quad (4.147)$$

Haciendo  $A = \tau$  y utilizando (4.122) y (4.126)

$$u_\tau = -1. \quad (4.148)$$

De manera análoga con  $A = \theta$ , (4.122) y (4.127)

$$u_\theta = 0. \quad (4.149)$$

También, tenemos que (ver ec. [2.9])

$$n_i u^i{}_{;j} u^j|^\pm = -u^A u^B K_{AB}|^\pm. \quad (4.150)$$

Así, de (4.141), (4.142), (4.144) y (4.150)

$$u^A u^B K_{AB}|^\pm = 0. \quad (4.151)$$

Por lo tanto, de (4.148), (4.149) y (4.151)

$$K_{\tau\tau}|^\pm = 0. \quad (4.152)$$

Consecuentemente

$$\gamma_{\tau\tau} = 0 \quad (4.153)$$

y

$$\gamma = g^{\theta\theta} \gamma_{\theta\theta}. \quad (4.154)$$

Por otro lado,

$$S_{\tau\tau} = \sigma. \quad (4.155)$$

Por lo tanto, de (4.146), (4.153), (4.154) y (4.155)

$$\gamma_{\theta\theta} = -8\pi R^2 \sigma. \quad (4.156)$$

Considerando que  $\sigma = \frac{m}{4\pi R}$ , con  $m$  la masa en reposo del anillo,

$$\gamma_{\theta\theta} = -4mR. \quad (4.157)$$

Por otro lado, el tensor de curvatura extrínseca es (ver ec.[2.2])

$$K_{AB} = \frac{\partial n_i}{\partial x_B} e^i{}_A - \Gamma^k{}_{ij} n_k e^i{}_A e^j{}_B. \quad (4.158)$$

Haciendo  $A = B = \theta$

$$\begin{aligned} K_{\theta\theta} &= -\Gamma^t{}_{\theta\theta} n_t - \Gamma^r{}_{\theta\theta} n_r \\ &= fXR. \end{aligned} \quad (4.159)$$

Por lo tanto,

$$\gamma_{\theta\theta} = (fX|^{+} - fX|^{-}) R. \quad (4.160)$$

De (4.157) y (4.160)

$$\sqrt{1 + \frac{R^2}{l^2} + \dot{R}^2} - \sqrt{1 - 2M + \frac{R^2}{l^2} + \dot{R}^2} = 4m. \quad (4.161)$$

Resolviendo para  $E = \frac{\dot{R}^2}{2} + \frac{R^2}{2l^2}$

$$E = \frac{M^2}{32m^2} + \frac{M}{2} + 2m^2 - \frac{1}{2}. \quad (4.162)$$

La ecuación anterior se puede escribir como

$$E = \frac{1}{32} (a + 8m)^2 - \frac{1}{2}, \quad (4.163)$$

donde  $a = \frac{M}{m}$ . Una medida de la energía de amarre es  $m - M = M \frac{(1-a)}{a}$ . Así,  $E$  está relacionada con la energía de amarre del anillo.

De (4.145) y (4.163)

$$\frac{\dot{R}^2}{2} + \frac{R^2}{2l^2} = \frac{1}{32} (a + 8m)^2 - \frac{1}{2}. \quad (4.164)$$

Si definimos  $P_R \equiv \dot{R}$  como el momento conjugado a  $R$ , entonces el Hamiltoniano del problema es

$$H \equiv E = \frac{P_R^2}{2} + \frac{R^2}{2l^2}. \quad (4.165)$$

Las ecuaciones de Hamilton aplicadas a este Hamiltoniano son equivalentes a la ecuación de movimiento (4.144).

# Capítulo 5

## Colapso cuántico en modelos de gravitación

En este capítulo expondremos el colapso cuántico de una cáscara de polvo bidimensional en varios modelos de gravitación.

En la sección 5.1 expondremos las ideas más relevantes del colapso cuántico de una cáscara de polvo en la teoría newtoniana. En la sección 5.2 trataremos, brevemente, el colapso cuántico de una cáscara de polvo en la teoría de Nordström modificada y en la teoría linealizada de Einstein.

### 5.1. Colapso cuántico en la teoría newtoniana

Las ideas que expondremos en esta sección ya se han discutido más ampliamente en [20]. Aquí no discutiremos con mucho detalle algunos cálculos, y nos centraremos más en la idea general y en los resultados obtenidos.

Ya hemos dicho, en la sección 2.3, que durante el colapso cuántico de una cáscara de polvo en gravedad 3+1 se puede formar un horizonte, o no. De hecho, este es uno de los aspectos más interesantes del problema. Así, es deseable estudiar la formación de un horizonte en un modelo de gravitación, en este caso la teoría newtoniana, y comparar los resultados que se obtienen en ambos casos. Sin embargo, el concepto de horizonte es un concepto puramente relativista, en consecuencia, en la teoría newtoniana, en principio, no tiene sentido hablar de horizonte. Empero, este problema puede resolverse si introducimos una estructura de horizonte mediante el horizonte de Laplace-

Michell<sup>1</sup>. Este horizonte está definido como el punto en donde la velocidad de escape es igual a la velocidad de la luz. Es interesante notar que para una masa puntual este horizonte coincide con el radio de Schwarzschild.

Una vez definido el concepto de horizonte en la teoría newtoniana, podemos estudiar si éste se forma, o no. Al igual que en el caso relativista hay varias maneras de hacerlo. Una consiste en considerar el cuadrado de la función de onda multiplicado por la masa de la cáscara como una densidad clásica de masa,  $\rho(r, t)$ , y analizar si en algún punto la velocidad de escape es igual a la velocidad de la luz. Si esto pasa, entonces, podemos considerar que sí se forma un horizonte. Otra es analizando el comportamiento de la varianza del radio de la cáscara,  $\Delta R(t) = \sqrt{\langle (R(t) - \langle R(t) \rangle)^2 \rangle}$ , cuando el valor esperado del radio de la cáscara,  $\langle R(t) \rangle$ , se hace pequeño. Si, cuando  $\langle R(t) \rangle$  se hace pequeño,  $\Delta R(t)$  en algún momento se hace mayor que el radio del horizonte, entonces, podemos considerar que no se forma un horizonte. En esta sección utilizaremos ambos caminos para analizar la formación de un horizonte.

En la sección 4.1 definimos el hamiltoniano,  $H$ , para el colapso clásico de la cáscara como

$$H = \frac{P_R^2}{2} - \frac{GM}{2R}, \quad (5.1)$$

donde  $P_R$  es el momento conjugado al radio de la cáscara  $R$ . Ya hemos dicho, en la sección 3.1, que en el colapso cuántico de la cáscara en gravedad 3+1 existe el problema de la selección *ad hoc* del hamiltoniano. En este sentido, podría argumentarse que la selección de (5.1) como el hamiltoniano es también *ad hoc*, y que, consecuentemente, nos encontramos con el mismo problema que en gravedad 3+1. Sin embargo, cualquier otro hamiltoniano generado por una transformación canónica, conectada a la identidad, es equivalente a (5.1), y en consecuencia, no existe tal problema.

El hamiltoniano (5.1) tiene unidades de velocidad al cuadrado. Si lo dividimos por la velocidad de la luz al cuadrado  $c^2$ , y definimos  $R' = R/L_0$ ,  $P'_R = P_R/c$ ,  $m = M/M_0$ , con  $L_0$  y  $M_0$  una longitud y una masa de referencia, respectivamente, obtenemos

$$H' \equiv H/c^2 = \frac{P'^2_R}{2} - \frac{GmM_0}{2R'L_0c^2}. \quad (5.2)$$

---

<sup>1</sup>Ryan (2004), p. S324.



También, mediante un análisis dimensional se encuentra que

$$\left[ P'_R, R' \right] = -i\hbar/M_0L_0c. \quad (5.3)$$

De este conmutador se sigue que el operador para  $P'_R$  es  $\frac{-i\hbar}{M_0L_0c}\partial/\partial R'$ . Así, si introducimos  $T = ct/L_0$ , la ecuación de Schrödinger correspondiente a  $H'$  es

$$i\frac{\hbar}{M_0L_0c}\frac{\partial\psi}{\partial T} = -\frac{\hbar^2}{2M_0^2L_0^2c^2}\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\psi}{\partial R}\right) - \frac{GmM_0}{2L_0Rc^2}\psi, \quad (5.4)$$

donde hemos suprimido las primas. Si  $M_0$  es la masa de Planck y  $L_0$  es la longitud de Planck, entonces

$$i\frac{\partial\psi}{\partial T} = -\frac{1}{2R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\psi}{\partial R}\right) - \frac{m}{2R}\psi, \quad (5.5)$$

donde  $T$  está medido en tiempos de Planck,  $R$  en longitudes de Planck y  $m$  en masas de Planck. Las soluciones de esta ecuación son muy conocidas.

El paso a seguir es analizar la formación de horizonte. Para esto necesitamos construir un paquete de ondas con soluciones estacionarias de (5.5), que sea muy pronunciado alrededor de un radio mayor que el horizonte de Laplace-Michell. Después, dejar evolucionar el paquete y analizar si se forma un horizonte, o no. Debido a que los estados que nos interesan para este propósito son estados no ligados, las funciones propias son funciones de Whittaker, y las integrales necesarias no están tabuladas. Así, utilizaremos un método aproximado para estudiar la formación de horizonte.

Definimos  $u(R, T) = R\psi(R, T)$ , con lo cual la ecuación (5.5) se reduce a

$$i\frac{\partial u}{\partial T} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} = -\frac{m}{2R}u. \quad (5.6)$$

En consecuencia

$$\langle R \rangle = \int_0^\infty Ru^*udR \quad (5.7)$$

y

$$\langle R^2 \rangle = \int_0^\infty R^2u^*udR. \quad (5.8)$$

Estas ecuaciones se pueden usar para analizar la formación de horizonte.

La ecuación (5.6) tiene soluciones exactas, pero son difíciles de manejar cuando se construye en paquete de ondas, ya que aparecen integrales que

no están tabuladas, por lo cual se busca una solución aproximada. Ésta se puede encontrar mediante un principio variacional dependiente del tiempo. Una acción de Schrödinger para (5.6) es

$$S = \int dt \int_0^\infty \left[ \frac{i}{2} (\dot{u}u^* - \dot{u}^*u) - \frac{1}{2} \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{m}{2r} u^*u \right] dr, \quad (5.9)$$

donde  $R \rightarrow r$  y el punto significa  $d/dT$ . La idea es escoger una función de prueba  $u(r, T)$  con parámetros dependientes del tiempo, con lo cual la acción (5.9) se convierte en una acción para tales parámetros<sup>2</sup>. La variación de la acción con respecto a éstos da un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden para los parámetros. Para nuestros propósitos, vamos a escoger una función<sup>3</sup> que tiende a cero rápidamente cuando  $r \rightarrow 0$  y  $r \rightarrow \infty$ :

$$u = \beta(T)e^{i\phi(T)} \exp \left[ -\lambda(T) \left( \frac{r^2}{R_0^2(T)} + \frac{R_0^2(T)}{r^2} \right) [1 - i \tan w(T)] \right], \quad (5.10)$$

donde  $\beta$ ,  $\phi$ ,  $\lambda$  y  $w$  son parámetros que dependen de  $T$ . Es importante notar que  $u^2$  tiene un único pico en  $r = R_0$ , y que  $1/\lambda$  es una medida del ancho del pico. Utilizando (5.10) en (5.9), se encuentra que las ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden que satisfacen  $\lambda$  y  $\omega$  son<sup>4</sup>:

$$\dot{\omega} = \frac{m^2}{\pi} \cos^4 \omega e^{8\lambda} \left[ \left( \frac{16384}{9} \lambda^4 + \frac{1024}{3} \lambda^3 \right) [K_1(4\lambda) - K_0(4\lambda)]^2 - \frac{128}{3} \lambda^2 [K_1(4\lambda) - K_0(4\lambda)] K_0(4\lambda) \right] \quad (5.11)$$

y

$$\dot{\lambda} = \frac{m^2}{\pi} e^{8\lambda} \tan \omega \cos^4 \omega \frac{[K_1(4\lambda) - K_0(4\lambda)]}{8\lambda K_1(4\lambda) - (1 + 8\lambda) K_0(4\lambda)} \times \left[ \left( \frac{8192}{3} \lambda^5 + \frac{2560}{3} \lambda^4 \right) [K_1(4\lambda) - K_0(4\lambda)]^2 - \frac{256}{3} \lambda^3 [K_1(4\lambda) - K_0(4\lambda)] K_0(4\lambda) \right], \quad (5.12)$$

<sup>2</sup>Este método parece que se debe a Whitham [21] y se usa extensivamente en la investigación de ecuaciones diferenciales parciales no-lineales.

