UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ÁLGEBRAS C* Y GRUPOS CUÁNTICOS COMPACTOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A :

ROCÍO DEL PILAR AGUILAR BENÍTEZ

TUTOR : DR. MICHO DURDEVICH LUCICH

2006

FACULTAD DE CIENCIAS

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

División de Estudios Profesionales

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e .

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

"Álgebras C* y grupos cuánticos compactos"

realizado por **Aguilar Benítez Rocío del Pilar**

con número de cuenta **09851306-8,** quien cubrió los créditos de la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Tutor(a) Propietario	Dr.	Micho Durdevich Lucich
Propietario	Dr.	Miguel Socolovsky
Propietario	Dr.	Santiago López de Medrano Sánchez
Suplente	Dr.	César Bautista Ramos
Suplente	Dr.	Pedro Miramontes Vidal

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D.F., a 28 de junio del 2006.
EL COORDINADOR DEL COMITÉ DE TITULACIÓN
DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

M. EN C. AGUSTIN ONTIVEROS PINEDA

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis papás que me apoyaron incondicionalmente durante mis estudios de Licenciatura. También agradezco al Dr. Micho Durdevich por introducirme en la Geometría No Conmutativa con gran paciencia y amistad. De manera muy especial le doy gracias a Leo, por llenar de amor y de belleza mi vida.

A mi pequeña Daira Mildred.

Índice general

Introducción

Una buena parte del desarrollo de las matemáticas ha sido motivado por otra bella ciencia: la física, en la búsqueda de la descripción, comprensión y predicción de los fenómenos de nuestro universo.

Acerca de la mecánica cuántica

El problema que motivó el surgimiento de la teoría cuántica es el del cuerpo negro que introdujo Kirchhoff por el año de 1860. Se trata de un cuerpo ideal que absorbe toda la energía que le llega y emite esa misma cantidad de energía por unidad de tiempo, de modo que, a pesar de su nombre el cuerpo negro emite luz cuando se calienta. El sol es un ejemplo de cuerpo negro. Uno de sus alumnos, Wien encontró que las longitudes de onda de la radiación electromagnética emitida se distribuyen de manera que su intensidad presenta un pico en un valor intermedio (figura 1).

Wien también dedujo con razonamiento termodinámico que la longitud de onda en el pico de la curva varía inversamente con la temperatura, de tal modo que cuando ésta aumenta, el color predominante se corre hacia el azul (ley de desplazamiento de Wien).

Lord Rayleigh al igual que Wien supuso que en la cavidad del cuerpo negro existe un conjunto de ondas electromagnéticas que ejercen presión sobre las paredes de esa cavidad. Con éste modelo Rayleigh pudo explicar la forma de la curva para frecuencias pequeñas y Wien lo hizo para frecuencias grandes, ninguno de los dos pudo obtener la forma completa de la curva. El cálculo de Rayleigh predecía una intensidad que siempre crecía con la frecuencia. En consecuencia, la energía total radiada sería infinita: esto es lo que se llama una catástrofe ultravioleta y si se diera un fenómeno así la materia no podría ser estable. Planck empleó un razonamiento similar al de Rayleigh y obtuvo un resultado acorde con la ley de desplazamiento de Wien y la catástrofe ultravioleta. Sin embargo, para eliminar esta catástrofe Planck postuló que el intercambio de energía se da en paquetes enteros a los que llamó cuantos. Cada cuanto de energía está dado por la fórmula $E = \hbar\omega$ donde $\omega = 2\pi\nu$, ν es la frecuencia de radiación y $\hbar$ es una constante universal llamada constante de Planck. Esta fórmula es consistente con los resultados de Wien. En 1905 Albert Einstein desarrolló su teoría del efecto fotoeléctrico (emisión de cargas

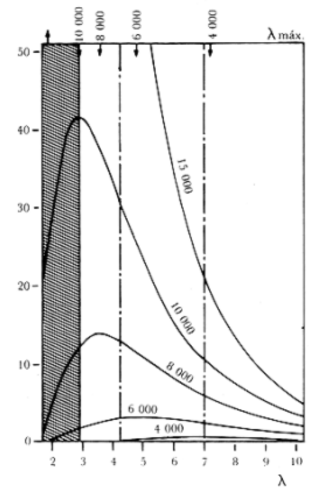


Figura 1: Distribución de longitudes de onda de la radiación electromagnética

por efecto de la radiación). Einstein supuso que la luz se formaba de corpúsculos llamados fotones. Fué por este trabajo que Einstein recibió el premio Nobel en 1921.

Thomson y su discípulo Ernest Rutherford descubrieron respectivamente el electrón y el núcleo de los átomos. Así propusieron un modelo para el átomo en forma de sistema solar. Este modelo tiene dos desventajas, una es que el electrón al moverse alrededor del núcleo perdería continuamente energía y finalmente caería al nucleo, y la teoría electromagnética de Maxwell predice que la nube electrónica desaparecería, al desaparecer el átomo se deduciría que la materia es inestable. La segunda desventaja es que aceptando las leyes de Newton y de Maxwell, cuando el electrón radia y pierde su energía mecánica se va moviendo cada vez más despacio, por ello emitiría radiación electromagnética de todas las frecuencias y no luz con un espectro discreto. Para explicar la existencia de los espectros discretos atómicos, Bohr propuso en 1911 el primer modelo de átomo en el que había ciertos niveles de energía en los cuales el electrón estaba en una órbita estable (sin emitir radiación como nos dice la electrodinámica clásica). El electrón no puede pasar por niveles intermedios de energía a estos en los cuales la órbita es estable y para pasar de un nivel a otro se da lo que se llama un salto cuántico. Dentro de este marco conceptual, Bohr afirmó que la mecánica clásica no funciona dentro del átomo, sino que éste solo puede existir en un conjunto discreto de estados estacionarios con ciertos niveles de energía. Cuando un electrón se encuentra en uno de ellos, no puede emitir ni absorber radiación. Estos procesos se dan cuando el átomo pasa de uno de estos estados estacionarios a otros. Como Rayleigh y Thomson no aceptaron el modelo de Bohr, él se fue a trabajar con Rutherford a Manchester,

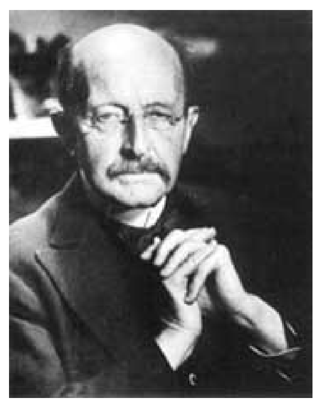
	
Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887)	Willy Eisenschitz Wien (1889 1974)
	
Third Baron Rayleigh (1842 - 1919)	Max Planck (1858 - 1947)

Figura 2: Los precursores de la teoría cuántica

Louis de Broglie (1892 - 1987)

Joseph John Thomson (1856 - 1940)

Figura 3: Los precursores de la teoría cuántica

Inglaterra. En 1913 Bohr completó un nuevo esquema atómico que es consistente con las ideas cuánticas de Planck y Einstein. Con este modelo Bohr pudo explicar la serie de Balmer y predecir lo que ocurriría al bombardear átomos con electrones de baja energía y esto le dió a su modelo un fuerte impulso.

En 1924, Luis de Broglie planteó la necesidad de asignar a las partículas propiedades de onda bajo ciertas condiciones. Una motivación de esta idea proviene de un criterio de simetría, ya que al estudiar el efecto fotoeléctrico y el efecto de Compton nos damos cuenta de que debemos asignar propiedades corpusculares a la radiación electromagnética. Según De Broglie, cada partícula bajo ciertas condiciones se comporta como una onda. Bohr propuso su Principio de Complementariedad en el que se entiende que el fenómeno depende del sistema de observación y finalmente la realidad no es más que el resultado de todos los sistemas de observación. Este principio ha suscitado mucha polémica en cuanto a que si la realidad es realmente el resultado de todos los sistemas de observación o algo más. El electrón por lo tanto tiene un comportamiento dual de onda y corpúsculo. Al comportarse el electrón como una onda, es imposible asignarle una posición. Esta idea se conoce con el nombre de Principio de Incertidumbre de Heisenberg. El electrón se comporta unas veces como partícula y otras como onda y el observarlo afecta su comportamiento. El principio de incertidumbre de Heisenberg dice que no se puede conocer el momento lineal y la posición de un electrón al mismo tiempo es decir que éstas no son observables compatibles. Dicho de otro modo, el electrón y las partículas cuánticas no poseen al mismo tiempo las propiedades de momento y posición.

El formalismo matemático para la mecánica cuántica son las álgebras de operadores acotados en un espacio de Hilbert.

	
Niels Bohr (1885 - 1962)	Ernest Rutherford (1871 - 1937)

Figura 4: Los precursores de la teoría cuántica

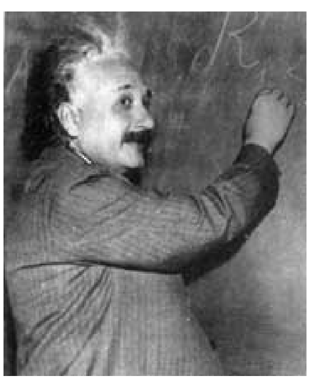
	
Albert Einstein (1879 - 1955)	Werner Heisenberg (1902 - 1976)

Figura 5: Los precursores de la teoría cuántica

Acerca de la teoría de la relatividad

Einstein propuso dos teorías de relatividad, la teoría especial de la relatividad y la teoría general de la relatividad. La teoría especial de la relatividad propuesta en 1915, se basa en el principio de que la velocidad de la luz es constante y como consecuencia la geometría del tiempo y el espacio no pueden ser absolutos, lo único absoluto es la constante de la velocidad de la luz (c=300,000 km/seg aproximadamente). La consecuencia de este principio es que tiempo y espacio no son independientes y hay una geometría del espacio-tiempo que va dependiendo de la cantidad de materia. La teoría general de la relatividad es una geometrización de la gravedad y establece que la gravedad es lo mismo que el movimiento acelerado. La gravitación nos va dando una curvatura en cada punto del espacio-tiempo, esta curvatura va definiendo las curvas geodésicas que son las curvas que siguen las partículas. En particular tenemos el ejemplo de las órbitas de los planetas que siguen en realidad una espiral elíptica en el espacio-tiempo pero nosotros percibimos la proyección de este movimiento en el espacio tridimensional como una elipse. El formalismo matemático para la teoría de la relatividad es la geometría diferencial.

Acerca de la teoría unificada del campo

La mecánica cuántica y la teoría de la relatividad son las dos grandes teorías del siglo XX, la mecánica cuántica en cuanto al universo en escalas pequeñas y la relatividad en cuanto al estudio del macrocosmos. Por ello el gran reto a partir de entonces para la comunidad científica ha sido encontrar una teoría universal que sea consistente con ambas teorías.

La idea de Einstein era descubrir que tanto la relatividad como la mecánica cuántica eran casos particulares de una teoría más grande cuya herramienta principal tenía que ser la geometría. El sueño de Einstein era entender todas las fuerzas (fuerza nuclear fuerte, fuerza nuclear débil, fuerza electromagnética y fuerza gravitacional)como propiedades geométricas del espacio-tiempo. Lo que se propone con la Geometría Diferencial No Conmutativa es extender nuestro concepto de geometría para lo cual deberemos dar un paso crucial que es prescindir de la noción de punto, que si lo meditamos un poco, es en realidad algo muy artificial.

Hasta hoy no se ha encontrado una teoría que tenga como casos particulares la teoría cuántica cuando se mira el universo en escalas muy pequeñas, y la relatividad cuando observamos el macrocosmos. La gravitación se puede pensar como una geometrización del espacio - tiempo, la idea de Einstein era que una teoría unificada debía descubrir la geometría del espacio - tiempo, partiendo de esta idea el universo podría describirse en términos de pura geometría, ésta es una idea muy bella y si buscamos en esta dirección la geometría diferencial no conmutativa parece ser un buen camino, ya que amplía nuestra visión del concepto de espacio unificando la geometría con los conceptos de física cuántica. Al mismo tiempo obtenemos una forma mucho más sencilla de estudiar los espacios prescindiendo del concepto de punto. Einstein pasó gran parte de la última etapa de su vida tratando de integrar la teoría cuántica y la relatividad como él mismo lo afirmó, pero no obtuvo resultados satisfactorios, ésto sin duda deja ver que no se trata de un problema sencillo, es quizá el problema más importante para los físicos de la actualidad.

Resulta muy interesante que combinando las constantes universales $\hbar$, γ y c, que son la constante de Planck, la constante de gravitación y la velocidad de la luz respectivamente, se obtiene una unidad de longitud:

$$\ell = \sqrt{\frac{\hbar\gamma}{c^3}} \sim 10^{-33}\text{cm}.$$

Este orden de longitud es tan pequeña en comparación con el núcleo de un átomo como el núcleo es pequeño con respecto al Distrito Federal por poner un ejemplo.

Planck se dió cuenta de que las 3 constantes universales se podían combinar para obtener esta unidad de longitud, y esto le hizo pensar que algo no trivial debía suceder en el universo visto en esta escala de longitud. Sin embargo, hasta ahora solo se ha podido especular con respecto del comportamiento de la materia a escalas incluso mucho más grandes que ésta.

Sobre las álgebras C^*

Las álgebras C^* fueron introducidas en 1943 bajo el nombre de anillos completamente regulares por Gelfand y Naimark en el artículo "On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space" (Mat. SB. 12 (1943), 301-306). En este artículo mostraron que cualquier álgebra C^* se puede ver como una subálgebra de operadores en un espacio de Hilbert. La teoría de álgebras de operadores a su vez fue desarrollada en los años 30's por Von Neumann y Murray en una serie de artículos, sin embargo tuvieron que pasar 20 años para que se empezaran a utilizar en física, específicamente en mecánica cuántica y en teoría unificada del campo.

Con las álgebras C^* surge la posibilidad de desarrollar una nueva geometría que promete ser consistente con fenómenos cuánticos como el principio de incertidumbre y el principio de complementaridad. Así pues el concepto central de este trabajo es el de álgebra C^*, siempre que esta estructura es conmutativa es posible asociarla con un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff.

Es importante mencionar que el espacio de tres dimensiones que percibimos y en el que se ha convenido trabajar desde el punto de vista físico y matemático cumple intuitivamente (y suponiendo que se compone de puntos) las condiciones topológicas de un espacio de Hausdorff localmente compacto que son las siguientes: 1. Cada punto del espacio tiene una vecindad contenida en un compacto, 2. Dados dos puntos x y y, existe una vecindad V_x de x, y una vecindad V_y de y que

	
Israil Moiseevic Gelfand (1913 -)	Mark Aronovich Naimark (1909 1978)

Figura 6: Autores de la teoría de Algebras C^*

no tienen puntos en común. Para estudiar fenómenos locales se puede suponer adicionalmente que el espacio es compacto, lo que en el álgebra C^* asociada tiene la implicación no trivial de que exista una unidad, es decir, un elemento 1 que cumple $1a = a1 = a$ para cualquier a en el álgebra C^*. Actualmente la condición de ser espacio Hausdorff está incluida en la definición de espacios compactos y localmente compactos.

Los espacios topológicos compactos, tienen asociada en forma natural un álgebra C^* que se compone de todas las funciones continuas que van del espacio a los números complejos. Y en esta álgebra C^* se encuentra una traducción de las características geométricas y topológicas del espacio en ciertas clases de elementos y homomorfismos. La traducción es fiel en el sentido de ser en algunos aspectos una relación biunívoca y consistente con las estructuras algebraica y geométrica, por mencionar algunas de estas asociaciones, tenemos la conexidad del espacio con los proyectores que son ciertos elementos de un álgebra C^*, las simetrías con los automorfismos del álgebra C^* y los puntos del espacio con unos homomorfismos especiales llamados caracteres. Todo esto se puede decir más sucintamente utilizando el lenguaje de categorías ya que existe en realidad un funtor contravariante que va de la categoría de los espacios topológicos localmente compactos en la categoría de las álgebras C^* conmutativas, y la propuesta de la geometría no conmutativa es extender este funtor también a las álgebras C^* no conmutativas quedando asociadas con espacios a los que llamaremos cuánticos, los cuales se explorarán en términos de la información algebraica que tenemos de ellos.

Una de las cosas más notables que suceden en los espacios cuánticos es la desaparición de la noción de punto del espacio, nos daremos cuenta de que esta noción es un concepto artificial del cual dependen sin embargo otros conceptos importantes como es el caso de la dimensión.

Así es como surge la posibilidad de una geometría sin puntos que se puede desarrollar en el álgebra C^*, para esto se introduce un cálculo funcional continuo que es una extensión del cálculo funcional de Riesz en el álgebra de los operadores acotados en un espacio de Hilbert.

El tema de las álgebras C^* y grupos cuánticos compactos ofrece una interacción muy rica entre distintas ramas de las matemáticas, muchas de las veces se estudian de forma aislada las distintas herramientas en las que se basa esta teoría, perdiendo muy fácilmente la esencia e interpretación física que ha motivado su desarrollo y formalización.

La geometría no conmutativa también propone el experimento matemático de romper la conmutatividad del álgebra C^* de funciones continuas asociada a los espacios clásicos conocidos, y obtener como consecuencia un espacio cuántico, a este proceso lo llamamos cuantización del espacio, para lo que hay que romper la conmutatividad de una forma adecuada para obtener de nuevo un álgebra C^* que se pueda estudiar por medio de representaciones, a continuación se explora el espacio cuántico obtenido por medio de los elementos algebraicos ya conocidos en el caso conmutativo. Hay que decir que no todos los espacios cuánticos se pueden obtener de esta manera, ejemplos de estos espacios se pueden encontrar en [18]. En el presente trabajo se analiza la cuantización del toro bidimensional y del grupo de Lie matricial SU(2) que geométricamente es la esfera 3 dimensional.

Un tema de la geometría que está cobrando mucha importancia en la física son los grupos de Lie. Por medio de la geometría no conmutativa también se puede formular el concepto de grupo de Lie cuántico. La teoría de grupos cuánticos está dotada de una simetría muy especial, contrariamente a lo que se podría esperar de ellos por estar construidos con álgebras C^* no conmutativas. Mediante un formalismo diagramático introducido en [18], se demuestran una serie de relaciones completamente simétricas, para el producto, coproducto, counidad y coinverso.

Estructura de la tesis

En este trabajo se definen las álgebras C^*, y se dan un conjunto de definiciones previas a su construcción. Lo primero que se hace notar es que si X es un espacio topológico compacto, entonces el conjunto $C(X)$ de las funciones continuas que van de X en $\mathbb{C}$ forman un álgebra C^* conmutativa y unital y el teorema de Gelfand-Naimark garantiza que cualquier álgebra C^* conmutativa se comporta como $C(X)$ para algún espacio topológico compacto X, es decir que ambas álgebras están relacionadas por medio de un isomorfismo consistente con la estructura C^*. Cuando el espacio es localmente compacto el álgebra C^* no tiene una unidad.

Las características geométricas y topológicas del espacio X como son las simetrías, puntos, los subconjuntos cerrados, abiertos (en particular los subconjuntos simultáneamente abiertos y cerrados) por mencionar algunos, tienen una traducción algebraica dentro de $C(X)$ a ciertos objetos algebraicos, por ejemplo, los caracteres se corresponden con los puntos de X, los proyectores con los subconjuntos simultáneamente abiertos y cerrados de X, etc. La traducción de algunas de estas características es fiel en el sentido de que esta asociación es una relación biunívoca. Se describen algunas de estas asociaciones en la sección "Distintas clases de elementos en un álgebra C^* ". Otras clases de elementos son los elementos normales y hermitianos del álgebra que permiten construir un cálculo funcional continuo dentro del álgebra C^* y reformular el concepto de norma en términos puramente algebraicos.

El siguiente paso es la extensión o generalización de estos conceptos geométricos cuando el álgebra C^* es no conmutativa, en cuyo caso seguimos en la hipótesis de tener asociado un espacio asociado a ella, y cuyas características geométricas y topológicas quedarán definidos por sus correspondientes objetos en el álgebra. Una de las cosas más notables que suceden entonces es la desaparición del concepto de punto. Un espacio obtenido de esta manera es llamado un espacio cuántico. Los espacios cuánticos son una generalización de los espacios clásicos que a su vez quedan caracterizados por las álgebras C^* conmutativas.

A continuación se introduce la C^*-álgebra $B(H)$ que consta de los operadores acotados definidos en un espacio de Hilbert H, se analizan y caracterizan distintas clases de elementos en $B(H)$ y se hace notar que cuando $\dim(H) < \infty$, el álgebra $B(H)$ es isomorfa a la C^*-álgebra $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y es un álgebra C^* simple. Cuando H es de dimensión infinita, $B(H)$ sólo tiene un ideal C^* no trivial que es $K(H)$ el conjunto de los operadores compactos definidos en H.

El teorema de Gelfand y Naimark garantiza que cualquier álgebra C^* se puede ver como subálgebra de $B(H)$ para algún espacio de Hilbert H.

La herramienta fundamental para pasar de cualquier álgebra C^* a $B(H)$, son las representaciones, ellas constituyen el puente de la teoría de álgebras C^* con la mecánica cuántica, cuya herramienta fundamental son las álgebras de operadores acotados en un espacio de Hilbert. Por medio de las representaciones tenemos a nuestra disposición los resultados de la teoría de operadores en espacios de Hilbert, en particular es útil encontrar representaciones irreducibles. Se introduce el concepto de estado, que se encuentra muy ligado al concepto de medida de probabilidad en los espacios clásicos y que junto con las representaciones proveé de una herramienta para representar canónicamente un álgebra C^* preservando el comportamiento esencial de cada álgebra C^* por medio de la terna de Gelfand-Naimark-Segal. El conjunto de los estados tiene una estructura geométrica convexa que permite clasificarlos en estados puros y mezclados, los estados puros están siempre conectados en la terna de Gelfand-Naimark-Segal con las representaciones irreducibles, esta parte termina con la construcción de la envolvente universal C^* de un álgebra $*$, que es un álgebra C^* en la que el álgebra $*$ con que se ha comenzado es densa. No cualquier álgebra $*$ tiene una envolvente C^*, debe cumplir ciertas condiciones, a saber: 1. Deben existir representaciones del álgebra $*$ en un espacio de Hilbert. 2. Para cada elemento del álgebra debe existir al menos una representación que no lo anule. 3. El conjunto de las normas de los operadores obtenidos por medio de las representaciones debe ser acotado. Si se cumplen estas condiciones se puede garantizar la existencia de una única envolvente universal C^* módulo isomorfismos para el álgebra $*$ inicial.

Ya que tenemos este desarrollo fundamental de la teoría, presentamos un ejemplo de cuantización de una variedad clásica bidimensional que es el toro y que cumple con ser un espacio topológico compacto, partiendo de un álgebra $*$ generada por dos generadores y tres relaciones, una de las cuales corresponde a la conmutatividad entre los generadores módulo un parámetro complejo z de módulo 1, a continuación consideramos la envolvente universal C^* de esta álgebra y analizamos las características geométricas y topológicas de la nueva variedad, es decir, averiguamos quienes son los caracteres (puntos), simetrías (automorfismos). Las propiedades del toro cuático se distinguen según sea el parámetro complejo z racional o irracional. Se buscan los ideales C^* para conocer el comportamiento de las partes del toro cuántico que también se investigan por medio de los proyectores, y se encuentra que a partir de cualquier proyector se puede obtener una infinidad más de proyectores ortogonales que inducen una partición del toro cuántico que se fibra en el conjunto triádico de Cantor, en el caso irracional. Se hace una clasificación de sus representaciones irreducibles.

En la segunda parte de este trabajo se introduce el concepto de grupo de Lie cuántico, para esto hace falta dotar a nuestro espacio cuántico de estructura de grupo de Lie, pero de modo que no se tenga que recurrir al concepto de punto, primero introducimos el mapeo de coproducto como dual del mapeo de producto en el grupo de Lie, y despues buscamos las condiciones que debe cumplir para que tenga las propiedades duales a las propiedades del producto en el grupo de Lie, esto se logra a partir de una condición llamada de regularidad, aún con esta formulación de grupo cuántico no podremos evitar la existencia de un punto en el espacio cuántico que va a ser precisamente el elemento neutro del grupo. Después debemos tomar en cuenta otros dos mapeos que son la inclusión del elemento neutro en el grupo y el mapeo que lleva cada elemento a su inverso, estos mapeos tiene un homomorfismo dual en el álgebra C^* correspondiente y estos homomorfismos se llaman counidad y coinverso respectivamente. Las propiedades de estos mapeos duales se deducen por medio del funtor. De nuevo, en el caso conmutativo, tenemos un grupo de Lie clásico.

La notación estándar con la que se formula la acción del coproducto se complica con mucha facilidad y por eso se presentan dos alternativas de manipulación algebraica, una de ellas es la notación por índices y la otra es diagramática y completamente simétrica en el sentido de que si una propiedad está representada por un diagrama, las propiedades representadas por las reflexiones del diagrama también se cumplen.

Los grupos matriciales clásicos funcionan como motivación para los grupos cuánticos matriciales aunque no necesariamente un grupo cuántico matricial proviene de uno clásico. Consideramos como entradas de la matriz, generadores abstractos de un álgebra C^*, cuyas relaciones generadoras quedan determinadas por el grupo matricial. Se construye y analiza con todo detalle el grupo SU(2) cuántico.

Capítulo 1

Álgebras C^*

1.1. Conceptos preliminares

En este trabajo se considerarán solamente álgebras sobre el campo $\mathbb{C}$.

Definición 1 *Un álgebra A es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial dotado de un producto algebraico para el cual dados $a, b, c \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $(ab)c = a(bc)$ *Asociatividad*
2. $a(b + c) = ab + ac$ *Distributividad izquierda*
3. $(a + b)c = ac + bc$ *Distributividad derecha*
4. $(\alpha a)b = \alpha(ab)$

Definición 2 *Un álgebra A es unital si existe un elemento 1 en el álgebra con la propiedad*

$$1a = a1 = a$$

para todo $a \in A$.

