



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

POSGRADO EN
CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

“VIGILANDO POLIEDROS ORTOGONALES 3D”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS
(COMPUTACIÓN)**

P R E S E N T A:

OSCAR MORALES PONCE

DIRECTOR DE TESIS: DR. JORGE URRUTIA GALICIA

México, D.F.

2006.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Primeramente a mi esposa Daniela por su constante apoyo y las palabras de seguridad que me ha ofrecido.

A mi madre, por que siempre contaré con su apoyo incondicional.

A mi familia: Montserrat, Gerardo, Luis, Felipe, Ricardo y Leticia, por el apoyo que me han brindado y muy en especial a Gerardo.

A los sinodales Dr. García Nocetti, Dr. Urrutia Galicia, Dr. Hernández Quiroz, Dr. Bribiesca Correa y Dr. Rajsbaum Gorodesky por sus aportaciones a este trabajo y muy en especial a mi asesor el Dr. Urrutia por los conocimientos transmitidos y su enorme colaboración a esta tesis.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONCYT), a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), al Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas (IIMAS), al Instituto de Matemáticas de la UNAM y por último a Fundación Telmex.

No estudio por saber mas, sino por ignorar menos
(Sor Juana Inés de la Cruz)

El aspecto más triste de la vida actual es que la ciencia
gana más rápidamente conocimiento que la sociedad sabiduría.
(Isaac Asimov)

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivos	2
1.2. Resultados obtenidos	2
1.3. Organización del trabajo	3
2. Preliminares	5
2.1. Polígonos	5
2.2. Gráficas	8
2.3. Vigilando objetos geométricos	10
2.3.1. Vigilando gráficas	12
3. Galerías de arte poligonales	13
3.1. Introducción	13
3.2. Teorema de la galería de arte de Chvátal	16
3.2.1. Algoritmo	16
3.3. Vigilando galerías con guardias móviles	19
3.4. Galerías de arte tradicionales no rectangulares	27
3.5. Iluminación de polígonos con reflectores	29
3.5.1. Polígonos convexos	29
3.5.2. El problema de los dos reflectores	31
3.6. Conclusiones	37

4. Vigilando galerías de arte ortogonales	38
4.1. Vigilando polígonos ortogonales	38
4.2. Vigilando galerías de arte ortogonales con hoyos	46
4.3. Vigilando galerías de arte ortogonales con guardias móviles	48
4.4. Problema de la prisión	55
4.5. Vigilando galerías de arte tradicionales con habitaciones	59
4.6. Vigilando galerías de arte ortogonales con reflectores	61
4.7. Conclusiones	63
5. Vigilando objetos 3D	65
5.1. Poliedros	65
5.2. Terrenos poliédricos	68
5.3. Vigilando terrenos poliédricos con guardias en los vértices	68
5.3.1. Guardias necesarios	69
5.3.2. Suficiencia	74
5.3.3. Algoritmo	77
5.4. Vigilando terrenos poliédricos con guardias en aristas	79
5.4.1. Guardias necesarios	79
5.4.2. Suficiencia	81
5.4.3. Algoritmo	82
5.5. Conclusiones	84
6. Vigilando poliedros ortogonales 3D	86
6.1. Poliedros ortogonales 3D	86
6.1.1. Características de un poliedro ortogonal	86
6.1.2. Poliedro Orto-pila	89
6.2. Vigilando la superficie de un poliedro ortogonal con guardias en vértices	90
6.2.1. Suficiencia	90
6.2.2. Guardias necesarios	95
6.2.3. Algoritmo	97
6.3. Vigilando la superficie de un poliedro ortogonal con guardias en aristas	98
6.4. Vigilando el interior de un poliedro ortogonal con guardias en aristas	101

6.5. Vigilando el exterior de un poliedro ortogonal con guardias en aristas	102
6.6. Conclusiones	103
7. Conclusiones	106

Índice de figuras

2.1. Polígono simple con h hoyos.	6
2.2. Polígono ortogonal.	7
2.3. Gráfica plana máxima y su gráfica dual.	9
3.1. Ilustración del teorema 3.1.1. Existencia de la diagonal en un polígono.	14
3.2. Polígono triangulado, 3-coloreado y su gráfica dual.	15
3.3. Polígono de peine con $3m$ vértices que requiere m guardias.	16
3.4. Polígono triangulado y 3-coloreado con un hoyo.	18
3.5. Contracción de la triangulación de un polígono.	20
3.6. El pentágono puede vigilarse con un guardia diagonal (arista punteada) incidente al vértice 1.	22
3.7. El heptágono sólo necesita un guardia diagonal.	23
3.8. El nonágono puede dominarse con dos guardias diagonales.	24
3.9. Existencia de la diagonal que divide a P en dos subpolígonos uno con 5,6,7 u 8 aristas.	24
3.10. T_3 se forma al agregar T_1 y T_2 a P_2	26
3.11. polígono que necesita $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias móviles.	27
3.12. Galería de arte subdividida en salas convexas y su gráfica dual.	28
3.13. Galería de arte subdividida en $3m+1$ salas convexas las cuales requieren $2m$ guardias.	29
3.14. Iluminación de polígono convexo, $u \neq w$	31
3.15. Tipos de reflectores.	32

3.16. Par de reflectores óptimos en los vértices.	33
3.17. Triangulación de <i>Voronoi</i> en polígonos convexos.	34
3.18. No hay <i>c-tripleta</i> que lo separe.	35
4.1. Polígono 1-ortogonal y su nariz.	39
4.2. e' alcanza toda una arista.	40
4.3. f alcanza al menos un vértice de P	41
4.4. f alcanza una arista g de P	41
4.5. Polígono ortogonal cuadrilaterizado, su gráfica H y 4 coloreado.	42
4.6. Polígono ortogonal de peine con $4m$ vértices que requiere m guardias.	43
4.7. Caso 1.	44
4.8. Caso 2.a.	45
4.9. Caso 2.b.	46
4.10. Familia de polígonos con $4+10h$ vértices y h hoyos que requiere $\lfloor \frac{n+h}{4} \rfloor$ guardias en vértices.	47
4.11. Polígono con 2 hoyos, triangulado y 3-coloreado.	48
4.12. Descomposición ortogonal y su gráfica R	49
4.13. Corte en forma de L	51
4.14. Caso 2.c.1.	54
4.15. Caso 2.c.2.	55
4.16. Polígono ortogonal P y su cierre ortoconvexo $C(P)$	56
4.17. Gráfica plana asociada al cierre ortoconvexo $C(P)$ de P	57
4.18. Gráfica $C^*(P)$ de P	58
4.19. Galería tradicional con habitaciones y su gráfica dual.	60
4.20. Los componentes de $G - S$ son polígonos ortogonales posible- mente con hoyos.	61
4.21. Reflectores en el conjunto superior-izquierdo.	63
4.22. Familia de polígonos ortogonales con $12 + 8k$ vértices que re- quieran $4 + 3k$ reflectores.	63
4.23. Polígonos con $\lfloor \frac{n}{k+4} \rfloor$ brazos en espiral: a) Cota justa para $k =$ 4; b) Cota justa para $k = 6$	64
5.1. Truncamiento de un poliedro.	67
5.2. Gráfica de siete vértices.	70

5.3.	Construcción del terreno a partir de la gráfica de siete vértices.	73
5.4.	Gráfica plana máxima, su gráfica dual y su emparejamiento (líneas punteadas).	76
5.5.	2-coloración K_3 -libre de una gráfica plana máxima.	77
5.6.	Gráfica de 6 vértices que necesita 2 guardias en aristas.	79
5.7.	Construcción del terreno con n vértices que requiere $\frac{4n-4}{13}$ guardias en aristas.	80
5.8.	Poliedro con $6(k+1)$ aristas que requiere k guardias en aristas.	85
6.1.	Tipos de vértices.	87
6.2.	Coloración de las caras de gráficas plana par.	91
6.3.	Gráfica plana par triangulada.	92
6.4.	Poliedro ortogonal con 14 vértices que requiere 4 guardias.	96
6.5.	Familia de poliedros ortogonal con $14k$ vértices que requiere $4k$ guardias.	97
6.6.	Casos para la caras- Z del teorema 6.3.1.	100
6.7.	Familia de poliedros ortogonal con $12k$ aristas que requiere $\frac{k}{2}$ guardias.	101
6.8.	Familia de poliedros ortogonal con $12k$ aristas que requiere k guardias.	104

Índice alfabético

- 0-diagonal, 92
- 1-diagonal, 92
- Árbol, 7
- Arista derecha, 5
- Arista inferior, 5
- Arista izquierda, 5
- Arista superior, 5
- Aristas independientes, 8
- Bolsas, 55
- c-tripleta, 33
- Camino, 7
- Chazell, 14
- Chvátal, 1
- Chvátal, 12
- Ciclo, 7
- Cierre ortoconvexo, 55
- Clan, 9
- Coloración, 8
- Contracción de aristas, 18
- Corte, 42
- Corte consecutivo, 50
- Corte impar, 42
- Cuadrilaterización convexa, 37
- Diagramas de Voronoi, 33
- Dimensión, 64
- Emparejamiento, 8
- Emparejamiento máximo, 9
- Emparejamiento perfecto, 8
- Estrellado, 65
- Fisk, 12
- Galería de arte, 10
- Galerías de arte tradicionales, 26
- Gráfica bipartita, 8
- Gráfica conexa, 7
- Gráfica dual, 7
- Gráfica plana, 7
- Gráfica plana máxima, 8
- Gráfica plana par, 89
- Gráfica triangulada, 7
- Gráfica triangulada dominada, 11
- Gráficas, 7
- Guardias en las aristas, 10
- Guardias en los vértices, 9
- Guardias en puntos, 9
- Guardias móviles, 10, 18
- Número cromático, 8

Poliedro, 64
Poliedro orto-pila, 88
Polígono, 4
Polígono 3-coloreable, 14
Polígono con hoyos, 4
Polígono cuadrilaterizado, 6
Polígono ortogonal, 5
Polígono simple, 4
Polígono triangulado, 6

R-gráfica, 48
Reflectores, 10
Reflectores ajenos, 31
Reflectores opuestos, 30

Subespacio lineal, 64

Teorema de Chvátal, 15
Terreno, 67
Tipos de vértices, 5
Triangulación base, 67
Triangulación de polígonos, 12
Truncamiento, 65

Vértices opuestos, 53
Vigilando heptágono, 20
Vigilando nonágono, 21
Vigilando objetos geométricos, 9
Vigilando pentágonos, 20
Vigilando gráficas, 11

Introducción

Las obras de arte expuestas en las galerías tienen que ser vigiladas debido a su valor (en ocasiones invaluable). Para reducir los costos derivados de la vigilancia, es necesario tener los menos guardias posibles de tal forma que cada obra sea vigilada por al menos un guardia. Esto se conoce como *problemas de Galería de Arte* y fue propuesto por vez primera por *Víctor Kleen* en 1973, quien formuló la siguiente pregunta:

¿Cuántos guardias son suficientes para vigilar las obras de arte en una galería con n paredes?

Los problemas de galería de arte, han sido de gran interés en geometría computacional y combinatoria desde la aparición del artículo de *Chvátal* [Chv75] en 1975, en el cual *Chvátal* prueba que $\lfloor n/3 \rfloor$ guardias son siempre suficientes para vigilar un polígono simple con n vértices. Después de la aparición de este artículo, diversas variaciones han aparecido en la literatura, entre estas se encuentran, vigilar polígonos ortogonales, polígonos con hoyos, usar guardias móviles, etcétera. Sin embargo, pocos resultados han sido obtenidos en dimensiones mayores, entre los más notables se encuentra vigilar terrenos poliédricos.

Los problemas de galería de arte son importantes en ciertas aplicaciones en ciencias de la computación, debido a que estos son fundamentalmente problemas de visibilidad y la visibilidad es de suma importancia en muchas aplicaciones computacionales. Algunas áreas de aplicación para visibilidad incluyen: robótica, planeación de movimiento, visión computacional, gráficas

por computadora, reconocimiento de patrones, comunicaciones, entre otras.

El vertiginoso desarrollo de la tecnología computacional y los cada vez mejores dispositivos de adquisición de imágenes, han hecho que las imágenes tridimensionales se vuelven cada vez más populares en diversas áreas, como pueden ser: imágenes médicas, imágenes satelitales, diseño asistido por computadora, etcétera. Los poliedros ortogonales pueden ser buenas aproximaciones a estructuras tridimensionales, por lo que su estudio es de gran importancia en general para las ciencias e ingeniería de la computación.

1.1. Objetivos

- Mostrar las principales técnicas empleadas en los teoremas de galarías de arte.
- Probar el número necesario y ocasionalmente suficiente de guardias para vigilar la *superficie* de cualquier poliedro ortogonal 3D usando *guardias en vértices*.
- Probar el número necesario y ocasionalmente suficiente de guardias para vigilar la *superficie* de cualquier poliedro ortogonal 3D usando *guardias en aristas*.
- Probar el número necesario y ocasionalmente suficiente de guardias para vigilar el *interior* de cualquier poliedro ortogonal 3D usando *guardias en aristas*.
- Probar el número necesario y ocasionalmente suficiente de guardias para vigilar el *exterior* de cualquier poliedro ortogonal 3D usando guardias en aristas.

1.2. Resultados obtenidos

- Prueba de que la *superficie* de cualquier poliedro ortogonal 3D con n vértices puede ser vigilado con a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias en los vértices del poliedro. Esta cota no es justa, por lo que el problema queda abierto.

- Algoritmo de $O(n \log n)$ para colocar $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias en los vértices de un poliedro ortogonal 3D, de tal forma que la superficie del poliedro quede vigilada.
- Prueba de que la *superficie* de cualquier poliedro ortogonal 3D con m aristas puede ser vigilado con a lo más $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor$ guardias colocados en las aristas del poliedro. Para este problema se obtuvo la cota justa.
- Prueba de que el *interior* de cualquier poliedro ortogonal 3D con m aristas puede ser vigilado con a lo más $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor$ guardias colocados en las aristas del poliedro. Esta cota no es justa, por lo que el problema queda abierto.
- Prueba de que el *exterior* de cualquier poliedro ortogonal 3D con m aristas puede ser vigilado con a lo más $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor$ guardias colocados en las aristas del poliedro. Esta cota no es justa, por lo que el problema queda abierto.

1.3. Organización del trabajo

En la literatura, existen una gran cantidad de artículos sobre galerías de arte, por lo que para este trabajo se hizo una pequeña selección de los artículos, de tal forma que se muestre algunas de las variaciones de problemas de galería de arte, así como las herramientas básicas para sus pruebas.

Esta tesis esta organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 1, se presentan los conceptos básicos para el entendimiento de los problemas de galería de arte. Para mayor profundidad se puede consultar [BY98], [BM76] y [Lov79].

En el capítulo 2, se presentan algunos de los teoremas de galería de arte para polígonos generales, incluyendo el teorema clásico de *Chvátal*. El capítulo se concluye con problemas abiertos para polígonos generales.

En el capítulo 3, se exponen algunos de los teoremas de galería de arte clásicos para polígonos ortogonales y se concluye con problemas aún no resueltos para estas variantes.

En el capítulo 4, se presentan definiciones de los poliedros así como los teoremas para estrellar y truncar un poliedro convexo, esto es importante ya que a partir de estos teoremas, es posible construir otros poliedros convexos, además, se presentan los teoremas de galerías de arte más importantes para terrenos poliédricos. El capítulo se concluye con problemas abiertos en 3D.

En el capítulo 5, se presentan algunas propiedades de los poliedros ortogonales, así como los resultados obtenidos para estas estructuras. El capítulo se concluye con los problemas no resueltos en el presente trabajo.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Polígonos

Las definiciones presentadas en esta sección pueden consultarse en libros de geometría computacional, por ejemplo [BY98] o [dBvKOS97].

Definición 2.1.1 *Un polígono P es una secuencia ordenada de n puntos v_1, v_2, \dots, v_n , con $n \geq 3$, llamados vértices de P , junto con el conjunto de líneas uniendo v_i a v_{i+1} para $i = 1, 2, \dots, n-1$ y v_n a v_1 , llamadas aristas de P .*

P es llamado polígono *simple* si ninguna pareja de aristas no consecutivas se intersectan. Un polígono simple divide el plano en dos regiones, una no acotada denominada la región exterior y una acotada, llamada la región interior. De aquí en adelante el término polígono será usado para denotar a un polígono simple junto con su interior.

Definición 2.1.2 *Un polígono P es convexo si para cualquier par de puntos $a, b \in P$, el segmento de línea ab está totalmente contenido en P .*

De la definición anterior, se infiere que todos los ángulos internos de los vértices del polígono convexo son menores o iguales que π .

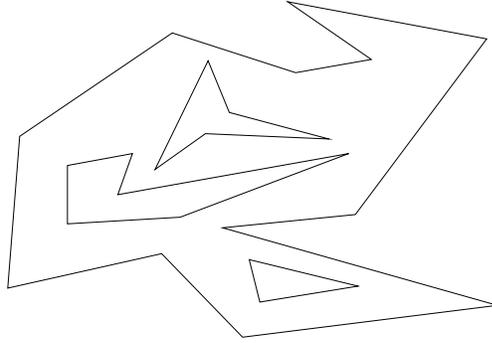


Figura 2.1: Polígono simple con h hoyos.

Dado un polígono P y un conjunto de polígonos ajenos P_1, P_2, \dots, P_h contenidos en el interior de P , el conjunto $P - \{P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_h\}$ es llamado polígono con *hoyos*. En este caso decimos que P tiene h hoyos; ver figura 2.1.

Un *polígono ortogonal*¹ es un polígono con todas sus aristas paralelas al eje X o Y ; ver figura 2.2. Al recorrer la frontera de un polígono ortogonal los lados alternan entre horizontales y verticales. Los polígonos ortogonales son útiles para aproximar figuras geométricas, las cuales son presentados en diversos problemas en la práctica.

La definición anterior es válida para polígonos en los cuales sus aristas son paralelas a dos ejes ortogonales X' y Y' .

Una arista vertical en un polígono ortogonal es una *arista izquierda* si la región interna se encuentra a la derecha de esta, de otra forma es una *arista derecha*.

Una arista horizontal en un polígono ortogonal es una *arista superior* si la región interna se encuentra por debajo, de otra forma es una *arista inferior*.

Llamamos a un vértice v de P convexo si el ángulo interno formado por sus dos aristas incidentes es menor o igual que π , de otro modo v es llamado cóncavo.

El siguiente teorema planteado por *O'Rourke*, muestra la relación que existe entre los vértices convexos y cóncavos de un polígono ortogonal.

¹También llamado rectilíneo o isotético.

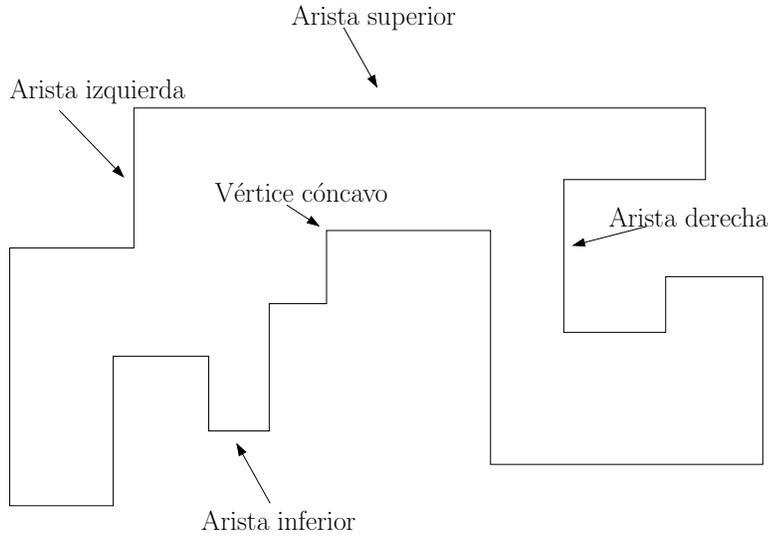


Figura 2.2: Polígono ortogonal.

Teorema 2.1.1 *Sea P un polígono ortogonal con n vértices, r de los cuales son cóncavos, entonces $r = \frac{n-4}{2}$.*

Prueba. Como P tiene n vértices, la suma de los ángulos internos de P es $(n-2)\pi$. Note que todos los ángulos internos de P son de tamaño $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$, dependiendo si los vértices son convexos o cóncavos respectivamente.

Si tenemos r vértices cóncavos y $n-r$ vértices convexos, entonces

$$(n-r)\frac{\pi}{2} + r\frac{3\pi}{2} = (n-2)\pi.$$

Despejando r obtenemos $r = \frac{n-4}{2}$. □

Un polígono ortogonal P se dice que está en posición general si ningún par de vértices cóncavos pueden ser unidos por un segmento de línea horizontal o vertical contenido en P .

Decimos que un polígono P está particionado, si el interior del polígono está dividido en subpolígonos disjuntos. Si todos los subpolígonos son triángulos, decimos que P está *triangulado*. Si todos los subpolígonos son cuadriláteros, decimos que P está *cuadrilaterizado*.

2.2. Gráficas

Las definiciones presentadas en esta sección pueden consultarse en [BM76].

Una *gráfica* G es un conjunto finito no vacío de elementos V , llamados vértices, junto con un conjunto E de parejas de vértices distintos de G , llamadas aristas. Dos vértices u y v de G son adyacentes si la pareja $\{u, v\}$ es un elemento de E . El grado de un vértice v de G (denotado por $\deg(v)$), es el número de vértices adyacentes a v .

Un *camino* de una gráfica $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices distintos v_1, v_2, \dots, v_k tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para $1 \leq i < k - 1$, con $k > 1$. Un *ciclo* de $G = (V, E)$ es un camino $v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$.

Una gráfica $G = (V, E)$ es llamada *conexa* si para cualquier par de vértices u y v de G , existe un camino $u = v_1, v_2, \dots, v_k = v$ empezando en u y terminando en v , de otra forma G es llamada no conexa.

Una gráfica es llamada *árbol* si esta es conexa y además no contiene ciclos.

Una gráfica G es *plana* si está puede ser dibujada en el plano y sus aristas (representadas por curvas simples) no se intersectan entre sí, excepto posiblemente en sus puntos finales. Una gráfica plana G divide al plano en regiones llamadas caras, la región no acotada es llamada la cara exterior, todas las otras regiones son llamadas caras interiores. El grado de una cara es el número de aristas en su frontera.

La gráfica *dual* $G^* = (V^*, E^*)$ de una gráfica plana $G = (V, E)$ la definimos como sigue: Para cada cara f de G , V^* contiene un vértice v_f . Para cada arista e en G , G^* tiene una arista $e^* = (v_{f_1}, v_{f_2})$ donde f_1 y f_2 son dos caras de G con e en su frontera común. Llamamos a e^* la *arista dual* de e ; en la figura 2.3, las líneas punteadas representan las aristas duales y sus puntos finales representan los vértices de la gráfica dual.

Definimos la gráfica dual $G^* = (V^*, E^*)$ de un polígono P particionado como sigue: Los vértices de V^* corresponden a cada partición de P , dos vértices son adyacentes si existe una arista que separa las particiones. Note que la cara exterior no es tomada en cuenta en esta definición.

Una *diagonal* en una gráfica plana $G = (V, E)$, es una arista conectando dos vértices de G y la cuál no pertenece a E . Decimos que G esta *triangulada* si no contiene diagonales internas. Una *triangulación* de G es obtenida

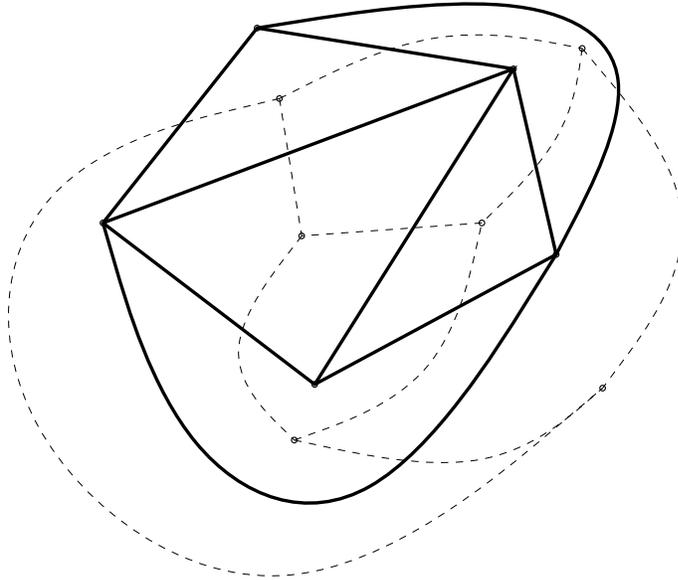


Figura 2.3: Gráfica plana máxima y su gráfica dual.

agregando un conjunto de diagonales internas de tal forma que la gráfica resultante es plana y triangulada. Las caras internas de una gráfica triangulada son llamadas triángulos.

Definición 2.2.1 *Una gráfica plana máxima es un gráfica plana conexa en la cual cada cara es un triángulo.*

Una *coloración* de los vértices de una gráfica G , es una asignación de colores a sus vértices de tal manera que dos vértices adyacentes reciben colores diferentes. El *número cromático* k de una gráfica G , es el menor entero k para el cual existe una k -coloración de G .

Una gráfica $G = (V, E)$ es *bipartita* si su conjunto de vértices puede ser dividido en dos subconjuntos V_1 y V_2 , tal que cualquier arista de G une a un vértice de V_1 con un vértice de V_2 . Note que G es bipartita si y sólo si esta es 2-coloreable.

Un conjunto de aristas I es independiente si ningún par de elementos en I son adyacentes.

Un conjunto M de aristas independientes en una gráfica $G = (V, E)$ es llamada un *emparejamiento*. Decimos que un emparejamiento es *perfecto* si todo vértice de G está emparejado. El *tamaño del emparejamiento* M es la cardinalidad de M .

Un emparejamiento M es llamado *máximo*, si para cualquier arista $e \notin M$, $M \cup \{e\}$ no es un emparejamiento.

Un *clan* de una gráfica $G = (V, E)$, es un subconjunto de vértices U de V , tal que existe una arista en G que une cualquier par de elementos de U .

Una cubierta por vértices de una gráfica $G = (V, E)$, es un subconjunto de vértices U de V , tal que cada vértice $v \in V - U$ es adyacente a al menos un vértice de U . Similarmente podemos definir cubiertas por aristas y caras.

2.3. Vigilando objetos geométricos

Definición 2.3.1 [Chv75] *Un punto x en un objeto geométrico \mathcal{P} es vigilado (iluminado) por un guardia (lámpara) \mathcal{C} si existe un punto $y \in \mathcal{C}$ tal que el segmento de línea xy no interseca ningún obstáculo de \mathcal{P} .*

Note que un guardia \mathcal{C} puede ser un objeto geométrico, es decir, un punto, un segmento de línea, un árbol o un polígono.

Una colección $\mathcal{H}(\mathcal{P})$ de guardias de un objeto geométrico \mathcal{P} *vigila* o *ilumina* \mathcal{P} si cualquier punto $p \in \mathcal{P}$ es vigilado por al menos un guardia $h \in \mathcal{H}(\mathcal{P})$.

El término *iluminar* viene del hecho de que si ponemos una fuente de luz en cada elemento de $\mathcal{H}(\mathcal{P})$ las cuales emite luz en cualquier dirección, entonces \mathcal{P} queda totalmente iluminado. En adelante, el término vigilar o iluminar serán usados indistintamente.

Usualmente la clase de guardias usadas para vigilar un objeto geométrico \mathcal{P} son:

- **Guardias en los vértices.** Los guardias se localizan en vértices de \mathcal{P} . En adelante, cuando no se mencione lo contrario los guardias serán de esta clase.
- **Guardias en puntos.** Los guardias pueden ser posicionados en cualquier punto dentro o en la frontera de \mathcal{P} .

- **Guardias en las aristas.** Esta variante fue introducida por *Toussaint* en 1981. La principal motivación es permitirles a los guardias desplazarse sobre las aristas de \mathcal{P} . En el contexto de iluminación, esta puede considerarse como una lámpara fluorescente colocada en una arista de \mathcal{P} . En este caso la lámpara se considera del tamaño de la arista.
- **Guardias móviles.** Esta variante fue introducida por *O'Rourke* en 1983, en esta versión, se permite que los guardias se desplacen sobre segmentos de línea contenidos en \mathcal{P} . Si sólo se permite que los guardias se desplacen sobre aristas y diagonales, estos son llamados guardias diagonales.
- **Reflectores en vértices y puntos.** Los reflectores fueron introducidos por *Urrutia* en 1990. La principal motivación es que los guardias o dispositivos de vigilancia, tales como cámaras, tienen un ángulo de visibilidad limitado. Un reflector es una fuente de luz la cual ilumina con un ángulo restringido α y puede ser rotado sobre su ápice. El ápice de los reflectores puede localizarse en los vértices o en puntos de cualquier parte de \mathcal{P} .

Dado un objeto geométrico \mathcal{P} y una colección de guardias $\mathcal{H}(\mathcal{P})$, definimos el *problema de las galerías de arte* de la siguiente forma: ¿Cuál es la cardinalidad mínima de $\mathcal{H}(\mathcal{P})$ tal que \mathcal{P} queda totalmente vigilado? Se ha probado para varios objetos geométricos, que este es un problema *NP-completo*. Por lo que es preferible encontrar el número suficiente y ocasionalmente necesario de guardias de tal forma que \mathcal{P} quede vigilado.

Los principales objetos geométricos usados en la literatura son:

- Polígonos generales.
- Polígonos convexos.
- Polígonos con hoyos.
- Polígonos ortogonales.
- Polígonos ortogonales convexos.