<sup>3</sup>Esta función se escoge más por motivos de eficiencia para que el cálculo de las integrales, que por razones físicas.

<sup>4</sup>Veáse Ryan (2004), p. S330 para los detalles de este cálculo.

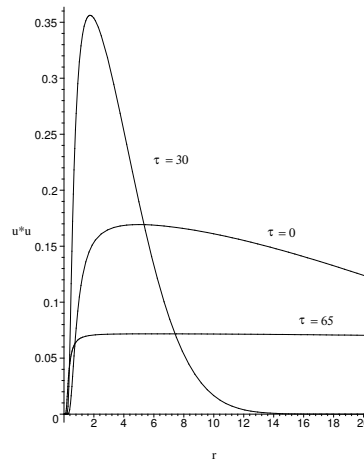


Figura 5.1: Densidad de probabilidad,  $|u|^2$ , para varios valores de  $\tau$ .

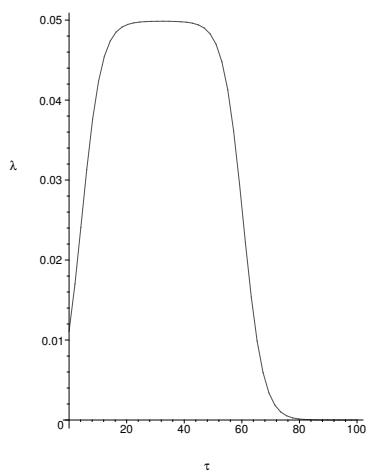
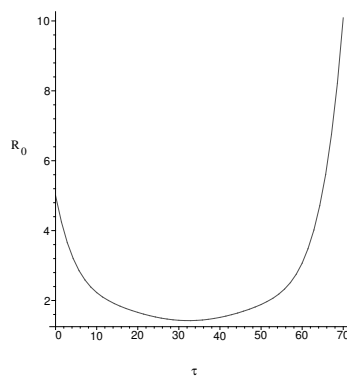
donde  $K_0$  y  $K_1$  son funciones modificadas de Bessel de orden cero y de orden uno, respectivamente. Este sistema de ecuaciones se puede resolver mediante el método de integración Runge-Kutta de cuarto orden. Esto se realizó en Maple<sup>5</sup>.

Las condiciones iniciales,  $\omega(T = 0)$ ,  $\lambda(T = 0)$ , para estudiar la formación de un horizonte, se escogieron de tal manera que la posición del pico de la función  $|u|^2$ , en  $T = 0$ , es  $\frac{5}{4}$  veces el radio del horizonte clásico,  $2m$ .

En la figura<sup>6</sup> 5.1 se muestra la gráfica de  $|u|^2$  para varios valores de  $\tau = m^2T$ . De esta figura vemos que  $|u|^2$  empieza con un pico muy ancho, después, el pico se vuelve muy angosto, y finalmente, se dispersa casi completamente. Este comportamiento se puede comparar con el comportamiento de la densidad de probabilidad en gravedad 3+1 (fig. 3.1 y 3.2) y en gravedad 2+1 (fig. 6.1). En la figura 5.2 se muestra la gráfica de  $\lambda$  contra  $\tau$ . De esta gráfica vemos que inicialmente  $\lambda$  crece rápidamente, después, durante un intervalo de tiempo se mantiene más o menos constante, para finalmente, decrecer rápidamente hasta ser prácticamente cero. Este comportamiento de  $\lambda$  está de acuerdo con el comportamiento de  $|u|^2$ , recordemos que  $1/\lambda$  es una medida de la anchura del paquete. En la figura 5.3 se muestra la gráfica de  $R_0$  contra  $\tau$ . De esta figura vemos que la posición del pico empieza fuera

<sup>5</sup>Ibid.

<sup>6</sup>Las figuras de esta sección las tomamos de [20].

Figura 5.2: Gráfica de  $\lambda$  contra  $\tau$ .Figura 5.3: Gráfica de  $R_0$  contra  $\tau$ .

del horizonte, después, durante un intervalo de tiempo está dentro de horizonte, durante el cual alcanza un mínimo, y finalmente, crece rápidamente. Este comportamiento está de acuerdo con el comportamiento de  $|u|^2$ . Si se compara el comportamiento de  $|u|^2$  con el comportamiento de las densidades de probabilidad en gravedad 3+1 (fig. 3.1 y 3.2) y en gravedad 2+1 (fig. 6.1), se ve que, en general, tiene el mismo comportamiento que dichas densidades de probabilidad. Las principales diferencias residen en que  $|u|^2$  no presenta franjas de interferencia y en que sólo tiene un pico debido a la selección de la función de prueba, mientras que las otras tienen varios picos; además,  $|u|^2$  presenta una parte que se extiende ampliamente hacia  $r \rightarrow \infty$ , mientras que las otras no. Sin embargo, los aspectos esenciales para analizar la formación de horizonte son características que todas tienen.

Veamos ahora la formación de horizonte. De la figura 5.3 vemos el pico de la función  $|u|^2$ , efectivamente, para algún tiempo es menor que el radio del horizonte clásico,  $r = 2m = 4$ , de hecho, tiene un mínimo menor a 2. Así, esto nos da un primer indicio de que sí se forma un horizonte. Veamos que sucede con  $\langle R(\tau) \rangle$  y  $\Delta R(\tau)$ . En la figura 5.4 y en la figura 5.5 se muestra, respectivamente, la gráfica de  $\langle R(\tau) \rangle$  y  $\Delta R(\tau)$ . Vemos que el comportamiento de  $\langle R(\tau) \rangle$  es similar al comportamiento de  $R(\tau)$ . El mínimo de  $\langle R(\tau) \rangle$  es aproximadamente de 1.5, y sucede en  $\tau \simeq 30$ . Esto también nos indica que sí se forma un horizonte. También, vemos que  $\Delta R(\tau)$ , en lugar de crecer, tiene un mínimo cuando  $R_0$  y  $\langle R(\tau) \rangle$  tienen un mínimo, lo cual refuerza la afirmación de que sí se forma un horizonte.

Ahora analicemos la formación de horizonte mediante la velocidad de escape. Tomaremos como densidad clásica

$$\rho(r, T) = \frac{M}{4\pi} |\psi(r, T)|^2. \quad (5.13)$$

El potencial gravitacional clásico,  $\Phi(r, T)$ , satisface la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho(r, T). \quad (5.14)$$

Considerando la simetría esférica del problema

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = GM |\psi(r, T)|^2. \quad (5.15)$$

Usando que  $u(r, T) = r\psi(r, T)$ , resulta

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM}{r^2} \int_0^r u^* u dr. \quad (5.16)$$

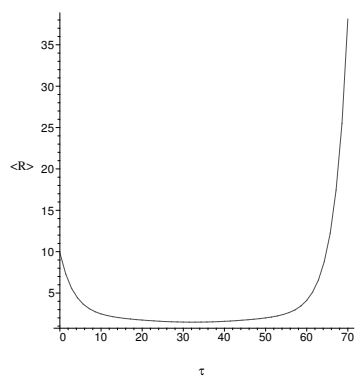


Figura 5.4: Valor esperado del radio de la cáscara como función de  $\tau$ .

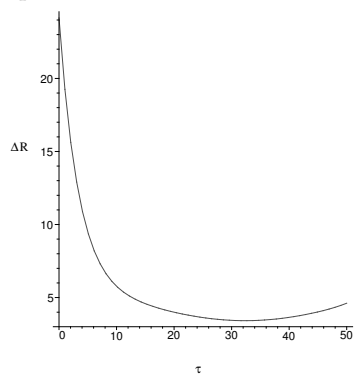


Figura 5.5: Varianza del radio de la cáscara como función de  $\tau$ .

Integrando la ecuación anterior tenemos

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \int_0^r u^* u dr + GM \int_0^r \frac{1}{r} u^* u dr. \quad (5.17)$$

La velocidad de escape la podemos calcular de la ecuación de energía para una partícula que forma la cáscara

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 + \mu \Phi, \quad (5.18)$$

donde  $\mu$  es la masa de la partícula. De (5.18) se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{c^2} &= \frac{2}{c^2} (\Phi(\infty, T) - \Phi(r, T)) \\ &= \frac{2}{c^2} GM \left( \frac{1}{r} \int_0^r u^* u dr + \int_r^\infty \frac{1}{r} u^* u dr \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Si medimos  $v$  en unidades de  $c$  y  $r$  en longitudes de Planck

$$v^2 = \frac{2M}{r} \int_0^r u^* u dr + 2m \int_r^\infty \frac{1}{r} u^* u dr. \quad (5.20)$$

Para que esta ecuación tenga sentido para todo  $r$ , la función  $|u|^2$  debe de tender a cero rápidamente cuando  $r \rightarrow 0$  y  $r \rightarrow \infty$ . La ecuación (5.20) la podemos utilizar para saber si  $v^2$  en algún tiempo es igual a 1. Si es esto sucede, entonces, podemos decir que sí se forma un horizonte.

Veamos si  $v$  tiene un máximo. La ecuación (5.16) la podemos usar para este propósito. De (5.16) se sigue que  $\Phi$  es siempre creciente, ya que  $\frac{1}{r^2}$  y  $u^* u$  son siempre positivos para cualquier solución  $u$ . Esto implica que si  $u$  decrece lo suficientemente rápido cuando  $r \rightarrow 0$ , entonces,  $\Phi$  va a tener un mínimo en  $r = 0$  y un máximo en  $r = \infty$ . Para la función de prueba (5.10),  $\Phi$  es monótona creciente. Teniendo en cuenta esto y la ecuación (5.19), se sigue que el máximo de  $v^2$  se alcanza en  $r = 0$ . Así, para la función de prueba (5.10), la velocidad máxima está dada por

$$\begin{aligned} v_{max}^2 = 2\Phi(\infty, T) &= 2M \int_0^\infty \frac{1}{r} u^* u dr \\ &= \frac{4M \sqrt{2\lambda(T)}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{R_0} e^{4\lambda(T)} 4\lambda(T) K_0[4\lambda(T)]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Para  $M = 2$ , en  $T = 0$ , se tiene  $v_{max}^2 = 0,45$ , mientras que, cuando  $R_0$  alcanza el mínimo, se tiene que  $v_{max}^2 = 1,75 > 1$ . Así, podemos decir que sí se forma un horizonte.