Definición 3 *Decimos que V es un espacio vectorial normado si existe una función $\|\| : V \to \mathbb{R}^+$ que cumple:*

1. $\|a\| \geq 0$ *para todo* $a \in A$ *Positividad de la norma*
2. $\|a\| = 0$ *si y solo si* $a = 0$ *Positividad estricta*
3. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ *Desigualdad del triángulo*
4. $\|\lambda a\| = |\lambda|\|a\|$, $\lambda \in \mathbb{C}$ *Homogeneidad de la norma*

Definición 4 *Decimos que A es un álgebra normada si existe una función $\|\| : A \to \mathbb{R}^+$ que cumple las mismas propiedades de un espacio vectorial normado, es decir la positividad, desigualdad del triángulo y homogeneidad de la norma, y además la desigualdad multiplicativa*

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|.$$

Definición 5 *Un espacio vectorial normado V es completo si cada sucesión de Cauchy en V converge a un elemento de V. Estos espacios se llaman espacios de Banach*

Definición 6 *Un álgebra de Banach, es un álgebra normada y completa con la norma del álgebra.*

La norma induce una topología que se denomina topología uniforme.

Cuando el álgebra A no tiene unidad, el álgebra con unidad $\tilde{A} = A \times \mathbb{C}$ incluye a A como subálgebra, donde las operaciones y la norma están dadas por[1]

- $(x, \alpha) + (y, \beta) = (x + y, \alpha + \beta)$
- $\lambda(x, \alpha) = (\lambda x, \lambda\alpha)$
- $(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \beta x + \alpha y, \alpha\beta)$
- $\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|$

Definición 7 *Un álgebra $*$ es un álgebra dotada con un operador $*$ que cumple,*

1.	$(a^*)^* = a$	*Involutividad*
2.	$(ab)^* = b^*a^*$	*Antimultiplicatividad*
3.	$(\alpha a + b)^* = \overline{\alpha}a^* + b^*$	*Antilinealidad.*

Definición 8 *Un álgebra C^* es un álgebra $*$ de Banach A que cumple la condición C^*,*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2.$$

La condición C^* asegura que en un álgebra C^* la involución preserva la norma y sea por lo tanto continua. Los elementos de un álgebra C^* siempre cumplen la igualdad

$$\|a\| = \|a^*\|,$$

ya que utilizando la desigualdad multiplicativa

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \leq \|a^*\|\|a\|$$

de modo que

$$\|a\| \leq \|a^*\|$$

[1]En lugar de pedir que se cumpla la desigualdad multiplicativa de la norma, se pide que las multiplicaciones izquierdas $x \mapsto xy$ y derechas $x \mapsto yx$ sean continuas, ya que con esta hipótesis se garantiza la existencia de una norma equivalente que satisface la desigualdad multiplicativa.

en particular

$$\|a^*\| \leq \|a^{**}\| = \|a\|$$

y por lo tanto

$$\|a\| = \|a^*\|.$$

Definición 9 *Un subconjunto B de un álgebra A se dice una subálgebra de A si es un subespacio vectorial de A cerrado bajo el producto algebraico.*

Definición 10 *Una subálgebra $*$ es una subálgebra cerrada bajo la involución $*$.*

Definición 11 *Un subconjunto J de un álgebra A es un ideal izquierdo de A si para cada $a \in A$ y $j \in J$ el producto aj permanece dentro de J. Un ideal derecho se define en forma semejante y un ideal bilateral es un ideal tanto izquierdo como derecho.*

Definición 12 *Un homomorfismo entre dos álgebras A y B es una función $\Phi : A \to B$ que cumple*

1. $\Phi(\alpha a + b) = \alpha\Phi(a) + \Phi(b)$
2. $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$

Los homomorfismos inyectivos se llaman usualmente monomorfismos, los suprayectivos son llamados epimorfismos, y los que son biyectivos, isomorfismos. Cuando $A = B$ los isomorfismos se llaman automorfismos.

Una propiedad de los ideales es que si $\phi : A \to B$ es un homomorfismo, y $J \lhd B$ entonces al tomar pullback $\phi^{-1}(J) \lhd A$.

Definición 13 *Un homomorfismo $*$ es un homomorfismo que preserva la involución es decir que $\Phi(a^*) = \Phi^*(a)$.*

Ejemplos de álgebras C^* son:

1. El conjunto de las funciones continuas definidas en un espacio topológico compacto con valores en los números complejos.
2. El conjunto de operadores acotados en un espacio de Hilbert.
3. Las matrices de $n \times n$ con coeficientes complejos.

Cada uno de estos ejemplos se analiza con detalle un poco más adelante.

1.2. Completación de un álgebra a un álgebra C^*

Supongamos que $\mathcal{A}$ es un álgebra asociativa compleja, dotada de una norma $\|\|$ que cumple la condición C^*; para que $\mathcal{A}$ sea un álgebra C^* solo le falta cumplir la condición de Banach.

Cualquier espacio normado V se puede completar a un espacio de Banach $\overline{V}$, de modo que V sea denso en $\overline{V}$. Para construir $\overline{V}$ consideramos el conjunto V_C de todas las sucesiones de Cauchy en V. Dadas $x_n, y_n \in V_C$ establecemos la relación de equivalencia:

$$x_n \sim y_n \quad \text{si} \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Se define $\overline{V}$ como $V_C/\sim$ donde cada $v \in V$ queda asociado a la sucesión constante $(v, v, v, \ldots) \in V_C$ cuya clase de equivalencia es un elemento de $\overline{V}$. Como un álgebra normada es en particular un espacio vectorial normado, podemos considerar su completación a un álgebra de Banach, y si se tiene un operador involutivo $*$ con el que se cumple la condición C^*, su completación es ya un álgebra C^*.

1.3. Construyendo subálgebras C^*

Antes que nada, una definición que nos ahorrará notación.

Definición 14 *Para cualquier elemento $a \in A$ se define $C^*(a)$ como la subálgebra C^* de A generada por a.*

Una manera de construir subálgebras C^* de una C^*-álgebra A es tomar un subconjunto cualquiera $S \subset A$ y considerar

$$S^* = \{s^* : s \in S\}$$

$$T = S \cup S^*$$

$$B = \Big\{ \sum B_{i1,\ldots,ik} t_{i1,\ldots,ik} t_\alpha \in T \Big\}.$$

El conjunto B tiene a todas las posibles expresiones algebraicas que se pueden formar con los elementos de S y S^*. La cerradura de B, es una subálgebra C^* de A. En particular, el álgebra $C^*(a)$ es la cerradura del conjunto que se obtiene al tomar todas las posibles expresiones algebraicas que se pueden formar con a y a^*. Por expresiones algebraicas se entienden todos los monomios o palabras posibles de a y a^* y sus combinaciones lineales. El álgebra $C^*(a)$ es conmutativa si y solo si a es normal ($aa^* = a^*a$).

1.4. Teorema de Gelfand-Naimark

El teorema de Gelfand-Naimark es un resultado central en el que se basará este trabajo, básicamente establece que cualquier álgebra C^* conmutativa puede verse como el álgebra C^* que consta de las funciones continuas con valores en $\mathbb{C}$ definidas en un espacio topológico localmente compacto, cuando el álgebra C^* además tiene una unidad, este espacio topológico es compacto. A continuación se detalla la estructura de esta importante álgebra C^*.

Consideremos un espacio topológico compacto X, sea $C(X)$ el espacio de las funciones continuas $f : X \to \mathbb{C}$. En particular cualquier función constante es una función continua, de modo que $C(X)$ siempre es no vacío. Además dados $x, y \in X$, existe una función f tal que $f(x) \neq f(y)$, es decir, hay suficientes funciones continuas, esto nos permite distinguir los puntos de X.

El espacio vectorial complejo $C(X)$ tiene estructura de álgebra C^*. Con el producto usual de funciones complejas

$$fg(x) = f(x)g(x)$$

como producto algebraico es un álgebra asociativa, compleja, unital
$(1(x) = 1$ es la unidad) y conmutativa.

.

La operación $*$ está dada por la operación de conjugación compleja

$$f^*(x) = \overline{f(x)}.$$

Con la norma

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$$

es un álgebra de Banach.

En $C(X)$ se cumple la propiedad C^*,

$$\|f^* f\| = \|\overline{f} f\| = \||f|^2\| = \|f\|^2.$$

Teorema 1 *(Teorema clásico de Gelfand-Naimark) Para cada álgebra C^* unital y conmutativa A existe (módulo homeomorfismos) un único espacio topológico compacto X tal que A es isomorfo a $C(X)$.*

Si A no es un álgebra unital, la condición para el espacio X es que sea localmente compacto. En el presente trabajo trataremos con álgebras unitales, aunque inevitablemente algunas de sus subálgebras no serán unitales. Reservaremos las letras A y B para denotar álgebras C^* a menos que se especifique otra cosa.

1.5. Caracteres

En esta sección se ilustrará el modo de recuperar el espacio X a partir de la C^* -álgebra $C(X)$ por medio de los caracteres, sin embargo el concepto de caracter se introduce para cualquier álgebra C^* aunque no sea conmutativa.

Definición 15 *Un caracter es un funcional lineal no cero $\kappa : A \to \mathbb{C}$ que cumple*

1. $\kappa(fg) = \kappa(f)\kappa(g)$
2. $\kappa(f^*) = \overline{\kappa(f)}$.

Se puede probar que los caracteres son exactamente los homomorfismos unitales que van de A en $\mathbb{C}$.

En el caso conmutativo, los caracteres permiten recuperar el espacio del siguiente modo, sea $x_0 \in X$ fijo y considérese el caracter $\kappa_0 : C(X) \to \mathbb{C}$ como $\kappa_0(f) = f(x_0)$ para $f \in C(X)$, entonces κ_0 está únicamente determinado por x_0 y a su vez cada caracter $\kappa(f) = f(x)$ determina de forma única un $x \in X$, por eso podemos identificar a cada caracter con un punto del espacio X.

La propuesta de la geometría no conmutativa es extender el concepto de espacio en el caso de que tengamos un álgebra C^* no conmutativa. Para este fin, supondremos que ya tenemos un espacio cuyas características topológicas y geométricas quedarán definidas a partir del álgebra C^*, claro que ya no estamos hablando de un espacio formado de puntos como los espacios que conocemos, porque si en particular no existen caracteres en el álgebra, nuestro espacio no tendrá puntos. Cada característica topológica y geométrica de estos espacios que llamaremos cuánticos, estará definido en analogía al caso conmutativo por medio del álgebra C^*. También podemos partir de un espacio clásico y alterar la conmutatividad de su álgebra C^* de funciones continuas de manera que se pueda volver a obtener un álgebra C^* que sea no conmutativa. Luego podemos estudiar en qué cambian las propiedades topológicas y geométricas del espacio cuántico obtenido, a este procedimiento lo llamamos cuantización de un espacio clásico. El espacio que obtengamos será un espacio o una variedad en un sentido más amplio.

1.6. Distintas clases de elementos en un álgebra C^*

Las distintas clases de elementos que se describen a continuación definirán aspectos geométricos y topológicos del espacio asociado al álgebra C^*, otras veces por sus propiedades algebraicas juegan un papel importante en esta teoría. Primero enumeramos algunas de estas clases y después discutimos en detalle cómo comprometen ciertas propiedades en el espacio. Para esto hacemos analogía con el caso conmutativo. Dicho de otro modo, definiremos ciertos conceptos geométricos en el espacio cuántico, justo como los objetos algebraicos correspondientes en el caso conmutativo.

1. **Elementos normales**. Un elemento a es normal si

$$a^*a = aa^*$$

en este caso $C^*(a)$ la subálgebra C^* generada por a es conmutativa y por el teorema de Gelfand-Naimark se puede ver como $C(X)$ para algún espacio topológico compacto X.

2. **Elementos hermitianos**. Un elemento a es hermitiano si

$$a = a^*.$$

Los elementos hermitianos se identifican con variables físicas, algebraicamente son un caso particular de elementos normales. Cualquier elemento a del álgebra C^* se puede escribir como $a = x + iy$ con x y y hermitianos, donde

$$x = \frac{a + a^*}{2}$$

$$y = \frac{a - a^*}{2i}$$

$$a^*a = x^2 + y^2 + i(xy - yx)$$

de donde

$$a^*a + aa^* = 2(x^2 + y^2).$$

El elemento a es normal si y solo si $[x, y] = 0$. En general $[x, y] = xy - yx$ se llama el conmutador de x y y. En mecánica cuántica la relación $[x, y] = 0$ dice que x y y como observables[2] son mutuamente compatibles, es decir, existe un experimento cuántico en el que se puede medir a x y y. Por medio de los elementos hermitianos se introduce el concepto de positividad y se establece un orden parcial en el álgebra.

3. **Elementos invertibles**. Un elemento a es invertible si existe $a^{-1} \in A$ tal que

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

Los elementos invertibles forman un grupo que se denota por $\mathrm{GL}(A)$.

[2] Las observables son las variables que se pueden medir en un experimento.

4. **Elementos unitarios**. El elemento a es unitario si cumple

$$a^{-1} = a^*.$$

Los elementos unitarios forman el grupo $U(A)$ subgrupo de $GL(A)$. Los automorfismos de A también forman un grupo y existe un homomorfismo canónico que relaciona los elementos unitarios con algunos automorfismos de A. A su vez los automorfismos del álgebra A cuando es conmutativa están en correspondencia biunívoca con el grupo de simetrías[3] del espacio asociado X como veremos más adelante, y nosotros extendemos esta asociación cuando A es no conmutativa.

5. **Proyectores**. El elemento $p \in A$ es un proyector si cumple

$$p^2 = p^* = p.$$

Estos elementos se relacionan con los subconjuntos simultáneamente abiertos y cerrados del espacio asociado en el caso conmutativo, por lo que nos dan información sobre la conexidad de dicho espacio.

1.7. Álgebras C^* conmutativas

Si A y B son álgebras C^* conmutativas, por el teorema de Gelfand-Naimark existen espacios compactos X y Y, tales que A es isomorfa a $C(X)$ y B lo es a $C(Y)$, de modo que el siguiente análisis se hace directamente en estos espacios.

Si $\Phi : X \to Y$ es un mapeo continuo, induce un homomorfismo $*$ unital de $C(Y)$ a $C(X)$. En el siguiente diagrama se ilustra que cada función $g \in C(Y)$ induce por medio de Φ una función en $f \in C(X)$, con $f(x) = g(\Phi(x))$, a esto llamamos pull back. Las funciones en $C(X)$ así obtenidas toman los mismos valores en las fibras de Φ, es decir, son constantes sobre estas fibras, cuando Φ es suprayectiva tenemos una fibración de Y en X.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, equal] & \mathbb{C} \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\Phi"] & Y \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Proposición 2 *El mapeo $F = F_\Phi : B \to A$ (pull back) es un homomorfismo $*$ unital y además,*

1. *El mapeo Φ es inyectivo si y solo si F es suprayectiva.*

[3] Las simetrías que nos interesa estudiar en el caso de los espacios topológicos compactos son los homeomorfismos.

2. *El mapeo Φ es suprayectivo si y solo si F es inyectiva.*

Demostración Supongamos primero que Φ es un homeomorfismo entre X y $\mathrm{Im}(\Phi) \subset Y$, por lo que $\mathrm{Im}(\Phi)$ es un compacto y se puede interpretar a Φ como la inclusión de X en Y. La restricción $F_\Phi|_{\mathrm{Im}(\Phi)}$ es suprayectiva ya que cada función en $C(X)$ viene de la composición Φ seguida de una función en $C(Y)$ donde $f(x) = g(\Phi(x))$ para cada $x \in X$. Supongamos ahora que F es suprayectiva pero que Φ no es inyectiva, entonces existen $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, tales que $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$, al aplicar F_Φ se halla que $x_1 \notin \mathrm{Im}(\Phi)$ o $x_2 \notin \mathrm{Im}(\Phi)$ por lo que F no puede ser suprayectiva, es decir, existe una función $h \in C(X)$ tal que $h(x_1) \neq h(x_2)$ que no tiene una preimagen en $C(Y)$ por medio de F_Φ lo que contradice nuestra hipótesis, por lo tanto Φ es inyectiva.

∎

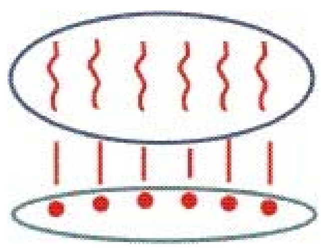


Figura 1.1: Fibración de espacios

Proposición 3 *Para todo $a \in A$, $a^{-1} \in C^*(a)$.*

Demostración Supongamos primero que a es normal, entonces se tienen las relaciones de conmutación

$$aa^* = a^*a, \qquad aa^{-1} = a^{-1}a, \qquad a^*(a^{-1})^* = (a^{-1})^*a^*$$

de las que se obtienen nuevas relaciones de conmutación:

$$a^{-1}a^* = a^*a^{-1}, \qquad a^{-1}(a^*)^{-1} = (a^*)^{-1}a^{-1}.$$

Considérense $S = \{a, a^{-1}\}$ y B la subálgebra C^* generada por S. Con las nuevas relaciones de conmutación B resulta ser un álgebra C^* conmutativa. Por el teorema de Gelfand-Naimark existen dos espacios topológicos compactos X y Y tales que $C^*(a)$ es isomorfo a $C(X)$ y B es isomorfo a $C(Y)$, de modo que se tiene una inclusión de $C(X)$ en $C(Y)$ y una fibración de Y en X. Pero si $a \in C^*(a)$ por ser una función constante sobre las fibras, entonces también debe serlo $1/a$, por lo tanto $a^{-1} \in C^*(a)$.

En el caso en que a no es normal, construimos el elemento hermitiano

$$b = a^* a$$

que además es invertible por ser producto de elementos invertibles, entonces $C^*(b) \subseteq C^*(a)$, $(a^*a)^{-1} \in C^*(b)$. Como $(a^*a)^{-1}a^* = a^{-1}$ se concluye que $a^{-1} \in C^*(a)$.

■

1.8. Operadores acotados en un espacio de Hilbert

Sea H un espacio de Hilbert y $B(H)$ el espacio de los operadores acotados en H, $B(H)$ resulta ser un álgebra C^* .

Definición 16 *Un operador $a \in B(H)$ es acotado si cumple*

$$\|a\| = \sup \frac{\|a\psi\|}{\|\psi\|} = \sup_{\psi \in S(H)} \|a\psi\| < \infty$$

donde $S(H)$ es el conjunto de los vectores de norma 1.

El producto algebraico se introduce en $B(H)$ por medio de la composición de operadores, con el que resulta ser un álgebra asociativa, compleja y unital.

El operador $* : B(H) \to B(H)$ que asigna a cada $a \in B(H)$ su operador adjunto a^*, es una involución en $B(H)$. La relación entre un operador a y su adjunto a^* se define por:

$$\langle a\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, a^* \varphi \rangle$$

donde ψ, $\varphi \in H$. Otras formas equivalentes de calcular la norma de un operador a son las siguientes:

$$\|a\| = \sup_{\varphi,\psi \in H} \frac{|\langle a\psi, \varphi \rangle|}{\|\psi\|\|\varphi\|} = \sup_{\varphi,\psi \in S(H)} |\langle a\psi, \varphi \rangle|.$$

Proposición 4 *En $B(H)$ se cumple la propiedad C^* .*

Demostración

$$\|a^*a\| = \sup_{\varphi,\psi \in S(H)} |\langle a^*a\psi, \varphi \rangle| = \sup_{\varphi,\psi \in S(H)} |\langle a\psi, a\varphi \rangle|$$

$$\geq \sup_{\varphi \in S(H)} |\langle a\varphi, a\varphi \rangle| = \sup_{\varphi \in S(H)} \|a\varphi\|^2 = \|a\|^2$$

de donde

$$\|a^*a\| \geq \|a\|^2$$

pero como hemos demostrado que $\|a\| = \|a^*\|$, se tiene

$$\|a^*a\| \leq \|a\|\|a^*\| = \|a\|^2$$

por la desigualdad multiplicativa de la norma, de modo que

$$\|a^*a\| \leq \|a\|^2$$

y por lo tanto

$$\|a^*a\| = \|a\|^2,$$

se cumple la propiedad C^*.

■

Si $\dim H = n$, todos los operadores son acotados y por medio de una base ortonormal $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ se pueden hacer las identificaciones H con $\mathbb{C}^n$ y $B(H)$ con $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se tiene el caso trivial conmutativo cuando $n = 1$, en el cual $\mathcal{M}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$; y como $\mathbb{C}$ es un álgebra C^* conmutativa, queda identificado con $C(X)$, donde X consta de un solo punto. Para $n > 1$ el álgebra C^* obtenida es no conmutativa. El operador adjunto $*$ se traduce en lenguaje de matrices al operador que manda cada $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en su matriz adjunta B^*.

Cuando H es de dimensión finita, la C^*-álgebra $A = B(H)$ es isomorfa a $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ para $n = \dim H$. Si $\mathrm{Det}[\lambda t - a] = 0$, a es no invertible y su espectro $\sigma(a)$ (el conjunto de los valores complejos λ tales que el operador $\lambda 1 - a$ es no invertible) consta exactamente de los valores propios de $[a]$ (la matriz asociada con el elemento a) por lo que $\mathrm{card}[\sigma(a)] \leq n$, pero por el teorema fundamental del álgebra, $\sigma(a) \neq \emptyset$.

Suponiendo que $A = B(H)$ y $B \subset A$ es una subálgebra C^* , hay una “fibración” del espacio asociado a A en el espacio asociado a B, encontrar subálgebras de A equivale a encontrar fibraciones.

La C^*-álgebra $B(H)$ es un ejemplo sumamente importante gracias al siguiente teorema.

Teorema 5 *Teorema de Gelfand y Naimark. Cualquier álgebra C^* se puede ver como subálgebra de $B(H)$ para algún espacio de Hilbert H.*

La demostración de este teorema se expone mas adelante, ya que se necesita desarrollar antes la teoría de representaciones de álgebras C^* y estados, con esta demostración finaliza la sección referente al concepto de estado.

1.9. Espectro de los elementos de un álgebra C^*

Antes de continuar con la descripción de los tipos de elementos y homomorfismos más importantes en un álgebra C^* debemos introducir un concepto importante que nos ayudará en su estudio que es el espectro.

Si $\|a\| < 1$, $1 - a$ es invertible, ya que

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots \tag{1.1}$$

está bien definido gracias a que la siguiente serie converge:

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} a^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a\|^k \leq \frac{1}{1 - \|a\|} \tag{1.2}$$

esto último es consecuencia de la desigualdad del triángulo y la desigualdad multiplicativa de la norma. Como la serie (1.2) converge esto quiere decir que $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ es de Cauchy y por lo tanto converge a algún elemento de A que define a $1/(1-a)$ por eso está bien definido.

Proposición 6 *El conjunto* $\mathrm{GL}(A)$ *de los elementos invertibles en* A *es abierto.*

Demostración Sea b invertible, entonces $b + a = b(1 + b^{-1}a)$. Si $\|b^{-1}a\| < 1$ el elemento $1 + b^{-1}a$ es invertible, pero entonces $b + a$ también es invertible por ser producto de elementos invertibles, entonces la bola de radio $1/\|b^{-1}\|$ con centro en b está contenida en el conjunto de los elementos invertibles, y por lo tanto el conjunto de los elementos invertibles en A es abierto.

■

De aquí en adelante escribiremos simplemente $\lambda - a$ en lugar de $\lambda 1 - a$.

Definición 17 *Dada una C^*-álgebra A, considérese $\lambda \in \mathbb{C}$. Se define el conjunto resolvente de a como*

$$\rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - a \text{ es invertible}\}.$$

Si $\|a\| < 1$, el elemento $1 - a$ es invertible y reescribiendo $\lambda - a = \lambda(1 - a/\lambda)$ se ve que si $|\lambda| > \|a\|$ el elemento $\lambda - a$ es invertible.

Proposición 7 *Para todo $a \in A$, el conjunto $\rho(a)$ es abierto.*

Sea

$$\Gamma_a(\lambda) : \rho(a) \to A$$

definida por

$$\Gamma_a(\lambda) = \frac{1}{\lambda - a}$$

esta función se llama función resolvente asociada al elemento a, y está bien definida solo en el conjuto $\rho(a)$. La función resolvente es una función holomorfa en un sentido generalizado [9], definida en un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ y que toma valores en un espacio de Banach que en este caso es la C^*-álgebra A.

Demostración Para mostrar que es holomorfa basta exhibir su desarrollo de Taylor [3].

Dado $\lambda_0 \in \rho(a)$

$$\lambda - a = (\lambda - \lambda_0) + (\lambda_0 - a) = (\lambda_0 - a)\left(1 - \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - a}\right)$$

$$= (\lambda_0 - a)(1 - (\lambda_0 - \lambda)\Gamma_a(\lambda)).$$

El desarrollo de Taylor de la función resolvente $\Gamma_a(\lambda)$ alrededor de λ_0 es

$$\Gamma_a(\lambda) = \sum_{k \geq 0} (\lambda_0 - \lambda)^k \Gamma_a^{k-1}(\lambda_0)$$

con radio de convergencia $1/\|\Gamma_a(\lambda_0)\|$.

■

Proposición 8 *El conjunto $\rho(a)$ no cubre todo $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C} \setminus \rho(a) \neq \emptyset$.*

Demostración Supóngase que $\rho(a) = \mathbb{C}$, entonces cuando $\lambda_0 \to \infty$ se ve inmediatamente que $\|\Gamma_a(\lambda)\| \to 0$, pero esto quiere decir que $\Gamma_a(\lambda)$ es una función acotada, y por el teorema de Liouville[4] tendría que ser constante, lo cual es falso ya que muestra una dependencia evidente de λ, por lo tanto $\mathbb{C} \setminus \rho(a) \neq \emptyset$.

■

Definición 18 *El conjunto $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$ se llama el espectro de a.*

El conjunto $\sigma(a)$ además de ser no vacío, es cerrado por ser complemento de un abierto y también es acotado ya que si $\|a\| < |\lambda|$, entonces $\lambda - a$ es invertible. De éstas dos últimas propiedades se deduce que para cada $a \in A$, el conjunto $\sigma(a)$ es compacto.

[4] Teorema de Liouville. Si la función f es holomorfa y acotada entonces es constante.

Definición 19 *Se define el radio espectral de un elemento $a \in A$ como*

$$r(a) = \text{ínf}\{r \in \mathbb{R}^+ : r \textit{ es el radio de un círculo en } \mathbb{C} \textit{ que contiene a } \sigma(a)\}.$$

Obsérvese que para todo $a \in A$ se cumple $r(a) \leq \|a\|$ y cuando a es hermitiano $r(a) = \|a\|$.

Propiedades del espectro.

