

Repartiendo fichas en redes conexas: configuraciones críticas y el polinomio de Tutte

Facultad de Ciencias, UNAM.

Por Rosendo Castillo Pérez
Asesor Dr. Criel Merino López

Tesis de Licenciatura.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Castillo
Pérez
Rosendo
56 97 32 43
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Licenciatura en Ciencias de la Computación
097123871

2. Datos del tutor

Dr
Criel
Merino
López

3. Datos del sinodal 1

Dra
María Guadalupe
Rodríguez
Sánchez

4. Datos del sinodal 2

Dr
Ricardo
Gómez
Aíza

5. Datos del sinodal 3

Dr
Jorgue
Urrutia
Galicia

6. Datos del sinodal 4

Lic en C.C.
Mary Carmen
Trejo
Avila

7. Datos del trabajo escrito

Repartiendo fichas en redes conexas: configuraciones críticas y el polinomio de Tutte
92p
2006

A mi Familia con todo mi cariño.

Agradecimientos

A mis padres por su amor y apoyo incondicional, a mis hermanos por su cariño y tiempo, a mi familia en especial a mis primos por los momentos de alegría que pasamos en la infancia. A ellos les dedico este trabajo, que representa una de mis metas, gracias por estar siempre conmigo.

Al Dr. Criel Merino López por su apoyo, sus consejos y su interés para que terminará este trabajo.

A mis amigos Fidel y Mary Carmen por los buenos tiempos que pasamos durante la carrera.

AGRADECIMIENTOS

Índice general

Agradecimientos

Introducción

Prefacio

1. Conceptos básicos	1
1.1. Definiciones	1
1.2. Diferentes Clases de Gráficas	3
2. El polinomio de Tutte.	7
2.1. Polinomio Generador de Rango	7
2.2. Definición y propiedades del polinomio de Tutte.	13
2.3. El polinomio de Tutte y los árboles generadores.	18
3. Reparto de fichas	27
3.1. Configuraciones críticas	28
3.2. Árboles generadores y configuraciones críticas.	31
3.3. El nivel y la actividad externa.	38
3.4. Transversales	44
3.4.1. Decrecimiento transversal y árboles generadores	45
3.4.2. Decrecimiento transversal y configuraciones críticas	47
3.4.3. La fuerza en el decrecimiento transversal	48

4. Polinomio de Confiabilidad	51
4.1. Introducción a la Probabilidad	51
4.1.1. Definiciones básicas	51
4.1.2. Probabilidad Condicional	52
4.2. Definición del Polinomio de Confiabilidad	53
5. Algunos polinomios de Tutte	59
5.1. Polinomio de Tutte de un árbol	59
5.2. Polinomio de Tutte de un ciclo	60
5.3. Polinomio de Tutte de una rueda	60
5.4. Polinomio de Tutte de la gráfica completa	78
6. Conclusiones	89

Introducción

El propósito de esta tesis es estudiar las principales propiedades del polinomio de Tutte para generar algoritmos que permitan obtener la expresión analítica para algunas gráficas particulares. Considero que la principal aportación de esta tesis es la presentación de algunas demostraciones de resultados conocidos de manera simplificada, lo que permite tener un mejor entendimiento de los mismos.

La tesis se desarrolla en 6 capítulos:

En el primer capítulo se dan las definiciones básicas relativas a las gráficas y se presentan algunas gráficas particulares, este es un capítulo introductorio al tema. En el capítulo dos se define el polinomio de Tutte desde tres puntos de vista, el primero de ellos es a partir de la definición del polinomio generador de rango, el segundo es a través de una relación recursiva en función de los polinomios de Tutte de gráficas con una arista menos y el tercer caso es por medio de la relación que tiene el polinomio de Tutte y los árboles generadores. En este capítulo también se presentan los principales resultados asociados al polinomio de Tutte. En el capítulo tres se estudian las configuraciones críticas, el juego de reparto de fichas y se define el polinomio de nivel asociado a las configuraciones críticas de una gráfica conexa. En el capítulo cuatro se estudia el polinomio de confiabilidad, y se analiza su relación con el funcionamiento de una red, como el internet. En el capítulo cinco se obtiene las formulas para el polinomio de Tutte de algunas familias de gráficas. En el capítulo seis, se en listan nuestras conclusiones.

Confío que esta tesis, sea de fácil lectura para los estudiosos interesados en la teoría de gráficas, y en particular en los polinomios relacionados con las gráficas.

INTRODUCCIÓN

Prefacio

Existen distintos polinomios asociados con las redes o gráficas, por ejemplo, el polinomio cromático, el polinomio característico y el polinomio de confiabilidad de una red. El propósito de este trabajo es estudiar de manera particular el polinomio de Tutte y dos polinomios más que se derivan de este: el polinomio de nivel y el polinomio de confiabilidad de una red.

El trabajo se centra en el polinomio de Tutte que corresponde a una generalización del polinomio cromático y que fue propuesto por W. T. Tutte en el año de 1954. Tutte, en un principio llamó a su polinomio el dicrómata (dichromate) de la gráfica G , por el hecho de estar definido en dos variables x y y , y lo denotó indistintamente como $T_G(x, y)$ ó como $T(G; x, y)$; en la actualidad, a este polinomio generalmente se le conoce como el polinomio de Tutte de la gráfica G .

De la misma manera como ocurre con el polinomio cromático, el polinomio de Tutte de una gráfica G , puede ser definido recursivamente mediante los polinomios de Tutte de dos gráficas con una arista menos, generadas por las operaciones de corte y contracción de una arista de G . La principal virtud del polinomio de Tutte es que durante el proceso de su construcción se pierde mucho menos información de la gráfica que con el polinomio cromático.

El polinomio de Tutte se puede definir para una gráfica o para una estructura más general llamada matroide. Este polinomio tiene una diversidad de interpretaciones al evaluarlo a lo largo de distintas curvas y puntos del plano $X \times Y$. El motivo principal de esta tesis es explorar algunas de estas interpretaciones, como el polinomio de nivel y el polinomio de confiabilidad de una red. Aunque el polinomio de nivel surge de un proceso o juego de reparto de fichas en las gráficas, y el polinomio de confiabilidad de una red, corresponde al cálculo de la probabilidad de que todos los nodos de una red se mantengan en contacto, ambos polinomios corresponden a un polinomio de Tutte evaluado en valores particulares de x y y .

PREFACIO

Capítulo 1

Conceptos básicos

1.1. Definiciones

Los conceptos básicos de la teoría de gráficas son extraordinariamente simples y se pueden aplicar a problemas de muy diferentes áreas. En este capítulo se presentarán las definiciones básicas de la teoría de gráficas para familiarizar al lector con la terminología y la notación utilizada en el estudio del polinomio de Tutte.

Definición 1.1. Una gráfica G en la clase \mathcal{G} es un par ordenado de conjuntos disjuntos (V, E) donde $V = V(G)$ es un conjunto de puntos, llamados vértices, y $E = E(G)$ es un conjunto de pares de vértices, llamados aristas.

Una arista $\{xy\}$ une a los vértices x y y , y se denota por xy . Así xy y yx es exactamente la misma arista y los vértices x y y son los vértices extremos de la arista. Si $xy \in E(G)$, entonces x y y son vértices adyacentes o vecinos en G , y son incidentes con la arista xy . Dos aristas son adyacentes si tienen exactamente un vértice extremo en común.

De manera intuitiva, al pensar en una gráfica no se piensa en un par ordenado, sino en un conjunto de vértices unidos por aristas y de manera natural se dibuja una gráfica como una figura en una superficie plana.

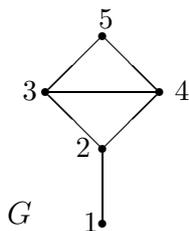
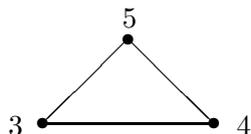


Figura 1.1. Una gráfica

Es más fácil visualizar la gráfica compuesta por los vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y las aristas $E = \{12, 23, 24, 34, 35, 45\}$ con un dibujo como el presentado en la figura 1.1.

Definición 1.2. Dada una gráfica $G = (V, E)$, se dice que $G' = (V', E')$ es una subgráfica de G , si $E' \subset E$ y $V' \subset V$ y escribimos $G' \subset G$.



La figura muestra una subgráfica G' de G en la figura 1.1.

Por definición, una gráfica no contiene lazos, esto es, una arista que une al mismo vértice xx , ni tampoco contiene aristas múltiples o paralelas, esto es, varias aristas que unen a los mismos vértices. En este trabajo se considera que las gráficas pueden contener tanto lazos como multiaristas, si se quiere especificar que una gráfica no tiene ni lazos ni multiaristas se les denominara como gráficas simples.

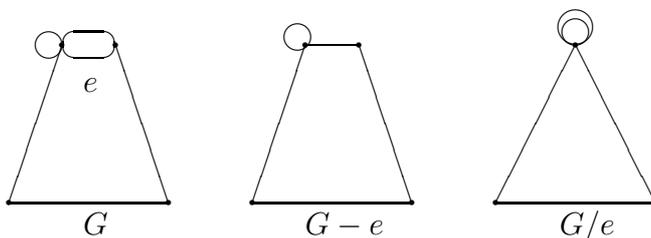
Definición 1.3. Sea $G = (V, E)$ una gráfica en la clase \mathcal{G} , y sea una arista $e \in E$, se define la operación de borrado de la arista e en la gráfica G como la gráfica $G - e = (V, E - \{e\})$.

Esto significa que $G - e$ es el resultado de borrar la arista e de la gráfica G .

Definición 1.4. Sea $G = (V, E)$ una gráfica en la clase \mathcal{G} , y sea $e \in E$, se define la operación de contracción G/e como la gráfica que se obtiene cuando los vértices incidentes a e se identifican en un sólo vértice y la arista e desaparece.

Note que si la arista e es un lazo, la operación de borrado y la operación de contracción relativas a esa arista generan la misma gráfica, esto es, si $e \in E$ es un lazo, entonces $G - e = G/e$.

En la siguiente figura se muestra una gráfica G , y las operaciones de borrado y contracción de la arista e .



Definición 1.5. Una trayectoria es una gráfica P de la forma

$$V(P) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_l\}, \quad E(P) = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{l-1}v_l\}$$

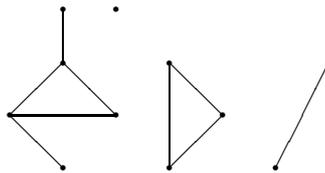
La siguiente gráfica representa una trayectoria,



Definición 1.6. Una gráfica es conexa si para cada par de vértices distintos $\{x_1, x_2\}$ existe una trayectoria de x_1 a x_2 .

Definición 1.7. Una componente C de la gráfica G es una subgráfica conexa de G tal que cualquier otra subgráfica conexa C' de G es tal que $V(C') \cap V(C) = \emptyset$ o C' es subgráfica de C .

La siguiente gráfica tiene 4 componentes



Definición 1.8. Sea $e \in E(G)$ se dice que e es puente si el número de componentes de $G - e$ es mayor que el número de componentes de G .

De esta manera si G es una gráfica conexa y e es un puente de G , entonces $G - e$ es desconexa.

1.2. Diferentes Clases de Gráficas

Definición 1.9. Un ciclo es una gráfica W de la forma

$$V(W) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_l\}, \quad E(W) = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{l-1}v_l, v_lv_0\}$$

La siguiente gráfica representa un ciclo,



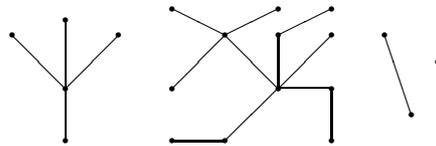
En particular, una gráfica consistente de un vértice y un lazo es un ciclo.

Definición 1.10. *Un árbol es una gráfica conexa que no tiene ciclos y se denota como $T = (V, E)$.*

La gráfica consistente de un único vértice es un árbol.

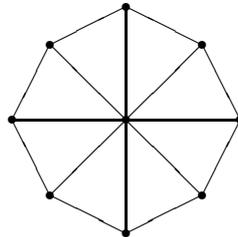
Definición 1.11. *Un bosque es una gráfica $F = (V, E)$ tal que sus componentes conexas son árboles.*

La siguiente gráfica es un bosque.



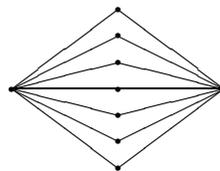
Definición 1.12. *Una rueda es una gráfica $W_n = (V, E)$ con $V = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $E = \{v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_0v_4, \dots, v_0v_n, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$.*

La siguiente figura representa una rueda de nueve vértices.



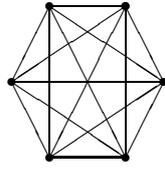
Definición 1.13. *Una gráfica $G = (V, E)$ es bipartita si $V = V_1 \cup V_2$ con $V_1 \neq \phi$, $V_2 \neq \phi$ y $V_1 \cap V_2 = \phi$, y $E = \{xy \mid x \in V_1 \text{ y } y \in V_2\}$.*

La siguiente gráfica es bipartita, con $|V_1| = 2$ y $|V_2| = 7$.



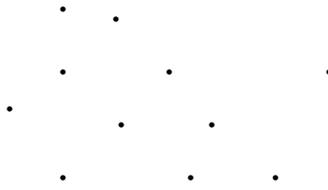
Definición 1.14. *La gráfica completa $K_n = (V, E)$ es tal que $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ y $E = \{v_iv_j \mid v_i, v_j \in V \text{ y } v_i \neq v_j\}$*

En K_n cada pareja de vértices están unidos por una arista. La siguiente figura representa la gráfica completa de seis vértices,



Definición 1.15. La gráfica vacía $E_n = (V, G)$ es tal que $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ $E = \phi$

La siguiente es una gráfica vacía de 11 vértices,



Capítulo 2

El polinomio de Tutte.

2.1. Polinomio Generador de Rango

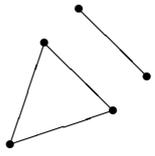
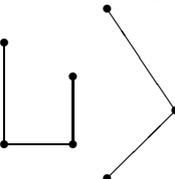
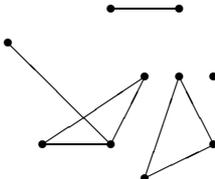
El polinomio de Tutte es uno de los miembros más conocidos de una pequeña familia de polinomios asociados a una gráfica

Existen diferentes maneras de introducir al polinomio de Tutte, aquí comenzaremos con la forma basada en el polinomio generador de rango.

Definición 2.1. Dada una gráfica $G = (V, E)$, se define

- $k(G)$ como el número de componentes conexas de G .
- $r(G)$ como el rango de G , dado por $r(G) = |V| - k(G)$, y
- $n(G)$ como la nulidad de G , dada por $n(G) = |E| - |V| + k(G)$

Para entender estos conceptos, se muestran algunas gráficas con el cálculo de estos números

		
$k(G) = 2$	$k(G) = 3$	$k(G) = 4$
$r(G) = 5 - 2 = 3$	$r(G) = 8 - 3 = 5$	$r(G) = 10 - 4 = 6$
$n(G) = 4 - 5 + 2 = 1$	$n(G) = 5 - 8 + 3 = 0$	$n(G) = 8 - 10 + 4 = 2$

Definición 2.2. Sea una gráfica $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ una subgráfica de G , se dice que G' es una subgráfica generadora de G si $V' = V$ y $E' \subset E$.

Dado que una subgráfica generadora de G se puede identificar por medio de sus aristas, entonces para la subgráfica conexa $G' = (V, F)$, con $F \subseteq E$ se utilizará la notación $r_G\langle F \rangle$, $n_G\langle F \rangle$, $k_G\langle F \rangle$ para designar al rango, a la nulidad y al número de componentes de esta subgráfica de G , en particular, $r_G\langle E \rangle = r(G)$, $n_G\langle E \rangle = n(G)$ y $k_G\langle E \rangle = k(G)$.

Ya estamos en condiciones para definir el concepto de polinomio generador de rango de una gráfica G :

Definición 2.3. Dada una gráfica $G = (V, E)$, se define al polinomio generador de rango $S(G; x, y)$, como la función

$$S(G; x, y) = \sum_{F \subseteq E(G)} x^{r_G\langle E \rangle - r_G\langle F \rangle} y^{n_G\langle F \rangle} = \sum_{F \subseteq E(G)} x^{k_G\langle F \rangle - k_G\langle E \rangle} y^{n_G\langle F \rangle}$$

Por ejemplo, para la gráfica vacía E_n , se tiene que $k(E_n) = |V|$, por lo que $r(E_n) = n(E_n) = 0$, entonces por la definición de polinomio de rango obtenemos $S(E_n; x, y) = 1$.

El enunciado del siguiente teorema se le puede adjudicar a W.T. Tutte en su artículo seminal "A ring in graph theory" [1], aunque Tutte originalmente no lo expresó en términos del polinomio generador de rango; sin embargo, el espíritu es el mismo, el invariante considerado satisface una relación lineal con el borrado y contracción de una arista. La prueba que aquí se presenta se puede encontrar en Bollobas [2], Brox [3].

Teorema 2.4. Sea $G = (V, E)$ una gráfica con $e \in E$. Entonces

$$S(G; x, y) = \begin{cases} (x+1)S(G-e; x, y) & \text{si } e \text{ es un puente,} \\ (y+1)S(G-e; x, y) & \text{si } e \text{ es un lazo,} \\ S(G-e; x, y) + S(G/e; x, y) & \text{si } e \text{ no es puente ni lazo.} \end{cases}$$

Demostración Observe que el polinomio de rango $S(G; x, y)$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$S(G; x, y) = S_0(G; x, y) + S_1(G; x, y),$$

donde

$$S_0(G; x, y) = \sum_{F \subseteq E - \{e\}} x^{r_G\langle E \rangle - r_G\langle F \rangle} y^{n_G\langle F \rangle}$$

y

$$S_1(G; x, y) = \sum_{F \subset E - \{e\}} x^{r_G \langle E \rangle - r_G \langle F \cup \{e\} \rangle} y^{n_G \langle F \cup \{e\} \rangle}$$

Ahora se van a obtener formas alternas de escribir los exponentes de estos dos últimos polinomios. Primero para $S_0(G; x, y)$, sea $e \in E(G)$, entonces

$$k_G \langle E \rangle = \begin{cases} k_{G-e} \langle E - \{e\} \rangle - 1 & \text{si } e \text{ es un puente} \\ k_{G-e} \langle E - \{e\} \rangle & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$r_G \langle E \rangle = \begin{cases} r_{G-e} \langle E - \{e\} \rangle + 1 & \text{si } e \text{ es un puente} \\ r_{G-e} \langle E - \{e\} \rangle & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Y para $F \subset E - \{e\}$ la subgráfica generadora de G con aristas en F es igual a la subgráfica de $G - e$ con aristas en F , por lo que

$$k_G \langle F \rangle = k_{G-e} \langle F \rangle; \quad r_G \langle F \rangle = r_{G-e} \langle F \rangle; \quad n_G \langle F \rangle = n_{G-e} \langle F \rangle,$$

y por consecuencia

$$r_G \langle E \rangle - r_G \langle F \rangle = \begin{cases} r_{G-e} \langle E - \{e\} \rangle - r_{G-e} \langle F \rangle + 1 & \text{si } e \text{ es un puente} \\ r_{G-e} \langle E - \{e\} \rangle - r_{G-e} \langle F \rangle & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (2.1.1)$$

$$n_G \langle F \rangle = n_{G-e} \langle F \rangle \quad (2.1.2)$$

De esta manera se sustituye (2.1) y (2.2) en $S_0(G; x, y)$

$$\begin{aligned} S_0(G; x, y) &= \sum_{F \subset E - \{e\}} x^{r_G \langle E \rangle - r_G \langle F \rangle} y^{n_G \langle F \rangle} \\ &= \begin{cases} \sum_{F \subset E - \{e\}} x^{r_{G-e} \langle E - \{e\} \rangle + 1 - r_{G-e} \langle F \rangle} y^{n_{G-e} \langle F \rangle} & \text{si } e \text{ es un puente,} \\ \sum_{F \subset E - \{e\}} x^{r_{G-e} \langle E - \{e\} \rangle - r_{G-e} \langle F \rangle} y^{n_{G-e} \langle F \rangle} & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} xS(G - e; x, y) & \text{si } e \text{ es un puente,} \\ S(G - e; x, y) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora se encuentra una manera alternativa de escribir a $S_1(G; x, y)$. Sea $e \in E(G)$, entonces

$$k_G\langle E \rangle = k_{G/e}\langle E - \{e\} \rangle,$$

$$r_G\langle E \rangle = \begin{cases} r_{G/e}\langle E - \{e\} \rangle & \text{si } e \text{ es un lazo} \\ r_{G/e}\langle E - \{e\} \rangle + 1 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Y para $F \subset E - \{e\}$ se sigue que:

$$k_G\langle F \cup \{e\} \rangle = k_{G/e}\langle F \rangle = \begin{cases} k_{G-e}\langle F \rangle - 1 & \text{si } e \text{ es un puente} \\ k_{G-e}\langle F \rangle & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

y

$$r_G\langle F \cup \{e\} \rangle = \begin{cases} r_{G/e}\langle F \rangle & \text{si } e \text{ es un lazo} \\ r_{G/e}\langle F \rangle + 1 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

ó

$$r_G\langle F \cup \{e\} \rangle = \begin{cases} r_{G-e}\langle F \rangle + 1 & \text{si } e \text{ es un puente} \\ r_{G-e}\langle F \rangle & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

De esta manera se tiene que $r_G\langle E \rangle - r_G\langle F \cup \{e\} \rangle$ y $n_G\langle F \cup \{e\} \rangle$ en términos de G/e es,

$$r_G\langle E \rangle - r_G\langle F \cup \{e\} \rangle = r_{G/e}\langle E - \{e\} \rangle - r_{G/e}\langle F \rangle \quad (2.1.3)$$

y

$$n_G\langle F \cup \{e\} \rangle = \begin{cases} n_{G/e}\langle F \rangle + 1 & \text{si } e \text{ es un lazo} \\ n_{G/e}\langle F \rangle & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (2.1.4)$$

y al sustituir (2.3) y (2.4) en $S_1(G; x, y)$, se tiene que

$$\begin{aligned} S_1(G; x, y) &= \sum_{F \subset E - \{e\}} x^{r_G\langle E \rangle - r_G\langle F \cup \{e\} \rangle} y^{n_G\langle F \cup \{e\} \rangle} \\ &= \begin{cases} \sum_{F \subset E - \{e\}} x^{r_{G/e}\langle E - \{e\} \rangle - r_{G/e}\langle F \rangle} y^{n_{G/e}\langle F \rangle + 1} & \text{si } e \text{ es un lazo,} \\ \sum_{F \subset E - \{e\}} x^{r_{G/e}\langle E - \{e\} \rangle - r_{G/e}\langle F \rangle} y^{n_{G/e}\langle F \rangle} & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} yS(G/e; x, y) & \text{si } e \text{ es un lazo,} \\ S(G/e; x, y) & \text{otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Los mismos valores de $r_G\langle E \rangle - r_G\langle F \cup \{e\} \rangle$ y $n_G\langle F \cup \{e\} \rangle$ en términos de la gráfica $G - e$ son:

$$r_G\langle E \rangle - r_G\langle F \cup \{e\} \rangle = r_{G-e}\langle E - \{e\} \rangle - r_{G-e}\langle F \rangle \quad (2.1.5)$$

$$n_G\langle F \cup \{e\} \rangle = \begin{cases} n_{G-e}\langle F \rangle & \text{si } e \text{ es un puente} \\ n_{G-e}\langle F \rangle + 1 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (2.1.6)$$

y al sustituir (2.5) y (2.6) en $S_1(G; x, y)$, se tiene que

$$\begin{aligned} S_1(G; x, y) &= \sum_{F \subset E - \{e\}} x^{r_G\langle E \rangle - r_G\langle F \cup \{e\} \rangle} y^{n_G\langle F \cup \{e\} \rangle} \\ &= \begin{cases} \sum_{F \subset E - \{e\}} x^{r_{G-e}\langle E - \{e\} \rangle - r_{G-e}\langle F \rangle} y^{n_{G-e}\langle F \rangle} & \text{si } e \text{ es un puente,} \\ \sum_{F \subset E - \{e\}} x^{r_{G-e}\langle E - \{e\} \rangle - r_{G-e}\langle F \rangle} y^{n_{G-e}\langle F \rangle + 1} & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} S(G - e; x, y) & \text{si } e \text{ es un puente,} \\ yS(G - e; x, y) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalmente, al sumar $S_0(G; x, y)$ y $S_1(G; x, y)$ se tiene que

para e puente:

$$S(G; x, y) = S_0(G; x, y) + S_1(G; x, y) = xS(G - e; x, y) + S(G - e; x, y) = (1+x)S(G - e; x, y)$$

para e lazo, se tiene que $G - e = G/e$, y:

$$S(G; x, y) = S_0(G; x, y) + S_1(G; x, y) = S(G - e; x, y) + yS(G/e; x, y) = (1+y)S(G - e; x, y)$$

y para e ni puente ni lazo:

$$S(G; x, y) = S_0(G; x, y) + S_1(G; x, y) = S(G - e; x, y) + S(G/e; x, y)$$

y queda demostrado el teorema. \square

El siguiente teorema también es debido a W.T. Tutte [1], la prueba que damos es propia.

Teorema 2.5. *Sea $G = (V, E)$ una gráfica, el polinomio generador de rango de G es igual al producto de los polinomios generadores de rango de cada una de las componentes conexas de la gráfica.*

Demostración La demostración se hace por inducción sobre el número de componentes conexas de la gráfica.

Para el caso $k_G(E) = 1$ el resultado es trivial. Sea $k_G(E) = 2$, entonces existen dos subgráficas conexas $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, tales que $E = E_1 \cup E_2$, $V = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \phi$; así para cualquier subconjunto $F \subset E$ se tiene que $F = F_1 \cup F_2$ con $F_1 \subset E_1$ y $F_2 \subset E_2$, por lo que $k(F) = k(F_1) + k(F_2)$ y $|F| = |F_1 \cup F_2| = |F_1| + |F_2|$; entonces,

$$\begin{aligned}
S(G; x, y) &= \sum_{F \subset E(G)} x^{r_G \langle E \rangle - r_G \langle F \rangle} y^{n_G \langle F \rangle} = \sum_{F_1 \subset E_1; F_2 \subset E_2} x^{r_G \langle E_1 \cup E_2 \rangle - r_G \langle F_1 \cup F_2 \rangle} y^{n_G \langle F_1 \cup F_2 \rangle} \\
&= \sum_{F_1 \subset E_1; F_2 \subset E_2} x^{r_{G_1} \langle E_1 \rangle + r_{G_2} \langle E_2 \rangle - r_{G_1} \langle F_1 \rangle - r_{G_2} \langle F_2 \rangle} y^{n_{G_1} \langle F_1 \rangle + n_{G_2} \langle F_2 \rangle} \\
&= \sum_{F_1 \subset E_1} x^{r_{G_1} \langle E_1 \rangle - r_{G_1} \langle F_1 \rangle} y^{n_{G_1} \langle F_1 \rangle} \sum_{F_2 \subset E_2} x^{r_{G_2} \langle E_2 \rangle - r_{G_2} \langle F_2 \rangle} y^{n_{G_2} \langle F_2 \rangle} \\
&= S(G_1; x, y) S(G_2; x, y)
\end{aligned}$$

Entonces el teorema se cumple para $k_G(E) = 2$. Ahora suponemos que el teorema se cumple para $k_G(E) = n$ y se demuestra que se cumple para $k_G(E) = n + 1$.

Sea G con componentes conexas

$G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2), \dots, G_{n+1} = (V_{n+1}, E_{n+1})$; así para cualquier subconjunto de aristas $F \subset E$ se tiene que $F = \cup_{i=1}^n F_i \cup F_{n+1}$ con $F_i \subset E_i$.

$$\begin{aligned}
S(G; x, y) &= \sum_{F \subset E(G)} x^{r_G \langle E \rangle - r_G \langle F \rangle} y^{n_G \langle F \rangle} = \sum_{F_i \subset E_i; i=1, \dots, (n+1)} x^{r_G \langle \cup_{i=1}^{n+1} E_i \rangle - r_G \langle \cup_{i=1}^{n+1} F_i \rangle} y^{n_G \langle \cup_{i=1}^{n+1} F_i \rangle} \\
&= \sum_{F_i \subset E_i; i=1, \dots, (n+1)} x^{r_{\cup_{i=1}^n G_i} \langle \cup_{i=1}^n E_i \rangle + r_{G_{n+1}} \langle E_{n+1} \rangle - r_{\cup_{i=1}^n G_i} \langle \cup_{i=1}^n F_i \rangle - r_{G_{n+1}} \langle F_{n+1} \rangle} y^{n_{\cup_{i=1}^n G_i} \langle \cup_{i=1}^n F_i \rangle + n_{G_{n+1}} \langle F_{n+1} \rangle} \\
&= \sum_{\cup_{i=1}^n F_i \subset \cup_{i=1}^n E_i} x^{r_{\cup_{i=1}^n G_i} \langle \cup_{i=1}^n E_i \rangle - r_{\cup_{i=1}^n G_i} \langle \cup_{i=1}^n F_i \rangle} y^{n_{\cup_{i=1}^n G_i} \langle \cup_{i=1}^n F_i \rangle} \sum_{F_{n+1} \subset E_{n+1}} x^{r_{G_{n+1}} \langle E_{n+1} \rangle - r_{G_{n+1}} \langle F_{n+1} \rangle} y^{n_{G_{n+1}} \langle F_{n+1} \rangle} \\
&= S(\cup_{i=1}^n G_i; x, y) S(G_{n+1}; x, y)
\end{aligned}$$

por el axioma de inducción, se tiene que para la gráfica $\cup_{i=1}^n G_i$ se satisface el teorema, por lo que

$$S(G; x, y) = S(G_1; x, y) S(G_2; x, y) S(G_3; x, y) \dots S(G_{n+1}; x, y)$$

Entonces se concluye que el teorema se satisface para cualquier gráfica. \square

Teorema 2.6. Sea $G = (V, E)$ una gráfica conexa con m subgráficas $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_m = (V_m, E_m)$ tales que $E_i \cap E_j = \emptyset$ y $V_i \cap V_j = \{v_0\}$ para toda $i \neq j$, entonces

$$S(G; x, y) = S(G_1; x, y)S(G_2; x, y)S(G_3; x, y) \dots S(G_m; x, y)$$

Demostración Como $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m$ todo subconjunto de aristas $F \subset E$ se puede escribir como la unión disjunta de subconjuntos de E_i , $F_i \subset E_i$; $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_m$ entonces $k_G(F) = k_{G_1}(F_1) + k_{G_2}(F_2) + \dots + k_{G_m}(F_m)$, $r_G(F) = r_{G_1}(F_1) + r_{G_2}(F_2) + \dots + r_{G_m}(F_m)$ y $n_G(F) = n_{G_1}(F_1) + n_{G_2}(F_2) + \dots + n_{G_m}(F_m)$, de aquí se sigue de manera semejante a la demostración del teorema anterior. \square

2.2. Definición y propiedades del polinomio de Tutte.

Definición 2.7. Dada una gráfica G se define el polinomio de Tutte como

$$T_G(x, y) = S(G; x - 1, y - 1) = \sum_{F \subset E(G)} (x - 1)^{r_G(E) - r_G(F)} (y - 1)^{n_G(F)}.$$

Tutte usaba la notación $T(G; x, y)$ para el dicrómata, ahora se utiliza indistintamente las formas

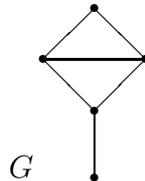
$$T(G; x, y) = T_G = T(G) = T_G(x, y).$$

Dado que el polinomio de Tutte es una transformación del polinomio generador de rango, satisface la relación de recurrencia,

$$T_G = \begin{cases} xT_{G-e} & \text{si } e \text{ es un puente,} \\ yT_{G-e} & \text{si } e \text{ es un lazo,} \\ T_{G-e} + T_{G/e} & \text{si } e \text{ no es puente ni lazo.} \end{cases}$$

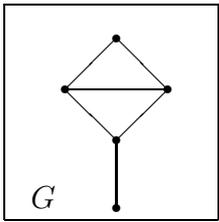
Como ejemplo, se va a desarrollar el polinomio de Tutte para la siguiente gráfica, primero utilizando la definición de el polinomio generador de rango y luego utilizando la relación de recurrencia.