Para  $M < 2$ , el mínimo de  $R_0$  se hace más grande, en particular, cuando  $M = 1,19$ , el mínimo de  $R_0$  es igual a  $2M$ . Así, para  $M < 1,19$  no se forma un horizonte.

En general los resultados que se obtienen del colapso cuántico de la cáscara en la teoría newtoniana están de acuerdo con los que se obtienen en gravedad 3+1 y en gravedad 2+1.

## 5.2. Colapso cuántico en Nordström modificada y en relatividad linealizada

En esta sección expondremos las ideas generales acerca del colapso cuántico de una cáscara en la teoría de Nordström modificada y en la teoría linealizada de Einstein.

### 5.2.1. Colapso cuántico en Nordström modificada

Para cuantizar el colapso de la cáscara en la teoría de Nordström modificada, necesitamos cuantizar el hamiltoniano del colapso clásico (4.70):

$$H \equiv a_N = \ln P_y - \ln \left[ \frac{y + 2M}{y} \right] - \frac{M}{2y}, \quad (5.22)$$

donde  $P_y \equiv \dot{y}$  es el momento conjugado a  $y$ .

Llevar a cabo la cuantización de (5.22) parece complicado. Por ejemplo, primero podríamos escribir  $\ln P_y$  como una serie de potencias de  $P_y$ . Después, definir el operador para  $P_y$  como  $\hat{P}_y = -i\alpha \frac{\partial}{\partial y}$ , con  $\alpha$  una constante que hace adimensional este operador. Dicho operador debería satisfacer

$$\left[ \hat{P}_y, y \right] = -i\hbar\beta, \quad (5.23)$$

donde  $\beta$  es una constante que hace adimensional el conmutador. También, podríamos escribir  $\ln \left[ \frac{y+2M}{y} \right]$  como una serie de potencias en  $y+2M$  y  $y$ . Una vez hecho esto, podríamos, en principio, escribir la ecuación de Schrödinger correspondiente. Sin embargo, parece bastante complicado resolver esta ecuación,



incluso numéricamente. Así, este camino no parece muy prometedor. Quizá exista una forma alternativa de abordar la cuantización del colapso clásico que sea más accesible. Sin embargo, esto requeriría una investigación más a fondo de la que hemos hecho hasta ahora, tanto de la teoría de Nordström modificada, como del hamiltoniano (5.22), por lo cual no continuaremos en este trabajo dicha investigación.

### 5.2.2. Colapso cuántico en relatividad linealizada

En la sección 4.2 vimos que el hamiltoniano para el colapso clásico de la cáscara en relatividad linealizada es el mismo que en gravedad 3+1 (no linealizada). Por lo cual, los resultados que se obtienen de analizar el colapso cuántico en gravedad 3+1, en la sección 3.4, deben ser válidos para el colapso cuántico en relatividad linealizada. Así, no parece tener mucho sentido estudiar el colapso cuántico en relatividad linealizada, si ya tenemos los resultados en gravedad 3+1.



# Capítulo 6

## Colapso cuántico en 2+1

En este capítulo estudiaremos el colapso cuántico de un anillo de polvo en gravedad 2+1.

En la sección 6.1 mostraremos la ecuación de Schrödinger del problema. En la sección 6.2 resolveremos la ecuación de Schrödinger del problema, y construiremos el paquete de ondas del problema. Finalmente, en la sección 6.3 estudiaremos la formación de horizonte durante el colapso cuántico del anillo.

### 6.1. Ecuación de Schrödinger del problema

La ecuación de Schrödinger la obtendremos a partir de la cuantización del hamiltoniano clásico que encontramos en la sección 4.3 (ver ec. [4.165]):

$$H = \frac{P_R^2}{2} + \frac{R^2}{2l^2}, \quad (6.1)$$

donde  $P_R = \dot{R} \equiv \frac{dR}{d\tau}$  y  $\frac{1}{l^2} = -\Lambda$ , con  $\Lambda$  la constante cosmológica. Antes de cuantizar  $H$ , es necesario hacer un análisis dimensional.

En (6.1) tomamos de manera implícita la convención  $c = 1$ . Así, en unidades normales, la ecuación (6.1) se debe escribir como

$$H = \frac{1}{2c^2} \left( \frac{dR}{d\tau} \right)^2 + \frac{R^2}{2l^2}. \quad (6.2)$$

Por otro lado,  $H$  se puede escribir en términos de la masa-energía total,  $M$ ,

y la masa en reposo,  $m$ , como (ver ec. [4.163])

$$H = \frac{1}{32} \left( \frac{M}{m} + 8m \right)^2 - \frac{1}{2}. \quad (6.3)$$

La ecuación (6.2) es adimensional, lo cual implica que (6.3) también lo es. En consecuencia,  $M$  y  $m$  no tienen dimensiones. Para nuestros propósitos, es deseable que  $M$  y  $m$  tengan dimensiones. Esto lo podemos lograr multiplicando  $M$  y  $m$  por una combinación de las constantes  $c$  y  $G$  que tenga dimensiones de masa. Las dimensiones de  $c$  en 2+1, al igual que en 3+1, son  $[c] \sim \text{longitud}(\text{tiempo})^{-1}$ , sin embargo, las dimensiones de  $G$  en 2+1 son distintas que en 3+1. Veamos esto a detalle. De la ley de Gauss en  $d$  dimensiones espaciales, se sigue que la magnitud de la fuerza entre dos masas,  $m_1$  y  $m_2$ , es  $F = -Gm_1m_2/r^{d-1}$ , donde  $r$  es la distancia entre las masas. Para  $d = 2$ :  $F = -Gm_1m_2/r$ . Esto implica que en relatividad 2+1 las dimensiones de  $G$  son:  $[G] \sim (\text{masa})^{-1}(\text{longitud})^2(\text{tiempo})^{-2}$ . En consecuencia,  $[c^2/G] \sim \text{masa}$ . Así, si  $M$  y  $m$  tienen dimensiones, entonces,  $\frac{GM}{c^2}$  y  $\frac{Gm}{c^2}$  son adimensionales. Por lo tanto, para que  $H$  sea adimensional, y  $M$  y  $m$  tengan dimensiones, se tiene que

$$H = \frac{1}{32} \left( \frac{M}{m} + 8\frac{Gm}{c^2} \right)^2 - \frac{1}{2}. \quad (6.4)$$

Es usual<sup>1</sup> definir en 2+1 una masa de Planck,  $M_{\text{pl}} = c^2/G$ , y una longitud de Planck,  $L_{\text{pl}} = \hbar G/c^3$ , aún cuando no hay ninguna razón para identificar éstas con las que se definen en 3+1, especialmente si no conocemos el valor de  $G$ , como es el caso, en dos dimensiones. Así, de (6.2) y (6.4) se sigue que la ecuación para  $R$ , en unidades normales, es

$$\frac{1}{16} \left( \frac{M}{m} + 8\frac{m}{M_{\text{pl}}} \right)^2 - 1 = \frac{1}{c^2} \left( \frac{dR}{d\tau} \right)^2 + \frac{R^2}{l^2}. \quad (6.5)$$

Definiendo un nuevo hamiltoniano  $H' = M_{\text{pl}}c^2H$  con unidades de energía, y omitiendo la prima, resulta

$$H = \frac{M_{\text{pl}}c^2}{32} \left( \frac{M}{m} + 8\frac{m}{M_{\text{pl}}} \right)^2 - \frac{M_{\text{pl}}c^2}{2} \quad (6.6)$$

y

$$H = \frac{P_R^2}{2M_{\text{pl}}} + \frac{M_{\text{pl}}}{2}\omega_0^2 R^2, \quad (6.7)$$

---

<sup>1</sup>Carlip (1998), p. 7.

donde  $P_R = M_{\text{pl}}\dot{R}$  y  $\omega_0 = c/l$ . Ahora, regresemos a la cuantización del hamiltoniano.

Cuantizar el hamiltoniano significa cuantizar (6.6) y (6.7). Para cuantizar (6.7) basta hacer la sustitución usual:  $P_R \rightarrow \hat{P}_R = -i\hbar\partial/\partial R$ ,  $R \rightarrow R$ . Para cuantizar (6.6) necesitamos definir un operador asociado con alguna, o con varias, de las variables que aparecen en esta ecuación. Una manera de hacer esto, la cual nosotros usaremos, es tomar  $M$  como un operador y  $m$  como un  $c$ -número. En estas circunstancias:

$$\hat{H} = \frac{M_{\text{pl}}c^2}{32} \left( \frac{\hat{M}}{m} + 8\frac{m}{M_{\text{pl}}} \right)^2 - \frac{M_{\text{pl}}c^2}{2} \quad (6.8)$$

y

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M_{\text{pl}}}\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{M_{\text{pl}}}{2}\omega_0^2 R^2. \quad (6.9)$$

Si tomamos con función de onda del sistema  $\tilde{\Psi} = \Psi_M\Psi(R, \tau)$ , donde  $\Psi_M$  es aproximadamente<sup>2</sup> un estado propio de  $\hat{M}$  con valor propio  $M_0$ , es decir,  $\hat{M}\Psi_M \simeq M_0\Psi_M$ , resulta

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{M_{\text{pl}}c^2}{32} \left( \frac{M_0}{m} + 8\frac{m}{M_{\text{pl}}} \right)^2 - \frac{M_{\text{pl}}c^2}{2} \right] \Psi(R, \tau) = \\ & = i\hbar \frac{\partial \Psi(R, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\hbar^2}{2M_{\text{pl}}}\frac{\partial^2 \Psi(R, \tau)}{\partial R^2} + \frac{M_{\text{pl}}}{2}\omega_0^2 R^2 \Psi(R, \tau). \end{aligned} \quad (6.10)$$

La segunda igualdad de (6.10) es la ecuación de Schrödinger de un oscilador armónico<sup>3</sup>. Así, si tomamos, como es usual,  $\Psi(R, \tau) = e^{-iE\tau/\hbar}\psi(R)$ , los valores propios de la energía son

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_0 = \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar c}{l}. \quad (6.11)$$

Por otro lado, la primera igualdad de (6.10) implica que la energía es

$$E = \frac{M_{\text{pl}}c^2}{32} \left( \frac{M_0}{m} + 8\frac{m}{M_{\text{pl}}} \right)^2 - \frac{M_{\text{pl}}c^2}{2}. \quad (6.12)$$

<sup>2</sup>Un estado propio exacto de  $\hat{M}$  podría ser  $\delta(M - M_0)$ , sin embargo, con este estado tendríamos problemas con la integral del cuadrado de la función delta. Es por esta razón que tomamos un estado propio aproximado, el cual podemos considerar como una función muy pronunciada alrededor de  $M = M_0$ .

<sup>3</sup>En realidad (6.10) es la ecuación de Schrödinger de un medio oscilador armónico, ya que  $R > 0$ .

De (6.11) y (6.12) se sigue que

$$\frac{1}{16} \left( \frac{M_0}{m} + 8 \frac{m}{M_{\text{pl}}} \right)^2 - 1 = (2n+1) \frac{\hbar G}{c^3 l} = (2n+1) \frac{L_{\text{pl}}}{l}. \quad (6.13)$$

Así, hay una relación discreta entre la masa-energía total,  $M_0$ , y la masa en reposo,  $m$ . Resolviendo para  $M_0$ :

$$M_0 = 8m^2 \left[ \sqrt{\frac{1}{4m^2} + \frac{1}{2m^2} \left[ \frac{1}{l} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right]} - 1 \right], \quad (6.14)$$

donde hemos tomado  $G = c = \hbar = 1$ .