1. $\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)}$
2. $\rho(a^*) = \overline{\rho(a)}$
3. $\sigma(z + a) = z + \sigma(a)$ Propiedad de traslación del espectro

Obsérvese que las propiedades 1 y 2 son equivalentes.

Proposición 9 *Dados $a, b \in A$*

$$\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\} \quad \forall a, b \in A \tag{1.3}$$

Demostración La prueba se basa en la siguiente igualdad algebraica

$$(\lambda - ab)\Big(1 + a\frac{1}{\lambda - ba}b\Big) = \lambda \tag{1.4}$$

ya que si $\lambda \neq 0$ y $\lambda - ba \neq 0$ entonces $\lambda \notin \sigma(ba)$, pero de la ecuación (1.4), se sigue que $\lambda - ab$ es invertible y

$$(\lambda - ab)^{-1} = 1 + a\frac{1}{\lambda - ba}b,$$

por lo tanto $\lambda \notin \sigma(ab)$ y se cumple (1.3).

■

Ejemplo Aquí se presenta una aplicación del espectro en el caso más sencillo posible en mecánica cuántica del movimiento en una dimensión de una partícula, donde $\hat{p}$ es el operador momento y $\hat{x}$ la posición de la partícula, donde $\hat{p}$ y $\hat{x}$ satisfacen la relación fundamental de conmutación, suponiendo que podemos realizar estas relaciones con operadores acotados, tendríamos lo siguiente,

$$[\hat{p}, \hat{x}] = \frac{\hbar}{i}1 \text{ si y solo si } \hat{p}\hat{x} = \frac{\hbar}{i} + \hat{x}\hat{p}$$

$$\sigma(\hat{p}\hat{x}) = \frac{\hbar}{i} + \sigma(\hat{x}\hat{p})$$

entonces $\sigma(\hat{x}\hat{p})$ es invariante bajo traslaciones por $\hbar/i$, lo que quiere decir que $\hat{x}$ y $\hat{p}$ no son operadores acotados simultáneamente, porque de serlo el espectro tendría que ser acotado. Se puede hacer una reformulación de la mecánica cuántica en términos de operadores acotados, en particular se pueden considerar los operadores unitarios

$$\hat{u} = e^{is\hat{x}}$$

$$\hat{v} = e^{it\hat{p}}$$

donde t y s son escalares reales. Estos operadores encierran también la información física de $\hat{x}$ y $\hat{y}$, y cumplen la relación de conmutación

$$\hat{v}\hat{u} = z\hat{u}\hat{v} \tag{1.5}$$

donde z es un número complejo de módulo 1. Los operadores $\hat{u}$ y $\hat{v}$ junto con las condiciones de unitaridad de $\hat{u}$ y $\hat{v}$ y la relación (1.5) generan un álgebra no conmutativa que corresponde al toro cuántico, el cual se analiza con todo detalle casi al final de este trabajo como un ejemplo en el cual se aplica la teoría que se desarrolla en el presente trabajo.

$\diamond$

1.9.1. Los caracteres y el espectro

Contando con la definición de espectro se pueden analizar aún más los caracteres. En un álgebra C^* unital y conmutativa A, siempre existe un isomorfismo entre $\sigma(A)$ y el conjunto de los homomorfismos no triviales de A en $\mathbb{C}$. Cada elemento de $\sigma(A)$ pertenece a la bola unitaria del espacio dual de A (el espacio de los funcionales lineales de A en $\mathbb{C}$) y $\sigma(A) \cup \{0\}$ es un subespacio cerrado en la topología débil $*$ de A^* que consta de los funcionales k que cumplen:

$$k(xy) = k(x)k(y),$$

por lo tanto $\sigma(A)$ tiene estructura de espacio compacto con la topología débil $*$, estos homomorfismos k son precisamente los caracteres de A. El isomorfismo está dado por la transformada de Gelfand en A. Luego, el espacio compacto es $X = \sigma(A)$ y $C(X) = C(\sigma(A))$, pero esto también se puede ver del siguiente modo, para cada $f \in C(X)$ (que se corresponde de forma única con algún $a \in A$) la ecuación $\lambda - f = 0$ determina los valores para los cuales $\lambda - f$ no es invertible. De modo que $\sigma(a) = f(X)$ es un compacto por ser f continua y X compacto. Al espacio asociado a un álgebra C^* conmutativa se le llama σA.

1.10. Cálculo funcional

Esta sección tiene el objetivo de construir un cálculo funcional que reproduzca el cálculo sobre las funciones continuas, y así poder trabajar todo el tiempo con el álgebra sin tener que pasar cada vez a $C(X)$; específicamente trabajaremos subálgebras C^* generadas por elementos normales ya que estas subálgebras son siempre conmutativas y tienen asociado un espacio topológico localmente compacto al que se llama también espectro de la subálgebra. Para desarrollar el cálculo funcional debemos recordar las siguientes propiedades de los elementos normales:

- La suma de elementos normales que conmutan entre si, es un elemento normal.
- El producto de elementos normales que conmutan entre si, es un elemento normal.
- Un múltiplo complejo de un elemento normal es también un elemento normal.

Teorema 10 *Teorema espectral. Dado el polinomio*

$$p(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \ldots + \alpha_n\lambda^n$$

para $a \in A$ se define el polinomio

$$p(a) = \alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \ldots + \alpha_n a^n$$

y siempre se cumple,

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)).$$

Demostración Esta es una prueba interesante para operadores normales. Se factoriza $p(\lambda)$ como el producto de k factores lineales, y se utiliza el hecho de que el producto de elementos que conmutan entre si, son invertibles si y solo si su producto es invertible, esto se ve más fácilmente haciendo la identificación de B con algún espacio topológico $C(X)$, donde B es el álgebra C^* conmutativa generada por los elementos que conmutan entre si. Si $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset C(X)$, el producto $f_1 \cdots f_n = 0$ si y solo si $f_i = 0$ para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$.

■

Si a es normal y los coeficientes de p son números reales, $p(a)$ es normal.

Gracias al teorema espectral se puede definir un cálculo funcional continuo para elementos normales. Si f es cualquier función continua definida en $\sigma(a)$ entonces por medio de la transformada de Gelfand $T(f)$ es un elemento en el álgebra C^*

que se puede tomar como $f(a)$, de este modo adquieren sentido las expresiones e^a, $\mathrm{sen}(a)$, $|a|$, $\sqrt{1+a^2}$, etc., que son funciones muy importantes en análisis complejo.

Una función f se dice real si su espectro es un subconjunto de $\mathbb{R}$, se dice unitaria si su espectro está contenido en el círculo unitario de $\mathbb{C}$ y positiva si su espectro es un subconjunto de $\mathbb{R}^+$.

Proposición 11 *Si a es hermitiano entonces $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*

1.10.1. Elementos positivos

Dado $a \in A$ las siguientes propiedades son equivalentes:

1. a es hermitiano y $\sigma(a) \subset \mathbb{R}^+$
2. $a = b^2$ para algún b hermitiano
3. $a = a^*$ y $\|t - a\| \leq t$ para cualquier $t \geq \|a\|$
4. $a = a^*$ y $\|t - a\| \leq t$ para algún $t > 0$

Si $a \in A$ satisface las condiciones anteriores se dice un elemento positivo (en símbolos $a \geq 0$). Por medio de los elementos positivos se puede ordenar parcialmente a A definiendo la relación $a \leq b$ siempre que $b - a \geq 0$.

Proposición 12 *Propiedad de sandwich. Si $0 \leq a \leq b$ entonces $c^*ac \leq c^*bc$ para cada $c \in A$ y $\|a\| \leq \|b\|$.*

Cuando se trata de un álgebra de operadores acotados en un espacio de Hilbert, los elementos positivos son aquellos operadores que cumplen $\langle ax, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$.

1.10.2. La norma está determinada por la estructura algebraica

Si a es un elemento normal entonces

$$r(a) = \|a\|. \tag{1.6}$$

Si a no es normal consideramos el elemento normal $b = a^*a$, de modo que $r(b) = r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$ y por lo tanto,

$$\|a\| = \sqrt{r(a^*a)}. \tag{1.7}$$

Las ecuaciones (1.6) y (1.7) nos dicen que la norma está completamente determinada por la estructura algebraica ya que la función raíz cuadrada se define por medio del cálculo funcional en términos de elementos del álgebra.

Una consecuencia de (1.7) es que los isomorfismos involutivos entre álgebras C^* son isometrías. Entonces las isometrías y homomorfismos de álgebras C^* coinciden y dada un álgebra involutiva no necesariamente existe una norma que la dote de una estructura C^* , pero en caso de que exista es única. La siguiente proposición también es una consecuencia de que la norma está determinada por la estructura algebraica.

Proposición 13 *Dadas dos C^*-álgebras A y B, si $F : A \to B$ es un homomorfismo, entonces F es un mapeo continuo.*

Demostración Si $\lambda - a$ es invertible en A entonces $F(\lambda - a)$ es invertible en B, es decir existe $(\lambda - F(a))^{-1}$, esto quiere decir que si $\lambda \in \rho(a)$ entonces $\lambda \in \rho(F(a))$, y si $\lambda \in \sigma(F(a))$ entonces $\lambda \in \sigma(a)$, en otras palabras $\sigma(F(a)) \subseteq \sigma(a)$ y esto implica que $r(F(a)) \leq r(a)$. Si a es normal $\|F(a)\| \leq \|a\|$ y si no es normal, el elemento normal $b = a^*a$ cumple $\|F(a^*a)\| \leq \|a^*a\|$. De modo que $\|F^*(a)F(a)\| \leq \|a\|^2$ y finalmente podemos concluir que $\|F^(a)\|^2 \leq \|a\|^2$ por lo que $\|F(a)\| \leq \|a\|$. Por lo tanto F es continua.

■

En particular, cuando $F : A \to A$ es un automorfismo, es un mapeo isométrico, es decir $\|F(a)\| = \|a\|$.

1.11. Proyectores

Definición 20 *Sea A un álgebra C^*, decimos que $p \in A$ es un proyector si cumple*

$$p^2 = p = p^*.$$

Los proyectores son otra clase de elementos en un álgebra C^*, cuando ésta es conmutativa, corresponden geométricamente a conjuntos simultáneamente abiertos y cerrados en el espacio asociado X. Estos conjuntos dan información acerca de la conexidad del espacio, cuando la topología del espacio se genera a partir de estos conjuntos el espacio se dice totalmente disconexo. Recordemos que dos subconjuntos E y $X \setminus E$ de X son simultáneamente abiertos y cerrados si y solo si la función

$$f : X \to \{0, 1\}$$

definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in E \\ 0 & \text{si} \quad x \notin E \end{cases}$$

es continua. En este caso la función f también cumple que $f^2 = f = f^*$, la primera igualdad nos dice que f es idempotente. En el caso clásico (conmutativo) la segunda igualdad siempre se cumple.

En un álgebra C^* no conmutativa seguiremos interpretando estos elementos como subconjuntos simultáneamente abiertos y cerrados en el espacio cuántico asociado. En mecánica cuántica, dado un proyector no trivial $p = p^2 = p^*$, los valores que toma su espectro $\sigma(p) = \{0, 1\}$ se pueden interpretar como tener o no, cierta propiedad.

Sea X un espacio compacto y $C(X)$ el espacio de las funciones continuas definidas en X con valores en $\mathbb{C}$; si X es conexo, no existen proyectores no triviales en $C(X)$, pero se pueden considerar otras funciones que correspondan a subconjuntos arbitrarios. Considérese el conjunto

$$\mathcal{M}_\infty(X) = \{f : f \text{ es medible y esencialmente acotada sobre } X\}.$$

Identificando f con g si $f = g$ fuera de un conjunto de medida cero, se obtiene una relación de equivalencia en $\mathcal{M}_\infty(X)$.

Definición 21 *Una función f es esencialmente acotada cuando es acotada, fuera de un conjunto de medida cero.*

Por medio de la norma del supremo esencial, y con el producto usual de funciones $\mathcal{M}_\infty(X)$ se convierte en un álgebra C^* conmutativa y se tiene la inclusión

$$C(X) \hookrightarrow \mathcal{M}_\infty(X).$$

A nivel de espacios la inclusión corresponde a una suprayección. Aplicando el teorema de Gelfand-Naimark se puede identificar a $\mathcal{M}_\infty(X)$ con algún espacio $\tilde{X}$, así que tenemos una fibración de $\tilde{X}$ en X, como los conjuntos medibles en X corresponden a conjuntos simultáneamente abiertos y cerrados en $\tilde{X}$,

$$\mathcal{M}_\infty(X) = C(\tilde{X})$$

la topología de $\tilde{X}$ se puede generar a partir de los conjuntos simultáneamente abiertos y cerrados, por lo tanto es totalmente disconexo.

1.12. Automorfismos y elementos unitarios

El estudio de los automorfismos de un álgebra C^* es relevante porque en el caso conmutativo la traducción algebraica de las simetrías del espacio son los automorfismos, y por lo tanto ellos representarán a las simetrías en nuestros espacios cuánticos. Esto es porque en un espacio topológico compacto las simetrías son los homeomorfismos del espacio en si mismo, y estos tienen como traducción al álgebra C^* homomorfismos biyectivos por ser biyectivos los homeomorfismos, así es como quedan asociados a los automorfismos del álgebra C^* y un poco más adelante se demostrará que todos los automorfismos en el caso de las álgebras de operadores acotados están determinados por los elementos unitarios, en este caso las simetrías se encuentran traducidas en el grupo de los elementos unitarios $U(A)$ y como consecuencia existen más simetrías en el caso no conmutativo que en el caso conmutativo.

Si $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ entonces $U(A) = U(n)$ es el conjunto de las matrices unitarias en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dado a hermitiano, $\|a\| < 1$, sea $u = a + i\sqrt{1-a^2}$, donde $\sqrt{1-a^2}$ se define por medio del cálculo funcional continuo. Recordando que si a es normal entonces $a = a^*$ si y solo si $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$, se infiere que a es unitario si y solo si $\sigma(a) \subset U(A)$.

Cualquier elemento hermitiano a cuya norma sea menor o igual que 1 se puede descomponer como suma de elementos unitarios. Haciendo
$u = a + i\sqrt{1-a^2}$, es fácil ver que

$$a = \frac{u + u^*}{2}.$$

De modo que cualquier elemento hermitiano, multiplicado por un escalar adecuado se puede escribir como suma de elementos unitarios, y por lo tanto cualquier elemento del álgebra C^* se puede escribir como combinación lineal de a lo más cuatro elementos unitarios. En este sentido los elementos hermitianos y los elementos unitarios generan a A.

Los elementos unitarios se relacionan con ciertos automorfismos mediante la existencia de un homomorfismo canónico $K : U(A) \to \mathrm{Aut}(A)$ que actúa del siguiente modo:

- K se define como $K(u) : a \mapsto uau^*$.
- K es homomorfismo ya que $ab \mapsto uabu^* = (uau^*)(ubu^*)$.
- De igual modo, $a^* \mapsto ua^*u^* = (uau^*)^*$.
- Se cumple, $K(u)^{-1} = K(u^*)$.
- Dados u, v, se cumple $K(uv) = K(u)K(v)$.

Estos mapeos se llaman automorfismos internos y claramente solo tiene sentido hablar de ellos cuando el álgebra es no conmutativa, en general no son los únicos automorfismos en el álgebra C^*. En los espacios clásicos solo se tienen las simetrías que no provienen de los elementos unitarios ya que la conjugación por cualquier elemento unitario resulta ser la identidad. En el caso de mecánica cuántica estándar se generan todas las simetrías por medio de los elementos unitarios ya que se trabaja con álgebras C^* de operadores acotados en un espacio de Hilbert.

1.13. Notación de Dirac

A lo largo de este trabajo se utilizará en diversas ocasiones el formalismo de Dirac, por lo que es necesario introducir la notación de Dirac de algunos conceptos en la teoría de espacios vectoriales de dimensión finita. Sea V un espacio unitario[5] con producto escalar $\langle\varphi|\psi\rangle$ sobre $\mathbb{C}$ de dimensión n, la notación de Dirac para un vector $\psi \in V$, $\psi \neq 0$ es:

$$\psi = |\psi\rangle$$

o bien coordenada a coordenada [6]

$$|\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\rangle$$

Si V^* es el espacio dual de V la notación de Dirac para $\gamma \in V^*$ es

$$\langle\gamma|.$$

Cada vector $\psi \in V$ induce un funcional lineal que se denotará por $\langle\psi|$ definido por

$$\langle\psi| : |\omega\rangle = \langle\psi|\omega\rangle$$

con $\omega \in V$. Por el teorema de representación de Riesz, para cada funcional lineal γ existe un único vector $\psi_\gamma \in V$ tal que $\gamma(\psi) = \langle\psi_\gamma|\psi\rangle$ para todo $\psi \in V$.

Por medio de una base ortonormal $(e_1, e_2, \ldots e_n)$ en V se puede establecer un isomorfismo de V con $\mathbb{C}^n$ en donde se tiene el producto escalar

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} b_i.$$

Por medio de cualquier isomorfismo $\Phi : V \to \mathbb{C}^n$ se puede inducir un nuevo producto escalar en V como

$$(\psi_1, \psi_2)_V = (\Phi(\psi_1), \Phi(\psi_2))_{\mathbb{C}^n}.$$

De esta manera cualquier espacio vectorial V se convierte en un espacio unitario.

Dada cualquier transformación lineal $T : V \to V$ el producto escalar

$$(\psi_1, T(\psi_2))$$

queda representado por el "bracket":

$$\langle\psi_1|T|\psi_2\rangle.$$

[5] Un espacio unitario es un espacio vectorial complejo dotado de un producto escalar.

[6] Hay distintas posibilidades para las coordenadas, que pueden ser desde coordenadas euclidianas y no euclidianas hasta valores en los niveles de energía de un átomo.

Finalmente, la forma sesquilineal dada por el producto tensorial se escribirá como

$$|\psi_1\rangle\langle\psi_2|$$

y se puede ver como una transformación lineal del modo siguiente:

$$|\psi_1\rangle\langle\psi_2|(|\psi_3\rangle) = |\psi_1\rangle\langle\psi_2|\psi_3\rangle.$$

1.14. Proyectores en $B(H)$

Si $p \in B(H)$ es un proyector, es decir, si $p^2 = p = p^*$, entonces $\mathrm{Im}(p)$ es un subespacio fijo para p y $\mathrm{Ker}(p)$ es el ortocomplemento de $\mathrm{Im}(p)$, de tal modo que $H = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$. Si los proyectores p y q son tales que $q = 1 - p$ entonces $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(1-p)$, $\mathrm{Im}(1-p) = \mathrm{Ker}(p)$ y se dicen ortogonales.

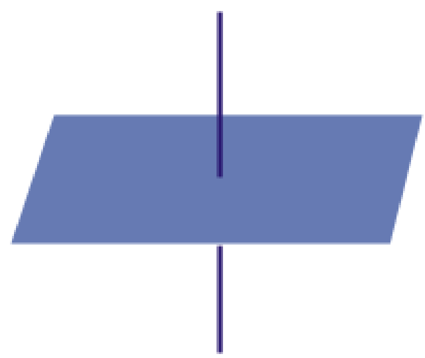


Figura 1.2: Proyectores ortogonales

Los subconjuntos cerrados del espacio asociado se interpretan como ideales bilaterales C^* cerrados (en particular son subálgebras C^*) y como hemos visto en el caso conmutativo hay otra forma de encontrar subconjuntos simultáneamente abiertos y cerrados por medio de los proyectores. Como podemos observar algunos aspectos geométricos encuentran varias formas de traducción dentro de la geometría no conmutativa. Esto también nos revela de algún modo que la geometría no conmutativa nos ofrece mayor riqueza que la geometría clásica.

Las propiedades geométricas de un espacio de Hilbert H tienen una traducción algebraica en términos de los proyectores.

Definición 22 *Se dice que P_1, $P_2 \in B(H)$ son ortogonales si*

$$P_1P_2 = 0 = P_2P_1$$

Geométricamente dos proyectores ortogonales tienen respectivamente subespacios fijos ortogonales entre si, como se ilustra en el dibujo anterior.

Proposición 14 *Dados los proyectores P y Q, su producto PQ es un proyector si y solo si $PQ = QP$.*

Demostración

$$PQ = (PQ)^2 = PQPQ = (PQ)^* = Q^*P^* = QP$$

■

1.15. Operadores compactos y operadores de rango finito

Cualquier automorfismo en la C^*-álgebra $B(H)$ preserva la estructura algebraica, en otras palabras preserva cada propiedad algebraica. En particular los automorfismos llevan operadores compactos en operadores compactos, y operadores de rango finito en operadores de rango finito, ya que tanto la propiedad de ser operador compacto como la de ser operador de rango finito se pueden formular en términos algebraicos. Los automorfismos también mandan los proyectores en proyectores.

Por ejemplo, los proyectores son una clase particular de operadores acotados, y se puede hacer una distinción entre ellos, en el sentido de que algunos proyectan sobre espacios mas grandes que otros.

Si p y q son proyectores tales que $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p)$, este hecho se traduce algebraicamente como

$$pq = qp = q.$$

Otro ejemplo es el de los proyectores mínimos.

Definición 23 *Se llaman proyectores mínimos aquellos proyectores que tienen como imagen un subespacio de dimensión 1.*

Aquí se utiliza la notación de Dirac para representar al proyector mínimo p,

$$|\psi\rangle\langle\psi| = p, \qquad \|\psi\| = 1.$$

Proposición 15 *El producto de dos proyectores mínimos es una diada.*

Demostración

$$p = |\psi\rangle\langle\psi| \qquad q = |\varphi\rangle\langle\varphi|$$

$$|\psi\rangle\langle\psi||\varphi\rangle\langle\varphi| = \langle\psi,\varphi\rangle|\psi\rangle\langle\varphi| \tag{1.8}$$

■

En el miembro izquierdo de la ecuación (1.8) queda un producto escalar en medio y del lado derecho una diada seguida de un producto escalar. Así pues los proyectores mínimos se pueden escribir en términos de diadas y esto quiere decir bajo los automorfismos las diadas se transforman en diadas y las combinaciones lineales de diadas se transforman en combinaciones lineales de diadas. Todas las combinaciones lineales de la forma

$$\sum |x\rangle\langle y|,$$

son operadores de rango finito.

Al tomar la cerradura del conjunto $\mathrm{Fin}(H)$ de los operadores de rango finito, se obtiene el conjunto de los operadores compactos que se denota por $K(H)$. De modo que los automorfismos transforman el álgebra de los operadores compactos en si misma.

Definición 24 *Un conjunto se dice precompacto cuando su cerradura es un compacto.*

Definición 25 *Un operador acotado, se dice compacto si transforma conjuntos acotados en conjuntos precompactos.*

Si H tiene dimensión finita, todos los operadores acotados son compactos. Los operadores compactos forman un ideal bilateral C^* dentro de $B(H)$.

1.16. Automorfismos y operadores unitarios en $B(H)$

Ahora vamos a ver que cada automorfismo en $B(H)$ está determinado por un elemento unitario, para ello consideremos una diada $|x\rangle\langle y|$ con x variable y y fijo que puede reescribirse en la forma $|u(x)\rangle\langle z|$ donde $u : H \to H$ es un automorfismo y $z \in H$ es fijo. Al calcular la suma

$$|x_1\rangle\langle y| + |x_2\rangle\langle y| = |x_1 + x_2\rangle\langle y|$$

se obtiene que u debe ser lineal

$$u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2)$$

y también biyectivo por ser automorfismo.

Proposición 16 *La transformación $u : H \to H$ preserva el producto escalar.*

Demostración

$$(|x_1\rangle\langle y|)^*(|x_2\rangle\langle y|) \xrightarrow{T} (|u(x_1)\rangle\langle z|)^*(|u(x_2)\rangle\langle z|)$$

donde T es un automorfismo, pero

$$(|x_1\rangle\langle y|)^* = |y\rangle\langle x_1|x_2\rangle\langle y| \xrightarrow{T} \langle x_1|x_2\rangle|z\rangle\langle z|$$

donde podemos observar que

$$|y\rangle\langle y| \xrightarrow{T} |z\rangle\langle z|,$$

ahora calculamos del lado derecho

$$(|u(x_1)\rangle\langle z|)^* = \langle u(x_1)|u(x_2)\rangle|z\rangle\langle z|$$

así hemos llegado a que

$$\langle u(x_1)|u(x_2)\rangle|z\rangle\langle z| = \langle x_1|z_2\rangle|z\rangle\langle z|$$

por lo tanto u es unitario (preserva el producto escalar).

■

Entonces dado cualquier automorfismo T

$$T(|x\rangle\langle y|) = u(|x\rangle\langle y|)u^*.$$

Como esto se cumple para las diadas entonces se cumple para las combinaciones lineales de diadas que son operadores de rango finito, y por lo tanto se ha demostrado que cada automorfismo de operadores compactos está determinado por un operador unitario.

Si tenemos otro operador arbitrario $a \in B(H)$. Podemos considerar el producto $a\kappa$ donde κ es un operador compacto, y como los operadores compactos forman un ideal bilateral $a\kappa \in K(H)$ y al aplicar un automorfismo T acabamos de mostrar que

$$T(a\kappa) = ua\kappa u^*$$

pero

$$T(a\kappa) = T(a)T(\kappa) = T(a)u\kappa u^*$$

entonces

$$ua\kappa u^* = T(a)u\kappa u^*$$

podemos cancelar u^*, de modo que

$$ua\kappa = T(a)u\kappa$$

ahora bien, si dos operadores cumplen la igualdad anterior para cualquier operador compacto κ entonces deben ser iguales entre si, por lo que

$$ua = T(a)u$$

esto es

$$T(a) = uau^*.$$

Por lo tanto se puede escribir cualquier automorfismo de $B(H)$ en términos de operadores unitarios. En particular si el operador unitario u tiene la propiedad

$$uau^* = a \text{ para todo } a \in B(H)$$

entonces u es de la forma $z\mathrm{I}$ con $|z| = 1$, es decir, es un operador escalar, y estos operadores escalares forman el kernel del homomorfismo canónico K Finalmente se concluye que

$$\mathrm{Aut}[B(H)] = U(B(H))/U(1).$$

Como consecuencia, en el caso de dimensión finita los automorfismos de matrices están determinados por las matrices unitarias.

1.17. Ideales C^* y álgebras cociente

1.17.1. Unidades aproximadas

Debido a que las álgebras C^* no se escapan de tener subálgebras C^* no unitales, como es el caso de $B(H)$, se tiene la necesidad de definir las unidades aproximadas, que en tales casos juegan el papel de la unidad.