La gráfica es:



Esta gráfica tiene 64 diferentes subconjuntos de aristas $F \in G$. Estas subgráficas se presentan de acuerdo al número de aristas.

Primer subgráfica con $|E| = |F| = 6$

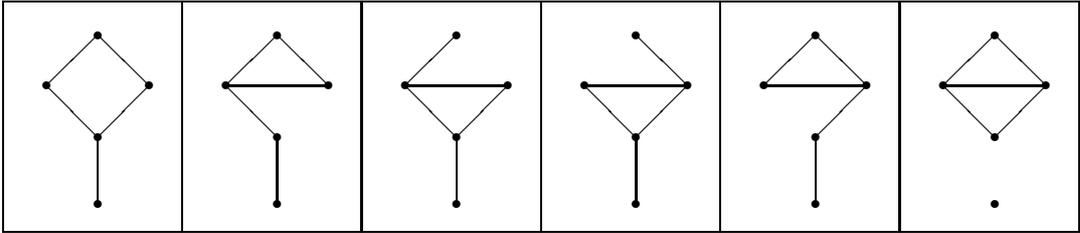


$k(F) = 1$
 $r(F) = 4;$ $r(E) - r(F) = 0$
 $n(F) = 2$

El término $(x - 1)^{r(E)-r(F)}(y - 1)^{n(F)}$ aportado al polinomio de Tutte por esta subgráfica es

$$(y - 1)^2 = y^2 - 2y + 1.$$

Subgráficas de G con $|F| = 5$ son 6,



5 con
 $r(F) = 4$
 $n(F) = 1$
 1 con
 $r(F) = 3$
 $n(F) = 2$

Los términos $(x - 1)^{r(E)-r(F)}(y - 1)^{n(F)}$ aportados al polinomio de Tutte por estas subgráficas son

$$5(y - 1) + (x - 1)(y - 1)^2 = xy^2 - 2xy + x - y^2 + 7y - 6.$$

Subgráficas de G con $|F| = 4$ son 15,

	7 con $k(F) = 2$ $r(F) = 3$ $n(F) = 1$		8 con $k(F) = 1$ $r(F) = 4$ $n(F) = 0$			

Los términos $(x-1)^{r(E)-r(F)}(y-1)^{n(F)}$ aportados al polinomio de Tutte por estas subgráficas son

$$7(x-1)(y-1) + 8 = 7xy - 7x - 7y + 15$$

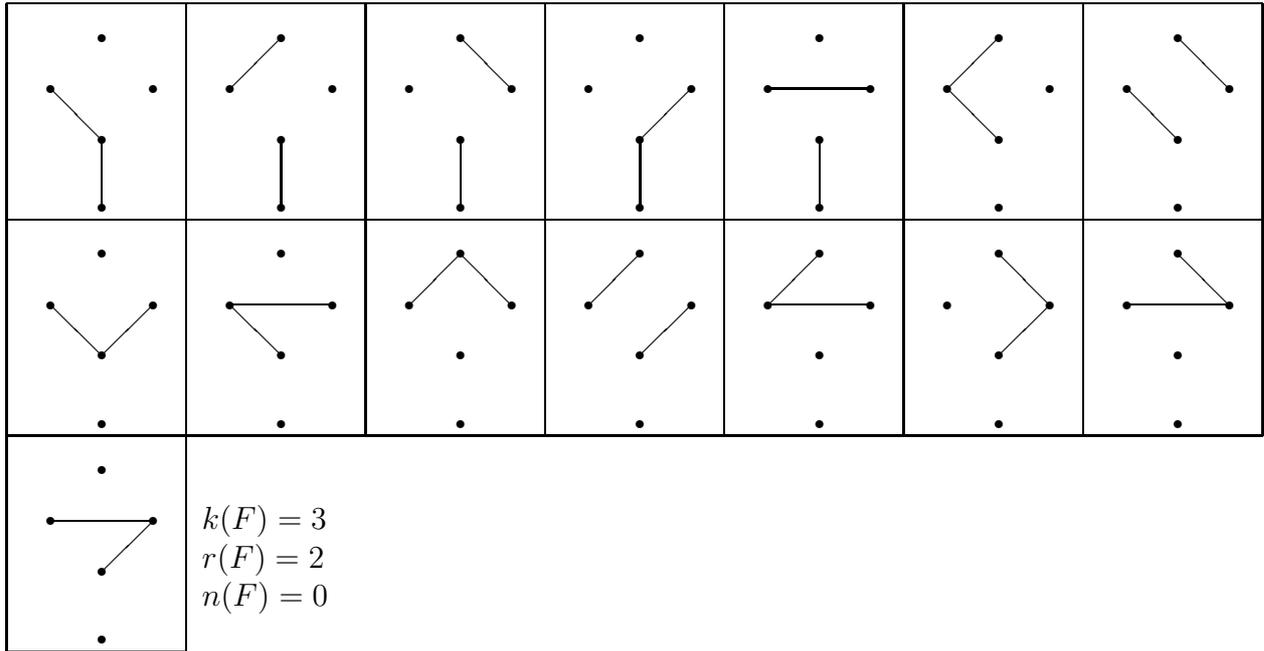
Subgráficas de G con $|F| = 3$ son 20,

						18 con $r(F) = 3$ $n(F) = 0$
						2 con $r(F) = 2$ $n(F) = 1$

Los términos $(x-1)^{r(E)-r(F)}(y-1)^{n(F)}$ aportados al polinomio de Tutte por estas subgráficas son

$$18(x-1) + 2(x-1)^2(y-1) = 2x^2y - 4xy + 2y - 2x^2 + 22x - 20.$$

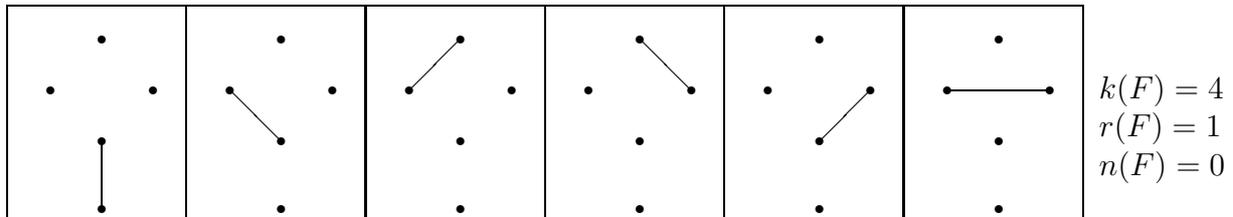
Subgráficas de G con $|F| = 2$ son 15,



Los términos $(x-1)^{r(E)-r(F)}(y-1)^{n(F)}$ aportados al polinomio de Tutte por estas subgráficas son

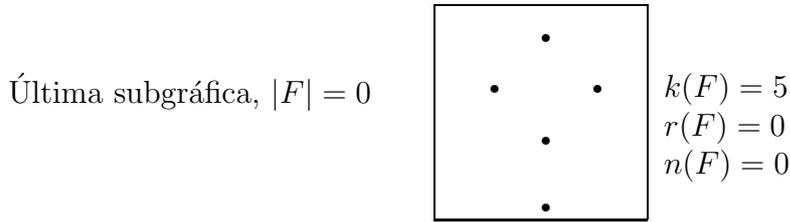
$$15(x-1)^2 = 15x^2 - 30x + 15.$$

Subgráficas de G con $|F| = 1$ son 6,



Los términos $(x-1)^{r(E)-r(F)}(y-1)^{n(F)}$ aportados al polinomio de Tutte por estas subgráficas son

$$6(x-1)^3 = 6x^3 - 18x^2 + 18x - 6.$$



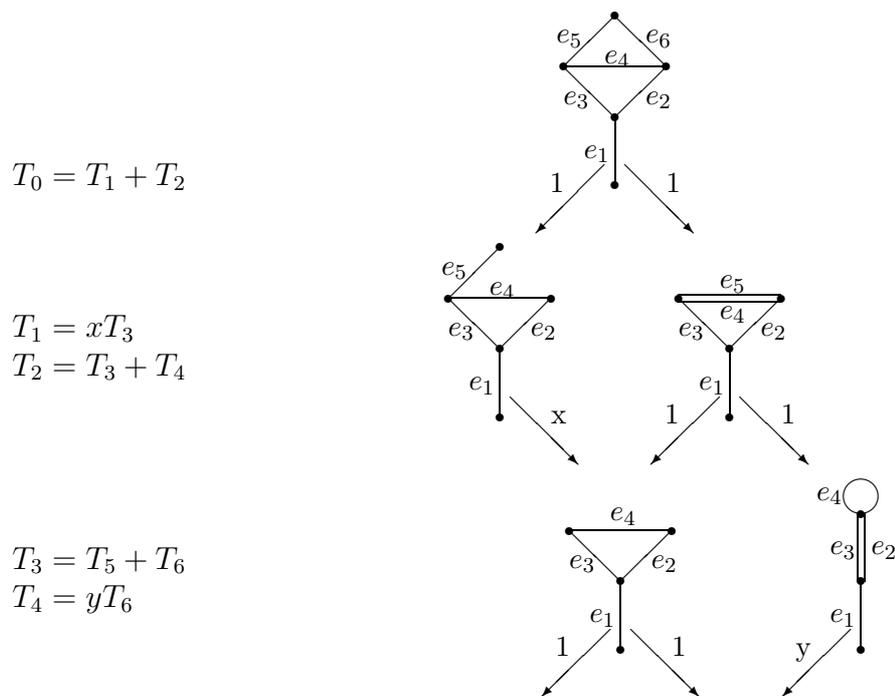
El término $(x - 1)^{r(E)-r(F)}(y - 1)^{n(F)}$ aportado al polinomio de Tutte por esta subgráfica es

$$(x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

El polinomio de Tutte es la suma de cada una de estas contribuciones, entonces

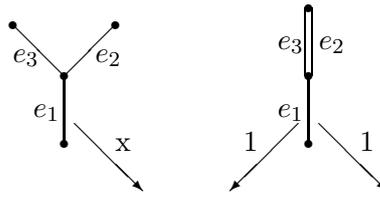
$$T(G; x, y) = \sum_{F \subseteq E(G)} (x - 1)^{r(E)-r(F)}(y - 1)^{n(F)} = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x^2y + xy + xy^2$$

Ahora se va a encontrar el polinomio de Tutte para la misma gráfica, usando la relación recursiva.



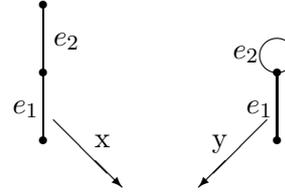
$$T_5 = xT_7$$

$$T_6 = T_7 + T_8$$



$$T_7 = xT_9$$

$$T_8 = yT_9$$



$$T_9 = xT_{10}$$

$$T_{10} = 1$$



Así, se tiene que

- $T_7 = x^2$ y $T_8 = xy$
- $T_5 = x^3$ y $T_6 = x^2 + xy$.
- $T_3 = x^3 + x^2 + xy$ y $T_4 = x^2y + xy^2$.
- $T_1 = x^4 + x^3 + x^2y$ y $T_2 = x^3 + x^2 + xy + x^2y + xy^2$.
- $T_0 = x^4 + 2x^3 + 2x^2y + x^2 + xy + xy^2 = T(G;x,y)$.

Los dos procesos dan el mismo polinomio.

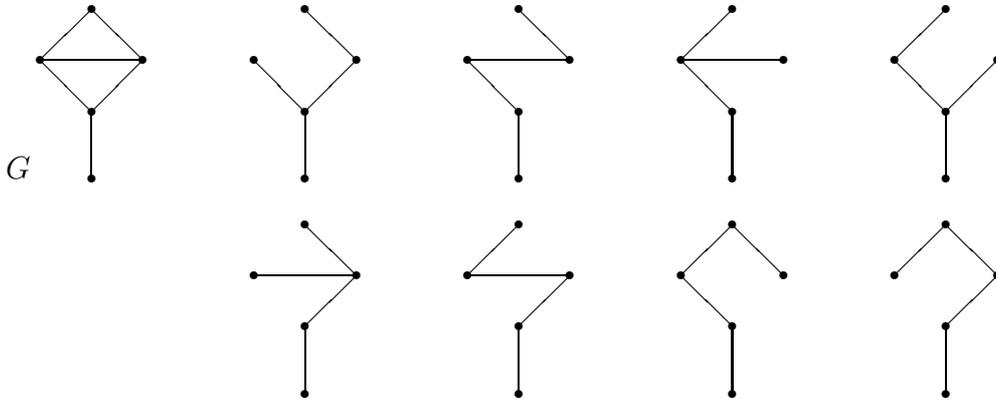
2.3. El polinomio de Tutte y los árboles generadores.

En esta sección se presenta la definición original del polinomio de Tutte, y se demostrará que coincide con la definición dada en la sección anterior. Debido a que se conocen las propiedades básicas del polinomio de Tutte, será mucho más sencillo hacer su presentación.

Dado que el polinomio generador de rango es igual al producto de los polinomios generadores de rango de las componentes conexas, es suficiente estudiar el polinomio de Tutte de una gráfica conexa.

Definición 2.8. Dada una gráfica conexa $G = (V, E)$ se dice que el árbol T es un árbol generador de G si $V(T) = V$ y $E(T) \subset E$.

La siguiente figura muestra todos los árboles generadores de la gráfica G que tiene 5 vértices y 6 aristas.

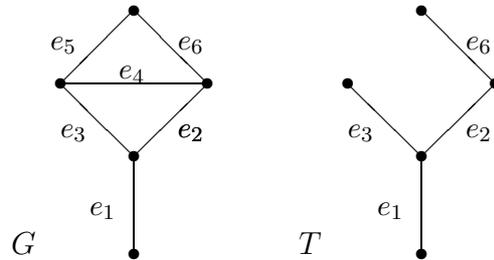


Definición 2.9. Dada una gráfica conexa $G = (V, E)$ se define al conjunto de los árboles generadores de G como

$$\Upsilon(G) = \{T = (V, F) \mid F \subset E \text{ y } T \text{ es un árbol}\}$$

Definición 2.10. Dada una gráfica conexa $G = (V, E)$ con un orden total establecido en $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, esto es $e_i <_e e_j$ si $i < j$; y dado T un árbol generador de G , se define el corte fundamental de $e_i \in E(T)$ como:

$$U_T(e_i) = \{e_j \in E(G) : (T - \{e_i\}) \cup \{e_j\} \text{ es un árbol}\}$$



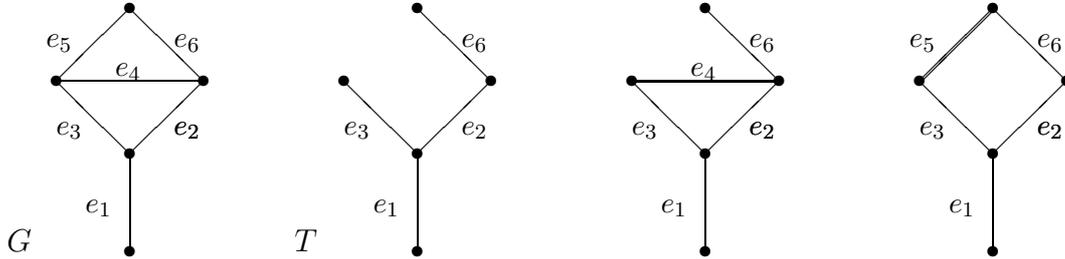
Por ejemplo, para el árbol generador T de la gráfica G , los subconjuntos de corte de las aristas, e_1, e_2, e_3 y e_6 son

$$U_T(e_1) = \{e_1\}; \quad U_T(e_2) = \{e_2, e_4, e_5\}; \quad U_T(e_3) = \{e_3, e_4, e_5\} \quad \text{y} \quad U_T(e_6) = \{e_5, e_6\}.$$

Definición 2.11. Sea G una gráfica conexa y considérese un orden total sobre su conjunto de aristas. Sea T un árbol generador de G , entonces para $e_i \in E(G) - E(T)$, se define el ciclo fundamental de e_i , $Z_T(e_i)$ como el conjunto de aristas que forman el único ciclo en la subgráfica $T \cup \{e_i\}$.

Por ejemplo, para el mismo árbol generador T de la gráfica G de la figura anterior, las aristas que completan un ciclo son e_4 y e_5 , las cuales son:

$$Z_T(e_4) = \{e_2, e_3, e_4\} \quad \text{y} \quad Z_T(e_5) = \{e_2, e_3, e_5, e_6\}$$



Definición 2.12. Sea T un árbol generador de una gráfica conexa G , se dice que una arista $e_i \in E(T)$ es internamente activa (de T , con respecto al ordenamiento de las aristas de G) si e_i es la arista más pequeña del corte fundamental que define.

En la gráfica del ejemplo anterior, donde los subconjuntos de corte son

$$U_T(e_1) = \{e_1\}; \quad U_T(e_2) = \{e_2, e_4, e_5\}; \quad U_T(e_3) = \{e_3, e_4, e_5\} \quad \text{y} \quad U_T(e_6) = \{e_5, e_6\},$$

se puede ver que e_1, e_2 y e_3 son aristas internamente activas, y e_6 no lo es.

Definición 2.13. Sea T un árbol generador de una gráfica conexa G , se dice que una arista $e_i \in E(G) - E(T)$ es externamente activa (de T , con respecto al ordenamiento de las aristas de G) si e_i es la arista más pequeña del ciclo fundamental que completa.

En el ejemplo anteriormente descrito donde los ciclos definidos son

$$Z_T(e_4) = \{e_2, e_3, e_4\} \quad \text{y} \quad Z_T(e_5) = \{e_2, e_3, e_5, e_6\}$$

se tiene que ni e_4 ni e_5 tiene actividad externa, porque en los ciclos que cierran, la arista más pequeña es e_2 .

Decimos que un árbol generador tiene actividad interna i y actividad externa j si hay precisamente i aristas internamente activas y j aristas externamente activas.

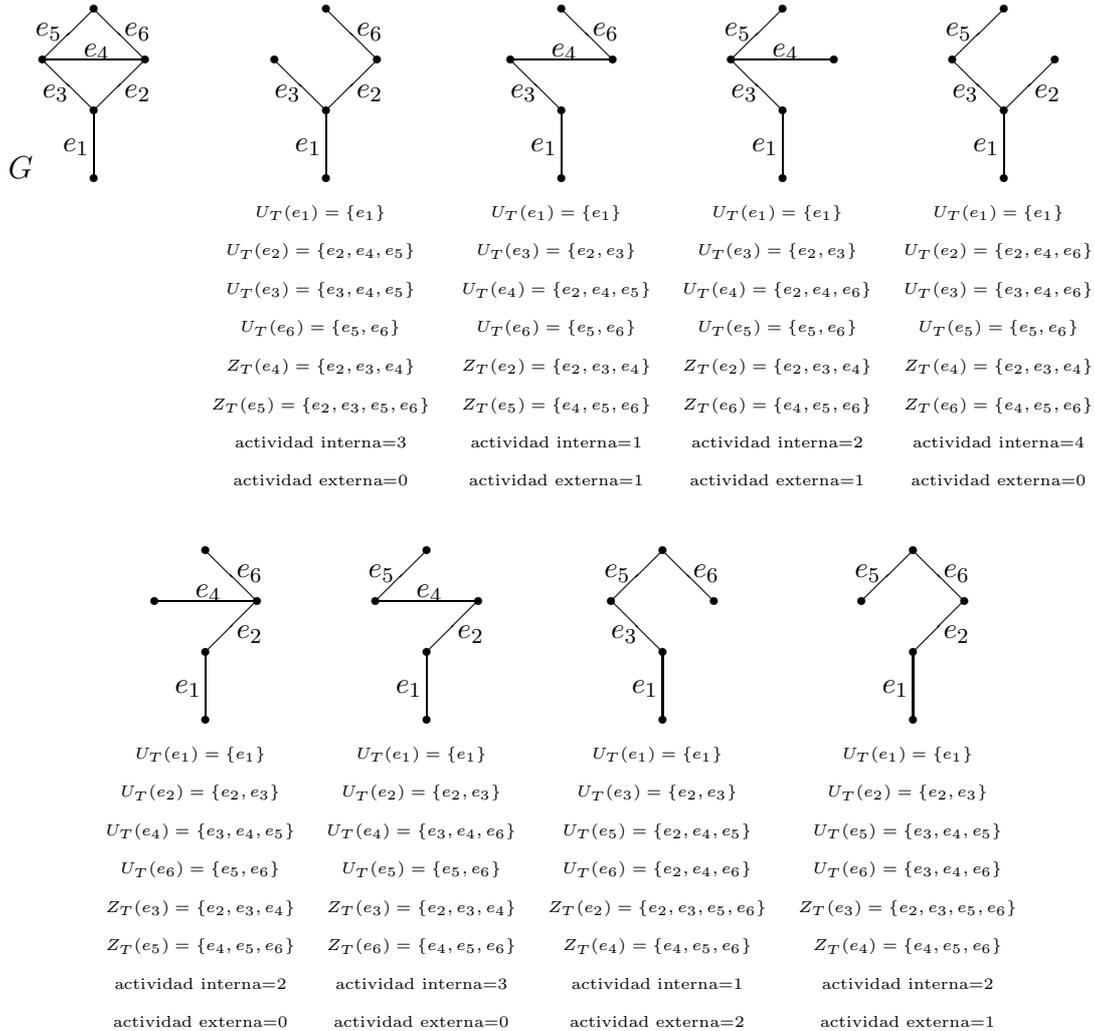
El siguiente teorema también es debido a Tutte y puede ser encontrado en [4] que es la continuación que Tutte hizo de su trabajo en [1].

Teorema 2.14. Sea G una gráfica conexa con un ordenamiento total en sus aristas. Escribimos t_{ij} al número de árboles generadores con actividad interna i y actividad externa j . Entonces el polinomio de Tutte de G es,

$$T_G(x, y) = \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j.$$

Obsérvese que, $t_{ij} = t_{ij}(G)$ no depende del ordenamiento de las aristas, depende sólo de la gráfica G .

Antes de hacer la demostración encontraremos el polinomio de Tutte usando la fórmula $\sum_{i,j} t_{ij}x^i y^j$ para la gráfica del ejemplo.



De esta manera se tiene que los valores de t_{ij} diferentes de cero para esta gráfica son: $t_{11} = 1, t_{12} = 1, t_{20} = 1, t_{21} = 2, t_{30} = 2$ y $t_{40} = 1$, por lo que el polinomio de Tutte por el resultado presentado en el teorema es

$$\sum_{i,j} t_{ij}x^i y^j = xy + xy^2 + x^2 + 2x^2y + 2x^3 + x^4$$

Demostración La demostración se hará por inducción sobre m el número de aristas de una gráfica conexa.

Considere primero la gráfica vacía E_1 que tiene un único vértice, por lo que $T = E_1$ es el único árbol generador de E_1 y como no tiene aristas, su actividad interna y su actividad

externa son cero, de donde se sigue que hay un único término t_{ij} diferente de cero, $t_{00} = 1$, entonces $\sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j = 1$.

Por otro lado, se sabe que el polinomio de Tutte de la gráfica E_1 es

$$T(E_1; x, y) = 1,$$

por lo que el resultado $\sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j = T(G; x, y)$ se satisface para $m = 0$.

Ahora suponemos que el resultado se cumple para todas las gráficas conexas con a lo más m arista, $m \geq 0$. Entonces se supone que para cualquier gráfica conexas con m aristas el resultado se satisface, y a partir de esto se demostrará que también se satisface el resultado para las gráficas conexas con $m + 1$ aristas.

Considere una gráfica conexas $G = (V, E)$, con $m + 1$ aristas $m \geq 0$ y con un orden dado a sus aristas, $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m, e_{m+1}\}$.

Se considerarán las tres posibilidades para e_{m+1} .

CASO 1. e_{m+1} es un puente. La arista e_{m+1} está en todos los árboles generadores de G . De esta manera e_{m+1} , es internamente activa en todos los árboles generadores de G , pues su corte fundamental es $U_T(e_{m+1}) = \{e_{m+1}\}$ y como e_{m+1} siempre pertenece a un árbol, entonces no es externamente activa en ninguno de los árboles generadores de G . Además, si T es un árbol generador de G , entonces T/e_{m+1} es un árbol generador de G/e_{m+1} y la actividad externa de T es igual a la actividad externa de T/e_{m+1} , mientras que la actividad interna de T es igual a la actividad interna de $T/e_{m+1} + 1$, esto es $t_{i+1,j} = t_{ij}^*$, donde $t_{i+1,j}$ es el número de árboles generadores de G con actividad interna $i + 1$ y actividad externa j y t_{ij}^* es el número de árboles generadores de G/e_{m+1} que tienen actividad interna i y actividad externa j .

Por otra parte, con base en el teorema 2.5 se sigue que para G_1 y G_2 las dos componentes conexas de G , $T(G - e_{m+1}; x, y) = T(G_1; x, y)T(G_2; x, y)$, y por el teorema 2.6 se sigue que $T(G/e_{m+1}; x, y) = T(G_1; x, y)T(G_2; x, y)$: lo que implica que por ser e_{m+1} puente, entonces $T(G - e_{m+1}; x, y) = T(G/e_{m+1}; x, y)$ y como G/e_{m+1} es una gráfica conexas con m aristas, por hipótesis de inducción se sigue que el resultado se satisface para esta gráfica y por consiguiente

$$T(G/e_{m+1}; x, y) = \sum_{i,j} t_{ij}^* x^i y^j$$

Ahora considere la suma

$$\sum_{i,j} t_{i+1,j} x^{i+1} y^j = \sum_{i,j} t_{ij}^* x^{i+1} y^j = x \sum_{i,j} t_{ij}^* x^i y^j = xT(G/e_{m+1}; x, y) = T(G; x, y),$$

esto último porque $T(G; x, y) = xT(G - e_{m+1}; x, y)$, con lo que queda demostrado el teorema cuando e_{m+1} es un puente.

CASO 2. e_{m+1} es un lazo.

Entonces por la definición de polinomio de Tutte se tiene que

$$T(G; x, y) = yT(G - e_{m+1}; x, y)$$

y dado que $G - e_{m+1} = G'$ es una gráfica conexa con m aristas, por hipótesis de inducción se sigue que el resultado se satisface para esta gráfica, y

$$T(G; x, y) = yT(G'; x, y) = y \sum_{i,j} t_{ij}^* x^i y^j$$

donde t_{ij}^* es el número de árboles generadores de $G - e_{m+1}$ que tienen actividad interna i y actividad externa j .

Como e_{m+1} es un lazo, entonces esta arista no está en ninguno de los árboles generadores de G y el único ciclo que forma parte es el formado por ella misma, por consecuencia, un árbol generador de G es de la forma $T = T'$ donde T' es un árbol generador de $G - e_{m+1}$, entonces $U_T(e_i) = U_{T'}(e_i)$ y $Z_T(e_i) = Z_{T'}(e_i)$ para $i = 1, 2, 3, \dots, m$ y $Z_T(e_{m+1}) = \{e_{m+1}\}$, por lo tanto, e_{m+1} es externamente activa en todos los árboles generadores de G y en consecuencia $t_{i,j} = t_{i,j-1}^*$, de aquí se sigue que

$$\sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j = \sum_{i,j} t_{i,j-1}^* x^i y^j = y \sum_{i,j} t_{i,j-1}^* x^i y^{j-1} = yT(G - e_{m+1}; x, y) = T(G; x, y)$$

con lo que queda demostrado el teorema cuando e_{m+1} es un lazo.

CASO 3. e_{m+1} no es ni puente ni lazo de G .

Entonces por la definición de polinomio de Tutte, se sigue que,

$$T(G; x, y) = T(G - e_{m+1}; x, y) + T(G/e_{m+1}; x, y)$$

y dado que $G - e_{m+1}$ y G/e_{m+1} son gráficas de m aristas, por hipótesis de inducción, en estas gráficas se satisface el resultado y entonces,

$$T(G; x, y) = \sum_{i,j} t_{ij}^* x^i y^j + \sum_{i,j} t_{ij}^{**} x^i y^j$$

donde t_{ij}^* es el número de árboles generadores de $G - e_{m+1}$ con actividad interna i y actividad externa j , y t_{ij}^{**} es el número de árboles generadores de G/e_{m+1} con actividad interna i y actividad externa j .

Sea T un árbol generador de G , existen dos casos:

1. $e_{m+1} \notin E(T)$.

En este caso T también es un árbol generador de $G - e_{m+1}$. Se va a probar que la actividad interna y externa de T en G es la misma que en $G - e_{m+1}$.