-
- Polígonos ortogonales con hoyos.
 - Segmentos de línea.
 - Terrenos poliédricos.

2.3.1. Vigilando gráficas

La contraparte combinatoria del problema de vigilancia es el siguiente. Dada una gráfica G asociada a un objeto geométrico \mathcal{P} y una clase de guardias \mathcal{C} , definimos el problema combinatorio de galería de arte de la siguiente forma. ¿Cuál es tamaño de la cubierta mínima de G usando guardias de clase \mathcal{C} ? Se ha probado que este es un problema *NP-completo*, por lo que preferimos obtener el número ocasionalmente necesario y siempre suficientes de guardias y de esta forma resolver el problema geométrico original.

Dado un polígono P y una triangulación T de P . Definimos la gráfica $GT(P)$ asociada a T como sigue: el conjunto de vértices de $GT(P)$ está formado por los vértices de P . Dos vértices son adyacentes si estos están conectados por una arista en T .

Decimos que una gráfica triangulada G está dominada por guardias, si existe una colección de vértices C , tal que al menos un vértice de cada cara triangular de G pertenece a C .

El siguiente lema muestra como establecer la suficiencia para un polígono P a partir de su gráfica triangulada asociada.

Lema 2.3.1 *Sean P un polígono, T una triangulación arbitraria de P y $GT(P)$ la gráfica asociada a T . Si $GT(P)$ es dominada por k guardias, entonces P puede vigilarse con k guardias.*

Prueba. Como $GT(P)$ está dominada, cada triángulo tiene al menos un vértice que lo domina. Los mismos guardias correspondientes a los vértices de P vigilan cada una de las regiones triangulares de T , de esta forma P queda totalmente vigilado. \square

Galerías de arte poligonales

3.1. Introducción

¿Cuántos guardias necesitamos para vigilar una galería de arte? Una galería de arte puede representarse por polígonos y el número de guardias necesarios depende de la complejidad de este. En 1975, *Chvátal* [Chv75] mostró que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias son siempre suficientes para vigilar cualquier polígono sin importar su complejidad. Una prueba más simple fue obtenida por *Fisk* [Fis78] en 1978, esta última es la presentada en este trabajo.

Antes de enunciar el teorema de *Chvátal* mostraremos que todo polígono puede triangularse y esta triangulación es 3-coloreable.

Teorema 3.1.1 [*dBvKOS97*] *Cualquier polígono P con n vértices admite una triangulación y cualquier triangulación consiste exactamente de $n - 2$ triángulos.*

Prueba. Probaremos la primer parte del teorema inductivamente sobre n . Cuando $n = 3$, el polígono es un triángulo y el teorema es trivialmente cierto. Mostraremos que si P tiene más de tres vértices, entonces siempre existe una diagonal que divide al polígono en dos subpolígonos, por lo que inductivamente se obtiene el resultado deseado.

Sea v el vértice más a la izquierda de P y sean u y w los vértices de P adyacentes a v . Si el segmento uw es una diagonal, entonces uw es la diagonal

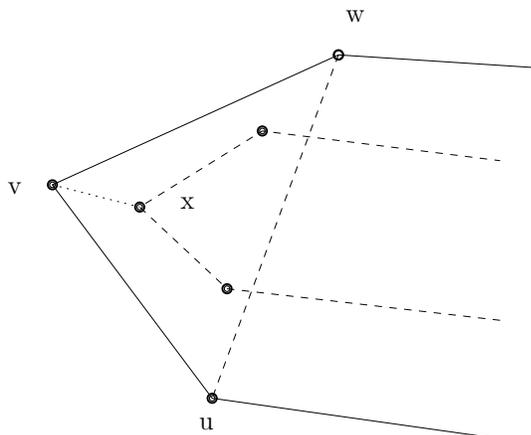


Figura 3.1: Ilustración del teorema 3.1.1. Existencia de la diagonal en un polígono.

buscada. Supongamos que uw no es una diagonal, por lo que el triángulo uvw contiene al menos un vértice del polígono. Tomemos el vértice x de P en el interior de uvw más alejado del segmento uw . Por construcción, el segmento vx es la diagonal buscada; ver figura 3.1.

Para demostrar que una triangulación consiste de exactamente $n - 2$ triángulos, considere cualquier diagonal arbitraria en alguna triangulación T de P . Esta diagonal corta el polígono P en dos subpolígonos con m_1 y m_2 vértices respectivamente, cada vértice de P ocurre en alguno de los dos subpolígonos, excepto para los vértices de la diagonal, los cuales ocurren en ambos subpolígonos. Por lo que $m_1 + m_2 = n + 2$. Inductivamente, cualquier triangulación de los subpolígonos consiste de $m_i - 2$ triángulos, lo que implica que

$$(m_1 - 2) + (m_2 - 2) = n - 2$$

□

Los algoritmos de triangulación de polígonos han sido ampliamente estudiados. En 1978, *Garey, Johnson, Preparata y Tarjan* [GJPT78] obtuvieron el primer algoritmo que toma $O(n \ln n)$ pasos. Este resultado fue mejorado por *Tarjan y van Wyk* [TW88] en 1988 a $O(n \ln \ln n)$. En 1990, *Chazelle*

obtuvo el primer algoritmo determinista lineal (un poco complicado).

Teorema 3.1.2 *Un polígono simple puede triangularse en $O(n)$.*

La prueba sale del alcance de este trabajo. Los detalles pueden consultarse en [Cha91].

El siguiente teorema muestra que cualquier polígono triangulado es 3-coloreable.

Teorema 3.1.3 *Sean P un polígono y T cualquier triangulación de P . Entonces T es 3-coloreable.*

Prueba. Sea T^* la gráfica dual de T . Como cualquier diagonal de T divide a T^* en dos, entonces T^* tiene que ser un árbol.

Note que un vértice de T correspondiente a una hoja de T^* tiene grado dos.

Tomemos cualquier vértice v de T de grado dos, v siempre existe debido a que T^* tiene al menos dos hojas por ser un árbol. Asignamos a v un color válido, es fácil ver que cualquier 3-coloración de $T - v$ puede extenderse a una 3-coloración de T ; ver figura 3.2. □

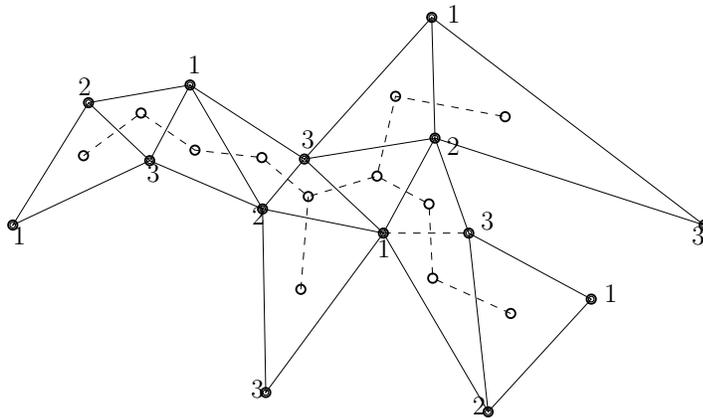


Figura 3.2: Polígono triangulado, 3-coloreado y su gráfica dual.

3.2. Teorema de la galería de arte de Chvátal

Teorema 3.2.1 (Chvátal) $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias son suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar el interior de cualquier galería de arte con n vértices.

Prueba. Sean P un polígono representando la galería de arte y T una triangulación de P .

Asignamos una 3-coloración a los vértices de T , esto divide el conjunto de vértices de P en tres clases cromáticas C_1, C_2, C_3 . La cardinalidad de una de estas clases, digamos C_1 , es a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, colocamos en cada elemento de C_1 un guardia. Note que los vértices de cada triángulo reciben diferentes colores, por lo que uno de ellos es de la clase cromática seleccionada, esto asegura que el polígono P queda completamente vigilado.

Para mostrar que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias son ocasionalmente necesarios, considere el polígono de peine con $n = 3m$ vértices presentado en la figura 3.3. Cada pico requiere de un guardia, por lo que requerimos de m guardias. \square

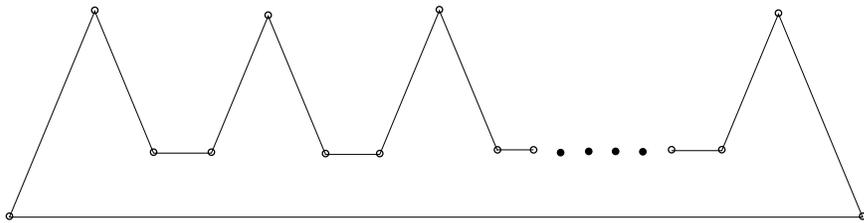


Figura 3.3: Polígono de peine con $3m$ vértices que requiere m guardias.

3.2.1. Algoritmo

- *Entrada:* Polígono P .
 - *Salida:* Posiciones de los guardias de tal forma que vigilen todo P .
1. Triangular P .
 2. Asignamos una 3-coloración a los vértices de T .

3. Poner un guardia en cada elemento de la clase cromática de menor cardinalidad.

Teorema 3.2.2 *Una galería de arte poligonal con n vértices, puede protegerse en $O(n)$ con a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias.*

Prueba. El algoritmo siempre termina correctamente debido al teorema 3.2.1, por lo que sólo hace falta probar que algoritmo toma $O(n)$.

Triangular un polígono simple toma $O(n)$ usando el algoritmo de Chazelle [Cha91], colocar los guardias en la clase cromática de menor cardinalidad también toma tiempo lineal, por lo que sólo hace falta mostrar que asignar una 3-coloración a T puede implementarse en $O(n)$. De acuerdo al teorema 3.1.3, siempre existe al menos un vértice v de grados dos y una 3-coloración de $T - v$ puede extenderse a una 3-coloración en T . Es fácil ver que este procedimiento toma tiempo lineal. \square

El teorema 3.2.1 nos da el número suficiente y ocasionalmente necesario de guardias para vigilar cualquier polígono con n vértices, sin embargo, muchos de los polígonos pueden vigilarse con menos de $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. En 1979, *Lee* y *Lin*[LL86] probaron que el problema de encontrar el mínimo número de guardias necesarios para vigilar un polígono es *NP-completo*.

Hasta este momento las galerías de arte se han considerado como una construcción sin obstáculos (tales como pilares, paredes, etc.), en su interior. Si permitimos que la galería contenga obstáculos, entonces el polígono que lo representa contendrá hoyos, es decir, otros polígonos en la parte interior del polígono principal y $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias no son suficientes para vigilar todo su interior. En 1984, *Shermer* [O'R87] mostró que cualquier polígono con un hoyo puede vigilarse con $\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$ guardias, la cota es justa. En 1991, dos pruebas independientes y totalmente diferentes fueron obtenidas para probar que $\lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$ guardias en puntos son suficiente para vigilar cualquier galería con h hoyos, una prueba fue propuesta por *Hoffman, Kaufman* y *Kriegel* [HKK91] y la otra por *Sachs* y *Souvaine* [BSS91]. Esta última es una generalización de la prueba hecha por *Shermer*.

La estrategia principal de *Sachs* y *Souvaine* es construir un canal C que une un hoyo a la cara exterior del polígono P , de tal forma que sólo un

vértice adicional sea creado. Entonces eliminamos C , esto produce un nuevo polígono P^k con $n + k$ vértices y $h - k$ hoyos. La única parte del polígono original no vigilada es el canal C . Para asegurarse que el canal C sea visto por al menos un guardia, se asocia un triángulo t con C durante su construcción, con la propiedad de que un guardia colocado arbitrariamente en t pueda ver todo el canal en el polígono original. Sin embargo, aunque los guardias escogidos en la 3-coloración son guardias en vértices de P^h , esos vértices no necesariamente existen en P y el mismo guardia es un guardia en un punto del polígono original; ver figura 3.4.

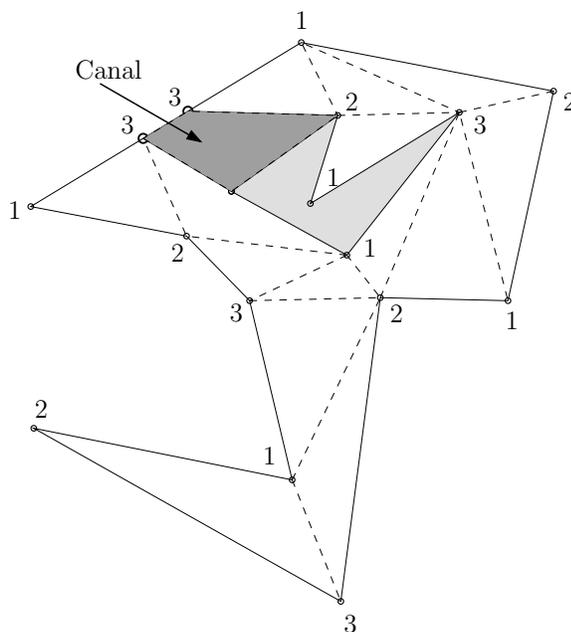


Figura 3.4: Polígono triangulado y 3-coloreado con un hoyo.

El problema de encontrar la cota justa en el número de guardias en los vértices para vigilar un polígono con n vértices y h hoyos permanece abierto. La mejor cota conocida es $\lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor$ establecida por *O'Rourke* en [O'R87].

3.3. Vigilando galerías con guardias móviles

Si permitimos que los guardias patrullen las galerías de arte sobre segmentos de línea interiores fijos, entonces menos guardias son necesarios para vigilar el polígono. Esta variante es conocida como *guardias móviles* y fue propuesta por *Toussaint* y *O'Rourke* en una plática personal. El resultado principal de esta sección es debido a *O'Rourke* [O'R83]. El muestra que $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias móviles son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar un polígono.

Sean $GP(T)$ una gráfica asociada a una triangulación T de un polígono P y e una arista de P incidente a u y v . La *contracción* de la arista e , es una transformación que altera $GP(T)$ al eliminar los vértices u y v , y reemplazarlos con un nuevo vértice x , de tal forma que este sea adyacente a todos los vértices adyacentes de u y v ; ver figura 3.5. Note que una contracción no es una transformación de polígonos.

Lema 3.3.1 *Sean P un polígono, T una triangulación arbitraria de P , $GT(P)$ la gráfica asociada a T y $GT(P)'$ la gráfica resultante al contraer una arista e de $GT(P)$. Entonces $GT(P)'$ es la gráfica asociada a alguna triangulación T' de un polígono P' .*

Prueba. Sea e la arista de P a contraer, además sean u y v los vértices de P incidentes a e . Etiquetamos los vértices de P adyacentes a u en $GT(P)$ con $y_0 = v, y_1, \dots, y_k$ en sentido contrario a las manecillas del reloj y los vértices de P adyacentes a v en $GT(P)$ con $z_0 = u, z_1, \dots, z_l$ en sentido de la manecillas del reloj; ver figura 3.5. Note que $y_1 = z_1$ es el ápice del triángulo soportado por e .

Introducimos un nuevo vértice x en el interior de e y conectamos los vértices y_i y z_j a x con el siguiente procedimiento. Conectamos y_1 a x ; esto puede hacerse sin cruces de aristas debido a que y_1 es el ápice del triángulo en el cual x está en la base y eliminamos la diagonal (u, y_1) . Conectamos y_2 a x con la región acotada por (x, y_1, y_2, u) y eliminamos la diagonal (u, y_2) , la línea puede estar curvada pero ningún cruce es necesario. Continuamos de esta manera hasta que las k diagonales estén conectadas con x . Aplicamos el mismo procedimiento a los vértices z_j . El resultado final es una gráfica triangulada plana $GT(P)'$.

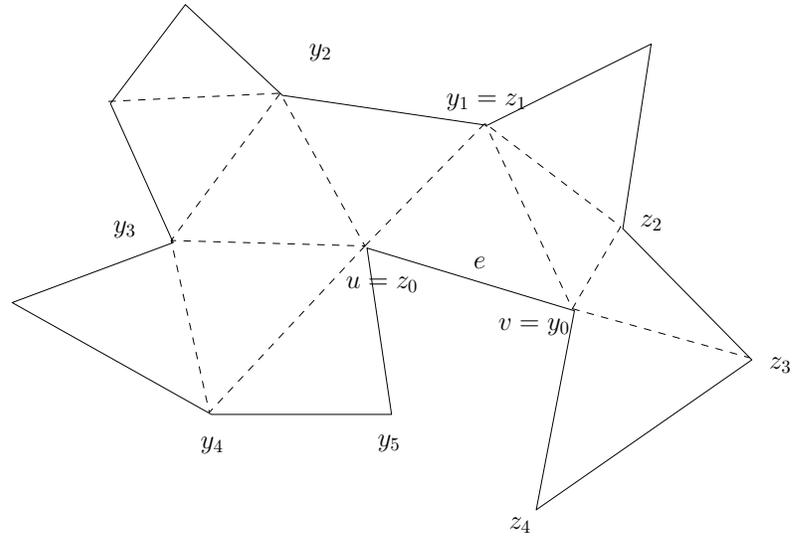


Figura 3.5: Contracción de la triangulación de un polígono.

Aplicando a la gráfica resultante el teorema de *Fary* [Gib79] (*Para cualquier gráfica plana dibujada en el plano con posiblemente líneas curvadas, existe un homomorfismo en el plano en el cual la gráfica puede dibujarse de tal forma que todas las líneas sean rectas*), obtenemos un polígono P' y una

triangulación T' de P' , la cual tiene a $GT(P)'$ asociada a T' . □

Lema 3.3.2 *Supongamos que $f(n)$ guardias diagonales son siempre suficientes para vigilar un polígono P . Si un guardia es colocado en un vértice de P , entonces $f(n - 1)$ guardias diagonales adicionales son siempre suficientes para vigilar P .*

Prueba. Supongamos que tenemos vigilado P , sea u el vértice en el cual es colocado un guardia, sea e la arista incidente a u y a algún vértice v de P , sean T una triangulación de P y $GT(P)$ la gráfica asociada a T . Una contracción de la arista e , produce una gráfica $GT(P)'$ con $n - 1$ vértices. Por el lema 3.3.1, $GT(P)'$ es la gráfica asociada a una triangulación de un polígono P' la cual puede vigilarse con $f(n - 1)$ guardias diagonales. Sea x el vértice que reemplaza a u y v en P' . Supongamos que vigilamos P' y ningún guardia es colocado en x , entonces las mismas ubicaciones de los guardias en P' vigilan P , debido a que el guardia colocado en u vigila el triángulo t de $GT(P)$ no vigilado por los guardias de P' . Si vigilamos P' y un guardia se usa en x , entonces este guardia puede asignarse al vértice v de P , manteniendo las posiciones de los guardias restantes. □

Los siguientes tres lemas establecen el mínimo número de guardias diagonales necesarios para vigilar un polígono con $n \leq 9$ vértices.

Lema 3.3.3 *Cualquier pentágono es dominado por únicamente un guardia diagonal incidente a algún vértice seleccionado.*

Prueba. Sea G cualquier triangulación de un pentágono y sea 1 la etiqueta del vértice seleccionado. Es fácil ver que sólo existen 5 triangulaciones distintas para un pentágono. En cualquier caso, un guardia diagonal incidente a 1 es suficiente para dominar G , debido a que sus vértices finales son soporte para todos los triángulos en cualquier triangulación; ver figura 3.6. □

Lema 3.3.4 *Cualquier heptágono puede dominarse con un guardia diagonal.*

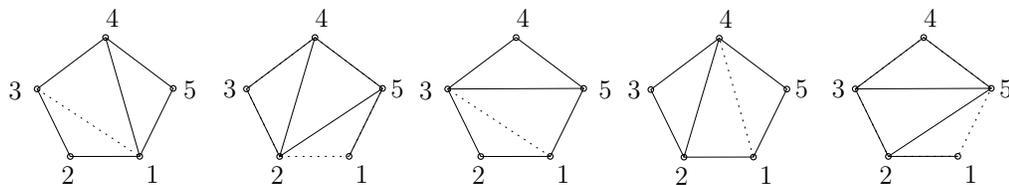


Figura 3.6: El pentágono puede vigilarse con un guardia diagonal (arista punteada) incidente al vértice 1.

Prueba. Sea G una triangulación de un heptágono y sea d una diagonal arbitraria. Etiquetamos los vértices del septágono en sentido de las manecillas del reloj de 1 a 7 empezando en un vértice final de d . La diagonal d divide las siete aristas en la frontera de G en cualquiera de los siguientes casos: $2+5=7$ ó $3+4=7$. La partición $1+6=7$ no es posible.

1. $2+5=7$. Sea $d = (1, 3)$, entonces d soporta otro triángulo t , ya sea $(1,3,4), (1,3,5), (1,3,6)$ o $(1,3,7)$. Por simetría únicamente dos de estos casos son distintos.
 - a) $t = (1, 3, 4)$. Entonces $(1,4,5,6,7)$ es un pentágono. Por el lema 3.3.3, este pentágono puede cubrirse con un guardia diagonal con vértice final en 1. Este guardia domina la gráfica entera; ver la figura 3.7 izquierda.
 - b) 1b. $t = (1, 3, 5)$. Escogemos la diagonal $(1,5)$ para colocar el guardia. Sin importar como se triángule el cuadrilátero $(1,5,6,7)$, todo G es dominado; ver la figura 3.7 derecha.
2. $3+5=7$. Sea $d = (1, 4)$. Entonces ambas formas de triangular el cuadrilátero $(1, 2, 3, 4)$ nos llevan a situaciones equivalentes al caso 1.a. \square

Lema 3.3.5 *Cualquier nonágono puede dominarse con dos guardias diagonales tal que uno de sus vértices incidentes coincide con un vértice seleccionado.*

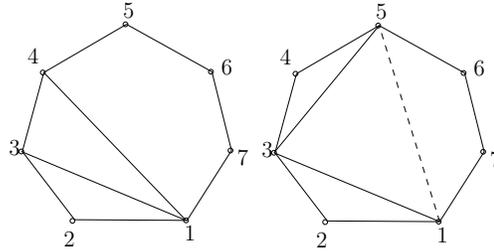


Figura 3.7: El heptágono sólo necesita un guardia diagonal.

Prueba. Sea G cualquier triangulación de un nonágono, etiquetamos los vértices del nonágono en sentido de las manecillas del reloj de 1 a 9. Sea 1 la etiqueta del vértice seleccionado y sea d cualquier diagonal con uno de sus puntos finales en 1. Esta diagonal divide las aristas de la frontera de G en cualquiera de los siguientes casos: $2+7=9$, $3+6=9$ ó $4+5=9$.

1. $2+7=9$. Sea $d = (1, 3)$. La diagonal d soporta otro triángulo t cuyo ápice es cualquiera de $4,5,6,7,8$ o 9 . Sólo tres de estos casos son diferentes.
 - a) $t = (1, 3, 4)$. Dominamos el heptágono $(1,4,5,6,7,8,9)$ con un guardia por el lema 3.3.4 y usamos la diagonal $(1,3)$ para el segundo guardia; ver figura 3.8 izquierda.
 - b) $t = (1, 3, 5)$ Dominamos el heptágono $(1,3,5,6,7,8,9)$ con un guardia por el lema 3.3.4 y usamos la diagonal $(1,3)$ para el segundo guardia; ver figura 3.8 centro.
 - c) $t = (1, 3, 6)$. Dominamos el hexágono $(1,2,3,4,5,6)$ con un guardia por el lema 3.3.4 y por el lema 3.3.3 dominamos el pentágono $(1,6,7,8,9)$ con un guardia diagonal incidente al vértice 1; ver figura 3.8 derecha.
2. $3+6=9$. Sea $d = (1, 4)$. Esto es equivalente al caso 1.a.
3. $4+5=9$. Sea $d = (1, 6)$. Esto es equivalente al caso 1.c. □

El siguiente resultado establece la existencia de una diagonal, la cual divide el polígono en dos subpolígonos, uno con 5, 6, 7 u 8 aristas.

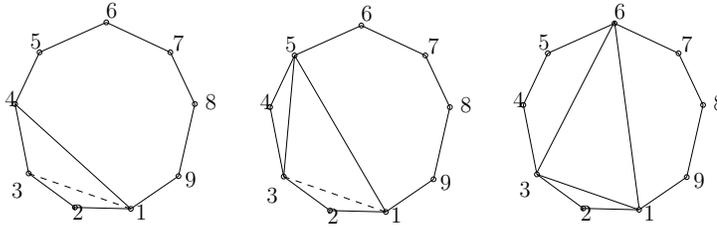


Figura 3.8: El nonágono puede dominarse con dos guardias diagonales.

Lema 3.3.6 Sean P un polígono con $n \geq 10$ vértices y T una triangulación arbitraria de P . Existe una diagonal d en T que divide a P en dos subpolígonos, uno de las cuales tiene $k = 5, 6, 7$ u 8 aristas.

Prueba. Escogemos una diagonal d de T que divide a P en dos subpolígonos, uno de estos con el mínimo número de aristas de P mayor o igual que 5. Sea $k \geq 5$ este número. Etiquetamos los vértices $0, 1, \dots, n-1$ tal que d es $(0, k)$; ver figura 3.9. La diagonal d soporta un triángulo el cual tiene como ápice a t , $0 < t < k$. Como k es mínimo, $t \leq 4$ y $k - t \leq 4$. Considerando ambas desigualdades, tenemos que $k \leq 8$. \square

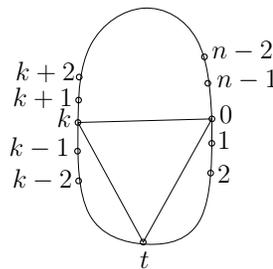


Figura 3.9: Existencia de la diagonal que divide a P en dos subpolígonos uno con 5,6,7 u 8 aristas.

Los lemas anteriores nos permiten probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.3.1 $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias diagonales son suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar cualquier polígono P con $n \geq 4$ vértices.

Prueba. El teorema es cierto para $n \leq 9$ de acuerdo a los lemas 3.3.3, 3.3.4 y 3.3.5. Supongamos entonces que $n \geq 10$ y que el teorema es cierto para todo $n' < n$. El lema 3.3.6 garantiza la existencia de una diagonal la cual divide P en dos subpolígonos P_1 y P_2 , donde P_1 contiene $k = 5, 6, 7$ u 8 aristas más su diagonal. Diferentes caso pueden ocurrir:

1. $k = 5$ o 6 . P_1 tiene a lo más 7 aristas incluyendo la diagonal. Por el lema 3.3.4, este puede vigilarse con un guardia diagonal. P_2 tiene $n - 5 + 1 = n - 4$ aristas incluyendo d , inductivamente puede vigilarse con a lo más $\lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1$ guardias, por lo que P puede vigilarse con $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$.
2. $k = 7$. P_1 tiene 8 aristas incluyendo la diagonal. Etiquetamos los vértices de P_1 de 0 a 7 al recorrer en sentido de las manecillas del reloj el polígono, empezando en el extremo derecho de la diagonal que divide a P . La presencia de cualquier diagonal (0,6), (0,5), (1,7) o (2,7) viola la minimalidad de k . Por lo que en cualquier triangulación de P_1 , el triángulo t que tiene como frontera a d es (0,3,7) o (0,4,7); estos casos son equivalentes, por lo que únicamente hace falta probar un caso. Supongamos que t es (0,3,7). El cuadrilátero (0,1,2,3) tiene dos triangulaciones distintas.
 - a) La diagonal (1,3) es incluida. Por el lema 3.3.3, vigilamos el pentágono (3,4,5,6,7) con un guardia diagonal incidente a 3. Este guardia vigila todo P_1 . P_2 es vigilado inductivamente con $\lfloor \frac{n-7+1}{4} \rfloor \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1$ guardias diagonales, por lo que P puede vigilarse con $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias diagonales.
 - b) La diagonal (0,2) es incluida. Sea $P_3 = P_2 \cup T_1 \cup T_2$ donde $T_1 = (0, 3, 7)$ y $T_2 = (0, 2, 3)$. El pentágono (3,4,5,6,7) puede vigilarse con un guardia diagonal. P_3 es dominado con $\lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor$ guardias diagonales, de tal dominación, al menos un guardia diagonal tiene un punto final en un vértice de $T_2 = (0, 2, 3)$. Entonces tres posibilidades pueden ocurrir; ver figura 3.10:

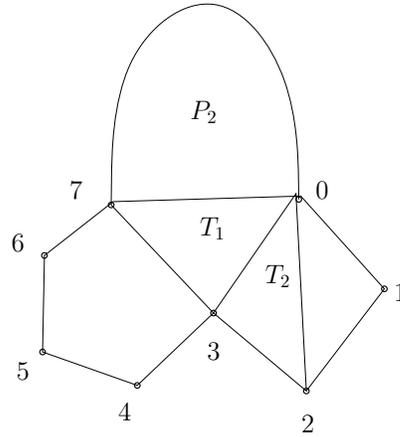


Figura 3.10: T_3 se forma al agregar T_1 y T_2 a P_2 .

- 1) El vértice 0 es incidente a un guardia diagonal, entonces el triángulo $(0, 1, 2)$ está vigilado y no es necesario incluir más guardias.
- 2) El vértice 2 es incidente a un guardia diagonal, análogo al caso anterior.
- 3) El vértice 3 es incidente a un guardia diagonal, el otro vértice incidente tiene que ser 7, de lo contrario caemos en los casos anteriores. Reemplazamos el guardia diagonal $(3,7)$ por la diagonal $(0,7)$. Cada triángulo previamente vigilado continúa siendo vigilado y el triángulo $(0, 1, 2)$ queda vigilado.

Inductivamente P puede vigilarse con $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias diagonales.