Definición 26 *Sea Δ un sistema ordenado de índices y J un ideal derecho. Una unidad aproximada es una familia ordenada de elementos $\{E_\alpha\} \subset J$ con $\alpha \in \Delta$ y cada elemento cumple*

1. $E_\alpha \le E_\beta \quad$ *si* $\quad \alpha \le \beta$
2. $0 \le E_\alpha \le 1$
3. $\lim \|a - E_\alpha a\| = \lim \|(1 - E_\alpha)a\| = 0 \quad$ *para todo* $a \in J$.

Cada ideal izquierdo o derecho tiene al menos una unidad aproximada que se construye al tomar

$$\Delta = \{\text{Conjuntos finitos no vacíos en } J\},$$

$$E_\alpha = \frac{\displaystyle\sum_{a\in\alpha} aa^*}{\dfrac{1}{\mathrm{card}(\alpha)} + \displaystyle\sum_{a\in\alpha} aa^*} = 1 - \frac{\dfrac{1}{\mathrm{card}(\alpha)}}{\dfrac{1}{\mathrm{card}(\alpha)} + \displaystyle\sum_{a\in\alpha} aa^*},$$

si $\alpha \subset \beta$ entonces $E_\alpha \leq E_\beta$. Quedamos que α y β eran subconjuntos finitos en el ideal. El denominador es una expresión monótona, conforme aumenta a, el término $\sum_{a\in\alpha} aa^*$ crece y por lo tanto E_α se acerca a 1.

Proposición 17 *Si a y b son invertibles y $0 \leq a \leq b$ entonces $1/a \geq 1/b$.*

Demostración Como $0 \leq a \leq b$ implica $c^*ac \leq c^*bc$ para todo $c \in A$, hacemos $c = 1/\sqrt{b}$ para obtener $(1/\sqrt{b})a(1/\sqrt{b}) \leq 1$. A la derecha de la igualdad tenemos una constante, esto quiere decir que $\sigma((1/\sqrt{b})a(1/\sqrt{b})) \subset [0,1]$. Estamos de nuevo en el contexto Gelfand - Naimark, el espectro toma valores dentro del intervalo $[0,1]$ tenemos funciones sobre el espectro, entonces tomando inversos se obtiene

$$\sqrt{b}a^{-1}\sqrt{b} \geq 1,$$

aplicando una vez más la propiedad de sandwich con $c = 1/\sqrt{b}$ se deduce que $a^{-1} \geq b^{-1}$.

■

Esto demuestra que $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ es una hipersucesión monótona. Y hemos tenemos garantizado la existencia de unidades aproximadas. Una consecuencia importante es que cada ideal bilateral cerrado es necesariamente hermitiano.

1.17.2. Álgebras cociente

La idea principal de esta sección obtener a partir de un álgebra C^* dada, otras álgebras C^* factorizando por ideales C^*.

Definición 27 *Un ideal C^* es un ideal bilateral, no trivial, cerrado.*

En el caso conmutativo los ideales C^* se corresponden biunívocamente con los subconjuntos cerrados del espacio asociado X, ya que si $K \subset X$ es cerrado, y por lo tanto compacto, se define J_K como el conjunto de las funciones $f \in C(X)$ tales que $f(x) = 0$ para todo $x \in K$, y J_K es un ideal C^*, ya que es un ideal cerrado invariante bajo el operador $*$, es decir $J = J^*$, y para cada ideal J existe un único conjunto cerrado $K \subset X$ que lo reproduce, es decir que $J_K = J$.

El siguiente resultado se cumple también para álgebras C^* no conmutativas.

Proposición 18 *Sea J un ideal C^* en la C^*-álgebra A, entonces $J^* = J$.*

Demostración Consideremos una unidad aproximada E_α en el ideal J y $a \in J$ entonces $lim_\alpha\|a - aE_\alpha\| = 0$ pero entonces $lim_\alpha\|a^* - a^*E_\alpha\| = 0$, pero $a^*E_\alpha \in J$, y como a^* está arbitrariamente cerca del ideal, se tiene $a^* \in J$ porque J es cerrado.

■

Al factorizar la C^*-álgebra A por J (un ideal C^*), se obtiene un álgebra $*$ de Banach A/J. Y la expresión general para la norma de cualquier $[a] \in A/J$ queda como

$$\|[a]\| = \inf_{j \in J} \|a + j\|$$

o bien

$$\|[a]\| = \lim_{\alpha} \|a - E_\alpha a\|$$

donde E_α es una unidad aproximada en A/J. También se puede ver que la norma en A/J cumple la propiedad C^*, ya que

$$\|[a]\|^2 = \lim_{\alpha} \|a - E_\alpha a\|^2 = \lim_{\alpha} \|(a - E_\alpha)(a - E_\alpha)^*\| \leq \lim_{\alpha} \|aa^* - E_\alpha aa^*\| =$$

$$\|[aa^*]\| \leq \|[a]\|\|[a^*]\|,$$

por lo que

$$\|[a]\|^2 \leq \|[a][a]^*\|,$$

pero

$$\limsup_{\alpha} \|a - E_\alpha a\| = \limsup_{\alpha} \|\tilde{a} - E_\alpha \tilde{a}\| \leq \inf \|\tilde{a}\| = \|[a]\|$$

donde $\tilde{a} = a + j$. Sin embargo siempre se tiene,

$$\liminf_{\alpha} \|a - E_\alpha a\| \geq \|[a]\|,$$

por lo tanto

$$\limsup_{\alpha} \|a - E_\alpha\| = \liminf_{\alpha} \|a - E_\alpha\| = \|[a]\|.$$

La conclusión es que A/J es un álgebra C^*.

Teorema 19 *Teorema de factorización de homomorfismos entre álgebras C^*. Sean A y B álgebras C^* unitales y $\phi : A \to B$ un monomorfismo, entonces ϕ es una isometría entre A y $\phi(A)$, es decir*

$$\|\phi(a)\| = \|a\| \quad \textit{para todo } a \in A.$$

Demostración De la proposición (13), por ser homomorfismo ϕ es continua. Suponiendo que $A = C(X)$ y $B = C(Y)$ son álgebras C^* conmutativas, entonces por la proposición (2) a nivel de espacios se tiene una fibración de B en A y Φ es pullback. Entonces las imágenes de funciones sobre X son las funciones sobre Y constantes sobre las fibras, al tomar la norma de una de estas funciones que es el máximo de los valores absolutos que toma la función, vemos que a lo largo de las fibras estos valores son constantes. Ahora bien, si A y B son no conmutativas, tomamos a arbitrario y consideramos el elemento hermitiano a^*a, que genera un álgebra C^* conmutativa, sean $A' = C^*(a^*a)$ y $B' = C^*(\Phi(a^*a))$ que también es una subálgebra C^* conmutativa de B. Se obtiene el monomorfismo restringido $\phi : A' \to B'$, entonces

$$\|\phi(a^*a)\| = \|a^*a\|$$

pero

$$\|\phi(a^*a)\| = \|\phi(a)^*\phi(a)\| = \|\phi(a)\|^2$$

y

$$\|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Por lo tanto

$$\|\phi(a)\| = \|a\|$$

■

Esto tiene como consecuencia que la imagen de A a través de ϕ es completa en la norma de B, de modo que $\phi(A)$ es una subálgebra C^* siempre que ϕ sea un monomorfismo.

Si ϕ es un homomorfismo no inyectivo, considerando el ideal $J = \mathrm{Ker}(\phi)$, y factorizando A por J, se construye el homomorfismo inyectivo

$$\tilde{\phi} : A/J \to B,$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\phi"'] & A/J \arrow[d, "\tilde{\phi}"'] \\ B \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd}$$

entonces $\tilde{\phi}$ es monomorfismo, es isometría y $\mathrm{Im}(\tilde{\phi}) = \mathrm{Im}(\phi)$ es una subálgebra C^* dentro de B.

1.17.3. Álgebra de Calkin

Teorema 20 *Teorema de Calkin. El único ideal C^* no trivial de $B(H)$ es $K(H)$.*

Demostración Sea H un espacio de Hilbert separable, si $\dim B(H)$ es infinita, al menos existe un ideal no trivial que es precisamente $K(H)$, por lo que es legítimo considerar un ideal no trivial $J \lhd B(H)$ y sea $a \neq 0 \in J$, entonces

$$|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2|a|\varphi_3\rangle\langle\varphi_4| \in J, \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in H,$$

esta expresión se puede manipular para mostrar que todas las diadas están en J y por lo tanto también los operadores de rango finito lo están, $\mathrm{Fin}(H) \subset J$, sin embargo $\mathrm{Fin}(H) \neq J$ ya que $\mathrm{Fin}(H)$ no es cerrado, de hecho $\overline{\mathrm{Fin}(H)} = K(H) \subseteq J$, de donde se concluye que $K(H)$ es el mínimo ideal C^* no trivial en $B(H)$.

Sea $a \in B(H)$ y consideremos su descomposición polar $a = u|a|$, cuando a es invertible u es un elemento unitario y $|a| = \sqrt{a^*a}$, cuando a no es invertible u es una isometría parcial $u : |a|\psi \mapsto a\psi$ considerando el subespacio generado por los vectores $a\psi$:

$$\||a|\psi\|^2 = (|a|\psi, |a|\psi) = (\psi, |a|^2\psi) = (\psi, a^*a\psi) = (a\psi, a\psi) = \|a\psi\|^2$$

y definiendo u en el ortocomplemento de este subespacio como 0.

Observemos que $a \in J$ implica $|a| \in J$, ya que $a^*a \in J$ y $\sqrt{a^*a} \in J$ por ser J un ideal cerrado. Pero a no puede ser invertible si está en un ideal no trivial, porque entonces sucedería que $aa^{-1} = 1 \in J$, lo cual implicaría que $J = B(H)$.

Entonces suponiendo que a no es invertible, $0 \in \sigma(a)$. Si a además es normal podemos considerar un calculo funcional continuo, y todas las posibles funciones continuas valuadas en a, pero estas funciones no pueden ser funciones escalares porque saldrían del ideal, solo pueden ser expresiones algebraicas con a y sus límites, esto quiere decir que para dada $f : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ tendríamos que $f(0) = 0$, de modo que $f(a) \in J$. Si a no es un operador compacto, es decir si J es un ideal mas grande que $K(H)$, entonces su módulo $|a|$ es un operador positivo no compacto en J.

Entonces se puede construir una función continua en la parte positiva de $\sigma(a)$ tal que $f(0) = 0$ y parte del espectro donde la función f es constante digamos 1 corresponde a un subespacio propio de dimensión infinita $K \subset H$. La característica de los operadores compactos es que no permiten tomar una parte del espectro estrictamente positiva que corresponda a un subespacio espectral de dimensión infinita, la infinidad está toda contenida en el cero.

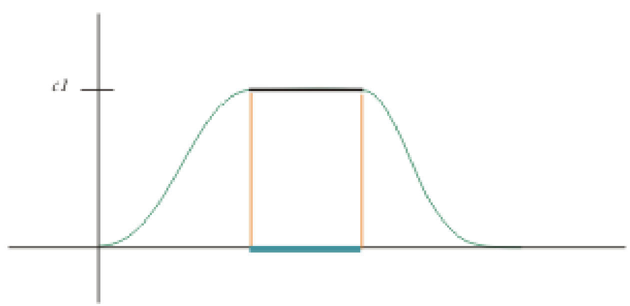


Figura 1.3: $f(a) \in J$

Consideremos esa función y observemos que como H es separable este subespacio de dimensión infinita K es tal que existe una isometría parcial de H en este espacio, sea $V : H \to H$ la isometría parcial, al tomar el operador $V^*f(a)V$, se ve inmediatamente que es en realidad el operador escalar $c1$ pero como $f(a) \in J$ se tiene que $c1 = V^* f(a) V \in J$, por lo tanto $J = B(H)$ lo que contradice nuestra hipótesis de que J era un ideal no trivial, y esto demuestra que el único ideal C^* no trivial de B(H) es K(H).

■

Si H es de dimensión finita, $B(H)$ no tiene ideales no triviales porque $\mathrm{Fin}(H) = K(H) = B(H)$, en particular $B(H)$ es isomorfo a $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, y concluimos que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es un álgebra C^* simple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 28 *Se define el álgebra de Calkin como* $\mathrm{Cal}(H) = B(H)/K(H)$

El álgebra de Calkin es un álgebra simple, en otras palabras, no tiene ideales no triviales.

También podemos observar que el espacio cuántico asociado a $B(H)$ cuando H es de dimensión infinita, no tiene puntos, ya que los ideales en el caso conmutativo se corresponderían biunívocamente con los subconjuntos cerrados del espacio asociado X, y los puntos deberían ser traducidos por ideales maximales, que resultarían ser de codimensión 1, hecho que se puede ver a partir de la sucesión corta exacta[7] que induciría un caracter $\kappa : B(H) \to \mathbb{C}$,

$$0 \to \mathrm{Ker}(\kappa) \to B(H) \to \mathbb{C} \to 0$$

donde

$$\mathbb{C} = B(H)/\mathrm{Ker}(\kappa)$$

sin embargo aquí no tenemos ideales con tal característica porque el único ideal no trivial es $K(H)$, y por lo tanto no se tienen "puntos".

Esta es una oportunidad de mencionar el efecto "tenedor" que tiene la interpretación de los distintos entes algebráicos una C^*-álgebra como propiedades de un espacio cuántico. Si se consideran los proyectores en $B(H)$ que ya hemos dicho que corresponden a subconjuntos simultáneamente abiertos y cerrados, por ser en particular cerrados cumplen una condición geométrica mas fuerte que los ideales C^*, y en $B(H)$ tenemos una infinidad de proyectores cuando H es de dimensión mayor o igual que 2, lo que nos lleva a interpretar que el espacio de que es totalmente disconexo.

[7]Si S y T son dos mapeos lineales tales que $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Ker}(T)$, el par (S, T) se dice exacto. Una sucesión exacta es una sucesión de mapeos lineales en la que cada par de mapeos adyacentes es exacto.

Operadores de Fredholm

Los operadores de Fredholm fueron introducidos por I. Fredholm en el estudio de ecuaciones integrales, estos operadores están ligeramente desviados de ser isomorfismos, y esta desviación se puede formalizar en términos de su kernel y su imagen. Suponiendo que X y Y son subespacios de H y existen $V \subset X$ y $W \subset Y$ de tal modo que $X = \mathrm{Ker}(a) \oplus V$y $Y = \mathrm{Im}(a) \oplus W$, entonces $Y/\mathrm{Im}(a)$ es isomorfo a W y $a : V \to \mathrm{Im}(a)$ es un isomorfismo, la medida de desviación de a de ser un isomorfismo tiene que ver con los números $\dim(\mathrm{Ker}(a))$ y $\dim(W)$, los operadores de Fredholm son aquellos para los cuales estos dos números son finitos. En particular cualquier operador invertible es un operador de Fredholm. A continuación presentamos otras definiciones para los operadores de Fredholm. Sea $[a] \in \mathrm{Cal}(H)$ invertible, entonces $[a][b] = 1 - [b][a]$. Esto quiere decir que los elementos invertibles en $\mathrm{Cal}(H)$ vienen de operadores en $B(H)$ invertibles módulo operadores compactos.

Definición 29 *El operador $a \in B(H)$ es de Fredholm si existe $b \in B(H)$ tal que $ab - 1$ y $ba - 1$ son operadores compactos.*

Una definición equivalente es la siguiente.

Definición 30 *El operador a es de Fredholm si su proyección en $\mathrm{Cal}(H)$ es un elemento invertible, es decir si $[a] = a + K(H)$ es invertible en $\mathrm{Cal}(H)$.*

Una definición equivalente y mas geométrica es la siguiente.

Definición 31 *El operador $a \in B(H)$ es de Fredholm si*

$$\begin{gathered} \dim \mathrm{Ker}(a) < \infty \\ \overline{\mathrm{Im}(a)} = \mathrm{Im}(a) \\ \mathrm{Im}(a)^{\perp} = \mathrm{Ker}(a^*) \quad \textit{tiene dimensión finita} \end{gathered}$$

Los operadores de Fredholm son operadores invertibles en $\mathrm{Cal}(H)$, y forman el grupo $\mathrm{GL}[\mathrm{Cal}(H)]$ que se obtiene factorizando los operadores de Fredholm por operadores compactos. Se puede demostrar que si a es de Fredholm si y solo si a^* es de Fredholm.

Para cualquier operador existe un número importante que es el índice.

Definición 32 *Se define el índice de a como*

$$\mathrm{ind}(a) = \dim \mathrm{Ker}(a) - \dim(Y/\mathrm{Im}(a))$$

Se puede demostrar que $\mathrm{ind}(a) = \dim \mathrm{Ker}(a) - \dim \mathrm{Ker}(a^*)$. El índice tal como se ha definido resulta ser un isomorfismo entre $\mathrm{GL}[\mathrm{Cal}(H)]$ y $\mathbb{Z}$.

Algunas propiedades importantes del índice son

- $\mathrm{ind}(a^*) = -\mathrm{ind}(a)$
- $\mathrm{ind}(ab) = \mathrm{ind}(a) + \mathrm{ind}(b)$
- Si $\mathrm{ind}(a) = \mathrm{ind}(b)$ entonces $[a]$ y $[b]$ viven en la misma componente conexa de $\mathrm{GL}[\mathrm{Cal}(H)]$.

La proyección canónica $\pi : B(H) \to \mathrm{Cal}(H)$ cumple

$$\pi\{\mathrm{GL}[B(H)]\} = \mathrm{ind}^{-1}(0).$$

Ejemplo
Sea $H = \ell_2(\mathbb{N})$, y $\{e_1, e_2, \ldots\}$ una base de H. Definimos el operador de *shift* $u : H \to H$ como

$$u(e_1) = e_{i+1}$$

Obsérvese que

$$u^*(e_{i+1}) = e_i \qquad u^*(e_1) = 0$$

Podemos observar que el operador u es casi unitario $\mathrm{Ker}(u^*) = e_1$, y no es un operador normal:

$$u^*u = 1, \qquad uu^* = 1 - |e_1\rangle\langle e_1|$$

Tenemos el álgebra C^* no conmutativa $C^*(u) = A$. Ahora vamos a ver que $K(H) \subset A$, para dicho propósito se representará a u por medio de la matriz infinita cuyas entradas son todas cero y debajo de la diagonal principal valen 1,

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

en general

$$u^{l-1}(1 - uu^*)(u^*)^{k-l} : e_k \mapsto e_l.$$

Sea J el ideal C^* generado por el operador $1 - uu^*$. Intuitivamente considerando el álgebra cociente asociada, se pide la conmutatividad de u y u^*. Se tiene la sucesión corta exacta,

$$0 \to J \to A \to A/J \to 0$$

Por lo tanto A/J es un álgebra conmutativa que se puede interpretar como el espacio topológico compacto $\sigma([u])$, como u es unitario, $\sigma([u])$ es parte del círculo unitario en el plano complejo.

Proposición 21 *El espectro de $[u]$ es todo el círculo unitario en $\mathbb{C}$.*

Demostración Sea $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, si se define $T_z : H \to H$ como $T_z e_i = z^i e_i$, donde $|T_z e_i| = 1$, se puede ver que $T_z u = zuT_z$, lo que nos dice que T y u conmutan módulo z, pero entonces $T_z u T_z^* = zu$, este es un automorfismo de A, y el ideal J se proyecta de tal modo que el automorfismo se preserva en la factor álgebra proyecta a:

$$\phi : A \to A \qquad \phi(a) = T_z a T_z^* \qquad \phi(J) = J$$

por lo tanto

$$\tilde{\phi} : A/J \to A/J \qquad \tilde{\phi}([u]) = z[u]$$

ya que $\phi(u) = zu$.
Por ser ϕ un automorfismo el espectro es el mismo multiplicado por z y como z es arbitrario $\sigma([u])$ es todo el círculo.

■

Las combinaciones lineales de los elementos de la forma $u^{p-1}(1 - uu^*)(u^*)^{k-l} : e_k \mapsto e_l$ viven dentro del ideal J. Al considerar los límites de estas matrices se cubre a todo $K(H)$, es decir $K(H) = J$ y se obtiene la sucesión corta exacta a la que se llama extensión de Toepliz:

$$0 \to K(H) \to A \to \mathbb{C}[\mathrm{U}(1)] \to 0.$$

◇

Capítulo 2

Representaciones y Estados

2.1. Teoría de representaciones

Una representación es un homomorfismo $D : A \to B(H)$, donde A es un álgebra C^* y $B(H)$ es el álgebra C^* de operadores acotados en un espacio de Hilbert. Si A no es unital se pide adicionalmente la condición

$$\overline{\left\{ \sum D(a)\psi : a \in A, \psi \in H \right\}} = H$$

Un ejemplo de álgebra C^* no unital es $A = K(H)$ cuando $\dim H = \infty$. En este caso, la inyección canónica $D : K(H) \hookrightarrow B(H)$ es una representación no unital.

Definición 33 *Sea $S \subset H$, $S \neq \emptyset$, si $\overline{\{\sum D(a)\psi : a \in A, \psi \in S\}} = H$ decimos que S es un conjunto cíclico para la representación D. Si S consta de un solo elemento ψ, se dice que ψ es un vector cíclico para D.*

Definición 34 *Se dice que D es una representación cíclica si existe un vector cíclico en H.*

Consideremos un subespacio de Hilbert $K \subset H$, al ser de Hilbert K es cerrado y podemos descomponer a H como la suma directa

$$H = K \oplus K^\perp$$

Definición 35 *Si $D(a)K \subset K$ decimos que K es invariante bajo D.*

Proposición 22 *El subespacio K es invariante si y solo si $K^\perp$ es invariante.*

Definición 36 *Decimos que la representación D es reducible en K si K es un subespacio invariante no trivial bajo D.*

En este caso se pueden considerar

$$D(a)_K : K \to K$$

$$D_K : A \to B(K)$$

y también

$$D_{K^\perp} : A \to B(K^\perp).$$

Decimos que una representación D es irreducible si no es reducible, en otras palabras, si no existe un subespacio no trivial $K \subset H$ invariante bajo D.

Para cualesquiera dos representaciones

$$D_1 : A \to B(H_1)$$
$$D_2 : A \to B(H_2)$$

se puede considerar su suma

$$D = D_1 \oplus D_2 : A \to B(H) \quad \text{donde } H = H_1 \oplus H_2$$

En notación matricial

$$D(a) = \begin{pmatrix} D_1(a) & 0 \\ 0 & D_2(a) \end{pmatrix}.$$

En particular si D es reducible sobre K se tiene $D = D_K \oplus D_{K^\perp}$.

2.2. Operadores de Intercambio

Definición 37 *Sean D_1, D_2 dos representaciones*

$$D_1 : A \to B(H_1)$$
$$D_2 : A \to B(H_2)$$

un operador $T : H_1 \to H_2$ se dice de intercambio si cumple

1. $T \in B(H_1, H_2)$
2. $TD_1(a) = D_2(a)T$ *para todo* $a \in A$.

Es sencillo verificar que los operadores de intercambio forman un espacio de Banach en $B(H_1, H_2)$, lo que permite tomar límites y seguir obteniendo operadores de intercambio.
Denotaremos por $\mathrm{Mor}(D_1, D_2)$ al espacio de los operadores de intercambio entre las representaciones D_1 y D_2 (la razón de esta notación es que a este espacio también se se le llama conjunto de morfismos entre las representaciones).

Los elementos del conjunto $\mathrm{Mor}(D_1, D_2)$ se llaman operadores de intercambio entre D_1 y D_2 y $\mathrm{Mor}(D_1, D_2)$ se denomina también conjunto de morfismos entre las representaciones D_1 y D_2.

Proposición 23

$$\mathrm{Mor}(D_1, D_2)^* = \mathrm{Mor}(D_2, D_1)$$

Demostración Sean $a \in A$ un elemento cualquiera y $T \in \mathrm{Mor}(D_2, D_1)$, entonces

$$TD_1(a) = D_2(a)T$$

en particular

$$TD_1(a^*) = D_2(a^*)T$$

aplicando $*$ se obtiene

$$D_1(a)T^* = T^*D_2(a)$$

■

Proposición 24 *Si $T \in \mathrm{Mor}(D_1, D_2)$ y $S \in \mathrm{Mor}(D_2, D_3)$, entonces $ST \in \mathrm{Mor}(D_1, D_3)$ de modo que se tiene un mapeo lineal de $\mathrm{Mor}(D_1, D_2) \times \mathrm{Mor}(D_2, D_3)$ en $\mathrm{Mor}(D_1, D_3)$.*

Para una sola representación D, se puede considerar $\mathrm{Mor}(D, D)$, donde $T \in \mathrm{Mor}(D, D)$ si $TD(a) = D(a)T$.

Proposición 25 *$\mathrm{Mor}(D, D)$ es una subálgebra C^* de $B(H)$.*

Podemos considerar una categoría cuyos objetos son las representaciones y los morfismos son los operadores de intercambio entre dichas representaciones. Para A dada, esta categoría se denomina $\mathrm{Rep}(A)$.

Definición 38 *Sea $T \in \mathrm{Mor}(D_1, D_2)$ una isometría continua y lineal, si es biyectiva y unitaria, se dice que las representaciones D_1 y D_2 son equivalentes y escribimos $D_1 \sim D_2$.*

2.3. Estados

La maquinaria que nos ayudará a construir las representaciones es el concepto de estado.

Definición 39 *Un estado es un funcional lineal $\rho : A \to \mathbb{C}$ normalizado, es decir, que $\rho(1) = 1$, y positivo, es decir que $\rho(A^+) \subset [0, \infty)$.*

Obsérvese que si $B \subset A$ es una subálgebra C^* y $\rho : A \to \mathbb{C}$ un estado, la restricción de ρ a B sigue siendo un estado.

En el caso conmutativo los estados corresponden a medidas de probabilidad sobre espacios clásicos. Cuando $A = C(X)$, a partir de cualquier medida de probabilidad se puede construir la integral de Lebesgue, al integrar sobre las funciones continuas tenemos un funcional lineal positivo y normalizado. Por el teorema de Riesz cualquier funcional lineal se puede representar de forma única por una medida de probabilidad definida sobre un σ-campo de conjuntos de Baire[1].

Las siguientes propiedades se cumplen para cualquier estado ρ.