## 6.2. Evolución del paquete de ondas

La segunda igualdad de la ecuación (6.10) se puede escribir como

$$i \frac{\partial \Psi(y, T)}{\partial T} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi(y, T)}{\partial y^2} + \frac{1}{2} y^2 \Psi(y, T), \quad (6.15)$$

donde  $y = R/\sqrt{lL_{\text{pl}}}$  y  $T = c\tau/l$  son variables adimensionales.

Teniendo en cuenta que  $\Psi(y, T) = e^{-iET/\hbar\omega_0} \psi(y)$ , resulta

$$\frac{d^2 \psi}{dy^2} + (\epsilon - y^2) \psi = 0, \quad (6.16)$$

donde  $\epsilon = \frac{2E}{\hbar\omega_0}$ . La solución de (6.16) es<sup>4</sup>

$$\psi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-y^2/2} H_n(y), \quad (6.17)$$

con  $\epsilon = 2n + 1$  y  $H_n(y)$  los polinomios de Hermite. Por lo tanto,

$$\Psi_n(y, T) = e^{-i(n+\frac{1}{2})T} \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-y^2/2} H_n(y). \quad (6.18)$$

La función de onda del anillo es una superposición de funciones  $\Psi_n$  (paquete de ondas). Veamos cómo es este paquete. Notemos que aunque la ecuación de Schrödinger (6.15) es idéntica a la ecuación del oscilador

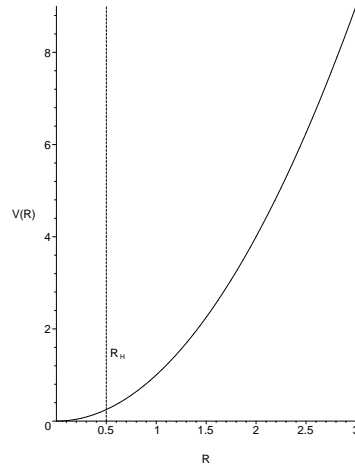


Figura 6.1: Potencial del problema con  $M_{\text{pl}}\omega_0^2 = 1$ . La línea punteada muestra una posición típica del radio del horizonte clásico,  $R_H$ .

armónico, el potencial sólo tiene sentido para  $y > 0$ , ya que el radio del anillo no puede ser negativo. En otras palabras, tenemos el problema de medio oscilador armónico, cuyo potencial se muestra en la figura 6.1. Debido a que el potencial es infinito en  $y = 0$ , el paquete de ondas debe cumplir que

$$\Psi(0, T) = 0, \quad (6.19)$$

para todo  $T$ , y lo podemos considerar como un paquete gaussiano centrado alrededor de un cierto  $y(T)$ . Construyamos, pues, el paquete. Supongamos que en  $T = 0$  el paquete es la resta de dos gaussianas, una centrada en  $y = -y_0$ , la otra en  $y = y_0$ :

$$\Psi(y, 0) = \alpha \left[ e^{-\frac{(y-y_0)^2}{2}} - e^{-\frac{(y+y_0)^2}{2}} \right], \quad (6.20)$$

donde  $\alpha$  es la constante de normalización. La parte del paquete que toma valores en  $y < 0$  no tiene sentido físico, y sólo se introduce para satisfacer la condición de frontera (6.19). Esta afirmación es cierta para todo  $T$ . Para conocer la evolución del paquete en el tiempo, primero debemos expandir  $\Psi(y, 0)$  como una serie de funciones propias de la energía, y después, multiplicar cada función propia por su correspondiente  $e^{-iE_n T/\hbar\omega_0}$ . Haciendo

---

<sup>4</sup>Bohm (1989), p. 302.

$y_0 = 2\lambda$  en (6.20), y arreglando lo que resulta, obtenemos

$$\Psi(y, 0) = \alpha \left[ e^{-\lambda^2} e^{-y^2/2} \left( e^{2y\lambda - \lambda^2} - e^{-2y\lambda - \lambda^2} \right) \right]. \quad (6.21)$$

Ahora, la función generadora de los polinomios de Hermite es<sup>5</sup>:

$$e^{-s^2 + 2sy} = \sum_0^{\infty} H_n(y) \frac{s^n}{n!}. \quad (6.22)$$

Utilizando (6.22) en (6.21) con  $s = \pm\lambda$

$$\Psi(y, 0) = \alpha \left[ e^{-\lambda^2} e^{-y^2/2} \left( \sum_0^{\infty} \frac{H_n(y)}{n!} [\lambda^n - (-\lambda)^n] \right) \right]. \quad (6.23)$$

Multiplicando cada término de (6.23) por  $e^{-iE_n T/\hbar\omega_0} = e^{-i(n+\frac{1}{2})T}$ , y utilizando (6.22), resulta

$$\Psi(y, T) = \alpha e^{-i\frac{T}{2}} e^{-\left(\lambda^2 + \frac{y^2}{2}\right)} \left[ e^{2y\lambda e^{-iT} - \lambda^2 e^{-2iT}} - e^{-2y\lambda e^{-iT} - \lambda^2 e^{-2iT}} \right]. \quad (6.24)$$

Después de hacer un poco de álgebra, esta ecuación se puede escribir en términos de  $y_0$  como

$$\Psi(y, T) = \alpha e^{-iT/2} \left[ e^{-\frac{1}{2}(y-y_0 \cos T)^2} e^{\frac{i}{2} \left( \frac{y_0^2 \sin 2T}{2} - 2yy_0 \sin T \right)} - e^{-\frac{1}{2}(y+y_0 \cos T)^2} e^{\frac{i}{2} \left( \frac{y_0^2 \sin 2T}{2} + 2yy_0 \sin T \right)} \right], \quad (6.25)$$

que es cero en  $y = 0$  para todo  $T$ . La constante de normalización es

$$\alpha = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} [(1 - e^{-y_0^2})]^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.26)$$

La densidad de probabilidad no normalizada,  $\rho = |\Psi|^2/\alpha^2$ , es

$$\rho(y, T) = e^{-(y-y_0 \cos T)^2} + e^{-(y+y_0 \cos T)^2} - 2e^{-(y^2 + y_0^2 \cos^2 T)} \cos(2yy_0 \sin T). \quad (6.27)$$

---

<sup>5</sup>Bohm (1989), p. 303.



De (6.27) vemos que  $\rho$  es periódica. Lo cual implica que, durante el colapso de la anillo, el pico de la parte física de  $\rho$  ( $y > 0$ ) comienza en  $y_0$ , llega a un valor mínimo,  $y_{min}$ , y después, regresa a  $y_0$ . Este ciclo se repite una infinidad de veces. Para nuestros propósitos, como veremos en la sección 6.3, sólo nos interesa un ciclo. Notemos que un ciclo de la parte física de  $\rho$  se cumple en  $T = \pi$ , no en  $T = 2\pi$ . Así, en  $T = \pi/2$  el pico de la parte física del paquete habrá llegado a  $y_{min}$ .

La ecuación (6.27) también se puede escribir como

$$\rho(y, T) = 2e^{-y^2 - y_0^2 \cos^2 T} [\cosh(2yy_0 \cos T) - \cos(2yy_0 \sin T)]. \quad (6.28)$$

Para  $T = 0$ , tenemos

$$\rho(y, 0) = 2e^{-y^2 - y_0^2} [\cosh(2yy_0) - 1]. \quad (6.29)$$

De esta ecuación se sigue que en  $T = 0$ , la densidad de probabilidad física sólo se hace cero en  $y = 0$ . Veamos que sucede en  $T = \pi/2$ :

$$\rho(y, \pi/2) = 2e^{-y^2} [1 - \cos(2yy_0)]. \quad (6.30)$$

Esta ecuación implica que en  $T = \pi/2$ , la parte física de  $\rho$  se hace cero en una infinidad de puntos, localizados en  $y = \frac{n\pi}{y_0}$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . En consecuencia, hay una infinidad de picos (máximos), un pico entre cada dos ceros. Sin embargo, el pico entre  $y = 0$  y  $y = \frac{\pi}{y_0}$  es el más grande (ver figura 6.2). Para saber la posición de los picos derivamos (6.30) e igualamos a cero:

$$y[1 - \cos(2yy_0)] - y_0 \sin(2yy_0) = 0.$$

De esta ecuación se sigue que los puntos críticos,  $y_c$ , de  $\rho(y, \pi/2)$  satisfacen

$$y_c = y_0 \sqrt{\frac{1 + \cos(2y_c y_0)}{1 - \cos(2y_c y_0)}}. \quad (6.31)$$

En principio estos puntos críticos podrían corresponder a mínimos, máximos o puntos de inflexión, sin embargo, no pueden corresponder a mínimos, ya que antes hemos encontrado que éstos están localizados en  $y = \frac{n\pi}{y_0}$ , y si sustituimos estos valores para  $y$  en (6.31), resulta que  $\frac{n\pi}{y_0} = \infty$ , lo cual no tiene sentido; tampoco pueden ser puntos de inflexión, debido a la forma de la función. Así,  $y_c$  corresponde a la posición de los picos de  $\rho(y, \pi/2)$ .

Definimos  $y_0 = \lambda\sqrt{l}\sqrt{2M_0 - 1}$  y  $y = \omega\sqrt{l}\sqrt{2M_0 - 1}$ . Utilizando estas definiciones en (6.27), obtenemos

$$\begin{aligned} \rho(y, T) = & e^{-(\omega - \lambda \cos T)^2} + e^{-(\omega + \lambda \cos T)^2} \\ & - 2e^{-(\omega^2 + \lambda^2 \cos^2 T)} \cos(2\omega\lambda \sin T), \end{aligned} \quad (6.32)$$

donde hemos escogido  $\sqrt{l} = 1/\sqrt{2M_0 - 1}$ . Para  $\lambda = 3$ , en las figuras 6.2 se muestran la gráficas de la parte física de  $\rho$  para varios valores de  $T$ .