3. $k = 8$. P_1 tiene 9 aristas incluyendo su diagonal. P_1 puede vigilarse con 2 guardias diagonales por el lema 3.3.5, uno de ellos incidente al vértice final v de la diagonal que divide a P . P_2 tiene $n - 7$ aristas. Por el lema 3.3.2, el guardia en v permite que P_2 sea vigilado con $f(n - 7 - 1) = f(n - 8)$ guardias diagonales, donde $f(n) = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$. Por la hipótesis inductiva tenemos que $\lfloor \frac{n-8}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 2$ guardias diagonales son suficientes para vigilar P_2 , por lo que junto con los dos colocados en P_1 , tenemos que P puede vigilarse con $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias diagonales.

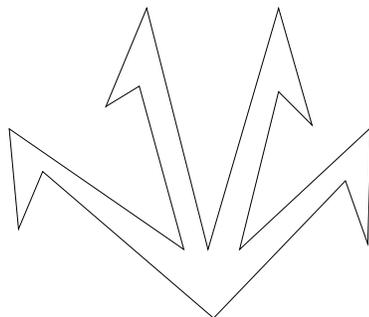


Figura 3.11: polígono que necesita $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias móviles.

Para mostrar que la cota es justa, considere el polígono mostrado en la figura 3.11 con $4m$ vértices, es fácil ver que este polígono necesita m guardias diagonales para vigilarlo. \square

3.4. Galerías de arte tradicionales no rectangulares

Supongamos que tenemos una galería de arte convexa subdividida en n salas también convexas no rectangulares, las salas tienen una puerta que las conectan a otra sala si estas comparten una pared. ¿Cuántos guardias son suficientes para vigilar una galería con estas características? El siguiente teorema debido a *Czyzowicz, Rivera-Campo, Santoro, Urrutia y Zaks* [CRCS⁺94] muestra que $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ guardias son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar las n salas. Note que un guardia puede vigilar a lo más dos salas sin importar su número de vértices, por lo que el teorema se encuentra en función del número de salas.

Teorema 3.4.1 *Cualquier galería de arte convexa T dividida en n salas convexas puede vigilarse con a lo más $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ guardias.*

Para la prueba del teorema 3.4.1, usamos el siguiente resultado, debido a Nishizeki, cuya prueba puede consultarse en [Mis79].

Teorema 3.4.2 *Sea G una gráfica plana 3-conexa tal que el grado de cada vértice es al menos 3. Entonces para todo $n \geq 14$, G tiene un emparejamiento de tamaño al menos $\lceil \frac{n+4}{3} \rceil$. Para $n < 14$, G tiene un emparejamiento de tamaño $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

Prueba de 3.4.1. Sea T^* la gráfica dual de T en la cual los vértices de T^* son las salas de T . Dos vértices son adyacentes si comparten una pared; ver figura 3.12. Dado que las salas de T son todas convexas, los vértices de T^* son al menos de grado tres excepto posiblemente por los vértices en la frontera de T , los cuales tienen grado mayor o igual a dos. Si agregamos un vértice artificial a T^* adyacente a todos los vértices en la frontera, obtenemos una gráfica con todos sus vértices de grado mayor o igual a tres; es fácil ver que esta gráfica es 3-conexa.

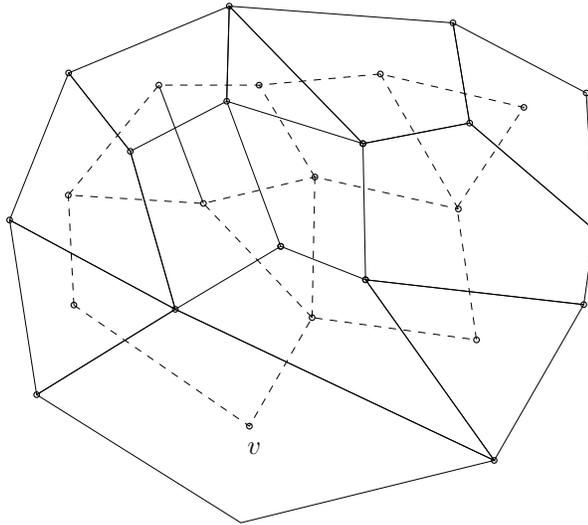


Figura 3.12: Galería de arte subdividida en salas convexas y su gráfica dual.

Aplicando el teorema 3.4.2 de Nishizeki a nuestra gráfica aumentada con $n \geq 14$, obtenemos un emparejamiento M de tamaño al menos $\lceil \frac{n+5}{3} \rceil$. Cada arista de M corresponde a dos salas adyacentes, las cuales pueden vigilarse con un guardia. De esta forma tenemos vigiladas $2\lceil \frac{n+5}{3} \rceil$ salas de T , el resto de las salas pueden vigilarse con un guardia por sala, por lo que T puede

vigilarse con

$$\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil + \left((n+1) - 2 \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil \right) = \left\lceil \frac{2n-2}{3} \right\rceil = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor.$$

Para mostrar que la cota es justa considere la figura 3.13, con $3m + 1$ salas, las cuales requieren de $2m$ guardias para vigilarlas. \square

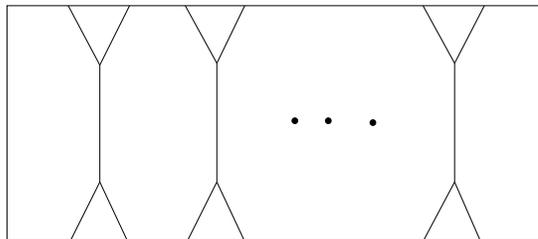


Figura 3.13: Galería de arte subdividida en $3m + 1$ salas convexas las cuales requieren $2m$ guardias.

3.5. Iluminación de polígonos con reflectores

3.5.1. Polígonos convexos

Supongamos que tenemos tres reflectores con ángulos de iluminación $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tal que la suma de estos es π . ¿Podemos posicionar estos tres reflectores restringiendonos a sólo un reflector por vértice de tal manera que iluminen todo el interior de cualquier polígono convexo? El problema anterior fue propuesto y resuelto por *Urrutia* en [Urr97].

Teorema 3.5.1 *Dado un polígono convexo P y tres reflectores f_1, f_2, f_3 con ángulo de iluminación $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ respectivamente, tal que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$, siempre es posible iluminar P posicionando los reflectores en exactamente tres vértices diferentes.*

Prueba. Cuando P tiene sólo tres vértices el resultado es trivialmente cierto. Supongamos que P tiene cuatro o más vértices. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$. Es fácil ver que $\alpha_2 < \frac{\pi}{2}$. Note que existe un vértice v de P cuyo ángulo interno es mayor o igual a $\frac{\pi}{2}$, debido a que P tiene más de tres vértices. Encontremos el triángulo T con ángulos internos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tal que el vértice de T con ángulo α_2 este colocado en el vértice v y los otros vértices de T colocados en dos puntos x, y en la frontera de P . Colocamos el reflector f_2 con ángulo α_2 en v iluminando T .

Dos casos pueden ocurrir:

1. Los puntos x y y son de la misma arista de P , sea e esta arista. Es fácil ver que los ángulos formados por uvx y yvw donde u y w son los vértices adyacentes de e , son de tamaño menor o igual que α_1 y α_3 respectivamente e iluminan todo P .
2. Los puntos x y y pertenecen a diferentes aristas de P . Sean e_x, e_y estas aristas respectivamente. Considere el círculo C que circunscribe a T . Al menos un vértice adyacente a las aristas e_x y e_y no está contenido en el interior de C . Sean u y w esos vértices. Dos casos pueden ocurrir:
 - a) $u = w$. Considere las tangentes a C en x y y , es fácil verificar que el ángulo α de P en u es a lo más $\pi - 2\alpha_2$, el cual es menor o igual que $\alpha_3 = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2)$. Ponemos un reflector de tamaño α en u . De esta forma el polígono queda iluminado.
 - b) $u \neq w$. Colocamos los reflectores f_1 y f_3 en los vértice u y w tal que iluminen la región determinada por uvy y vwx respectivamente. Como u y w no están contenidos en el círculo C , los ángulos de iluminación son a lo más α_1 y α_3 respectivamente. Es fácil ver que P queda totalmente iluminado; ver figura 3.14.

□

Del teorema anterior sabemos que un polígono convexo P siempre puede iluminarse con tres reflectores de tal forma que sus ángulos sumen π , por lo que ahora nos preguntamos si la generalización a este problema es cierta, es

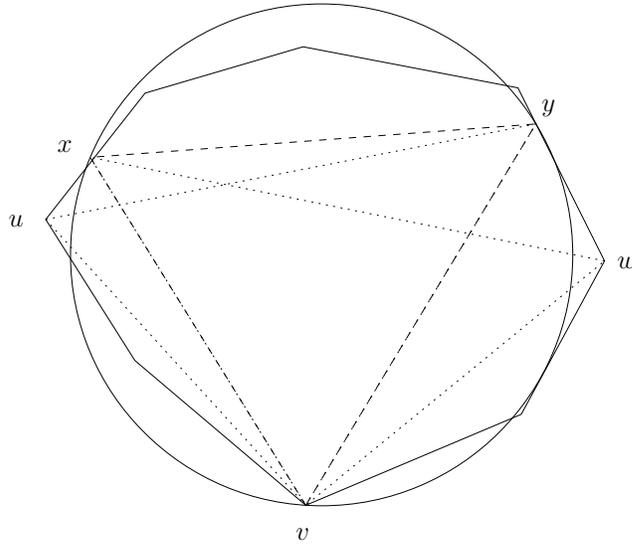


Figura 3.14: Iluminación de polígono convexo, $u \neq w$.

decir, dado un polígono convexo P con n vértices y un conjunto de $k \leq n$ reflectores tal que sus tamaños sumen π . ¿Podemos colocar los reflectores en diferentes vértices y orientarlos de tal forma que iluminen todo P ? *O'Rourke*, *Shermer* y *Stream* [OSS95] probaron que la respuesta a esta pregunta es negativa.

3.5.2. El problema de los dos reflectores

Supongamos ahora que queremos iluminar un polígono convexo P en posición circular general¹ con dos reflectores F_1 y F_2 . ¿Podemos siempre encontrar los ápices y las orientaciones de los reflectores de tal forma que la suma de sus tamaños sea mínima e iluminen todo P ? La respuesta a esta pregunta es afirmativa y además estos pueden encontrarse en $O(n^2)$. Los resultados de esta sección son debidos a *Estivill-Castro* y *Urrutia* [ECU95].

Llamamos a F_1 y F_2 *reflectores opuestos* si las regiones iluminadas por F_1 y F_2 forman un cuadrilátero con todos sus vértices en la frontera de P . Si

¹Con la restricción de que cuatro vértices de P no caigan en la frontera de un mismo círculo.

el interior de las regiones iluminadas por los reflectores F_1 y F_2 son *ajenos*, llamamos a F_1 y F_2 *reflectores ajenos*; ver figura 3.15.

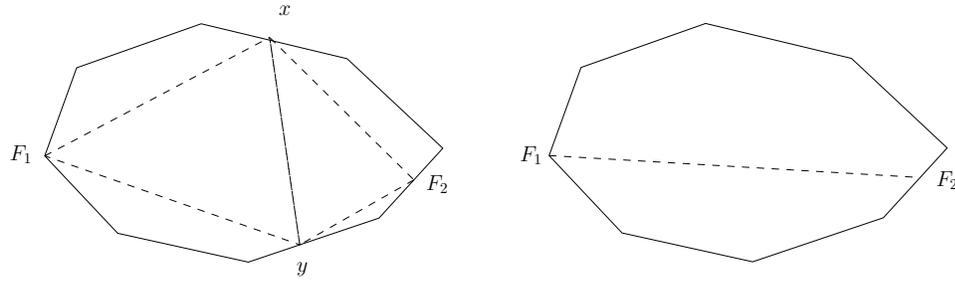


Figura 3.15: Tipos de reflectores.

Dados dos puntos a y b en la frontera del polígono P . Definimos el intervalo (de vértices) (a, b) como el conjunto de vértices de P que encontramos cuando nos movemos de a hacia b sobre la frontera de P en sentido de las manecillas del reloj. Note que $(a, b) \neq (b, a)$. En particular, si a y b no son vértices, entonces $(a, b) \cup (b, a)$ es el conjunto de vértices de P .

Lema 3.5.1 Sean F_1 y F_2 los reflectores de tamaño mínimo que iluminen el interior de un polígono convexo P . Entonces los ápices de F_1 y F_2 se localizan en los vértices de P .

Prueba. Supongamos que F_1 y F_2 son los reflectores de tamaño óptimo. Dos casos pueden ocurrir:

1. F_1 y F_2 son reflectores opuestos con ápices en q y r tal que r no es un vértice de P . Sean x, r, y, q los vértices de un cuadrilátero formado por la intersección de las áreas iluminadas por F_1 y F_2 .

Considere el círculo $C(x, y, q)$ que pasa a través de x, y y un vértice q de P tal que C contiene todos los vértices en el intervalo (x, y) de P . Note que el ángulo xqy es menor que el ángulo xry . Colocamos el ápice del reflector F_3 en p tal que ilumine el triángulo (x, q, y) . El polígono P queda iluminado y la suma de sus tamaños es menor que la de F_1 y F_2 , lo que contradice la suposición; ver figura 3.16.

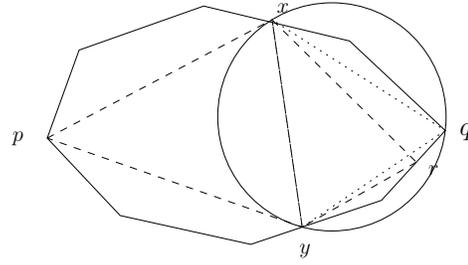


Figura 3.16: Par de reflectores óptimos en los vértices.

2. F_1 y F_2 son reflectores ajenos con ápices en q y r respectivamente tal que r no es un vértice. Note que si deslizamos el ápice de F_2 sobre la frontera de P hacia el vértice más alejado de q el tamaño de F_2 decrece, por lo que el tamaño óptimo lo alcanzamos en los vértices, lo que contradice la suposición. \square

Por el lema 3.5.1 sabemos que los ápices de los reflectores se encuentran en los vértices de P . Supongamos ahora que tenemos dos vértices p y q fijos de P y queremos encontrar los tamaños óptimos de los reflectores opuestos para esos ápices de tal forma que iluminen todo P , el siguiente lema nos muestra cómo encontrarlos.

Lema 3.5.2 *Dados dos vértices p y q de P , podemos encontrar los tamaños óptimos de los reflectores opuestos en tiempo lineal.*

Prueba. Queremos encontrar dos puntos x y y en la frontera de P tal que la suma de los ángulos $\alpha = xpy$ y $\beta = xqy$ sea mínimo. Considere los ángulos $\gamma = pxq$ y $\delta = qyp$. Note que minimizar $\alpha + \beta$ es equivalente a maximizar $\gamma + \delta$, sin embargo, maximizar $\gamma + \delta$ puede realizarse maximizando γ y δ independientemente, por lo que sólo tenemos que encontrar para cada arista e en la cadena de aristas de p a q de P , el punto γ_e en e que maximiza el ángulo $p\gamma q$.

Sea e una arista en la cadena de p a q en P , considere el círculo C que pasa a través de p , q y es tangente a e . El punto tangente γ_e es el ángulo

máximo para esa arista; esto nos toma tiempo constante por arista, por lo tanto buscar el punto óptimo x nos toma tiempo lineal. El mismo procedimiento es usado para encontrar y . Un caso degenerado puede ocurrir cuando e es adyacente a p, q o a ambos. Cuando e es adyacente a p tomamos $x = p$ y cuando e es sólo adyacente a q tomamos $x = q$. \square

Los dos lemas anteriores y el uso de fuerza bruta nos proporcionan un algoritmo del $O(n^3)$ para encontrar los reflectores de tamaño óptimo y sus ápices. Podemos reducir la complejidad de nuestro algoritmo a $O(n^2)$, al introducir un criterio para disminuir el número de parejas de candidatos de vértices de P a ser los ápices de los reflectores óptimos. Considere el conjunto D de todas las diagonales de P uniendo todos los pares de vértices de P con la propiedad de que existe un círculo que pasa a través de los puntos extremos de forma que contenga a todo P . Bajo la posición circular general de P , los elementos de D inducen una triangulación $T(P)$ de P ; ver figura 3.17. Encontrar $T(P)$ y D toma tiempo lineal aplicando técnicas para calcular *diagramas de Voronoi* en polígonos convexos [AGSS89].

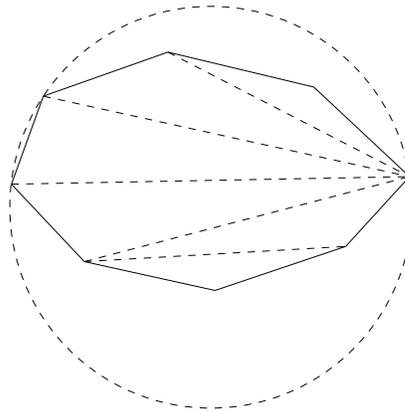


Figura 3.17: Triangulación de *Voronoi* en polígonos convexos.

Un subconjunto de tres vértices $\{u, v, w\}$ de P se denomina una *c-tripleta* si $\{u, v, w\}$ son los vértices de algún triángulo de $T(P)$. Dos *c-tripletas* $\{u, v, w\}$ y $\{u, v, x\}$ son adyacentes si comparten 2 vértices, los otros dos vértices son llamados vértices antipodales.

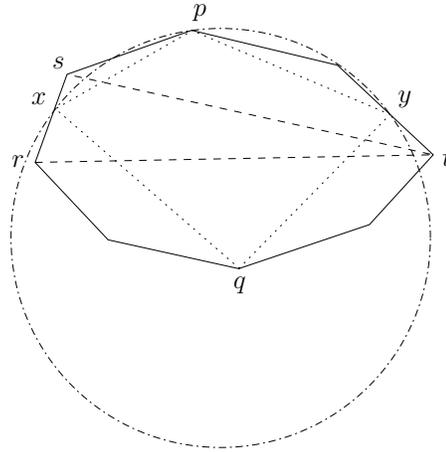


Figura 3.18: No hay c -tripleta que lo separe.

Dados dos vértices p y q de P , decimos que una c -tripleta $\{r, s, t\}$ los separa si p y q son ambos diferentes de r, s y t y además cuando caminamos de p a q sobre la frontera de P en cualquier sentido, encontramos a r, s o t antes de llegar a q .

Lema 3.5.3 *Si dos vértices p y q de un polígono P son ápices del par de reflectores opuestos óptimos, entonces no hay una c -tripleta que los separe.*

Prueba. Supongamos que hay una c -tripleta que separa a p de q y que hay un par de reflectores óptimos opuestos F_1 y F_2 de P con ápices en p y q . Supongamos además que la luz de F_1 y F_2 se intersectan en dos puntos x y y en el interior de dos aristas de P . Considere el círculo C que pasa por x, y y q tal que contenga todos los vértices en el intervalo (x, y) . Similarmente para el círculo a través de y, p y x . Sin embargo, uno de estos círculos está forzado a interceptar el círculo a través de r, s y t al menos cuatro puntos, lo cual es imposible. \square

Corolario 3.5.1 *Sean p y q los ápices del par de reflectores óptimos. Entonces p y q forman un par de vértices antipodales de dos c -tripletras adyacentes, o hay un círculo a través de p y q conteniendo P .*

Aplicando el corolario y los lemas anteriores, tenemos un algoritmo que toma $O(n^2)$ pasos para encontrar el par de reflectores óptimos.

Algoritmo

- *Entrada:* Polígono convexo P .
 - *Salida:* Ápices, orientación y tamaño óptimo de los reflectores.
1. Encontrar $T(P)$ y todas las c -tripletas de P
 2. Encontrar el conjunto S con los pares de vértices antipodas o adyacentes en $T(P)$.
 3. Para cada par de vértices p y q en S , encontrar los reflectores opuestos óptimos.
 4. Para cada par de vértices p y q de P , encontrar en tiempo constante el par de reflectores ajenos óptimos F_1 y F_2 con ápices en p y q que iluminen P y minimizen la suma de los tamaños de F_1 y F_2 .

Teorema 3.5.2 *Encontrar el par de reflectores óptimos en cualquier polígono convexo P con n vértices en posición circular general toma $O(n^2)$.*

Prueba. Verificar que el algoritmo siempre termina correctamente, se sigue directamente del corolario 3.5.1 y los lemas 3.5.1, 3.5.2 y 3.5.3, por lo que sólo hace falta probar que el algoritmo toma $O(n^2)$ pasos.

El paso 1 puede implementarse en tiempo lineal usando [AGSS89], el paso 2 toma $O(n)$. En el paso 3, tenemos $n - 2$ triángulos en $T(P)$, por lo que son $n - 2$ vértices antipodales y $2n - 3$ aristas en $T(P)$. Resolver cada uno de ellos toma tiempo lineal, por lo que el paso 3 toma $O(n^2)$. En el paso 4, necesitamos probar todos los pares de vértices p y q de P . Sin embargo, para cada par de vértices, hay exactamente dos reflectores ajenos, por lo que la complejidad del paso 4 es $O(n^2)$. \square

3.6. Conclusiones

La prueba obtenida por *Chvátal* del teorema [Chv75] es un poco más complicada que la prueba de *Fisk*, sin embargo, esta expone algunas propiedades intrínsecas de las triangulaciones de polígonos, las cuales no son evidentes en la prueba de *Fisk*. *Chvátal* empieza triangulando un polígono P , entonces selecciona un subconjunto de vértices S con a lo más $\frac{n-3}{3}$ elementos de tal forma que cada triángulo en la triangulación tiene un vértice en S .

La mejor cota para el problema de vigilar polígonos con hoyos usando guardias en vértices es $\lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor$ obtenido por *O'Rourke* [O'R87]. No obstante, se cree que esta cota no es justa, por lo que el problema aún continúa abierto. *Shermer* hizo la siguiente conjetura:

Conjetura 3.6.1 *Cualquier polígono con n vértices y h hoyos puede vigilarse con $\lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$ guardias en vértices.*

En 1981, *Toussaint* planteó la pregunta del mínimo número de guardias en aristas requeridos para vigilar cualquier polígono con n vértices y propuso la siguiente conjetura, la cual continúa abierta:

Conjetura 3.6.2 *Excepto por unos cuantos polígonos, $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias en aristas son siempre suficientes para vigilar cualquier polígono con n vértices.*

En 1991, *Shermer* [She91] generalizó el problema de los guardias móviles. El probó que $\lfloor \frac{n}{k+3} \rfloor$ guardias móviles, con rutas compuestas de k aristas o diagonales, son suficientes para vigilar cualquier polígono con n vértices.

Usando $n - 2$ reflectores de tamaño $\frac{\pi}{3}$, podemos iluminar un polígono no convexo P con n vértices de la siguiente forma: Triangulamos el polígono para obtener $n - 2$ triángulos. Para cada triángulo, colocamos un reflector en el vértice con ángulo menor de $\frac{\pi}{3}$. Esto garantiza que P queda iluminado. Con esta regla de iluminación, podemos poner más de un reflector en un mismo vértice. Por lo que podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿Es posible iluminar cualquier polígono al colocar en cada vértice de P únicamente un reflector de tamaño $\alpha < \pi$? *O'Rourke* y *Xu* [OX92] probaron sorprendentemente, que la respuesta a esta pregunta no es siempre afirmativa. La prueba puede revisarse en [ECOUX95].

Vigilando galerías de arte ortogonales

4.1. Vigilando polígonos ortogonales

Las galerías de arte son generalmente construcciones ortogonales, por lo que estas pueden modelarse usando polígonos ortogonales, ¿Cuántos guardias necesitamos para vigilar un polígono ortogonal con n vértices? El teorema de *Chvátal* 3.2.1 de la página 16 puede usarse para contestar esta pregunta, sin embargo, este resultado puede mejorarse aprovechando la estructura particular de este tipo de polígonos. En 1983, *Kahn, Klawa* y *Kleiman* [KKK83] probaron que $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias son siempre suficientes.

Primero probaremos que cualquier polígono ortogonal puede cuadrilateralizarse convexamente, la prueba es debido a *Lubiw* [Lub85].

Definición 4.1.1 *Una cuadrilaterización convexa de un polígono ortogonal P , es una partición de P en un conjunto de cuadriláteros convexos con interiores ajenos, de tal forma que las aristas del cuadrilátero son aristas de P o cuerdas de P .*

Definición 4.1.2 *Un polígono 1-ortogonal P , es un polígono sin hoyos y con una arista distinguida e , llamada la arista sesgada, más aún P cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Tiene un número par de aristas*

2. Las aristas alternan entre horizontal y vertical, excepto posiblemente por e .
3. Todos los ángulos internos son menores o iguales a $\frac{3\pi}{2}$.
4. La nariz de la arista e no contiene vértices de P .

La nariz de la arista e de P es el triángulo interior T con un lado horizontal, otro vertical y e como la hipotenusa; ver figura 4.1. La nariz es cerrada del lado de la hipotenusa, abierta en los otros dos lados y no incluye las tres esquinas. Si e es una arista horizontal o vertical, entonces la nariz es vacía.

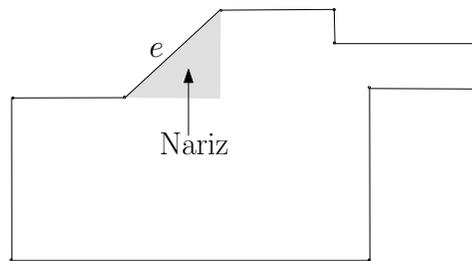


Figura 4.1: Polígono 1-ortogonal y su nariz.

Teorema 4.1.1 *Cualquier polígono 1-ortogonal es convexamente cuadrilateralizable.*

Prueba. Si P tiene cuatro aristas, entonces P tiene que ser convexo y el teorema es parcialmente cierto. Probaremos que si P tiene más de cuatro aristas, entonces P siempre tiene un cuadrilátero Q' , que al eliminarlo divide a P en subpolígonos 1-ortogonales más pequeños. Inductivamente el resultado se obtiene.

Las dos aristas incidentes a e deben ser ambas horizontales o verticales. Asumamos sin pérdida de generalidad que el sesgo de e está entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ por lo que sus aristas incidentes son horizontales. Sea u y v los vértices incidentes a e tal que u es el vértice con menor coordenada en y y sea w el tercer vértice de T .

Procedemos a encontrar los cuatro vértices de Q' . Los dos primeros vértices de Q' son u y v . Sea e' el segmento de línea semi-abierto uniendo v a w , abierto en w . Deslizamos e' a la derecha hasta pegar con un vértice de P . Si e' alcanza una arista completa de P , entonces los vértices incidentes a esta arista, junto con u y v son los vértices de Q' ; ver figura 4.2. Supongamos que e' pega en un único vértice x de P ; x es el tercer vértice de Q' .

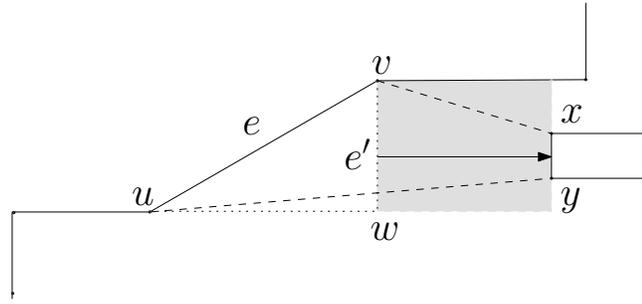


Figura 4.2: e' alcanza toda una arista.

Considere ahora el segmento de línea semi-abierto f horizontal uniendo u a la línea vertical e' deslizada; f no contiene a u , pero si al vértice de la derecha. Deslizamos f hacia abajo hasta alcanzar un vértice (o más) de P o una arista horizontal g de P conteniendo todo f . En el primer caso, sea y el punto más a la derecha que alcanza f . El cuarto vértice de Q' es y , el caso se ilustra en la figura 4.3.

El único caso que hace falta revisar es cuando f alcanza una arista g de P . Esto sólo puede ocurrir si x es incidente a v . Considere el segmento de línea vertical semi-abierta h' uniendo x a g , cerrada en la parte inferior y abierta en la parte superior. Deslizamos h' a la derecha hasta alcanzar un vértice de P . Si alcanzamos más de un vértice, escogemos a y como el menor de estos puntos para ser el cuarto vértice de Q' ; ver figura 4.4.

Q es convexo y $Q - P$ divide al polígono en a lo más tres polígonos 1-ortogonales. \square

Lema 4.1.1 *Cualquier polígono ortogonal es convexamente cuadrilaterizable.*

formado por los vértices de Q . El conjunto de aristas de H esta formado por las arista de Q y además dos diagonales a cada cuadrilátero $q \in Q$ conectando sus vértices opuestos; ver figura 4.5.

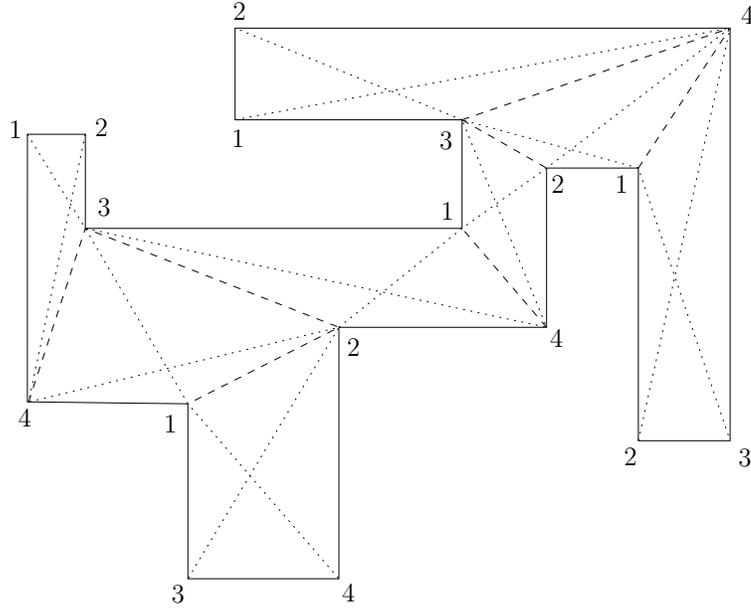


Figura 4.5: Polígono ortogonal cuadrilaterizado, su gráfica H y 4 coloreado.