1. $|\rho(a^*b)|^2 \leq \rho(a^*a)\rho(b^*b)$ Desigualdad de Cauchy-Schwarz
2. Si $a = a^*$, $a = a_+ - a_-$, entonces $\rho(a) = \rho(a_+) - \rho(a_-)$.
3. La propiedad anterior implica $\rho(a) \in \mathbb{R}$ para todo a hermitiano.
4. De la propiedad anterior se deduce $\rho(a^*) = \overline{\rho(a)}$.

Proposición 26 *Dado un estado ρ,*

$$\langle a, b\rangle = \rho(a^*b)$$

es un semiproducto escalar, lo que le da a A una estructura de espacio preunitario[2].

Demostración Dados $a, b \in A$, y $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \langle a + tb, a + tb\rangle = \langle a, a\rangle + t^2\langle b, b\rangle + t\langle a, b\rangle + t\langle b, a\rangle$$

entonces

$$\rho(a^*a) + t^2\rho(b^*b) + 2t\mathrm{Re}(\rho(a^*b)) \geq 0.$$

Para cualquier parámetro real t esta desigualdad representa una parábola que está por arriba del eje X y solo tiene posibilidad de cumplirse cuando el discriminante es menor que cero para que no existan soluciones reales, entonces

$$4[\mathrm{Re}(\rho(a^*b))]^2 - 4\rho(a^*a)\rho(b^*b) \leq 0,$$

multiplicando por ab para que $\rho(a^*b) = s \in \mathbb{R}$ para quitar la notación $\mathrm{Re}(\rho(a^*b))$ basta multiplicar $\rho(a^*b)$ por un número complejo de módulo 1 adecuado para que sea real y así se obtiene lo que se quería demostrar.

■

Proposición 27 *Cada estado ρ es un mapeo continuo, y*

$$|\rho(a)| \leq \|a\|.$$

[1] Un sigma campo de Baire es la mínima σ-álgebra con la cual en un espacio topológico las funciones continuas son medibles, en general esta σ-álgebra es mas pequeña que la de Borel, y en el caso de los espacios métricos ambas σ-álgebras coinciden.

[2] Un espacio preunitario es un espacio vectorial dotado de un semiproducto escalar.

Demostración Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para a y $b = 1$ se obtiene

$$|\rho(a)|^2 \leq \rho(a^*a),$$

pero

$$a^*a \leq \|a\|^2$$

ésta última es una desigualdad entre elementos del álgebra C^*, ya que $\|a^*a\| = \|a\|^2$. Estamos utilizando cálculo funcional. Aplicando ρ que preserva el orden por ser positivo

$$|\rho(a)|^2 \leq \rho(a^*a) \leq \|a\|^2,$$

por lo tanto

$$|\rho(a)| \leq \|a\|,$$

ρ es un funcional continuo.

■

Proposición 28 *La desigualdad*

$$|\rho(a^*ba)| \leq \|b\|\rho(a^*a)$$

se cumple para todo $a, b \in A$.

Demostración Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|\rho(a^*ba)|^2 \leq \rho(a^*a)\rho(a^*b^*ba) \leq \rho(a^*a)\|b\|^2\rho(a^*a)$$

la última desigualdad es consecuencia de que $b^*b \leq \|b\|^2$ y aplicando la propiedad de sandwich $a^*b^*ba \leq \|b\|^2a^*a$.

■

Proposición 29 *Si* $\rho : A \to \mathbb{C}$ *es un funcional continuo tal que*

1. $|\rho(a)| \leq \|a\|$
2. $\rho(1) = 1$

entonces ρ *es un estado.*

Demostración Únicamente hay que demostrar que $\rho \geq 0$, pero esto es equivalente a demostrar que $\rho(a) \in \mathbb{R}$ si a es hermitiano como veremos a continuación. Sea $\rho(a) = \alpha + i\beta$ con α y β en $\mathbb{R}$, sea $\gamma \in \mathbb{R}$ y consideremos $a + i\gamma \in A$, entonces tomando en cuenta que $\|b\| = \sqrt{\|b^*b\|}$,

$$|\rho(a) + i\gamma| \leq \|a + i\gamma\| = \sqrt{\|(a - i\gamma)(a + i\gamma)\|}$$

$$= \sqrt{\|a^2 + \gamma^2\|} = \sqrt{\|a\|^2 + \gamma^2},$$

por otro lado

$$|\beta + \gamma| \leq |\rho(a) + i\gamma| \leq \sqrt{\|a\|^2 + \gamma^2}$$

entonces

$$(\beta + \gamma)^2 \leq \|a\|^2 + \gamma^2$$

$$\beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2 \leq \|a\|^2 + \gamma^2$$

$$\beta^2 + 2\beta\gamma \leq \|a\|^2.$$

Como γ se eligió arbitrariamente, la única posibilidad es que

$$\beta = 0,$$

esto demuestra que $\rho(a) \in \mathbb{R}$. Un corolario de este resultado es que

$$\overline{\rho(a)} = \rho(a^*).$$

Para mostrar que ρ es positivo considérese a^*a, entonces

$$1 - \frac{a^*a}{\|a\|^2} \in A,$$

por la continuidad de ρ se cumple la desigualdad

$$\left|\rho\left(1 - \frac{a^*a}{\|a\|^2}\right)\right| \leq \left\|1 - \frac{a^*a}{\|a\|^2}\right\| \leq 1$$

ya que

$$0 \leq \frac{|a^*a|}{\|a\|^2} \leq 1,$$

utilizando la linealidad de ρ,

$$\left|1 - \rho\left(\frac{a^*a}{\|a\|^2}\right)\right| \leq 1,$$

$$\left|1 - \frac{\rho(a^*a)}{\|a\|^2}\right| \leq 1,$$

de donde $\rho(a^*a) \geq 0$ así que ρ es positivo y por lo tanto es un estado.

$\blacksquare$

Para cualquier álgebra C^* tenemos la inclusión $\mathbb{C} \hookrightarrow A$ por medio del mapeo $z \mapsto z1$, de este modo se puede ver el plano complejo como un subespacio de Banach de A, y si se define $\rho : \mathbb{C}1 \to \mathbb{C}$ como $\rho(z1) = z$, fácilmente vemos que $\|\rho\| = 1$, ρ es un funcional definido en el subespacio $\mathbb{C}1$, pero por el teorema de Hann-Banach[3] se puede extender a todo A sin incrementar la norma, de modo que ρ cumple las hipótesis del teorema apenas demostrado y por lo tanto es un estado. Esto nos demuestra que para cada algebra C^* existen estados.

2.4. Semiproductos escalares a partir de estados

Sea $\rho : A \to \mathbb{C}$ un estado, nos interesa ahora retomar el semiproducto escalar

$$\langle a, b\rangle = \rho(a^*b)$$

con el propósito de construir a partir de él un producto escalar. Por lo pronto contamos con las siguientes propiedades:

1. El producto $\langle a, b\rangle$ es una forma sesquilineal (lineal en el segundo argumento).

$$\langle a, \alpha b + c\rangle = \alpha\langle a, b\rangle + \langle a, c\rangle$$

2. Es positivo (aunque no estrictamente positivo).

$$\langle a, a\rangle \geq 0$$

3. Exhibe simetría hermitiana.

$$\overline{\langle a, b\rangle} = \langle b, a\rangle$$

Con el objeto de obtener la positividad estricta se toma el conjunto

$$I_\rho = \{a \in A : \langle a, a\rangle = 0\}$$

El conjunto I_ρ es un subespacio lineal de A ya que dados $a, b \in I_\rho$ y $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\langle a + b, a + b\rangle = \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene

$$|\langle a, b\rangle|^2 \leq \langle a, a\rangle\langle b, b\rangle = 0$$

de donde

$$|\langle a, b\rangle|^2 = 0.$$

[3]Teorema de Hann-Banach. Si X y Y son ambos espacios de Banach, $X \subset Y$, y $f : X \to \mathbb{C}$ es un funcional continuo, entonces existe $\tilde{f} : Y \to \mathbb{C}$ continua tal que $\tilde{f}|_X : X \to \mathbb{C}$, $\tilde{f}|_X = f$ y $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

Proposición 30 *I_ρ es un ideal izquierdo, es decir, para todo $a \in A$, $aI_\rho \subseteq I_\rho$.*

Demostración Sea $b \in I_\rho$, entonces

$$\langle ab, ab\rangle = \rho(b^* a^* ab) \geq 0$$

ya que b^*a^*ab es positivo, por otro lado como $a \leq b \Rightarrow c^*ac \leq c^*bc$ se deduce

$$\rho(b^* a^* ab) \leq \|a\|^2 \rho(b^* b) = 0,$$

por lo tanto I_ρ es un ideal izquierdo.

■

Factorizando A por I_ρ obtenemos el espacio A/I_ρ con un producto escalar dado por

$$([a], [b]) = \rho(a^* b)$$

que es estrictamente positivo, sin embargo A/I_ρ es un espacio unitario no necesariamente completo. Al tomar su completación $H_\rho = \overline{A/I_\rho}$ se obtiene un espacio de Hilbert. A continuación se estudiará como se relaciona la estructura C^* de A con este espacio, para esto se introducirá una representación especial.

Sea $D_\rho : A \to A/I_\rho$ dada por

$$D_\rho(a)[b] = [ab].$$

La representación D_ρ proyecta en A/I_ρ la acción del ideal I_ρ en A.

Proposición 31 *El operador D_ρ es lineal y continuo.*

Demostración

$$\left\|D_\rho(a)[b]\right\|^2 = (D_\rho(a)[b], D_\rho(a)[b]) = ([ab], [ab])$$

$$= \rho(b^* a^* ab) \leq \|a\|^2 \rho(b^* b) = \|a\|^* ([b], [b])$$

$$\|a\|^2 \left\|[b]\right\|^2$$

por lo tanto

$$\|D_\rho(a)[b]\| \leq \|a\| \left\|[b]\right\|$$

pero $\left\|[b]\right\|$ es constante, por lo que D_ρ es un operador acotado y se extiende de forma única y continua a todo H_ρ, de modo que D_ρ queda definido de A a $B(H_\rho)$.

■

Propiedades de D_ρ.

1. Es lineal
$$D_\rho(\alpha a + b) = \alpha D_\rho(a) + D_\rho(b)$$
2. Es homomorfismo
$$D_\rho(ab) = D_\rho(a)D_\rho(b)$$
3. Es homomorfismo $*$
$$D_\rho(a^*) = (D_\rho(a))^*$$
4. Es unital
$$D_\rho(1) = 1.$$

Se ha demostrado que D_ρ es una representación de la C^*-álgebra A, en el espacio de Hilbert H_ρ. Se tiene un vector distinguido $\psi_\rho \in H_\rho$ que es precisamente

$$\psi_\rho = [1], \qquad \|\psi_\rho\| = 1.$$

Considerando $D_\rho(a)\psi_\rho = D_\rho(a)[1] = [a]$, es evidente que D_ρ genera todo el espacio cociente A/I_ρ por lo que ψ_ρ es un vector cíclico para la representación D_ρ. Este vector cíclico a su vez induce el estado ρ de la siguiente manera:

$$\rho(a) = \langle \psi_\rho, D_\rho(a)\psi_\rho \rangle = \langle [1], [a] \rangle.$$

La construcción $(\psi_\rho, D_\rho, H_\rho)$ a partir de un estado ρ se llama la terna de Gelfand-Naimark-Segal. A cada estado ρ se asocia un espacio de Hilbert H_ρ, un vector distinguido unitario ψ_ρ y una representación D_ρ de A sobre H_ρ, con la propiedad de que ψ_ρ es un vector cíclico que reproduce mediante promedios cuánticos el estado inicial ρ.

2.5. Representaciones equivalentes y cosas relacionadas

En esta parte veremos como la representación de Gelfand-Naimark-Segal se relaciona con cualquier otra representación de A.

Sean D_1 y D_2 dos representaciones

$$D_1 : A \to B(H_1)$$
$$D_2 : A \to B(H_2)$$

y consideremos $T \in \mathrm{Mor}(D_1, D_2)$. Si $T : H_1 \hookrightarrow H_2$ es una isometría (continua y lineal), entonces $\mathrm{Im}T$ es invariante bajo D_2 de modo que $T(D_1(a))$ es una representación reducida de $D_2(a)$ y $D_2|_{\mathrm{Im}T} \sim D_1$.

Cuando existe una isometría continua y lineal $T : H_1 \to H_2$, se dice que D_1 es una subrepresentación de D_2 y recordemos que si T es además biyectiva tenemos $D_1 \sim D_2$.

Con esta relación de equivalencia se puede restar importancia a la estructura de Hilbert para poner más atención al modo de pasar de una representación a otra.

Recordemos que una representación irreducible es aquella que no tiene subespacios invariantes no triviales.

Proposición 32 *La representación D es irreducible si y solo si* $\mathrm{Mor}(D, D) = \mathbb{C}I$.

Demostración

Para esta demostración utilizaremos el siguiente resultado auxiliar.

Proposición 33 *Si K es un subespacio invariante de D entonces $P_K \in \mathrm{Mor}(D, D)$, donde P_K es el proyector ortogonal.*

Tenemos que $P_K D(a) = D(a)P_K$ para todo $a \in A$, pero entonces $P_K = \lambda I$ para algún número complejo λ, de donde $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$. Por lo tanto K es un subespacio trivial.

Sea $T \in \mathrm{Mor}(D, D)$, sin pérdida de generalidad se puede suponer que T es hermitiano. La siguiente relación se cumple:

$$TD(a) = D(a)T.$$

Como T es normal (por ser hermitiano) se puede tomar su descomposición espectral, existe un operador que conmuta con cada proyector espectral de T. Si P es un proyector en la descomposición espectral de T,

$$PD(a) = D(a)P$$

pero como D es irreducible solo puede proyectar a subespacios triviales, es decir, $P = 0, 1$, por lo que cada proyector espectral de la representación D es 0 o 1, por lo tanto el operador T es un operador escalar. Por lo tanto Cada operador hermitiano es un operador escalar.

$\blacksquare$

Sea $D : A \to B(H)$ una representación , un vector unitario $\psi \in H$, el estado definido por $\rho(a) = \langle \psi, D(a)\psi \rangle$ y la terna de Gelfand-Naimark-Segal $\langle H_\rho, \psi_\rho, D_\rho \rangle$, se puede afirmar que D_ρ es una subrepresentación de D, para demostrarlo basta tomar $T : H_\rho \to H$, de tal modo que $T : [a] \mapsto D(a)\psi$, entonces T es lineal, y es un mapeo isométrico ya que

$$\left\|T[a]\right\|^2 = \langle D(a)\psi, D(a)\psi \rangle = \langle \psi, D(a^*a)\psi \rangle = \rho(a^*a) = \left\|[a]\right\|^2,$$

por lo tanto,

$$\|T[a]\| = \|[a]\|.$$

Falta ver que $T \in \mathrm{Mor}(D_\rho, D)$, pero evaluando en $[b] \in A/I_\rho$ tenemos,

$$TD_\rho(a)[b] = T[ab] = D(ab)\psi = D(a)D(b)\psi = D(a)T[b].$$

En conclusión, si ψ es cíclico, entonces H_ρ se identifica con H, D_ρ y D son equivalentes. Si se tiene un vector cíclico la representación asociada a este vector es equivalente a la representación de Gelfand-Naimark-Segal asociada al estado ρ que induce el vector ψ. En este sentido, el estudio de representaciones de álgebras C^* se reduce al estudio de representaciones de Gelfand-Naimark-Segal , y por lo tanto al estudio del espacio $S(A)$ de los estados de A, que tiene una estructura geométrica[4].

Mas sucintamente, sea $D : A \to B(H)$ una representación tal que $\psi \in H$ es un vector cíclico para la representación D. Entonces podemos construir el estado $\rho(a) = \langle\psi, D(a)\psi\rangle$ y el operador de intercambio $T : H_\rho \to H$, $T \in \mathrm{Mor}(D_\rho, D)$ que es isométrico y que lleva ψ_ρ en ψ, lo que permite ver a H_ρ como subespacio de H, y la representación D se reduce en este subespacio $D(H_\rho)$. La representación reducida es igual a D_ρ. En el caso en que D sea una representación cíclica el mapeo T es una biyección unitaria y las representaciones D_ρ y D son equivalentes.

2.6. Estructura convexa de $S(A)$

El espacio $S(A)$ está contenido en el espacio dual de A, y es un conjunto convexo, es decir que dados dos estados ρ_1 y $\rho_2 \in S(A)$, las combinaciones convexas $t\rho_1 + (1-t)\rho_2$ con $t \in [0,1]$ también son estados. En general las combinaciones convexas son sumas de la forma

$$\sum_1^n r_i\rho_i, \qquad r_i \geq 0, \qquad \sum_1^n r_{i=1}, \qquad \rho_i \in S(A).$$

Hemos dicho antes que los estados representan medidas de probabilidad sobre un espacio cuántico, en el sentido que proporciona la extensión del teorema clásico de Riesz.

El conjunto $S(A)$ también es un conjunto compacto, se tiene la topología débil $*$ que se construye del siguiente modo.

Para cada $a \in A$ se define $\phi_a : A^* \to \mathbb{C}$, donde $\phi_a : f \mapsto f(a)$. La topología débil $*$ es la mínima topología con la que los mapeos $(\phi_a)_{a\in A}$ son continuos.

Proposición 34 *El conjunto $S(A)$ es compacto en la topología débil $*$.*

[4]Cada representación se pude descomponer como suma ortogonal de representaciones cíclicas.

Demostración A grandes rasgos la demostración consiste en observar que $\Phi_a[S(A)] \subset D_{\|a\|}$, es algo acotado ya que si a es hermitiano

$$\|\rho(a)\| \leq \|a\|,$$

a partir de la familia de funciones $\{\Phi_a\}$ se puede construir el producto directo

$$\Phi = \Pi\Phi_a : S(A) \rightsquigarrow \Pi_{a\in A}\mathbb{C}$$

pero

$$\Phi[S(A)] \subset \Pi_{a\in A} D_{\|a\|}(0)$$

de donde $\Phi[S(A)]$ es cerrado y $\Pi_{a\in A}$ es compacto por ser producto de espacios compactos, por lo tanto $\Phi[S(A)]$ es compacto.

■

Como $S(A)$ es convexo y compacto, se puede utilizar el teorema de Krein Milman.

Teorema 35 *Teorema de Krein Milman. Si E es convexo y compacto en un espacio vectorial topológico localmente convexo y completo, entonces E es la cerradura del casco convexo de sus elementos extremales.*

$$S(E) = \overline{\mathrm{Co}\{\mathrm{Ext}[S(E)]\}}.$$

Definición 40 *El casco convexo de un conjunto T es el conjunto*

$$\mathrm{Co}(T) = \{\textit{Todas las combinaciones convexas de elementos de } T\}$$

Definición 41 *Los elementos extremales de T son aquellos que no se pueden escribir como combinaciones convexas de otros elementos en T.*

Ejemplo En un intervalo acotado los elementos extremales son los extremos del intervalo, en un círculo sería la circunferencia que define su frontera, una recta no tiene elementos extremales (y falla en ser un conjunto compacto). En un triángulo los elementos extremales son los vértices, si se trata de un triángulo equilátero entonces cualquier punto dentro del triángulo se puede escribir por sus coordenadas baricéntricas.

◇

En conclusión como $S(A)$ es compacto y convexo tenemos que $S(A) = \overline{\mathrm{Co}\{\mathrm{Ext}[S(A)]\}}$. A los elementos extremales de $S(A)$ se les llama **estados puros**.

2.7. Estados puros en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Sea $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ considérense los estados $S(A)$, donde cada $\rho \in S(A)$ es un funcional lineal positivo y normalizado $\rho : A \to \mathbb{C}$. Tomando el producto escalar canónico definido por la traza de matrices

$$\langle a, b\rangle = \mathrm{Tr}(a^* b),$$

por el teorema de representación de Riesz ρ se puede representar como

$$\rho(a) = \mathrm{Tr}(\mathcal{R}a) \tag{2.1}$$

donde $\mathcal{R}$ es una matriz adecuada, pero además se cumple que

$$\rho(|\psi\rangle\langle\psi|) \geq 0$$

por la positividad de ρ, y por otro lado

$$\rho(|\psi\rangle\langle\psi|) = \mathrm{Tr}(R|\psi\rangle\langle\psi|) = \langle\psi|\mathcal{R}\psi\rangle,$$

esto quiere decir que $\mathcal{R}$ es una matriz positiva, y viceversa, siempre que se pueda representar un funcional lineal ρ como en la ecuación (2.1) con $\mathcal{R}$ matriz positiva, se trata de un funcional positivo, de modo que $\rho \geq 0$ si y solo si $\mathcal{R} \geq 0$ (sus eigenvalores son positivos) y $\rho(1) = 1$ si y solo si $\mathrm{Tr}(\mathcal{R}) = 1$. De manera que los estados están en correspondencia biunívoca con las matrices positivas de traza 1, que también reciben el nombre de matrices estadísticas, y esta correspondencia preserva la estructura convexa, ya que las combinaciones convexas de estados se transforman en combinaciones convexas por linealidad de la traza en la ecuación (2.1). Entonces

$$S(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \{\text{Matrices estadísticas}\}$$

módulo la identificación en (2.1). Para encontrar los elementos extremales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ observemos que una matriz estadística se puede diagonalizar por medio de una base de vectores propios

$$\mathcal{R} \sim \begin{pmatrix} \omega_1 & & & 0 \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_n \end{pmatrix}$$

donde $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ son todos positivos por la positividad de $\mathcal{R}$, y

$$\sum_1^n \omega_i = 1 = \mathrm{Tr}(\mathcal{R})$$

Entonces $\mathcal{R}$ también se puede escribir como

$$R \sim \sum_{i=1}^{n} \omega_i \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

donde 1 está en el lugar ii. Esta es una combinación convexa de matrices estadísticas. Si $\mathcal{R}$ corresponde a un estado puro ρ, no pueden aparecer combinaciones convexas no triviales como en la expresión (2.2), entonces en dicha expresión en caso de que ρ es un estado puro, solo puede aparecer uno de los términos de la suma. De modo que si $\mathcal{R}$ representa un estado puro, entonces $\mathcal{R}$ es un proyector a un espacio unidimensional

$$|\psi\rangle\langle\psi|, \qquad \psi \in \mathbb{C}^n, \qquad \|\psi\| = 1 \tag{2.3}$$

y viceversa, se puede demostrar que si $\mathcal{R}$ se puede escribir como en la ecuación (2.3), entonces es representante de un estado puro. Y este hecho también justifica la terminología ya que en mecánica cuántica los estados puros son operadores estadísticos que corresponden a proyectores a espacios unidimensionales. Fue Segal quien introdujo la generalización del concepto de estado en un álgebra C^*.

La $(2n-1)$-esfera unitaria es invariante bajo los productos por números complejos de módulo 1. Al factorizar por esta relación de equivalencia obtenemos una fibración de la $(2n-1)$-esfera en donde quedan asociados los estados puros biunívocamente con las órbitas generadas por multiplicación por números complejos de módulo 1 en la $(2n-1)$-esfera. Aquí tenemos una estructura de haz fibrado principal con grupo estructural U(1), donde el espacio base corresponde a los estados puros, que geométricamente también se puede ver como el espacio de todos los subespacios unidimensionales de $\mathbb{C}^n$, y como tal es un espacio proyectivo. Tenemos un espacio proyectivo asociado a un espacio complejo, lo que nos da una variedad compleja de dimensión $n-1$.

Estudiemos un poco la geometría de esta esfera que es una variedad riemanniana. Consideremos $T_x(S^{2n-1})$ y subespacio de 1 dimensión real que es el espacio tangente a cada fibra circular y llamémosle $V_x(S^{2n-1})$. Ahora consideremos su ortocomplemento $V_X^{\perp}(S^{2n-1}) \hookrightarrow T_X(S^{2n-1})$, ahora se observa que al calcular la diferencial de la proyección en cada punto x se tiene $d\Pi_x : V_x^{\perp}(S^{2n-1}) \cong T_{\Pi_x}[CP(n-1)]$.

Tenemos en la esfera una métrica que induce también una métrica en el espacio base por medio de esta biyección. Gracias a la acción isométrica del grupo U(1) en la esfera la métrica no depende del representante que se tome.

Por otro lado el ortocomplemento al espacio tangente a un punto φ es también el ortocomplemento al espacio de tangente de toda la órbita de φ que es

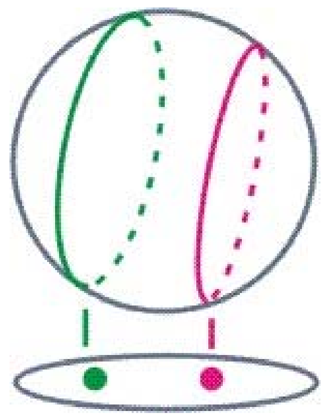


Figura 2.1: Estados en la $2n-1$ esfera

canónicamente identificable con el ortocomplemento de φ visto como subespacio de $\mathbb{C}^n$. Tenemos pues que es un subespacio complejo de $\mathbb{C}^n$ que tiene estructura euclidiana, compleja y simpléctica como parte imaginaria de producto escalar. La parte real del producto escalar es la estructura riemanniana (métrica real).

Estas tres estructuras, compleja, simpléctica y riemanniana en este espacio complejo proyectivo, se pueden unificar en una estructura llamada de Kähler [26].

Ejemplo Queremos estudiar el conjunto $S[\mathcal{M}_n(\mathbb{C})]$ cuando $n = 2$, entonces debemos encontrar a las matrices $\mathcal{R}$ positivas con traza 1. En este caso $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tiene dimensión 4. Tenemos una base canónica formada con la matriz Id y las matrices de Pauli [23],

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(que se usan en el formalismo de spin en mecánica cuántica). Obsérvese que las matrices de Pauli tienen traza 0 y la matriz Id tiene traza 2. De modo que siempre se puede escribir

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}[\mathrm{Id} + x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3] \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$

por ser una matriz hermitiana de traza 1. Las condiciones para x, y y z vienen de que $\mathcal{R}$ es hermitiana. Pero para que sea positiva todavía debe cumplir una condición mas con relación a su espectro, que debe ser un subconjunto de $\mathbb{R}^+$, y por lo tanto $\mathcal{R}$ debe tener valores propios reales positivos. Como la traza es 1, si el $\mathrm{Det}[\mathcal{R}] \geq 0$ entonces todos los valores propios son positivos, por lo tanto $\mathrm{Det}[\mathcal{R}] \geq 0$ es una condición equivalente para la positividad en matrices de traza 1.