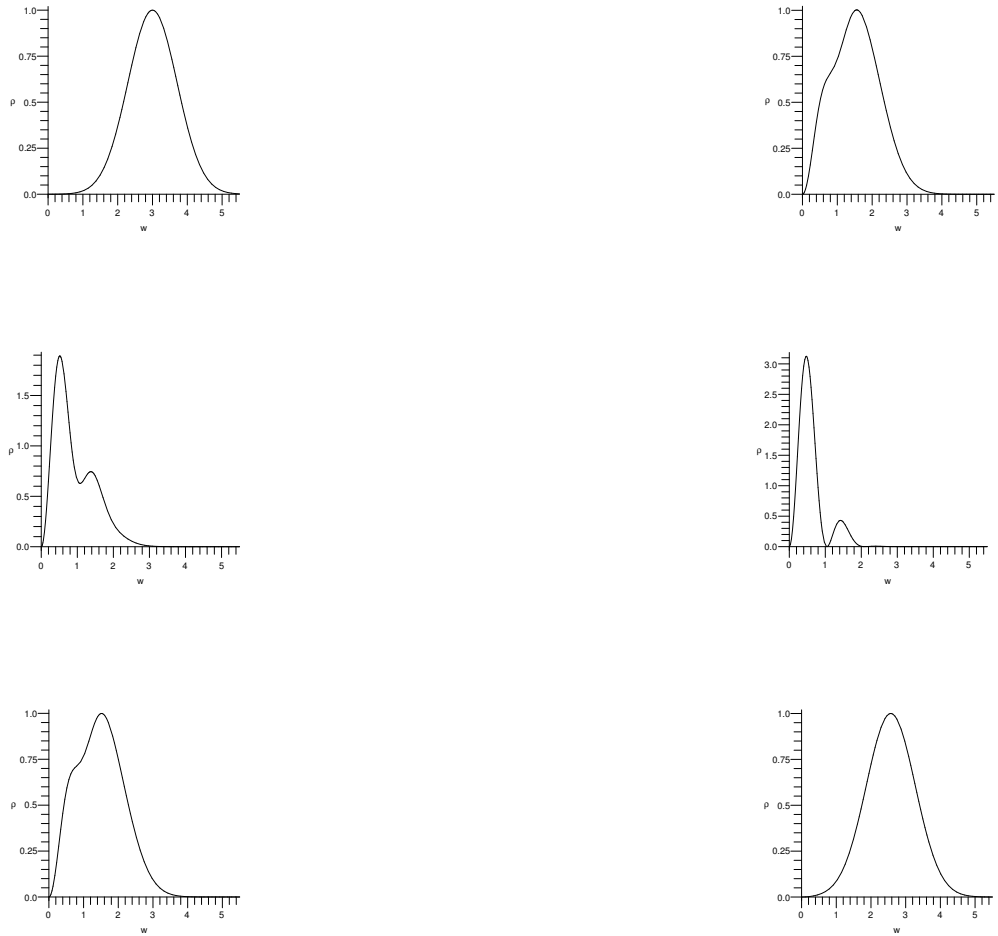


Figura 6.2: Densidad de probabilidad,  $\rho$ , para  $T = 0, 1,04, 1,3, 1,57, 2,08, 2,6$ . La densidad de probabilidad para  $T = 3,14$  es la misma que para  $T = 0$ .

### 6.3. Formación de horizonte

La definición de un horizonte cuántico es un problema que aún no está resuelto. Debido a esto, utilizaremos una estimación semiclásica para analizar la formación de un horizonte. Hay varias posibilidades de hacer esto. Una posibilidad es tomar la integral de  $|\Psi|^2$  entre  $R = 0$  y  $R = R_H$ , que siempre es menor que uno, como la probabilidad de la formación de horizonte; otra es usar el operador  $\hat{M}$  en la expresión  $\hat{R}_H = l\sqrt{2\hat{M} - 1}$  para definir un operador de horizonte, que se podría usar para definir la probabilidad de la formación de horizonte; una más es analizar si  $\langle \hat{R}(\tau) \rangle$  es menor que  $R_H$  para algún  $T$ , y tomar esto como una indicación de que sí se forma un horizonte. En este caso la respuesta no es una probabilidad, sino una afirmación o negación, sin embargo, es una manera, sin meterse en muchos problemas, de estimar la formación de un horizonte. En este trabajo, seguiremos este camino para analizar la formación de un horizonte.

Dejaremos evolucionar el paquete a partir de  $R(\tau = 0) > R_H$ , donde<sup>6</sup>  $R_H = l\sqrt{2M_0 - 1}$  es el radio del horizonte clásico de la métrica Schwarzschild-anti de Sitter. Para analizar la formación de un horizonte, en principio, deberíamos calcular  $\langle \hat{R}(\tau) \rangle$ , lo cual no es complicado en este caso, sin embargo, el resultado queda en términos de una función de Dawson, y cuando se quiere conocer el mínimo de  $\langle \hat{R}(\tau) \rangle$ , mediante  $d\langle \hat{R}(\tau) \rangle/d\tau = 0$ , es necesario resolver una ecuación algebraica trascendental, la cual no se puede resolver analíticamente. Por esta razón, en lugar de calcular  $\langle \hat{R}(\tau) \rangle$ , utilizaremos, como ya vimos en la sección anterior, que el paquete rebota en  $T = \pi/2$ , y que el pico más cercano a  $R = 0$  domina a los demás, ya que es muy grande y muy pronunciado, como se puede ver en la figura 6.3. Así, la posición de este pico es una buena aproximación para  $\langle \hat{R}(2l/c\pi) \rangle$ . Teniendo en cuenta esto, diremos que si la posición de este pico es menor que  $R_H$ , entonces sí se forma un horizonte, si no, no.

Recordando que  $y = R/\sqrt{l}$ , entonces,  $y_H = \sqrt{l}\sqrt{2M_0 - 1}$ . Así,  $y_0 = \lambda y_H$ , donde hemos usado  $y_0 = \lambda\sqrt{l}\sqrt{2M_0 - 1}$ . Para nuestros propósitos, nos interesa  $\lambda > 1$ , ya que queremos que la posición inicial del paquete esté fuera del horizonte clásico. Si definimos  $y_c = \gamma\sqrt{l}\sqrt{2M_0 - 1}$ , la ecuación (6.31) se

---

<sup>6</sup>En esta sección tomaremos  $G = c = \hbar = 1$ .

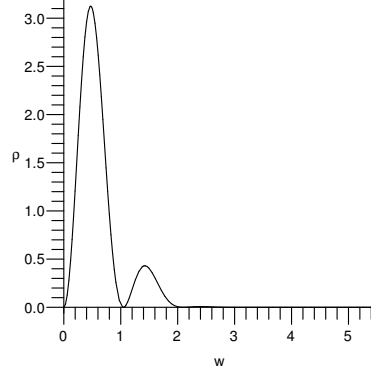


Figura 6.3: Densidad de probabilidad,  $\rho$ , de la función de onda para  $T = \pi/2$ . El pico más cercano a  $y = 0$  ( $R = 0$ ) domina a los demás. Aunque en la figura sólo se ven dos picos, ya hemos demostrado en la sección 6.2 que hay una infinidad de picos, sin embargo debido a la resolución del programa de cómputo sólo se ven estos dos, los cuales para nuestros propósitos ilustrativos son suficientes.

puede escribir como

$$\gamma = \lambda \sqrt{\frac{1 + \cos(2\lambda\gamma l(2M_0 - 1))}{1 - \cos(2\lambda\gamma l(2M_0 - 1))}}. \quad (6.33)$$

Resolviendo para  $M_0$ :

$$M_0 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{6l\gamma} \cos^{-1} \left( \frac{\frac{\gamma^2}{9} - 1}{\frac{\gamma^2}{9} + 1} \right) + 1 \right], \quad (6.34)$$

donde hemos escogido  $\lambda = 3$ . Notemos que, para nuestros propósitos, nos interesa  $0 < \gamma < 3$ , ya que si  $\gamma > 3$ , entonces,  $y_c > y_o$ , lo cual implicaría una expansión y no un colapso. Así,

$$M_0|_{\gamma=3} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{l36} + 1 \right] \quad (6.35)$$

es una cota para la masa-energía total de la cáscara para que haya colapso. Esta cota, por razones físicas, debe ser una masa mínima. También, notemos que cuando  $\gamma = 1$ , entonces,  $y_c = y_H$ , es decir, el umbral para la formación de horizonte es  $\gamma = 1$ . Así,

$$M_0|_{\gamma=1} = \frac{1}{2} \left[ \frac{36,87}{6l} + 1 \right] \quad (6.36)$$

es una cota para la masa-energía total de la cáscara para la formación de un horizonte. Estas cotas nos dan una idea de lo que está pasando, sin embargo, necesitamos conocer  $l$ . Una manera de hacerlo es estudiando el valor esperado del hamiltoniano (energía).

De (6.12) tenemos que

$$\langle H \rangle = \frac{1}{32} \left( \frac{M_0}{m} + 8m \right)^2 - \frac{1}{2}. \quad (6.37)$$

Por otro lado,

$$\langle H \rangle = \frac{1}{l} \langle H_y \rangle, \quad (6.38)$$

donde

$$\langle H_y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(y, 0) \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi(y, 0)}{\partial y^2} + \frac{1}{2} y^2 \Psi(y, 0) \right) dy. \quad (6.39)$$

En (6.39) hemos usado  $\Psi(y, 0)$ , sin embargo, esto es irrelevante, ya que  $\langle H \rangle$  no depende de  $T$  (la energía se conserva). Después de algunos cálculos, y utilizando  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$ , resulta

$$\langle H_y \rangle = \frac{1}{2} \left[ 1 + y_0^2 \left( 1 + e^{-y_0^2} \right) \left( 1 - e^{-y_0^2} \right)^{-1} \right]. \quad (6.40)$$

Si  $y_0 \gg 1$ ,

$$\langle H_y \rangle \simeq \frac{1}{2} [1 + y_0^2]. \quad (6.41)$$

Así, de (6.37), (6.38) y (6.41)

$$\frac{1}{32} \left( \frac{M_0}{m} + 8m \right)^2 - \frac{1}{2} \simeq \frac{1}{2l} [1 + y_0^2]. \quad (6.42)$$

Después de un poco de álgebra:

$$\left( \frac{M_0}{4m} \right)^2 + 4m^2 - 17M_0 + 8 - \frac{1}{l} \simeq 0. \quad (6.43)$$

Resolviendo para  $M_0$

$$M_0 \simeq 8m^2 \left[ 17 \pm \left( 289 - \frac{1}{4m^2} \left[ 4m^2 + 8 - \frac{1}{l} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (6.44)$$

Para que la solución de esta ecuación sea real, se debe cumplir que

$$4m^2 > \frac{1}{36} - \frac{1}{l288}. \quad (6.45)$$

De (6.44) y (6.45) se sigue que

$$M_0 > \frac{17}{18} - \frac{17}{l144}. \quad (6.46)$$

Así, la conservación de la energía da una cota mínima para  $M_0$ .

Teniendo en cuenta que las cotas (6.35) y (6.46) para  $M_0$  deben ser consistentes, resulta

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{l36} + 1 \right] \simeq \frac{17}{18} - \frac{17}{l144}. \quad (6.47)$$

Esto implica que

$$l \simeq 2,749. \quad (6.48)$$

Utilizando (6.48) en (6.35) y (6.36)

$$M_o|_{\gamma=3} \simeq 0,516 \quad (6.49)$$

y

$$M_o|_{\gamma=1} \simeq 1,618. \quad (6.50)$$

Por lo tanto, cuando

$$0,516 < M_0 \quad (6.51)$$

existe colapso, mientras que, cuando

$$0,516 < M_0 < 1,618 \quad (6.52)$$

existe colapso, pero no se forma un horizonte, y finalmente, cuando

$$M_0 > 1,618 \quad (6.53)$$

siempre se forma un horizonte<sup>7</sup>. Así, hay un umbral para  $M_0$  a partir del cual se forma un horizonte, para masas menores que este umbral no se forma un horizonte. Es oportuno mencionar que (6.53) y la cota para  $M_0$ , a

---

<sup>7</sup>En términos de  $M_{\text{BTZ}}$  el umbral para la formación de horizonte es  $M_{\text{BTZ}} > 3,236$ , ver apéndice D. El subíndice BTZ se pone debido a que esta masa es la que aparece en la métrica BTZ, ver [1].

saber<sup>8</sup>,  $M_0 > 1/2$ , para que clásicamente no haya singularidad desnuda, son consistentes.