Asignamos una 4-coloración a los vértices de H , esto divide al conjunto de vértices de P en cuatro clases cromáticas C_1, C_2, C_3, C_4 . La cardinalidad de una de estas clases es a lo más $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$. Note que cada cuadrilátero utiliza los 4 colores, esto asegura que la gráfica queda totalmente vigilada al poner en cada elemento de una de las clase crómicas un guardia.

Por probar que H es 4-coloreable, consideremos la gráfica dual Q^* de Q . Note que al eliminar cualquier cuerda de Q , dividimos la gráfica dual Q^* en dos, por lo que Q^* es un árbol. Al eliminar de Q un cuadrilátero correspondiente a una hoja de Q^* produce una subgráfica H' de H , la cual inductivamente se asume que es cuatro coloreable. Es fácil ver que esta 4-coloración puede extenderse a una 4-coloración de H .

Para mostrar que $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias son ocasionalmente necesarios, considere el polígono de peine ortogonal P_m con $n = 4m$ vértices presentado en la

figura 4.6. Para vigilar P_m necesitamos m guardias. □

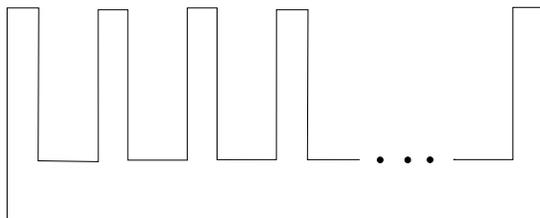


Figura 4.6: Polígono ortogonal de peine con $4m$ vértices que requiere m guardias.

Encontrar la cuadrilaterización de un polígono sin hoyos puede hacerse en tiempo lineal usando como base el algoritmo de triangulación propuesto por Chazelle, sin embargo, cuadrilaterizar un polígono con hoyos, toma $O(n \log n)$. *Lubiw* [Lub85] probó que esta cota es justa al reducir el problema de ordenar n números enteros, al problema de descomponer una región ortogonal con $4n + 4$ vértices en cuadriláteros convexos.

Una prueba diferente al teorema 4.1.2 fue obtenida por *Estivill-Castro y Urrutia* [ECU94]. Esta prueba se presenta a continuación.

Un *corte* horizontal o vertical de un polígono ortogonal P , es la extensión interna de una arista horizontal o vertical de P en un vértice cóncavo hasta dividir P . Un corte es llamado *impar* si este divide a P en dos subpolígonos no vacíos P_1 y P_2 con n_1 y n_2 vértices respectivamente, de tal forma que $n_1 + n_2 = n + 2$ y n_1 o n_2 es igual a $4k + 2$ para alguna $k \geq 1$.

Si cualquier polígono ortogonal tiene un corte impar, entonces inductivamente el polígono puede vigilarse con a lo más $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias. Esto es, si $n_1 + n_2 \leq n + 2$, y n_1 o n_2 es igual a $4k + 2$, entonces $\lfloor \frac{n_1}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n_2}{4} \rfloor \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$.

Clasificamos los vértices cóncavos de un polígono ortogonal P en 4 clases de acuerdo al tipo de aristas incidentes, es decir, *superior-izquierdo*, *superior-derecho*, *inferior-izquierdo* e *inferior-derecho*.

Prueba del teorema 4.1.2. Dividimos el conjunto de vértices cóncavos en dos conjuntos, $S_1 = \text{inferior-derecho} \cup \text{superior-izquierdo}$, y $S_2 = \text{inferior-izquierdo} \cup \text{superior-derecho}$. Como P tiene $\frac{n-4}{2}$ vértices cóncavos, entonces

la cardinalidad de alguno de ellos es a lo más $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$. Sin pérdida de generalidad asumamos que $S_2 \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$. Colocamos un guardia en cada elemento de S_2 , si el polígono queda completamente vigilado entonces no hay más que probar.

Supongamos que existe un punto p no vigilado por S_1 . Considere l el segmento de línea horizontal más grande contenido en P de tal forma que l pasa a través de p . Sea e y f las aristas de P conteniendo a los puntos finales de l . Considere el rectángulo R más grande conteniendo a l y contenido en P . Sea e' y f' las aristas de P que intersectan las aristas superior e inferior de R respectivamente. Como p no es visible desde algún punto en S_1 , e y e' se encuentran en el vértice superior-izquierdo de R . Similarmente f y f' se encuentran en el vértice inferior-derecho de R .

Sea q y q' los vértices superior-derecho e inferior-izquierdo de R respectivamente. Si q y q' son vértices de P , entonces $P = R$ y no hay nada más que probar. Supongamos que esto no ocurre, Dos casos pueden ocurrir:

1. q y q' no son vértices de P . En este caso podemos hacer dos cortes horizontales que generan un rectángulo contenido en R y conteniendo l , uno de estos dos cortes horizontales tiene que ser un corte impar de P ; ver figura 4.7.

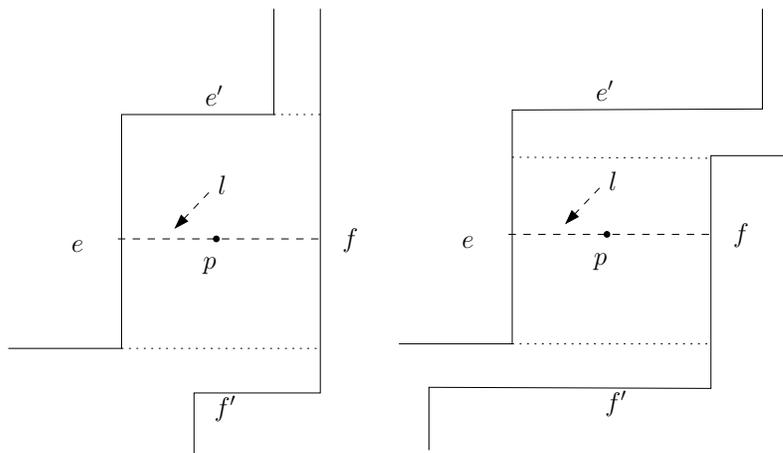


Figura 4.7: Caso 1.

2. Únicamente q es vértice de P . Dos casos puede ocurrir:

- a) e y f' están contenidos en una arista izquierda e inferior de R respectivamente. Extendemos la arista horizontal de P incidente al vértice inferior de e y la arista vertical incidente al punto final izquierdo de f' hasta alcanzarse, esto divide al polígono P en dos subpolígonos P_1 y P_2 con $n - 4$ y 6 vértices respectivamente, P_1 pueden vigilarse inductivamente con $\lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor$ y un guardia es suficiente para vigilar P_2 ; ver figura 4.8.

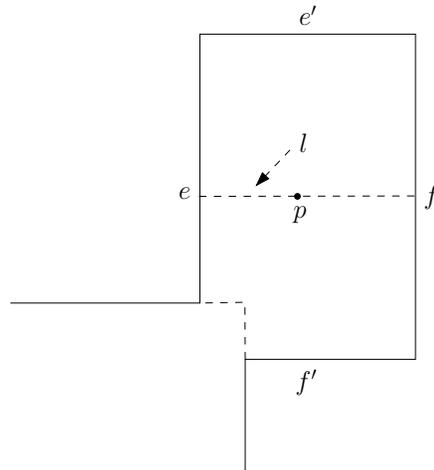


Figura 4.8: Caso 2.a.

- b) f' contiene propiamente la arista inferior de R . Sea w el vértice inferior de e . Considere el segmento de línea vertical j uniendo w a un punto en la base de R . Deslizamos j hasta alcanzar una arista vertical de P o esta alcance el vértice izquierdo incidente a f' o el vértice izquierdo de la arista horizontal g incidente a w . Cuando j alcanza el vértice izquierdo incidente a f' , este genera un corte vertical impar de P ; ver figura 4.9 izquierda, el cual divide el polígono en dos subpolígonos P_1 y P_2 con $n - 4$ y 6 vértices respectivamente. El caso en que alcanzamos el vértice izquierdo de g es análogo.

Supongamos entonces que alcanzamos una arista vertical de P . Sea r el vértice con mayor coordenada y ; ver figura 4.9 derecha.

Entonces podemos generar dos cortes de P en r , un corte horizontal que divide al polígono P en dos subpolígonos P_1 y P_2 con m y $n - m + 2$ vértices respectivamente y el corte vertical que también divide al polígono P en dos subpolígonos P'_1 y P'_2 con $m + 2$ y $n - m$ vértices respectivamente. Uno de los cortes de P en r tiene que ser impar.

□

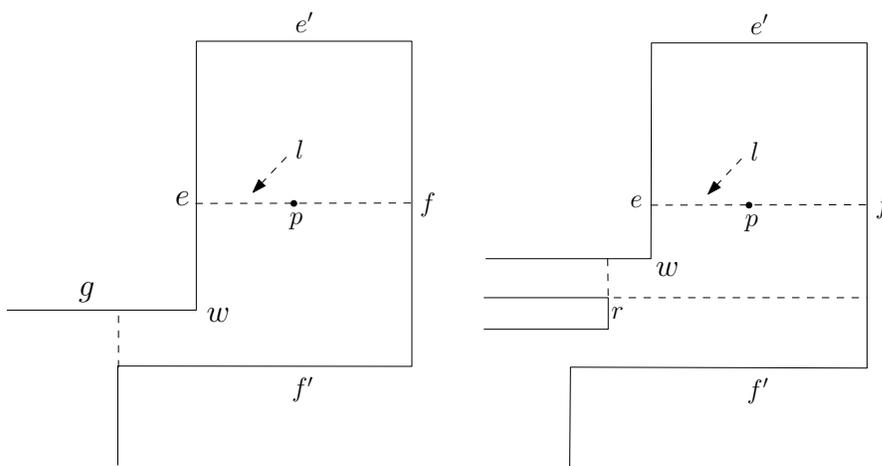


Figura 4.9: Caso 2.b.

4.2. Vigilando galerías de arte ortogonales con hoyos

En el capítulo anterior vimos que cuando un polígono contiene hoyos, el número de guardias necesarios es mayor que en ausencia de estos. *Hoffman* [Hof90] probó sorprendentemente que si permitimos colocar guardias en puntos, el número de guardias necesarios para vigilar cualquier polígono ortogonal con hoyos es igual que vigilar cualquier polígono ortogonal sin hoyos,

es decir, $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias en puntos son siempre suficientes para vigilar cualquier polígono ortogonal con $h \geq 0$ hoyos y n vértices. Sin embargo, si sólo permitimos que los guardias sean colocados en vértices, entonces el número de guardias necesario para vigilar un polígono ortogonal con hoyos es mayor. *O'Rourke* [O'R87] obtuvo la cota $\frac{n+2h}{4}$ al convertir un polígono ortogonal con h hoyos y n vértices al agregarle h aristas ($2h$ vértices), en un polígono ortogonal sin hoyos con $n + 2h$ vértices y al polígono resultante aplicarle el teorema 4.1.2.

Shermer [O'R87] conjeturó que $\frac{n+h}{4}$ guardias en vértices son siempre suficientes para vigilar cualquier polígono ortogonal con n vértices y h hoyos; ver figura 4.10. *Hoffman* y *Kriegel* [HK96] probaron que cuando h es grande, $\frac{n}{3}$ vértices son siempre suficientes.

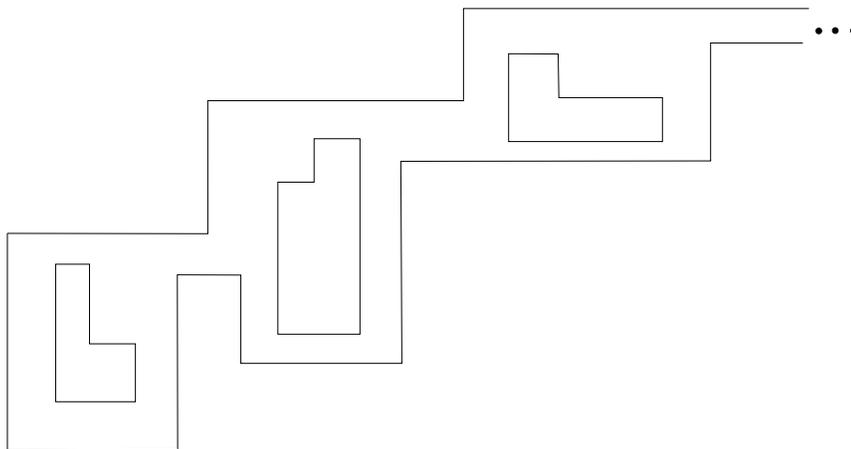


Figura 4.10: Familia de polígonos con $4 + 10h$ vértices y h hoyos que requiere $\lfloor \frac{n+h}{4} \rfloor$ guardias en vértices.

Teorema 4.2.1 (*Hoffman* y *Kriegel* [HK96]) *Cualquier polígono ortogonal P con n vértices y h hoyos puede vigilarse con a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias en vértices.*

Para la prueba es necesario el siguiente teorema debido a *Hoffman* y *Kriegel* [HK96].

Teorema 4.2.2 Sea G una gráfica plana, 2-conexa y bipartita. Entonces existe una triangulación de G tal que la gráfica triangulada es 3-coloreable.

La prueba de este teorema se presenta en el capítulo 5, página 91.

Prueba del teorema 4.2.1. Cuadrilaterizamos convexamente el polígono P y sus h hoyos, esto es posible de acuerdo al teorema 4.1.1, la gráfica G asociada a la cuadrilaterización de P es plana, 2-conexa y bipartita. Aplicamos a G el teorema 4.2.2, asignamos una 3-coloración a los vértices y escogemos la clase cromática de menor tamaño, la cual es de tamaño menor o igual que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$; ver figura 4.11. El polígono y sus hoyos quedan vigilados debido a que los vértices de cada triángulo reciben diferentes colores. \square

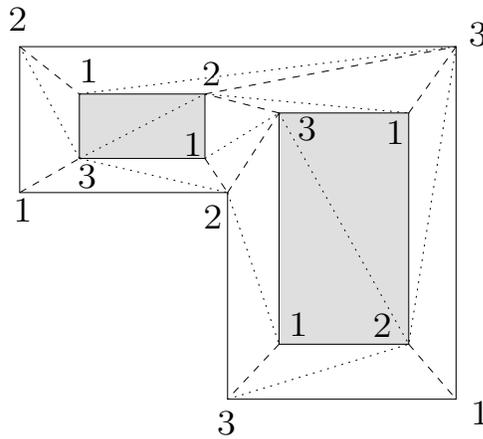


Figura 4.11: Polígono con 2 hoyos, triangulado y 3-coloreado.

4.3. Vigilando galerías de arte ortogonales con guardias móviles

Si permitimos que los guardias se muevan por el interior de la galería de arte ortogonal con n vértices, el número de guardias necesarios para vigilarla decrece dependiendo de la distancia del distrito que los guardias tienen

permitido vigilar. Un distrito de distancia k puede representarse por un árbol de tamaño k embebido en el interior del polígono. Cuando $k = 0$ los guardias se encuentran en los vértices o en puntos, y por el teorema 4.1.2, $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias son siempre suficientes. El siguiente resultado debido a *Gröry, Hoffmann, Kriegel y Shermer* [GHKS96] nos da una generalización del número de guardias móviles necesarios para vigilar cualquier polígono ortogonal.

La descomposición rectangular de un polígono ortogonal P , es una partición de P en rectángulos al extender un cordón horizontal en cada vértice cóncavo por el interior del polígono. Si el polígono se encuentra en posición general, entonces el número de rectángulos en esta descomposición es $\frac{n-2}{2}$, de lo contrario el número de rectángulos es menor. Definimos una *R-gráfica* de P , denotada por R , como una gráfica plana donde cada vértice corresponde a un rectángulo de la descomposición rectangular de P y dos vértices u y v son adyacentes si hay una cuerda que separe a sus rectángulos correspondientes. Para cualquier par de rectángulos vecinos en una descomposición rectangular de P hay una arista vertical del polígono la cual es vertical a ambos rectángulos, esto los llamaremos rectángulos vecinos derechos o izquierdos respectivamente. Definimos vecino superior e inferior de la manera natural. En la figura 4.12, a es vecino superior de b .

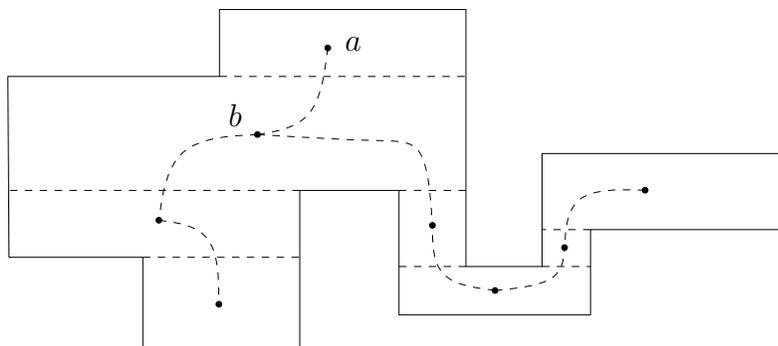


Figura 4.12: Descomposición ortogonal y su gráfica R .

Para esta prueba, si $n < k + 4$, entonces $\lfloor \frac{n}{k+4} \rfloor$ toma el valor de uno en vez de cero.

Teorema 4.3.1 $\lfloor \frac{n}{k+4} \rfloor$ guardias móviles con un distrito de tamaño k son suficientes para vigilar cualquier polígono ortogonal con n vértices.

Para probar el teorema 4.3.1, es suficiente probar el teorema 4.3.2 para un polígono P con $n \geq 2k + 8$ vértices y el lema 4.3.1.

Teorema 4.3.2 Cualquier polígono en posición general puede dividirse en $\lfloor \frac{n}{k+4} \rfloor$ polígonos ortogonales con a lo más $2k + 6$ vértices cada uno.

Lema 4.3.1 Cualquier polígono ortogonal P de a lo más $2k + 6$ vértices puede vigilarse por un guardia móvil con distrito de tamaño k .

Prueba. Como P tiene a lo más $2k + 6$ vértices, podemos hacer una partición rectangular con a lo más $\lfloor \frac{2k+6-2}{2} \rfloor = k + 2$ rectángulos. Considere la R-gráfica R de P , R es un árbol de tamaño $k + 2$. Para vigilar todo P basta cubrir R , el cual puede cubrirse con un subárbol de R de tamaño k . \square

El término corte denota ya sea una cuerda de un rectángulo de una descomposición rectangular horizontal o vertical de P , o la unión de dos segmentos de línea (uno vertical y otro horizontal), uniendo dos vértices cóncavos en forma de L ; ver figura 4.13.

Probaremos el teorema 4.3.2 inductivamente usando cortes para dividir el polígono P . Un corte divide a P en dos subpolígonos ortogonales P_1 y P_2 con n_1 y n_2 vértices respectivamente, tal que $n_1 + n_2 = n + 2$, el cual es llamado (n_1, n_2) -corte. Un corte es bueno si

$$\left\lfloor \frac{n_1}{k+4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2}{k+4} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n}{k+4} \right\rfloor,$$

es decir, si el argumento inductivo puede aplicarse.

Lema 4.3.2 Sea n, n_1, n_2 números pares con $n \geq 2k + 8$ y $n_1 + n_2 = n + 2$. Un (n_1, n_2) -corte de un polígono P es bueno si una de las siguientes condiciones es cierta.

1. $n_1 \leq 2k + 6$ y $n_2 \leq 2k + 6$
2. $n_1 \geq k + 4$ y $n_2 \geq k + 4$ y $n_1 \not\equiv 0 \pmod{k + 4}$

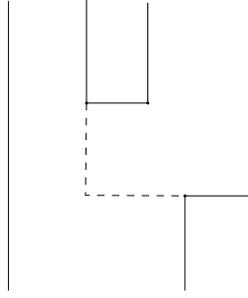


Figura 4.13: Corte en forma de L .

3. $n_1 \geq k + 4$ y $n_2 \geq k + 4$ y $n_2 \not\equiv 0 \text{ ó } 1 \pmod{k + 4}$
4. $n_1 \equiv n_2 \equiv 1 \pmod{k + 4}$

Prueba. Caso 1:

$$\left\lfloor \frac{n_1}{k+4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2}{k+4} \right\rfloor = 1 + 1 = \left\lfloor \frac{2k+8}{k+4} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n}{k+4} \right\rfloor$$

Casos 2, 3 y 4: Sea α_i el residuo de $n_i \pmod{k+4}$. Entonces en todos los casos tenemos $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 2$. Más aún, $n_1 \geq k+4$ y $n_2 \geq k+4$ por hipótesis en 2 y 3. En el caso 4 porque de otra forma n_1 o n_2 respectivamente sería 1. De esta forma tenemos

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n_1}{k+4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2}{k+4} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{n_1 - \alpha_1}{k+4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2 - \alpha_2}{k+4} \right\rfloor \\ &\leq \left\lfloor \frac{n_1 + n_2 - \alpha_1 - \alpha_2}{k+4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n + 2 - \alpha_1 - \alpha_2}{k+4} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n}{k+4} \right\rfloor \end{aligned}$$

□

Del punto 2 y 3 del lema 4.3.2 tenemos:

Corolario 4.3.1 *Sea n, n_1, n_2 números pares con $n_1 + n_2 = n + 2$, $n_1 \geq k + 4$ y $n_2 - 2 \geq k + 4$. Si un polígono con n vértices tiene un (n_1, n_2) -corte y $(n_1 + 2, n_2 - 2)$ -corte, entonces al menos uno de estos cortes es bueno.*

Usualmente vamos a aplicar este corolario en una situación donde la región entre los cortes es un rectángulo. A este par de cortes los llamaremos cortes *consecutivos*.

Prueba del teorema 4.3.2. Como P es un polígono sin hoyos, la gráfica R de P es un árbol con $r = \frac{n-2}{2}$ vértices. Existe en R un vértice v tal que después de eliminarlo, el tamaño de cualquier componente conexo es a lo más $\frac{r}{2} = \frac{n-2}{4}$. Geométricamente dividimos a P en $\deg(v) + 1$ partes, conformado por el rectángulo v y los polígonos $P_1, P_2, \dots, P_{\deg(v)}$ con $n_1, n_2, \dots, n_{\deg(v)}$ vértices respectivamente. El número de vértices de P_i es a lo más

$$2\frac{r}{2} + 2 = \frac{n+2}{2}.$$

Como cada corte crea dos nuevos vértices, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{\deg(v)} n_i = n + 2\deg(v) - 4, \quad (4.1)$$

transformando esta igualdad:

$$-n_i = -n + \sum_{j \in \{1, 2, \dots, \deg(v)\} \setminus i} n_j + 4 - 2\deg(v),$$

y combinandola con $2n_i \leq n + 2$ obtenemos:

$$n_i \leq \sum_{j \in \{1, 2, \dots, \deg(v)\} \setminus i} n_j + 6 - 2\deg(v), \quad (4.2)$$

para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, \deg(v)\}$. De acuerdo al grado de v , tres casos pueden ocurrir, v tiene 2, 3 o 4 vecinos.

1. $\deg(R) = 2$. Asumamos sin pérdida de generalidad que $n_1 \leq n_2$. Considere los dos cortes, $(n_1 + 2, n_2)$ -corte y $(n_1, n_2 + 2)$ -corte. Si $n_1 \geq k + 4$, entonces al menos uno de los cortes es bueno por el corolario 4.3.1. De otra forma, si $n_1 < k + 4$, entonces $n_2 \leq n_1 + 6 - 2 \cdot 2 < k + 4 + 2 < 2k + 6$ por la desigualdad 4.2. Así, el $(n_1 + 2, n_2)$ -corte es bueno por el lema 4.3.2 (1).
2. $\deg(R) = 3$. Asumamos sin pérdida de generalidad que P_1, P_2 y P_3 encuentran a R en la vecindad superior izquierda, inferior izquierda y superior derecha respectivamente. $n_1 + n_2 + n_3 = n + 2$ por la igualdad

4.1 y $n_i \leq n_j + n_k$ para cualquier permutación (i, j, k) por la desigualdad 4.2. Tenemos los siguientes cortes (1) $(n_1, n_2 + n_3)$ -corte, (2) $(n_2, n_1 + n_3)$ -corte, (3) $(n_3, n_1 + n_2)$ -corte y (4) $(n_3 + 2, n_1 + n_2 - 2)$ -corte el cual es un corte en forma de L, este empieza verticalmente en el vértice cóncavo izquierdo inferior de P_1 baja hasta la arista horizontal de R o su extensión; ver figura 4.13. Varios casos pueden ocurrir.

- a) $n_3 \geq k + 4$. Si $n_1 + n_2 - 2 \geq k + 4$, entonces el tercer o el cuarto corte es bueno por el corolario 4.3.1. De otra forma si $n_1 + n_2 - 2 < k + 4$, entonces tenemos que $n_3 \leq n_1 + n_2 < k + 6 \leq 2k + 6$ y de aquí el cuarto corte es bueno por el lema 4.3.2 (1).
- b) $n_3 < k + 4$, una de la siguientes condiciones ocurren.
 - 1) Si $n_1 < k + 4$, entonces $n_1 + n_3 \leq 2k + 6$ y $n_2 \leq n_1 + n_3 \leq 2k + 6$. Por lo que el segundo corte es bueno por el lema 4.3.2 (1).
 - 2) Si $n_2 < k + 4$, entonces por analogía el primer corte es bueno.
 - 3) Si $n_1 \geq k + 4$ y $n_2 \geq k + 4$ y $n_1 \equiv 0 \pmod{k + 4}$, entonces $(n_1 + n_3) \not\equiv 0$ o $1 \pmod{k + 4}$ y el segundo corte es bueno por el lema 4.3.2 (3).
 - 4) Si $n_1 \geq k + 4$ y $n_2 \geq k + 4$ y $n_2 \equiv 0 \pmod{k + 4}$, entonces $(n_2 + n_3) \not\equiv 0$ o $1 \pmod{k + 4}$ y el primer corte es bueno por el lema 4.3.2 (3).
 - 5) Si $n_1 \geq k + 4$ y $n_2 \geq k + 4$ y $n_1 \not\equiv 0$ o $1 \pmod{k + 4}$, entonces el primer corte es bueno por el lema 4.3.2 (2).
 - 6) Si $n_1 \geq k + 4$ y $n_2 \geq k + 4$ y $n_2 \not\equiv 0$ o $1 \pmod{k + 4}$, entonces el segundo corte es bueno por el lema 4.3.2 (2).
 - 7) Si $n_1 \geq k + 4$ y $n_2 \geq k + 4$ y $n_1 \equiv n_2 \equiv 1 \pmod{k + 4}$ y $n_3 < k + 3$, entonces el primer corte es bueno por el lema 4.3.2 (3).
- c) Supongamos que ningún caso anterior ocurre, esto significa que $n_1 \equiv n_2 \equiv 1 \pmod{k + 4}$ y $n_3 = k + 3$.

En cada posible configuración encontramos ya sea un corte con un subpolígono resultante de tamaño $k + 7$ o un par de cortes consecutivos.

Llamamos a dos vértices cóncavos *opuestos* si estos son visibles entre ellos y los rayos emanandos de las aristas incidentes a ellos representan los cuatro ejes cardinales.

Note que en caso de dos vértices opuestos cóncavos, así como el caso de dos vértices cóncavos ambos vecinos visibles a un tercer vértice cóncavo, encontramos cortes consecutivos.

- 1) El vértice c esta a la derecha del vértice b . Esta es la configuración mostrada en la figura 4.14. Considere el vértice cóncavo d más arriba por debajo de la línea horizontal que pasa por c tal que d es visible por a y b . Si d existe, entonces por la observación anterior tenemos cortes consecutivos. Note que en todos estos cortes, el subpolígono conteniendo P_3 tiene tamaño $\geq k + 5$ y las partes restantes tienen también tamaño $\geq k + 5$, dado que cada uno contiene a P_1 completamente. Basado en el corolario 4.3.1 al menos uno de los cortes es bueno.

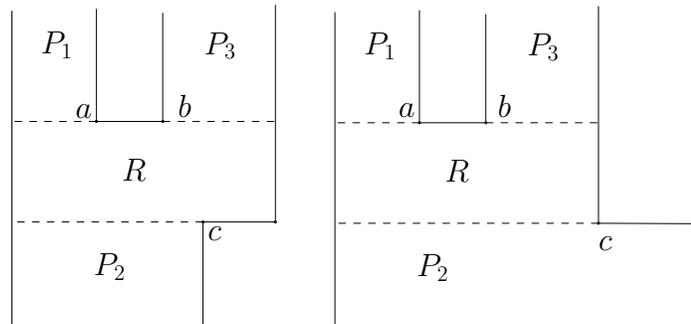


Figura 4.14: Caso 2.c.1.

- 2) El vértice c esta a la izquierda del vértice a ; ver figura 4.15. Si c ve al vecino superior de a , entonces conectamos c con este vecino (aun si es convexo) por un corte en forma de L y obtenemos un polígono conteniendo p_3 de tamaño $k + 7$. De otra forma debe de existir un vértice cóncavo en P_1 el cual es opuesto a c .

- 3) El vértice c esta a la derecha del vértice a y a la izquierda del vértice b . Análogo al caso anterior intercambiando los roles de a y c .