Considere que $e_j \in E(T)$, entonces el corte fundamental de e_j en G es

$$U_T(e_j) = \{e_i \in E(G) \mid (T - \{e_j\}) \cup \{e_i\} \text{ es un árbol}\}$$

y el corte fundamental de e_j en $G - e_{m+1}$ es

$$U_T^*(e_j) = \{e_i \in E(G - e_{m+1}) \mid (T - \{e_j\}) \cup \{e_i\} \text{ es un árbol}\}$$

Se puede ver que $U_T(e_j) = U_T^*(e_j)$ o $U_T(e_j) = U_T^*(e_j) \cup \{e_{m+1}\}$, en ambos casos la actividad interna de T es la misma en G que en $G - e_{m+1}$.

Considere $e_j \notin E(T)$, recordemos que el ciclo fundamental de e_j es el único ciclo de la subgráfica $T \cup \{e_j\}$, si $e_j \neq e_{m+1}$ entonces el conjunto $Z(e_j)$ es el mismo en G y que en $G - e_{m+1}$; si $e_j = e_{m+1}$ entonces es el único ciclo de la subgráfica $T \cup \{e_{m+1}\}$, e_{m+1} no es la arista más pequeña, por lo tanto no es externamente activa. Se probó que la actividad interna y externa del árbol T es igual en G y en $G - e_{m+1}$

2. $e_{m+1} \in E(T)$.

En este caso T/e_{m+1} es un árbol generador de G/e_{m+1} , se va a probar que la actividad externa e interna de T en G es la misma que T/e_{m+1} en G/e_{m+1} .

Considere que $e_j \in E(T)$ con $j \neq m + 1$ entonces el corte fundamental de e_j en G es

$$U_T(e_j) = \{e_i \in E(G) \mid (T - \{e_j\}) \cup \{e_i\} \text{ es un árbol}\}$$

y el corte fundamental de e_j en G/e_{m+1} es

$$U_{T/e_{m+1}}(e_j) = \{e_i \in E(G/e_{m+1}) \mid (T/e_{m+1} - \{e_j\}) \cup \{e_i\} \text{ es un árbol}\}.$$

entonces se sigue que $U_T(e_j) = U_{T/e_{m+1}}(e_j)$. Ahora vemos el caso cuando $j = m + 1$

$$U_T(e_{m+1}) = \{e_i \in E(G) \mid (T - \{e_{m+1}\}) \cup \{e_i\} \text{ es un árbol}\}$$

ya que e_{m+1} no es puente en el conjunto $U_T(e_{m+1})$ hay al menos otra arista diferente, por lo tanto, e_{m+1} no es internamente activa. Se concluye que la actividad interna de T es la misma que T/e_{m+1} .

Considere $e_j \notin E(T)$, entonces el ciclo fundamental de e_j es el único ciclo de la subgráfica $T \cup \{e_j\}$, que a la vez es el único ciclo de la subgráfica $T/e_{m+1} \cup \{e_j\}$. Observe que el vértice e_{m+1} no afecta si es o no externamente activa la arista e_j , por lo tanto, se concluye que la actividad interna de T es la misma que T/e_{m+1} .

De aquí se sigue que $t_{ij} = t_{ij}^* + t_{ij}^{**}$, entonces

$$\sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j = \sum_{i,j} t_{ij}^* x^i y^j + \sum_{i,j} t_{ij}^{**} x^i y^j = T(G; x, y)$$

Esto completa la demostración

□

En este capítulo se definió el polinomio de Tutte a partir del polinomio generador de rango y se mostró que esta definición equivale a la definición del polinomio de Tutte a través de los árboles generadores de una gráfica conexa. En el próximo capítulo se revisará el polinomio de Tutte a partir del juego denominado reparto de fichas para una gráfica conexa.

Capítulo 3

Reparto de fichas

En 1986, Joel Spencer [6] estudió el siguiente problema: Dado $k \in \mathbb{N}$ y $\{v_1, \dots, v_n\}$ n vectores en \mathbb{R}^m tales que $\|v_i\|_\infty \leq 1$, para $1 \leq i \leq n$, ¿existen e_1, e_2, \dots, e_n , con $e_i \in \{-1, 1\}$ para $1 \leq i \leq n$ tales que $\|\sum_{i=1}^n e_i v_i\|_\infty \leq kn^{1/2}$?

En su respuesta se utilizó un juego de balanceo. Se comienza con un montoncito de N fichas en el centro de una trayectoria larga. En el primer movimiento se pasan $\lfloor N/2 \rfloor$ fichas a la derecha y $\lfloor N/2 \rfloor$ fichas a la izquierda. En cada siguiente movimiento se pasa a la izquierda y a la derecha el mayor entero de la mitad de las fichas en cada montoncito que se formó en el movimiento anterior, y así se continua. Más tarde, Anderson et. al. en [7] modifican el juego iniciando con un número arbitrario de montoncitos de fichas, y moviendo una ficha a la izquierda o a la derecha en cada movimiento.

En 1991, Björner, Lovász y Shor [8] estudiaron la generalización natural de este juego a una gráfica simple. Se colocan algunas fichas en cada vértice de G ; se dice que un vértice está listo si tiene al menos tantas fichas como su grado; cuando un vértice está listo, éste puede repartir una partícula a cada uno de sus vértices vecinos. Lo que puede provocar que otro vértice esté listo, y así consecutivamente. Este juego fue llamado “chip firing game” (el juego de reparto de fichas). El interés estaba en la distribución final de las fichas después de varios movimientos con las reglas mencionadas.

En el mismo tiempo del estudio de Spencer, se tiene el trabajo de Bak, Tang y Wiesenfeld [9] y el de Dhar [10]. En [9] ellos introducen la noción de fenómeno crítico auto-organizado. Esta noción tiene como modelo las pilas de arena abelianas que fueron introducidas por Dhar [10]. El juego de reparto de fichas y el modelo abeliano de pilas de arena, bajo ciertas restricciones, representan el mismo proceso, lo que resulta interesante dado que fueron propuestos de manera independiente y por razones diferentes.

Fue Norman Biggs [11] quien relacionó el juego de reparto de fichas y el modelo abeliano de pilas de arena. En este juego también se tiene una gráfica G , pero ahora se tiene a q , un vértice especial. Las reglas de este nuevo juego son semejantes a las anteriores excepto para q . El vértice q tiene un débito de fichas igual al número de fichas de la gráfica y q está listo sólo cuando todos los otros vértices no lo están. Entonces q puede repartir fichas hasta que algún otro vértice esté listo. La última regla asegura un juego infinito. En [11],

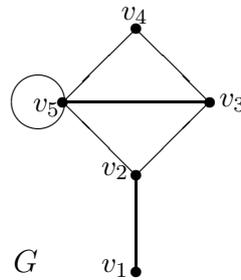
el juego es llamado el juego del dolar, y son usados dólares en lugar de fichas. El vértice q juega el papel de gobernante y todo el juego es una simulación de la economía. En esta sección se denotará a este juego como reparto de fichas.

3.1. Configuraciones críticas

Definición 3.1. Dado un vértice v de la gráfica G ; $v \in V(G)$, el grado de v es igual al número de aristas incidentes a v y se denota por $d(v)$.

Por ejemplo, en la siguiente gráfica se tiene que

$$d(v_1) = 1, \quad d(v_2) = 3, \quad d(v_3) = 3, \quad d(v_4) = 2, \quad d(v_5) = 5.$$



Observe que en un lazo, sus dos extremos son incidentes al mismo vértice, por tal razón un lazo se cuenta como dos en el grado del vértice incidente, como el vértice v_5 de la gráfica anterior.

Definición 3.2. Dado un par de vértices u y v de la gráfica G ; $u, v \in V(G)$, se define como grado de u y v al número de aristas incidentes tanto a u como a v y se denota por $d(u, v) = |\{uv \mid uv \in E(G)\}|$.

Se puede ver que

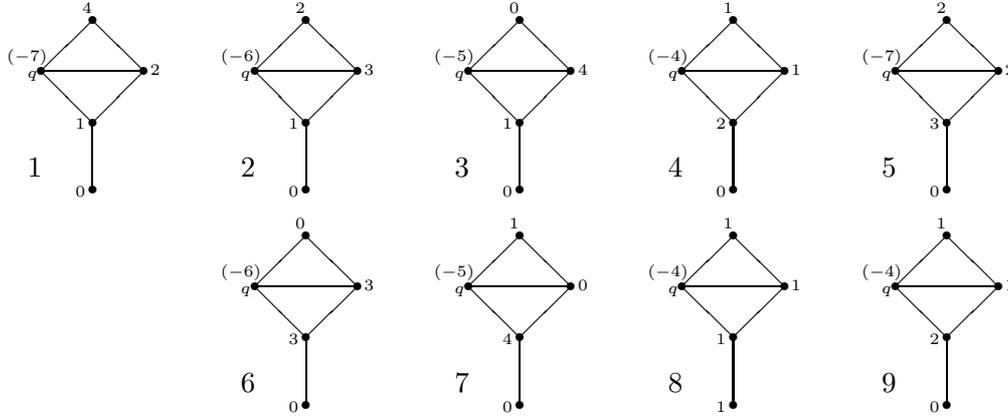
$$d(v) = \sum_{u \in V(G) - \{v\}} d(u, v) + 2d(v, v)$$

Definición 3.3. Dada una gráfica G , $\delta(G)$ es el mínimo y $\Delta(G)$ es el máximo grado de los vértices de G .

En la gráfica anterior se tiene que $\delta(G) = 1$ y $\Delta(G) = 5$.

Dada una gráfica conexa G y un vértice fijo $q \in V(G)$, el juego de reparto de fichas considera que cada vértice $v \in V(G)$ distinto de q tiene asociadas un número no negativo de fichas $s(v)$, y cuando $s(v) \geq d(v)$ el vértice v puede repartir una ficha a los vértices que están al otro extremo de las aristas incidentes a v . El vértice q tiene asociadas $s(q) = -\sum_{v \neq q} s(v)$ fichas y q sólo puede repartir una ficha a los vértices que están al otro extremo de las aristas incidentes cuando ningún otro vértice esté en posibilidades de repartir fichas.

Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra una secuencia de las distintas configuraciones de la gráfica después de una repartición sucesiva de fichas con las reglas establecidas.



En las tres primeras configuraciones de esta figura, se encuentra un vértice distinto a q que puede repartir; en la configuración 4, el único vértice que puede repartir es q y en esta secuencia se llega a la configuración 9, que es igual a la configuración 4, por lo que la serie de configuraciones de la 4 a la 9 se estarán repitiendo indefinidamente.

También se puede observar que a partir de la configuración 4, cada vértice de la gráfica reparte una vez, por lo que existen 5 configuraciones diferentes en la secuencia del reparto de fichas. Estos hechos son resultados generales que en lo que sigue se establecen y prueban formalmente.

Definición 3.4. Una configuración s es una función cuyo dominio es $V(G)$ y cuyo codominio son los números enteros, $s : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$, tal que

$$s(v) \geq 0 \quad \forall v \in V(G) - \{q\}$$

y

$$s(q) = - \sum_{v \neq q} s(v)$$

Se dice que $v \neq q$ está cargado en una configuración s si $s(v) \geq d(v)$ y cuando v está cargado en s puede repartir una ficha a los vértices que se encuentran en el extremo opuesto de cada arista incidente a él, generando una nueva configuración s' definida por

$$s'(u) = \begin{cases} s(u) + d(u, v) & \text{si } u \neq v \\ s(u) - d(u, v) + 2d(u, u) & \text{si } u = v \end{cases}$$

Al reparto de fichas desde v se denota por $s \xrightarrow{v} s'$ y se dice que v dispara.

Definición 3.5. Si en una configuración s todo vértice $v \neq q$ se tiene que $s(v) < d(v)$, entonces s es una configuración estable.

En una configuración estable el único vértice que puede repartir una ficha a sus vértices vecinos es q .

Definición 3.6. *Dada una configuración s , decimos que una sucesión v_1, v_2, \dots, v_k es q -legal para s si v_1 está cargado en s , v_2 está cargado en la configuración obtenida de s luego que v_1 repartiera, y así sucesivamente hasta v_k .*

Dado que el vértice q puede repartir fichas cuando ningún otro puede hacerlo, entonces una sucesión q -legal puede continuar indefinidamente, y como el número de configuraciones estables es finita, entonces habrá configuraciones s , que sean recurrentes, esto es, hay una sucesión finita q -legal de reparticiones que empiezan y terminan con s .

Definición 3.7. *Una configuración s es crítica si es ambas, estable y recurrente.*

El conjunto de configuraciones críticas lo denotaremos por $\Theta(G, q)$.

Teorema 3.8. *Dada una configuración crítica $s \in \Theta(G, q)$ de la gráfica G , existe una sucesión q -legal en la cual cada vértice reparte exactamente una vez.*

Demostración Sea s una configuración crítica, y sea $q, v_1, v_2, v_3, \dots, v_k, q$ una sucesión q -legal que origina las configuraciones:

$$s = s_0 \xrightarrow{q} s_1 \xrightarrow{v_1} s_2 \xrightarrow{v_2} s_3 \dots \xrightarrow{v_{k-1}} s_k \xrightarrow{v_k} s_{k+1} = s_0,$$

lo que afirma el teorema es que en esta sucesión cada uno de los vértices de $V(G)$, reparten una y sólo una vez.

La demostración se hace por reducción al absurdo, y primero se prueba que todos los vértices de G deben estar al menos una vez en la sucesión q -legal.

Supóngase que existe $v \in V(G) - \{q\}$ tal que no se encuentra en la sucesión q -legal de s , esto es, v no repartió ninguna vez y que en la última configuración tiene el mismo número de fichas que en la primera configuración, esto es, $s_{k+1}(v) = s_0(v)$; de aquí se infiere que ninguno de los vértices vecinos de v repartieron, porque de haberlo hecho v tendría al menos una ficha más en s_{k+1} . Esto implica que a su vez, tampoco los vértices vecinos de los vecinos de v repartieron, y como la gráfica es conexa, se llega a la conclusión de que ningún vértice repartió, lo que es contradictorio porque al menos q repartió y existe una trayectoria que une a los vértices v y q , entonces v debe estar en la sucesión q -legal.

Ahora, se prueba por reducción al absurdo que en la sucesión q legal $q = v_0(s), v_1(s), v_2(s), \dots, v_k(s)$, todos los vértice son diferentes y por lo tanto k debe ser igual a $n - 1$.

Suponga que en la sucesión q -legal el vértice $v \in V(G) - \{q\}$ es tal que $v = v_i(s) = v_j(s)$ con $1 \leq i < j \leq k$ y los vértices $v_0(s) = q, v_1(s), v_2(s), \dots, v_{j-1}(s)$ son todos diferentes, entonces $s_0(v) < d(v)$, $s_i(v) \geq d(v)$ y $s_j(v) \geq d(v)$.

En la configuración s_i ya repartieron los vértices $q, \dots, v_{i-1}(s)$, por lo que el número de fichas en el vértice v es igual a $s_i(v) = s(v) + d(v, q) + \dots + d(v, v_{i-1}(s))$. En la configuración s_{i+1} , después que v reparte el número de fichas que tiene v es

$$s_{i+1}(v) = s(v) + d(v, q) + d(v, v_1(s)) + \dots + d(v, v_{i-1}(s)) - d(v) + 2d(v, v)$$

y en la configuración s_j , después que v_{i+1}, \dots, v_{j-1} reparten, el número de fichas que tiene el vértice v es:

$$s_j(v) = s(v) + \underbrace{(d(v, q) + d(v, v_1) + \dots + d(v, v_{j-1}) + 2d(v, v))}_{\leq 0} \leq s(v) < d(v)$$

con lo que se concluye que si $v_0(s) = q, v_1(s), v_2(s), \dots, v_{j-1}(s)$ son diferentes, no es posible que en s_j el vértice v pueda repartir nuevamente porque no se encuentra cargado, con lo que queda demostrado el teorema. \square

3.2. Árboles generadores y configuraciones críticas.

Las configuraciones críticas de la gráfica conexa G tienen relación directa con los árboles generadores y con el polinomio de Tutte.

Teorema 3.9. *Dada una configuración crítica s , existe una sucesión q -legal, $q = v_0(s), v_1(s), \dots, v_{n-1}(s)$, que define un ordenamiento $<_s$ en $V(G)$, y un árbol generador T_s de G .*

Demostración Dada una configuración crítica s se va a obtener el ordenamiento de los vértices $<_s$ y un árbol generador T_s .

Se establece un orden \prec_v en el conjunto de vértices $V(G)$, dado por

$$q = v_1 \prec_v v_2 \prec_v v_3 \prec_v \dots \prec_v v_n,$$

donde $n = |V(G)|$.

Sea $s_0 = s$, y sea s_1 la configuración que resulta luego que $q = v_0(s)$ reparte.

De manera recursiva para $i = 1, 2, \dots, n-1$ se sigue el siguiente procedimiento:

- Se elige como $v_i(s)$ para que reparta en la configuración s_i al mínimo vértice que está cargado en la configuración s_i , de acuerdo al orden \prec_v .
- Sea s_{i+1} la configuración que resulta luego que $v_i(s)$ reparte.

Como s es una configuración crítica, la sucesión $v_0(s), v_1(s), \dots, v_{n-1}(s)$, contiene a todos los vértices en $V(G)$, y resulta ser una sucesión q -legal. Esta sucesión q -legal define un orden en los vértices de G que se denota como $<_s$.

Se dice que un vértice v es cargado por $v_{i-1}(s)$, si v no está cargado en la configuración s_{i-1} y está cargado en la configuración s_i . Y se definen los conjuntos

$$V_i = \{v \mid v \text{ es cargado por } v_i(s)\}$$

Ahora considere los árboles definidos como:

- T_0 es el árbol con un solo vértice, el vértice q , $T_0 = \{q\}$,
- Para $i = 1, \dots, n-1$ se tiene que T_i es el árbol

$$T_i = T_{i-1} \cup (V_{i-1}, \{v_{i-1}(s)x \mid x \in V_{i-1}\})$$

Debido a que s es una configuración crítica, entonces cada vértice diferente de q , sólo puede ser cargado una sola vez, por lo que hay entre q y cualquier vértice v una única trayectoria, y resulta que T_i es efectivamente un árbol.

- Finalmente, observe que $T_{n-1} = T_n$, contiene todos los vértices de G , con lo que se prueba que T_n es un árbol generador de G , el cual lo denotamos por T_s . \square

Teorema 3.10. *Sea T un árbol generador de la gráfica conexa G , entonces T define una configuración crítica s_T y un ordenamiento de los vértices $<_T$.*

Demostración Dado el árbol generador T de la gráfica conexa G se va a construir una configuración crítica s_T y un ordenamiento de los vértices $<_T$. Considérese el orden \prec_v anteriormente mencionado sobre el conjunto de vértices $V(G)$

$$q = v_1 \prec_v v_2 \prec_v v_3 \prec_v \dots \prec_v v_n,$$

donde $n = |V(G)|$.

Si $n = 1$, entonces el único árbol generador de G es $T_0 = \{q\}$ y la única configuración posible es $s_{T_0}(q) = 0$, se satisface el teorema para $n = 1$.

Considérese ahora que $n > 1$ y sea T un árbol generador de G y $u_0 = q$, entonces

- $V_0 = \{v \mid vu_0 \in E(T)\}$, V_0 es no vacío y $q \notin V_0$, además si $v \in V_0 \Rightarrow d(v, u_0) > 0$.
- Sea $u_1 = \min\{v \in V_0\}$; entonces el conjunto $V_1 = \{v \mid vu_1 \in E(T)\}$ es no vacío, contiene a u_0 y $V_0 \cap V_1 = \phi$. Por ser T un árbol generador de G , el conjunto $V_0 \cup V_1 - \{u_0, u_1\}$ es vacío sólo si $n = 2$ y para $v \in V_1 \Rightarrow d(v, u_1) > 0$.
- Cuando $n > 2$ se elije al vector $u_2 = \min\{v \in V_0 \cup V_1 - \{u_0, u_1\}\}$ y el conjunto $V_2 = \{v \mid vu_2 \in E(T)\}$ es tal que $|V_2 \cap \{u_0, u_1\}| = 1$ y $(V_2 - \{u_0, u_1\}) \cap (V_0 \cup V_1) = \phi$. Además $V_0 \cup V_1 \cup V_2 - \{u_0, u_1, u_2\}$ es vacío sólo si $n = 3$ y cuando $v \in V_2 \Rightarrow d(v, u_2) > 0$.
- Se continua este proceso recursivamente mientras $\cup_{k=0}^{i-1} V_k - \{u_0, \dots, u_{i-1}\} \neq \phi$ para $i = 3, 4, \dots, n-1$; dado el vértice

$$u_i = \min\{v \in \cup_{k=0}^{i-1} V_k - \{u_0, \dots, u_{i-1}\}\},$$

el conjunto,

$$V_i = \{v \mid vu_i \in E(T)\},$$

es tal que $|V_i \cap \{u_0, \dots, u_{i-1}\}| = 1$, $(V_i - \{u_0, \dots, u_{i-1}\}) \cap (\cup_{k=0}^{i-1} V_k) = \phi$ y si $v \in V_i$ entonces $d(v, u_i) > 0$

De esta manera, en la sucesión u_0, \dots, u_{n-1} se encuentran una vez todos los vértice de $V(G)$ y se puede definir la configuración s_T dada por

$$s_T(v) = \begin{cases} d(v) - \sum_{k=0}^i d(v, u_k) & \text{si } v \in V_i - \{u_0, \dots, u_i\}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ -\sum_{u \neq q} s_T(u), & \text{si } v = q \end{cases}$$

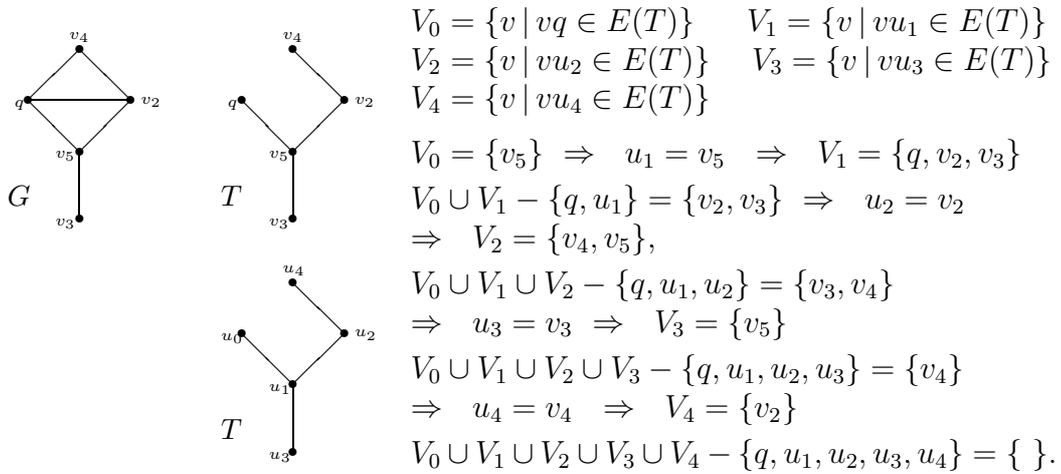
esta configuración es estable porque si $v \in V_i$ entonces $d(v, u_i) > 0$ y por lo tanto cuando $v \neq q$ se tiene que $s_T(v) < d(v)$, entonces el único vértice que puede disparar en s_T es u_0 .

Sea s_1 la configuración que resulta luego que u_0 reparte, entonces para $v \neq u_0$ se tiene que $s_1(v) = s_T(v) + d(v, u_0)$; esto implica que si $v \in V_0$ entonces v es cargado por u_0 , porque $s_1(v) = d(v)$ y si $v \in V_1 - \{u_0\}$ entonces $s_1(v) = d(v) - d(v, u_1)$. Dado que $u_1 = \min\{v \in V_0\}$, entonces u_1 puede repartir en s_1 .

Recursivamente, para $n > i \geq 2$ suponga que s_i es la configuración que resulta después que u_0, \dots, u_{i-1} ya dispararon en ese orden, entonces para $v \notin \{u_0, u_1, \dots, u_{i-1}\}$ se tiene que $s_i(v) = s_T(v) + \sum_{k=0}^i d(v, u_k)$; y para $v \in V_i - \{u_0, \dots, u_i\}$ se sigue que $s_i(v) = d(v)$ lo que implica que v es cargado por u_i ; y que los vértices en $\cup_{k=0}^i V_k - \{u_0, \dots, u_i\}$ están cargados en s_i , y dado que $u_i = \min\{v \in \cup_{k=0}^i V_k - \{u_0, \dots, u_i\}\}$, entonces u_i puede repartir en s_i . Finalmente, al llegar a la configuración s_n todos los vértices en $V(G)$ ya dispararon una única vez, por lo tanto al final cada vértice en $V(G)$ recibió $\sum_{u \neq v} d(v, u)$ fichas de los otros vértices y entregó la misma cantidad de fichas cuando le tocó disparar, por lo tanto $s_n(v) = s_T(v)$ con lo que se concluye que s_T es una configuración recurrente y u_0, \dots, u_{n-1} forman una sucesión q -legal que define un orden en los vértices de G que se denota como $<_T$. \square

La demostración del teorema anterior es debida a N.Biggs y P. Winkler y está en [24]. Sin embargo, la demostración original usa un orden particular para los vértices. Primero se da un orden arbitrario a las aristas y con este orden se ordenan lexicográficamente las trayectorias que parten de q . Con este orden lexicográfico se pueden ordenar los vértices de la gráfica conexa. Decidimos evitar este paso para mostrar que el orden que importa es el de los vértices, y para gráficas simples obtenemos el mismo resultado de [24]. Es sólo para el caso de las gráficas con aristas paralelas que se necesita establecer un orden en las aristas y sin el cual la correspondencia entre árboles generadores y configuraciones críticas no esta totalmente determinado. Esto lo hacemos a continuación, en un resultado que no está en el trabajo de Biggs y Winkler, pero que explica mejor qué es lo que pasa con la biyección en el caso de que haya aristas paralelas.

Observe la siguiente gráfica, en ella se efectúa el procedimiento para encontrar la configuración s_T y la sucesión q -legal asociado al árbol generador T , siguiendo los pasos en la demostración del teorema anterior.

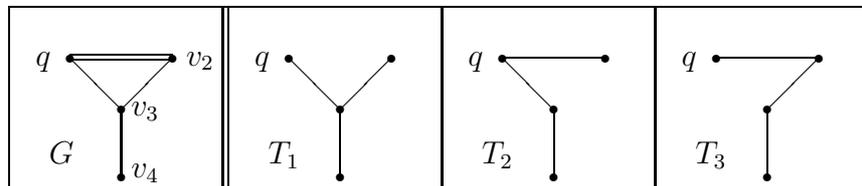


La configuración s_T es

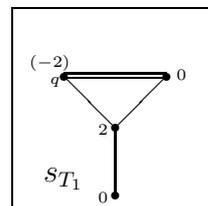
- $u_1 \in V_0 \Rightarrow s_T(u_1) = d(u_1) - d(u_1, u_0) = 3 - 1 = 2$
- $u_2 \in V_1 - V_0 - \{u_0\} \Rightarrow s_T(u_2) = d(u_2) - d(u_2, u_0) - d(u_2, u_1) = 3 - 1 - 1 = 1$
- $u_3 \in V_1 - V_0 - \{u_0\} \Rightarrow s_T(u_3) = d(u_3) - d(u_3, u_0) - d(u_3, u_1) = 1 - 0 - 1 = 0$
- $u_4 \in V_2 - V_0 \cup V_1 \Rightarrow s_T(u_4) = d(u_4) - d(u_4, u_0) - d(u_4, u_1) - d(u_4, u_2) = 0$

Los dos teoremas anteriores dicen que existe una relación entre las configuraciones críticas de G y los árboles generadores de G ; sin embargo, el texto de los dos teoremas no garantiza que esa relación sea biyectiva. Si una gráfica conexa tiene multiaristas, existe más de una configuración crítica asociada a un mismo árbol generador de G , como se puede observar en el siguiente ejemplo.

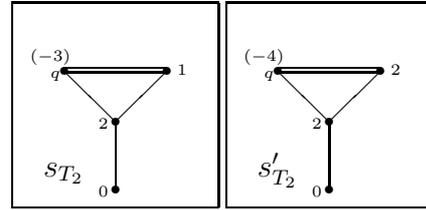
Considere la siguiente gráfica conexa con 4 vértices y una multiarista. El grado de los vértices es $d(q) = 3, d(v_2) = 3, d(v_3) = 3$ y $d(v_4) = 1$. En la misma figura se dibujaron 3 de sus árboles generadores.



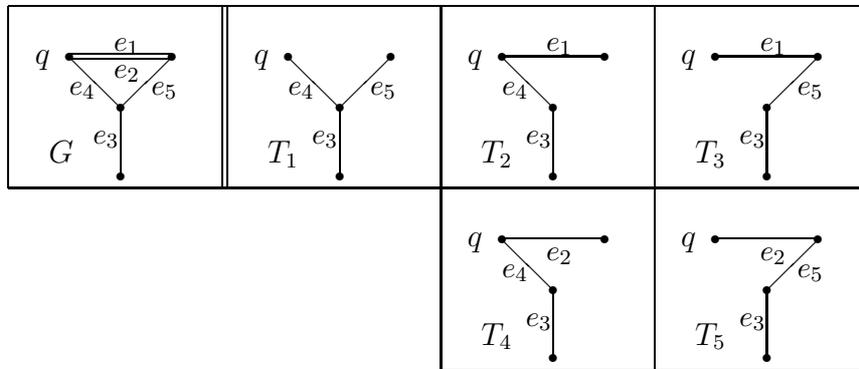
En esta gráfica se presenta s_{T_1} , la configuración crítica asociada a T_1 , obtenida de acuerdo a la construcción en la demostración del teorema 3.10. En este caso, el árbol generador $T_{s_{T_1}}$ coincide con T_1 y ésta es la única configuración crítica asociada al árbol generador T_1 .