Cuando se forma un horizonte, el anillo no rebota en el mismo universo en donde empezó a colapsar, sino, en “otro universo”. Esto se debe a que, para un observador sobre el anillo, el tiempo que transcurre, desde que él entra hasta que él sale del horizonte, es finito, mientras que, para un observador en infinito, el tiempo necesario para que el radio del anillo sea igual a radio del horizonte es infinito. Así, para el observador en infinito, el anillo rebota en otro universo,  $t > \infty$ .

---

<sup>8</sup>Recordemos que el radio del horizonte clásico satisface  $r = l(2M_0 - 1)^{1/2}$ . Si  $M_0 \leq 1/2$ , el radio del horizonte es cero, o negativo, lo cual implica que no hay horizonte, y en consecuencia tenemos una singularidad desnuda.





# Capítulo 7

## Conclusiones y perspectivas

Para estudiar el colapso clásico de un anillo de polvo en gravedad 2+1 utilizamos las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica  $\Lambda$ , ya que las ecuaciones sin constante cosmológica tienen como solución una métrica plana. Una consecuencia de esto es el “potencial armónico” que aparece en la ecuación de movimiento clásica del anillo, (4.145):

$$\frac{\dot{R}^2}{2} - \Lambda \frac{R^2}{2} = E, \quad (7.1)$$

donde  $E$  está relacionada con la energía total del sistema. Así, el movimiento periódico del radio de anillo se debe a que  $\Lambda \neq 0$ .

El estudio del colapso clásico de una cáscara de polvo bidimensional mediante la teoría de Nordström modificada se complica mucho, debido a que la ecuación de movimiento

$$\ddot{R} = -\frac{1}{2\left(1 - \frac{2M}{R}\right)} \left[ \frac{M}{\left(1 - \frac{2M}{R}\right) R^2} + \frac{4M}{R^2} \dot{R}^2 \right] \quad (7.2)$$

es no lineal. Aunque se puede hacer una aproximación: haciendo  $y = R - 2M$ , y con la aproximación  $\dot{y} \simeq 1$ , una primera integral de movimiento es

$$\ln \dot{y} - \ln \left[ \frac{y + 2M}{y} \right] - \frac{M}{2y} = a_N, \quad (7.3)$$

donde  $a_N$  es una constante. Esta ecuación se puede intentar resolver con métodos numéricos.

El estudio del colapso clásico de una cáscara de polvo en relatividad linealizada, en general, no aporta algo nuevo al estudio del colapso en relatividad completa.

Con respecto al colapso cuántico de un anillo de polvo en gravedad 2+1 podemos decir lo siguiente:

- Con una aproximación semiclásica se puede estudiar la formación de un “horizonte” de una manera en la cual es fácil interpretar los resultados.
- La formación de un horizonte durante el colapso depende de la masa de la cáscara,  $M_0$ . Hay formación de horizonte para masas mayores a algunas masas de Planck ( $M_0 \sim 2M_{\text{pl}}$ ); para masas “muy pequeñas” no hay formación de horizonte. Ésto se podía esperar de hacer consideraciones generales acerca de la naturaleza del colapso: objetos “muy masivos” se espera que colapsen, ya que, como la fuerza gravitacional<sup>1</sup> es muy grande, el colapso sucede muy rápido y el paquete de ondas no se dispersa mucho, permitiendo la formación de un horizonte; para objetos “poco masivos”, el paquete de ondas se dispersa muy rápido, lo cual impide que haya formación de un horizonte.
- El anillo se colapsa hasta un radio mínimo, y después, se expande. Así, cuando se forma un horizonte, podemos decir que la expansión sucede en “otro universo” distinto al universo donde empezó el colapso.
- La función de onda del sistema presenta franjas de interferencia durante el colapso, en otras palabras, la función de onda tiene varios picos (máximos). Estas franjas de interferencia se deben a las condiciones de frontera, en el caso de gravedad 2+1, debido a que el potencial es infinito en  $R = 0$ , lo cual es una consecuencia de que el radio del anillo debe ser no negativo.
- En ningún tiempo durante el colapso toda la función de onda del sistema queda dentro del horizonte. Así, si consideramos la densidad de probabilidad como el equivalente de una densidad clásica, entonces, existe una diferencia con respecto al colapso clásico en el cual toda la materia en algún momento sí está dentro del horizonte.

---

<sup>1</sup>En nuestro problema no estamos considerando otro tipo de fuerza además de la gravitacional, aunque los efectos cuánticos, por ejemplo, la conservación de la densidad de probabilidad, juegan un papel de “fuerza repulsiva” que impide que se forme una singularidad durante el colapso.

- La conservación de la densidad de probabilidad no permite que el anillo se colapse en un punto, así, ésta juega un papel de un “potencial repulsivo”. En este sentido, la conservación de probabilidad evita que se forme una singularidad.
- Existe el problema de la selección (*ad hoc*) del hamiltoniano como:

$$H = \frac{P_R^2}{2} + \frac{R^2}{2l^2}. \quad (7.4)$$

El estudio del colapso cuántico de una cáscara de polvo bidimensional, mediante la teoría de Nordström modificada, requiere de un estudio más profundo de dicha teoría y de un estudio del hamiltoniano resultante en la aproximación  $\dot{y} \simeq 1$ .

En el estudio del colapso cuántico de una cáscara de polvo en relatividad linealizada se deberán obtener los mismos resultados que se han obtenido en relatividad completa, ya que en ambos casos se tiene el mismo hamiltoniano.

En un futuro sería interesante:

- Tratar de definir una métrica promedio escribiendo la métrica fuera del anillo en términos de coordenadas  $\xi$  (donde  $r = R(\tau) + \xi$ ) y  $t = \tau$ . En esta métrica se puede remplazar  $R(\tau)$  por  $\hat{R}$  para formar un operador métrico  $\hat{g}_{ij}$ , y calcular  $\langle \hat{g}_{ij}(\xi, \tau) \rangle$ , donde, por ejemplo,  $\hat{g}_{\theta\theta} = (\hat{R} + \xi)^2$ , de manera que

$$\langle \hat{g}_{\theta\theta} \rangle = \langle \hat{R}^2(\tau) \rangle + 2\langle \hat{R}(\tau) \rangle \xi + \xi^2. \quad (7.5)$$

Después, calcular el tensor de Einstein,  $G_{ij}$ , a partir de  $\langle \hat{g}_{ij} \rangle$ , y utilizar ésto para definir el tensor de energía-momento clásico,  $T_{ij}(\xi\tau)$ , mediante  $G_{ij} = 8\pi T_{ij}$ . Este tensor de energía-momento satisface automáticamente  $T^{ij}{}_{;j} = 0$ . Para este  $T^{ij}$ , se puede definir, por ejemplo, la densidad de la cáscara como función de  $\xi$  y  $\tau$ .

- Estudiar la relación discreta entre las masas  $M_0$  y  $m$ , (6.14):

$$M_0 = 8m^2 \left[ \sqrt{\frac{1}{4m^2} + \frac{1}{2m^2} \left[ \frac{1}{l} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right]} - 1 \right], \quad (7.6)$$

donde  $n = 0, 1, 2, \dots$  y  $\frac{1}{l} = \sqrt{\Lambda}$ . Esta expresión implica que, para una masa en reposo,  $m$ , dada, hay varias masa-energías totales,  $M_0$ , que dependen del estado donde se encuentre el medio oscilador.

- Estudiar el colapso cuántico de una cáscara de polvo bidimensional mediante la teoría de Nordström modificada, o, en general, mediante una teoría conforme, utilizando métodos numéricos.

# Apéndice A

## Cálculos de la sección 2.2

En este apéndice encontraremos una solución de la ecuación diferencial (4.24):

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = \frac{2M}{R^2} \delta(r - R). \quad (\text{A.1})$$

Debido a la simetría esférica del problema,  $\phi$  sólo depende de  $r$  y de  $t$ . Así, utilizando el laplaciano en coordenadas esféricas

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{2M}{R^2} \delta(r - R). \quad (\text{A.2})$$

Si expresamos  $\phi$  en términos de los armónicos esféricos,  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , obtenemos

$$\phi = \sum_{lm} f_{lm}(r, t) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

donde  $\theta$  es el ángulo polar y  $\varphi$  el ángulo azimutal. Teniendo en cuenta que  $\phi$  sólo depende de  $r$  y  $t$ , tenemos que

$$\phi = f_{00}(r, t)$$

Lo cual implica que

$$-\frac{\partial^2 f_{00}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f_{00}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f_{00}}{\partial r} = \frac{2M}{R^2} \delta(r - R). \quad (\text{A.3})$$

Si introducimos en (A.3) la transformación

$$f_{00} = \int_0^\infty dk j_0(kr) a_k(t),$$

entonces el lado derecho de (A.3) debe ser igual a

$$\frac{2M}{R^2} \int_0^{\infty} dk j_0(kr) b_k(t).$$

Utilizando que

$$j_0 = \frac{\sin(kr)}{kr},$$

obtenemos

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(k'r)}{k'r} \delta(r-R) r^2 dr = \int_0^{\infty} dr \int_0^{\infty} dk \frac{\sin(kr) \sin(k'r)}{kk'r^2} r^2 b_k(t).$$

Recordando que

$$\int_0^{\infty} dr \sin(kr) \sin(k'r) = \frac{\pi}{2} \delta(k-k')$$

tenemos

$$b_k(t) = \frac{2}{\pi} k' R \sin(k'R). \quad (\text{A.4})$$

Por otro lado, se cumple

$$\frac{d^2 j_0(kr)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dj_0(kr)}{dr} = -k^2 j_0(kr). \quad (\text{A.5})$$

Utilizando (A.4) y (A.5) en (A.3)

$$\frac{d^2 a_k(t)}{dr^2} + k^2 a_k(t) = -\frac{4M}{\pi R} k \sin(kR). \quad (\text{A.6})$$

Consideremos una solución de (A.6). Supongamos que  $R = R_0 = \text{cte}$ . Bajo estas condiciones:

$$\frac{d^2 a_k(t)}{dr^2} + k^2 a_k(t) = -\frac{4M}{\pi R_0} k \sin(kR_0). \quad (\text{A.7})$$

La solución general de (A.7) es

$$\begin{aligned}
a_k &= A \sin(kt) + B \cos(kt) \\
&+ \frac{4M}{\pi R_0} \left[ \int dt \sin(kR_0) \sin(kt) \right] \cos(kt) \\
&- \frac{4M}{\pi R_0} \left[ \int dt \sin(kR_0) \cos(kt) \right] \sin(kt) \\
&= A \sin(kt) + B \cos(kt) - \frac{4M}{\pi R_0} \frac{\sin(kR_0)}{k}.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Así, la solución para  $\phi$  la podemos escribir como

$$\phi = \phi_0 + \phi_p,$$

donde

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= \int_0^\infty [A \sin(kt) + B \cos(kt)] \frac{\sin(kr)}{kr} dk \\
&= \begin{cases} \frac{A}{4r} \ln \left[ \left( \frac{r+t}{r-t} \right) \right] + \frac{B}{r} \frac{\pi}{2}; & t > r \\ \frac{A}{4r} \ln \left[ \left( \frac{r+t}{r-t} \right) \right]; & r > t \end{cases}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\phi_p &= -\frac{4M}{\pi R_0 r} \int_0^\infty dk \frac{\sin(kr) \sin(kR_0)}{k^2} \\
&= \begin{cases} -\frac{2M}{R_0}; & r < R_0 \\ -\frac{2M}{r}; & r > R_0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vemos que  $\phi$  es la suma de una onda libre,  $\phi_0$ , y de la solución estática,  $\phi_p$ , para una esfera de polvo. Por lo cual, si hacemos  $A = B = 0$ , obtenemos la solución estática.