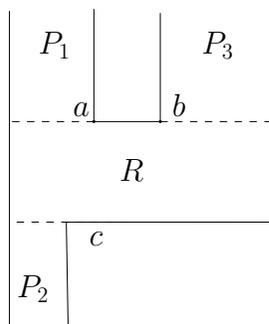


Figura 4.15: Caso 2.c.2.

3. $\deg(R) = 4$. Asumamos sin pérdida de generalidad que P_1 y P_2 se encuentran a la izquierda y P_3 y P_4 a la derecha de R . Como

$$\sum_{i=1}^4 n_i = n + 4,$$

al menos una de las subsumas $n_1 + n_2$ o $n_3 + n_4$ es menor o igual que $\frac{n+4}{2}$. Asumamos que esto ocurre para la suma $n_3 + n_4$. Entonces hay un corte en forma de L tal que el polígono P'_3 del lado derecho del corte tiene $n_3 + n_4 - 2$ vértice y consiste de P_3, P_4 y una porción de R . El análisis del caso 2 puede aplicarse, con P'_3 tomando el lugar de P_3 . \square

4.4. Problema de la prisión

Supongamos que queremos vigilar una prisión. Para evitar asaltos o fugas es necesario vigilar su exterior y así como el interior. Este problema es conocido como el problema de la prisión. ¿Cuántos guardias son suficientes para vigilar simultáneamente el interior y exterior de un polígono ortogonal

simple? El siguiente teorema debido a *Hoffman Kriegel* [HK96] nos da el número de guardias suficientes para el problema de la prisión en polígonos ortogonales.

Teorema 4.4.1 $\lfloor \frac{5n}{12} + 2 \rfloor$ guardias en los vértices son suficientes para proteger el interior y exterior de un polígono ortogonal P con n vértices.

Prueba. Asumamos que el polígono P está en posición general. Construimos el cierre ortoconvexo $C(P)$ de P , es decir, el conjunto de puntos más pequeño conteniendo P tal que la intersección de $C(P)$ con cualquier segmento de línea horizontal o vertical de P sea convexo; ver figura 4.16. La frontera de $C(P)$ divide la región exterior de P en la región exterior de $C(P)$ y la región conectando componentes de $C(P) \setminus P$ los cuales son diferentes de la región interior de P , estas regiones son llamadas *bolsas*. Las bolsas pueden cuadrilaterizarse debido a que son polígonos ortogonales. La construcción del cierre ortoconvexo requiere vértices adicionales, sin embargo, podemos desplazar los vértices creados a una esquina del polígono vecino en la frontera de $C(P)$ evitando destruir la cuadrilaterización de las bolsas, de tal manera que el polígono resultante $C^*(P)$ es también ortoconvexo.

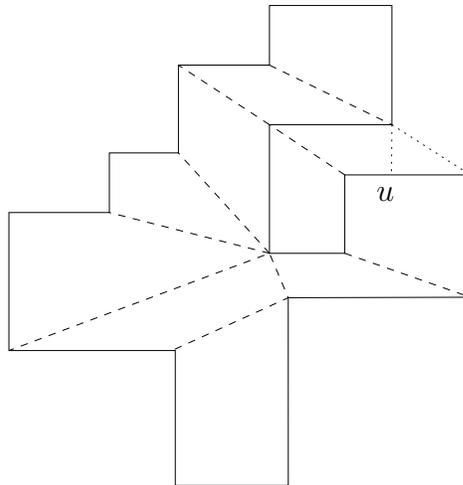


Figura 4.16: Polígono ortogonal P y su cierre ortoconvexo $C(P)$.

Claramente $C^*(P)$ es acotado por cuatro aristas externas las cuales son conectadas por escaleras monótonas. Así el exterior de $C^*(P)$ puede cubrirse con cuatro medios planos definidos por las aristas externas y los conos definidos por todos los vértices cóncavos en la escalera. Tales conos son exactamente el conjunto de puntos en el exterior visible por algún vértice.

Sea G la siguiente gráfica plana: El conjunto de vértices de G contiene todos los vértices de P . Las aristas consisten de las aristas de P , las cuerdas de los cuadriláteros y las aristas conteniendo pares de vértices consecutivos de las esquinas convexas en la frontera de las escaleras en $C^*(P)$; ver figura 4.17.

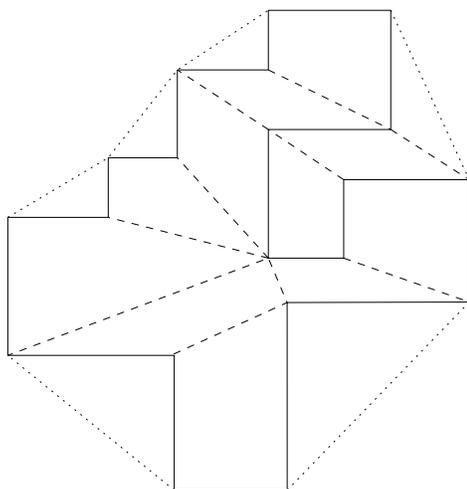


Figura 4.17: Gráfica plana asociada al cierre ortoconvexo $C(P)$ de P .

Agregamos ocho nuevos vértices para obtener una copia de cada arista extrema como indica la figura 4.18. Finalmente, agregamos un vértice por cada vértice convexo (sin contar los vértices extremos) en las escaleras monótonas de la frontera de $C^*(P)$. Note que agregamos a lo más un vértice por cada dos vértices cóncavos. Esto nos permite reemplazar cada triángulo en la frontera de G , por un cuadrilátero en la nueva gráfica G^* . El número de vértices adicionales insertados es acotado por $\lfloor \frac{n-12}{4} + 8 \rfloor$. Por lo que el número total de vértices de G^* es a lo más $\lfloor \frac{5n}{4} + 5 \rfloor$.

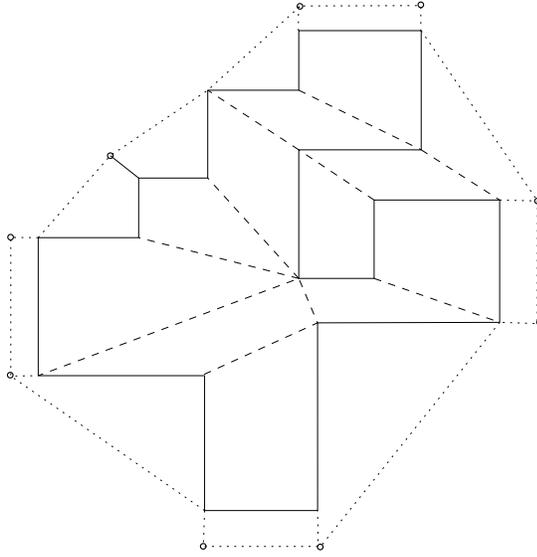


Figura 4.18: Gráfica $C^*(P)$ de P .

Aplicando el teorema 4.2.2, asignamos una 3-coloración a los vértice de G^* y escogemos la clase cromática de menor cardinalidad, esta tiene tamaño a lo más $\lfloor \frac{5n}{12} + 2 \rfloor$. Los guardias pueden colocarse en vértices los cuales no son vértices del polígono original P , es decir, se pueden escoger vértices nuevos para posicionar guardias, sin embargo, esos guardias pueden desplazarse al correspondiente vértice del polígono original. \square

Teorema 4.4.2 $\lfloor \frac{5n-4h}{12} + 2 \rfloor$ guardias en los vértices son suficientes para proteger el interior y exterior de un polígono ortogonal P con n vértices y h hoyos.

Prueba. Cuadrilaterizamos los hoyos P_1, P_2, \dots, P_h y el interior de P . Ahora podemos aplicar el resultado anterior.

P tiene a lo más $n-4h$ vértices y de aquí, el número de vértices adicionales por la construcción de G^* es a lo más $\lfloor \frac{n-4h-12}{4} \rfloor$. De esta forma G^* tiene a lo más $\lfloor \frac{5n-4h}{4} + 5 \rfloor$ vértices y una de la clases cromáticas tiene cardinalidad a lo más $\lfloor \frac{5n-4h}{12} + 2 \rfloor$ \square .

Teorema 4.4.3 $\lfloor \frac{n+4}{3} \rfloor$ guardias en puntos son suficientes para proteger el interior y exterior de un polígono ortogonal P con n vértices y h hoyos.

Prueba. Sea R el polígono ortogonal que engloba a P . Considere a R junto con P como un polígono P' el cual tiene a P como un hoyo. Cuadrilateralizamos P' , P y los hoyos de P , la gráfica resultante tiene $n + 4$ vértices, aplicamos el teorema 4.2.2 y seleccionamos la clase cromática de menor cardinalidad. \square

4.5. Vigilando galerías de arte tradicionales con habitaciones

En el teorema de galería de arte clásico, una galería de arte es un polígono simple en el plano. Desde un punto de vista más realista, una galería de arte es una construcción rectangular subdividida en salas rectangulares. Asumamos que cualquier par de salas adyacentes tiene una puerta conectándolas.

¿Cuántos guardias necesitamos en una galería de arte tradicional para vigilar todas las habitaciones? Note que si ponemos un guardia en una puerta conectando dos salas, este puede vigilar ambas salas a la vez y como ningún guardia puede vigilar más de dos salas, entonces necesitamos al menos $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ guardias para vigilar una galería de arte tradicional con n salas. El resultado principal de esta sección es debido a *Czyzowicz, Rivera-Campo, Santoro Urrutia y Zaks* [CRCS⁺94].

Dada una gráfica G y un subconjunto S de vértices de G , definimos $Odd(G - S)$ como el número de componente de $G - S$ con un número impar de vértices. El siguiente resultado debido a *Tutte* nos da las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un emparejamiento perfecto. La prueba puede consultarse en [Tut47]

Teorema 4.5.1 (*Tutte, 1947*). Una gráfica G tiene un emparejamiento perfecto si y sólo si cada subconjunto S de $V(G)$, $Odd(G - S) \leq |S|$.

Teorema 4.5.2 *Cualquier galería de arte tradicional T con n salas puede vigilarse con exactamente $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ guardias.*

Prueba. Sea T una galería de arte tradicional con n salas (R_1, R_2, \dots, R_n) y sea T^* la gráfica dual de T , en la cual representamos el rectángulo R_i de T por el vértice v_i , y dos vértices son adyacentes si sus rectángulos correspondientes comparten un segmento de línea en su frontera común; ver figura 4.19.

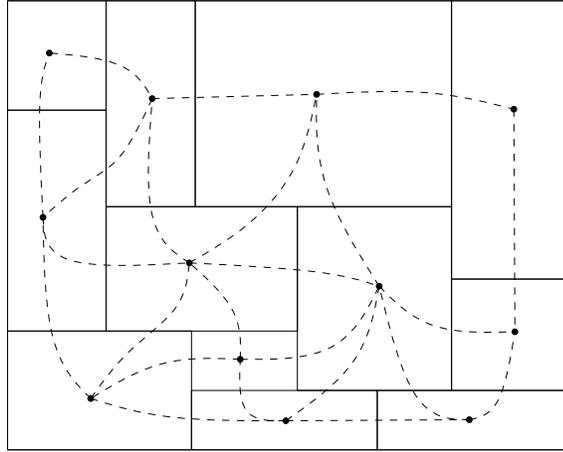


Figura 4.19: Galería tradicional con habitaciones y su gráfica dual.

Note que la frontera de los rectángulos correspondientes a los vértices de cualquier subgráfica conectada de T^* forman un polígono ortogonal, posiblemente con algunos hoyos ortogonales.

Mostraremos que si T^* tiene un número par de vértices, entonces T^* tiene un emparejamiento perfecto M . Al colocar un guardia en cada puerta conectando R_i y R_j correspondientes a cada arista $\{v_i, v_j\}$ de T^* en M , vigilamos todos los rectángulos de T . El caso cuando T^* tiene un número impar de vértices se obtiene dividiendo cualquier sala de T en dos. En cualquier caso la cardinalidad de M es a lo más $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Supongamos que T^* tiene un número par de vértices. Probaremos que T^* satisface el teorema 4.5.1. Sea S cualquier subconjunto de vértices de T^* y k el número de componentes conexos de $T^* - S$. Cada componente C_i de $T^* - S$ es representado por un subpolígono ortogonal P_i de T . Cada uno de tales polígonos tiene al menos cuatro aristas y así el número total de esquinas generadas por los k componentes en $T^* - S$ es al menos $4k$.

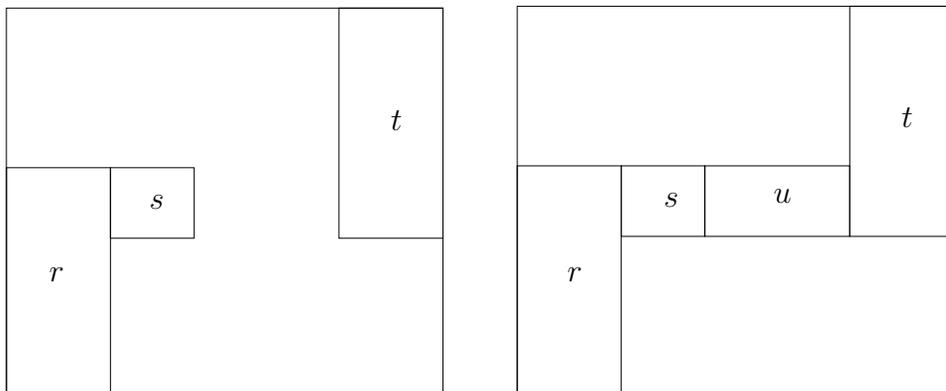


Figura 4.20: Los componentes de $G - S$ son polígonos ortogonales posiblemente con hoyos.

La siguiente observación es esencial para la prueba: Cuando un rectángulo representado por un elemento de S es reemplazado, a lo más cuatro esquinas van a desaparecer.

Una vez que todos los rectángulos en S son reemplazados, todos los puntos esquina generados por los componentes de $T^* - S$ desaparecen, excepto por los cuatro puntos esquina de T . De esta forma, $k \leq |S| + 1$. Es fácil verificar que cuando $k = |S| + 1$ al menos uno de los componentes de $T^* - S$ es par. \square

4.6. Vigilando galerías de arte ortogonales con reflectores

El siguiente resultado es debido a *Abello, Estivill-Castro, Shermer y Urrutia* [AECSU98].

Considere la siguiente clasificación de vértices:

- C_1 el conjunto de vértices superiores de las aristas izquierdas unión los vértices izquierdos de las aristas superiores.

-
- C_2 el conjunto de vértices inferiores de las aristas izquierdas unión los vértices izquierdos de las aristas inferiores.
 - C_3 el conjunto de vértices superiores de las aristas derechas unión los vértices derechos de las aristas superiores.
 - C_4 el conjunto de vértices inferiores de las aristas derechas unión los vértices derechos de las aristas inferiores.

Teorema 4.6.1 *Cualquier polígono ortogonal P con n vértices puede iluminarse con a lo más $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales en vértices.*

Prueba. Primero probaremos que al colocar un reflector en cada elemento de cualquiera de los conjunto descritos previamente, iluminan todo P . Sin pérdida de generalidad tomemos el conjunto C_1 . Colocamos un reflector iluminando el área entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π .

Sea p cualquier punto en P . Considere el segmento de línea horizontal h más grande totalmente contenido en P y con punto final derecho en p ; ver figura 4.21. Sea e la arista vertical la cual contiene el punto final izquierdo de h . Deslizamos h hacia arriba hasta alcanzar una arista superior de P o el vértice superior x de e . En el segundo caso, existe un reflector en x que ilumina p . Supongamos que h alcanza una arista superior f de P . Sea y el vértice izquierdo de f , claramente $y \in C_1$ por lo hay un reflector en y que ilumina p .

Si usamos los cuatro conjuntos y colocamos reflectores en cada uno de sus elementos, entonces colocaremos exactamente dos reflectores en cada vértice cóncavo y uno en cada vértice convexo. Si P tiene r vértices cóncavos, entonces el número total m de reflectores usados por los cuatro conjuntos es $2r + (n - r)$. Sabemos que $r = \frac{n-4}{2}$, por lo que

$$m = 2r + (n - r) = 2\frac{n-4}{2} + \frac{n+4}{2} = \frac{3n-4}{2}$$

Claramente la cardinalidad de uno de los conjuntos es a lo más $\frac{3n-4}{8}$.

Para mostrar que la cota es justa, considere la familia de polígonos de la figura 4.22 con $12 + 8k$ vértices, es fácil ver que esta familia requiere $\frac{3(12+8k)-4}{8} = 4 + 3k$ reflectores. \square

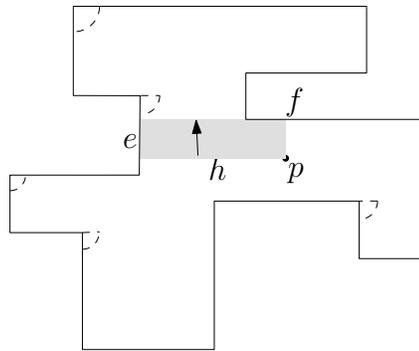


Figura 4.21: Reflectores en el conjunto superior-izquierdo.

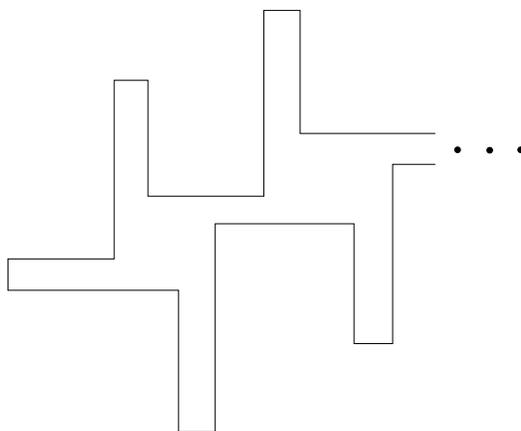


Figura 4.22: Familia de polígonos ortogonales con $12 + 8k$ vértices que requieren $4 + 3k$ reflectores.

4.7. Conclusiones

En 1986, *E. Györy* [Gy86] obtuvo otra prueba del teorema 4.1.2. Su prueba descompone el polígono ortogonal en a lo más $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ polígonos en forma de *L* y cada uno de tales polígonos pueden vigilarse con un guardia.

La cota para el problema de vigilar polígonos ortogonales con hoyos usando guardias en vértices no es justa, por lo que este problema aún sigue abierto, *Hoffman* hizo la siguiente conjetura:

Conjetura 4.7.1 $\lfloor \frac{2n}{7} \rfloor$ guardias en vértices son siempre suficientes para vigilar cualquier polígono ortogonal con hoyos.

Para el problema de los guardias móviles, *Györy, Hoffman, Kriegel y Shermer* [GHKS96], probaron que la cota es justa cuando el tamaño del distrito k es par; ver figura 4.23. Más aún, ellos probaron que en presencia de hoyos y usando guardias móviles con un distrito mayor o igual a 2, el número de guardias suficiente decrece.

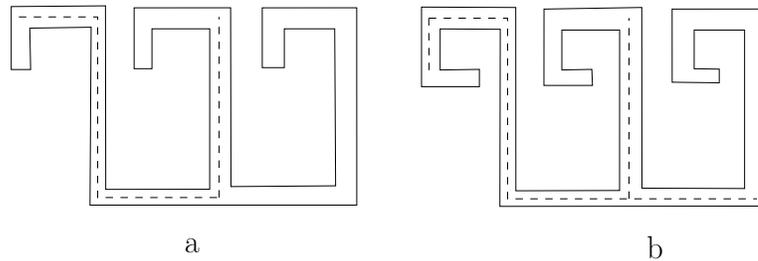


Figura 4.23: Polígonos con $\lfloor \frac{n}{k+4} \rfloor$ brazos en espiral: a) Cota justa para $k = 4$; b) Cota justa para $k = 6$.

Estivill-Castro y Urrutia [ECU95] probaron sorprendentemente que si permitimos colocar reflectores en puntos, cualquier polígono ortogonal puede iluminarse con a lo más $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ reflectores ortogonales, es decir, reflectores de tamaño $\frac{\pi}{2}$.

Capítulo 5

Vigilando objetos 3D

5.1. Poliedros

Un *poliedro* es un sólido d -dimensional, el cual está formado por una colección finita de polígonos que son parte de algún plano. Los poliedros son generalizaciones de los polígonos. En adelante, los poliedros serán tratados 3-dimensionales (3D).

Dado un poliedro \mathcal{P} , denotamos el interior abierto por $int(\mathcal{P})$, el exterior abierto por $ext(\mathcal{P})$ y la frontera por $\partial(\mathcal{P})$. La frontera es considerada parte del poliedro, es decir, $\mathcal{P} = \partial(\mathcal{P}) \cup int(\mathcal{P})$. Una cara F de un poliedro \mathcal{P} es un vértice, una arista o una cara (poligonal) de \mathcal{P} .

La *dimensión* de la cara f , denotada como $dim(f)$, es 0 si f es un vértice, 1 si f es una arista y 2 si f es una cara. El *subespacio lineal* conteniendo f es denotado por $aff(f)$.

Dos caras f y g de un poliedro \mathcal{P} son incidentes si una está incluida en la otra y si sus respectivas dimensiones difieren en uno. Dos vértices de un poliedro son adyacentes si estos son incidentes a una arista común. Dos caras de un poliedro son adyacentes si estas son adyacentes a alguna arista común.

Definición 5.1.1 *Una arista de un poliedro es cóncava si y sólo si el ángulo interior entre las dos caras incidentes del poliedro es mayor que π , de otra forma la arista es convexa.*

Definición 5.1.2 *Un poliedro es convexo si y sólo si todas sus aristas son convexas.*

Topológicamente un poliedro es homomórfico a una esfera con asas. El número de asas es llamado genero. Un poliedro homomórfico a una esfera topológica tiene genero 0. Un poliedro homomórfico a un toro topológico tiene una asa y por lo tanto tiene genero 1. De forma más general, un poliedro de genero h tiene h asas. El siguiente teorema muestra la relación que existe entre los vértices, las aristas, las caras y el genero de un poliedro, la prueba puede consultarse en [BY98].

Teorema 5.1.1 *(Relación de Euler para poliedros) Si \mathcal{P} es un poliedro con n vértices, m aristas, f caras y genero h , entonces*

$$n - m + f = 2 - 2h.$$

Dado un poliedro convexo \mathcal{P} , un punto v y un plano H de tal forma que $H \cap \text{int}(\mathcal{P}) = \emptyset$, decimos que v está más *cerca* de H si v se encuentra en el espacio abierto determinado por H el cual contiene $\text{int}(\mathcal{P})$, y decimos que v está más *allá* de H si v pertenece al espacio abierto determinado por H el cual no contiene $\text{int}(\mathcal{P})$. Dado un conjunto de puntos $S \in R^3$, $CH(S)$ denota el cierre convexo de los puntos.

Los siguientes teoremas los cuales se presentan sin demostración, permiten agregar o eliminar vértices de un poliedro convexo de tal forma que el poliedro resultante continúa siendo convexo, estas operaciones son llamadas *truncamiento* y *estrellado* respectivamente; las pruebas pueden consultarse en [Bro81].

Teorema 5.1.2 *Sea \mathcal{P} un poliedro convexo en R^3 , V los vértices de \mathcal{P} y H un plano en R^3 con $H \cap \text{int}(\mathcal{P}) \neq \emptyset$ y $H \cap V = \emptyset$ y sea K uno de los dos medios-espacios acotados por H . Entonces tenemos que:*

1. *El conjunto $\mathcal{P}' = K \cap \mathcal{P}$ es un poliedro convexo y $H \cap \mathcal{P}$ es una cara de \mathcal{P}' .*
2. *Si f es una cara de \mathcal{P}' tal que $K \cap f \neq \emptyset$, entonces $f' = K \cap f$ es una cara de \mathcal{P}' y $\dim(f') = \dim(f)$.*

3. Sea f' una cara de \mathcal{P}' . Entonces f' es una cara de dimensión 2 de $H \cap \mathcal{P}$ o hay una única cara f de \mathcal{P} tal que $f' = K \cap f$.

El truncamiento permite eliminar un vértice v de \mathcal{P} de tal forma que el poliedro resultante sea convexo y similar a \mathcal{P} , excepto por las modificaciones de las caras adyacentes a v y la nueva cara de dimensión 2 creada por el truncamiento de v ; ver figura 5.1.

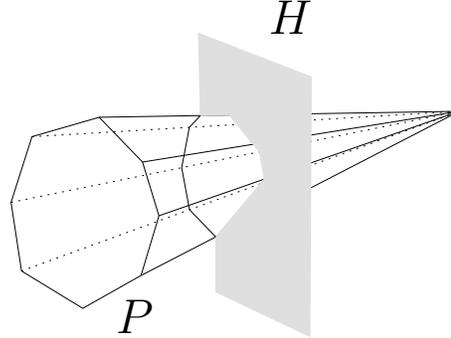


Figura 5.1: Truncamiento de un poliedro.

Teorema 5.1.3 Sea \mathcal{P} y \mathcal{P}' dos poliedros convexos en R^3 y v un vértice de \mathcal{P}' y $v \notin \mathcal{P}$, tal que $\mathcal{P}' = CH(v \cup \mathcal{P})$, entonces

1. Una cara f de \mathcal{P} es una cara de \mathcal{P}' si y sólo si hay una cara f' de dimensión 2 de \mathcal{P} tal que $f \subset f'$ y v está más cerca de f' .
2. Si f es una cara de \mathcal{P} entonces $f' = CH(v \cup f)$ es una cara de \mathcal{P}' si y sólo si tanto $v \in aff(f)$ o v se encuentra en medio de dos caras de dimensión 2 de \mathcal{P} conteniendo f .

Más aun, cada cara de \mathcal{P}' es de uno y sólo uno de estos tipos.

De forma análoga al truncamientos, el estrellado permite agregar un vértice v a \mathcal{P} , de tal forma que el poliedro resultante sea convexo y similar a \mathcal{P} , excepto por la modificaciones de las caras adyacentes a v y las nuevas caras creadas por el estrellado.

5.2. Terrenos poliédricos

Definimos un *terreno* T como una superficie poliédrica triangulada con n vértices, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Cada vértice v_i se especifica por tres números reales (x_i, y_i, z_i) , estos valores representan las coordenadas cartesianas. La altura del vértice v_i esta dada por z_i . Es conveniente asumir que z_i no es negativo de esta forma si el plano- xy es asociado con el nivel del mar, ningún punto en el terreno esta por debajo del nivel de mar.

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ denota la proyección ortogonal de los puntos V en el plano- xy , el punto p_i se especifica por los números reales (x_i, y_i) . Asumimos que el conjunto P se encuentra en posición general, es decir, tres puntos cualesquiera no son colineales y cuatro puntos cualesquiera no son cocirculares. De esta forma, la proyección de las aristas de la superficie poliédrica en el plano- xy determina una triangulación de P . Una *triangulación base* de un terreno poliedrico, es la gráfica plana triangulada asociada a tal terreno. Por consiguiente, podemos ver un terreno T como la gráfica de una función poliédrica $z = F(x, y)$, definida sobre el cierre convexo de $CH(P)$.

Dado que la proyección ortogonal de T en el plano- xy es una subdivisión plana, entonces T tiene $O(n)$ aristas y $O(n)$ caras trianguladas.

Definición 5.2.1 *Un terreno poliédrico T es un terreno convexo si T es un terreno y cada punto en T es también un punto en la frontera del cierre convexo de los vértices de T .*

5.3. Vigilando terrenos poliédricos con guardias en los vértices

El problema de vigilar un terreno poliédrico fue estudiado por primera vez por *deFloriani, Falcidieno, Pienovi, Allen y Nagy* [dFP⁺86]. Ellos probaron que encontrar el mínimo número de guardias puede resolverse usando un algoritmo de conjunto cubierta. *Cole y Sharir* [CS89] probaron que el problema es *NP-completo*. *Goodchild y Lee* [GL89] y *Lee* [Lee91] presentaron algunas heurísticas para colocar los guardias en los vértices de un terreno. El

resultado principal de esta sección es debido a *Bose, Shermer, Toussaint y Zhu* [BSTZ97].

Dos puntos a, b en o por encima de T son visibles si el segmento de línea \overline{ab} no intersecta ningún punto estrictamente por debajo de T . Dado un guardia p en o sobre T , el subconjunto de puntos de T que son visibles desde p es llamado la región visible de T desde p y es denotado por $VR(T|p)$.

El problema de vigilar un terreno puede expresarse en su contraparte combinatoria como el problema de vigilar la gráfica triangulada asociada al terreno. Un guardia en un vértice de la gráfica puede sólo vigilar sus caras adyacentes y un guardia en una arista de la gráfica puede sólo vigilar las caras adyacentes a los vértices incidentes a la arista. Una colocación válida de guardias en los vértices de la gráfica asociada también es una colocación válida de guardias en los vértices del terreno poliédrico, dado que un guardia en el terreno puede siempre ver los triángulos adyacentes a este. Análogamente para los guardias en las aristas. Por consiguiente, la suficiencia en el número de guardias usados para vigilar una gráfica plana triangulada es también la suficiencia para el terreno poliédrico. La dificultad viene en probar el número de guardias necesarios, debido a que un guardia en algún vértice del terreno puede ver más que sólo sus caras adyacentes. El número de guardias necesarios se obtiene a partir de un terreno convexo, el cual tiene la propiedad de que un guardia en un vértice puede sólo ver sus caras adyacentes.

5.3.1. Guardias necesarios

A continuación mostramos como construir una familia de terrenos poliédricos, en la cual se establece el número de guardias ocasionalmente necesarios para vigilarlos. Los siguientes resultados pueden consultarse en [BSTZ97].