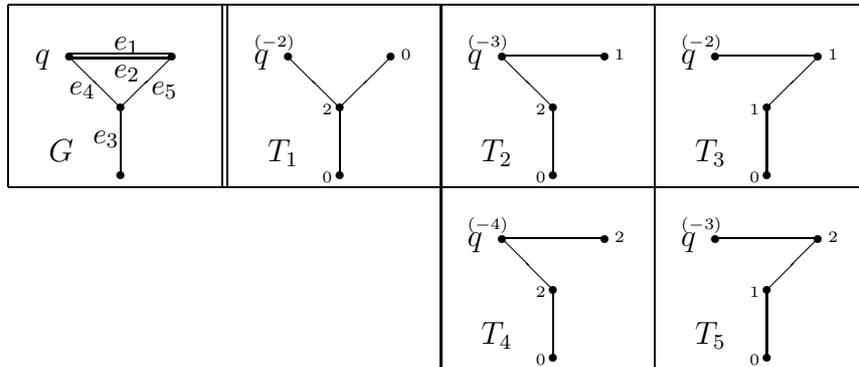
Para el árbol generador T_2 existen dos configuraciones críticas que satisfacen la ecuación $T_s = T_2$, estas configuraciones son s_{T_2} y s'_{T_2} , mostradas en las dos gráficas de al lado. La razón de que existan dos configuraciones críticas relacionadas al mismo árbol generador es porque G tiene una multiarista que forma parte del árbol generador.



Para obtener todos los árboles generadores, se deben distinguir las aristas paralelas de G . Por ejemplo, en la gráfica del ejemplo anterior se obtienen 5 árboles generadores cuando se distinguen las aristas de G .



y para cada uno de estos árboles hay una configuración crítica distinta,



De esta manera, si se puede establecer una biyección entre las configuraciones críticas y los árboles generadores de G .

Proposición 3.11. Sean G una gráfica conexa, T un árbol generador de G , s_T y u_0, \dots, u_{n-1} la configuración crítica asociada a T y la sucesión q -legal de acuerdo a la construcción de la demostración del teorema 3.10; entonces una configuración s^* de G que satisface la desigualdad

$$s_T(v) \leq s^*(v) \leq s_T(v) + d(v, u_i) - 1 \quad \text{si } v \in V_i - \cup_{k=0}^{i-1} V_k, \quad \text{para } 0 \leq i \leq n-1$$

es una configuración crítica y la sucesión $u_0 = v_0(s_T), u_1 = v_1(s_T), u_2 = v_2(s_T), \dots, u_{n-1} = v_{n-1}(s_T)$ es q -legal para s^* .

Demostración

Suponga que s_T^* es una configuración crítica, que la sucesión u_0, u_1, \dots, u_{n-1} es q -legal, que los vértices en $V_i - \{u_0, \dots, u_{i-1}\}$ son cargados por u_i ; sea s_i la configuración que resulta luego que u_0, \dots, u_{i-1} ya dispararon entonces $s_i(v) = s_T^*(v) + \sum_{k=0}^{i-1} d(v, u_k) < d(v)$ y $s_{i+1}(v) = s_T^*(v) + \sum_{k=0}^i d(v, u_k) \geq d(v)$ cuando $v \in V_i - \{u_0, \dots, u_{i-1}\}$, lo que implica que

$$d(v) - \sum_{k=0}^i d(v, u_k) \leq s_T^*(v) < d(v) - \sum_{k=0}^{i-1} d(v, u_k)$$

con lo que queda demostrada la proposición \square .

Se pudo ver que las únicas configuraciones críticas para las cuales u_0, u_1, \dots, u_{n-1} son q -legales son de la forma de s_T^* definida en esta última demostración.

Teorema 3.12. *Dada $G = (V, E)$ una gráfica conexa existe una biyección entre el conjunto de configuraciones críticas $\Theta(G, q)$ y el conjunto de árboles generadores $\Upsilon(G)$.*

Demostración

Considere un orden total en $E(G)$ dado por e_1, \dots, e_m tal que si $i < j$ entonces $e_i \prec_e e_j$. Para cada $T = (V, F) \in \Upsilon(G)$ se obtiene la sucesión de vértices u_0, \dots, u_{n-1} y los conjuntos V_0, \dots, V_{n-1} tales que

- $u_0 = q, V_0 = \{v \mid u_0v \in E(T)\};$
- $u_i = \text{mín}\{v \in \cup_{k=0}^{i-1} V_k - \{u_0, \dots, u_{i-1}\}\}$ y $V_i = \{v \mid u_iv \in E(T)\}$ si $i = 1, \dots, n-1$.

Si $e = uv$ es tal que $e \in E(G)$, entonces el conjunto

$$E_{uv} = \{e \in E(G) \mid e = uv\} = \{e_{uv(0)}, \dots, e_{uv(d(u,v)-1)}\},$$

donde $e_{uv(0)} \prec_e \dots \prec_e e_{uv(d(u,v)-1)}$, es no vacío.

La transformación $\Psi : \Upsilon(G) \mapsto \Theta(G, q)$ tal que a cada árbol generador $T = (V, F) \in \Upsilon(G)$ se le asigna la configuración

$$s_F(v) = \begin{cases} d(v) - \sum_{k=0}^i d(v, u_k) + j & \text{si } v \in V_i - \{u_0, \dots, u_{i-1}\} \\ y & F \cap E_{u_iv} = \{e_{u_iv(j)}\} \\ - \sum_{v \neq q} s_F(v) & \text{si } v \neq q \end{cases}$$

que es una configuración crítica porque satisface la proposición 3.11 pues cuando $v \in V_i - \{u_0, \dots, u_{i-1}\}$

$$d(v) - \sum_{k=0}^i d(v, u_k) \leq d(v) - \sum_{k=0}^i d(v, u_k) + j < d(v) - \sum_{k=0}^{i-1} d(v, u_k)$$

$$\Rightarrow s_T(v) \leq s_F(v) \leq s_T(v) + d(v, u_i) - 1$$

ya que $-d(u_i, v) \leq -j \leq -1$.

Se debe probar que Ψ es una transformación inyectiva y suprayectiva.

(a) Ψ es inyectiva:

Dado $T_1 = (F_1, V)$ y $T_2 = (F_2, V)$ dos árboles generadores de G tales que $F_1 \neq F_2$, se encuentran las sucesiones de vértices u_i y u_i^* y los conjuntos V_i y V_i^* , $i = 0, \dots, n-1$ tales que

- $u_0 = u_0^* = q$, $V_0 = \{v \mid u_0v \in F_1\}$; $V_0^* = \{v \mid u_0^*v \in F_2\}$
- $u_i = \min\{v \in \cup_{k=0}^{i-1} V_k - \{u_0, \dots, u_{i-1}\}\}$ y $V_i = \{v \mid u_iv \in F_1\}$ si $i = 1, \dots, n-1$.
- $u_i^* = \min\{v \in \cup_{k=0}^{i-1} V_k^* - \{u_0^*, \dots, u_{i-1}^*\}\}$ y $V_i^* = \{v \mid u_i^*v \in F_2\}$ si $i = 1, \dots, n-1$.

Observe que si $V_0 = V_0^*$, entonces necesariamente $u_1 = u_1^*$, y en general si $V_0 = V_0^*, \dots, V_{i-1} = V_{i-1}^*$ entonces necesariamente $u_1 = u_1^*, \dots, u_{i-1} = u_{i-1}^*$ y $u_i = u_i^*$.

Si existe $j = \min\{k \mid V_i = V_i^*, -1 \leq i \leq k-1 \text{ y } V_k \neq V_k^*\}$ donde $V_{-1} = V_{-1}^* = \{u_0\}$, entonces sin pérdida de generalidad se puede encontrar $v \in V_j - \{u_0, \dots, u_{j-1}\}$ tal que $v \notin V_j^* - \{u_0, \dots, u_{j-1}\}$ entonces por construcción u_j carga a v en s_{F_1} , pero u_j no carga a v en s_{F_2} , por lo que $s_{F_1}(v) > s_{F_2}(v)$, por lo tanto $s_{F_1} \neq s_{F_2}$.

En el caso que $V_i = V_i^*$ para todo $i = 0, \dots, n-1$, se satisface que $uv \in F_1$ si y sólo si $uv \in F_2$ y debido a que $F_1 \neq F_2$, entonces alguna $uv \in F_1$ es una multiaristas. por lo tanto existe $0 \leq i \leq n-1$ tal que para $v \in V_i - \{u_0, \dots, u_{i-1}\}$ se tiene que $F_1 \cap E_{u_iv} \neq F_2 \cap E_{u_iv}$, entonces si $F_1 \cap E_{u_iv} = \{e_{u_iv(j_1)}\}$ y $F_2 \cap E_{u_iv} = \{e_{u_iv(j_2)}\}$ se concluye que $j_1 \neq j_2$, y como $s_{F_1}(v) = d(v) - \sum_{k=0}^i d(v, u_k) + j_1$ y $s_{F_2}(v) = d(v) - \sum_{k=0}^i d(v, u_k) + j_2$; por lo que $s_{F_1} \neq s_{F_2}$.

(b) Ψ es suprayectiva:

Dada una configuración crítica $s \in \Theta(G, q)$ y la sucesión q -legal de s dada por $u_0 = q$, $u_i = \min\{v \mid v \text{ está cargado en } s_i\}$, $i = 1, \dots, n-1$. Considérese el conjunto

$$F_0 = \{e_{u_0v}(d(v, u_0) - j) \in E_{u_0v} \mid j = d(v) - s(v) - 1 \text{ y } v \text{ es cargado por } u_0\}$$

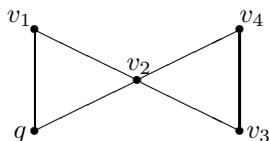
y en general para $i = 1, \dots, n-1$, se tiene los conjuntos

$$F_i = \{e_{u_iv}(d(v, u_i) - j) \in E_{u_iv} \mid j = d(v) - s_{i-1}(v) - 1 \text{ y } v \text{ es cargado por } u_i\}$$

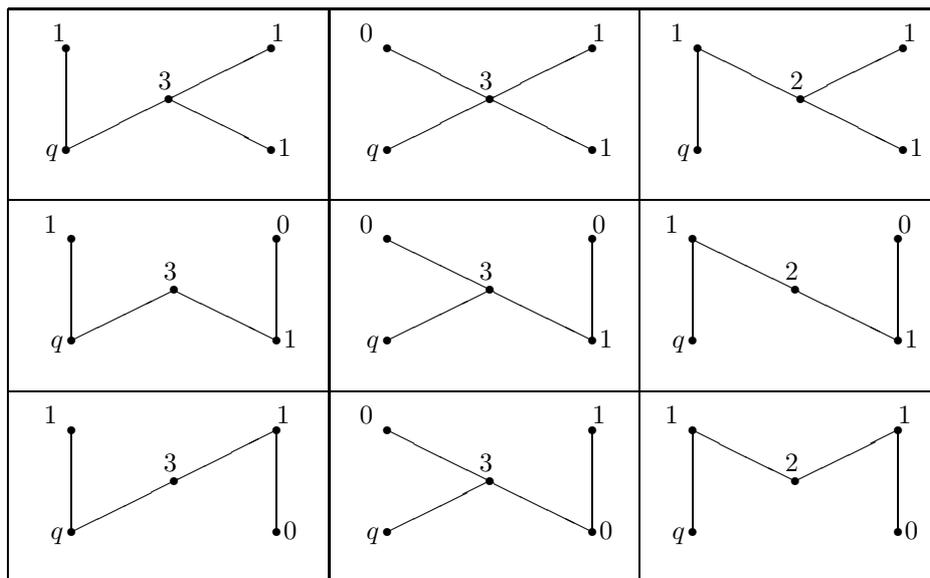
entonces por el teorema 3.9, se sigue que el conjunto F_s es tal que la subgráfica $T = (V, F_s)$ es un árbol generador de G y se demuestra que Ψ es suprayectiva.

Finalmente, se concluye que a cada $T = (V, F) \in \Upsilon(G)$ le corresponde una configuración crítica $s_F \in \Theta(G, q)$ y esta asociación es biyectiva. \square

Para ejemplificar estos resultados observe la siguiente gráfica de 5 vértices y 6 aristas,



los 9 árboles generadores y las correspondientes configuraciones críticas, son:



3.3. El nivel y la actividad externa.

Existe un resultado interesante que relaciona al número de fichas de las configuraciones críticas y los polinomios de Tutte, para llegar a este resultado primero se darán algunas definiciones.

Definición 3.13. *El nivel de una configuración crítica está dado por*

$$\text{nivel}(s) = d(q) + \sum_{v_i \in V(G) - \{q\}} s(v_i) - |E(G)|$$

Definición 3.14. *Dada una gráfica conexa G , el polinomio que enumera la distribución de las configuraciones críticas de acuerdo con su nivel es*

$$\mathcal{R}(G, y) = \sum_{s \in \Theta(G, q)} y^{\text{nivel}(s)}$$

La relación de este polinomio con el polinomio de Tutte está dada por el siguiente teorema,

Teorema 3.15. *Para una gráfica conexa G se tiene que*

$$\mathcal{R}(G, y) = T(G; 1, y).$$

De este teorema se desprende que para una gráfica conexa G , existen tantas configuraciones críticas de nivel j como árboles generadores de actividad externa j .

Se van a presentar dos formas para demostrar este teorema, la primera es aplicando el método de inducción matemática, la segunda demostración es a través de una interesante construcción de los árboles generadores y la asociación de estos con las configuraciones críticas conocida como transversales.

El teorema anterior ha recibido al menos tres pruebas diferentes. La primera está en [26] (y corresponde a la primera demostración que damos) la más reciente se encuentra en [27] y [28] (y corresponde la que presentamos a continuación), finalmente hay una tercera debida a M. Chari que no ha sido publicada [25].

Demostración 1

La demostración se hace por inducción matemática sobre el número de aristas, $m = |E(G)|$

Para ello, primero se prueba que la relación

$$\mathcal{R}(G, y) = \sum_{s \in \Theta(G, q)} y^{\text{nivel}(s)} = T(G; 1, y)$$

se satisface para las gráficas conexas con $m = 1$.

Si la gráfica es conexa y tiene solamente una arista e_1 , entonces esta arista, o es puente o es lazo.

- Si e_1 , es lazo, entonces $V(G) = \{q\}$, y el nivel de la única configuración crítica es

$$\text{nivel}(s) = d(q) - |E(G)| = 2 - 1 = 1.$$

Por lo que $\mathcal{R}(G, y) = y$; mientras que el polinomio de Tutte es $T(G; x, y) = y$, entonces se cumple que $\mathcal{R}(G, y) = T(G; 1, y)$

- Si e_1 , es puente, entonces $|V(G)| = 2$ y $V(G) = \{q, v_1\}$, y la única configuración crítica de G es $s(v_1) = 0$, entonces el nivel de esta configuración es:

$$\text{nivel}(s) = d(q) + s(v_1) - |E(G)| = 1 + 0 - 1 = 0.$$

Por lo que $\mathcal{R}(G, y) = 1$; mientras que el polinomio de Tutte es $T(G; x, y) = x$, entonces se cumple que $\mathcal{R}(G, y) = T(G; 1, y)$

queda probada la propuesta para $m = 1$

Ahora se supone que la propuesta se satisface para todas las gráficas conexas con $m \leq k$ y a partir de esto se va a probar que la propuesta se satisface para las gráficas conexas con $m = k + 1$.

Sea G una gráfica conexa con $m = k + 1$ aristas numeradas de 1 a m de acuerdo a un orden total, e_1, e_2, \dots, e_m . Sea $e \in E(G)$ incidente al vértice $q \in V(G)$, entonces e puede estar en cualquiera de los 3 casos siguientes:

CASO 1: e es un lazo.

Entonces $e = qq$, $d_G(q) = d_{G-e}(q) + 2$ y ninguna partícula es repartida desde q a otro vértice distinto a través de e , por lo que cualquier configuración crítica s de la gráfica G , es también una configuración crítica de la gráfica $G - e$ y,

$$\begin{aligned} nivel_G(s) &= d_G(q) + \sum_{v \neq q} s(v) - |E(G)| \\ &= d_{G-e}(q) + 2 + \sum_{v \neq q} s(v) - (|E(G-e)| + 1) \\ &= d_{G-e}(q) + \sum_{v \neq q} s(v) - |E(G-e)| + 1 \\ &= nivel_{G-e}(s) + 1 \end{aligned}$$

Entonces el polinomio

$$\mathcal{R}(G, y) = \sum_{s \in \Theta(G, q)} y^{nivel_G(s)} = \sum_{s \in \Theta(G-e, q)} y^{nivel_{G-e}(s)+1} = y \mathcal{R}(G-e, y).$$

Pero la gráfica $G - e$ tiene $m = k$ aristas, por lo tanto para este polinomio se satisface la relación

$$\mathcal{R}(G-e, y) = T(G-e; 1, y),$$

y por las propiedades del polinomio de Tutte, cuando e es un lazo, se concluye que

$$\mathcal{R}(G, y) = yT(G-e; 1, y) = T(G; 1, y),$$

CASO 2: e es un puente.

Entonces existe $u \in V(G) - \{q\}$ tal que $e = qu$. Sea T un árbol generador de G , sin pérdida de generalidad se supone que u_0 y $u = u_1$ en la sucesión q -legal de s_T .

Por ser e puente $G - e$ tiene dos componentes conexas, $G - e = G_1 \cup G_2$, sin pérdida de generalidad se supone que $q \in V(G_1)$ y $u \in V(G_2)$ y se puede ver que en G , los vértices en $V(G_1) - \{q\}$ no disparan a los vértices en $V(G_2)$ y viceversa, entonces $s' \in \Theta(G_1, q)$ y $s'' \in \Theta(G_2, u)$ si y sólo si la configuración

$$s(v) = \begin{cases} s'(v) & \text{si } v \in V(G_1) - q \\ s''(v) & \text{si } v \in V(G_2) - u \\ d(v) - 1 & \text{si } v = u \\ \sum_{v \neq q} s(v) & \text{si } v = q \end{cases}$$

está en $\Theta(G, q)$.

Ahora obsérvese que

$$\begin{aligned}
nivel_G(s) &= d_G(q) + \sum_{v \neq q} s(v) - |E| \\
&= d_G(q) + \sum_{v \in V(G_1) - \{q\}} s(v) + \sum_{v \in V(G_2) - \{u\}} s(v) + s(u) - |E| \\
&= d_G(q) + \sum_{v \in V(G_1) - \{q\}} s(v) + \sum_{v \in V(G_2) - \{u\}} s(v) + d_G(u) - 1 \\
&\quad - |E(G_1)| - |E(G_2)| - 1 \\
&= \underbrace{d_G(q) - 1}_{d_{G-e}(q)} + \sum_{v \in V(G_1) - \{q\}} s(v) - |E(G_1)| \\
&\quad + \underbrace{d_G(u) - 1}_{d_{G-e}(u)} + \sum_{v \in V(G_2) - \{u\}} s(v) - |E(G_2)| \\
&= nivel_{G_1}(s') + nivel_{G_2}(s'')
\end{aligned}$$

El polinomio de nivel de G es

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(G, y) &= \sum_{s \in \Theta(G, q)} y^{nivel(s)} \\
&= \sum_{s' \in \Theta(G_1, q); s'' \in \Theta(G_2, u)} y^{nivel(s') + nivel(s'')} \\
&= \sum_{s' \in \Theta(G_1, q)} y^{nivel(s')} \sum_{s'' \in \Theta(G_2, u)} y^{nivel(s'')} \\
&= \mathcal{R}(G_1, y) \mathcal{R}(G_2, y)
\end{aligned}$$

y como $|E(G_1)|, |E(G_2)| \leq k$, por hipótesis de inducción $\mathcal{R}(G_1, y) = T(G_1; 1, y)$ y $\mathcal{R}(G_2, y) = T(G_2; 1, y)$ de donde se sigue que

$$\mathcal{R}(G, y) = T(G_1; 1, y) T(G_2; 1, y),$$

por el teorema 2.5 y la definición de polinomio de Tutte se sigue que

$$T(G_1; x, y) T(G_2; x, y) = T(G - e; x, y) = T(G; x, y) / x$$

por lo tanto se concluye que

$$\mathcal{R}(G, y) = T(G; 1, y)$$

CASO 3: e no es ni puente ni lazo.

Entonces existe $u \in V(G) - \{q\}$ tal que $e = uq$, y sin pérdida de generalidad se supone que $u = u_1$ y $e = e_1$.

Dado T un árbol generador de G , puede ser que $e \in T$ o $e \notin T$

(a) $e \in T$

Entonces T/e es árbol generador de G/e . Sea q' el vértice que resulta luego que e se contrae, entonces $d_{G/e}(q') = d(q) + d(u) - 2$. La configuración $s_{T/e} \in \Theta(G/e, q')$ si y sólo si $s \in \Theta(G, q')$ donde

$$s(v) = \begin{cases} s'(v) & \text{si } v \neq u, v \neq q \\ d(v) - 1 & \text{si } v = u \\ \sum_{v \neq q} s(v) & \text{si } v = q \end{cases}$$

Observe que $s = s_T$ es la configuración asociada con T , ya que $E(T) \cap E_{qu} = \{e_1\}$ y además para $v \in V(G) - \{q, u\}$ se tiene que $s'_1(v) = s'_{T/e}(v) + d(q', v) = s_{E(T)}(v) + d(v, q) + d(v, u) = s_2(v)$, de aquí se sigue que $s'_1 = s_2$ y en general $s'_{i-1} = s_i$ para $i = 2, \dots, n-1$.

Ahora obsérvese que

$$\begin{aligned} nivel_G(s) &= d_G(q) + \sum_{v \neq q} s(v) - |E| \\ &= d_G(q) + \sum_{v \in V(G) - \{q, u\}} s(v) + s(u) - |E| \\ &= d_G(q) + \sum_{v \in V(G) - \{q, u\}} s(v) + d(u) - 1 - |E(G/e)| - 1 \\ &= d_G(q) + d(u) - 2 + \sum_{v \in V(G/e) - \{q'\}} s'(v) - |E(G/e)| \\ &= d_{G/e}(q') + \sum_{v \in V(G/e) - \{q'\}} s'(v) - |E(G/e)| \\ &= nivel_{G/e}(s') \end{aligned}$$

(b) $e \notin T$

Entonces T es árbol generador de $G-e$ y $d_{G-e}(q, u) = d_G(q, u) - 1$ y $d_{G-e}(v, w) = d_G(v, w)$ en otro caso.

Como $e \notin E(T)$ en la configuración $s_T \in \Theta(G, q)$, el vértice u no es cargado por $u_0 = q$

- Sea u_i el vértice que carga a u , $i = 1, \dots, n-1$, entonces

$$\begin{aligned} s_T(u) &= d_G(u) - d_G(u, u_0) - \dots - d_G(u, u_i) + j = (d_{G-e}(u) + 1) - (d_{G-e}(u, u_0) + 1) - \\ &\quad \dots - d_{G-e}(u, u_i) + j \\ &= d_{G-e}(u) - d_{G-e}(u, u_0) - \dots - d_{G-e}(u, u_i) + j \end{aligned}$$

$$\text{donde } 1 \leq j \leq d_G(u, u_i) = d_{G-e}(u, u_i)$$

- Para $v \notin \{q, u\}$ que es cargado por $u_0 = q$ se tiene que

$$\begin{aligned} s_T(v) &= d_G(v) - d_G(v, u_0) + j = d_{G-e}(v) - d_{G-e}(v, u_0) + j \\ \text{donde } 1 \leq j \leq d_G(v, u_0) &= d_{G-e}(v, u_0), \end{aligned}$$

- Para $v \notin \{q, u\}$, que son cargados por u_i , $i = 1, \dots, n-1$ se tiene que

$$\begin{aligned} s_T(v) &= d_G(v) - d_G(v, u_0) - \dots - d_G(v, u_i) + j = d_{G-e}(v) - d_{G-e}(v, u_0) - \\ &\quad \dots - d_{G-e}(v, u_i) + j \end{aligned}$$

$$\text{donde } 1 \leq j \leq d_G(v, u_i) = d_{G-e}(v, u_i)$$

De aquí se puede ver que $s_T \in \Theta(G - e, q)$, y el nivel de s es:

$$\begin{aligned} nivel_G(s) &= d_G(q) + \sum_{v \neq q} s(v) - |E| \\ &= (d_{G-e}(q) + 1) + \sum_{v \in V(G-e) - \{q\}} s(v) - (|E(G-e)| + 1) \\ &= d_{G-e}(q) + \sum_{v \in V(G-e) - \{q\}} s(v) - |E(G-e)| \\ &= nivel_{G-e}(s) \end{aligned}$$

De (a) y de (b) se sigue que cuando e no es puente ni lazo $nivel_G(s_T) = nivel_{G/e}(s_{T/e})$ cuando $e \notin T$ y $nivel_G(s_T) = nivel_{G-e}(s_{T-e})$ cuando $e \in T$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(G, y) &= \sum_{s \in \Theta(G, q)} y^{nivel(s)} = \sum_{s \in \Theta(G/e, q)} y^{nivel(s)} + \sum_{s \in \Theta(G-e, q)} y^{nivel(s)} \\ &= \mathcal{R}(G/e, y) + \mathcal{R}(G-e, y) \end{aligned}$$

Pero tanto la gráfica G/e como la gráfica $G-e$ tienen $m = k$ aristas, por lo tanto con estos polinomios se satisfacen las relaciones

$$\mathcal{R}(G/e, y) = T(G/e; 1, y) \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(G-e, y) = T(G-e; 1, y),$$

y cuando e no es un puente ni lazo, $T(G; x, y) = T(G/e; x, y) + T(G-e; x, y)$ se concluye que

$$\mathcal{R}(G, y) = T(G; 1, y),$$

queda probado el teorema. \square

Corolario 3.16. *El número de configuraciones críticas de nivel j es igual al número de árboles generadores de actividad externa j .*

Demostración Se sabe que $T(G; x, y) = \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j$ donde t_{ij} es el número de árboles generadores de actividad interna i y actividad externa j , por lo que $\sum_i t_{ij}$ es el número de árboles con actividad externa j , independiente de la actividad interna que tenga; entonces,

$$T(G; 1, y) = \sum_j \left(\sum_i t_{ij} \right) y^j,$$

mientras que el polinomio de nivel es

$$\mathcal{R}(G, y) = \sum_{s \in \Theta(G, q)} y^{nivel(s)}$$

y dado que $\mathcal{R}(G, y) = T(G; 1, y)$, al igualar los coeficientes de los dos polinomios se concluye que el número de árboles de actividad externa j es igual al número de configuraciones críticas de j . \square

3.4. Trasversales

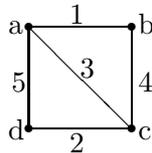
En esta sección se incluye otra prueba del resultado principal de la sección anterior presentado en el teorema 3.15. La razón de incluir esta prueba es su cercanía a los conceptos que se manejan en Ciencias de la Computación. En particular es atractivo su uso en la prueba del Lema 3.25. Además esta construcción permite extraer una visión más clara del papel de las aristas externamente activas de un árbol generador T

Empezaremos por definir el concepto de transversal y probar algunos lemas relacionados.

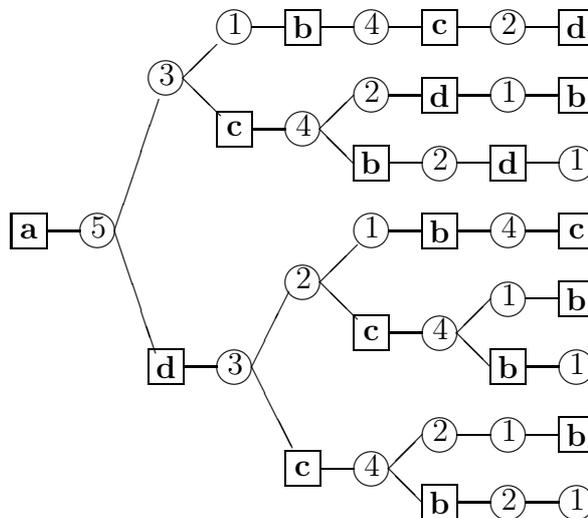
Definición 3.17. *Dada una gráfica conexa $G = (V, E)$ con un orden total, $<_e$, en sus arista e_1, e_2, \dots, e_m , una transversal σ es una sucesión de aristas y vértices de G dado por: $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_N)$ con $N = |V(G) \cup E(G)|$, tal que cada vértice y cada arista aparece exactamente una vez de acuerdo a la siguiente regla:*

- (i) Si $\sigma_i \in V(G) - \{q\}$, entonces σ_{i-1} es una arista incidente a σ_i .
- (ii) Si $\sigma_i \in E(G)$, entonces es la máxima arista, de acuerdo con el orden $<_e$, entre todas las aristas que no están en $\sigma^{<i} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}\}$ y es incidente a un vértice en $\sigma^{<i}$.

La condición (i) implica que $\sigma_1 = q$. Por ejemplo, la siguiente gráfica con $q = a$,



presenta los siguientes 8 decrecimientos transversales



Lema 3.18. *Sea σ y τ dos diferentes decrecimiento trasversales, y k el índice mínimo tal que $\sigma_k \neq \tau_k$. Entonces σ_k y τ_k uno es una arista y el otro un vértice*

Demostración La demostración se hará por reducción al absurdo. Sea $\sigma^{<i} = \{\sigma_j : j < i\}$ el conjunto de elementos que aparecen antes del elemento σ_i en σ , y por la elección de k , se tiene que $\sigma^{<k} = \tau^{<k}$ y $\sigma_k \neq \tau_k$.

Suponga que σ_k y τ_k son ambos vértices, entonces por la condición (i) $\sigma_{k-1} = \tau_{k-1}$ es una arista incidente a los dos vértices σ_k y τ_k y además es incidente a un tercer vértice en $\sigma^{<k} = \tau^{<k}$, lo que es contradictorio pues una arista no puede incidir a tres vértices diferentes.

Suponga que σ_k y τ_k son ambas aristas, entonces por la condición (ii), σ_k es la máxima arista que no está en $\sigma^{<k}$ y es incidente a un vértice en $\sigma^{<k}$, mientras que τ_k es la máxima arista que no está en $\tau^{<k}$ y es incidente a un vértice en $\tau^{<k}$, pero por la elección de k se tiene que $\sigma^{<k} = \tau^{<k}$ de donde se sigue que necesariamente $\sigma_k = \tau_k$, que es contradictorio, pues se supone que estos dos elementos son diferentes. \square

Definición 3.19. *Denotamos $\mathcal{D}(G, q)$ al conjunto de decrecimiento trasversales de G con q fija.*

3.4.1. Decrecimiento trasversal y árboles generadores

Sea Φ la función la cual transforma la trasversal σ de acuerdo a la siguiente regla

$$\Phi(\sigma) = \{\sigma_{k-1} : \sigma_k \in V(G) - \{q\}\}$$

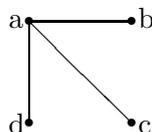
Por ejemplo, la trasversal

$$\sigma = \boxed{\mathbf{q}} - \textcircled{5} - \boxed{\mathbf{d}} - \textcircled{3} - \boxed{\mathbf{b}} - \textcircled{4} - \textcircled{2} - \textcircled{1} - \boxed{\mathbf{c}}$$

tiene como imagen bajo Φ al conjunto

$$\Phi(\sigma) = \{\textcircled{5}, \textcircled{3}, \textcircled{1}\}$$

que representa a la subgráfica



y corresponde a un árbol generador de G . Este es un resultado general como se puede ver en el siguiente lema.