La solución general para (A.6) es

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{4M}{\pi} \left[ \int dt \frac{\sin(kR)}{R} \sin(kt) \right] \cos(kt) \\
&- \frac{4M}{\pi} \left[ \int dt \frac{\sin(kR)}{R} \cos(kt) \right] \sin(kt).
\end{aligned}$$

En principio esta función se podría sustituir en la expresión

$$\phi_p = \int_0^{\infty} dk a_k(t) \frac{\sin(kr)}{kr}$$

e integrar sobre  $k$ , pero parece muy complicado.

Consideremos una dependencia sencilla de  $R$  con respecto al tiempo, un brinco de  $R$ :

$$R(t) = \begin{cases} R_0; & t < t_0 \\ R_0 - \Delta R; & t > t_0 \end{cases} .$$

En estas circunstancias

$$a_k = -\frac{4M}{\pi} \begin{cases} \frac{\sin(kR_0)}{kR_0}; & t < t_0 \\ \frac{\sin(k(R_0 - \Delta R))}{k(R_0 - \Delta R)}; & t > t_0 \end{cases} .$$

Teniendo en cuenta esta expresión para  $a_k$ , y sumando la constante 1 a la solución, obtenemos

$$\phi = \begin{cases} \begin{cases} 1 - \frac{2M}{r}; & r > R_0 \\ 1 - \frac{2M}{R_0}; & r < R_0 \end{cases}; & t < t_0 \\ \begin{cases} 1 - \frac{2M}{r}; & r > R_0 - \Delta R \\ 1 - \frac{2M}{R_0 - \Delta R}; & r < R_0 - \Delta R \end{cases}; & t > t_0 \end{cases}$$

Si consideramos que el caso continuo es una secuencia de brincos muy pequeños (aproximación repentina), entonces  $\phi$  se puede escribir como

$$\phi = \begin{cases} 1 - \frac{2M}{r}; & r > R(t) \\ 1 - \frac{2M}{R(t)}; & r < R(t) \end{cases}$$



## Apéndice B

### El teorema de Birkhoff en relatividad linealizada

La métrica con simétrica esférica se puede escribir como

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (\text{B.1})$$

donde  $\nu$  y  $\lambda$  son funciones de  $r$  y  $t$ .

En relatividad linealizada se considera que el campo gravitacional es muy débil. Bajo estas circunstancias (B.1) se puede escribir como

$$ds^2 = -(1 + \nu) dt^2 + (1 + \lambda) dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (\text{B.2})$$

donde  $\nu, \lambda \ll 1$ .

Con la métrica (B.1), las ecuaciones de campo de Einstein son<sup>1</sup>

$$8\pi T^r_r = e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} 8\pi T^\theta_\theta = 8\pi T^\varphi_\varphi = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right) \\ - \frac{1}{2} e^{-\nu} \left( \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \dot{\lambda}\dot{\nu} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

---

<sup>1</sup>Landau y Lifshitz (1973), p. 396.

$$8\pi T^t_t = e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \quad (\text{B.5})$$

$$8\pi T^r_t = e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} \quad (\text{B.6})$$

donde  $\nu' \equiv \frac{dv}{dr}$ ,  $\dot{\lambda} \equiv \frac{d\lambda}{dt}$  y  $T^\mu_\nu$  es el tensor de energía-momento. Las otras ecuaciones son idénticamente cero.

En relatividad linealizada las ecuaciones (B.3)-(B.6) se reducen a

$$8\pi\tau^r_r = \frac{\nu'}{r} - \frac{\lambda}{r^2} \quad (\text{B.7})$$

$$8\pi\tau^\theta_\theta = 8\pi\tau^\varphi_\varphi = \frac{1}{2} \left( \nu'' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) - \frac{\ddot{\lambda}}{2} \quad (\text{B.8})$$

$$8\pi\tau^t_t = -\frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda}{r^2} \quad (\text{B.9})$$

$$8\pi\tau^r_t = \frac{\dot{\lambda}}{r} \quad (\text{B.10})$$

donde  $\tau^\mu_\nu$  es el tensor de energía-momento en relatividad linealizada.

En el vacío  $\tau^\mu_\nu = 0$ , con lo cual (B.7)-(B.10) se reducen a

$$\frac{\nu'}{r} - \frac{\lambda}{r^2} = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{1}{2} \left( \nu'' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) - \frac{\ddot{\lambda}}{2} = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$-\frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda}{r^2} = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\dot{\lambda}}{r} = 0 \quad (\text{B.14})$$

La ecuación (B.14) implica el teorema de Birkhoff, es decir, implica que  $\lambda = \lambda(r)$ . En otras palabras, la métrica fuera de cualquier distribución esférica de masa es estática.

# Apéndice C

## La métrica de Schwarzschild-(anti) de Sitter en gravedad 2+1

La métrica en coordenadas esféricas en 2+1 es

$$ds^2 = -f(r, t) dt^2 + g(r, t) dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad (\text{C.1})$$

donde  $f(r, t) = e^{2\phi(r, t)}$  y  $g(r, t) = e^{2\lambda(r, t)}$  son funciones que se determinarán con las ecuaciones de campo en 2+1.

Para conocer  $\phi$  y  $\lambda$ , calcularemos el tensor de curvatura de Riemman,  $R^\mu{}_{\nu\delta\epsilon}$ , en tres dimensiones. Ésto lo haremos mediante el formalismo de Cartan. Definamos una base ortonormal de uno-formas  $\omega^0$ ,  $\omega^r$  y  $\omega^\theta$ :

$$\omega^0 = e^\phi dt, \quad \omega^r = e^\lambda dr, \quad \omega^\theta = r d\theta,$$

que forman la métrica

$$ds^2 = \eta_{ij} \omega^i \omega^j; \quad \eta_{ij} = \text{diag}(-1, 1, 1).$$

Se encuentra que las uno-formas de conexión son

$$\omega^0{}_r = \phi' e^{-\lambda} \omega^0 + \dot{\lambda} e^{-\phi} \omega^r,$$

$$\omega^\theta{}_0 = 0,$$

$$\omega^\theta{}_r = \frac{e^{-\lambda}}{r} \omega^\theta.$$

Tenemos que

$$\tilde{R}_j^i = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j, \quad (\text{C.2})$$

donde  $\omega^i_j$  son las uno-formas de conexión y  $\tilde{R}_j^i$  son las dos-formas de curvatura. Se encuentra que las dos-formas de curvatura distintas de cero son

$$\tilde{R}^0_r = \left( -\phi''e^{-2\lambda} + \lambda'\phi'e^{-2\lambda} + \ddot{\lambda}e^{-2\phi} - \dot{\lambda}\dot{\phi}e^{-2\phi} - \phi'^2e^{-2\lambda} + \dot{\lambda}^2e^{-2\phi} \right) \omega^0 \wedge \omega^r,$$

$$\tilde{R}^0_\theta = \frac{-\phi'e^{-2\lambda}}{r} \omega^0 \wedge \omega^\theta - \frac{\dot{\lambda}e^{-\phi-\lambda}}{r} \omega^r \wedge \omega^\theta,$$

$$\tilde{R}^r_\theta = \frac{\lambda'e^{-2\lambda}}{r} \omega^r \wedge \omega^\theta + \frac{\dot{\lambda}e^{-\phi-\lambda}}{r} \omega^0 \wedge \omega^\theta.$$

De comparar la ecuación (C.2) con

$$\tilde{R}^\mu_\nu = R^\mu_{\nu|\alpha\beta|} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta, \quad (\text{C.3})$$

donde  $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$  es el tensor de Riemann, se obtiene que las componentes del tensor de Riemann son

$$R^0_{r0r} = -\phi''e^{-2\lambda} + \lambda'\phi'e^{-2\lambda} + \ddot{\lambda}e^{-2\phi} - \dot{\lambda}\dot{\phi}e^{-2\phi} - \phi'^2e^{-2\lambda} + \dot{\lambda}^2e^{-2\phi},$$

$$R^0_{r0\theta} = R_{0r0\theta} = 0,$$

$$R^0_{\theta0\theta} = \frac{-\phi'e^{-2\lambda}}{r},$$

$$R^0_{\theta r\theta} = \frac{-\dot{\lambda}e^{-\phi-\lambda}}{r},$$

$$R^r_{\theta\theta r} = \frac{-\lambda'e^{-2\lambda}}{r},$$

$$R^r_{\theta0r} = 0.$$

Haciendo la contracción del tensor de curvatura, se encuentra que las componentes del tensor de Ricci son

$$R_{rr} = -\phi''e^{-2\lambda} + \lambda'\phi'e^{-2\lambda} + \ddot{\lambda}e^{-2\phi} - \dot{\lambda}\dot{\phi}e^{-2\phi} - \phi'^2e^{-2\lambda} + \dot{\lambda}^2e^{-2\phi} + \frac{\lambda'e^{-2\lambda}}{r},$$

$$R_{0r} = \frac{-\dot{\lambda}e^{-\phi-\lambda}}{r}, \quad (\text{C.4})$$

$$R_{0\theta} = 0,$$

$$R_{r\theta} = 0,$$

$$R_{00} = \frac{\phi' e^{-2\lambda}}{r} - \left( -\phi'' e^{-2\lambda} + \lambda' \phi' e^{-2\lambda} + \ddot{\lambda} e^{-2\phi} - \dot{\lambda} \dot{\phi} e^{-2\phi} - \phi'^2 e^{-2\lambda} + \dot{\lambda}^2 e^{-2\phi} \right),$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{-\phi' e^{-2\lambda}}{r} + \frac{\lambda' e^{-2\lambda}}{r}.$$

Por otro lado, las ecuaciones de campo con constante cosmológica en 2+1 son

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -\Lambda g_{ij}. \quad (\text{C.5})$$

Tomando la traza de (C.5) se obtiene

$$R = 6\Lambda.$$

Por lo tanto

$$R_{ij} = 2\Lambda g_{ij}.$$

Como estamos trabajando en una base ortonormal, entonces de la última expresión se sigue que

$$R_{or} = 0.$$

Así, de (C.4) se obtiene que

$$\dot{\lambda} = 0. \quad (\text{C.6})$$

Esta ecuación es el equivalente del teorema de Birkhoff en 2+1 con simetría circular (esférica).

Utilizando (C.6) en las otras componentes del tensor de Ricci

$$R_{rr} = - \left( \phi'' - \lambda' \phi' + \phi'^2 - \frac{\lambda'}{r} \right) e^{-2\lambda} = 2\Lambda, \quad (\text{C.7})$$

$$R_{00} = \left( \phi'' - \lambda' \phi' + \phi'^2 + \frac{\phi'}{r} \right) e^{-2\lambda} = -2\Lambda, \quad (\text{C.8})$$

$$R_{\theta\theta} = \left( \frac{-\phi'}{r} + \frac{\lambda'}{r} \right) e^{-2\lambda} = 2\Lambda. \quad (\text{C.9})$$

Sumando (C.7) y (C.8), resulta

$$\phi = -\lambda. \quad (\text{C.10})$$

Utilizando (C.10) en (C.9)

$$\frac{-2\phi' e^{2\phi}}{r} = 2\Lambda.$$

Integrando se obtiene

$$e^{2\phi} = B - \Lambda r^2, \quad (\text{C.11})$$

donde  $B$  es una constante de integración.