Lema 5.3.1 *La gráfica con siete vértices mostrada en la figura 5.2 necesita al menos tres guardias en los vértices. Además, si tres guardias son usados para vigilarla, entonces al menos uno de los tres guardias esta en un vértice exterior.*

Prueba. Supongamos que dos vértices son suficientes. Uno de los cuatro vértices interiores x, y, z, w , tuvo que escogerse para cubrir los triángulos

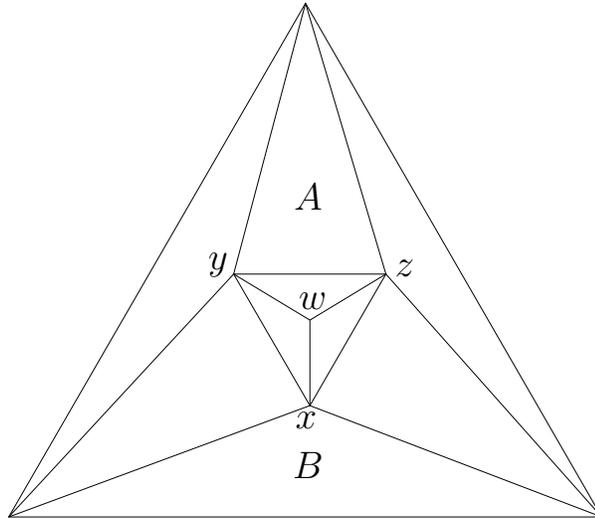


Figura 5.2: Gráfica de siete vértices.

interiores. Si el vértice central w es escogido, entonces los triángulos restantes no pueden cubrirse con un guardia, debido a que los triángulos A y B no comparten vértices. Por tanto, uno de los tres vértices centrales medios x, y, z tuvo que ser escogido. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el vértice x fue escogido, entonces los triángulos no vigilados (A y sus tres triángulos adyacentes) no son cubiertos por un sólo guardia.

Si los tres guardias estuvieran en vértices exteriores, entonces los triángulos centrales no estarían vigilados. Supongamos que al menos dos de los guardias están en vértices exteriores. Sin pérdida de generalidad, supongamos que esto son los dos inferiores. Tenemos que A y los tres triángulos centrales directamente por debajo de A no se encuentran vigilados. Tales triángulos no pueden vigilarse por únicamente un vértice adicional. \square

Usando la gráfica en la figura 5.2, construimos una serie de subdivisiones planas S_1, S_2, \dots, S_k , donde S_1 es la gráfica de la figura 5.2 y S_{k+1} es obtenida de S_k de la siguiente manera: Sea S_{k+1} la gráfica de la figura 5.2 con uno de los triángulos centrales reemplazado por una copia de S_k . Sin pérdida de generalidad tomemos el triángulo debajo de A a reemplazarse. El siguiente

lema muestra la propiedad de S_k .

Lema 5.3.2 *Sea S_k una gráfica triangulada con $n_k = 4k + 3$ vértices, S_k necesita al menos $g_k = 2k + 1$ guardias y si esta es vigilada por exactamente $2k + 1$ guardias, entonces al menos uno está posicionado en la cara exterior.*

Prueba. Por inducción sobre k .

- Base: $k = 1$ se obtiene por el lema 5.3.1.
- Hipótesis inductiva: Para todo $k \leq t, t \geq 1$, S_k es una gráfica triangulada con $n_k = 4k + 3$ vértices, S_k necesita $g_k = 2k + 1$ guardias y si esta es vigilada por exactamente $2k + 1$ guardias, entonces al menos uno está posicionado en la cara exterior.
- Paso inductivo: $k = t + 1$. S_{t+1} es una gráfica triangulada por construcción y tiene $n_t + 4 = (4t + 3) + 4 = 4(t + 1) + 3$ vértices. Sólo hace falta probar que requiere de $2(t + 1) + 1 = 2t + 3$ guardias y que si usa exactamente $2t + 3$ guardias, entonces sólo un guardia es posicionado en un vértice exterior.

En S_{t+1} , hay una copia de S_t , Por inducción esta copia de S_t debe de usar al menos $2t + 1$ guardias. Consideramos los casos basados en el número de guardias que usa S_t .

1. La copia de S_t usa exactamente $2t + 1$ guardias. Entonces la copia de S_t tiene a lo más un guardia en uno de sus vértice exteriores, 4 casos pueden ocurrir:
 - a) Ningún guardia es colocado en el exterior de S_t . Como S_t esta vigilado, dos guardias son suficiente para vigilar el resto de S_{t+1} . Tenemos que $g_{t+1} = (2t + 1) + 2 = 2(t + 1) + 1$. Si exactamente dos guardias son usados, entonces al menos uno de ellos puede estar en la cara exterior de S_{t+1} .
 - b) Un guardia es colocado en y ; ver figura 5.2. Esta configuración requiere al menos 2 guardias. Si es vigilada con exactamente dos guardias, entonces tenemos $(2t + 1) + 2 = 2t + 3$ guardias totales y al menos uno es colocado en la cara exterior.

-
- c) Un guardia es colocado en z . Análogo al caso anterior.
 - d) Un guardia es colocado en w . Hay un anillo de seis triángulos que requieren dos guardias y a lo más uno de esos guardias se encuentra en la cara exterior.
2. La copia de S_t usa exactamente $2t + 2$ guardias. Entonces la copia de S_t puede tener guardias en los tres vértices exteriores, es decir, y, w, z . De esta forma, se deja sin vigilar la cara B , por lo que requerimos un guardia más. Si sólo un guardia más es usado con un total de $2t + 3$ guardias, entonces sólo ese guardia puede estar en el cara exterior.
 3. La copia de S_t usa más de $2t + 2$ guardias, entonces la hipótesis inductiva es cierta. \square

La gráfica con siete vértices de la figura 5.2 forma la base para la construcción de la cota inferior. Se mostrará como construir un terreno convexo a partir de la gráfica S_k para obtener el número necesario de guardias. Nos referimos a esta construcción como la *Construcción A*.

Considere un tetraedro regular, con una cara horizontal f de dimensión 2 y un ápice a ; ver figura 5.3. El terreno convexo inicial es la superficie del poliedro excepto la cara f . El primer paso es truncar el ápice con un plano horizontal. Hacer esto resulta en una cara triangular con b, c y d como se muestra en la figura 5.3. Los siguiente tres pasos involucran un truncamiento de esos tres vértices. El vértice b es truncado con el plano definido por el vértice 1 y el punto medio de la arista bc y bd . Los otros dos vértices son truncados de forma análoga. Finalmente, el vértice h es estrellado para obtener la cara efg . Éste proceso completa la construcción de un terreno convexo con base a la gráfica S_1 . Para construir una gráfica basada en S_2 , simplemente construimos S_1 en la cara efh .

Teorema 5.3.1 *Existe un terreno con n vértice, para cualquier $n \equiv 3 \pmod 4$ que requiere $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ guardias en vértices.*

Prueba. La construcción del terreno, se sigue directamente del lema 5.3.2 y la construcción A. Para tal terreno, tenemos: $g_k = 2k + 1$ y $n_k = 4k + 3$

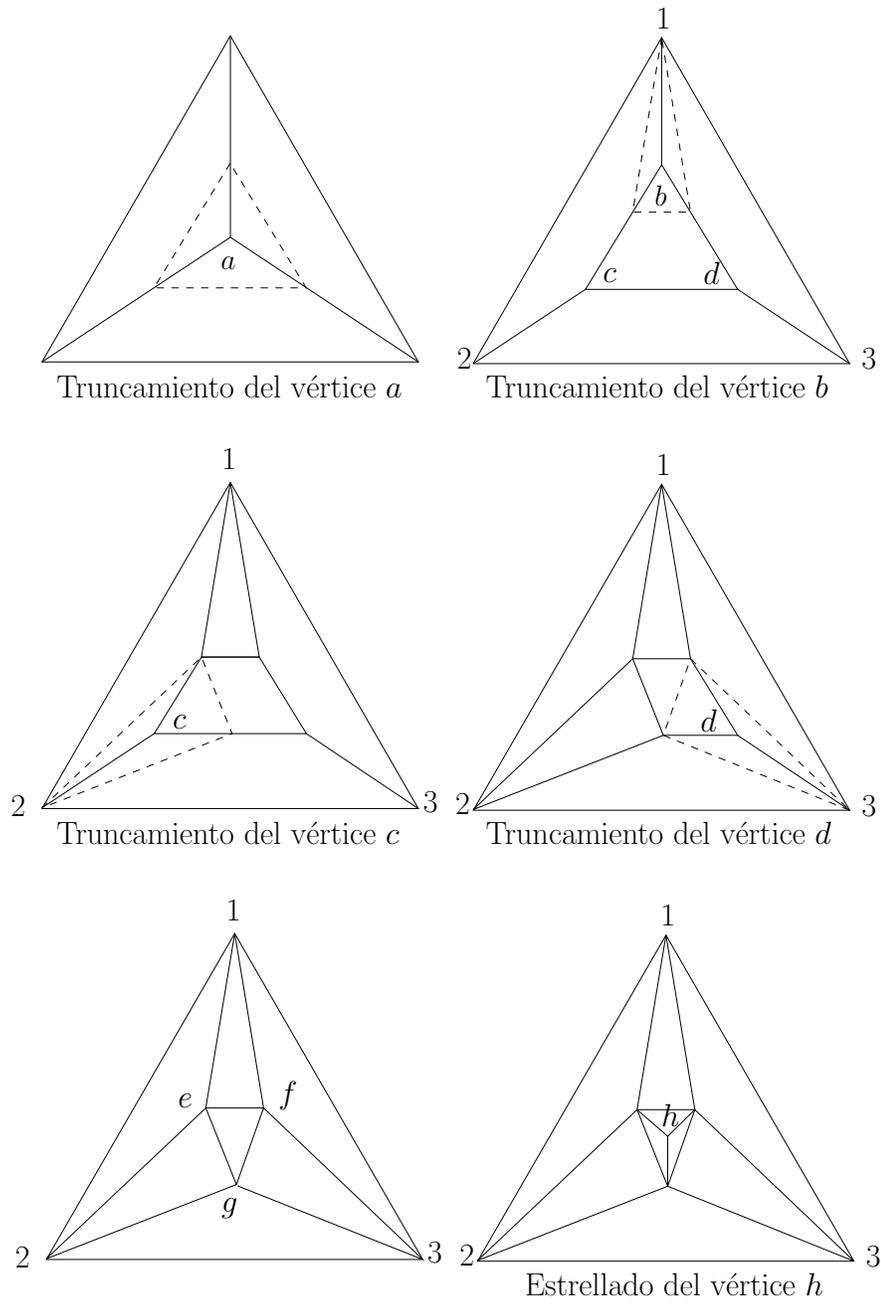


Figura 5.3: Construcción del terreno a partir de la gráfica de siete vértices.

por lo que

$$g_k = \frac{2(n_k - 3)}{4} + 1 = \frac{n_k - 3}{2} + 1 = \frac{n_k - 1}{2} = \lfloor \frac{n_k}{2} \rfloor.$$

□

5.3.2. Suficiencia

A continuación vamos a establecer el número suficiente de guardias para vigilar cualquier terreno poliédrico.

Teorema 5.3.2 [BSTZ97]. $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ guardias en vértices son suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar la superficie de un terreno arbitrario T con n vértices.

Prueba. Sea T' la gráfica plana triangulada proyectada en el plano- xy . Asignamos una 4-coloración a los vértices de T' con los colores 1,2,3 y 4, esto siempre puede hacerse dado que T' es plana [AH77]. Por el principio de la pichonera, entre los cuatro colores debe haber dos colores, digamos 1 y 2, de tal forma que no más de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vértices tienen asignado estos colores. Colocamos un guardia en cada elemento de las clases cromáticas 1 y 2. T' queda totalmente vigilada debido a que en cada triángulo debe de haber al menos un vértice con el color 1 ó 2. La necesidad se obtiene del teorema 5.3.1. □

El problema de 4-coloración es un problema *NP-completo*, por lo que no existe un algoritmo polinomial que lo resuelva, *Bose, Sheremer, Toussaint y Zhu* [BKL96] obtuvieron un algoritmo lineal basado en el teorema de la 5-coloración el cual coloca $\lfloor \frac{3n}{5} \rfloor$ guardias en vértices para vigilar el terreno. Sin embargo, *Bose, Kirkpatrick y Li* [BKL96] obtuvieron un algoritmo polinomial para colocar $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ guardias en vértices basada en una prueba alternativa, la cual se presenta a continuación.

Una k -coloración K_d -libre de una gráfica G , es una asignación de uno de los k colores a cada vértice de G , de tal forma que no hay clanes monocromáticos de tamaño d en G . Con esta notación una 2-coloración es equivalente a una 2-coloración K_2 -libre.

Note que si las gráficas planas máximas son 2-coloreables K_3 -libres, entonces también las gráficas planas son 2-coloreables K_3 -libre. Por lo que asumiremos para el resto de esta sección que las gráficas son planas máximas.

Teorema 5.3.3 *Una 2-coloración K_3 -libre de una gráfica plana máxima G , determina un emparejamiento perfecto en su gráfica dual G^* .*

Prueba. Dada un 2-coloración K_3 -libre de G con los colores 1 y 2 y la gráfica dual G^* de G . Definimos un conjunto de aristas M^* en G^* como sigue: Si los vértices finales de una arista e de G tienen asignado el mismo color, entonces la correspondiente arista dual e^* de G^* es colocada en el conjunto M^* .

Para probar que el conjunto M^* representa un emparejamiento perfecto en G^* , primero hay que probar que ningún vértices en G^* es adyacente a dos aristas en M^* . Supongamos que tal vértice v_f existe, esto implicaría que la correspondiente cara f en G es monocromática lo cual es una contradicción.

Falta probar que cada vértice en G^* es adyacente a al menos a una arista en M^* . Supongamos que el vértice v_f de G^* no es adyacente a ninguna arista en M^* . Sea f la cara correspondiente de G y sea a, b, c los tres vértices de la cara f en G ; ver figura 5.4. La cara f no es monocromática, sin embargo, dos de los tres vértices deben asignarse el mismo color. Sin pérdida de generalidad, asumamos que a y b están coloreados con el color 1. Por construcción de M^* , la arista dual ab debe estar en M^* , contradiciendo el hecho que v_f no es adyacente a alguna arista en M^* . □

Lema 5.3.3 *La gráfica dual G^* de una gráfica plana máxima G es 3-regular y sin puentes (no contiene aristas de corte).*

Prueba. Como cada cara en G es un triángulo, cada vértice en G^* tiene grado tres.

Supongamos que G^* tiene una arista de corte e^* . Note que las caras adyacentes a un vértice v de G forman un ciclo en G^* . Sea e la arista dual de e^* con puntos finales a y b de G . Las caras adyacentes de a forman un ciclo C en G^* , no obstante, e^* está en el ciclo C contradiciendo el hecho de que

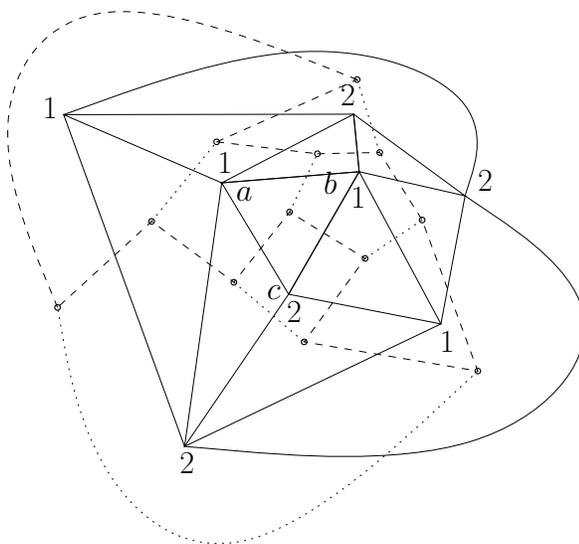


Figura 5.4: Gráfica plana máxima, su gráfica dual y su emparejamiento (líneas punteadas).

esta es una arista de corte; ver figura 5.4. □

El siguiente teorema es una consecuencia directa del teorema 5.3.3 y el lema 5.3.3.

Teorema 5.3.4 *Cada gráfica 3-regular sin puentes tiene un emparejamiento perfecto.*

Teorema 5.3.5 *Cualquier gráfica plana admite una 2-coloración K_3 -libre.*

Prueba. Sea P una gráfica plana. Si P no es máxima, agregamos aristas hasta que esta sea máxima. Sea G esta gráfica máxima y G^* su gráfica dual. Por el lema 5.3.3, G^* tiene un emparejamiento perfecto. Sea M^* el conjunto representando las aristas del emparejamiento perfecto en G^* , M las aristas en G que son duales a las aristas de M^* y G' la gráfica G con las aristas M eliminadas; ver figura 5.5. Como G es una gráfica plana máxima, G' es una gráfica plana donde cada cara es un cuadrilátero. Además, como el ciclo no

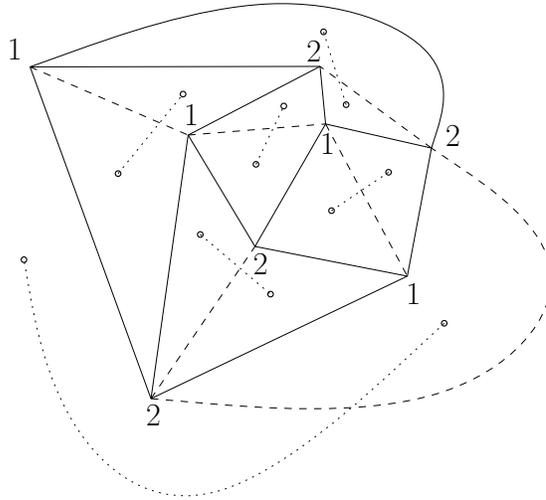


Figura 5.5: 2-coloración K_3 -libre de una gráfica plana máxima.

trivial más pequeño en G' es de longitud 4, G' no contiene ciclos impares, por lo que G' es bipartita.

Sea R y B dos conjuntos de vértices representando la bipartición de G' . Como el conjunto de vértices de G y G' es el mismo, esto forma una bipartición de G . Asignamos el color 1 a los vértices en R y 2 a los vértices en B . Con esto hemos definido una coloración de los vértices de G tal que cualquiera par de vértices adyacentes vía una arista no en M , tienen colores distintos. Como cada cara de G tiene dos de tales aristas, concluimos que ninguna cara de G es monocromática, por lo que el conjunto R y B forman un 2-coloración K_3 -libre de G y P . \square

5.3.3. Algoritmo

Note que la gráfica base G de un terreno poliédrico no necesariamente es una gráfica máxima plana, debido a que la cara exterior generalmente no es un triángulo, sin embargo, podemos agregar las aristas faltantes para transformar la gráfica base en una gráfica máxima plana G' , debido a que la colocación de guardias en la gráfica aumentada G' es también una colocación

valida en la gráfica original G . De esta forma, asumiremos que la gráfica base es una gráfica plana máxima.

Observación 5.3.1 *Sea R y B las dos clases cromáticas de una 2-coloración K_3 -libre de una gráfica base de un terreno poliédrico. Ambas R y B forman un conjunto válido de guardias en vértices.*

Basado en esta observación, decimos que siempre existe un conjunto de guardias de tamaño a lo más $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Para encontrar un conjunto de guardias en vértices, simplemente se necesita encontrar una 2-coloración K_3 -libre de la gráfica base.

Algoritmo

- *Entrada:* Gráfica base G con n vértices.
 - *Salida:* Conjunto de guardias en vértices de tamaño a lo más $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ tal que vigilan completamente el terreno.
1. Obtener la gráfica dual G^* de G .
 2. Encontrar el emparejamiento perfecto M^* en G^* .
 3. Formar la gráfica G' al eliminar de G las aristas duales de M^* .
 4. Encontrar los dos conjuntos R y B formando una bipartición de la gráfica G' .
 5. Colocar un guardia en la clase menor de R y B .

Teorema 5.3.6 *Encontrar un conjunto de guardias en vértices de tamaño a lo más $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ tal que vigila la superficie de un terreno poliédrico con n vértices toma $O(n^{3/2})$ pasos.*

Prueba. Obtener la gráfica dual G^* de cualquier gráfica G , toma tiempo lineal usando algoritmos elementales de gráficas [CLR90]. Es fácil ver que los pasos 3, 4 y 5 también pueden realizarse en tiempo lineal.

Encontrar un emparejamiento perfecto toma $O(n^{3/2})$ pasos usando [MV80], debido a que el número de vértices y aristas en G^* es $O(n)$. De esta forma, la complejidad total del algoritmo es $O(n^{3/2})$. \square

5.4. Vigilando terrenos poliédricos con guardias en aristas

Al igual que en la sección anterior el problema de vigilar un terreno poliédrico triangulado usando guardias en aristas puede probarse para el problema combinatorio. El resultado principal de esta sección es debido a *Everett* y *Rivera-Campo* [ERC97].

5.4.1. Guardias necesarios

Considere la gráfica de 6 vértices de la figura 5.6. Es fácil ver que esta gráfica necesita al menos dos guardias en aristas para cubrirla.

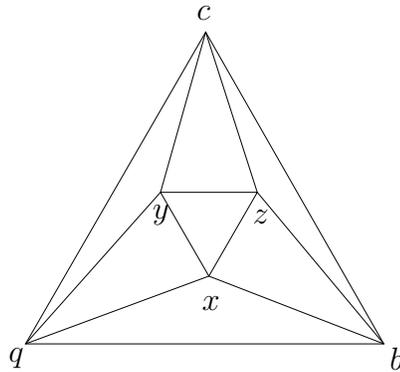


Figura 5.6: Gráfica de 6 vértices que necesita 2 guardias en aristas.

Teorema 5.4.1 *Hay una gráfica triangulada plana que necesita al menos $\frac{4n-4}{13}$ guardias en aristas para cubrirse.*

Prueba. Tal gráfica plana triangulada es derivada de un polígono convexo triangulado arbitrario P con m vértices y $m - 2$ caras triangulares internas.

Ponemos una copia de la figura 5.6 en cada cara de P y otras m copias en la cara exterior por cada arista en la frontera de P y triangulamos la caras no trianguladas. En total agregamos $m + (m - 2) = 2m - 2$ de tales copias a P . Supongamos que la triangulación obtenida es $T(P)$ y este necesita g_e

guardias en aristas. Como los guardias no puede compartirse entre copias de la figura 5.6, $T(P)$ requiere de al menos $g_e = 2(2m - 2) = 4m - 4$ guardias en aristas y tenemos $m_{T(P)} = m + 6(2m - 2) = 13m - 12$ vértices. Sustituyendo $m_{T(P)}$ por n , tenemos

$$g_e = \frac{4n - 4}{13}.$$

□

Construiremos un terreno poliédrico convexo con base a la gráfica de la prueba del teorema 5.4.1. Refierase a la figura 5.7 para la construcción como sigue.

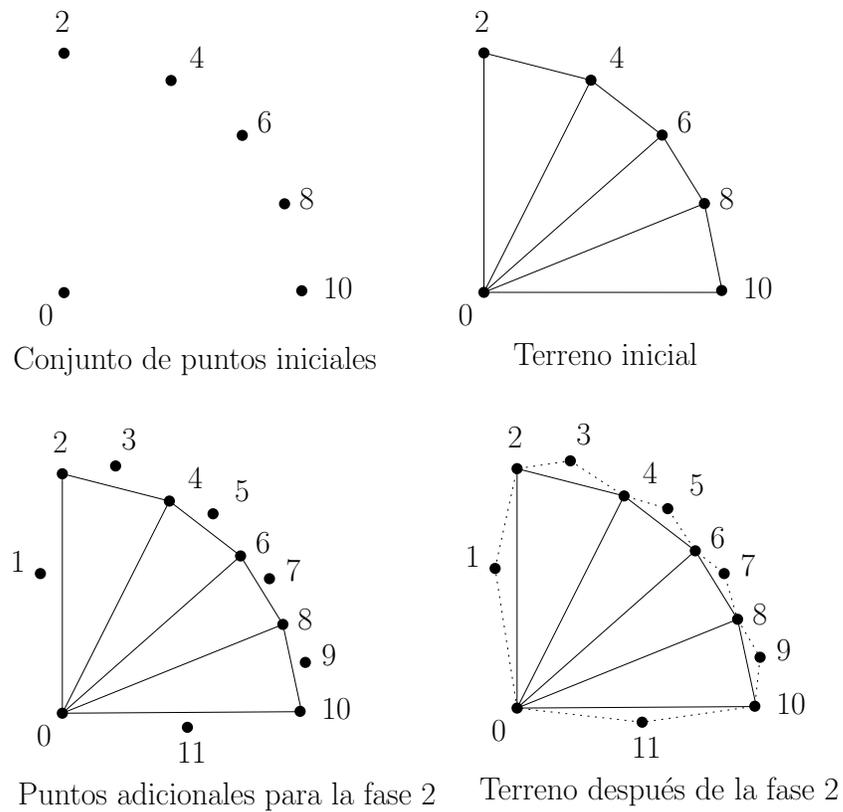


Figura 5.7: Construcción del terreno con n vértices que requiere $\frac{4n-4}{13}$ guardias en aristas.

Empezamos con un conjunto de n puntos en el plano- xy colocados de la siguiente manera. Un punto etiquetado 0 es colocado en el origen. Sea C un círculo de radio unitario en el plano- xy centrado en el origen. Los otros $n - 1$ puntos (etiquetados 2, 4, 6, ..., $2(n-1)$) los colocamos en el orden de las manecillas del reloj en la frontera de C , pero contenidos en un cuarto del círculo. Ahora elevamos algún valor positivo ϵ el punto 0 sobre el eje- Z y obtenemos el cierre convexo de los puntos. El terreno inicial T_0 consiste de las caras del cierre convexo con excepción de la base.

Continuamos la segunda fase de la construcción al expandir el terreno de la siguiente manera. Para cada par consecutivo de puntos en la frontera del cuarto de círculo, colocamos un punto en la frontera del círculo en el centro de dos puntos continuos. Etiquetamos los puntos $3, 5, 7, \dots, 2(n-1)-1$. Colocamos un poco a la izquierda del punto medio de la arista $(0, 2)$ el punto 1 y un poco abajo de la arista $(0, n)$ el punto $2n - 1$. Deslizamos $-\frac{1}{2}$ sobre el eje- Z todos los puntos insertados en esta última fase y obtenemos el cierre convexo. El terreno resultante T_1 es el conjunto de caras del cierre convexo con excepción de la base.

Corolario 5.4.1 *Existe un terreno con n vértices, para cualquier $n \equiv 1 \pmod{13}$ que requiere $\lfloor \frac{4n-4}{13} \rfloor$ guardias en aristas.*

5.4.2. Suficiencia

Los siguientes resultados son debido a *Everret y Rivera-Campo* [ERC97].

Teorema 5.4.2 *Cada gráfica plana triangulada G con n vértices puede vigilarse con $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias en aristas.*

Prueba. Sea $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ el conjunto de cuatro colores usado en una 4-coloración de G y sea $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ el conjunto de vértices coloreados por c_1, c_2, c_3 y c_4 . Note que debido a que G esta triangulada, cada cara contiene tres vértices coloreados por tres distintos colores y consecuentemente cualquier cara contiene al menos un vértice en V_i o en V_j .

Para $1 \leq i < j \leq 4$, sea G_{ij} la subgráfica de G inducida por los vértices $V_i \cup V_j$ y sea M_{ij} un emparejamiento máximo en G_{ij} . Un conjunto de guardias

en aristas A_{ij} de G puede construirse al tomar las aristas de M_{ij} más una arista de G incidente a cada vértice en $V_i \cup V_j$ que no esta en una arista de M_{ij} . El tamaño de A_{ij} esta dado por $|V_i| + |V_j| - |M_{ij}|$. Como cada vértice de G pertenece a exactamente tres gráficas G_{ij} y hay 6 posibles combinaciones de i, j . El tamaño promedio de A_{ij} es $(3n - \sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} |M_{ij}|)/6$. Si ocurre que $\sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} |M_{ij}| \geq n$, entonces al menos un conjunto de guardias en aristas A_{ij} tiene tamaño a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

Supongamos entonces que $\sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} |M_{ij}| < n$. Considere los conjuntos $M_{12} \cup M_{34}$, $M_{13} \cup M_{24}$ y $M_{14} \cup M_{23}$. Estos conjuntos también constituyen guardias en aristas de G . Probaremos que esto es cierto para el conjunto $M_{12} \cup M_{34}$, el argumento para los otros conjuntos es similar. Supongamos que hay una cara f que no contiene vértices en el conjunto de vértices de $M_{12} \cup M_{34}$. Como cada cara es coloreada con tres distintos colores, f debe de tener una arista en la cual sus vértices incidentes están coloreados con c_1 y c_2 o una arista la cual sus vértices están coloreados con c_3 y c_4 ; sin pérdida de generalidad asumimos que los vértices incidentes están coloreados con c_1 y c_2 . Si esta arista no esta incluida en M_{12} , entonces al menos uno de los vértices de esta arista debe de estar en alguna arista de M_{12} debido a que el emparejamiento es máximo, lo cual contradice la suposición de que f no contiene vértices en el conjunto de vértices de $M_{12} \cup M_{34}$.

El tamaño promedio del conjunto $M_{12} \cup M_{34}$, $M_{13} \cup M_{24}$ y $M_{14} \cup M_{23}$ es $\sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} |M_{ij}|/3$ y como $\sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} |M_{ij}| < n$, entonces al menos uno de los conjuntos $M_{12} \cup M_{34}$, $M_{13} \cup M_{24}$ o $M_{14} \cup M_{23}$ tiene tamaño a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. \square

5.4.3. Algoritmo

Sea G la gráfica base de un terreno poliédrico. El algoritmo para colocar guardias en aristas procede como sigue. El primer paso es obtener una 2-coloración K_3 -libre de los vértice de G ; ver sección 5.3.3. Sean c_1 y c_2 las dos clases cromáticas.