Lema 3.20. *La transformación $\Phi(\sigma)$, antes definida, describe una biyección entre el conjunto de transversales $\mathcal{D}(G, q)$ y el conjunto de árboles generadores $\Upsilon(G)$*

Demostración Primero se prueba que para toda transversal σ , la gráfica $T = (V, \Phi(\sigma))$ es un árbol generador.

Por construcción la subgráfica $(V, \Phi(\sigma))$ es conexa, con $|V| - 1$ aristas y $|V|$ vértices, entonces se sigue que $\Phi(\sigma)$ es un árbol generador y queda probado que la función Φ tiene como codominio a $\Upsilon(G)$.

Ahora se debe probar que Φ es inyectiva y suprayectiva.

- Φ es inyectiva:

Sea σ y τ dos diferentes transversales y k el mínimo índice tal que $\sigma_k \neq \tau_k$. Sin pérdida de generalidad el Lema 3.18 indica que σ_k es un vértice y τ_k una arista. Entonces $\sigma_{k-1} = \tau_{k-1}$ es una arista de $\Phi(\sigma)$ porque precede a un vértice, pero no es una arista de $\Phi(\tau)$, por lo tanto $\Phi(\sigma) \neq \Phi(\tau)$.

- Φ es suprayectiva:

La demostración es sencilla, primero construimos la transversal del árbol generador T , la cual es única ya que q es fijo. Y después agregamos las restantes aristas de G de tal manera que se obtenga una transversal de G y que se mantenga T como la imagen de Φ .

Elija la arista

$$e_0^* = \max\{e \in A_0\} \quad \text{con } A_0 = \{e \in E(T) \mid e \text{ es incidente con } v_0 = q\}$$

y forme el conjunto

$$D_0 = \{e \in E(G) - E(T) \mid e \text{ es incidente a } v_0 \text{ y } e_0^* <_e e\}$$

Si $D_0 \neq \emptyset$, entonces sus elementos se ordenan de acuerdo al orden $<_e$ quedando como $e_{01} <_e e_{02} <_e \dots <_e e_{0j_0}$, donde $j_0 = |D_0|$ y sea $v_1 \in V$ tal que $e_0^* = v_0 v_1$.

Entonces los primeros $j_0 + 3$ elementos de σ se asignan como:

$$\sigma^{<_{j_0+4}} = \begin{cases} q, e_{0j_0}, e_{0j_0-1}, \dots, e_{01}, e_0^*, v_1; & \text{si } j_0 > 0 \\ \sigma_1 = q, \sigma_2 = e_0^*, \sigma_3 = v_1; & \text{si } j_0 = 0 \end{cases}$$

De manera recursiva para $k = 1, 2, \dots, |V| - 1$; sea $S_k = \sum_{i=0}^k j_i$ y se continua la construcción de la transversal de la siguiente manera:

Elija la arista $e_k^* = \max\{e \in A_k\}$ donde

$$A_k = \{e \in (E(T) - \sigma^{<S_{k-1}+2(k+1)}) \mid e \text{ es incidente con } v \in \{v_0, \dots, v_k\}\}$$

y forme el conjunto

$$D_k = \{e \in E(G) - \sigma^{<S_{k-1}+2(k+1)} - E(T) \mid e \text{ es incidente a } v \in \{v_0, \dots, v_k\} \text{ y } e_{i_k} <_e e\}$$

Si $D_k \neq \emptyset$, entonces sus elementos se ordenan de acuerdo al orden $<_e$ quedando como $e_{k1} <_e e_{k2} <_e \dots <_e e_{kj_k}$, donde $j_k = |D_k|$ y sea v_{k+1} el otro vértice incidente de e_k^* ; entonces los siguientes $j_k + 2$ elementos de σ son:

$$\sigma^{<S_{k+2(k+2)} - \sigma^{<S_{k-1}+2(k+1)}} \begin{cases} e_{kj_k}, e_{kj_k-1}, \dots, e_{k1}, e_k^*, v_{k+1}; & \text{si } j_k > 0 \\ e_k^*, v_{k+1}; & \text{si } j_k = 0 \end{cases}$$

Si terminando este proceso aún quedan aristas que no han sido incluidas en la transversal, éstas se agregan en orden decreciente al final de la transversal.

Por construcción, $(V, \Phi(\sigma)) = T$, y queda probado que Φ es una biyección. \square

Corolario 3.21. *Sea ϕ_k la función que transforma el segmento de la transversal $\sigma^{<k}$ de acuerdo a la siguiente regla*

$$\phi_k(\sigma^{<k}) = \{\sigma_{j-1} \in \sigma^{<k} \mid \sigma_j \in V(G) - \{q\}\}$$

entonces $\phi_k(\sigma^{<k})$ es un subárbol de $\phi(\sigma)$.

3.4.2. Decrecimiento transversal y configuraciones críticas

Dada una transversal σ , se define la configuración s_σ de la siguiente manera: para el vértice $v \in V(G) - \{q\}$ y $v = \sigma_i$,

$$s_\sigma(v) = d(v) - |\{e \in \sigma^{<i} \mid e \text{ es incidente a } v\}|.$$

En la configuración s_σ el número de fichas que tiene cada vértice diferente de q coincide con su grado menos el número de aristas incidentes a ese vértice que se encuentran en la sucesión σ antes de él.

Teorema 3.22. *Dada la transversal σ , la configuración s_σ es crítica.*

Demostración Por construcción de σ , cada vértice $v \neq q$ está precedido por una arista incidente a él, por lo tanto, $s_\sigma(v) \leq d(v) - 1$ e implica que s_σ es estable.

Para probar que s_σ es recurrente, observe que cuando $v \neq q$ y $v = \sigma_i$, $i > 1$, entonces si $e \in \sigma^{<i}$ es incidente a v el otro vértice incidente a e esta antes que v en σ , por lo

tanto el primer vértice $v_1 \neq q$ que aparece en la sucesión σ es cargado por q , ya que todas las aristas que unen a q con v_1 están antes que v_1 y le dan las fichas necesarias para quedar cargado. Esto significa que si q reparte, las fichas que llegan a v_1 más las fichas que ya tiene, son suficientes para quedar cargado. Luego, si v_1 reparte se tiene que en la configuración resultante, el siguiente vértice $v_2 \neq q$ en la sucesión σ está cargado, porque lo cargó q o porque lo cargó v_1 , y entonces v_2 puede repartir y reparte. Así, en general, si los vértices siguen repartiendo en orden de aparición en σ , el i -ésimo vértice en la sucesión σ está cargado en la configuración i -ésima, porque fue cargado por alguno de los vértices que le preceden, y por lo tanto puede repartir. De esta manera, cada vértice en σ reparte una y sólo una vez, y al final, cada vértice queda con el mismo número de fichas que en la configuración inicial, con lo que se demuestra que la configuración es recurrente.

Se probó que s_σ es estable y recurrente, por lo tanto es crítica \square .

Teorema 3.23. *Dada una gráfica conexa G , existe una biyección entre el conjunto de decrecimientos transversales de G , $\mathcal{D}(G, q)$ y las configuraciones críticas de G , $\Theta(G, q)$.*

Demostración De la construcción de s_σ y del resultado del Teorema 3.22 se sigue que la función $\sigma \rightarrow s_\sigma$ asigna a cada transversal una configuración crítica. Es claro que si se tienen dos transversales distintas, las configuraciones correspondientes serán también distintas, por lo que la función es inyectiva. Sabemos por Lema 3.20 que el número de transversales es igual al de árboles generadores y sabemos del Teorema 3.12 que el número de árboles generadores es igual al número de configuraciones críticas, por lo que concluimos que la asignación $\sigma \rightarrow s_\sigma$ es también suprayectiva.

3.4.3. La fuerza en el decrecimiento trasversal

Definición 3.24. *Decimos que la arista σ_i es fuerte en la transversal σ si aparece después que sus extremos, en otro caso se dice que la arista es débil. La fuerza $F(\sigma)$ de la transversal es el número de aristas fuertes en σ .*

Dado que cada arista que se agrega a la transversal debe ser incidente a un vértice que ya está integrado en la transversal, entonces todo lazo de G aparece en la transversal después de su único vértice incidente, por lo que si e es lazo de G , entonces e es fuerte en la transversal σ .

Para el siguiente lema se denota como $ea(E(T))$ al número de aristas externamente activas en el árbol generador de T .

Lema 3.25. *Para cualquier transversal σ , una arista es fuerte en σ si y sólo si es externamente activa en $\Phi(\sigma)$. Entonces*

$$F(\sigma) = ea(\Phi(\sigma)).$$

Demostración. Se debe demostrar la implicación en los dos sentidos.

- “ \Leftarrow ” Si e es externamente activa en $\Phi(\sigma)$ entonces es fuerte en σ :

La demostración se hará por reducción al absurdo. Sea $e^* = \sigma_i = v^*w^*$ una arista externamente activa en $(V, \Phi(\sigma))$ y suponga que en la transversal σ la arista e^* se encuentra entre sus dos vértices incidentes; sin pérdida de generalidad suponga que w^* está antes y v^* está después de e^* en la transversal σ , esto es $v^* = \sigma_j$ con $i < j$. Dado que $e^* \notin \phi(\sigma)$ entonces existe una arista $e' \neq e^*$ tal que $e' = \sigma_{j-1}$.

Por construcción se sabe que

$$e^* = \text{máx}\{e \mid e \notin e^{<i-1} \quad \text{incidente a un vértice } v \in e^{<i-1}\}$$

mientras que

$$e' = \text{máx}\{e \mid e \notin e^{<j-2} \quad \text{incidente a un vértice } v \in e^{<j-2}\}$$

y como $i-1 < j-2$ se sigue que $e' <_e e^*$. Por construcción, el único ciclo fundamental de $(V, \Phi(\sigma)) \cup \{e^*\}$ corresponde al único ciclo fundamental de $(V', \Phi_j(\sigma_{<j})) \cup \{e^*\}$ con $\sigma_{<j-1}$ por lo que este ciclo contiene a la arista e' que es menor que e^* , por lo tanto e^* no puede ser una arista externamente activa en $(V, \Phi(\sigma))$, y esto es una contradicción. Por lo tanto e^* debe estar después de sus dos vértices incidentes.

- “ \Rightarrow ” Si e es fuerte en σ entonces es externamente activa en $\Phi(\sigma)$:

Dado que $e^* = \sigma_i = v^*w^*$ es una arista fuerte en σ , entonces sus dos vértices incidentes están antes que ella en la transversal. Sin pérdida de generalidad suponga que $v^* = \sigma_j$ y $w^* = \sigma_{j'}$ con $j' < j < i$; por el corolario del Lema 3.20 se tiene que $\phi_{j+1}(\sigma_{<j+1})$ es un subárbol de $\phi(\sigma)$ cuyas aristas son mayores a la arista e^* , y contiene a sus vértices incidentes; por lo que el ciclo fundamental que cierra e^* está conformado por aristas mayores que ella y al ser la mínima arista de este ciclo, se sigue que e^* es externamente activa. \square

Lema 3.26. Para un decrecimiento transversal σ ,

$$F(\sigma) = \text{nivel}(s_\sigma).$$

Demostración Para el vértice $v \in V(G) - \{q\}$ y $v = \sigma_i$, se define el conjunto

$$F_v = \{e \in \sigma^{<i} \mid e \text{ es incidente a } v\},$$

de esta construcción se tiene que toda arista $e \in F_v$ se encuentra entre sus dos vértices incidentes en la transversal, entonces las aristas en F_v son débiles en σ . Por esta razón, si $v \neq u$ se sigue que $F_v \cap F_u = \emptyset$ y el número de aristas débiles en la transversal es igual a $|\cup_{v \neq q} F_v| = \sum_{v \neq q} |F_v|$. Además, se tiene que $F(\sigma) + \sum_{v \neq q} |F_v| = E(G)$, lo que implica que $\sum_{v \neq q} |F_v| = E(G) - F(\sigma)$.

Por otro lado, por la definición de s_σ , se tiene que para el vértice $v \in V(G) - \{q\}$ se sigue que $s_\sigma(v) = d(v) - |F_v|$, entonces el nivel de s_σ es

$$\begin{aligned}
 nivel(s_\sigma) &= d(q) + \sum_{v \neq q} s_\sigma(v) - |E(G)| \\
 &= d(q) + \sum_{v \neq q} (d(v) - |F_v|) - |E(G)| \\
 &= \sum_{v \in V(G)} d(v) - \sum_{v \neq q} |F_v| - |E(G)| \\
 &= 2|E(G)| - (E(G) - F(\sigma)) - |E(G)| \\
 &= F(\sigma)
 \end{aligned}$$

queda demostrado el lema □

Ahora ya se está en condiciones de dar una prueba alternativa del Teorema 3.15.

Demostración Teorema 3.15

Por el Lema 3.26, se sabe que $R(G; y) = \sum_{s \in \Theta(G, q)} y^{nivel(s)}$ es igual a $\sum_{\sigma \in \mathcal{D}(G, q)} y^{F(\sigma)}$ y por los Lemas 3.20 y 3.25, esta expresión es igual a $\sum_{T \in \Psi(G)} y^{ea(T)} = \sum_{ij} 1^i y^j$. Por el Teorema 2.14 esto es precisamente $T(G; 1, y)$. □

Los juegos de balanceo fueron desarrollados independientemente de los juegos de reparto de fichas, como un ejemplo vea [12] [13] [14]. También, han habido una enorme cantidad de artículos devotos al juego general de reparto de fichas de Björner, Lovász y Shor, así como a una generalización a gráficas dirigidas [15] vea por ejemplo [15] [16] [17] [18] [19] [20].

Hay al menos dos generalizaciones del juego de reparto de fichas. Uno es para gráficas dirigidas. A. Björner y L. Lovász introdujeron una extensión natural del juego general de reparto de fichas para gráficas directas. Más recientemente, D.G. Wagner ha considerado la extensión natural correspondiente del juego de reparto de fichas discutido aquí a las gráficas dirigidas fuertemente conexas [21]. Otra posibilidad fue considerada en [22] donde el juego de reparto de fichas es generalizado a un proceso de reparto de fichas sobre latices y entonces usadas para dar un juego de fichas para la clase de matroides regulares (Matroides representables por matrices totalmente unimodulares, vea [23]) el cual contiene la clase de matroides gráficos. Desafortunadamente en ambas aproximaciones, la relación con el polinomio de Tutte parece estar perdida.

Capítulo 4

Polinomio de Confiabilidad

El polinomio de confiabilidad indica la probabilidad de que en una red, por ejemplo en el internet, se mantengan comunicados los vértices que están comunicados en la red. Antes de entrar al estudio del polinomio de confiabilidad se presenta una breve introducción a los conceptos de probabilidad necesarios para demostrar los resultados en este tema.

4.1. Introducción a la Probabilidad

4.1.1. Definiciones básicas

Definición 4.1. Desde el punto de vista de la probabilidad, se dice que un experimento, es todo proceso o acción observable susceptible de repetirse.

Por ejemplo, lanzar un dado o lanzar un volado, es un experimento desde el punto de vista de la teoría de la probabilidad.

Definición 4.2. Espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados en un experimento y se denota por Ω .

Por ejemplo, si el experimento es lanzar una moneda al aire, el espacio muestral es

$$\Omega = \{\text{águila}, \text{sol}\},$$

el espacio muestral del lanzamiento de un dado es

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

Definición 4.3. Evento es un subconjunto del espacio muestral.

Definición 4.4. Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si y sólo si $A \cap B = \phi$. Esto significa que si uno de los eventos ocurre, el otro es imposible que ocurra, o bien, dos eventos son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir al mismo tiempo.

Definición 4.5. *El evento imposible es el que no puede ocurrir y se denota con el símbolo ϕ .*

Definición 4.6. *La probabilidad es una medida de la posibilidad que ocurra un evento al realizar un experimento.*

La definición clásica de probabilidad es:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

La probabilidad satisface los tres axiomas siguientes

1. Para todo evento A , $P(A) \geq 0$.
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ son eventos mutuamente excluyentes por pares entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Teorema 4.7. *Para cualquier evento A , $P(A^c) = 1 - P(A)$*

Demostración $A \cup A^c = \Omega$ y $A \cap A^c = \Phi$. Entonces $P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1$, y despejando el valor de $P(A^c)$ queda probado el teorema.

Teorema 4.8. $P(\phi) = 0$

Demostración

$$P(\phi) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$$

4.1.2. Probabilidad Condicional

Definición 4.9. *Dados dos eventos A y B se define la probabilidad condicional de A dado B como*

$$P(A | B) = \begin{cases} \frac{\#A \cap B}{\#B} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} & \text{si } P(B) \neq 0 \\ 0 & \text{si } P(B) = 0 \end{cases}$$

Prácticamente, la probabilidad condicional dado el evento B , corresponde a la probabilidad cuando el espacio muestral se restringe a B .

Definición 4.10. *Dos eventos A y B se dice que son independientes si $P(A | B) = P(A)$, lo que significa que la ocurrencia de B no afecta a la ocurrencia de A y viceversa.*

Dos eventos posibles son independientes si y sólo si satisface la relación.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

4.2. Definición del Polinomio de Confiabilidad

Dada una gráfica conexa $G = (V, E)$ se genera una subgráfica $G_p = (V, E_p)$ con $E_p \subset E$ mediante el siguiente proceso aleatorio: la arista $e \in E(G)$ se incluye en E_p con probabilidad p y se excluye, con probabilidad $q = 1 - p$, ($0 < p < 1$). Para cada arista $e \in E$ se definen los eventos:

- A_e : la arista e es incluida en E_p .
- A_e^c : la arista e no es incluida en E_p .

La probabilidad asociada a estos eventos es: $P(A_e) = p$, y $P(A_e^c) = 1 - p = q$. La inclusión o exclusión de una arista en el subconjunto E_p es independiente de la inclusión o exclusión de otra arista. Entonces para dos aristas diferentes e y e' en E , los eventos A_e y $A_{e'}$ son independientes, esto es $P(A_e | A_{e'}) = P(A_e)$, y por consecuencia, lo son también sus respectivos complementos, entonces se satisfacen las siguientes relaciones:

- $P(A_e \cap A_{e'}) = P(A_e)P(A_{e'}) = p^2$.
- $P(A_e^c \cap A_{e'}) = P(A_e^c)P(A_{e'}) = pq$.
- $P(A_e \cap A_{e'}^c) = P(A_e)P(A_{e'}^c) = pq$.
- $P(A_e^c \cap A_{e'}^c) = P(A_e^c)P(A_{e'}^c) = q^2$.

El conjunto potencia de $E(G)$, forma el espacio muestral del experimento de seleccionar al subconjunto E_p ,

$$\Omega = \mathcal{P}(E(G)) = \{F | F \subset E(G)\}$$

De esta manera, $G_p = (V, E_p)$ es una subgráfica aleatoria de G , e indistintamente se identificará como G_p o como E_p .

Suponga que $E_p = \{e_1, e_2, \dots, e_{n_p}\}$, esto es, las aristas e_1, e_2, \dots, e_{n_p} se incluyeron en E_p y las aristas $e_{n_p+1}, e_{n_p+2}, \dots, e_m$ se excluyeron.

Entonces, la subgráfica (V, E_p) equivale al evento

$$E_p \equiv A_{e_1} \cap A_{e_2} \cap \dots \cap A_{e_{n_p}} \cap A_{e_{n_p+1}}^c \cap A_{e_{n_p+2}}^c \dots \cap A_{e_m}^c$$

y consecuentemente

$$\begin{aligned} P(E_p) &= P(A_{e_1} \cap A_{e_2} \cap \dots \cap A_{e_{n_p}} \cap A_{e_{n_p+1}}^c \cap A_{e_{n_p+2}}^c \dots \cap A_{e_m}^c) \\ &= P(A_{e_1})P(A_{e_2}) \dots P(A_{e_{n_p}})P(A_{e_{n_p+1}}^c)P(A_{e_{n_p+2}}^c) \dots P(A_{e_m}^c) \\ &= p^{|E_p|} q^{|E|-|E_p|} \end{aligned}$$

Ahora sí ya se está en condiciones de definir el polinomio de confiabilidad.

Definición 4.11. Sea la gráfica $G = (V, E)$ y el subconjunto de aristas de G , E_p definida como se hizo antes, con $0 < p < 1$, la probabilidad de que la subgráfica $G_p = (V, E_p)$ tenga el mismo número de componentes de la gráfica $G = (V, E)$, en función de p se conoce como polinomio de confiabilidad de la gráfica G , esto es, el polinomio de confiabilidad de G es:

$$\mathcal{R}(G) = P[r(E_p) = r(G)]$$

El siguiente teorema nos presenta una interesante relación entre el polinomio de confiabilidad y el polinomio de nivel, y consecuentemente con el polinomio de Tutte.

Teorema 4.12. Sea $G = (V, E)$ y E_p definida como antes, con $0 < p < 1$, entonces

$$\mathcal{R}(G) = P[r(E_p) = r(G)] = p^{r(G)} q^{n(G)} T_G(1, 1/q).$$

Demostración Considerando que el polinomio de Tutte está definido como

$$T(G; x, y) = \sum_{F \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(F)} (y-1)^{n(F)}$$

se tiene que los términos independientes de $x-1$ son cuando $r(G) = r(F)$, ya que entonces $(x-1)^{r(E)-r(F)} = (x-1)^0 = 1$, y son los únicos sumandos que no se anulan en el polinomio de Tutte al sustituir $x = 1$ por lo que:

$$T(G; 1, y) = \sum_{r(F)=r(E)} (y-1)^{n(F)}$$

Por otro lado, si $r(E_p) = r(E)$ entonces

- $n(E_p) = |E_p| - r(E_p) = |E_p| - r(E)$ lo que implica $|E_p| = n(E_p) + r(E)$ y
- $|E| - |E_p| = |E| - n(E_p) - r(E) = n(E) - n(E_p)$

De esta manera, si $r(E_p) = r(E)$ la probabilidad que ocurra el evento E_p es

$$P(E_p) = p^{|E_p|} q^{|E|-|E_p|} = p^{r(E)+n(E_p)} q^{n(E)-n(E_p)}$$

y de aquí se sigue

$$\begin{aligned}
P[r(E_p) = r(E)] &= \sum_{E_p \in \{F \mid r(F)=r(E)\}} P(E_p) \\
&= \sum_{E_p \in \{F \mid r(F)=r(E)\}} p^{r(G)+n(E_p)} q^{n(G)-n(E_p)} \\
&= p^{r(G)} q^{n(G)} \sum_{E_p \in \{F \mid r(F)=r(E)\}} p^{n(E_p)} q^{-n(E_p)} \\
&= p^{r(G)} q^{n(G)} \sum_{E_p \in \{F \mid r(F)=r(E)\}} \left(\frac{p}{q}\right)^{n(E_p)} \\
&= p^{r(G)} q^{n(G)} \sum_{r(F)=r(E)} \left(\frac{1}{q} - 1\right)^{n(F)} \\
&= p^{r(G)} q^{n(G)} T(G; 1, 1/q)
\end{aligned}$$

queda demostrado el teorema. □

Corolario 4.13. Sea $G = (V, E)$ y E_p definida como antes, con $0 < p < 1$, entonces

$$P(r(E) = r(E_p) + k) = \frac{1}{k!} p^{r(E)-k} q^{n(E)+k} \left. \frac{\partial^k T_G(x, y)}{\partial x^k} \right|_{x=1, y=1/q},$$

$$k = 1, 2, \dots, |V| - r(E)$$

Demostración

En el polinomio

$$\frac{\partial^k T_G(x, y)}{\partial x^k} = \sum_{F \subset E} \frac{[r(E) - r(F)]!}{[r(E) - r(F) - k]!} [(x-1)^{r(E)-r(F)-k} (y-1)^{n(F)}]$$

el término que es independiente de $(x-1)$ es cuando $r(E) - r(F) = k$, entonces

$$\left. \frac{\partial^k T_G(x, y)}{\partial x^k} \right|_{x=1} = \sum_{r(E)-r(F)=k} k! (y-1)^{n(F)} = k! \sum_{r(E)-r(F)=k} (y-1)^{n(F)}$$

Considere los evento $A_k = \{F \mid r(E) = r(F) + k\}$ y cuando $E_p \in A_k$ se tiene que

- $n(E_p) = |E_p| - r(E_p)$ lo que implica $|E_p| = n(E_p) + r(E) - k$ y
- $|E| - |E_p| = |E| - n(E_p) - r(E) + k = n(E) - n(E_p) + k$

y su probabilidad es $P(E_p) = p^{r(E)+n(E_p)-k} q^{n(E)-n(E_p)+k}$ y de aquí

$$\begin{aligned}
P(E_p \in A_k) &= \sum_{E_p \in A_k} P(E_p) \\
&= \sum_{E_p \in A_k} p^{r(E)+n(E_p)-k} q^{n(E)-n(E_p)+k} \\
&= p^{r(E)-k} q^{n(E)+k} \sum_{E_p \in A_k} p^{n(E_p)} q^{-n(E_p)} \\
&= p^{r(E)-k} q^{n(E)+k} \sum_{E_p \in A_k} \left(\frac{p}{q}\right)^{n(E_p)} \\
&= p^{r(E)-k} q^{n(E)+k} \sum_{E_p \in A_k} \left(\frac{1}{q} - 1\right)^{n(E_p)} \\
&= p^{r(G)-k} q^{n(G)+k} \sum_{r(G)-r(E_p)=k} \left(\frac{1}{q} - 1\right)^{n(E_p)} \\
&= p^{r(G)-k} q^{n(G)+k} \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k T(G;x,y)}{\partial x^k} \right|_{x=1,y=1/q}
\end{aligned}$$

queda demostrado el teorema. □

El polinomio de confiabilidad de una gráfica completa se puede obtener mediante una fórmula recursiva, para obtener esta fórmula se presenta el siguiente lema y el siguiente teorema.

Lema 4.14. *Sea $K_n = (V, E)$ la gráfica completa con $n \geq 2$ vértices, y $V_i \subset V(K_n)$ tal que $|V_i| = i$ y $v_0 \in V_i$ siendo v_0 un vértice fijo, entonces los subconjuntos*

- $A_{V_n} = \{F \subset E(K_n) \mid k_{K_n}(F) = 1\}$
- $A_{V_{n-1}} = \{F \subset E(K_n) \mid (V_{n-1}, F) \text{ es conexa}\}$
- $A_{V_i} = \{F \subset E(K_n) \mid F = F_1 \dot{\cup} F_2; (V_i, F_1) \text{ es conexa y si } uv \in F_2 \Rightarrow u, v \notin V_i\}$
para $i = n-2, n-3, \dots, 2, 1$

forman una partición del conjunto potencia de las aristas de K_n

Demostración Sea $F \subset E(K_n)$ cualquier subconjunto de aristas de la gráfica completa.

Si $k(F) = 1$ entonces $F \in A_{V_n}$.

Si $k(F) > 1$, entonces sean $G_i = (U_i, E_i)$ las componentes conexas de (V, F) . Elija como F_1 al conjunto de aristas de la componente conexa (U_i, E_i) tal que $v_0 \in U_i$ y construya el conjunto

$$V_{F_1} = \{v \in V(K_n) \mid v \text{ es incidente a alguna arista en } F_1\}$$

sea $j_0 = |V_{F_1}|$ entonces como $v_0 \in V_{F_1}$ se tiene que $F \subset A_{V_{F_1}} = A_{V_{j_0}}$, y queda demostrado el lema. \square

Lema 4.15. *Dada la gráfica completa K_n y la partición $A_{V_1}, A_{V_2}, \dots, A_{V_n}$ de la potencia de $E(K_n)$ definida en el Lema 4.14, entonces*

$$P(E_p \in \cup_{V_j \subset V_n} A_{V_j}) = \binom{n-1}{j-1} (1-p)^{j(n-j)} \mathcal{R}(K_j)$$

Demostración Si $E_p \in A_{V_n}$, entonces $k_{K_n}(E_p) = 1$, lo que implica que $r(E_p) = r(K_n)$, entonces

$$P(E_p \in A_{V_n}) = P(r(E_p) = r(K_n)) = \mathcal{R}(K_n),$$

se satisface el Lema para $j = n$.

Si $E_p \in A_{V_j}$, para $j = 1, \dots, n-1$, se tiene que $E_p = E_{p1} \cup E_{p2}$ tales que $E_{p1} \cap E_{p2} = \phi$, (V_j, E_{p1}) es una subgráfica conexa, y los vértices incidentes a las aristas de E_{p2} no pertenecen a V_j . Entonces $r_{K_j}(E_{p1}) = r(K_j)$ y $E_{p2} \subset E(K_{n-j})$.

Y como la inclusión, o no, de una arista en E_p es independiente de la inclusión, o no, de las otras aristas, se sigue que

$$P(E_p \in A_{V_j}) = P[r_{K_j}(E_{p1}) = r(K_j)] P(\cap_{e \in B_{V_j}} A_e^c) P(E_{p2} \subset E(K_{n-j}))$$

donde $B_{V_j} = \{uv \in E(K_n) \mid u \in V_j \text{ y } v \in V(K_n) - V_j\}$

Cada uno de los diferentes términos en la segunda parte de esta ecuación es:

- $P[r_{K_j}(F_1) = r(K_j)] = \mathcal{R}(K_j)$
- $P(\cap_{e \in B_{V_j}} A_e^c) = \prod_{e \in B_{V_j}} P(A_e^c) = (1-p)^{|B_{V_j}|} = (1-p)^{j(n-j)}$
- $P(E_{p2} \subset E(K_{n-j})) = P(E_{p2} \in \Omega_{K_{n-j}}) = 1$.