Teniendo en cuenta que  $[\Lambda] = \frac{1}{\text{longitud}^2}$ , podemos hacer  $\Lambda = \pm \frac{1}{l^2}$ , donde  $l$  es una longitud característica del problema. En estas condiciones, la métrica (C.1) es

$$ds^2 = - \left( B \mp \frac{r^2}{l^2} \right) dt^2 + \frac{1}{\left( B \mp \frac{r^2}{l^2} \right)} dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (\text{C.12})$$

Tomaremos la constante  $B$  como  $1 - 2M$ , con  $M$  el equivalente a la masa de Schwarzschild en 2+1. Sustituyendo  $B$  en (C.12), obtenemos

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad (\text{C.13})$$

donde  $f(r) = \left( 1 - 2M \mp \frac{r^2}{l^2} \right)$ . La métrica (C.13) se conoce como la métrica de Schwarzschild-de Sitter ( $-$ ), o como la métrica de Schwarzschild-anti de Sitter ( $+$ ). Es oportuno mencionar que con nuestra selección de  $B$ , con  $M > 0$ , se debe cumplir que  $M > 1/2$  para que haya horizonte, y no haya una singularidad desnuda. Esta singularidad con (sin) horizonte es una singularidad cónica, no de curvatura.

La constante  $B$  también se puede tomar, por ejemplo, como  $-M$  [1], [4], o como  $-8M$  [19]. Nosotros, al igual que Crisóstomo y Olea [6], la tomamos como  $B = 1 - 2M$ , ya que utilizaremos como métrica dentro del anillo la métrica (C.13) con  $M = 0$ , y si escogemos  $B$  como  $-M$  o como  $-8M$ , entonces cuando hacemos  $M = 0$  no se obtiene la métrica anti de Sitter:  $ds^2 = - \left( 1 + \frac{r^2}{l^2} \right) dt^2 + \frac{1}{1 + \frac{r^2}{l^2}} dr^2 + r^2 d\theta^2$ .

# Apéndice D

## Masa de la métrica de un hoyo negro en 2+1

En este apéndice discutiremos el significado físico de la masa,  $M$ , que forma parte de la métrica (C.13).

Cuando encontramos la solución a las ecuaciones de Einstein en gravedad 2+1 con constante cosmológica, la constante de integración,  $B$ , la escogimos, siguiendo a Crisóstomo y Olea [6], como  $1 - 2M$  (ver eqs. [C.11] y [C.12]). Esto lo hicimos, como dijimos en el último párrafo del apéndice C, para que cuando hagamos  $M = 0$  en la métrica (C.13) obtengamos la métrica de anti de Sitter. En otros trabajos [1], [4] y [19] se ha tomado  $B = -M$  y  $B = -8M$ , respectivamente. La selección de distintos valores para la constante  $B$  tiene que ver, como vamos a mostrar en este apéndice, tanto con la selección del parámetro de masa como con el diferente comportamiento asintótico de la métrica, esto último está íntimamente ligado con la selección del cero de masa-energía total.

Se puede demostrar que si se escoge<sup>1</sup>  $B = -M_{\text{BTZ}}$ , para  $r \rightarrow \infty$ , obtenemos la masa ADM del hoyo negro a través del siguiente cálculo<sup>2</sup>:

$$M_{\text{ADM}} \equiv \frac{M_{\text{Pl}}}{16\pi} \int dr d\theta \sqrt{{}^{(2)}g} {}^{(2)}R \simeq \frac{l}{r} \frac{M_{\text{Pl}}}{8} M_{\text{BTZ}}, \quad (\text{D.1})$$

donde<sup>3</sup>  $M_{\text{ADM}}$  es la masa ADM,  ${}^{(2)}g$  es la 2-métrica de (C.13) en hojas de

---

<sup>1</sup>Le ponemos el subíndice BTZ a esta masa, ya que la métrica que se obtiene con esta selección de  $B$  usualmente se conoce como métrica BTZ.

<sup>2</sup>Carlip, (1998), p.49.

<sup>3</sup> $M_{\text{ADM}}$  corresponde a la  $m$  de Carlip.

$t = \text{const.}$ ,  ${}^{(2)}R$  es el escalar de curvatura en estas hojas y  $M_{\text{pl}}$  la masa de Planck en 2+1 dimensiones. El factor  $\frac{l}{r}$  está relacionado con el tiempo propio en el límite  $r \rightarrow \infty$ , esto es,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} ds^2 = -\frac{r^2}{l^2} dt^2 + \frac{l^2}{r^2} dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad (\text{D.2})$$

y no se considera verdaderamente una parte de la masa ADM. Por eso, el parámetro de masa, sin unidades, es

$$M_{\text{BTZ}} = \frac{8}{M_{\text{pl}}} M_{\text{ADM}}. \quad (\text{D.3})$$

Se puede dejar este parámetro así, o definir unidades de masa en términos de un múltiplo de  $M_{\text{pl}}$ :  $\kappa M_{\text{pl}}$ , con  $\kappa$  un número real positivo. Si se quiere que  $M_{\text{BTZ}} = M_{\text{ADM}}$ , se pueden escoger unidades tales que  $\kappa = 8$ , como se hace en [1] y [4], o  $\kappa = 1$  como en [19].

Ahora, queremos relacionar el parámetro sin unidades  $M$  en (C.13) con  $M_{\text{ADM}}$ . En nuestro caso

$${}^{(2)}g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.4})$$

donde  $f = 1 - 2M + \left(\frac{r}{l}\right)^2$ . De (D.4) se sigue que

$$\det {}^{(2)}g_{ij} \equiv {}^{(2)}g = \frac{r^2}{f}. \quad (\text{D.5})$$

Ahora calculemos  ${}^{(2)}R$ . Los símbolos de Christoffel correspondientes a la métrica  ${}^{(2)}g_{ij}$  son

$$\Gamma_{rr}^r = -\frac{f'}{2f}, \quad \Gamma_{r\theta}^r = 0, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -rf, \quad (\text{D.6})$$

$$\Gamma_{rr}^\theta = 0, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^\theta = 0, \quad (\text{D.7})$$

donde  $' \equiv \frac{d}{dr}$ . El tensor de Ricci es

$$R_{rr} = -\Gamma_{r\theta,r}^\theta + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{r\theta}^\theta - \Gamma_{r\theta}^\theta \Gamma_{r\theta}^\theta = -\frac{f'}{2fr}, \quad (\text{D.8})$$



$$R_{\theta\theta} = \Gamma_{\theta\theta,r}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\theta\theta}^r - \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{r\theta}^\theta = -\frac{rf'}{2}, \quad (\text{D.9})$$

$$R_{r\theta} = 0. \quad (\text{D.10})$$

En consecuencia

$${}^{(2)}R = g^{rr} R_{rr} + g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} = -\frac{f'}{r}. \quad (\text{D.11})$$

Por lo tanto, de (D.5) y de (D.11) se sigue que

$$\sqrt{{}^{(2)}g} {}^{(2)}R = -\frac{f'}{f^{1/2}}. \quad (\text{D.12})$$

Así, para nuestra selección de  $B$  obtenemos

$$M_{\text{ADM}} = -\frac{M_{\text{pl}}}{16\pi} \int dr d\theta \frac{f'}{f^{1/2}} = -\frac{M_{\text{pl}}}{8} \int \frac{df}{f^{1/2}} = -\frac{M_{\text{pl}}}{4} f^{1/2} + A, \quad (\text{D.13})$$

donde  $A$  es una constante que determinaremos mediante el comportamiento asintótico de la métrica. Tomando<sup>4</sup>  $A = \frac{M_{\text{pl}}}{4} \left(1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2\right)^{1/2}$ , es decir, imponiendo el comportamiento asintótico de nuestra métrica como anti de Sitter, y haciendo  $r \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$M_{\text{ADM}} \simeq \frac{l}{r} \frac{M_{\text{pl}}}{4} M, \quad (\text{D.14})$$

que nos da

$$M = \frac{4}{M_{\text{pl}}} M_{\text{ADM}}. \quad (\text{D.15})$$

Si se quiere, podemos escoger unidades de manera que  $\kappa = \frac{1}{2}$  como en [6], o  $\kappa = 1$  como en esta tesis. De cualquier modo, de (D.3) y (D.15) se sigue que

$$M = \frac{1}{2} M_{\text{BTZ}}. \quad (\text{D.16})$$

Así, nuestra selección de  $A$  implica que  $M$  es un múltiplo de  $M_{\text{BTZ}}$ .

Es oportuno notar que con nuestra selección de  $B$  estamos escogiendo la métrica correspondiente al cero de la masa-energía total como la métrica anti de Sitter, mientras que con la selección de  $B = -M$  el cero de la masa-energía total corresponde a la métrica  $ds^2 = -\frac{r^2}{l^2} dt^2 + \frac{l^2}{r^2} dr^2 + r^2 d\theta^2$ . Así, la diferencia entre una y otra selección de  $B$  corresponde, físicamente, a un corrimiento en el cero de la masa-energía total<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>La elección de esta expresión es de alguna manera arbitraria, ver Carlip (1998), p. 49.

<sup>5</sup>Antes era usual escoger la métrica anti de Sitter como la métrica correspondiente al cero de la masa-energía total, ver [1]. Ahora es más usual la selección que hacen en [1].



# Bibliografía

- [1] M. Bañados, C. Teitelboim y J. Zanelli, *Phy. Rev. Lett.* **69**, 1506 (1992).
- [2] D. Bohm, *Quantum Theory*, Dover Publications, Inc., New York, 1989.
- [3] D. Brill y T. Dray, *General Relativity and Gravitation*, **25**, 435 (1993).
- [4] S. Carlip, *Quantum Gravity in 2+1 dimensions*, Cambridge, Cambridge, 1998.
- [5] A. Corichi, G. Cruz, A. Minzoni, P. Padilla, M. Rosenbaum, M. Ryan, N. Smyth y T. Vukasinak, *Phy. Rev. D* **65**, 064006 (2002).
- [6] J. Crisóstomo y R. Olea, *Phys. Rev. D* **48**, 104023 (2004).
- [7] G. Cruz, K. Kuchař, A. Minzoni, M. Rosenbaum, M. Ryan y N. Smyth, en preparación.
- [8] G. Cruz, A. Minzoni, M. Rosenbaum, M. Ryan, N. Smyth y T. Vukasinak, *Rev. Mex. Fis.* **49** (Suppl. 2), 122 (2003).
- [9] P. Hájíček, *Commun. Math. Phys.* **150**, 545 (1992).
- [10] P. Hájíček, B. Kay y K. Kuchař, *Phy. Rev. D* **46** (1992).
- [11] P. Hájíček y K. Kuchař, en preparación.
- [12] W. Israel, *Nuovo Cimento B* **44**, 1 (1966).
- [13] K. Kuchař, *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1033 (1992).
- [14] L. Landau y E. Lifshitz, *Teoría Clásica de los Campos*, Segunda Edición, Reverté, 1973.

- [15] C. Lanczos, *Phys. Z.* **23**, 539 (1922).
- [16] D. Lovelock y H. Rund, *Tensors, Differential Forms, and Variational Principles*, Dover Publications, Inc., New York, 1989.
- [17] C. Misner, K. Thorne y J. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, 1971.
- [18] G. Nordström, *Ann. Phys.* **42**, 533 (1913).
- [19] Y. Peleg y A. Steif, *Phys. Rev. D* **51**, 3992 (1995).
- [20] M. Ryan, *Class. Quant. Grav.* **21**, S323 (2004).
- [21] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, New York, 1974.