Sea M un emparejamiento máximo en la gráfica inducida por los vértices en la clase de color x . Aunque el emparejamiento M no provee un conjunto de aristas que vigilen todo el terreno, si tomamos todas la aristas de M así como

todas las aristas con vértice final con color x no emparejado, entonces el terreno queda completamente vigilado, dado que cada cara tiene al menos un vértice con color x . Sea $g(X)$ un conjunto de guardias en arista obtenido de la forma anteriormente descrita. El tamaño de $g(x)$ esta dado por $|x| - |M(x)|$. Note que $|c_1| + |c_2| = n$, dado que tenemos sólo dos clases cromáticas. Sea $GS = M_{c_1} \cup M_{c_2}$.

Lema 5.4.1 *El conjunto de arista en GS cubre G .*

Prueba. Sea f una cara de G la cual no es vigilada por una arista en GS . Esto implica que ninguno de los tres vértices de f son adyacentes a alguna arista en M_{c_1} o M_{c_2} . Sin pérdida de generalidad, f tiene dos vértices coloreados con c_1 . Esto contradice el hecho que M_{c_1} es máximo. \square

Note que tenemos tres conjuntos de guardias en aristas tales que vigilan todo G : $g(c_1)$, $g(c_2)$ y GS .

Teorema 5.4.3 *Dado un terreno poliédrico con n vértices, existe un conjunto de aristas de tamaño a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ tales que vigilan todo el terreno.*

Prueba. Si el tamaño de GS es a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, entonces no hay más que probar. Supongamos entonces que el tamaño de $|GS| > \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

$$\begin{aligned} |g(c_1)| + |g(c_2)| &= |c_1| + |c_2| - (|M_{c_1}| + |M_{c_2}|) \\ &\leq n - |GS| \\ &\leq n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor \\ &\leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil \end{aligned}$$

Como el tamaño de $|g(c_1)| + |g(c_2)|$ es a lo más $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$, uno de los dos conjuntos tiene tamaño a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. \square

El algoritmo para encontrar el número de guardias en aristas para un terreno es análogo al algoritmo 5.3.3 de la página 78, por lo que la complejidad esta dominado por el paso de obtener el emparejamiento máximo.

Teorema 5.4.4 *Dado un terreno poliédrico con n vértices, $O(n^{3/2})$ pasos son suficiente para encontrar un conjunto S de arista que vigilen el terreno, donde $|S| \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.*

5.5. Conclusiones

A pesar de que muchas variaciones en problemas de galería de arte han sido estudiados, muy pocos resultados se han obtenido en 3-dimensiones. Los principales resultados han sido en terrenos poliédricos los cuales fueron presentados en este capítulo.

La cota para vigilar terrenos poliédricos usando guardias en aristas no es justa, por lo que sería interesante obtener una prueba en la que la cota sea justa.

Para el problema de iluminar el interior de un poliedro, *Seidel* [O'R87] construyó un poliedro \mathcal{P} con n vértices, donde $n = 8(3k^2 + 1)$, el cual tiene la siguientes propiedades.

- Aun si ponemos un guardia en cada vértice, el interior del poliedro \mathcal{P} no queda totalmente vigilado.
- $\Omega(n^{3/2})$ guardias en puntos son necesarios para vigilar \mathcal{P} .

El problema de vigilar el interior de un poliedro con guardias en aristas parece ser un problema más sencillo de resolver. Si ponemos un guardia en cada arista, entonces el poliedro queda totalmente vigilado. Basado en la figura 5.8, *Urrutia* [Urr97] hizo la siguiente conjetura:

Conjetura 5.5.1 *Cualquier poliedro 3D simple conectado con m aristas puede vigilarse con a lo más $\frac{m}{6} + c$ guardias en aristas, donde c es una constante.*

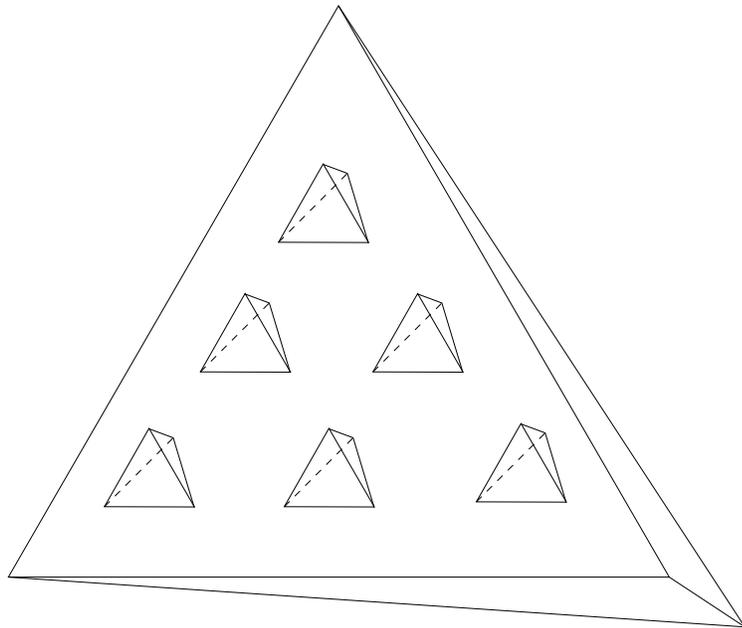


Figura 5.8: Poliedro con $6(k + 1)$ aristas que requiere k guardias en aristas.

Vigilando poliedros ortogonales 3D

6.1. Poliedros ortogonales 3D

Un poliedro ortogonal tres-dimensional (3D), es un poliedro en tres dimensiones en el cual todas sus caras son paralelas a los ejes X , Y y Z .

Un *plano- X* es un plano que es perpendicular al eje- X ; de manera análoga definimos el *plano- Y* y el *plano- Z* .

Una *cara- X* es una cara del poliedro ortogonal que es parte de un plano- X ; de forma similar definimos una *cara- Y* y una *cara- Z* . El conjunto de todas las caras- X lo denotamos como F_x (F_y y F_z respectivamente).

Una *arista- X* es una arista del poliedro ortogonal que es paralela al eje- X ; de manera análoga definimos una *arista- Y* y una *arista- Z* . El conjunto de todas las aristas- X lo denotamos como E_x (E_y y E_z respectivamente).

6.1.1. Características de un poliedro ortogonal

Teorema 6.1.1 *El número de aristas en un poliedro ortogonal con $n = |V|$ vértices, es exactamente:*

$$|E| = \frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{2}.$$

Prueba. Sumando el grado de todos los vértices contamos cada arista exactamente dos veces, una por cada punto final. Dividiendo entre dos obtenemos el resultado deseado. \square

Los vértices pueden caracterizarse por su grado y el tipo de aristas incidentes, es decir, el número de aristas convexas (el ángulo interior entre sus caras es igual a $\pi/2$) o cóncavas (el ángulo interior entre sus caras es igual a $3\pi/2$). El siguiente cuadro muestra los tipos de vértices:

Tipo	Grado del vértice	Aristas convexas	Aristas cóncavas
I	3	3	0
II	3	2	1
III	3	1	2
IV	3	0	3
V	4	2	2
VI	6	3	3

Cuadro 6.1: Tipos de vértices.

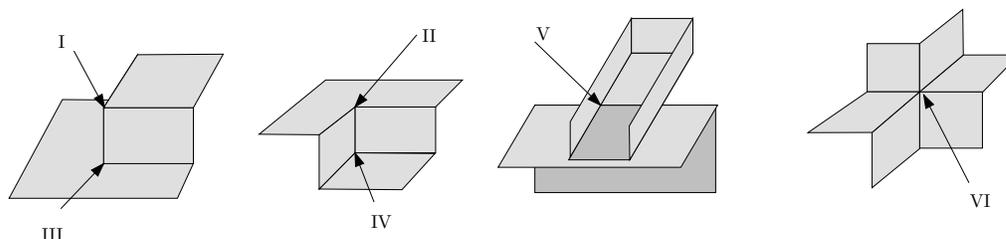


Figura 6.1: Tipos de vértices.

Lema 6.1.1 *Si un poliedro ortogonal \mathcal{P} no tiene vértices de tipo V, entonces $|E_x| = |E_y| = |E_z|$.*

Prueba. Cualquier vértice de tipo I, II, III y IV tiene una arista incidente por cada eje X , Y y Z , de manera similar los vértices del tipo VI tienen dos aristas incidentes por cada eje X , Y y Z . Por lo que cada vértice contribuye la misma cantidad en el tamaño de cada conjunto E_x , E_y y E_z . \square

Cualquier poliedro ortogonal de genero cero, es decir, con todas sus caras de dimensión 2 sin hoyos, con $n = |V|$ vértices, $m = |E|$ aristas y $f = |F|$ caras, cumple la relación de *Euler* 5.1.1 (página 66):

$$n - m + f = 2.$$

Llamamos a un poliedro ortogonal \mathcal{P} de genero cero, 3-simple, si todos sus vértice son del tipo I, II, III o IV.

El número de caras de cualquier poliedro ortogonal 3-simple \mathcal{P} con n vértices y $m = \frac{3n}{2}$ aristas, esta dado por la siguiente relación:

$$n - \frac{3n}{2} + f = 2.$$

Despejando f y resolviendo obtenemos:

$$f = \frac{n}{2} + 2,$$

o en términos de aristas al sustituir n obtenemos:

$$f = \frac{m}{3} + 2.$$

Lema 6.1.2 *Sea \mathcal{P} un poliedro ortogonal 3-simple. Sin pérdida de generalidad supongamos que $|F_x| \leq |F_y| \leq |F_z|$, de otra forma rotamos \mathcal{P} . Entonces*

$$|F_x| \in \left[2, \left\lfloor \frac{m}{9} \right\rfloor\right]$$

y

$$|F_z| \in \left[\left\lceil \frac{m}{9} \right\rceil, \left\lfloor \frac{m}{6} \right\rfloor\right]$$

Prueba. Sea \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 dos poliedros ortogonales con n vértices, si $|F_x(\mathcal{P}_1)| < |F_x(\mathcal{P}_2)|$, entonces el promedio de aristas en las caras $F_x(\mathcal{P}_2)$ es menor que el promedio de aristas en las caras $F_x(\mathcal{P}_1)$, por lo que $|F_y(\mathcal{P}_1)| \geq |F_y(\mathcal{P}_2)|$ y $|F_z(\mathcal{P}_1)| \geq |F_z(\mathcal{P}_2)|$, ya que cada cara es adyacente a al menos dos arista en las caras $F_x(\mathcal{P}_2)$. De aquí, es suficiente probar únicamente las cotas inferiores y superiores para F_x y F_z .

Para que un poliedro tenga volumen, el número mínimo de caras para cualquier plano es 2. Si $|F_x| = 2$, entonces $|F_y| + |F_z| = \frac{m}{3}$ y por lo tanto $|F_z| = \frac{m}{6}$ debido a que el número de aristas- X es igual al número de aristas- Y para cualquier polígono ortogonal.

Para la cota superior de F_x , considere la siguiente relación:

$$|F_x| + |F_y| + |F_z| = \frac{m}{3} + 2.$$

Si $|F_x| \simeq |F_y| \simeq |F_z|$, entonces $|F_x| = \frac{m}{9} + \frac{2}{3} = \lfloor \frac{m}{9} \rfloor$ y $|F_z| = \frac{m}{9} + \frac{2}{3} = \lceil \frac{m}{9} \rceil$ \square

6.1.2. Poliedro Orto-pila

Los poliedros *orto-pilas* fueron propuesto por primera vez por *Biedl* y compañía en [BDD⁺98]. En este trabajo se agregó una restricción más a dichos poliedros la cual no aparece en el artículo original.

Una sección de corte- X de un poliedro, es la intersección del poliedro con un plano- X , denotado por C_x .

Definimos un poliedro *orto-pila* como un poliedro ortogonal tal que cada sección de corte- X y todas sus caras son polígonos ortogonales simple conectados sin hoyos.

Como un plano- X es barrido por su coordenada X menor hasta su coordenada X mayor, las secciones de cruce de un poliedro orto-pila cambia en un número finito de valores de X . Denotamos estos valores por $x_0 < x_1 < \dots < x_k$. Así, para todos los valores $x_{i-1} < x_\alpha < x_i$ la sección de cruce- X con coordenadas x_α es la misma, estos son llamados secciones de corte C_i . Por definición de poliedros orto-pila, C_i es un polígono simple conectado. Definimos $C_0 = C_{k+1} = \emptyset$. La i -ésima banda es la intersección de la superficie del poliedro orto-pila con la región $\{(x_\alpha, y, z) : x_{i-1} < x_\alpha < x_i\}$.

Lema 6.1.3 *Todos los vértices de un poliedro orto-pila \mathcal{P} , tienen grado 3.*

Prueba. Supongamos que \mathcal{P} tiene un vértice v de grado 6 (tipo VI). Sea f_x la cara X que pasa por v . Es fácil ver que el vértice correspondiente a v en f_x tiene grado 4, por lo cual no es un polígono ortogonal simple, esto contradice la definición de orto-pila. De manera análoga podemos probar para vértices de grado 4 (tipo V). □

Lema 6.1.4 *El mínimo número de cortes- X de cualquier poliedro orto-pila \mathcal{P} , con m aristas, esta entre $[2, \lfloor \frac{m}{9} \rfloor]$ y el máximo número de cortes- X esta entre $\lceil \frac{m}{9} \rceil, \lfloor \frac{m}{6} \rfloor$*

Prueba. Note que los poliedros orto-pila son una clase de poliedros contenido en la clase de poliedros ortogonales 3-simples, por lo que la prueba se obtiene directamente del lema 6.1.2. □

6.2. Vigilando la superficie de un poliedro ortogonal con guardias en vértices

El siguiente problema fue propuesto por Urrutia [Urr05]. Supongamos que queremos vigilar la superficie de una nave espacial con cámaras, de tal forma que estas solamente pueden vigilar el área visible de sus caras adyacentes. ¿Cuántas cámaras en vértices son necesarios para vigilar la superficie de un poliedro ortogonal \mathcal{P} con n vértices? Podemos responder la pregunta aplicando a cada cara de \mathcal{P} con m_i vértices el teorema 4.1.2 y 4.2.1 de las páginas 41 y 47 respectivamente dependiendo del caso. Supongamos que \mathcal{P} es 3-simple, de esta forma para una cara f_i con m_i vértices, requerimos de $\lfloor \frac{m_i}{4} \rfloor$ guardias. Cada vértice es repetido en 3 caras (X, Y y Z), por lo que el número de guardias obtenidos de esta forma es a lo más $3 \sum_{v_i} \lfloor \frac{m_i}{4} \rfloor$ guardias, un problema con esta estrategia es que, varios guardias podrían colocarse en vértices comunes.

Una segunda estrategia es usar el hecho de que un poliedro ortogonal es bipartito, por lo que el poliedro puede 2-colorearse y en cada elemento de alguna clase cromática posicionar un guardia. De esta forma, requerimos de exactamente $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ guardias. ¿Podemos mejorar esta cota? El siguiente resultado muestra que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias en vértices son suficientes para vigilar la superficie de cualquier poliedro ortogonal.

6.2.1. Suficiencia

Teorema 6.2.1 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias en vértices son suficientes para vigilar la superficie de cualquier poliedro ortogonal \mathcal{P} con n vértices.

Los siguientes resultados son necesarios para la prueba del teorema 6.2.1.

Definición 6.2.1 Una gráfica plana par es una gráfica plana con todos sus vértices de grado par.

Lema 6.2.1 (Lovász [Lov79]) Las cara de cualquier gráfica plana par G pueden asignarse una 2-coloración de tal forma que dos caras que comparten una arista tienen colores diferentes.

Prueba. Sea f una cara acotada por las aristas e_1, e_2, \dots, e_m . Eliminamos las aristas e_1, e_2, \dots, e_m de G , la gráfica resultante G' es par debido a que el grado de cada uno de los vértices de la frontera de f es reducido en 2 al eliminar e_1, e_2, \dots, e_m . Inductivamente las caras de G' son 2-coloreables. Las caras de G' son la unión de la cara f y sus caras vecinas, así como todas las otras caras de G . Intercambiando el color de f pero manteniendo los colores en todas las otras caras, obtenemos una 2-coloración de las caras de G ; ver figura 6.2. \square

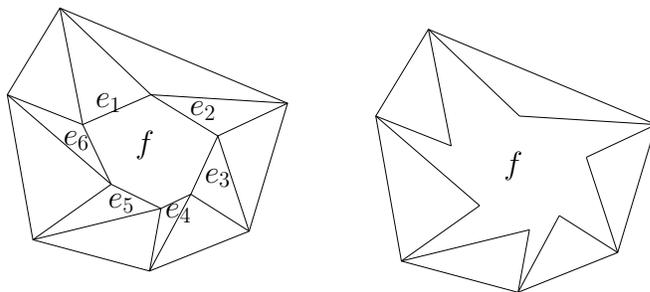


Figura 6.2: Coloración de las caras de gráficas plana par.

Teorema 6.2.2 (Hoffman y Kriegel [HK96]) *Sea G una gráfica plana, 2-conexa y bipartita. Entonces existe una triangulación de G tal que la gráfica triangulada es 3-coloreable.*

La prueba de este teorema consiste de los dos lemas siguientes.

Lema 6.2.2 (Lovász [Lov79]) *Toda gráfica plana par triangulada G es 3-coloreable.*

Prueba. Asignamos una 2-coloración a las caras de G con los colores 0 y 1 y orientamos las aristas de G de tal forma que las caras de G correspondientes al color 0 se encuentren a la derecha; ver figura 6.3. Sea C cualquier circuito dirigido. Contamos el número de aristas en el interior de C incluyendo las aristas del circuito de dos formas distintas. Sea α el número de aristas de C las cuales tienen la cara de color 0 incidentes por el lado derecho. Sea l las

caras con color 1 en el interior de C y k las caras con color 0 en el interior de C . Note que las caras con color 0 incluyen a las aristas del circuito. El número de aristas en el interior de C , incluyendo las aristas del circuito son $\alpha + 3l = 3k$, por lo que el número de aristas únicamente en el circuito C es $\alpha = 3k - 3l \equiv 0 \pmod{3}$

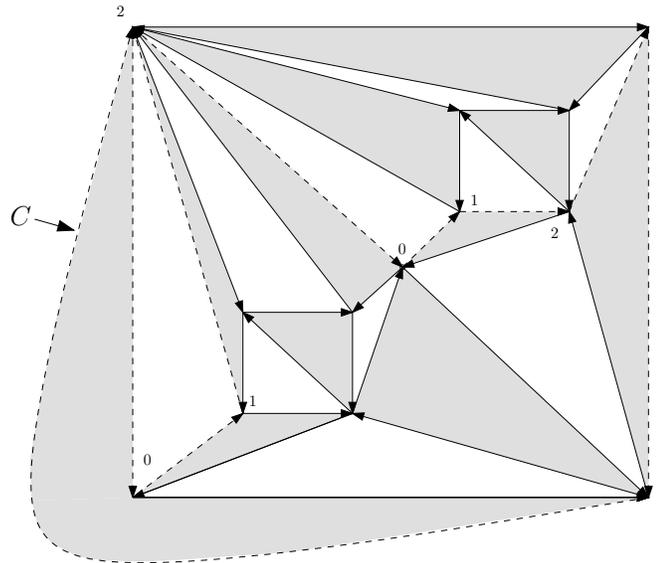


Figura 6.3: Gráfica plana par triangulada.

Dado un vértice v con un color $c(v) \in [0, 3]$ asignado, coloreamos los vértices en el circuito C a distancia d de v con las siguiente regla:

$$c(v) + d \pmod{3}.$$

Esto garantiza una tres-coloración de G . □

Lema 6.2.3 (Hoffman y Kriegel [HK96]) Sea G una gráfica plana, 2-conexa y bipartita, entonces G tiene una triangulación par.

Prueba. Como G es bipartita, todas sus caras son ciclos de tamaño par. Asumamos sin pérdida de generalidad que todas las caras de G son de tamaño 4, de otra forma, agregamos cuerdas hasta obtener caras de tamaño

4. Denotamos por Q al conjunto de todas las caras de G . Para cada cara $q \in Q$, el conjunto de los cuatro vértices en la frontera del ciclo q es denotado por V_q y denotamos el conjunto de caras adyacente a un vértice v como $Q_v = \{q \in Q | v \in V_q\}$. Fijamos una 2-coloración de G con los colores 0 y 1.

Para una cara $q \in Q$, definimos una *0-diagonal* a la diagonal uniendo los dos vértices con color 0 en V_q . De manera análoga definimos una *1-diagonal*. De esta forma, una triangulación de G no es más que escoger en cada cara una 0-diagonal o una 1-diagonal y agregarla a G .

Para cada cara $q \in Q$ en una triangulación T , introducimos una variable binaria x_q de la siguiente forma:

$$x_q = \begin{cases} 1 & \text{si } T \text{ contiene la 0-diagonal de } q; \\ 0 & \text{si } T \text{ contiene la 1-diagonal de } q. \end{cases}$$

La siguiente observación es esencial para la prueba: Si $c(v)$ es el color de un vértice $v \in V_q$, entonces el término $x_q + c(v) \pmod{2}$ describe el incremento del grado de v después de agregar la diagonal de q , la cual corresponde al valor x_q . Para el restante de esta prueba todas las sumas deben entenderse en módulo 2. La existencia de un triangulación par es equivalente a la condición de que el siguiente sistema de ecuaciones tenga al menos una solución.

$$\deg(v) + \sum_{q \in Q_v} (x_q + c(v)) = 0 \quad \forall v \in V$$

o equivalentemente

$$\sum_{q \in Q_v} x_q = \deg(v) + |Q_v|c(v) \quad \forall v \in V \quad (6.1)$$

Note que si $|V| = n$, entonces $|Q| = n - 2$, por la relación de *Euler*. Así el sistema 6.1 esta sobre-determinado y tiene una matriz A de coeficientes de $n \times (n - 2)$. El sistema tiene solución si y sólo si el rango de A es igual al rango de la matriz aumentada \overline{A} . Donde aumentada significa agregar a A un vector columna de constantes al lado derecho.

El rango de una matriz es igual al número máximo de renglones independientes, por lo que es suficiente probar que cualquier dependencia lineal en un renglón de A implica una dependencia lineal del renglón correspondiente en \overline{A} . De esta forma, sólo tenemos que probar la siguiente afirmación:

Si para algún conjunto de vértices $U \subseteq V$ ocurre que $\sum_{v \in U} \sum_{q \in Q} x_q \equiv 0$, es decir, x_q ocurre un número par de veces en las ecuaciones correspondientes a los vértices de U , entonces:

$$\sum_{v \in U} (deg(v) + |Q_v|c(v)) = 0.$$

Como x_q puede solamente ocurrir en cuatro ecuaciones correspondientes a vértices en V_q , se deduce de la afirmación que para cada $q \in Q$, el número $|V_q \cap U|$ es 0, 2 ó 4. Así podemos subdividir Q de acuerdo a su cardinalidad en Q_0, Q_2 , y Q_4 .

Ahora probaremos la afirmación al probar que la suma $\Sigma_1 = \sum_{v \in U} deg(U)$ y $\Sigma_2 = \sum_{v \in U} |Q_v|c(v)$ son ambas cero.

1. $\Sigma_1 = \sum_{v \in U} deg(U)$. Como G es plana y 2-conexa, sabemos que el grado de un vértice v es igual a la cardinalidad del conjunto Q_v . Usando este hecho y cambiando el orden de la suma tenemos

$$\Sigma_1 = \sum_{v \in U} |Q_v| = \sum_{v \in U} \sum_{q \in Q_v} 1 = \sum_{q \in Q} \sum_{v \in V_q \cap U} 1 = \sum_{q \in Q} |V_q \cap U|$$

Como ya se menciono, todos los sumandos son pares y por consiguiente $\Sigma_1 = 0$.

2. $\Sigma_2 = \sum_{v \in U} |Q_v|c(v)$. Empezamos por cambiar el orden de los sumandos

$$\Sigma_2 = \sum_{v \in U} |Q_v|c(v) = \sum_{v \in U} \sum_{q \in Q_v} c(v) = \sum_{q \in Q} \sum_{v \in V_q \cap U} c(v)$$

Ahora dividimos la suma en subsumandos Q_0, Q_2 y Q_4 . Además, subdividimos Q_2 de acuerdo a si los dos vértices en $V_q \cap U$ caen en una diagonal o en una arista de q . De esta forma tenemos:

$$\Sigma_2 = \sum_{q \in Q_0} \sum_{v \in V_q \cap U} c(v) + \sum_{q \in Q_2^{diag}} \sum_{v \in V_q \cap U} c(v) + \sum_{q \in Q_2^{arista}} \sum_{v \in V_q \cap U} c(v) + \sum_{q \in Q_4} \sum_{v \in V_q \cap U} c(v)$$

Obviamente el primer sumando es cero y puede borrarse. También podemos borrar la suma sobre Q_2^{diag} dado que cualquier sumando de este

tipo tiene ya sea la forma de $1 + 1$ ó $0 + 0$. Finalmente, en la suma sobre Q_4 , cada sumando tiene la forma $1 + 0 + 1 + 0$, por lo que también borramos esta suma, de aquí tenemos:

$$\Sigma_2 = \sum_{q \in Q_2^{arista}} \sum_{v \in V_q \cap U} c(v) = \sum_{q \in Q_2^{arista}} (1 + 0) = |Q_2^{arista}|$$

Sólo hace falta probar que $|Q_2^{arista}|$ es par. Considere la subgráfica G' de G inducida por U . Reemplazando cualquier arista en G' por un par de aristas dirigidas y opuestas. El conjunto de aristas \vec{E}_u es de cardinalidad par. Recuede que una cara $q \in Q$ es únicamente determinada por su ciclo fácil dirigido. Denotamos el conjunto de las cuatro aristas dirigidas en el ciclo fácil por \vec{E}_q . Como $|V_q \cap U|$ es par, el número $|\vec{E}_q \cap \vec{E}_u|$ es 4 si y sólo si $q \in Q_4$ o 1 si y sólo si Q_2^{arista} o cero de otra forma. Eliminamos de \vec{E}_u todas las aristas dirigidas las cuales vienen de alguna \vec{E}_q con $|\vec{E}_q \cap \vec{E}_u| = 4$. Claramente, el conjunto obtenido de esta forma es de cardinalidad par. Cada arista dirigida en este conjunto determina una cara $q \in Q_2^{arista}$ y vice versa. \square

Prueba del teorema 6.2.1. Sea $G(\mathcal{P})$ la gráfica resultante al cuadrilaterizar convexamente todas las caras del poliedro ortogonal \mathcal{P} , esto es posible por el lema 4.1.1 de la página 40. La gráfica $G(\mathcal{P})$ es bipartita y 2-conexa, aplicando el teorema 6.2.3 de la página 92 la completamos a una triangulación por $GT(\mathcal{P})$, tal que esta es 3-coloreable. Asignamos una 3-coloración a los vértices de $GT(\mathcal{P})$ con los colores $(0,1,2)$, claramente la cardinalidad de una de las clases cromáticas, digamos la clase 0, es menor que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, colocamos un guardia en cada elemento de la clase 0. La superficie queda vigilada debio a que los vértices de cada triángulo de \mathcal{P} reciben colores diferentes. \square

6.2.2. Guardias necesarios

Lema 6.2.4 *El poliedro ortogonal mostrado en la figura 6.4 con 14 vértices requiere 4 guardias para vigilarlo.*

Prueba. Tal poliedro ortogonal requiere de al menos 3 guardias debido a que hay tres caras en cualquiera de los planos X, Y o Z y al menos un

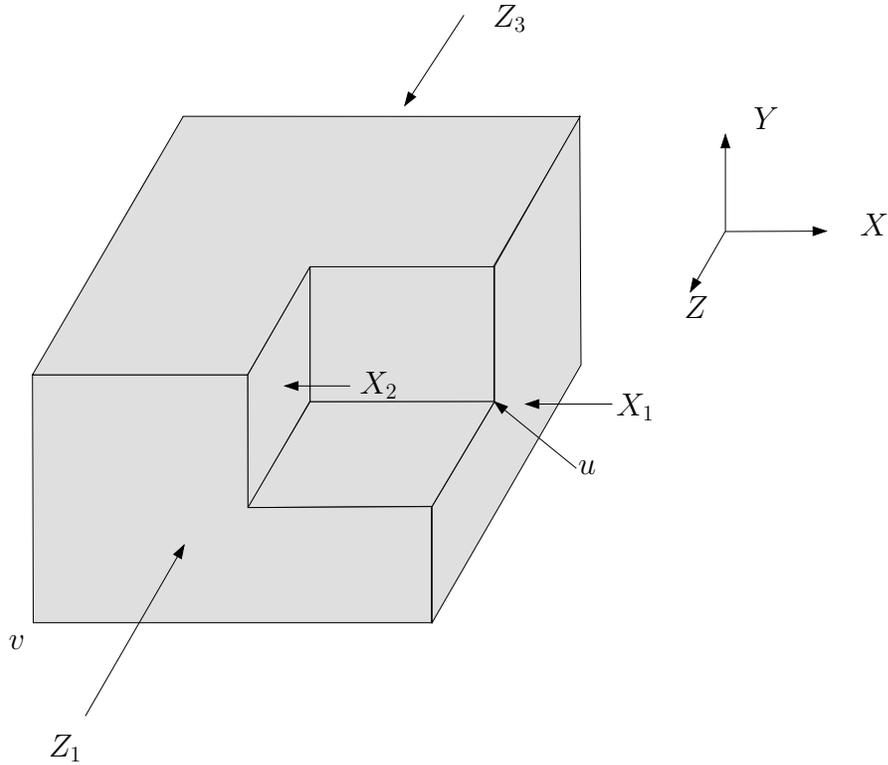


Figura 6.4: Poliedro ortogonal con 14 vértices que requiere 4 guardias.

guardia debe colocarse en cada una de ellas. Supongamos que tres guardias son suficientes. Si colocamos un vértice en cada vértice del tipo II (grado tres, con dos aristas convexas y una cóncava), entonces requerimos un guardia más para vigilar las caras no visibles en la figura. Sin pérdida de generalidad supongamos que colocamos un guardia en el vértice v , este vigila la cara Z_1 , colocamos un guardia en el vértice u de tal forma que vigile la cara X_1 . De esta forma la cara X_2 y Z_3 no están vigilada y un guardia no es suficiente para vigilar ambas caras. \square

Ahora construiremos una familia de poliedros ortogonales \mathcal{P} con n vértices que requiere $\lfloor \frac{2n}{7} \rfloor$ guardias para vigilar su superficie. Tomamos como base el polígono ortogonal P de peine con $4k$ vértices mostrado en la figura 4.6 de la página 43. Generamos un poliedro ortogonal \mathcal{P} al estirar el polígono P .