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

La condición

$$\mathrm{Det}[\mathcal{R}] = 1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$$

nos dice que (x, y, z) siempre es un elemento de la bola de radio 1 en el espacio $\mathbb{R}^3$ que como conjunto convexo representa el espacio de estados en $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, y los puntos extremales de esta bola que forman la esfera de radio 1, representan a los estados puros. Y como hemos visto antes, el espacio complejo proyectivo de dimensión compleja 1 es la 2-esfera real.

◇

2.8. Estados mezclados

Los estados que no son puros se llaman estados mezclados. Recordemos que los estados son una extensión de los promedios cuánticos. En el caso clásico tener estados puros significa tener un punto en el espacio fase es decir tener total certeza del comportamiento del espacio fase en ese punto. Si tenemos por ejemplo dos estados puros (dos puntos del espacio fase) podemos crear un nuevo estado como combinación convexa de los dos anteriores donde los coeficientes suman 1 con esto estamos dando cierta probabilidad a cada uno de los estados puros, y esto que obtenemos es la suma de las probabilidades de ambos estados lo que ya no puede ser un punto del espacio fase, pero sí es lo que se llama un estado estadístico del sistema, y todas las combinaciones finitas que se obtengan de este modo así como sus límites también son estados estadísticos (en el sentido físico), esta es la interpretación física del teorema de Krein Milman. En el caso cuántico tenemos la posibilidad de seguir interpretando los estados puros como puntos del espacio.

Definición 42 *Decimos que un estado ρ domina a otro estado ρ' si existe $\alpha > 1$ tal que $\rho' \leq \alpha\rho$.*

Esto se puede escribir de manera equivalente como

$$\rho = \frac{1}{\alpha}\rho' + (1 - \frac{1}{\alpha})\rho''$$

ya que ρ y ρ' son estados y por lo tanto son normalizados. Entonces un estado puede dominar a otro estado siempre y cuando se pueda escribir como mezcla de otros dos estados.

Con respecto a la construcción Gelfand-Naimark-Segal , podremos hallar un vínculo entre estados puros y representaciones irreducibles, a partir de este concepto de dominación de estados.

Supóngase que $\rho' \leq \alpha\rho$. Considérese la forma sesquilineal

$$\rho'(a^*b) \qquad a, b \in A.$$

Al aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz en esta forma, hallamos que

$$|\rho'(a^*b)|^2 \leq \rho'(a^*a)\rho'(b^*b) \leq \alpha^2\rho(a^*a)\rho(b^*b).$$

Utilizando ahora el producto escalar en H_ρ

$$\alpha^2\rho(a^*a)\rho(b^*b) = \alpha^2\|[a]\|^2\|[b]\|^2. \tag{2.4}$$

Esto quiere decir que se puede introducir el operador acotado $S : H_\rho \to H_\rho$

$$\rho'(a^*b) = ([a], S[b]) \tag{2.5}$$

esto se debe a la desigualdad (2.4) y a la dominación de ρ.

Proposición 36 *El operador S es positivo*

Demostración Al considerar $a = b$ en la ecuación (2.5), se obtiene

$$0 \leq \rho'(a^*a) = ([a], S[a])$$

y por lo tanto es positivo.

$\blacksquare$

Existen dos maneras de introducir positividad de un operador en un álgebra C^*, una es que su espectro sea un subconjunto de los reales positivos y la otra es que

$$(x, S(x)) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in H_\rho$$

esto se cumple para $x \in A/I_\rho$, pero se extiende de forma natural a todo H_ρ.

Proposición 37 *El operador S es un operador de intercambio para D_ρ, es decir $S \in \mathrm{Mor}(D_\rho, D_\rho)$.*

Demostración

$$\begin{aligned} \rho'(a^*cb) &= ([a], S([cb])) = ([a], S(D_\rho(c)[b])) \\ &= \rho'[(c^*a)^*b] = ([c^*a], S[b]) = (D_\rho(c^*)[a], S[b]) \\ &= (D_\rho[c]^*[a], S[b]) = ([a], D_\rho(c)S[b]) \end{aligned}$$

Hemos llegado a que para dos elementos arbitrarios $[a], [b]$ se cumple la igualdad

$$([a], S(D_\rho(c)[b])) = ([a], D_\rho(c)S[b])$$

por lo tanto

$$SD_\rho(c) = D_\rho(c)S.$$

■

Entonces S conmuta con todos los operadores de la representación de Gelfand-Naimark-Segal , esto es consecuencia directa de la definición de S.

Como $S \geq 0$ podemos tomar la raíz cuadrada $T = \sqrt{S}$, y entonces

$$\rho'(a^*b) = ([a], T^2[b]) = (D_\rho(a)\psi_\rho, T^2 D_\rho(b)\psi_\rho) = (\psi_\rho, T^2 D_\rho(a^*b)\psi_\rho)$$

El producto está dado por $([a],[b]) = \rho(a^*b)$, donde $\rho(a) = \langle\psi_\rho|D_\rho(a)|\psi_\rho\rangle$. La última igualdad se debe a que T también conmuta con todos los operadores de la representación. Haciendo $c = a^*b$ obtenemos

$$\rho'(c) = (\psi_\rho, T^2 D_\rho(c)\psi_\rho) = (\varphi, D_\rho(c)\varphi)$$

donde $\varphi = T\psi_\rho$. Esto nos dice que el estado dominado ρ' se puede escribir en términos de la representación de Gelfand-Naimark-Segal como promedio cuántico por un vector φ dado por $\varphi = T\psi_\rho$, donde T conmuta con cada operador de la representación de Gelfand-Naimark-Segal .

Tanto T como S conmutan con todos los operadores D_ρ, y todos los operadores en esta álgebra (el conmutante de $D_\rho(A)$) están determinados por su valor en el vector cíclico ψ_ρ, por ejemplo,

$$T[a] = TD_\rho(a)\psi_\rho = D_\rho(a)T\psi_\rho,$$

como estos vectores $[a]$ forman un subconjunto denso en todas partes dentro de H_ρ, entonces T está completamente determinado por su acción en ψ_ρ.

Esta construcción se puede revertir, si ahora comenzamos con un conjunto de operadores T, éstos deben cumplir las siguientes condiciones para llegar a la equivalencia del proceso, es decir, construir a partir de ellos el estado ρ':

- $T : H_\rho \to H_\rho$
- $T \geq 0$
- $T \in \mathrm{Mor}(D_\rho, D_\rho)$
- $\varphi = T\psi_\rho, \qquad \|\varphi\| = 1$

donde $\rho'(a) = (\varphi, D_\rho(a)\varphi)$. Esto nos da una biyección entre los operadores T que cumplen estas condiciones y los estados ρ' dominados por ρ.

Teorema 38 *La representación D_ρ es irreducible si y solo si ρ es un estado puro.*

Demostración Tenemos una correspondencia entre estados dominados y operadores positivos en $\mathrm{Mor}(D_\rho, D_\rho)$ módulo dilataciones por la norma de ϕ. Como hemos visto los operadores de intercambio de las representaciones irreducibles forman un álgebra trivial, es decir D_ρ es irreducible si y solo si $\mathrm{Mor}(D_\rho, D_\rho) = \mathbb{C}1$, es decir que los operadores positivos son operadores positivos escalares, esto quiere decir que ρ no puede ser un estado dominante cuando D_ρ es irreducible, es decir, es un estado puro.

■

De este modo los estados puros permiten clasificar todas las representaciones irreducibles.

Proposición 39 *Una representación $D : A \to B(H)$ es irreducible si y solo si cada vector no cero de H es un vector cíclico.*

Demostración Suponiendo que D es irreducible tomemos un vector unitario $\psi \in H$, consideremos el estado ρ inducido por ψ

$$\rho(a) = (\psi, D(a)\psi)$$

Aplicando la construcción de Gelfand-Naimark-Segal , sabemos que D y D_ρ se relacionan por medio del operador

$$T : H_\rho \hookrightarrow H, \quad T \in \mathrm{Mor}(D_\rho, D)$$

De modo que H_ρ es invariante para D pero por ser D irreducible entonces $H_\rho = H$ y por lo tanto T es en realidad una equivalencia entre representaciones tal que $T : \psi_\rho \mapsto \psi$ y como ψ_ρ es un vector cíclico, también debe serlo ψ. Por lo tanto ψ es cíclico para D irreducible.

Ahora bien, suponiendo que cualquier vector no cero en H es cíclico, si D no fuera irreducible, entonces existiría un subespacio propio $K \subset H$ invariante bajo D, es decir que cumple $D(a)(K) = K$. Sea $\psi \in K$, $\psi \neq 0$, entonces el subespacio generado por $D(a)\psi$ debe estar contenido en K, pero entonces ψ no puede ser un vector cíclico, lo cual contradice la hipótesis, y por lo tanto D es una representación irreducible.

■

Hemos visto pues que si $\|\psi\| = 1$ y D es irreducible, se establece una equivalencia entre D y D_ρ mediante el operador unitario T. Definiendo el estado ρ como lo hemos ya establecido a partir de ψ obtenemos que debe ser un estado puro, ahora podemos decir que revertimos la construcción anterior de llegar de estados puros a representaciones irreducibles.

Resumiendo un poco, para $\psi \in H$, $\|\psi\| = 1$, si $\rho(a) = (\psi, D(a)\psi)$ define un estado distinto para cada ψ.

Tener dos estados puros distintos no necesariamente implica que sus representaciones irreducibles asociadas sean inequivalentes entre si. De hecho podemos considerar el conjunto $\mathrm{Ext}[S(A)]$ en el que se puede establecer una relación de equivalencia. Diremos que dos estados puros ρ_1 y ρ_2 son equivalentes si sus representaciones irreducibles asociadas D_{ρ_1} y D_{ρ_2} son equivalentes.

El espacio de las clases dadas por esta relación de equivalencia, o bien el factor espacio inducido por esta relación nos da una clasificación de las representaciones irreducibles, y en la mayoría de los casos se tiene una partición ergódica o dicho en términos de geometría diferencial una foliación ergódica, es decir que este espacio no se puede escribir como la unión disjunta de conjuntos que contengan completamente una clase.

En tal caso la consecuencia es que no se puede utilizar teoría de la medida en tal espacio ya que los únicos conjuntos medibles resultan ser negligibles o el total, lo que también impide utilizar cualquier herramienta clásica de análisis. Sin embargo se puede asociar un álgebra C^* no conmutativa A, y estudiarlo a partir de esta.

2.9. Estados y medidas de probabilidad

Sea ρ un estado y $a = a^*$ una variable hermitiana, consideremos

$$\delta_\rho(a) = \sqrt{\rho[a - \rho(a)^2]} = \sqrt{\rho(a^2) - \rho(a)^2}$$

la dispersión de a respecto a ρ. Nos interesa estudiar el caso en que la dispersión es cero. Sea

$$D_\rho(a) = \begin{pmatrix} \rho(a) & \xi^* \\ \xi & x \end{pmatrix}$$

Calculando $\rho(a^2)$

$$\rho(a^2) = (\psi_\rho, D_\rho^2(a)\psi_\rho) = \rho(a)^2 + \|\xi\|^2$$

obtenemos que $\delta_\rho(a) = \|\xi\|$.

Por lo tanto $\delta_\rho(a) = 0$ cuando la matriz $D_\rho(a)$ toma la forma

$$D_\rho(a) = \begin{pmatrix} \rho(a) & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

De modo que ψ_ρ es vector propio para $D_\rho(a)$.

$$D_\rho(a)\psi_\rho = \rho(a)\psi_\rho.$$

Suponiendo que todas las dispersiones en un estado son cero, es decir que $\delta_\rho(a) = 0$ para cada variable hermitiana $a = a^*$, tendríamos que se anulan para cualquier elemento de A, ya que siempre se puede escribir un elemento en términos de elementos hermitianos. Entonces

$$D_\rho(ab)\psi_\rho = \rho(ab)\psi_\rho$$

$$D_\rho(a)D_\rho(b)\psi_\rho = \rho(a)\rho(b)\psi_\rho$$

lo que nos dice que ρ es un homomorfismo de A en $\mathbb{C}$, y por lo tanto es un caracter que representa un punto del espacio cuántico asociado. Como $D_\rho(a)\psi_\rho = \rho(a)\psi_\rho$, y ψ_ρ es un vector cíclico para H_ρ, entonces $\dim(H_\rho) = 1$.

En resumen, ρ es un caracter si y solo si $\dim(H_\rho) = 1$.

Ahora nos interesa estudiar las clases de equivalencia de representaciones irreducibles asociadas a estados puros. Para esto consideremos el espacio de los estados puros y la relación de equivalencia siguiente, diremos que dos estados están en relación si inducen representaciones equivalentes. Esto nos permite estudiar el espacio de representaciones irreducibles en términos de los estados.

Sea $D : A \to B(H)$ una representación irreducible, y supongamos que $D_\rho \sim D \sim D_{\rho'}$, donde ρ y ρ' son estados puros. Entonces ρ y ρ' inducen dos vectores ψ_ρ y ψ'_ρ en H, de tal modo que a lo largo de una fibra va variando el vector cíclico, puede suceder que un estado puro tenga mas de un vector cíclico asociado. Sean ψ, $\varphi \in H$ que nos dan el mismo estado ρ. Para ver como se relacionan podemos considerar los operadores unitarios de intercambio u y v entre las representaciones D y D_ρ y considerar la composición $uv^{-1} \in \mathrm{Mor}(D, D)$ que transforma el vector φ en el vector ψ

$$\begin{array}{ccc} H_\rho & = & H_\rho \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle v}\downarrow \\ H & = & H \end{array}$$

pero como D es irreducible el morfismo uv^{-1} debe ser un operador escalar es decir $uv^{-1} = z1$ para algún $|z| = 1$ (por la unitaridad de u y v), de modo que $\psi = z\varphi$, es decir, generan el mismo subespacio. En la esfera unitaria $S(H)$ podemos considerar como antes la relación de equivalencia: dos vectores unitarios ψ y φ están en relación si $\psi = z\varphi$ para algún $z \in U(1)$ como vimos esta relación parte $S(H)$ en clases de equivalencia. Al considerar cada clase en la esfera unitaria $S(H)$, cada fibra es un círculo.

Esta relación de equivalencia también induce una relación de equivalencia en el conjunto de las representaciones irreducibles. Esto es porque cada representación irreducible se puede obtener a partir de un estado puro y cada estado puro se puede obtener por medio de un vector unitario. La relación en $S(H)$ induce una relación en $\mathrm{Ext}(S(A))$.

El interés de estudiar las clases de equivalencia de representaciones irreducibles surge de que en el caso conmutativo el espacio base nos da exactamente el conjunto de los caracteres. De modo que tenemos otra posible interpretacíon de los puntos dentro del formalismo de álgebras C^*. Sin embargo para álgebras C^* no conmutativas el espacio base por lo general no tiene subconjuntos medibles no triviales.

Si se quisiera utilizar esta interpretación para puntos tendríamos casos como $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o bien cuando $A = K(H)$ con H es separable y de dimensión infinita. Queremos resaltar son casos que se pueden encontrar en el formalismo de mecánica cuántica y en lo cuales el espacio base consta de un solo punto. Tener espacios formados de un solo punto es tener una geometría muy pobre que no serviría por ejemplo para estudiar transición de fases, ya que para esto se necesitan forzosamente más puntos.

Vamos a analizar ahora el caso en que un estado es un caracter, para esto consideremos la terna $(H_\rho, D_\rho, \psi_\rho)$. Hemos demostrado que $\delta_\rho(a) = 0$ para cada a hermitiano es equivalente a que $D_\rho(a)\psi_\rho = \rho(a)\psi_\rho$, si se cumple cualquiera de las condiciones anteriores ρ es un caracter.

Vamos a demostrar que es multiplicativo:

$$D_\rho(ab)\psi_\rho = \rho(ab)\psi_\rho$$

pero

$$D_\rho(ab)\psi_\rho = D_\rho(a)D_\rho(b)\psi_\rho = D_\rho(a)(\rho(b)\psi_\rho) = \rho(a)\rho(b)\psi_\rho$$

por lo tanto quitando ψ_ρ obtenemos

$$\rho(ab) = \rho(a)\rho(b).$$

Estos caracteres también se pueden construir por medio de una factorización canónica. Los caracteres cumplen las siguientes propiedades:

- $\rho(ab - ba) = 0$
- $\rho\{c(ab - ba)d\} = 0$

Los caracteres deben anularse en todos los posibles elementos de la forma $c(ab - ba)d$, y en la cerradura del subespacio generado por los mismos como consecuencia de la continuidad, dicho espacio es un ideal bilateral, es el mínimo ideal bilateral que contiene todos los conmutadores y se llama conmutante de A, lo denotaremos por $\text{com}(A)$. Cuando A es conmutativa $\text{com}(A) = \{0\}$. Si A es no conmutativa puede suceder que $\text{com}(A) = A$, este caso es el llamado cuántico estándar.

Si A no está en ninguno de estos dos casos tenemos un ideal no trivial bilateral y $A/\text{com}(A)$ es un álgebra C^* conmutativa identificable con $C(\Omega)$ para algún espacio topológico compacto Ω dando lugar a la sucesión corta exacta:

$$0 \to \text{com}(A) \hookrightarrow A \to C(\Omega) \to 0$$

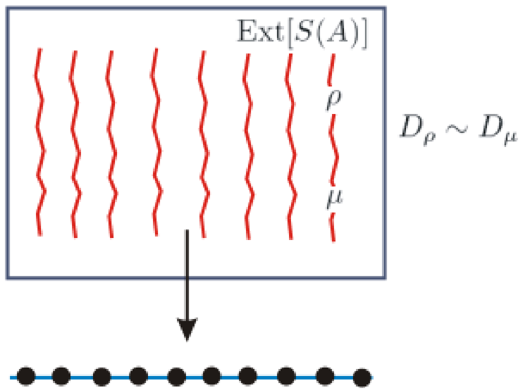


Figura 2.2: Puntos, estados puros y representaciones inequivalentes.

Los puntos de Ω son los caracteres de $A/\mathrm{com}(A)$, pero como cada caracter se anula en el ideal $\mathrm{com}(A)$ entonces es también un caracter de A. Entonces los puntos de Ω son carateres de A, se puede pensar $A/\mathrm{com}(A)$ como la parte clásica de A.

Si A es conmutativa consideremos una representación irreducible $D : A \to B(H)$, entonces $\mathrm{Mor}(D, D) = \mathbb{C}1$, pero para cada $a, b \in A$

$$D(a)D(b) = D(b)D(a)$$

entonces $D(b) \in \mathrm{Mor}(D, D)$, de modo que $D(b) = \alpha 1$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$ todos los operadores de la representación son escalares, entonces $\dim H = 1$ (H es el espacio que representa D).

Analicemos los caracteres en el caso conmutativo a partir de las representaciones irreducibles, sea $D : A \to B(H)$ una representación irreducible, entonces se cumple $D(a)D(b) = D(b)D(a)$ para todo $a, b \in A$ por ser A conmutativa. Pero como D es irreducible $\mathrm{Mor}(D, D) = \mathbb{C}1$, de modo que D solo me da operadores escalares, la única forma de que esto pueda suceder es que $\dim H = 1$. Como las representaciones irreducibles se generan por medio de los estados puros, entonces los estados puros son los caracteres.

Entonces en el caso conmutativo tenemos:

$$\{\text{Puntos de } X\} \leftrightarrow \{\text{Clases de representaciones irreducibles inequivalentes}\}$$

Como cada una de las representaciones irreducibles va a un espacio unidimensional, en la figura 2.2 se ve que cada una de las fibras es un punto del espacio X ya que cada $CP(H)$ se fibra en un punto por ser H de dimensión 1.

Por el teorema de Krein Milman

$$S(A) = \overline{\mathrm{Co}\{\mathrm{Ext}[S(A)]\}} = \{\text{Medidas de probabilidad en } X\}$$

donde

$$\text{Ext}[S(A)] = \{\text{Puntos } x \in X\}.$$

A cada $x \in X$ asignamos una medida δ_x, $x \leftrightarrow \delta_x$, de modo que,

$$\text{Co}\{\text{Ext}[S(A)]\} = \Big\{\sum_{i=1}^{n} t_i \delta_{x_i}, \sum t_i = 1, t_i \geq 0\Big\}.$$

aquí ya se tienen casi todas las medidas de probabilidad, las que faltan se pueden construir tomando límites de éstas.

Ahora queremos responder a la pregunta de si existen suficientes representaciones irreducibles de un álgebra C^*, esto es equivalente a cuestionarse si existen suficientes estados puros. Para responder esta pregunta necesitaremos primero la siguiente proposición.

Proposición 40 *Sean A y B álgebras C^* con $A \hookrightarrow B$ y consideremos $\rho : A \to \mathbb{C}$ un estado puro, entonces existe $\overline{\rho} : B \to \mathbb{C}$ un estado puro que extiende a ρ, es decir, $\overline{\rho}|_A = \rho$.*

Demostración Sabemos que un estado siempre se puede extender pero no sabemos si los estados puros se extienden como estados puros. Recordemos que un funcional $f : B \to \mathbb{C}$ es un estado si y solo si $|f(a)| \leq \|a\|$ y $f(1) = 1$, al aplicar el teorema de Hann-Banach obtenemos que existe su extensión.

Sea $\Sigma_\rho = \{\tilde{\rho} \in S(B) : \tilde{\rho}|_A = \rho\}$. Ya sabemos que $\Sigma_\rho \neq \emptyset$, y también sabemos que es un conjunto convexo, ya que las combinaciones convexas de estados que extienden a ρ también lo extienden. El conjunto Σ_ρ es cerrado en la topología débil $*$, y por estar contenido en el compacto $S(B)$ es un conjunto compacto. Aplicando a Σ_ρ el teorema de Krein Milman

$$\Sigma_\rho = \overline{\text{Co}\{\text{Ext}[\Sigma_\rho]\}}$$

En particular existen elementos extremales, y al tomar un elemento extremal particular $\rho_* \in \Sigma_\rho$, vamos a demostrar que ρ_* es un estado puro.

Supongamos que ρ_* es un estado mezclado, entonces

$$\rho_* = t\rho_1 + (1-t)\rho_2 \text{ con } t \in [0,1].$$

Esta expresión se cumple en todo B y en particular se cumple en A, y su restricción en A,

$$\rho = t(\rho_1|_A) + (1-t)(\rho_2|_A)$$

es un estado puro por hipótesis, por lo que debe suceder que $\rho_1|_A = \rho_2|_A = \rho$, entonces $\rho_1, \rho_2 \in \Sigma_\rho$.

Pero ρ_* es un elemento extremal de Σ_ρ, por lo tanto $\rho_* = \rho_1 = \rho_2$ y ρ_* es un estado puro.

■

Teorema 41 *Para cada elemento $a \in A$ existe una representación $D \in \mathrm{Rep}(A)$ irreducible con la propiedad de que $\|D(a)\| = \|a\|$*

Demostración Sea $a \in A$ y consideremos el álgebra C^* generada por a^*a, que es un álgebra conmutativa. El espectro de a^*a es un subconjunto de $\mathbb{R}^+$, y todos los elementos de $C^*(a^*a)$ se pueden ver como mapeos continuos sobre el espectro de a^*a, en particular a^*a queda representado por el mapeo idéntico.

Sea $\omega \in \sigma(a^*a)$ un punto extremal derecho, entonces ω interpretado como caracter cumple

$$\omega(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$$

Aplicando el teorema de la extensión de estados puros que se acaba de demostrar, tenemos que existe $\tilde{\omega} : A \to \mathbb{C}$, un estado puro que es la extensión de ω, y $D_{\tilde{\omega}} : A \to B(H_{\tilde{\omega}})$ es irreducible.

$$\tilde{\omega}(a^*a) = \|a\|^2 = \langle \psi_{\tilde{\omega}}, D_{\tilde{\omega}}(a^*a)\psi_{\tilde{\omega}} \rangle =$$

$$= \langle D_{\tilde{\omega}}(a)\psi_{\tilde{\omega}}, D_{\tilde{\omega}}(a)\psi_{\tilde{\omega}} \rangle = \|D(a)\psi_{\tilde{\omega}}\|^2$$

de modo que $\|a\| = \|D_{\tilde{\omega}}(a)\psi_{\tilde{\omega}}\|$, y entonces

$$\|D_{\tilde{\omega}}(a)\| = \|a\|$$

■

Teorema 42 *Teorema de Gelfand y Naimark. Sea A un álgebra C^*, entonces existe un espacio de Hilbert H tal que $A \hookrightarrow B(H)$.*

Demostración Tomemos $\mathrm{Ext}[S(A)]$, y las clases de equivalencia de representaciones irreducibles, cada una de estas fibras es un espacio complejo proyectivo, tenemos el espacio base X y vamos a construir una sección de esta proyección asociando a cada elemento de la base un estado y mediante este estado una representación irreducible de la clase correspondiente.

Sea τ esta sección, y vamos a considerar la suma directa de las representaciones de Gelfand - Naimark - Segal asociadas a los estados puros de esta sección,

$$D = \sum_{\rho \in \tau}^{\oplus} D_\rho$$

ésta es una representación que actúa en la suma directa de espacios de Hilbert H donde actúa cada representación D_ρ, en general este espacio no es separable,

$$H = \sum_{\rho \in \tau}^{\oplus} H_\rho.$$

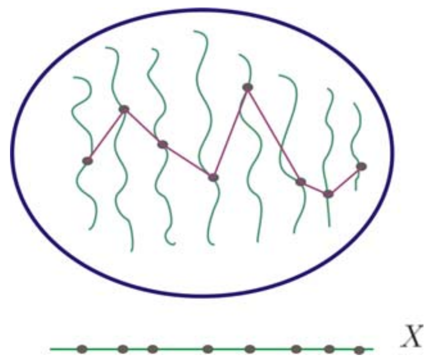


Figura 2.3: Sección

Por construcción $\|D(a)\| = \sup_{\rho\in\tau} \|D_\rho(a)\|$. Para cada a y ρ se cumple $\|D_\rho(a)\| \leq \|a\|$, pero acabamos de demostrar que siempre existe una representación irreducible tal que $\|D(a)\| = \|a\|$, y por lo tanto $\|D(a)\| = \|a\|$ para todo $a \in A$. Entonces D es un mapeo isométrico, y una representación fiel, es decir

$$D : A \hookrightarrow B(H).$$

■

2.10. Envolvente C^* de un álgebra

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra $*$, en esta sección veremos cuando es posible asociarle canónicamente un álgebra C^*.