De aquí se sigue que $P(E_p \in A_{V_j}) = (1-p)^{j(n-j)} \mathcal{R}(K_j)$ y finalmente se encuentra que

$$\begin{aligned} P(E_p \in \cup_{V_j \subset V_n} A_{V_j}) &= \sum_{V_j \subset V_n} P(E_p \in A_{V_j}) \\ &= |\{V_j \mid V_j \subset V_n\}| (1-p)^{j(n-j)} \mathcal{R}(K_j) \\ &= \binom{n-1}{j-1} (1-p)^{j(n-j)} \mathcal{R}(K_j). \end{aligned}$$

Queda probado el lema para $1 \leq j \leq n-1$. \square

Teorema 4.16. *Sea $K_n = (V, E)$ la gráfica completa de n vértices, y E_p definida como antes, con $0 < p < 1$, entonces*

$$\mathcal{R}(K_n) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} (1-p)^{k(n-k)} \mathcal{R}(K_k)$$

Demostración Por el Lema 4.14 se tiene que las clases de conjuntos A_{V_j} son mutuamente excluyentes o ajenas y forman una partición de Ω , entonces

$$\bigsqcup_{i=1}^n \left(\bigsqcup_{V_i \subset V(K_n)} A_{V_i} \right) = \Omega;$$

entonces por el tercer axioma de probabilidad se sigue que

$$P \left[\bigsqcup_{i=1}^n \left(\bigsqcup_{V_i \subset V(K_n)} A_{V_i} \right) \right] = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{V_i \subset V(K_n)} P(E_p \in A_{V_i}) \right) = P(\Omega) = 1;$$

Por el lema 4.15 se tiene que

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{V_i \subset V(K_n)} P(E_p \in A_{V_i}) \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} (1-p)^{i(n-i)} \mathcal{R}(K_i) + \mathcal{R}(K_n) = 1$$

y al despejar el término $\mathcal{R}(K_n)$ se tiene que

$$\mathcal{R}(K_n) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} (1-p)^{k(n-k)} \mathcal{R}(K_k)$$

queda demostrado el teorema. □

En este capítulo se definió el polinomio de confiabilidad y se dio una fórmula para calcular este polinomio para la gráfica completa. Esto implica poder calcular la probabilidad que en una red, como el internet, todos los vértices se encuentren conectados.

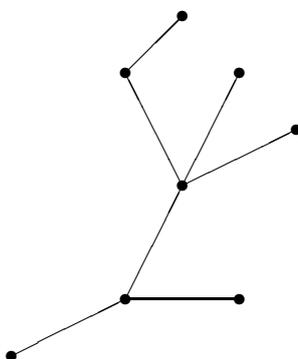
En el siguiente capítulo se va a encontrar las fórmulas para los polinomios de Tutte para algunas gráficas particulares.

Capítulo 5

Polinomio de Tutte de algunas familias de gráficas

En los capítulos anteriores se revisaron las definiciones y algunas propiedades del polinomio de Tutte, así como las de otros polinomios relacionados, como el polinomio de nivel y el polinomio de contingencia. En este capítulo se va a encontrar el polinomio de Tutte de algunas gráficas particulares; primero se encontrará el polinomio de Tutte de un árbol y de un ciclo, posteriormente se encuentra el polinomio de Tutte de una rueda y finalmente se encuentra el polinomio de Tutte de la gráfica completa. Adicionalmente se dan también los polinomios de nivel de las mismas gráficas. En algunos casos esta formulación será relativamente sencilla pero como veremos al transcurrir el capítulo nos encontraremos con gráficas que nos darán fórmulas más complejas.

5.1. Polinomio de Tutte de un árbol



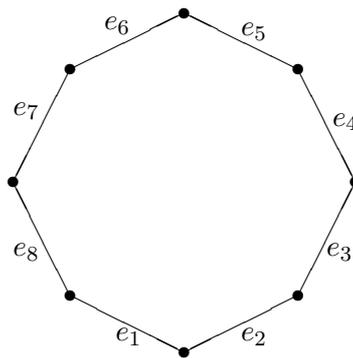
En un árbol con n vértices T_n todas las aristas son puentes, por lo tanto el polinomio de Tutte de un árbol es

$$T(T_n; x, y) = x^{n-1}$$

y el polinomio de nivel es

$$\mathcal{R}(G, y) = 1$$

5.2. Polinomio de Tutte de un ciclo



Si C_n es un ciclo de n vértices, $C_n - e$ es un árbol de n vértices y C_n/e es un ciclo de $n - 1$ vértices, entonces

$$T(C_n; x, y) = T(C_{n-1}; x, y) + T(T_n; x, y)$$

Aplicando el mismo razonamiento se obtiene que

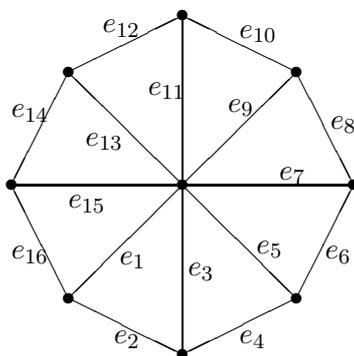
$$\begin{aligned} T(C_n; x, y) &= T(C_{n-1}; x, y) + x^{n-1} \\ &= T(C_{n-2}; x, y) + x^{n-2} + x^{n-1} \\ &= T(C_1; x, y) + x + x^2 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1} \\ &= y + x + x^2 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1} \end{aligned}$$

y el polinomio de nivel es

$$\mathcal{R}(G; y) = y + n - 1$$

5.3. Polinomio de Tutte de una rueda

Una rueda es una gráfica $W_n = G(V, E)$ con n vértices y $2(n-1)$ aristas, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, \dots, v_1v_n, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_2\}$. La siguiente figura representa una rueda de nueve vértices.



Para la rueda W_n , considere la clase de subconjuntos de sus aristas dada como

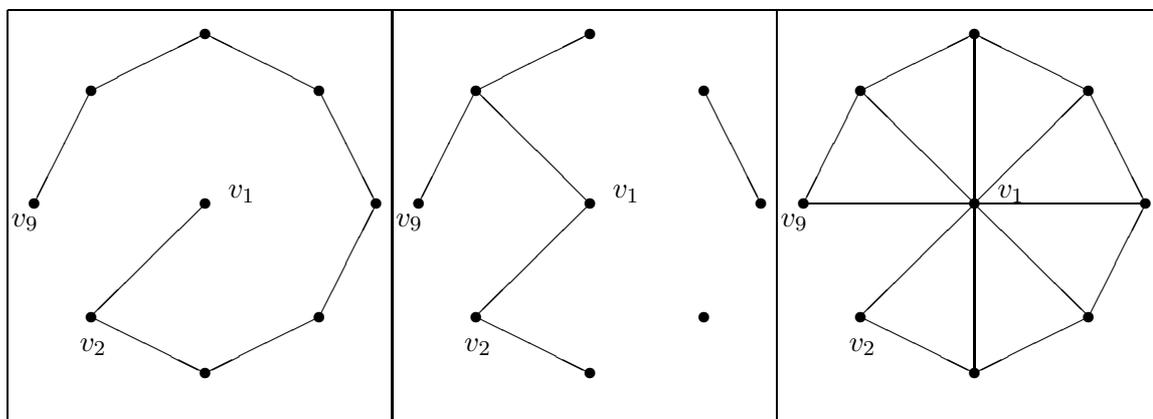
$$\mathcal{C}_n = \{F \subset E \mid v_n v_2 \notin F\},$$

entonces el polinomio de Tutte de W_n se puede escribir como:

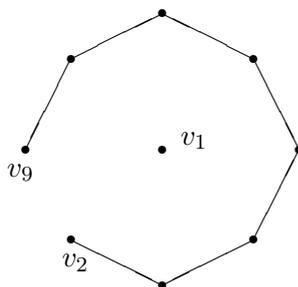
$$T(W_n; x, y) = \sum_{F \subset \mathcal{C}_n} ((x-1)^{r(E)-r(F)} (y-1)^{n(F)} + (x-1)^{r(E)-r(F \cup \{v_2 v_n\})} (y-1)^{n(F \cup \{v_2 v_n\})})$$

La clase \mathcal{C}_n se puede particionar en cinco clases disjuntas dadas por:

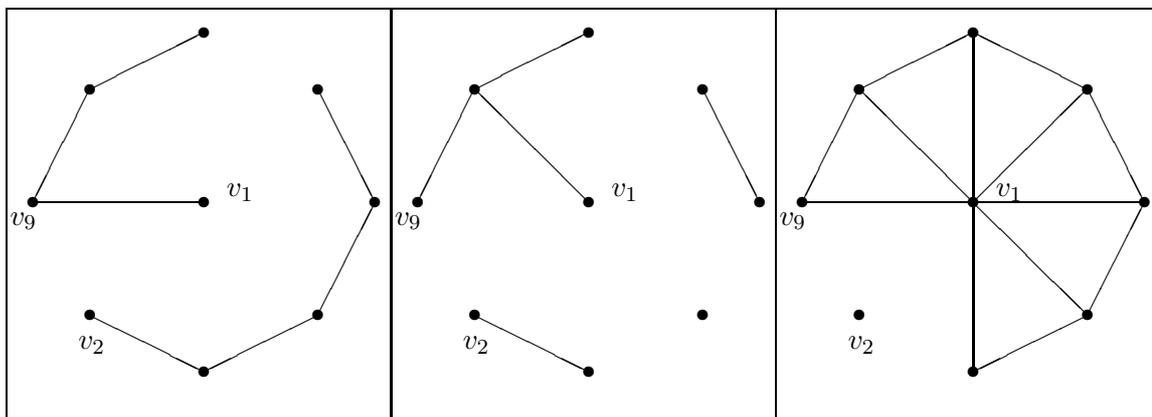
1. \mathcal{C}_{1n} formado por los subconjuntos $F \subset \mathcal{C}_n$ tal que v_1 , v_2 y v_n están en una misma componente de F , por ejemplo los siguientes subconjuntos de W_9 están en $\mathcal{C}_{1,9}$:



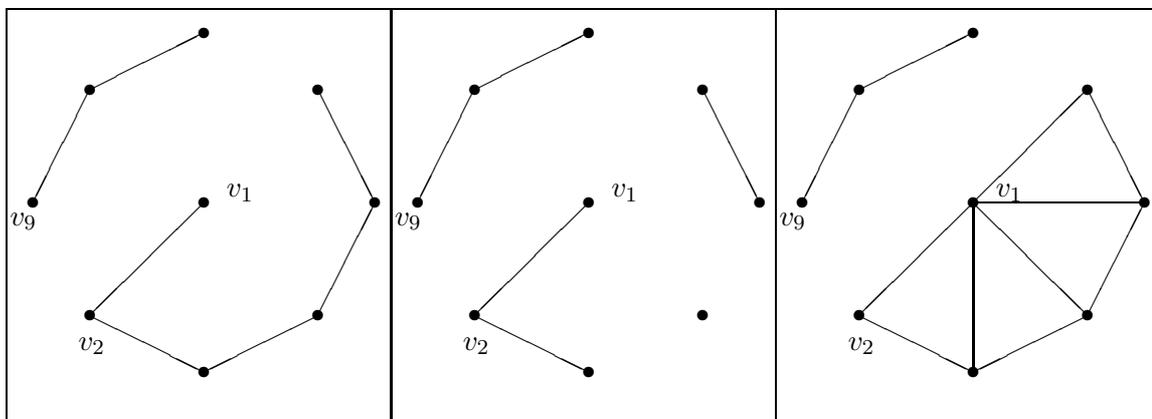
2. \mathcal{C}_{2n} formado por los subconjuntos $F \subset \mathcal{C}_n$ tal que v_2 y v_n están en una misma componente de F y v_1 en una componente distinta, esta clase sólo tiene un elemento, la siguiente figura muestra el único elemento de la clase $\mathcal{C}_{2,9}$:



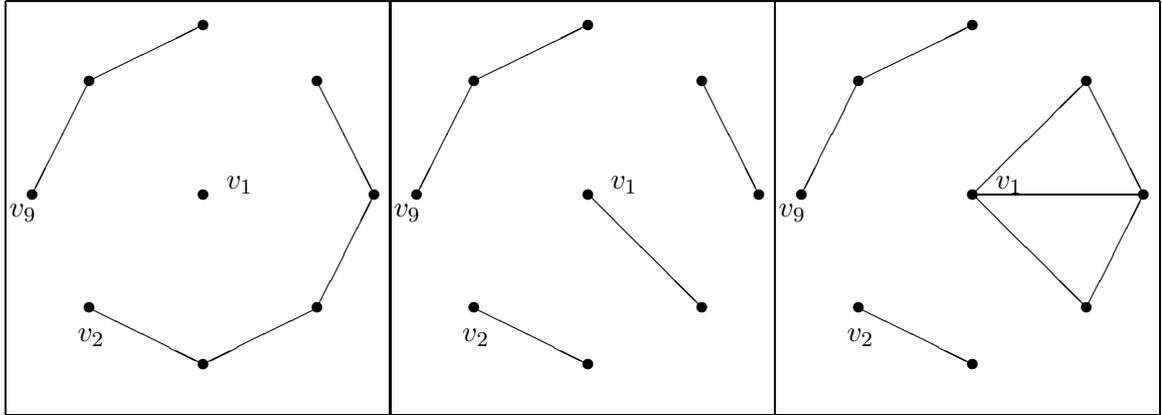
3. \mathcal{C}_{3n} formado por los subconjuntos $F \subset \mathcal{C}_n$ tal que v_1 y v_n están en una misma componente de F y v_2 en una componente distinta, por ejemplo se muestran algunos elementos la clase $\mathcal{C}_{3,9}$:



4. \mathcal{C}_{4n} formado por los subconjuntos $F \subset \mathcal{C}_n$ tal que v_1 y v_2 están en una misma componente de F y v_n en una componente distinta, por ejemplo se muestran algunos elementos la clase $\mathcal{C}_{4,9}$:



5. \mathcal{C}_{5n} formado por los subconjuntos $F \subset \mathcal{C}_n$ tal que v_1 , v_2 y v_n están en componentes distintas de F , por ejemplo se muestran algunos elementos de la clase $\mathcal{C}_{5,9}$:



De esta manera el polinomio de Tutte se puede reescribir como

$$T(W_n; x, y) = \sum_{i=1}^5 \sum_{F \in \mathcal{C}_{in}} ((x-1)^{r(E)-r(F)} (y-1)^{n(F)} + (x-1)^{r(E)-r(F \cup \{v_2 v_n\})} (y-1)^{n(F \cup \{v_2 v_n\})})$$

Y para reducir esta expresión se observa que

$$k(F \cup \{v_2 v_n\}) = \begin{cases} k(F) & \text{si } F \in \mathcal{C}_{1n} \cup \mathcal{C}_{2n} \\ k(F) - 1 & \text{si } F \in \mathcal{C}_{3n} \cup \mathcal{C}_{4n} \cup \mathcal{C}_{5n} \end{cases}$$

por lo que

$$\begin{aligned} r(F \cup \{v_2 v_n\}) &= |V| - k(F \cup \{v_2 v_n\}) \\ &= \begin{cases} r(F) & \text{si } F \in \mathcal{C}_{1n} \cup \mathcal{C}_{2n} \\ r(F) + 1 & \text{si } F \in \mathcal{C}_{3n} \cup \mathcal{C}_{4n} \cup \mathcal{C}_{5n} \end{cases} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} n(F \cup \{v_2 v_n\}) &= |F \cup \{v_2 v_n\}| - |V| + k(F \cup \{v_2 v_n\}) \\ &= \begin{cases} n(F) + 1 & \text{si } F \in \mathcal{C}_{1n} \cup \mathcal{C}_{2n} \\ n(F) & \text{si } F \in \mathcal{C}_{3n} \cup \mathcal{C}_{4n} \cup \mathcal{C}_{5n} \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
& \sum_{F \subset \mathcal{C}_{in}} ((x-1)^{r(E)-r(F)}(y-1)^{n(F)} + (x-1)^{r(E)-r(F \cup \{v_2 v_n\})}(y-1)^{n(F \cup \{v_2 v_n\})}) \\
= & \begin{cases} \sum_{F \subset \mathcal{C}_{in}} ((x-1)^{r(E)-r(F)}(y-1)^{n(F)} + (x-1)^{r(E)-r(F)}(y-1)^{n(F)+1}) & \text{si } i = 1, 2 \\ \sum_{F \subset \mathcal{C}_{in}} ((x-1)^{r(E)-r(F)}(y-1)^{n(F)} + (x-1)^{r(E)-r(F)-1}(y-1)^{n(F)}) & \text{si } i = 3, 4 \text{ y } 5 \end{cases} \\
= & \begin{cases} y \sum_{F \subset \mathcal{C}_{in}} (x-1)^{r(E)-r(F)}(y-1)^{n(F)} & \text{si } i = 1, 2 \\ \frac{x}{(x-1)} \sum_{F \subset \mathcal{C}_{in}} (x-1)^{r(E)-r(F)}(y-1)^{n(F)} & \text{si } i = 3, 4 \text{ y } 5 \end{cases}
\end{aligned}$$

y el polinomio de Tutte es entonces

$$\begin{aligned}
T(W_n; x, y) &= y \sum_{i=1}^2 \sum_{F \subset \mathcal{C}_{in}} ((x-1)^{r(E)-r(F)}(y-1)^{n(F)}) \\
&\quad + \frac{x}{x-1} \sum_{i=3}^5 \sum_{F \subset \mathcal{C}_{in}} ((x-1)^{r(E)-r(F)}(y-1)^{n(F)})
\end{aligned}$$

Considere los siguientes polinomios

$$\blacksquare P_{in}(x, y) = \sum_{F \subset \mathcal{C}_{in}} (x-1)^{r(E)-r(F)}(y-1)^{n(F)} \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4, 5$$

Entonces el polinomio de Tutte se reescribe como

$$T(W_n; x, y) = y(P_{1n}(x, y) + P_{2n}(x, y)) + \frac{x}{x-1}(P_{3n}(x, y) + P_{4n}(x, y) + P_{5n}(x, y))$$

De aquí se sigue que las expresiones

$$P_{3n}^*(x, y) = P_{3n}(x, y)/(x-1), \quad P_{4n}^*(x, y) = P_{4n}(x, y)/(x-1) \quad \text{y} \quad P_{5n}^*(x, y) = P_{5n}(x, y)/(x-1)$$

son polinomios.

Ahora observe que la rueda W_{n+1} se construye quitando a W_n la arista $v_n v_2$, agregando el vértice v_{n+1} y las aristas $e_{2n} = v_n v_{n+1}$, $e_{2n+1} = v_1 v_{n+1}$ y $e_{2n+2} = v_{n+1} v_2$, entonces las clases $\mathcal{C}_{i, n+1}$ se obtiene de las clases $\mathcal{C}_{i, n}$, como se ve enseguida

$F \in \mathcal{C}_{1,n}$	$F \in \mathcal{C}_{4,n+1}$	$F \cup \{e_{2n}\} \in \mathcal{C}_{1,n+1}$	$F \cup \{e_{2n+1}\} \in \mathcal{C}_{1,n+1}$	$F \cup \{e_{2n}, e_{2n+1}\} \in \mathcal{C}_{1,n+1}$
	$k_{n+1}(F) = k_n(F) + 1$	$k_{n+1}(F \cup \{e_{2n}\}) = k_n(F)$	$k_{n+1}(F \cup \{e_{2n+1}\}) = k_n(F)$	$k_{n+1}(F \cup \{e_{2n}, e_{2n+1}\}) = k_n(F)$
	$n_{n+1}(F) = n_n(F)$	$n_{n+1}(F \cup \{e_{2n}\}) = n_n(F)$	$n_{n+1}(F \cup \{e_{2n+1}\}) = n_n(F)$	$n_{n+1}(F \cup \{e_{2n}, e_{2n+1}\}) = n_n(F) + 1$

$F \in \mathcal{C}_{2,n}$	$F \in \mathcal{C}_{5,n+1}$	$F \cup \{e_{2n}\} \in \mathcal{C}_{2,n+1}$	$F \cup \{e_{2n+1}\} \in \mathcal{C}_{3,n+1}$	$F \cup \{e_{2n}, e_{2n+1}\} \in \mathcal{C}_{1,n+1}$
	$k_{n+1}(F) = k_n(F) + 1$	$k_{n+1}(F \cup \{e_{2n}\}) = k_n(F)$	$k_{n+1}(F \cup \{e_{2n+1}\}) = k_n(F)$	$k_{n+1}(F \cup \{e_{2n}, e_{2n+1}\}) = k_n(F) - 1$
	$n_{n+1}(F) = n_n(F)$	$n_{n+1}(F \cup \{e_{2n}\}) = n_n(F)$	$n_{n+1}(F \cup \{e_{2n+1}\}) = n_n(F)$	$n_{n+1}(F \cup \{e_{2n}, e_{2n+1}\}) = n_n(F)$

$F \in \mathcal{C}_{3,n}$	$F \in \mathcal{C}_{5,n+1}$	$F \cup \{e_{2n}\} \in \mathcal{C}_{3,n+1}$	$F \cup \{e_{2n+1}\} \in \mathcal{C}_{3,n+1}$	$F \cup \{e_{2n}, e_{2n+1}\} \in \mathcal{C}_{3,n+1}$
	$k_{n+1}(F) = k_n(F) + 1$	$k_{n+1}(F \cup \{e_{2n}\}) = k_n(F)$	$k_{n+1}(F \cup \{e_{2n+1}\}) = k_n(F)$	$k_{n+1}(F \cup \{e_{2n}, e_{2n+1}\}) = k_n(F)$
	$n_{n+1}(F) = n_n(F)$	$n_{n+1}(F \cup \{e_{2n}\}) = n_n(F)$	$n_{n+1}(F \cup \{e_{2n+1}\}) = n_n(F)$	$n_{n+1}(F \cup \{e_{2n}, e_{2n+1}\}) = n_n(F) + 1$

$F \in \mathcal{C}_{4,n}$	$F \in \mathcal{C}_{4,n+1}$	$F \cup \{e_{2n}\} \in \mathcal{C}_{4,n+1}$	$F \cup \{e_{2n+1}\} \in \mathcal{C}_{1,n+1}$	$F \cup \{e_{2n}, e_{2n+1}\} \in \mathcal{C}_{1,n+1}$
	$k_{n+1}(F) = k_n(F) + 1$	$k_{n+1}(F \cup \{e_{2n}\}) = k_n(F)$	$k_{n+1}(F \cup \{e_{2n+1}\}) = k_n(F)$	$k_{n+1}(F \cup \{e_{2n}, e_{2n+1}\}) = k_n(F) - 1$
	$n_{n+1}(F) = n_n(F)$	$n_{n+1}(F \cup \{e_{2n}\}) = n_n(F)$	$n_{n+1}(F \cup \{e_{2n+1}\}) = n_n(F)$	$n_{n+1}(F \cup \{e_{2n}, e_{2n+1}\}) = n_n(F)$
$F \in \mathcal{C}_{5,n}$	$F \in \mathcal{C}_{5,n+1}$	$F \cup \{e_{2n}\} \in \mathcal{C}_{5,n+1}$	$F \cup \{e_{2n+1}\} \in \mathcal{C}_{3,n+1}$	$F \cup \{e_{2n}, e_{2n+1}\} \in \mathcal{C}_{3,n+1}$
	$k_{n+1}(F) = k_n(F) + 1$	$k_{n+1}(F \cup \{e_{2n}\}) = k_n(F)$	$k_{n+1}(F \cup \{e_{2n+1}\}) = k_n(F)$	$k_{n+1}(F \cup \{e_{2n}, e_{2n+1}\}) = k_n(F) - 1$
	$n_{n+1}(F) = n_n(F)$	$n_{n+1}(F \cup \{e_{2n}\}) = n_n(F)$	$n_{n+1}(F \cup \{e_{2n+1}\}) = n_n(F)$	$n_{n+1}(F \cup \{e_{2n}, e_{2n+1}\}) = n_n(F)$

De donde se obtienen las fórmulas recursiva

- $P_{1,n+1}(x, y) = (y + 1)P_{1,n}(x, y) + P_{2,n}(x, y)/(x - 1) + \frac{x}{x-1}P_{4,n}(x, y)$
- $P_{2,n+1}(x, y) = P_{2,n}(x, y)$
- $P_{3,n+1}(x, y) = P_{2,n}(x, y) + (y + 1)P_{3,n}(x, y) + \frac{x}{x-1}P_{5,n}(x, y)$
- $P_{4,n+1}(x, y) = (x - 1)P_{1,n}(x, y) + xP_{4,n}(x, y)$
- $P_{5,n+1}(x, y) = (x - 1)P_{2,n}(x, y) + (x - 1)P_{3,n}(x, y) + xP_{5,n}(x, y),$

Como se puede ver, si $F \in \mathcal{C}_{2n}$, entonces $k(F) = 2$ y $n(F) = 0$ por lo que $P_{2,n}(x, y) = x - 1$, además, por la simetría de W_n se tiene que

$$P_{3,n}(x, y) = \sum_{F \in \mathcal{C}_{3n}} (x - 1)^{r(E) - r(F)} (y - 1)^{n(F)} = \sum_{F \in \mathcal{C}_{4n}} (x - 1)^{r(E) - r(F)} (y - 1)^{n(F)} = P_{4,n}(x, y)$$

Entonces las fórmulas recursivas se pueden reescribir

- $P_{1,n+1}(x, y) = (y + 1)P_{1,n}(x, y) + 1 + \frac{x}{x-1}P_{3,n}(x, y)$
- $P_{2,n+1}(x, y) = P_{2,n}(x, y) = x - 1$
- $P_{3,n+1}^*(x, y) = 1 + (y + 1)P_{3,n}^*(x, y) + \frac{x}{x-1}P_{5,n}^*(x, y)$
- $P_{4,n+1}^*(x, y) = P_{1,n}(x, y) + xP_{4,n}^*(x, y)$
- $P_{5,n+1}^*(x, y) = P_{2,n}(x, y) + P_{3,n}(x, y) + xP_{5,n}^*(x, y),$

De aquí se sigue que $P_{5,n}^{**}(x, y) = P_{5,n}^*(x, y)/(x - 1)$ es un polinomio y entonces

- $P_{3,n+1}^*(x, y) = 1 + (y + 1)P_{3,n}^*(x, y) + xP_{5,n}^{**}(x, y)$
- $P_{5,n+1}^{**}(x, y) = 1 + P_{3,n}^*(x, y) + xP_{5,n}^{**}(x, y),$

como $P_{3,n}(x, y) = P_{4,n}(x, y)$, entonces se satisface la ecuación

$$1 + (y + 1)P_{3,n}^*(x, y) + xP_{5,n}^{**}(x, y) = P_{1,n}(x, y) + xP_{4,n}^*(x, y)$$

se puede despejar

$$xP_{5,n}^{**}(x, y) = P_{1,n}(x, y) + xP_{3,n}^*(x, y) - 1 - (y + 1)P_{3,n}^*(x, y),$$

entonces,

$$\begin{aligned} P_{5,n+1}^{**}(x, y) &= 1 + P_{3,n}^*(x, y) + P_{1,n}(x, y) + xP_{3,n}^*(x, y) - 1 - (y + 1)P_{3,n}^*(x, y) \\ &= P_{1,n}(x, y) + (x - y)P_{3,n}^*(x, y) \end{aligned}$$

Por lo que sólo se requiere tener tres ecuaciones recursivas

- $P_{1,n+1}(x, y) = 1 + (y + 1)P_{1,n}(x, y) + xP_{3,n}^*(x, y)$
- $P_{3,n+1}^*(x, y) = P_{1,n}(x, y) + xP_{3,n}^*(x, y) \quad y$
- $P_{5,n+1}^{**}(x, y) = P_{1,n}(x, y) + (x - y)P_{3,n}^*(x, y).$

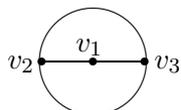
Entonces el polinomio de Tutte de la rueda W_{n+1} es

$$\begin{aligned}
 T(W_{n+1}; x, y) &= y(P_{1,n+1}(x, y) + P_{2,n+1}(x, y)) \\
 &\quad + \frac{x}{x-1}(P_{3,n+1}(x, y) + P_{4,n+1}(x, y) + P_{5,n+1}(x, y)) \\
 &= y(P_{1,n+1}(x, y) + (x-1)) + x(2P_{3,n+1}^*(x, y) + (x-1)P_{5,n+1}^{**}(x, y)) \\
 &= y((y+1)P_{1,n}(x, y) + xP_{3,n}^*(x, y) + x) \\
 &\quad + x((x+1)(P_{1,n}(x, y) + xP_{3,n}^*(x, y)) - (x-1)yP_{3,n}^*(x, y))
 \end{aligned}$$

Y el polinomio de nivel de la rueda W_{n+1} es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}(W_{n+1}, y) &= yP_{1,n+1}(1, y) + 2P_{3,n+1}^*(1, y) \\
 &= y((y+1)P_{1,n}(1, y) + P_{3,n}^*(1, y) + 1) + (2(P_{1,n}(1, y) + P_{3,n}^*(1, y))) \\
 &= (y(y+1) + 2)P_{1,n}(1, y) + (y+2)P_{3,n}^*(1, y) + y
 \end{aligned}$$

Enseguida evaluaremos nuestras fórmulas para encontrar el polinomio de Tutte para W_n con $n = 3, 4, 5, 6, 7$. Dada la gráfica W_3 .

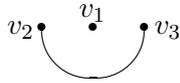


La clase $\mathcal{C}_{1,3}$ tiene cuatro elementos.

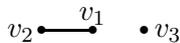
$k(\mathbf{F})=1$ $n(\mathbf{F})=1$	$k(\mathbf{F})=1$ $n(\mathbf{F})=0$	$k(\mathbf{F})=1$ $n(\mathbf{F})=0$	$k(\mathbf{F})=1$ $n(\mathbf{F})=0$

entonces $P_{1,3}(x, y) = (y+2)$

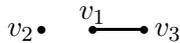
La clase $\mathcal{C}_{2,3}$ tiene un único elemento.

$k(F) = 2$ $n = 1 - 3 + 2 = 0$ entonces $P_{2,3}(x, y) = (x - 1)$	
---	---

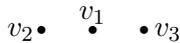
La clase $\mathcal{C}_{3,3}$ tiene un único elemento.

$k(F) = 2$ $n = 1 - 3 + 2 = 0$ entonces $P_{3,3}(x, y) = (x - 1)$ y $P_{3,3}^*(x, y) = (x - 1)/(x - 1) = 1$	
--	---

La clase $\mathcal{C}_{4,3}$ tiene un único elemento.