En cada pico de \mathcal{P} , sustraemos un pequeño cubo en alguna de sus esquinas; ver figura 6.5. El poliedro ortogonal resultante tiene $8k + 6k = 14k$ vértices y requiere $4k$ guardias.

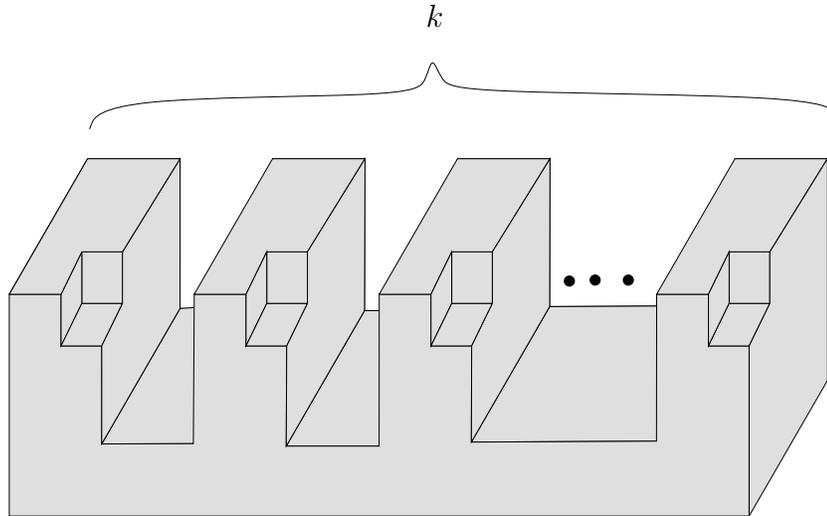


Figura 6.5: Familia de poliedros ortogonal con $14k$ vértices que requiere $4k$ guardias.

6.2.3. Algoritmo

Hoffman y Kriegel [HK96] consiguieron un algoritmo que toma $O(n^2)$ pasos para obtener una triangulación par a partir de una gráfica bipartita 2-conexa, sin embargo, ellos conjeturaron que la cota justa era $O(n^{3/2})$. En 2004, *Zhang y He* [ZH04] obtuvieron un algoritmo lineal a este problema, el cual esta basado en una prueba alternativa de 6.2.3.

Algoritmo

- *Entrada:* Poliedro ortogonal \mathcal{P} con n vértices.
- *Salida:* Conjunto de guardias en vértices de tamaño a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ tal que vigilan la superficie del poliedro.

-
1. Obtener la gráfica $G(\mathcal{P})$ al cuadrilaterizar todas las caras de \mathcal{P} .
 2. Obtener una triangulación par T de $G(\mathcal{P})$.
 3. Asignar una 3-coloración de T .
 4. Colocar un guardia en cada elemento de la clase cromática menor.

Teorema 6.2.3 *Encontrar un conjunto de guardias en vértices de tamaño a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ que vigila la superficie de un poliedro ortogonal con n vértices toma $O(n \log n)$ pasos.*

Prueba. Cuadrilaterizar todas las caras de \mathcal{P} toma $O(n \log n)$ usando el algoritmo de *Lubiw*¹ [Lub85]. Obtener una triangulación par T de $G(\mathcal{P})$ toma tiempo lineal usando [ZH04].

Tres colorear T puede implementarse en tiempo lineal de la siguiente forma: Obtenemos la gráfica dual T^* de T y asignamos una 2-coloración a los vértices T^* con los colores $(0, 1)$. Estos pasos toman tiempo lineal usando técnicas elementales de algoritmos en gráficas [CLR90]. Seleccionamos un vértice v como raíz y le asignamos un color $c(v) \in [0, 2]$. Recorremos T a partir de v , de tal forma que las caras con color 0 se encuentran siempre a la derecha. Obtenemos una 3-coloración de T al asignarle a cada vértice a distancia d de v el color $c(v) + d \pmod{3}$. Recorrer la gráfica toma tiempo lineal usando BFS o DFS [CLR90].

Claramente el cuarto paso toma tiempo lineal. De esta forma el algoritmo toma $O(n \log n)$ pasos y siempre termina con respuesta correcta debido al teorema 6.2.1. \square

6.3. Vigilando la superficie de un poliedro ortogonal con guardias en aristas

El siguiente problema fue propuesto por Urrutia [Urr05]. Supongamos ahora que las cámaras pueden moverse sobre una arista y estas únicamente

¹La elección de este algoritmo para cuadrilaterizar es debido a que las caras del poliedro ortogonal pueden contener hoyos.

pueden vigilar las áreas visibles de las caras adyacentes a sus puntos finales. ¿Cuántos guardias hacen falta para vigilar la superficie de cualquier poliedro ortogonal? El siguiente resultado muestra que una sexta parte del número de aristas son suficientes y ocasionalmente necesarios.

Una cara derecha f_d es una cara- X tal que el interior del poliedro ortogonal esta a su izquierda. Una cara izquierda f_l , la definimos de manera análoga.

Una cara superior f_s es una cara- Y tal que el interior del poliedro ortogonal esta en la parte inferior de esta. Una cara inferior f_i la definimos de manera análoga.

Una cara frontal f_f es una cara- Z tal que el interior del poliedro ortogonal esta en la parte trasera de esta. Una cara trasera f_t la definimos de manera análoga.

Una arista es superior e_s si el interior de su cara incidente se encuentra en la parte inferior, de manera análoga definimos una arista inferior e_i , arista derecha e_d , arista izquierda e_s , arista frontal e_f y arista trasera e_t .

Teorema 6.3.1 $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor$ guardias en aristas son suficientes y ocasionalmente necesarias para vigilar la superficie de cualquier poliedro ortogonal \mathcal{P} con $m = |E|$ aristas.

Prueba. Considere las siguientes reglas de vigilancia:

- $\{(f_f \cap e_d) \cup (f_t \cap e_l)\} = \{(f_d \cap e_f) \cup (f_l \cap e_t)\}$
- $\{(f_f \cap e_l) \cup (f_t \cap e_d)\} = \{(f_l \cap e_f) \cup (f_d \cap e_t)\}$
- $\{(f_f \cap e_s) \cup (f_t \cap e_i)\} = \{(f_s \cap e_f) \cup (f_i \cap e_t)\}$
- $\{(f_f \cap e_i) \cup (f_t \cap e_s)\} = \{(f_i \cap e_f) \cup (f_s \cap e_t)\}$
- $\{(f_s \cap e_l) \cup (f_i \cap e_d)\} = \{(f_l \cap e_s) \cup (f_d \cap e_i)\}$
- $\{(f_s \cap e_d) \cup (f_i \cap e_l)\} = \{(f_d \cap e_s) \cup (f_l \cap e_i)\}$

Aseveramos que cada una de estas reglas vigila toda la superficie del poliedro \mathcal{P} . Las reglas son ajenas, por lo que claramente una de estas reglas es de tamaño a lo más $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor$.

Probaremos que estas reglas vigilan la superficie del poliedro \mathcal{P} . Es suficiente probar para una regla, digamos para $\{(f_s \cap e_d) \cup (f_i \cap e_l)\} = \{(f_d \cap e_s) \cup (f_l \cap e_i)\}$, de manera similar pueden probarse las otras reglas. Tomemos cualquier punto q en una cara superior f , considere el segmento de línea h paralelo al eje- Z más grande que pasa por q , totalmente contenido en f . Deslizamos h hacia la derecha hasta alcanzar una arista derecha de f , por definición de la regla, esta arista tiene un guardia. Podemos probar de forma análoga para las caras inferior, derechas e izquierda de \mathcal{P} .

Sólo hace falta probar que las caras- Z están totalmente vigiladas. Considere un punto p en una cara- Z g . Sea l el segmento de línea horizontal más grande con punto final en p totalmente contenido en g , sea e la arista derecha incidente al punto final de l correspondiente a una cara derecha f_d , deslizamos l hacia arriba hasta alcanzar el vértice final v de e o una arista horizontal e' la cual corresponde a una cara superior f_s . Tres casos pueden ocurrir; ver figura 6.6:

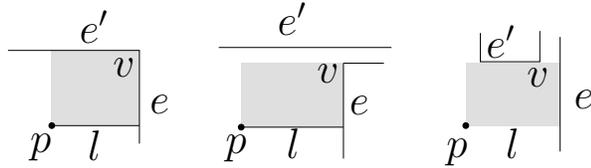


Figura 6.6: Casos para la caras- Z del teorema 6.3.1.

1. Alcanzamos una arista horizontal y al vértice final v (convexo) de e . El vértice v es el punto final de una arista derecha e_d . Por definición de la regla, este vértice es el punto final de un guardia.
2. Alcanzamos un vértice final v (cóncavo) de e . Como v es cóncavo, la cara correspondiente a la arista horizontal incidente a v es una cara inferior f_i . v corresponde al punto final de una arista izquierda e_l , por lo que este también es el punto final de un guardia.
3. Alcanzamos una arista horizontal e' . l contiene a uno o más vértices cóncavos. Sea v el vértice más a la derecha, la arista vertical incidente

a v corresponde a una cara trasera f_t . v es el punto final de una arista derecha e_d , por lo que este también es el punto final de un guardia.

Para probar la cota inferior, considere el cubo con 12 aristas, el cual requiere 2 guardias, al sustraerle o agregarle un cubo en medio de una cara, agregamos 12 aristas, esto hace un hoyo a una o dos caras. De esta forma obtenemos un poliedro ortogonal con $12 + 12k$ aristas que requiere $2 + 2k$ guardias; ver figura 6.7. \square

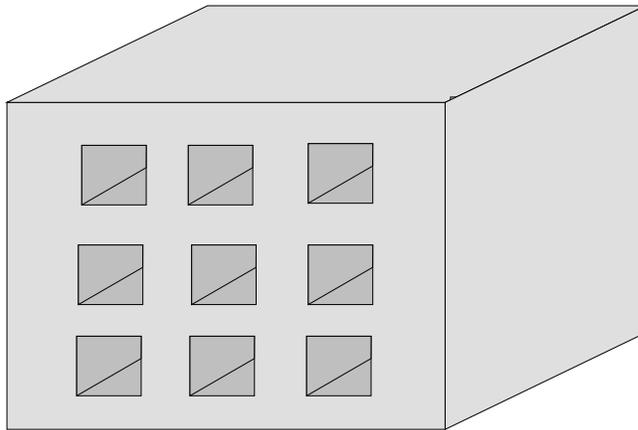


Figura 6.7: Familia de poliedros ortogonal con $12k$ aristas que requiere $\frac{k}{2}$ guardias.

6.4. Vigilando el interior de un poliedro ortogonal con guardias en aristas

Vigilar el interior de un poliedro ortogonal usando guardias en vértices no siempre es posible, aun si permitimos que cada vértice tenga un guardia, sin embargo, vigilarlo usando guardias en aristas es un problema un poco menos difícil de resolver. El siguiente teorema muestra que es suficiente una sexta parte en el número de aristas.

Teorema 6.4.1 $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor$ guardias en aristas son siempre suficientes para vigilar el interior de cualquier poliedro ortogonal \mathcal{P} con $m = |E|$ aristas.

Prueba. Considere las reglas del teorema 6.3.1. Afirmamos que cualquiera de estas reglas vigilan el interior del poliedro. Para probarlo, solamente hace falta probar para una regla, las demás pueden probarse de manera análoga.

Probaremos para la regla $\{(f_s \cap e_d) \cup (f_i \cap e_l)\} = \{(f_d \cap e_s) \cup (f_l \cap e_i)\}$. Considere cualquier sección de corte- Z , el resultado de este corte es uno a más polígonos ortogonales posiblemente con hoyos. Note que estos polígonos puede considerarse como caras- Z del poliedro, por lo que, los mismos argumentos usados en la prueba 6.3.1 pueden usarse para esta prueba. \square

6.5. Vigilando el exterior de un poliedro ortogonal con guardias en aristas

Supongamos que ahora queremos vigilar la región exterior de un poliedro ortogonal \mathcal{P} . El siguiente teorema muestra que una sexta parte del número de aristas es suficiente para resolver este problema:

Teorema 6.5.1 $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor$ guardias en aristas son siempre suficientes para vigilar el exterior de cualquier poliedro ortogonal \mathcal{P} con $m = |E|$ aristas.

Prueba. Considere otra vez las reglas del teorema 6.3.1. Aseveramos que cualquiera de estas reglas vigilan la región exterior del poliedro, de nuevo sólo hace falta probar para una regla, las otras pueden probarse de manera similar.

Probaremos para la regla $\{(f_s \cap e_d) \cup (f_i \cap e_l)\} = \{(f_d \cap e_s) \cup (f_l \cap e_i)\}$. Sea p cualquier punto en la región exterior. Note que el poliedro esta acotado por dos planos- X , dos planos- Y y dos planos- Z . Si p esta más *allá* de estos planos, entonces este punto se encuentra vigilado debido a que los planos que acotan tienen al menos una cara y por ende un guardia o el punto final de un guardia. Sólo hace falta probar que cuando p se encuentra entre los planos que acotan \mathcal{P} , este se encuentra vigilado.

Sea C_p la sección de corte formada por un plano- Z que pasa a través de p . Como p es un punto exterior, este se encuentra en la región exterior del o

los polígonos producidos por C_p . Emanamos cuatro rayos de p , uno hacia el eje- Y positivo (l_{y+}), otro al eje- Y negativo (l_{y-}), otro al eje- X positivo (l_{x+}) y por último al eje- X negativo (l_{x-}). Al menos uno de estos rayos alcanza una arista del corte C_p .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que el rayo l_{y-} alcanza una arista e , la cual corresponde a una cara superior f_s . Deslizamos l_{y-} hacia la derecha, tres casos pueden ocurrir:

1. Alcanzamos el vértice final v de e (convexo), v corresponde al punto final de una arista derecha de \mathcal{P} , por lo que la arista contiene un guardia.
2. Alcanzamos una arista vertical y al vértice final v de e (cóncavo), otra vez v corresponde al punto final de una arista derecha de \mathcal{P} , por lo que la arista contiene un guardia.
3. Alcanzamos únicamente una arista l' vertical, esta corresponde a una cara izquierda f_l de \mathcal{P} . Sea v el vértice más abajo contenido en l_{y-} . v corresponde al punto final de una arista izquierda de \mathcal{P} , por lo que la arista contiene un guardia. □

Corolario 6.5.1 $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor$ guardias en aristas son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar el interior, exterior y la superficie de cualquier poliedro ortogonal \mathcal{P} con $m = |E|$ aristas.

6.6. Conclusiones

No se ha encontrado evidencia de que la cota en el número de guardias en vértices necesarios para vigilar la superficie de cualquier poliedro ortogonal sea justa, por lo que el problema de conseguir una prueba para la cota justa queda abierto. En base a la figura 6.5, hago la siguiente conjetura:

Conjetura 6.6.1 $\lfloor \frac{2n}{7} \rfloor$ guardias en vértices son suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar la superficie de cualquier poliedro ortogonal con n vértices.

Note que el problema de vigilar un polígono ortogonal con hoyos usando guardias en vértices puede reducirse al problema de vigilar la superficie de un poliedro ortogonal con guardias en vértices, por lo que obtener una cota justa para el problema de poliedros ortogonales implica una cota justa para polígonos ortogonales con hoyos.

Para el problema de vigilar el interior de un poliedro ortogonal usando guardias en aristas. Urrutia [Urr97] hizo la siguiente conjetura basado en la figura 6.8:

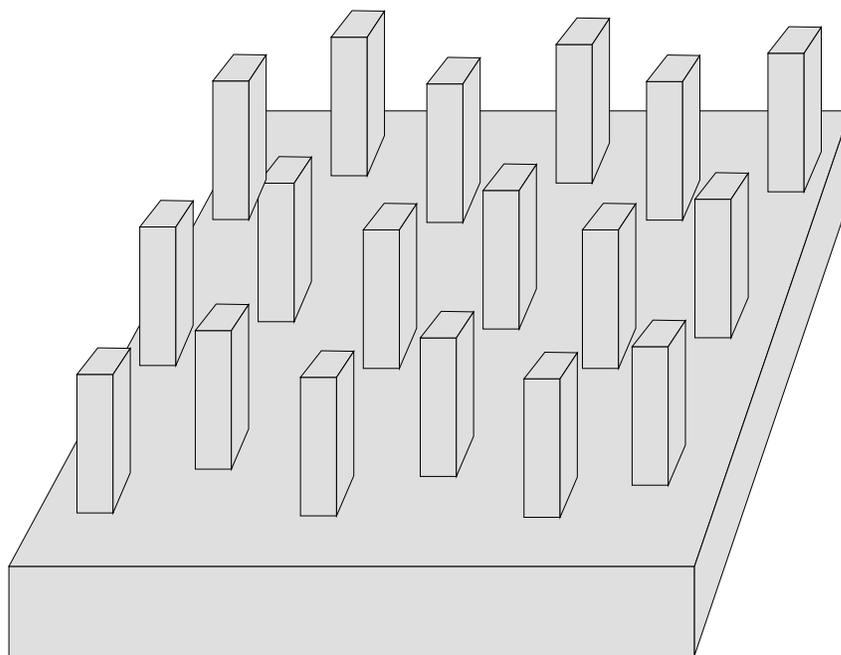


Figura 6.8: Familia de poliedros ortogonal con $12k$ aristas que requiere k guardias.

Conjetura 6.6.2 *El interior de cualquier poliedro ortogonal con m aristas puede vigilarse con a lo más $\lfloor \frac{m}{12} \rfloor + c$ guardias en aristas, con c constante.*

Por último, para el problema de vigilar el exterior de un poliedro ortogonal \mathcal{P} , podemos emplear otra estrategia de la siguiente forma:

Sea \mathcal{Q} el hexaedro más pequeño que contiene al poliedro \mathcal{P} , obtenemos un nuevo poliedro ortogonal \mathcal{P}' al sustraerle a \mathcal{Q} el poliedro \mathcal{P} , es decir, $\mathcal{P}' = \mathcal{Q} - \mathcal{P}$. Así, únicamente hace falta vigilar el interior de \mathcal{P}' . El número de aristas agregados es a lo más 12. Note que esta estrategia puede dejar guardias en segmentos de línea, las cuales no corresponden a aristas de \mathcal{P} .

De esta forma, obtener una cota justa para el problema de vigilar el interior de un poliedro ortogonal, implica obtener una cota justa (o muy aproximada) al problema de vigilar su región exterior. De aquí, podemos hacer la siguiente conjetura:

Conjetura 6.6.3 $\lfloor \frac{m}{12} \rfloor + c$ guardias en segmentos de línea son suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar la región exterior de cualquier poliedro ortogonal con $m = |E|$ aristas y c constante.

Conclusiones

En los capítulos 3, 4 y 5 se presentaron algunos teoremas de galerías de arte considerados de interés para este trabajo. El interés radica principalmente en las técnicas empleadas.

En la literatura existen una gran variedad de problemas de galerías de arte, no obstante, varios problemas continúan abiertos hasta la fecha. En [Urr97] se hace una recopilación de las variantes existentes y los problemas abiertos hasta 1997.

Con respecto a los resultados obtenidos en este trabajo tenemos que:

- La cota obtenida para el problema de vigilar la *superficie* de un poliedro ortogonal 3D usando guardias en vértices no es justa, por lo que una línea de investigación es el problema de obtener la cota justa.
- El algoritmo de $O(n \log n)$ obtenido para vigilar la *superficie* de cualquier poliedro ortogonal usando guardias en vértices es óptimo. El algoritmo es válido aún para poliedros ortogonales de género mayor o igual que cero.
- El problema de encontrar el número necesario y ocasionalmente suficiente de guardias en aristas para vigilar la *superficie* de cualquier poliedro ortogonal fue obtenido satisfactoriamente.
- El problema de vigilar el *interior* de un poliedro ortogonal 3D con m

aristas usando guardias en aristas no es justo. *Urrutia* conjeturó que $\lfloor \frac{m}{12} \rfloor$ guardias en aristas son suficientes.

Tomando ventaja de la relación de *Euler*, obtener la cota justa para el *interior* de *poliedros ortopila* puede ser un problema más sencillo de resolver. Otra línea de investigación puede ser obtenida a partir de este problema.

- El problema de vigilar el *exterior* de un poliedro ortogonal 3D con m aristas, no es justo, sin embargo, si el problema de vigilar el interior de un poliedro ortogonal 3D es resuelto, las técnicas empleadas podrían ocuparse para el problema de vigilar el exterior.

Bibliografía

- [AECSU98] J. Abello, V. Estivill-Castro, T. Shermer, and J. Urrutia. Illuminating with orthogonal floodlights. *Int. J. Comput. Geometry Appl*, 8(1):25–38, 1998.
- [AGSS89] A. Aggarwal, L. J. Guibas, J. Saxon, and P. W. Shor. A linear-time algorithm for computing the voronoi diagram of a convex polygon. *Discrete and Computational Geometry*, 4(6):591–6040, 1989.
- [AH77] K. Appel and W. Haken. Every planar map is 4-colorable. *III Journal of Mathematics*, 21:429–567, 1977.
- [BDD⁺98] T. Biedl, E. Demaine, M. Demaine, A. Lubiw, M. Overmars, J. O’Rourke, S. Robbins, and S. Whitesides. Unfolding some classes of orthogonal polyhedra. In M. Soss, editor, *Proceedings of the 10th Canadian Conference on Computational Geometry*, pages 70–71, Montréal, Québec, Canada, 1998. School of Computer Science, McGill University.
- [BKL96] P. Bose, D. Kirkpatrick, and Z. Li. Efficient algorithms for guarding or illuminating the surface of a polyhedral terrain, 1996.
- [BM76] J. Bondy and U. Murty. *Graph Theory with applications*. North Holland, 1976.

-
- [Bro81] A. Brøndsted. *Introduction to Convex Polytopes*. Springer Verlag, 1981.
- [BSS91] I. Bjorling-Sachs and D. L. Souvaine. A tight bound for guarding general polygons with holes. *Technical Report LCSR-TR165, Technical Report LCSR-TR165, Laboratory for Computer Science Research, Hill Centre for the Mathematical Sciences, Busch Campus, Rutgers University, New Brunswick, New Jersey*, 1991.
- [BSTZ97] P. Bose, T. Shermer, G. Toussaint, and B. Zhu. Guarding polyhedral terrains. *CGTA: Computational Geometry: Theory and Applications*, 7, 1997.
- [BY98] J-D. Boissonnat and M. Yviec. *Algorithmic Geometry*. Cambridge University Press, 1998.
- [Cha91] B. Chazelle. Triangulating a simple polygon in linear time. *Discrete Comput. Geom.*, 6(5):485–524, 1991.
- [Chv75] V. Chvátal. A combinatorial theorem in plane geometry. *Journal of Combinatorial Theory, series B*, 18:39–41, 1975.
- [CLR90] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, and R. L. Rivest. *An Introduction to Algorithms*. McGraw Hill, New York, 1990.
- [CRCS⁺94] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, N. Santoro, J. Urrutia, and J. Zaks. Guarding rectangular art galleries. *Disc. Applied Math.*, 50:149–157, 1994.
- [CS89] R. Cole and M. Sharir. Visibility problems for polyhedral terrains. *J. Symb. Comput.*, 7(1):11–30, 1989.
- [dBvKOS97] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. 1997.
-

-
- [dFP+86] L. deFloriani, B. Falcidieno, C. Pienovi, D. Allen, and G. Nagy. A visibility-based model for terrain features. *In Proc. 2nd International Symposium on Spatial Data Handling*, pages 235–250, 1986.
- [ECOUX95] V. Estivill-Castro, J. O’Rourke, J. Urrutia, and D. Xu. Illumination of polygons with vertex lights. *Information Processing Letters*, 56(1):9–13, 1995.
- [ECU94] V. Estivill-Castro and J. Urrutia. Optimal floodlight illumination of orthogonal polygons. *Proc. Sixth Canada Conference on Computational Geometry*, pages 81–86, 1994.
- [ECU95] V. Estivill-Castro and J. Urrutia. Two-floodlight illumination of convex polygons. *Lecture Notes in Computer Science*, 37:62–73, 1995.
- [ERC97] H. Everett and E. Rivera-Campo. Edge guarding polyhedral terrains. *Computational Geomtry*, 7:201–203, 1997.
- [Fis78] S. Fisk. A short proof of chvátal’s watchman theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 24:374, 1978.
- [GHKS96] E. Györi, F. Hoffmann, K. Kriegel, and T. Shermer. Generalized guarding and partitioning for rectilinear polygons. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 6(1):21–44, 1996.
- [Gib79] P. L. Giblin. Graphs, surfaces and homology - an introduction to algebraic topology. *Chapman and Hall, London, U.K.*, pages 41–45, 1979.
- [GJPT78] M. Garey, D. S. Johnson, F. P. Preparata, and R. E. Tarjan. Triangulating a simple polygon. *Informatic Processing Letters*, 7(4):175–179, 1978.
- [GL89] M. F. Goodchild and J. Lee. Coverage problems an visibility regions on topographic surfaces. *Annals of Operations Research*, 18:175–186, 1989.
-

-
- [Gy86] E. Györy. A simple proof of the rectilinear art gallery theorem. *SIAM journal Algebraic Discrete Methods*, 7:452–454, 1986.
- [HK96] F. Hoffman and K. Kriegel. A graph-coloring result and its consequences for polygonguarding problems. *Siam J. Discrete Math*, 9(2):210–224, 1996.
- [HKK91] F. Hoffman, M. Kaufmann, and K. Kriegel. The art gallery theorem for polygons with holes. In: *Proceedings of the 32nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, San Juan, Puerto Rico*, pages 39–48, 1991.
- [Hof90] F. Hoffman. On the rectilinear art gallery problem. *Lecture Notes in Computer Science*, pages 717–728, 1990.
- [KKK83] J. Kahn, M. Klawe, and D. Kleitman. Traditional galleries require fewer watchmen. *SIAM Journal of Algorithms and Discrete Methods*, 4(2):194–206, 1983.
- [Lee91] J. Lee. Analysis of visibility sites on topographic surfaces. *Int. J. Geographic Information System*, 5(4):413–429, 1991.
- [LL86] D. T. Lee and A. K. Lin. Computational complexity of art gallery problems. *IEEE Trans. Inf. Theor.*, 32(2):276–282, 1986.
- [Lov79] L. Lovász. *Combinatorial Problems and Exercises*. North-Holland, 1979.
- [Lub85] A. Lubiw. Decomposing polygonal regions into convex quadrilaterals. In *SCG '85: Proceedings of the first annual symposium on Computational geometry*, pages 97–106, New York, NY, USA, 1985. ACM Press.
- [MV80] S. Micali and V. Vazirani. An $O(\sqrt{V}e)$ algorithm for finding maximum matching in general graphs. *Proc. 21st Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 17–27, 1980.

-
- [Mis79] T. Nishizeki. Lower bounds on the cardinality of the maximum matchings of planar graphs. *Discrete Mathematics*, 28(3):255–267, 1979.
- [O’R83] J. O’Rourke. Galleries need fewer mobile guards: A variation on chvátals theorem. *Geometriae Dedicata*, 14:273–283, 1983.
- [O’R87] J. O’Rourke. *Art gallery problems and algorithms*. Oxford University Press, 1987.
- [OSS95] J. O’Rourke, T. Shermer, and I. Streinu. Illuminating convex polygons with vertex floodlights. *Seventh Canadian Conference on Computational Geometry*, pages 151–156, 1995.
- [OX92] J. O’Rourke and D. Xu. Illumination of polygons with 90° vertex lights. In *Snapshots in Computational Geometry*, 3:109–123, 1992.
- [She91] T. Shermer. Covering and guarding polygons using l_k -sets. *Geometriae Dedicata*, 37:183–203, 1991.
- [Tut47] W. T. Tutte. Factorization of planar graph. *J. London Math*, 22:107–111, 1947.
- [TW88] R. E. Tarjan and C. J. Van Wyk. An $o(n \log \log n)$ time algorithm for triangulating simple polygon. *SIAM Journal of Computing*, 17:143–178, 1988.
- [Urr95] J. Urrutia. Iluminando polígonos con reflectores. *Actas VI Encuentro de Geometría Computacional, Julio 1995*, F. Hurtado, M. Nov and J. Trias (eds), Univesidad Politécnica de Catalunya, pages 59–73, 1995.
- [Urr97] J. Urrutia. *Art Gallery and illumination problems*, *Handbook on Computation Geometry*. Elsevier Science Publishers, 1997.
- [Urr05] J. Urrutia. Comunicación personal, 2005.
-

- [ZH04] H. Zhang and X. He. On even triangulations of 2-connected embedded graphs. *Siam J. Computing*, pages 683–396, 2004.