Consideremos una representación $D : \mathcal{A} \to B(H)$, que como ya sabemos es un homomorfismo $*$ que preserva las operaciones algebraicas

$$D(a + \lambda b) = D(a) + \lambda D(b)$$

$$D(ab) = D(a)D(b)$$

$$D(a^*) = (D(a))^*.$$

Para cada una de estas representaciones se puede considerar una seminorma en $\mathcal{A}$ dada por

$$P_D(a) = \|D(a)\|,$$

es una seminorma porque no necesariamente resulta ser estrictamente positiva, sin embargo esta seminorma cumple la desigualdad multiplicativa

$$\|P_D(ab)\| \leq \|P_D(a)\|\|P_D(b)\|$$

y la propiedad C^*

$$\|P_D(a^*a)\| = \|P_D(a)\|^2.$$

Todo esto sucede siempre y cuando existan representaciones, y de hecho no siempre existen para un álgebra $*$, de modo que si para un álgebra $*$ no existen representaciones, ésta no es una buena candidata para convertirse en un álgebra C^*. Otras veces puede suceder que existen representaciones pero que anulen siempre algún elemento no cero del álgebra, situación que es igualmente indeseable. Debemos excluir estos casos y para ello consideraremos seminormas que sean de la forma P_D, es decir, que vengan siempre de una representación, y pediremos la condición de que para cada $a \neq 0$ en $\mathcal{A}$ exista siempre una de estas seminormas con la propiedad de que $P_D(a) \neq 0$.

Falta garantizar que el sistema de seminormas P_D define una verdadera norma en A. Para esto basta pedir $\sup_D P_D(a) < \infty$ para todo $a \in \mathcal{A}$ lo que restringe aún más el conjunto de álgebras $*$ candidatas a convertirse en álgebras C^*.

Si $\mathcal{A}$ cumple estas tres condiciones, se puede definir la norma dentro de $\mathcal{A}$ como $\|a\| = \sup_D P_D(a)$. Por construcción, esta norma cumple la propiedad C^*. Lo único que falta es ver que $\mathcal{A}$ es completa con esta norma, y en caso de que no lo sea consideramos su completación como se expone en las primeras secciones. Al álgebra C^* obtenida por este procedimiento se le llama envolvente universal C^* del álgebra A.

Sea A la envolvente universal C^* de $\mathcal{A}$, esta álgebra poseé una propiedad muy importante que consiste en que si $D : \mathcal{A} \to B(H)$ es una representación, entonces hay una única extensión $\overline{D}$ para D a todo A por continuidad.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\hookrightarrow} & A \\ {\scriptstyle D}\big\downarrow & & {\scriptstyle \overline{D}}\big\downarrow \\ B(H) & = & B(H) \end{array}$$

Como cualquier álgebra C^* se puede ver como subálgebra de $B(H)$ para algún espacio de Hilbert H (teorema de Gelfand), y también si tenemos un homomorfismo $\phi : \mathcal{A} \to B$ donde B es un álgebra C^* existe una única extensión $\overline{\phi}$ de ϕ a la envolvente C^* de $\mathcal{A}$, de tal modo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\hookrightarrow} & A \\ {\scriptstyle \phi}\big\downarrow & & {\scriptstyle \overline{\phi}}\big\downarrow \\ B & = & B \end{array}.$$

Esta es la propiedad universal de la envolvente C^*. A continuación veremos algunos ejemplos a partir de conjuntos de generadores y relaciones entre los generadores para construir con esto un álgebra $*$, luego veremos si se cumplen las condiciones para que exista su envolvente C^*.

Ejemplo

Consideremos un generador γ y el álgebra $*$ $\mathcal{A}$ generada por γ con la relación $\gamma\gamma^* = \gamma^*\gamma = 1$. La relación nos dice que γ es normal y unitario, por lo que $\mathcal{A}$ es un álgebra conmutativa y por lo tanto su envolvente C^* (en caso de existir) debe estar asociada a un espacio clásico, y se puede intuir que este espacio es el círculo unitario. Para verlo con toda claridad averiguemos quienes son los caracteres en esta álgebra.

Sea $\kappa : A \to \mathbb{C}$ un caracter, lo podemos de hecho considerar en $\mathcal{A}$ por la propiedad universal de A, ya que queda únicamente determinado $\kappa : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. En abstracto lo que sabemos es que κ es un homomorfismo $*$ (es decir, $\kappa(a^*) = \overline{\kappa(a)}$) que está determinado siempre por el valor que toma en γ por ser γ el único generador. Como consecuencia de la relación con que se genera $\mathcal{A}$, vemos que $|\gamma(a)| = 1$, y es la única restricción que aparece, de modo que hay una correspondencia biunívoca entre caracteres y los valores que toman en γ, esta es la razón de que el espacio asociado sea el círculo unitario en $\mathbb{C}$.

$\diamond$

Ejemplo Supongamos que se tienen 3 generadores x, y, z, y las siguientes relaciones,

$$x = x^* \qquad y = y^* \qquad z = z^* \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

considérese también el siguiente bloque de relaciones,

$$xy = yx \qquad xz = zx \qquad zy = yz.$$

El álgebra C^* generada por estos generadores y las 7 relaciones es conmutativa, las tres variables son hermitianas. Las variables hermitianas son variables reales entonces podemos verlas como coordenadas y las relaciones entre ellas como las constricciones de la variedad. El espacio clásico asociado es una esfera en $\mathbb{R}^3$.

Si quitamos el segundo bloque de relaciones, quitamos la condición de conmutatividad del álgebra, y de hecho debemos comprobar que se cumplen las condiciones para que exista su envolvente C^*.

La condición de que exista una cota superior para $\|D(a)\|$ donde a es una expresión algebraica en términos de x, y y z se puede ver a partir de que exista una cota superior para $\|D(x)\|$, $\|D(y)\|$ y $\|D(z)\|$ como consecuencia de la desigualdad del triángulo y de la desigualdad multiplicativa existirá para la seminorma.

Como los generadores son elementos hermitianos, la cuarta relación nos dice que su cuadrado es un elemento positivo menor o igual que 1.

$$x^2 \leq 1 \qquad y^2 \leq 1 \qquad z^2 \leq 1$$

por consecuencia también sucede que

$$D^2(x) \leq 1 \qquad D^2(y) \leq 1 \qquad D^2(z) \leq 1$$

lo que nos da

$$\|D^2(x)\| \leq 1 \qquad \|D^2(y)\| \leq 1 \qquad \|D^2(z)\| \leq 1.$$

Si se considera el grupo $SO(3)$ de las rotaciones en $\mathbb{R}^3$, este grupo preserva los generadores y es el grupo de simetrías de la esfera en el caso clásico (considerando el segundo bloque de relaciones). Al considerar la envolvente universal de $\mathcal{A}$ este grupo se debe extender a los automorfismos de A que corresponden a las simetrías de la esfera cuantizada.

Considerar el segundo bloque de relaciones es equivalente a factorizar el álgebra por su conmutante, y lo que se obtiene es efectivamente una esfera clásica. Se tiene entonces la siguiente sucesión corta exacta.

$$0 \to \mathrm{com}(A) \to A \to C(S^2) \to 0.$$

De modo que a nivel de espacios S^2 se ve como subvariedad de la variedad cuántica asociada a A.

Siempre se puede ver qué variedad clásica se obtiene al factorizar el álgebra por su conmutante.

$\diamond$

Ejemplo Ahora cosideramos un álgebra C^* a partir de dos generadores x, y, junto con las relaciones

$$i(xy - yx) = 1 \qquad x = x^* \qquad y = y^*$$

Al buscar representaciones, vemos que no pueden existir, ya que se demostró en el ejemplo de la sección referente al espectro que esta relación no se puede representar por operadores acotados[5].

$\diamond$

Ejemplo Sea x un generador y la relación $x^*x = 0$. Como cualquier norma que se considere anula x, no podemos construir su envolvente C^*.

$\diamond$

[5]Sin embargo la relación se puede representar por operadores no acotados, y tiene una importancia prima para mecánica cuántica.

Ejemplo Sean x, y generadores con la siguiente relación

$$x^*x - y^*y = 0 \qquad x^*x = xx^* \qquad y^*y = yy^*$$

Se obtiene un álgebra $*$ no conmutativa. Si $x, y \in \mathbb{C}$ entonces se obtiene la restricción $|x|^2 - |y|^2 = 0$, pero es una restricción que se puede visualizar en el plano euclidiano como un par de rectas de pendiente ± 1 que por lo tanto no son acotadas y se puede ver que las normas no van a tener una cota superior, y geométricamente quiere decir que en realidad no estamos trabajando con un espacio compacto, el hecho de quitar la condición del supremo de las normas equivale a admitir espacios no compactos.

$\diamond$

Capítulo 3

Toro cuántico

3.1. Generadores y relaciones del toro cuántico

El toro cuántico es un ejemplo de cuantización de una variedad compacta 2-dimensional, la variedad que se cuantiza es el toro. En este ejemplo se verán ilustradas las ideas que hemos venido desarrollando con las álgebras C^* a lo largo de este trabajo y se analizarán los contrastes que van apareciendo entre la variedad clásica y la cuántica. En el caso conmutativo este análisis correspondería exactamente a hacer "geometría algebraica" sobre el toro y después "topología". Lo primero que hacemos para cuantizar el toro es romper la conmutatividad.

Consideremos el álgebra $*$ $\mathcal{A}$ definida por medio de dos generadores u y v y las relaciones

$$u^* = u^{-1}$$

$$v^* = v^{-1}$$

$$vu = zuv$$

para algún número complejo z de módulo 1.

Un poco más adelante verificaremos que $\mathcal{A}$ tiene una envolvente universal C^*, para esto es preciso hacer algunas observaciones antes. Supongamos por ahora que A es la envolvente universal C^* del álgebra $\mathcal{A}$. La última relación se puede reescribir como:

$$z1 = vuv^*u^*.$$

Esta relación también nos revela por qué z debe tener módulo 1 ya que aquí vemos que es un elemento unitario por ser producto de elementos unitarios.

Si $z = 1$ el álgebra A es conmutativa, y para cualquier otro z complejo de módulo 1, la consecuencia de intercambiar el orden de u y v en cualquier expresión algebraica será la aparición de alguna potencia de z. Dicho de otro modo, el álgebra

$\mathcal{A}$ es casi conmutativa salvo por la aparición de potencias de z al intercambiar u con v. Cualquier $a \in \mathcal{A}$ se puede escribir como una suma finita de la forma

$$a = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} c_{nm} u^n v^m,$$

donde los coeficientes c_{nm} son las potencias de z. De modo que tenemos una base de $\mathcal{A}$ con elementos de la forma $u^n v^m$, donde n y m son dos cualesquiera números enteros, y por lo tanto es de dimensión infinita. Los generadores u y v son independientes, y si $z = 1$, tenemos dos copias de un álgebra conmutativa con un solo generador que corresponden cada una a un círculo, así que el algebra $\mathcal{A}$ corresponde en este caso al producto cartesiano de dos círculos, es decir, al toro clásico.

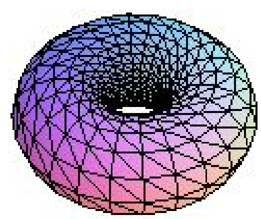


Figura 3.1: Toro clásico

En la figura u y v son coordenadas complejas de módulo 1. El toro clásico se proyecta a dos círculos. Algebraicamente la relación recíproca corresponde a la inclusión de álgebras, la generada por u y la generada por v en la C^*-álgebra A. Si $z \neq 1$ las proyecciones son las mismas, sin embargo el objeto completo ha cambiado, y esto es precisamente lo que se quiere estudiar, se ilustra en la figura 3.2. Para ello recurriremos a la analogía que se ha establecido con los espacios asociados a las álgebras C^* conmutativas. En particular podemos preguntarnos qué sucede con los puntos del toro clásico al quitar la conmutatividad, para averiguar la respuesta busquemos los caracteres en $\mathcal{A}$. En caso de existir los caracteres deben satisfacer

$$\kappa(uv) = \overline{z}\kappa(vu)$$

entonces

$$\kappa(u)\kappa(v) = \overline{z}\kappa(v)\kappa(u)$$

pero como u y v son unitarios

$$|\kappa(u)| = |\kappa(v)| = 1$$

entonces tanto $\kappa(u)$ como $\kappa(v)$ son distintos de cero, y cancelando $\kappa(u)$ y $\kappa(v)$ se obtiene $1 = \overline{z}$, pero ¡z era distinto de 1! Por lo tanto no hay caracteres en

$\mathcal{A}$, el toro cuántico no tiene puntos. Es un objeto completamente cuántico que se proyecta en dos espacios clásicos. Corresponde a un haz "trivial" sobre el círculo, y la fibra es igualmente $U(1)$, vale la pena hacer esta observación porque uno de los principales problemas de la geometría clásica es clasificar haces fibrados. Aquí tenemos un ejemplo de haz cuántico con base y fibra clásica [19].

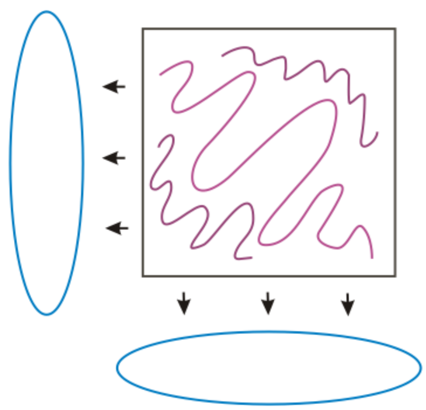


Figura 3.2: Toro cuántico sin puntos que se proyecta en dos círculos.

3.2. Simetrías

A pesar de que el toro cuántico no tiene puntos preserva las simetrías del toro que consisten en rotaciones con cualquier argumento en cualquiera de sus dos direcciones. En los números complejos las rotaciones corresponden a multiplicar por un número complejo de módulo 1. Entonces para cada elemento de $U(1)\times U(1)$, es decir para cada pareja (α, β) con α y β números complejos de módulo 1, se tiene una simetría del toro (de hecho es un difeomorfismo). Las simetrías están en correspondencia biunívoca con los automorfismos de $\mathcal{A}$ que a su vez se extienden de forma natural a su envolvente C^*.

El mapeo T es un homomorfismo de grupos. Dada la pareja (α, β), el homomorfismo $T_{(\alpha,\beta)}$ se define a partir de los generadores u y v como

$$T : U(1) \times U(1) \to \mathrm{Aut}(A)$$

$$T_{(\alpha,\beta)}(u) = \alpha u \qquad T_{(\alpha,\beta)}(v) = \beta v.$$

Solo hay que verificar que las relaciones que definen $\mathcal{A}$ se cumplen con $T(u)$ y $T(v)$, lo cual es evidente.

Por lo tanto el toro clásico y el toro cuántico tienen las mismas simetrías de traslación sobre el toro.

A continuación se introducirá una representación fiel de A en un espacio de Hilbert H. Sea $H = l^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ (sucesiones cuadráticamente sumables) y e_{ij}, con $i, j \in \mathbb{Z}$, la base canónica de H. Definimos $D : \mathcal{A} \to B(H)$ por medio de los generadores como

$$D(u)e_{ij} = e_{(i+1,j)} \qquad D(v)e_{ij} = z^i e_{(i,j+1)}.$$

Así que se tiene una red discreta cuyos vértices están dados por parejas de números enteros, y D como se ve en la figura 3.5.

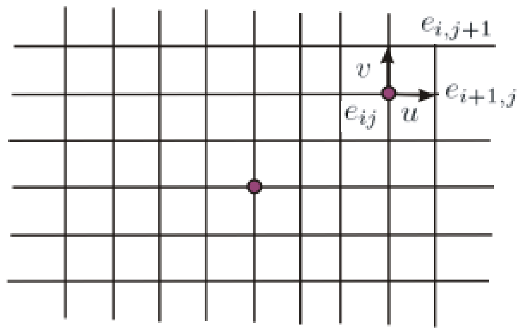


Figura 3.3: Red discreta

Primeramente $D(u)$ y $D(v)$ son unitarios. Además, la relación
$D(v)D(u) = zD(u)D(v)$ se cumple, se puede extender D a un homomorfismo $*$ del álgebra $\mathcal{A}$ a $B(H)$ y después por continuidad también a $D : A \to B(H)$. Consideremos un valor promedio cuántico en el origen a partir de la representación $D : A \to B(H)$. Sea $\int : A \to \mathbb{C}$ un estado definido por $\int a = \langle e_{00}, D(a)e_{00} \rangle$, entonces

$$\int u^n v^m = \delta_{n,0}\delta_{m,0}$$

donde $\delta_{n,0}$ es la delta de Kronecker, se cumple al aplicar $\int u^n v^m$ en el vector $(0, 0)$, ya que u lo recorre sobre la red horizontalmente y v lo hace verticalmente, después, al tomar el producto escalar se anula excepto en el caso en $n = m = 0$. Se puede fácilmente concluir que $\int$ es una traza ya que

$$\int ab = \int ba.$$

Llamaremos a $\int$ la traza canónica en el álgebra A del toro cuántico. Esta traza es una función muy importante ya que permite demostrar algunas propiedades interesantes y sutiles. Otra manera de obtener la misma traza es considerar todas las posibles traslaciones a lo largo del toro

$$T : U(1) \times U(1) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(A)$$

$$T_{\alpha,\beta} \in \mathrm{Aut}A$$

$$T_{\alpha,\beta}(u) = \alpha u$$

$$T_{\alpha,\beta}(v) = \beta v.$$

Sea a un elemento de la base y considérese la integral

$$\int\int T_{\alpha,\beta}(a)\frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\beta}{2\pi}$$

en el sentido clásico. Se puede ver que

$$\int\int T_{\alpha,\beta}(a)\frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\beta}{2\pi} = \left(\int a\right)1. \tag{3.1}$$

Esto es consecuencia de que ambas partes de la igualdad son lineales y continuas en a, entonces basta verificar que se cumple en los monomios, es decir, para $a = u^n v^m$. Al cumplirse la ecuación (3.1) por linealidad para $a \in \mathcal{A}$, se cumple también para todo $a \in A$. Se verifica simplemente sustituyendo a por $u^n v^m$.

Esta fórmula permite demostrar que la representación D es fiel. De la fórmula obtenida se ve que si $a > 0$ entonces $\int a > 0$.

Supongamos que D no es fiel, es decir que $D(a) = 0$ para algún $a \neq 0$, entonces $\int aa^* = \langle e_{00}, D(aa^*)e_{00}\rangle = 0$ lo que necesariamente implica $a^*a = 0$ y por lo tanto $a = 0$, pero esto es una contradicción. Por lo tanto D es una representación fiel.

Se concluye que toda envolvente universal C^* es realizada por operadores que actúan en este espacio de Hilbert que consiste de las sucesiones cuadráticamente sumables.

En general un vector ψ se dice separador si $D(a)\psi = 0$ implica $a = 0$. Ahora vamos a demostrar que los vectores e_{ij} son separadores. Esto en particular dice que D es una representación fiel. Suponiendo que $D(a)e_{00} = 0$ entonces $D^*(a)D(a)e_{00} = 0$ entonces $\int a^*a = 0$ eso quiere decir que $a = 0$.

Cada e_{ij} se puede generar a partir de e_{00} definiendo

$$e_{ij} = D(u^i v^j)e_{00}.$$

Suponiendo que

$$D(a)e_{ij} = 0$$

entonces

$$D(au^i v^j)e_{00} = 0,$$

entonces $au^i v^j = 0$ pero como u^i y v^j son unitarios, multiplicando por sus inversos se obtiene que $a = 0$. Hemos visto entonces que los e_{ij} son vectores separadores.

3.3. Propiedades geométricas del toro cuántico.

Consideremos de nuevo las simetrías de traslación del toro y observemos que se pueden ver también como simetrías internas. Si por ejemplo consideramos la conjugación por el generador v:

$$a \mapsto vav^*,$$

los generadores se mapean del siguiente modo:

$$u \mapsto zu \qquad v \mapsto v.$$

Esta conjugación es un caso particular del automorfismo de $T_{\alpha,\beta}$ cuando α es z y β es 1, es decir, $T_{z,1}$, de modo similar se ve que si consideramos la conjugación $a \mapsto u^*au$, entonces tenemos $u \mapsto u$, y $v \mapsto zv$, se trata del automorfismo $T_{1,z}$, pero los automorfismos internos (conjugaciones) forman un grupo, de modo que todas las expresiones algebraicas con $T_{1,z}$ y $T_{z,1}$ son automorfismos internos, o sea el conjunto $\{T^i_{1,z}T^j_{z,1}\}$ con i, $j \in \mathbb{Z}$ genera el subgrupo de los automorfismos internos que son traslaciones a lo largo del toro.

3.4. Simetrías en el caso racional

Decimos que z es racional cuando es raíz de 1. Si $z^d = 1$ y d es el mínimo número natural con esta propiedad, entonces las potencias de z en el círculo unitario de $\mathbb{C}$ se ven como en la figura 3.4.

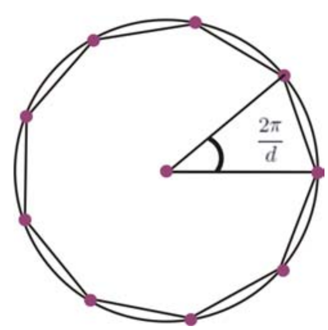


Figura 3.4: Potencias de z en el círculo unitario

Obsérvese que para cada par de índices i y j existe una transformación distinta en $\{T_{\alpha,\beta}\}$, tenemos en total d^2 transformaciones de simetría en el toro que provienen de los automorfismos internos arriba mencionados. Estas traslaciones forman una red en el toro que se ilustra en la figura **??**.

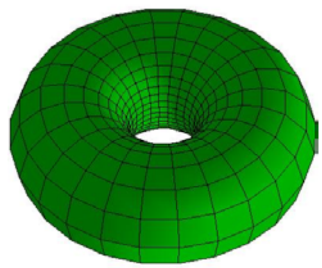


Figura 3.5: Red sobre el toro

3.5. Simetrías en el caso irracional

Decimos que z es irracional si z no es una raíz de 1, entonces se puede escribir $z = e^{2\pi i\theta}$ con $\theta \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, en la figura 3.6 se esboza como se ven las potencias de z en el círculo unitario.

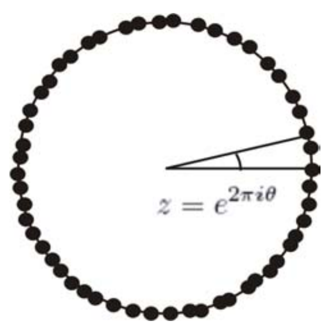


Figura 3.6: Las potencias de z son un conjunto denso en el círculo unitario.

De este modo se obtienen casi todas las transformaciones $T_{\alpha,\beta}$, ya que cualesquiera α y β se pueden aproximar por potencias de z.

3.6. El centro como base clásica para una fibración cuántica canónica

El centro $Z(A)$ de un álgebra A, se compone de los elementos $a \in A$ tales que $ab = ba$ para todo $b \in A$, pero en este caso es suficiente, considerar los elementos que conmutan con los generadores u y v, es decir que $au = ua$ y $av = va$; esto se puede reescribir del modo siguiente:

$$uau^* = a$$

$$vav^* = a.$$

Estas últimas expresiones nos dicen que los elementos del centro son fijos bajo cualquier automorfismo interno, y entonces para cualquier elemento unitario w, se cumple $waw^* = a$, en particular cualquiera de las transfomaciones en $\{T_{z^k,z^l}\}$ dejan fijos a los elementos del centro.

3.7. El centro en el caso racional

En el caso racional tenemos un grupo de transformaciones que es el grupo cíclico de orden d que es $\mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d$. En geometría clásica se tiene un grupo clásico y las órbitas de la acción del grupo; nos interesan funciones que son invariantes bajo la acción del grupo pero éstas son las funciones que toman los mismos valores sobre las órbitas, por eso es equivalente tomar las funciones en el espacio base.

El concepto de acción libre se formula en términos de puntos, en una acción libre por definición el estabilizador de cada punto es trivial. Aquí no tenemos puntos pero hay un modo de formular acción libre que no detallaremos en este trabajo pero se puede revisar en [19]. Tener una acción libre es tener un haz principal. En este caso tenemos un haz principal cuyo grupo estructural es clásico, los puntos fijos de la acción forman el centro. El toro se ve como un haz con fibras discretas.

Tenemos la acción de un grupo finito de automorfismos, y se puede construir un proyector de grupo, en un grupo finito compacto que se puede llevar a bloques irreducibles. Esto último tampoco se trata en este trabajo, pero aquí lo que nos interesa es destilar el bloque invariante. Este bloque se obtiene por medio de un proyector π definido como,

$$\pi(a) = \frac{1}{d^2} \sum_{k,l=0}^{d-1} T_{z^k,z^l}(a). \tag{3.2}$$

El proyector π tiene las siguientes propiedades,

- $\pi^2 = \pi$
- $\pi(A) = Z(A)$
- El mapeo π es un mapeo positivo entre álgebras C^*.

$$a \geq 0 \longrightarrow \pi(a) \geq 0.$$

- El mapeo π es bilineal sobre $Z(A)$, es decir

$$\pi(abc) = a\pi(b)c$$

donde b es cualquier elemento de A y $a, c \in Z(A)$.

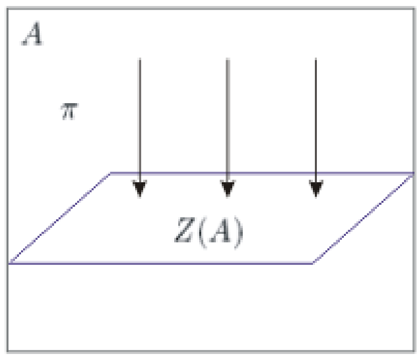


Figura 3.7: Proyección de A sobre su centro por π.

Geométricamente se trata de un proyector. El mapeo π proyecta toda el álgebra A en su centro. Cualquier $a \in A \setminus \mathcal{A}$, se puede aproximar por una sucesión de elementos $\{a_n\} \subset \mathcal{A}$, de tal modo que

$$\lim a_n = a.$$

Por otro lado el mapeo π es continuo, por lo tanto al aplicarlo a la ecuación anterior se obtiene

$$\pi(a) = \lim \pi(a_n),$$

pero para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\pi(a_n) \in \mathcal{A}$, entonces $\overline{Z(\mathcal{A})} = Z(A)$, (esto no siempre se cumple en un álgebra C^*).