$k(F) = 2$ $n = 1 - 3 + 2 = 0$ $P_{4,3}^*(x, y) = (x - 1)/(x - 1) = 1$	
--	---

La clase $\mathcal{C}_{5,3}$ tiene un único elemento.

$k(F) = 3$ $n = 0 - 3 + 3 = 0$ $P_{5,3}(x, y) = (x - 1)^2$ y $P_{5,3}^{**}(x, y) = 1$	
--	---

Entonces, el polinomio de Tutte de la rueda W_3 es

$$\begin{aligned}
T(W_3; x, y) &= y(P_{1,3}(x, y) + (x - 1)) + x(2P_{3,3}^*(x, y) + (x - 1)P_{5,3}^{**}(x, y)) \\
&= y((y + 2) + (x - 1)) + x(2 + (x - 1)) \\
&= y(y + 1 + x) + x(x + 1) \\
&= x(x + 1) + y(y + 1) + xy \\
&= x^2 + x + y^2 + y + xy
\end{aligned}$$

Para encontrar el polinomio de Tutte de la rueda W_4 se encuentran los polinomios $P_{1,4}$, $P_{3,4}^*$ y $P_{5,4}^{**}$ con las fórmulas recursivas:

$$\begin{aligned}
\diamond P_{1,4}(x, y) &= 1 + (y + 1)P_{1,3}(x, y) + xP_{3,3}^*(x, y) \\
&= 1 + (y + 1)(y + 2) + x \\
\diamond P_{3,4}^*(x, y) &= P_{1,3}(x, y) + xP_{3,3}^*(x, y) \\
&= (y + 2) + x \\
\diamond P_{5,4}^{**}(x, y) &= P_{1,3}(x, y) + (x - y)P_{3,3}^*(x, y) \\
&= (y + 2) + (x - y) \\
&= x + 2
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
T(W_4; x, y) &= y(P_{1,4}(x, y) + (x - 1)) + x(2P_{3,4}^*(x, y) + (x - 1)P_{5,4}^{**}(x, y)) \\
&= y(1 + (y + 1)(y + 2) + x + (x - 1)) + x(2(y + 2 + x) + (x - 1)(x + 2)) \\
&= y(y + 1)(y + 2) + x(x + 1)(x + 2) + 4xy \\
&= x^3 + 3x^2 + 2x + y^3 + 3y^2 + 2y + 4xy
\end{aligned}$$

Para encontrar el polinomio de Tutte de la rueda W_5 se encuentran los polinomios $P_{1,5}$, $P_{3,5}^*$ y $P_{5,5}^{**}$ con las fórmulas recursivas:

$$\begin{aligned}
\diamond P_{1,5}(x, y) &= 1 + (y + 1)P_{1,4}(x, y) + xP_{3,4}^*(x, y) \\
&= 1 + (y + 1)^2(y + 2) + (y + 1)(x + 1) + x(x + y + 2) \\
&= (y + 1)^3 + (y + 1)^2 + (y + 1) + 1 + x(y + 1) + x(x + y + 2) \\
\diamond P_{3,5}^*(x, y) &= P_{1,4}(x, y) + xP_{3,4}^*(x, y) \\
&= 1 + (y + 1)(y + 2) + x + x(y + 2 + x) \\
&= (x + 1)^2 + (x + 1) + (y + 1) + (y + 1)^2 + xy - 1 \\
\diamond P_{5,5}^{**}(x, y) &= P_{1,4}(x, y) + (x - y)P_{3,4}^*(x, y) \\
&= 1 + (y + 1)(y + 2) + x + x(y + 2 + x) - y(y + 2 + x) \\
&= (x + 1)^2 + (x + 1) + (y + 1)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
T(W_5; x, y) &= y(P_{1,5}(x, y) + (x - 1)) + x(2P_{3,5}^*(x, y) + (x - 1)P_{5,5}^{**}(x, y)) \\
&= y((y + 1)^3 + (y + 1)^2 + (y + 1) + x(y + 1) + x(x + y + 2)) + x \\
&\quad + x((x + 1)^3 + (x + 1)^2 + (x + 1)(y + 1) + 2y(x + 2 + y)) \\
&= ((y + 1) - 1)((y + 1)^3 + (y + 1)^2 + (y + 1)) + xy(y + 1) + xy(x + y + 2) + xy \\
&\quad + ((x + 1) - 1)((x + 1)^3 + (x + 1)^2 + (x + 1) + (x + 1)xy + 2xy(x + 2 + y)) \\
&= (y + 1)^4 - (y + 1) + (x + 1)^4 - (x + 1) + 4xy(x + y + 2) + xy \\
&= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 3x + y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 3y + 4x^2y + 4xy^2 + 9xy
\end{aligned}$$

En los siguientes dos ejercicios usaremos la ayuda de Maple.

Para encontrar el polinomio de Tutte de la rueda W_6 se encuentran los polinomios $P_{1,6}$, $P_{3,6}^*$ y $P_{5,6}^{**}$ con las fórmulas recursivas:

$$\begin{aligned}
\diamond P_{1,6}(x, y) &= 1 + (y + 1)P_{1,5}(x, y) + xP_{3,5}^*(x, y) \\
&= y^4 + 5y^3 + 3xy^2 + 2x^2y + x^3 + 10y^2 + 8xy + 4x^2 + 10y + 6x + 5 \\
\diamond P_{3,6}^*(x, y) &= P_{1,5}(x, y) + xP_{3,5}^*(x, y) \\
&= 4 + 6y + y^3 + 4y^2 + 5yx + 6x + 4x^2 + y^2x + yx^2 + x^3 \\
\diamond P_{5,6}^{**}(x, y) &= P_{1,5}(x, y) + (x - y)P_{3,5}^*(x, y) \\
&= 4 + 3y + y^2 + 2yx + 6x + 4x^2 + x^3
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
T(W_6; x, y) &= y(P_{1,6}(x, y) + (x - 1)) + x(2P_{3,6}^*(x, y) + (x - 1)P_{5,6}^{**}(x, y)) \\
&= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 4x + y^5 + 5y^4 + 10y^3 + 10y^2 + 4y \\
&\quad + 5x^3y + 5x^2y^2 + 15x^2y + 5xy^3 + 15xy^2 + 16xy
\end{aligned}$$

Para encontrar el polinomio de Tutte de la rueda W_7 se encuentran los polinomios $P_{1,7}$, $P_{3,7}^*$ y $P_{5,7}^{**}$ con las fórmulas recursivas:

$$\begin{aligned}
\diamond P_{1,7}(x, y) &= 1 + (y + 1)P_{1,6}(x, y) + xP_{3,6}^*(x, y) \\
&= 6 + 15xy^2 + 20xy + 11x^2y + 15y + 10x + 20y^2 + 6y^4 + 15y^3 + 10x^2 \\
&\quad + 5x^3 + 4xy^3 + 3x^2y^2 + 2x^3y + y^5 + x^4 \\
\diamond P_{3,7}^*(x, y) &= P_{1,6}(x, y) + xP_{3,6}^*(x, y) \\
&= 5 + 10y + 10y^2 + y^4 + 5y^3 + 7xy^2 + 14xy + 7x^2y + 10x + 10x^2 + 5x^3 \\
&\quad + xy^3 + x^2y^2 + x^3y + x^4 \\
\diamond P_{5,7}^{**}(x, y) &= P_{1,6}(x, y) + (x - y)P_{3,6}^*(x, y) \\
&= 5 + 6y + 4y^2 + y^3 + 2xy^2 + 8xy + 3x^2y + 10x + 10x^2 + 5x^3 + x^4
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
T(W_7; x, y) &= y(P_{1,7}(x, y) + (x - 1)) + x(2P_{3,7}^*(x, y) + (x - 1)P_{5,7}^{**}(x, y)) \\
&= x^6 + 6x^5 + 6x^4y + 15x^4 + 6x^3y^2 + 24x^3y + 20x^3 + 6x^2y^3 \\
&\quad + 27x^2y^2 + 36x^2y + 15x^2 + 6xy^4 + 24xy^3 + 36xy^2 + 25xy + 5x \\
&\quad + y^6 + 6y^5 + 15y^4 + 20y^3 + 15y^2 + 5y
\end{aligned}$$

Como se puede ver, para calcular el polinomio de Tutte de la rueda W_n se requiere tener calculados todos los polinomios $P_{1,i}(x, y)$, $P_{3,i}^*(x, y)$ y $P_{5,i}^{**}(x, y)$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, los siguientes dos resultados nos permiten tener una fórmula no recursiva del polinomio de Tutte de la rueda W_n para $n \geq 5$.

Teorema 5.1. Sean los polinomios $P_{1,n+1}(x, y)$, $P_{3,n+1}^*(x, y)$ y $P_{5,n+1}^{**}(x, y)$ definidos anteriormente, entonces

- $P_{1,n+1}(x, y) = (1 + x + y)P_{1,n}(x, y) - xyP_{1,n-1}(x, y) - (x - 1)$
- $P_{3,n+1}^*(x, y) = P_{1,n+1}(x, y) - yP_{1,n}(x, y) - 1$
- $P_{5,n+1}^{**}(x, y) = P_{1,n+1}(x, y) - 2yP_{1,n}(x, y) + y^2P_{1,n-1}(x, y) + y - 1$

Demostración

Recordando la definición del polinomio $P_{3,n+1}^*(x, y) = P_{1,n+1}(x, y) + xP_{3,n}^*(x, y)$ se sigue que

$$\begin{aligned}
P_{1,n+1}(x, y) &= 1 + (y + 1)P_{1,n}(x, y) + xP_{3,n}^*(x, y) \\
&= 1 + yP_{1,n}(x, y) + \underbrace{P_{1,n}(x, y) + xP_{3,n}^*(x, y)}_{P_{3,n+1}^*(x, y)} \\
&= 1 + yP_{1,n}(x, y) + P_{3,n+1}^*(x, y)
\end{aligned}$$

de aquí se despeja el polinomio $P_{3,n+1}^*(x, y)$

$$P_{3,n+1}^*(x, y) = P_{1,n+1}(x, y) - yP_{1,n}(x, y) - 1$$

y

$$\begin{aligned}
P_{1,n+1}(x, y) &= 1 + (y + 1)P_{1,n}(x, y) + \underbrace{xP_{1,n}(x, y) - xyP_{1,n-1}(x, y) - x}_{xP_{3,n}^*(x, y)} \\
&= (1 + x + y)P_{1,n}(x, y) - xyP_{1,n-1}(x, y) - (x - 1)
\end{aligned}$$

de la misma manera se puede hacer con $P_{5,n+1}^{**}(x, y)$

$$\begin{aligned}
P_{5,n+1}^{**}(x, y) &= P_{1,n}(x, y) + (x - y)P_{3,n}^*(x, y) \\
&= \underbrace{P_{1,n}(x, y) + xP_{3,n}^*(x, y) - yP_{3,n}^*(x, y)}_{P_{3,n+1}^*(x, y)} \\
&= P_{1,n+1}(x, y) - yP_{1,n}(x, y) - 1 - y(P_{1,n}(x, y) - yP_{1,n-1}(x, y) - 1) \\
&= P_{1,n+1}(x, y) - 2yP_{1,n}(x, y) + y^2P_{1,n-1}(x, y) + y - 1
\end{aligned}$$

□

De aquí se puede demostrar el siguiente teorema

Teorema 5.2. *El polinomio $P_{1,n}(x, y)$ satisface las relaciones (para $k \geq 1$)*

$$\begin{aligned}
(1) \quad P_{1,2(k+1)}(x, y) &= \sum_{i=0}^k \binom{2k-i}{i} (1+x+y)^{2(k-i)} (-xy)^i \\
&\quad + (1-x) \sum_{i=0}^{k-1} (-xy)^i \sum_{j=0}^{2(k-i)-1} \binom{i+j}{i} (1+x+y)^j \\
(2) \quad P_{1,2(k+1)+1}(x, y) &= \sum_{i=0}^k \binom{2k+1-i}{i} (1+x+y)^{2(k-i)+1} (-xy)^i \\
&\quad + (1-x) \sum_{i=0}^k (-xy)^i \sum_{j=0}^{2(k-i)} \binom{i+j}{i} (1+x+y)^j
\end{aligned}$$

Demostración La demostración se hará por inducción matemática sobre k y para simplificar la notación se utilizará: $a = 1 + x + y$, $b = xy$ y $c = 1 - x$.

Sabemos

$$\begin{aligned}
P_{1,3}(x, y) &= y + 2 = (1 + x + y) + (1 - x) = a + c \\
P_{3,3}^*(x, y) &= 1
\end{aligned}$$

de aquí podemos obtener

$$\begin{aligned}
P_{1,4}(x, y) &= (y + 2)(y + 1) + (x + 1) \\
&= (1 + x + y)^2 - xy + (1 - x)((1 + x + y) + 1) \\
&= a^2 - b + c(a + 1)
\end{aligned}$$

se puede escribir como

$$P_{1,4}(x, y) = \sum_{i=0}^1 \binom{2-i}{i} a^{2(1-i)} (-b)^i + c \sum_{i=0}^{1-1} (-b)^i \sum_{j=0}^{2(1-i)-1} \binom{i+j}{i} a^j$$

Utilizando nuevamente la fórmula recursiva se obtiene el polinomio $P_{1,5}(x, y)$

$$\begin{aligned} P_{1,5}(x, y) &= (1+x+y)P_{1,4}(x, y) - xyP_{1,3}(x, y) - (x-1) \\ &= (1+x+y)^3 - 2xy(1+x+y) + (1-x)((1+x+y)^2 + (1+x+y) + 1 - xy) \\ &= a^3 - 2ba + c(a^2 + a + 1 - b) \end{aligned}$$

entonces

$$P_{1,5}(x, y) = \sum_{i=0}^1 \binom{3-i}{i} a^{2(1-i)+1} (-b)^i + c \sum_{i=0}^1 (-b)^i \sum_{j=0}^{2(1-i)} \binom{i+j}{i} a^j$$

Con esto se demuestra que las relaciones (1) y (2) se cumplen para $k = 1$.

Ahora se supone que la relación se satisface para $k = m$ y se va a probar que también se satisface para $k = m + 1$.

Por la fórmula recursiva se tiene que

$$\begin{aligned} P_{1,2(m+2)} &= (1+x+y)P_{1,2(m+1)+1} - xyP_{1,2(m+1)} - (x-1) \\ &= aP_{1,2(m+1)+1} - bP_{1,2(m+1)} + c \end{aligned}$$

y como la relación se satisface para $k = m$, entonces

$$\begin{aligned}
P_{1,2(m+2)} &= a \left(\sum_{i=0}^m \binom{2m+1-i}{i} a^{2(m-i)+1} (-b)^i + c \sum_{i=0}^m (-b)^i \sum_{j=0}^{2(m-i)} \binom{i+j}{i} a^j \right) \\
&\quad - b \left(\sum_{i=0}^m \binom{2m-i}{i} a^{2(m-i)} (-b)^i + c \sum_{i=0}^{m-1} (-b)^i \sum_{j=0}^{2(m-i)-1} \binom{i+j}{i} a^j \right) + c \\
&= \left(\sum_{i=0}^m \binom{2m+1-i}{i} a^{2(m-i)+2} (-b)^i + \sum_{i=0}^m \binom{2m-i}{i} a^{2(m-i)} (-b)^{i+1} \right) \\
&\quad + c \left(\sum_{i=0}^m (-b)^i \sum_{j=0}^{2(m-i)} \binom{i+j}{i} a^{j+1} + \sum_{i=0}^{m-1} (-b)^{i+1} \sum_{j=0}^{2(m-i)-1} \binom{i+j}{i} a^j + 1 \right) \\
&= a^{2m+2} + \sum_{i=1}^m \binom{2m+1-i}{i} a^{2(m-i)+2} (-b)^i \\
&\quad + \sum_{i=0}^{m-1} \binom{2m-i}{i} a^{2(m-i)} (-b)^{i+1} + (-b)^{m+1} \\
&\quad + c \left(\sum_{j=0}^{2m} a^{j+1} + 1 + \sum_{i=1}^m (-b)^i \sum_{j=0}^{2(m-i)} \binom{i+j}{i} a^{j+1} \right) \\
&\quad + c \sum_{i=1}^m (-b)^i \sum_{j=0}^{2(m-i)+1} \binom{i+j-1}{i-1} a^j \\
&= a^{2m+2} + \sum_{i=1}^m \left(\binom{2m+1-i}{i} + \binom{2m+1-i}{i-1} \right) a^{2(m-i)+2} (-b)^i + (-b)^{m+1} \\
&\quad + c \left(\sum_{j=0}^{2m+1} a^j + \sum_{i=1}^m (-b)^i \sum_{j=1}^{2(m-i)+1} \binom{i+j-1}{i} a^j \right) \\
&\quad + c \sum_{i=1}^m (-b)^i \left(\sum_{j=1}^{2(m-i)+1} \binom{i+j-1}{i-1} a^j + 1 \right) \\
&= a^{2m+2} + \sum_{i=1}^m \binom{2m+2-i}{i} a^{2(m-i)+2} (-b)^i + (-b)^{m+1} \\
&\quad + c \left(\sum_{j=0}^{2m+1} a^j + \sum_{i=1}^m (-b)^i \sum_{j=1}^{2(m-i)+1} \left(\binom{i+j-1}{i} + \binom{i+j-1}{i-1} \right) a^j + \sum_{i=1}^m (-b)^i \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^m \binom{2m+2-i}{i} a^{2(m-i)+2} (-b)^i + (-b)^{m+1} \\
&\quad + c \left(\sum_{j=0}^{2m+1} a^j + \sum_{i=1}^m (-b)^i \sum_{j=1}^{2(m-i)+1} \binom{i+j}{i} a^j + \sum_{i=1}^m (-b)^i \right) \\
&= \sum_{i=0}^{m+1} \binom{2m+2-i}{i} a^{2(m-i)+2} (-b)^i + c \sum_{i=0}^m (-b)^i \sum_{j=0}^{2(m-i)+1} \binom{i+j}{i} a^j
\end{aligned}$$

Entonces se satisface la relación (1) para $k = m + 1$.

Ahora vamos a encontrar el polinomio $P_{1,2(m+2)+1}$.

$$\begin{aligned}
P_{1,2(m+2)+1} &= (1+x+y)P_{1,2(m+2)} - xyP_{1,2(m+1)+1} - (x-1) \\
&= aP_{1,2(m+2)} - bP_{1,2(m+1)+1} + c
\end{aligned}$$

y como la relación se satisface para $k = m$ y ya se probó que también se satisface para $P_{1,2(m+2)}$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
P_{1,2(m+2)+1} &= a \left(\sum_{i=0}^{m+1} \binom{2m+2-i}{i} a^{2(m-i)+2} (-b)^i + c \sum_{i=0}^m (-b)^i \sum_{j=0}^{2(m-i)+1} \binom{i+j}{i} a^j \right) \\
&\quad - b \left(\sum_{i=0}^m \binom{2m+1-i}{i} a^{2(m-i)+1} (-b)^i + c \sum_{i=0}^m (-b)^i \sum_{j=0}^{2(m-i)} \binom{i+j}{i} a^j \right) + c \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m+1} \binom{2m+2-i}{i} a^{2(m-i)+3} (-b)^i + \sum_{i=0}^m \binom{2m+1-i}{i} a^{2(m-i)+1} (-b)^{i+1} \right) \\
&\quad + c \left(\sum_{i=0}^m (-b)^i \sum_{j=0}^{2(m-i)+1} \binom{i+j}{i} a^{j+1} + \sum_{i=0}^m (-b)^{i+1} \sum_{j=0}^{2(m-i)} \binom{i+j}{i} a^j + 1 \right) \\
&= a^{2m+3} + \sum_{i=1}^{m+1} \binom{2m+2-i}{i} a^{2(m-i)+3} (-b)^i + \sum_{i=1}^{m+1} \binom{2m+2-i}{i-1} a^{2(m-i)+3} (-b)^i \\
&\quad + c \left(\sum_{j=0}^{2m+1} a^{j+1} + 1 + \sum_{i=1}^m (-b)^i \sum_{j=0}^{2(m-i)+1} \binom{i+j}{i} a^{j+1} \right) \\
&\quad + c \left(\sum_{i=0}^{m-1} (-b)^{i+1} \sum_{j=0}^{2(m-i)} \binom{i+j}{i} a^j + (-b)^{m+1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^{2m+3} + \sum_{i=1}^{m+1} \left(\binom{2m+2-i}{i} + \binom{2m+2-i}{i-1} \right) a^{2(m-i)+3} (-b)^i \\
&\quad + c \left(\sum_{j=0}^{2m+2} a^j + \sum_{i=1}^m (-b)^i \sum_{j=0}^{2(m-i)+1} \binom{i+j}{i} a^{j+1} \right) \\
&\quad + c \sum_{i=1}^m (-b)^i \sum_{j=0}^{2(m-i)+2} \binom{i+j-1}{i-1} a^j + c(-b)^{m+1} \\
&= a^{2m+3} + \sum_{i=1}^{m+1} \binom{2m+3-i}{i} a^{2(m-i)+3} (-b)^i \\
&\quad + c \sum_{j=0}^{2m+2} a^j + c \sum_{i=1}^m (-b)^i \sum_{j=1}^{2(m-i)+2} \binom{i+j-1}{i} a^j \\
&\quad + c \sum_{i=1}^m (-b)^i \left(\sum_{j=1}^{2(m-i)+2} \binom{i+j-1}{i-1} a^j + 1 \right) + c(-b)^{m+1}
\end{aligned}$$

aquí

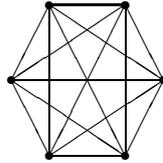
$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{m+1} \binom{2m+3-i}{i} a^{2(m-i)+3} (-b)^i \\
&\quad + c \sum_{j=0}^{2m+2} a^j + c \sum_{i=1}^m (-b)^i \left(\sum_{j=1}^{2(m-i)+2} \left(\binom{i+j-1}{i} + \binom{i+j-1}{i-1} \right) a^j + 1 \right) \\
&\quad + c(-b)^{m+1} \\
&= \sum_{i=0}^{m+1} \binom{2m+3-i}{i} a^{2(m-i)+3} (-b)^i \\
&\quad + c \sum_{j=0}^{2m+2} a^j + c \sum_{i=1}^m (-b)^i \left(\sum_{j=1}^{2(m-i)+2} \binom{i+j}{i} a^j + 1 \right) + c(-b)^{m+1} \\
&= \sum_{i=0}^{m+1} \binom{2m+3-i}{i} a^{2(m-i)+3} (-b)^i \\
&\quad + c \sum_{j=0}^{2m+2} a^j + c \sum_{i=1}^m (-b)^i \sum_{j=0}^{2(m-i)+2} \binom{i+j}{i} a^j + c(-b)^{m+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{m+1} \binom{2m+3-i}{i} a^{2(m-i)+3} (-b)^i + c \sum_{i=0}^m (-b)^i \sum_{j=0}^{2(m-i)+2} \binom{i+j}{i} a^j + c(-b)^{m+1} \\
&= \sum_{i=0}^{m+1} \binom{2m+3-i}{i} a^{2(m-i)+3} (-b)^i + c \sum_{i=0}^{m+1} (-b)^i \sum_{j=0}^{2(m-i)+2} \binom{i+j}{i} a^j
\end{aligned}$$

Con esto se satisfacen las relaciones (1) y (2), y quedan demostradas.

5.4. Polinomio de Tutte de la gráfica completa

La gráfica completa $K_n = G(V, E)$ tiene n vértices, $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ y $n(n-1)/2$ aristas, $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, \dots, v_1v_n, v_2v_3, v_2v_4, \dots, v_3v_4, v_3v_5, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_2\}$, en la gráfica completa cada pareja de vértices están unidos por una arista. La siguiente figura representa la gráfica completa de seis vértices.



Para encontrar el polinomio de Tutte y el Polinomio de nivel de K_n se revisan primero los siguientes dos lemas.

Lema 5.3. Sea $K_n = (V, E)$ la gráfica completa. Para $v_0 \in V$ un vértice fijo y $G = (V, E')$ cualquier subgráfica de K_n , existe $U_G \subset V$, tal que $G_1 = (U_G, E'_1)$ es una componente conexa de G , donde $E'_1 = \{uv \in E' \mid u, v \in U_G\}$ y $v_0 \in U_G$.

Demostración Sea $G = (V, E')$ una subgráfica de K_n . Si $k(G) = 1$, entonces $U_G = V$, y el lema se satisface.

Si $k(G) > 1$ considere que $G_i^* = (V_i^*, E_i^*)$, $i = 1, \dots, k(G)$; son las componentes conexas de G . Entonces $G = G_1^* \cup \dots \cup G_{k(G)}^*$ y $V_i^* \cap V_j^* = \emptyset$ si $i \neq j$.

Elija como U_G al conjunto V_i^* que contenga a v_0 , queda demostrado el lema. \square

Lema 5.4. Sea $K_n = (V, E)$ la gráfica completa $n \geq 2$. Considere $v_0, v_1 \in V$ dos vértices fijos y diferentes. Entonces para toda $G = (V, E')$ subgráfica conexa de K_n , existe $U_G \subset V$, tal que $G_1 = (U_G, E'_1)$ es una componente conexa de la gráfica $(V, E' - E'_3)$ donde $E'_3 = \{e \in E \mid e = v_1v \text{ y } v \in U_G\}$ y $v_0 \in U_G$ y $v_1 \in V - U_G$.

Demostración Sea $G = (V, E')$ una subgráfica de K_n . Considere la subgráfica de G , $G^* = (V, E^*)$, donde $E^* = E' - \{e \in E \mid e = v_1v \text{ y } v \in V\}$.

Si $k(G^*) = 2$, entonces $U_G = V - \{v_1\}$, y el lema se satisface.

Si $k(G^*) > 2$, las subgráficas $G_i^* = (V_i^*, E_i^*)$, $i = 1, \dots, k(G^*)$; son las componentes conexas de G^* .

Elija como U_G al conjunto V_i^* que contiene a v_0 . □

Teorema 5.5. *Para la gráfica completa K_n se satisface la relación recursiva*

$$T(K_n, x, y) = (x - 1) \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j-1} \mathcal{R}(K_j, y) T(K_{n-j}, x, y) + \mathcal{R}(K_n, y)$$

Demostración Para toda $G = (V, E')$ subgráfica de $K_n = (V, E)$ se sabe que por el lema 5.3 existe $U_G \subset V$ tal que

- $v_0 \in U_G$,
- $G'_1 = (U_G, E'_1)$ es una componente conexas de G con $E'_1 = \{uv \in E' \mid u, v \in U_G\}$

De esta manera, si $K_j = (U_G, E_1)$ y $K_{n-j} = (V - U_G, E_2)$ con $j = |U_G| < n$, son dos subgráficas completas de K_n , entonces $E'_1 \subset E_1$ y $E'_2 = E' - E'_1 \subset E_2$ y

- $r_{K_n}(E) - r_{K_n}(E') = k_{K_n}(E') - k_{K_n}(E)$
 $= k_{K_j}(E'_1) + k_{K_{n-j}}(E'_2) - 1$
 $= [k_{K_j}(E'_1) - 1] + [k_{K_{n-j}}(E'_2) - 1] + 1$
 $= [k_{K_j}(E'_1) - k_{K_j}(E_1)] + [k_{K_{n-j}}(E'_2) - k_{K_{n-j}}(E_2)] + 1$
- $n_{K_n}(E') = |E'| - |V| + k_{K_n}(E')$
 $= |E'_1| + |E'_2| - |U_G| - |V - U_G| + k_{K_j}(E'_1) + k_{K_{n-j}}(E'_2)$
 $= n_{K_j}(E'_1) + n_{K_{n-j}}(E'_2)$

Nótese que cuando $|U_G| = j = n$, entonces $|E'_2| = 0$ y consecuentemente $r_{K_{n-j}} = 0$. De esta manera, el polinomio de Tutte de la gráfica completa es:

$$\begin{aligned} T(K_n, x, y) &= \sum_{E' \subset E} (x-1)^{r_{K_n}(E) - r_{K_n}(E')} (y-1)^{n_{K_n}(E')} \\ &= \sum_{\substack{U \subset V, \\ v_0 \in U}} \sum_{\substack{E'_1 \subset E_1, \\ k_{K_j}(E'_1) = 1}} \sum_{E'_2 \subset E_2} (x-1)^{r_{K_n}(E) - r_{K_n}(E'_1 \cup E'_2)} (y-1)^{n_{K_n}(E'_1 \cup E'_2)} \\ &= \sum_{\substack{U \subset V, \\ v_0 \in U \\ |U| = j}} \sum_{\substack{E'_1 \subset E_1, \\ k_{K_j}(E'_1) = 1}} \sum_{E'_2 \subset E_2} (x-1)^{(r_{K_j}(E_1) - r_{K_j}(E'_1)) + ((r_{K_{n-j}}(E_2) - r_{K_{n-j}}(E'_2)) + 1)} (y-1)^{n_{K_j}(E'_1) + n_{K_{n-j}}(E'_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x-1) \sum_{\substack{U \subset V, \\ |U|=j < n \\ v_0 \in U}} \mathcal{R}(K_j, y) T(K_{n-j}, x, y) + \mathcal{R}(K_n, y) \\
&= (x-1) \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\substack{|U|=j, \\ v_0 \in U}} \mathcal{R}(K_j, y) T(K_{n-j}, x, y) + \mathcal{R}(K_n, y) \\
&= (x-1) \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j-1} \mathcal{R}(K_j, y) T(K_{n-j}, x, y) + \mathcal{R}(K_n, y)
\end{aligned}$$

□

Este teorema permite obtener el polinomio de Tutte de K_n recursivamente, pero depende del polinomio de nivel de la misma gráfica. Por esta razón, es importante tener una fórmula para encontrar el polinomio de nivel de la gráfica completa, el siguiente teorema nos proporciona una fórmula recursiva para el polinomio de nivel.

Teorema 5.6. *Para la gráfica completa K_n se satisface la relación recursiva*

$$\mathcal{R}(K_n, y) = \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-2}{j-1} \mathcal{R}(K_j, y) \mathcal{R}(K_{n-j}, y) \frac{y^j - 1}{y - 1}$$

Demostración Para v_0 y v_1 dos vértices diferentes y toda $G = (V, E')$ subgráfica conexa de $K_n = (V, E)$, por el lema 5.4 existe $U_G \subset V$ tal que

- $v_0 \in U_G$ y $v_1 \in V - U_G$,
- $G_1 = (U_G, E'_1)$ es una componente conexa de la gráfica $(V, E' - E'_3)$ donde $E'_3 = \{e \in E \mid e = v_1 v \text{ y } v \in U_G\}$.

De esta manera, si $K_j = (U_G, E_1)$ y $V(K_{n-j}) = (V - U_G, E_2)$ son dos subgráficas completas de K_n , entonces $E'_1 \subset E_1$, $E'_2 = E' \cap E_2$ y E'_3 son tres conjuntos disjuntos, tales que, $k_{K_j}(E'_1) = 1$, $k_{K_{n-j}}(E'_2) = 1$ y $|E'_3| \geq 1$, con $|U_G| = j$; por lo que

- $r_{K_n}(E) - r_{K_n}(E') = 0$
- $n_{K_n}(E') = |E'| - |V(K_n)| + k_{K_n}(E')$

$$\begin{aligned}
&= |E'_1| + |E'_2| + |E'_3| - |U_G| - |V - U_G| + 1 \\
&= |E'_1| - |U_G| + 1 + |E'_2| - |V - U_G| + 1 + |E'_3| - 1 \\
&= n_{K_j}(E'_1) + n_{K_{n-j}}(E'_2) + |E'_3| - 1
\end{aligned}$$

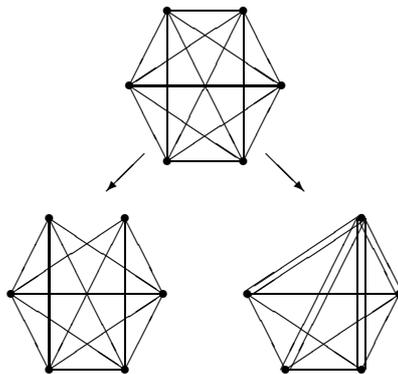
De esta manera, el polinomio de nivel de la gráfica completa es:

$$\begin{aligned}
R(K_n, y) &= \sum_{\substack{E' \subset E \\ k(E') = 1}} (y-1)^{n(E')} \\
&= \sum_{\substack{U \subset V - \{v_1\}, \\ v_0 \in U}} \sum_{\substack{E'_1 \subset E_1, \\ k_{K_j}(E'_1) = 1}} \sum_{\substack{E'_2 \subset E_2, \\ k_{K_{n-j}}(E'_2) = 1}} \sum_{E'_3 = \{v_1 v \mid v \in U_G\}} (y-1)^{n(E'_1 \cup E'_2 \cup E'_3)} \\
&= \sum_{\substack{U \subset V - \{v_1\}, \\ v_0 \in U}} \sum_{\substack{E'_1 \subset E_1, \\ k_{K_j}(E'_1) = 1}} \sum_{\substack{E'_2 \subset E_2, \\ k_{K_{n-j}}(E'_2) = 1}} \sum_{E'_3 = \{v_1 v \mid v \in U_G\}} (y-1)^{n(E'_1) + n(E'_2) + (|E'_3| - 1)} \\
&= \sum_{\substack{U \subset V - \{v_1\}, \\ v_0 \in U}} \sum_{\substack{E'_1 \subset E_1, \\ k_{K_j}(E'_1) = 1}} (y-1)^{n(E'_1)} \sum_{\substack{E'_2 \subset E_2, \\ k_{K_{n-j}}(E'_2) = 1}} (y-1)^{n(E'_2)} \sum_{E'_3 = \{v_1 v \mid v \in U_G\}} (y-1)^{(|E'_3| - 1)} \\
&= \sum_{\substack{U \subset V - \{v_1\}, \\ v_0 \in U}} R(K_{|U|}, y) R(K_{n-|U|}, y) \frac{((y-1) + 1)^{|U|} - 1}{y-1} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\substack{U \subset V - \{v_1\}, \\ v_0 \in U, |U|=j}} R(K_{|U|}, y) R(K_{n-|U|}, y) \frac{y^{|U|} - 1}{y-1} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-2}{j-1} R(K_j, y) R(K_{n-j}, y) \frac{y^j - 1}{y-1}
\end{aligned}$$

□

Estos dos teoremas, permiten obtener el polinomio de nivel y el polinomio de Tutte de manera recursiva, ahora presentamos otra fórmula para encontrar el polinomio de Tutte de una gráfica completa.

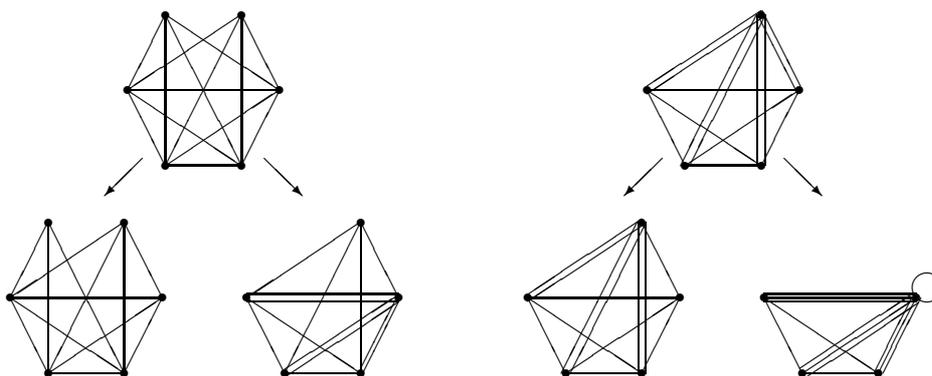
Para encontrar el polinomio de Tutte de la gráfica completa, se considera la forma recursiva relacionada con la contracción y el borrado de una arista.



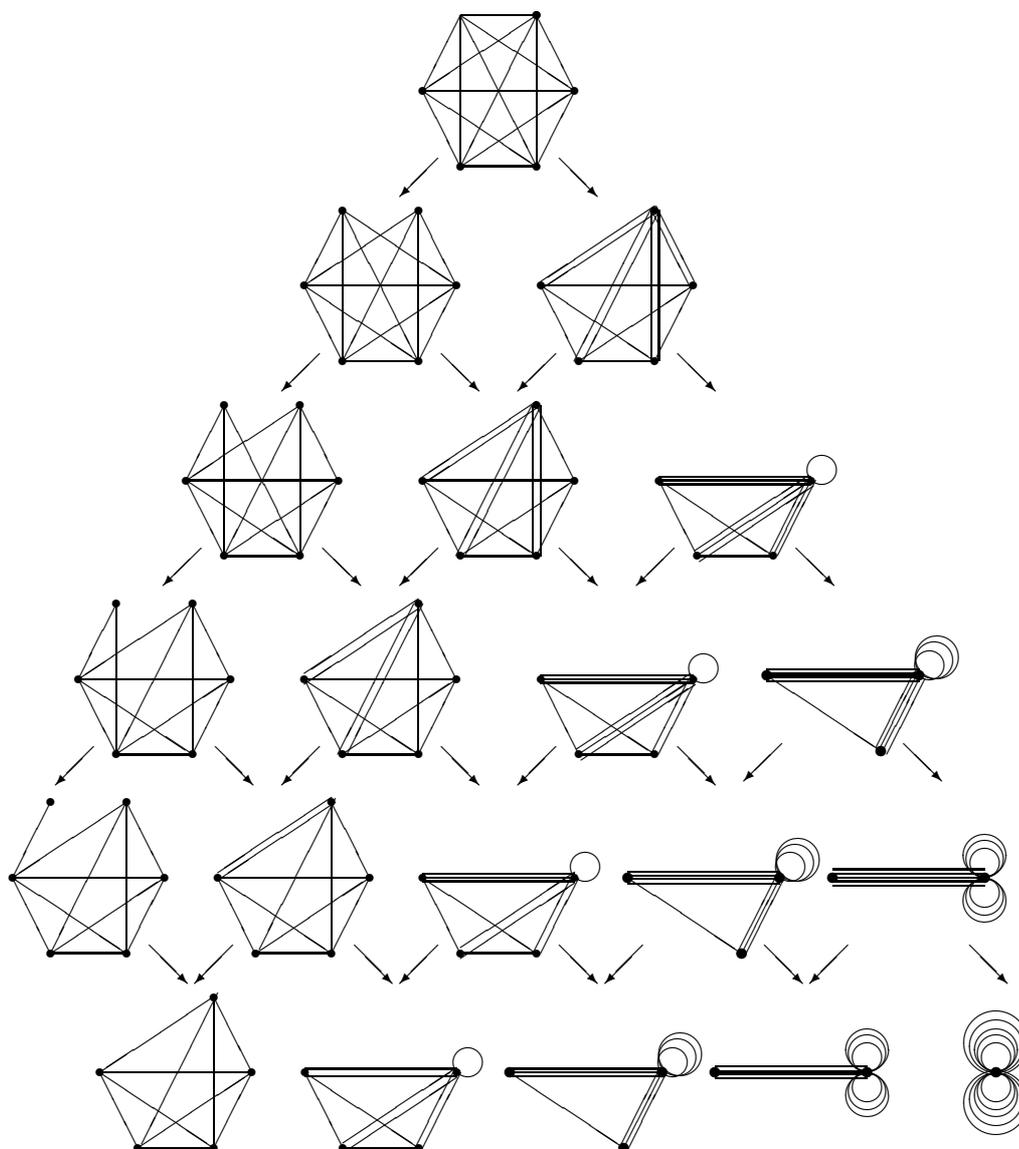
Entonces se tiene que

$$T(K_6, x, y) = T(K_6 - e_1, x, y) + T(K_6/e_1, x, y)$$

El siguiente proceso de corte y contracción da lugar a cuatro nuevas gráficas



Las dos gráficas del centro son isomorfas y tienen el mismo polinomio de Tutte. Este resultado se repite, obteniéndose una sucesión de subgráficas, en las cuales se puede aprovechar el isomorfismo. De esta manera se obtiene la siguiente sucesión de gráficas resultado de borrado y contracción.

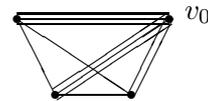


En este diagrama, se observa que el vértice del que parten las multiaristas en cada gráfica no es el mismo, pero las gráficas resultantes son isomorfas y por lo tanto tienen el mismo polinomio de Tutte, por lo que es adecuado utilizar este diagrama para encontrar el polinomio de Tutte. En la última hilera de este diagrama se observa una serie de gráficas las cuales presentan una regularidad, la primera es la gráfica completa con 5 vértices, un vértice menos que la gráfica inicial; la segunda es una gráfica completa de 4 vértices con 2 multiaristas que parten de un mismo vértice v a todos los otros vértices y un lazo incidente a este vértice v ; la tercera es una gráfica completa de 3 vértices con 3 multiaristas que parten de un mismo vértice v a todos los otros vértices y tres lazos incidentes a este vértice v ($1 + 2 = 3$); la cuarta es una gráfica completa de 2 vértices con 4 multiaristas que parten de un mismo vértice v a todos los otros vértices y seis lazos incidentes a este vértice v ($1 + 2 + 3 = 6$); y la última es una gráfica completa de 1 vértices con diez lazos incidentes a este vértice v ($1 + 2 + 3 + 4 = 10$). Esta regularidad observada en la

última hilera del diagrama es un resultado general que para probarlo es necesario definir las gráficas completas con multiaristas incidentes a un mismo vértice.

Definición 5.7. Sea $K_{n-1} = (V, E)$ la gráfica completa de $n - 1$ vértices y sea v_0 un vértice que no está en V , $v_0 \notin V$, definimos como $K_{n,k,t} = (V', E')$ a las clases de gráficas tales que $V' = V \cup \{v_0\}$ y $E \subset E'$, en donde E' además de las aristas en E tiene k aristas de la forma v_0v para t vértices $v \in V$ y $k - 1$ aristas de la forma v_0v para los restantes $n - t - 1$ vértices $v \in V$. A estas clases le llamamos la gráfica completa con k aristas en t vértices.

Por ejemplo, esta figura representa a una gráfica completa de 4 vértices con 3 multiaristas en dos vértices, entonces la gráfica es: es $K_{4,3,2}$



De acuerdo a esta última definición se tiene que $K_{n,1,n-1} = K_n$.

La arista $e = v_0v$ con $v \in V$ es puente si y sólo si $k = 1$ y $t = 1$, en cualquier otro caso e no es ni puente ni lazo, y las operaciones de corte y contracción de la gráfica para está arista son

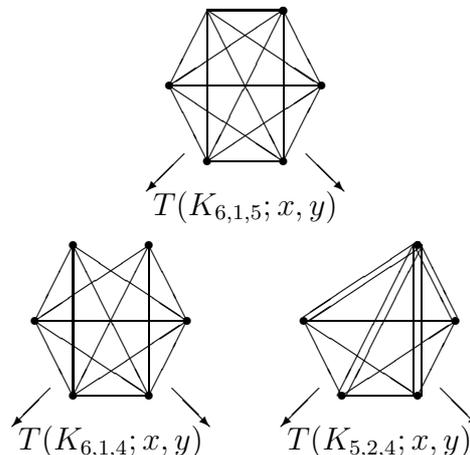
$$K_{n,k,t} - e = \begin{cases} K_{n-1} \cup \{v_0\} & \text{si } k = t = 1 \\ K_{n,k-1,n-1} & \text{si } k > 1 \text{ y } t = 1 \\ K_{n,k,t-1} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

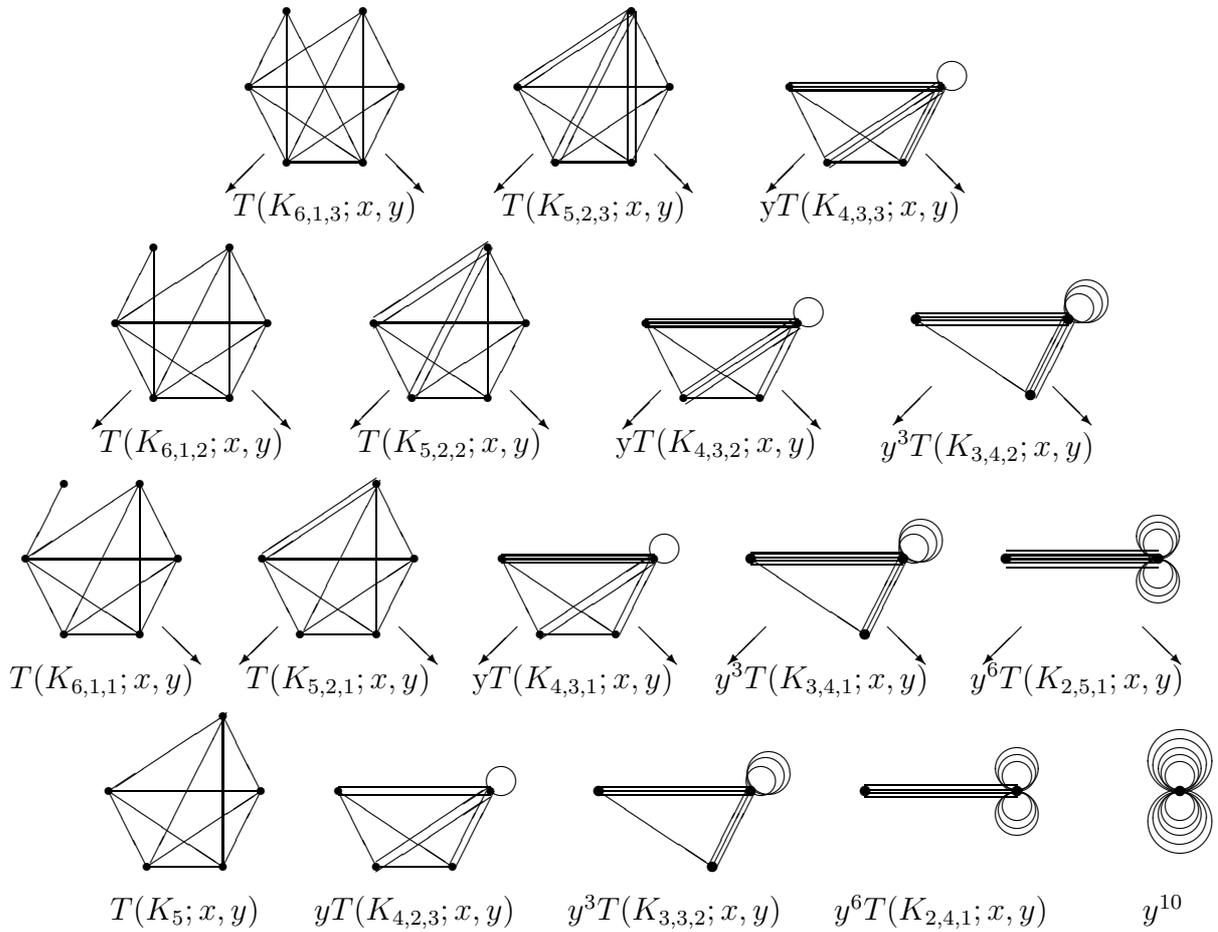
y

$$K_{n,k,t}/e = \begin{cases} K_{n-1} & \text{si } k = t = 1 \\ K_{n-1,k,n-2} \cup U_{k-1} & \text{si } k > 1 \text{ y } t = 1 \\ K_{n-1,k+1,t-1} \cup U_{k-1} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde U_{k-1} es un conjunto de $k - 1$ lazos incidente a v_0

El diagrama de borrados y contracciones para la gráfica completa de 6 vértices se presenta nuevamente, ahora con los datos del polinomio de Tutte asociado a cada gráfica.





El polinomio de Tutte de K_6 se puede escribir en términos de gráficas de menos vértices como:

$$T(K_6; x, y) = (x+4)T(K_5; x, y) + 10yT(K_{4,2,3}; x, y) + 10y^3T(K_{3,3,2}; x, y) + 5y^6T(K_{2,4,1}; x, y) + y^{10}$$

y el polinomio de nivel como:

$$\mathcal{R}(K_6, y) = 5T(K_5; 1, y) + 10yT(K_{4,2,3}; 1, y) + 10y^3T(K_{3,3,2}; 1, y) + 5y^6T(K_{2,4,1}; 1, y) + y^{10}$$

Teorema 5.8. *El polinomio de Tutte de la gráfica K_{n+1} se puede calcular mediante la fórmula recursiva*

$$T(K_{n+1}; x, y) = (x+n-1)T(K_n; x, y) + \sum_{i=2}^{n-1} \binom{n}{i} y^{(i-1)i/2} T(K_{n+1-i, i, n-i}; x, y) + y^{n(n-1)/2}$$

y el polinomio de nivel como

$$\mathcal{R}(K_{n+1}, y) = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} y^{(i-1)i/2} T(K_{n-i+1, i, n-i}; 1, y) + y^{n(n-1)/2}$$

Demostración Se sabe que cuando e es una arista de la gráfica G que no es puente ni lazo entonces $T(G; x, y) = T(G - e; x, y) + T(G/e; x, y)$, de esta manera se tiene que

$$\begin{aligned} T(K_{n+1}; x, y) &= T(K_{n+1, 1, n-1}; x, y) + T(K_{n, 2, n-1}; x, y) \\ &= T(K_{n+1, 1, n-2}; x, y) + 2T(K_{n, 2, n-2}; x, y) + yT(K_{n-1, 3, n-2}; x, y) \\ &= T(K_{n+1, 1, n-3}; x, y) + 3T(K_{n, 2, n-3}; x, y) \\ &\quad + 3yT(K_{n-1, 3, n-3}; x, y) + y^3T(K_{n-2, 4, n-3}; x, y) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} y^{i(i-1)/2} T(K_{n-i+1, 1+i, 1}; x, y) \\ &= (x+n-1)T(K_n; x, y) + \sum_{i=2}^{n-1} \binom{n}{i} y^{i(i-1)/2} T(K_{n-i+1, i, n-i}; x, y) \\ &\quad + y^{n(n-1)/2} \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado el teorema.

De la misma manera se encuentra el polinomio de Tutte de la gráfica $K_{n, k+1, n-1}$ para $k \geq 1$ siendo igual a

$$T(K_{n+1, k+1, n}; x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} y^{[(k+i-1)(k+i)-k(k-1)]/2} T(K_{n+1-i, k+i, n-i}; x, y) + y^{[(k+n-1)(k+n)-k(k-1)]/2}$$

o de manera equivalente

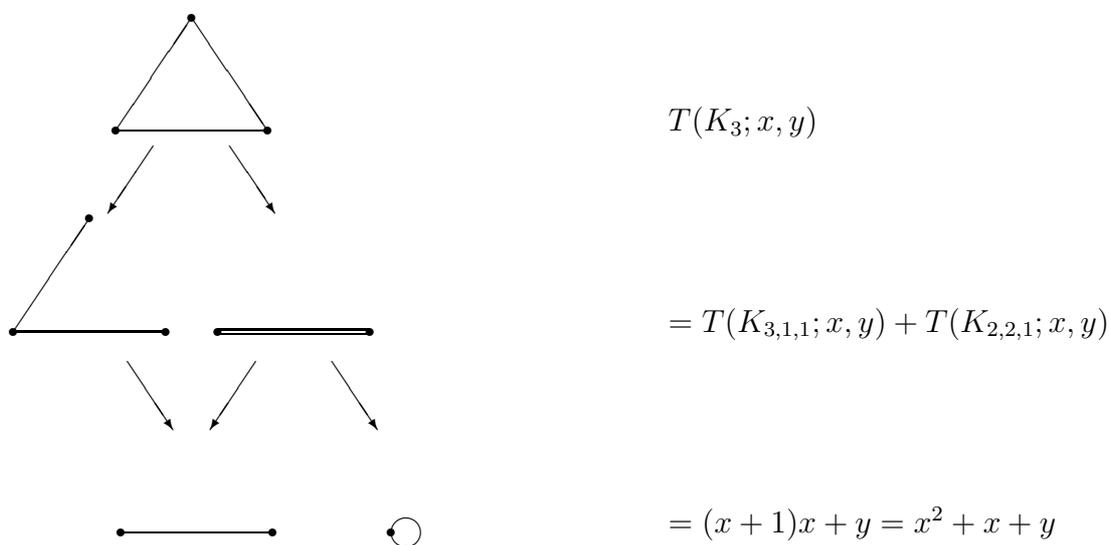
$$y^{k(k-1)/2} T(K_{n, k+1, n-1}; x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} y^{(k+i-1)(k+i)/2} T(K_{n-i+1, k+i, n-i}; x, y) + y^{(k+n-1)(k+n)/2}$$

y el polinomio de nivel es

$$y^{k(k-1)/2} \mathcal{R}(K_{n+1, k+1, n-1}, y) = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} y^{(k+i-1)(k+i)/2} T(K_{n-i+1, k+i, n-i}; 1, y) + y^{(k+n)(k+n-1)/2}$$

Para encontrar el polinomio de Tutte de una gráfica completa usando esta fórmula recursiva es necesario obtener los polinomios de Tutte de las gráficas K_3 y $K_{2,2,1}$.

El polinomio de Tutte de K_3 es $T(K_3; x, y) = x^2 + x + y$



y el polinomio de Tutte de $K_{2,2,1}$ es $T(K_{2,2,1}; x, y) = x + y$



Entonces, el polinomio de Tutte de K_4 utilizando la fórmula recursiva es

$$\begin{aligned} T(K_4; x, y) &= (x + 2)T(K_3; x, y) + 3yT(K_{2,2,1}; x, y) + y^3 \\ &= (x + 2)(x^2 + x + y) + 3y(x + y) + y^3 \\ &= x^3 + 3x^2 + 2x + 4xy + 2y + 3y^2 + y^3 \end{aligned}$$

En este capítulo se calcularon los polinomios de Tutte y los polinomios de nivel de diferentes gráficas particulares. Estos polinomios para un ciclo o un árbol son muy simples, no así para la rueda y para la gráfica completa.

En particular, la fórmula presentada para la rueda tiene la característica que no es recursiva, que es una ventaja porque no se requiere obtener los polinomios de Tutte o de nivel para las ruedas de un número menor de vértices.

Para la gráfica completa, se presentó dos maneras de calcular sus polinomios de Tutte y de Nivel.

Capítulo 6

Conclusiones

El tema principal de este trabajo es realizar un estudio del polinomio de Tutte de una gráfica. Para ello se presentaron las definiciones de los conceptos básicos relacionados con las gráficas, como son el concepto de vértice, el concepto de arista, el concepto de conexidad, el concepto de árboles, el concepto de ciclos, etc. En este contexto, se hizo la convención de denotar con el término genérico de “gráficas” tanto a gráficas simples como a las multigráficas.

Primero se define el polinomio de Tutte de una gráfica a partir del polinomio generador de rango, y se demostraron las propiedades relacionadas con el borrado y la contracción de una arista de la gráfica. Se demostró que el polinomio de Tutte de una gráfica es igual al producto de los polinomios de Tutte de las componentes conexas de la gráfica, esto justifica, porque sin pérdida de generalidad sólo es necesario estudiar a los polinomios de Tutte de gráficas conexas.

Luego se estudió la relación del polinomio de Tutte con los árboles generadores de una gráfica conexa, se definieron los conceptos de actividad interna y externa de una arista con respecto a los árboles generadores. Se presentó una manera alternativa de representar a los polinomios de Tutte.

Se establecen las reglas del juego del reparto de fichas, y se definieron los conceptos de configuraciones estables, recurrentes y críticas, se probó la existencia de una biyección entre los árboles generadores y las configuraciones críticas, y se prueba una relación entre el nivel de una configuración crítica y la actividad externa de un árbol generador.

Se presentan dos pruebas de este resultado.

Otra aplicación importante del polinomio de Tutte es su relación con la probabilidad que una arista pertenezca o no a una subgráfica, lo que se traduce en la probabilidad que en una red de comunicación dos nodos se encuentren intercomunicados por alguna trayectoria. Se definió el polinomio de confiabilidad de una gráfica como la probabilidad que los vértices que están conectados en la gráfica original, siguen estando conectados en una subgráfica generadora. Se probó que el polinomio de confiabilidad es igual al polinomio de nivel, evaluado en una función de la probabilidad.

Es interesante ver que temas tan diversos, como el juego de reparto de fichas, el concepto de árboles generadores y la probabilidad que una red se mantenga conectada en todos sus nodos tienen como común denominador a los polinomios de Tutte.

Los tres tópicos fueron estudiados y se desarrollaron diferentes resultados conocidos, aportando algunos aspectos interesantes en las diferentes demostraciones presentadas. Considero que los conceptos fueron presentados en lenguaje sencillo y de manera clara y espero que pueda ser utilizado por estudiantes de licenciatura para introducirlos a esta rama de las matemáticas que me parece fascinante.

Finalmente, se presentaron las fórmulas para calcular los polinomios de Tutte y de nivel para algunas gráficas particulares. En particular, la fórmula presentada para la rueda no es recursiva.

Bibliografía

- [1] W.T. Tutte. *A ring in graph theory*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 43 pp 26–40, 1947.
- [2] B. Bollobás. *Modern Graph Theory*. Springer Verlag 1998.
- [3] T.H. Bryllawski y J.G. Oxley. *The Tutte polynomial and its applications. En Matroid Applications*. N. White ed., Encyclopedia of mathematics and its applications, pp. 123–225. Cambridge University Press, 1992.
- [4] W.T. Tutte. *A contribution to the theory of chromatic polynomials*. Canad. J. math, pp 77–82, 1973.
- [5] J.Spencer. *Balancing vectors in the max norm*. Combinatorica, 6:55–66, 1986.
- [6] R.J. Anderson, L. Lovász, P. Shor, J.Spencer, É. Tardos y S. Winograd. *Disks, balls, and walls: analysis of a combinatorial game*. Amer. Math. Monthly, 96(6):481–493, 1989.
- [7] A. Björner, L. Lovász, P.W. Shor. *Chip-firing games on graphs*. European J. Combin, 12:283–292, 1991.
- [8] P. Bak, C. Tang y K. Wiesenfeld. *Self-organized criticality*. Phys. Rev. A, 38(1):364–374, 1988.
- [9] D. Dhar. *Self-organized critical state of sandpile automaton models*. Phys. Rev. left, 64(14):1613–1616, 1990.
- [10] N. Biggs. *Chip firing and critical group of a graph*. J. Algebraic Combin, 9(1):25–45, 1999.
- [11] J. Beck y V.T. Sós. *Discrepancy theory*. In R. Graham, M. Grötschel, and L Lovász, editos, Handbook of Combinatorics. 1995.
- [12] B. Doerr. *Vector balancing games with aging*. J. Comb. Theory Ser. A, 95:219–233, 2001.
- [13] J. Spencer. *Balancing games*. J. Combin. Theory Ser. B, 23:68–74, 1977.

- [14] A. Björner y L. Lovász. *Chip-firing games on directed graphs*. j. Algebraic Combin, 1:305–328, 1992.
- [15] J. Bitar and E. Goles. *Parallel chip firing games on graphs*. Theoretical Computer Science, 92(2):291–300, 1992.
- [16] F. Chung y R. Ellis. *A chip-firing game and Dirichlet eigenvalues*. Discrete Math, 237:341–355, 2002.
- [17] K. Ericksson. *No polynomial bound for the chip firing game on directed graphs*. Proc. Amer. Math, 112:1203–1205, 1989.
- [18] K. Ericksson. *Chip firing games on mutating graphs*. SIAM J. Discrete Math, 9:118–128, 1996.
- [19] J. van den Heuvel. *Algorithmic aspects of a chip-firing game*. Technical report, CDAM, 1999. LSE-CDAM-99-09.
- [20] G. Tardos. *Polynomial bound for a chip firing game on graphs*. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 1:397–398, 1988.
- [21] D.G. Wagner. *The critical group of a directed graph*. Manuscript.
- [22] C. Merino. *Matroids, the Tutte Polynomial and the Chip Firing Game*. DPhil, Oxford University, 1999.
- [23] J.G. Oxley. *Matroid Theory*. Oxford Univ, Press, 1992.
- [24] N. Biggs y P. Winkler. *Chip-firing and the chromatic polynomial*. Research Report LSE-CDAM-97-03, CDAM,1997.
- [25] M.K. Chari. *Acyclic orientations and the reliability polynomial*. Manuscript.
- [26] C. Merino. *Chip-firing and the Tutte polynomial*. Ann. Comb., 1(3):253–259, 1997.
- [27] Y. Le Borgne. *Sandpile model and Tutte polynomials*. To appear at Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC01).
- [28] R. Cori, D. Rossin y B. Salvy. *Polynomial ideals for sandpiles and their Gröbner bases*. Theoret. Comput. Sci., 276:1–15, 2002.