Ahora es preciso conocer el centro de $\mathcal{A}$. Al actuar con los automorfismos $T_{z^k z^l}$ sobre todos los elementos de $\mathcal{A}$ se obtiene

$$T_{z^k, z^l}(u^n v^m) = z^{kn+lm} u^n v^m$$

queremos que al aplicar π definido en la ecuación (3.2) se obtenga lo mismo, y la única posibilidad para que esto funcione es que ambos m y n sean múltiplos de d, de lo contrario la suma se hace cero.

Como d divide a n y a m, el centro de $\mathcal{A}$ consta de los elementos de la forma

$$Z(\mathcal{A}) = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} c_{kl} u^{dk} v^{dl}.$$

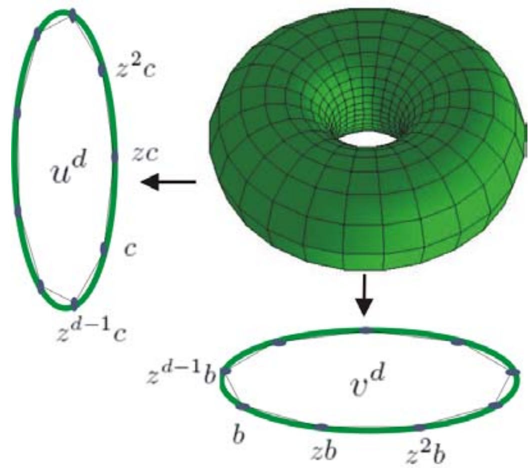


Figura 3.8: Orbitas de la acción del grupo cíclico $\mathbb{Z}_d$.

El centro es un toro clásico como vamos a ver, ya que tomar las coordenadas u^d y v^d en lugar de u y v, equivale a no distinguir entre elementos de la órbita de la acción del grupo cíclico $\mathbb{Z}_d$.

Tomamos una órbita en cada círculo, y al elevar a la potencia d cualquiera de las coordenadas canónicas u o v, obtenemos la misma órbita, entonces tomamos el factor espacio que resulta de no distinguir entre elementos de la órbita lo que obtenemos es de nuevo un círculo, como en la figura 3.9.

$$\{c, zc, z^2c ... z^{d-1}c\}$$

$$\{b, zb, z^2b ... z^{d-1}b\}$$

En la figura 3.8 se ilustra que el centro del toro es el producto de dos círculos en cada uno de los cuales se ha tomado una órbita. Es claro que el espacio clásico asociado a $Z(A)$ es un toro, que es la base de un haz cuántico fibrado que es el toro cuántico. Es un ejemplo de un haz cuántico con fibra clásica y grupo estructural clásico que es $\mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d$. Un pequeño cambio en este número z origina que las fibras cambien drásticamente, para cada d tenemos otra fibra, y se sigue obteniendo un toro como base de $Z(A)$.

Regresando al mapeo π, en realidad es “integración vertical” sobre las fibras. Este procedimiento se puede llevar a cabo siempre que un grupo compacto actúa sobre un espacio cuántico, el caso clásico serán sumas de la acción dividido por el número de elementos del grupo (cuando es finito) y cuando éste es infinito se utiliza la medida de Haar[1].

[1]En grupo topológico compacto existe una única medida de Haar invariante bajo traslaciones

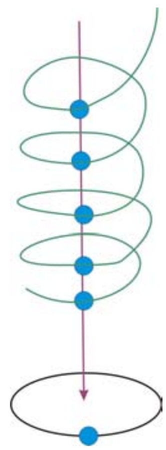


Figura 3.9: El círculo como factor espacio.

3.8. El centro en el caso irracional

Cuando z es irracional, hemos dicho que cualquiera de las transformaciones $T_{\alpha,\beta}$ se puede aproximar por las transformaciones T_{z^k,z^l}, simplemente aproximaremos α y β con las potencias de z. Si $a \in Z(A)$, debe cumplirse $a = T_{z^k,z^l}(a)$, entonces para k y l apropiados y tomando límites, concluimos que $T_{\alpha,\beta}(a) = a$ para todo α y $\beta \in U(1)$. Ahora integrando,

$$a = \int T_{\alpha,\beta}(a) \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi} \frac{\mathrm{d}\beta}{2\pi} = \left(\int a \right) 1 \tag{3.3}$$

Llegamos a esto suponiendo que a estaba en el centro, por lo tanto

$$Z(A) = \mathbb{C}1,$$

lo que es una situación cualitativamente distinta al caso racional. En la figura 3.10 se ilustra la proyección de A sobre su centro.

Desde el punto de vista físico las propiedades del centro corresponden a propiedades clásicas de un sistema, que puede ser cuántico. Tener una propiedad clásica quiere decir que la propiedad se manifiesta en todos los experimentos, siempre se puede saber que valor tiene cierta variable del centro. Un ejemplo es cuando algunas moléculas son puestas en cierto entorno con otras moléculas. En general no se puede decir que es un sistema libre, ya que siempre existe interacción con el entorno (incluyendo fluctuaciones cuánticas del vacío), esta interacción hace que el álgebra que se utiliza tenga un centro no trivial. Concretamente, ciertas moléculas

izquierdas (y derechas) [27]. Este resultado se extiende a grupos cuánticos compactos.

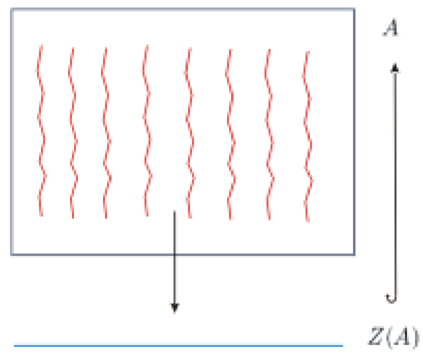


Figura 3.10: Proyección de A sobre su centro.

orgánicas pueden tener orientación izquierda o derecha y nunca se observa superposición de estas propiedades, en este caso tendíamos un centro con al menos dos puntos [28]. En el caso del toro cuántico podemos imaginar un sistema físico, cuyas variables están dadas por u y v junto con las relaciones de conmutación y unitaridad. El complejo z se puede interpretar como magnitud de campos como el electromagnético, u otros campos en el cual está inmerso el sistema. Como hemos analizado, estas pequeñísimas perturbaciones de los campos pueden cambiar drásticamente el comportamiento del sistema, aunque experimentalmente no estamos en capacidad de medir perturbaciones tan finas.

3.9. Subconjuntos cerrados del toro cuántico

Hemos mencionado en la parte de ideales y factor álgebras que los ideales C^* también se pueden interpretar como partes del espacio en el caso clásico, ya que están en correspondencia biunívoca con los subconjuntos cerrados de X. Cualquier $K \subset X$ cerrado (y por lo tanto compacto) queda caracterizado por el ideal C^*

$$I_K = \{f \in A : f|_K = 0\}$$

y cualquier otro ideal C^* en el caso conmutativo es de esta forma. Esta correspondencia permite extrapolar el concepto de conjunto cerrado en el caso cuántico, y por lo tanto también la idea de región como complemento de un conjunto cerrado. Queremos estudiar ahora cuales son las regiones del toro, comenzando por el caso irracional.

3.10. Ideales C^* en el caso irracional

Suponiendo que z es irracional, consideremos $J \subset A$ un ideal C^* no cero. Por definición J es invariante por todos los automorfismos internos, es decir,

$$\omega J \omega^* \subset J \text{ para todo } \omega \in U(A),$$

en particular es invariante por las transformaciones $\{T_{z^k,z^l}\}$ y entonces para cualquiera de las transformaciones $T_{\alpha,\beta}$ también resulta ser invariante por ser cerrado. Si $a \in J$ entonces $a^*a \in J$, integrando sobre a^*a,

$$\int T_{\alpha,\beta}(a^*a)\frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\beta}{2\pi}$$

tampoco salimos de J, pero por la ecuación (3.3), también tenemos

$$\int T_{\alpha,\beta}(a^*a)\frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\beta}{2\pi} = \left(\int a^*a\right)1$$

y suponiendo que $a \neq 0$ (estamos suponiendo que J es un ideal no trivial) obtenemos que $1 \in J$ por lo tanto $J = A$. Se trata de un álgebra C^* simple, no tiene ideales C^* no triviales. Esto quiere decir que el toro cuántico irracional no tiene “partes”.

3.11. Estados en el caso irracional

Analicemos en el caso irracional la traza $\int u^n v^m = \delta_{n,0}\delta_{m,0}$ donde

$$\int ab = \int ba,$$

encontramos que a diferencia del caso racional, en el caso irracional este estado-traza es único en A. Para demostrar que es único supongamos que existe otra traza $\int^*$ que cumple

$$\int^* u^n v^m = \int^* v^m u^n = z^{mn}\int^* u^n v^m$$

por la relación de conmutación entre v y u, como z es irracional $z^{mn} \neq 1$ y la única posibilidad es que

$$\int^* u^n v^m = \delta_{n,0}\delta_{m,0}$$

por lo tanto $\int^* = \int|_{\mathcal{A}}$, y al extender esta traza por continuidad se tiene $\int^* = \int$. Este estado es pues un invariante algebraico, y cada automorfismo preserva este estado-traza,

$$\int T(a) = \int a.$$

3.12. Clasificación de representaciones irreducibles

Consideremos $D : A \to B(H)$ una representación irreducible, evidentemente debe respetar las relaciones del álgebra, es decir $D(u)$ y $D(v)$ deben ser operadores unitarios y,

$$D(v)D(u) = zD(u)D(v). \tag{3.4}$$

3.12.1. Con vectores propios

Supongamos que $D(v)$ tiene al menos un vector propio $D(v)\psi = \lambda\psi$ con $|\lambda| = 1$ (por la unitaridad de $D(v)$)y $\|\psi\| = 1$. Aplicando la ecuación (3.4) al vector ψ del lado izquierdo obtenemos

$$D(v)D(u)\psi = zD(u)D(v)\psi = D(v)[D(u)\psi] = \lambda z D(u)\psi$$

lo que nos dice que $D(u)\psi$ también es vector propio para el operador $D(v)$ con valor propio asociado λz, donde $\|D(u)\psi\| = 1$. Continuando con este procedimiento encontramos que

$$\{\ldots, z^{-2}\lambda, z^{-1}\lambda, \lambda, z\lambda, z^2\lambda, \ldots\}$$

son todos valores propios que pertenecen al espectro discreto del operador $D(v)$, y vuelven a abrir dos posibilidades según sea z racional o irracional. En cualquiera de los dos casos al menos tenemos dos valores distintos que son $z^2\lambda$ y $z\lambda$ y los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son vectores ortogonales.

El conjunto de los vectores propios

$$\{\ldots, D^{-1}(u)\psi, \psi, D(u)\psi, D^2(u)\psi, \ldots\}$$

genera un subespacio invariante bajo la representación D.

3.12.2. Representaciones irreducibles en el caso racional

En el caso racional ($z^d = 1$) tenemos que $Z(A)$ son todas las combinaciones lineales de elementos de la forma $u^{kd}v^{ld}$ que actúan como operadores escalares bajo la representación irreducible D, y todos ellos se pueden escribir en términos de u^d y v^d que son las coordenadas horizontales y verticales del toro base del toro cuántico, entonces u^d y v^d se reducen en operadores escalares. Consideremos operadores que representan elementos arbitrarios del álgebra $\mathcal{A} = \{\sum c_{mn}u^n v^m\}$, si m o n son múltiplos de d la representación D se reduce a un número complejo, esto quiere decir que se tienen a lo más d^2 operadores linealmente independientes,

$$\{u^p v^q : p, q = 0, \ldots, d-1\}.$$

Entonces $\dim D(A) \leq d^2$, por lo que tenemos un álgebra C^* de dimensión finita $D(A)$ que actúa de manera irreducible en un espacio de Hilbert, y por lo tanto es un álgebra C^* isomorfa a $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pero esto también implica que $\dim H = d$, ya que tenemos el conjunto cíclico de vectores propios:

$$\{\psi, D(u)\psi, \ldots, D^{d-1}(u)\psi\}$$

cuyos valores propios son:

$$\{\lambda, z\lambda, \ldots, z^{d-1}\lambda\},$$

pero como la representación es irreducible estos vectores propios forman una base de H.

Para estudiar el comportamiento de los operadores que obtenemos por esta representación consideremos $\mu 1 = D(u^d)$ y $\nu 1 = D(v^d)$, $|\mu| = |\nu| = 1$, μ y ν quedan determinados de forma única por la representación D, de modo que si tenemos otra representación irreducible con un par distinto a μ y ν, entonces no puede ser equivalente a D. Aún no sabemos si hay dos representaciones irreducibles no equivalentes con $\mu = \nu$. Considerando la base de vectores propios, y sus valores propios D se escribe como

$$D(v) = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & z\lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & z^{d-1}\lambda \end{pmatrix}$$

La matriz correspondiente al elemento v^d debe ser una matriz escalar con ν en la diagonal, esto quiere decir que todos estos números son raíces de grado d del número complejo. La matriz corrrespondiente a u es

$$D(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & \mu \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para cualesquiera $\mu, \nu \in U(1)$, queda completamente construida la representación. Así que hemos logrado clasificar todas las posibles representaciones irreducibles en el toro cuántico racional.

A partir de una imagen de haz también se pueden clasificar las representaciones irreducibles.

Dado un punto en el espacio asociado a $Z(A)$, su caracter correspondiente $\kappa : Z(A) \to \mathbb{C}$ está determinado de forma única por sus valores en los generadores de $Z(A)$, que son u^d y v^d. Consideremos de nuevo la proyección π y la composición

$$A \xrightarrow{\pi} Z(A) \xrightarrow{\kappa} \mathbb{C}$$

que es un estado $\rho = \kappa\pi$. Consideremos la terna de Gelfand-Naimark-Segal asociada a este estado. Podemos llamar

$$\kappa(u^d) = \mu, \qquad \kappa(v^d) = \nu$$

donde todas las posibles parejas (μ, ν) cubren el toro, π aniquila todos los posibles monomios $u^m v^n$ donde al menos uno de los números naturales m y n no es divisible por d. Ahora construimos el espacio de Hilbert $H_\rho = A/I_\rho$. Este espacio tiene dimensión finita y toma la forma

$$H_\rho = \text{lím}\{[u^p v^q] : p, q = 0, \ldots, d-1\} \tag{3.5}$$

entonces $\dim H_\rho = d^2$. Los representantes de estos vectores forman una base ortonormal de H_ρ.

La representación de Gelfand-Naimark-Segal actúa en el espacio H_ρ por la multiplicación izquierda.

$$D_\rho(a)[b] = [ab]$$

Al tomar cualquier elemento en A, uno puede aplicar la representación, y luego descomponer internamente el producto en términos de los generadores para expresarlo como en (3.5) y se observa que

$$D_\rho(u^d) = \mu 1 \qquad D_\rho(v^d) = \nu 1$$

esto quiere decir que la dimensión de esta representación es d^2, ya vimos que estas parejas (μ, ν) determinan una representación irreducible, sin embargo habíamos analizado que la dimensión de los espacios imagen de las representaciones irreducibles era d, por lo tanto se infiere que ésta no es una representación irreducible, y se concluye que ρ no es un estado puro. Y en este espacio H_ρ se puede repetir la construcción de subespacios invariantes, de tal modo que esta representación es suma de d copias de la representación canónica irreducible a la que llamaremos $\Delta_{\mu,\nu}$,

$$\underbrace{\Delta_{\mu,\nu} \oplus \Delta_{\mu,\nu} \oplus \ldots \oplus \Delta_{\mu,\nu}}_{d \quad \text{veces}} = D_\rho$$

donde D_ρ es la representación de Gelfand-Naimark-Segal que actúa sobre

$$\underbrace{\mathbb{C}^d \oplus \mathbb{C}^d \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^d}_{d \quad \text{veces}} = H_\rho$$

Tomando el vector

$$\psi = [1] + \frac{1}{\nu_0}[v] + \ldots + \frac{1}{\nu_0^{d-1}}[v^{d-1}]$$

donde ν_0 es cualquier raíz d-ésima de ν. Al aplicar la representación de Gelfand-Naimark-Segal se obtiene

$$D(v)\psi = [v] + \frac{1}{\nu_0}[v^2] + \ldots + \frac{1}{\nu_0^{d-1}}[v^d]$$

$$= \nu_0[1] + [v] + \frac{1}{\nu_0}[v^2] + \ldots + \frac{1}{\nu_0^{d-2}}[v^{d-1}] = \nu_0\psi$$

ya que el representante de v^d es ν. Ahora podemos repetir toda la construcción, tenemos un vector propio asociado al valor propio ν_0, utilizando ahora el operador $D(u)$, constuimos el conjunto $\{\psi, D(u)\psi, \ldots, D(u)^{d-1}\psi\}$ que es una base ortonormal de un espacio de dimensión d donde se reduce la representación D. Variando ν_0 por todas las raíces de grado d de ν, tenemos d bases en cuyos subespacios generados se reduce la representación D. Lo que se quiere enfatizar aquí es que D no es una representación irreducible es una suma de una sola representación irreducible, a estas representaciones se les llama múltiples-irreducibles.

De modo que los puntos de la base (toro clásico) clasifican todas las representaciones ya que cada punto induce un estado Δ en la parte clásica y al integrar homogeneamente sobre la fibra se obtienen todas las posibles representaciones múltiples irreducibles.

3.12.3. Representaciones irreducibles en el caso irracional

Con vectores propios

Si z es irracional, supongamos que el operador $D(v)$ tiene un vector propio ψ, $\|\psi\| = 1$, $D(v)\psi = \lambda\psi$. Entonces al aplicar sucesivamente $D(v)$, se obtiene una base ortonormal infinita de un subespacio de H invariante para D:

$$\{\ldots D^{-k}(u)\psi, \ldots, D^{-1}(u)\psi, \psi, D(u)\psi, \ldots, D^k(u)\psi, \ldots\}.$$

La representación D se reduce en este subespacio. El operador $D(u)$ actúa como un operador de traslación y el operador $D(v)$ genera la siguiente órbita:

$$\{\ldots, z^{-k}\lambda, \ldots, z^{-1}\lambda, \ldots, \lambda, z\lambda, \ldots, z^k\lambda, \ldots\}$$

lo que también es una órbita de la acción del grupo $\mathbb{Z}$ sobre $U(1)$, que geométricamente se ve como la figura 3.6 rotada por el argumento de λ.

Esta órbita forma un conjunto denso en todas partes en el círculo, el vector con el que se empieza a construir la órbita resulta irrelevante, lo importante es la órbita misma que es una característica intrínseca del operador $D(v)$ en cuanto a que nos da un espectro discreto. Utilizando la representación en matrices tenemos

$$D(v) = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & z^{-1}\lambda & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & z\lambda & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad D(u) = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ \ddots & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Como no se cierra el ciclo no aparece otro parámetro como en el caso racional. La representación está completamente determinada por la órbita, entonces el espacio de los módulos, es decir, el espacio de los puntos que enumeran las representaciones es en este caso el espacio de las órbitas del círculo bajo la acción del grupo $\mathbb{Z}$ que es $U(1)/\mathbb{Z}$. Distintos puntos de $U(1)/\mathbb{Z}$ corresponden a distintas representaciones irreducibles, pero aún no sabemos si son todas, ya que se supuso al principio de este análisis que D tenía un vector propio ψ.

Vale la pena observar que la acción del grupo Z sobre $U(1)$ cumple las condiciones para ser una acción ergódica. Una acción o fibración es ergódica cuando al intentar tomar un subconjunto medible dentro del espacio de las clases resulta que el espacio base solo tiene partes negligibles o bien, cuyos complementos son negligibles, el espacio es como una entidad entera e irrompible. Si se acepta el axioma de elección se pueden hipotéticamente tomar subconjuntos con otras características. El costo es que salimos del contexto de las funciones medibles, apoyándonos en el axioma de elección solo nos queda hacer matemáticas no constructivistas que no resultan muy útiles.

Dados dos puntos en el espacio base, corresponden como hemos dicho, a dos representaciones irreducibles, que no se podrán distinguir de algún otro modo, no se puede construir un concepto de distancia allí, ni siquiera es un espacio de Hausdorff, de modo que cualquier posibilidad de accesarla por métodos experimentales clásicos se puede excluir.

3.12.4. Sin vectores propios

Ahora supongamos que no existen vectores propios para $D(v)$, entonces su espectro es continuo. Aquí se pueden utilizar vectores propios generalizados, en lugar de la descomposición espectral, se puede hacer la descomposición continua espectral generalizada en términos de las funciones generalizadas de Dirac.

Consideramos los vectores generalizados asociados a ciertos puntos en el círculo. Sucede que si λ es un punto en el círculo que tiene un vector propio generalizado asociado, entonces también λz lo tiene, de este modo se forma una órbita densa en todas partes dentro del círculo ya que se tiene otra vez una acción ergódica, y esto se cumple para cada número complejo de módulo 1. Lo que se obtiene es el espacio $H = \ell^2[U(1)]$, dada $\psi \in \ell^2[U(1)]$, tenemos que

$$[D(v)\psi](\omega) = \omega\psi(\omega)$$

donde ω es un número complejo de módulo 1, lo que nos da una función delta de Dirac. La posibilidad para $D(u)$ es

$$[D(u)\psi](\omega) = \lambda\psi(z^{-1}\omega)$$

Así definida D es una representación del toro cuántico:

$$[D(v)D(u)\psi(\omega)] = \omega[D(u)\psi(\omega)] = \lambda\omega\psi(z^{-1}\omega) \tag{3.6}$$

$$[D(u)D(v)\psi](\omega) = \lambda(D(v)\psi)(z^{-1}\omega) = \lambda z^{-1}\omega\psi(z^{-1}\omega) \tag{3.7}$$

por definición, lo que implica:

$$D(v)D(u) = zD(u)D(v).$$

La base canónica de $\ell^2[U(1)]$ está formada por los $\{\omega^k]$. El modo en que actúan los operadores $D(u)$ y $D(v)$ sobre esta base es

$$D(u)\omega^k = \lambda z^{-k}\omega^k \qquad D(v)\omega^k = \omega^{k+1}.$$

Vemos que actúan casi igual que en caso en que teníamos vectores propios, solo que con los papeles de $D(u)$ y $D(v)$ intercambiados. Ahora $D(u)$ tiene valores propios y $D(v)$ se comporta como un operador de traslación. Se observa una dualidad entre el espectro discreto y el espectro continuo, es decir, cuando $D(u)$ tiene espectro discreto, $D(v)$ tiene espectro continuo, y viceversa. En conclusión la clasificación de representaciones irreducibles es igual que en el caso anterior salvo por los papeles que juegan $D(v)$ y $D(u)$ respectivamente, y éstas son todas las representaciones irreducibles.

Resumiendo, hemos demostrado que en el caso irracional A es simple, en cada representación tenemos que A es isomorfa a $D(A)$.

Consideremos ahora la parametrización $z = e^{2\pi i\theta}$ con $\theta \in (0, 1)$. En el caso irracional θ es irracional. Para remarcar la dependencia en θ del álgebra A, escribiremos A_θ en lugar de A.

A partir de u y v se puede considerar otra pareja de generadores para A, derivando sus relaciones de conmutación de las relaciones entre u y v, por ejemplo,

$$u \rightsquigarrow u^m v^n = \tilde{u}$$

$$v \rightsquigarrow u^p v^q = \tilde{v}.$$

La relación de conmutación entre los nuevos generadores es

$$u^p v^q u^m v^n = z^{mq} u^p v^n$$

$$= z^{mq-pn} vu = z^{\mathrm{Det}[\tau]} vu$$

lo que se resume como,

$$\tilde{v}\tilde{u} = z^{\mathrm{Det}[\tau]}\tilde{u}\tilde{v}$$

donde τ es la matriz

$$\tau = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix}$$

que corresponde al cambio de generadores. Ahora bien, si $\mathrm{Det}[\tau] = 1$ tenemos la misma relación de conmutación que con u y v, y si $\mathrm{Det}[\tau] = -1$ es la misma relación con los papeles de u y v intercambiados. Por lo tanto el grupo $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ actúa en el álgebra A_θ de tal modo que

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_\theta).$$

3.13. Proyectores

Recordemos que la interpretación geométrica de los proyectores en el caso clásico son funciones continuas que corresponden a subconjuntos abiertos y cerrados al mismo tiempo. Queremos averiguar si existen estas "partes" no triviales para el toro cuántico.

Sea $p^2 = p = p^*$ un proyector. Supongamos primero que $p \in \mathcal{A}_\theta$, entonces p se puede escribir como una combinación finita

$$p = \sum_{n,m} C_{nm} u^n v^m.$$

Pongamos atención en los monomios en los cuales la potencia de u es máxima y reescribimos

$$p = \sum d_k u^k f_k(v).$$

Al elevar al cuadrado obtenemos para u el exponente no trivial $2k$, pero esto que obtenemos no puede ser igual a p, porque habíamos supuesto que k era el exponente de valor absoluto máximo. Por lo tanto no hay proyectores en $\mathcal{A}_\theta$, y de aquí podríamos concluir equivocadamente que no los hay tampoco en A_θ ya que el toro cuántico es casi el producto de dos círculos que son dos espacios conexos, y la intuición geométrica nos dice que debería ser un espacio conexo.

3.13.1. Construcción de proyectores en A_θ

Al contrario de lo que nos dice la intuición geométrica, veremos que el toro cuántico tiene muchas "partes" y ahora vamos a construir muchos proyectores. Los proyectores y las involuciones hermitianas son equivalentes en el sentido de que si tenemos una involución se puede construir a partir de ella un proyector, y viceversa. Así que construiremos una involución hermitiana J, $J^2 = 1$, $J^* = J$. Y a partir de ella definiremos el proyector $p = (1 + J)/2$. La involución J tiene dos subespacios propios con valores propios 1 y -1. Consideremos las funciones $f, g : [0, 1] \to [-1, 1]$, estamos identificando el círculo unitario con el intervalo $[0, 1)$, $0 \leq \theta < 1$. Las gráficas aproximadas de f y g se muestran a continuación:

La función f cumple:

- $f(\epsilon/2) = 0 = f(\theta + \epsilon/2)$
- $f(0) = f(\theta + \epsilon) = -1$
- $f(x) = 1 \quad$ para todo $x \in [\epsilon, \theta]$
- Es impar en los intervalos $[0, \epsilon]$ y $[\theta, \theta + \epsilon]$ con respecto de los puntos medios de ambos intervalos respectivamente.

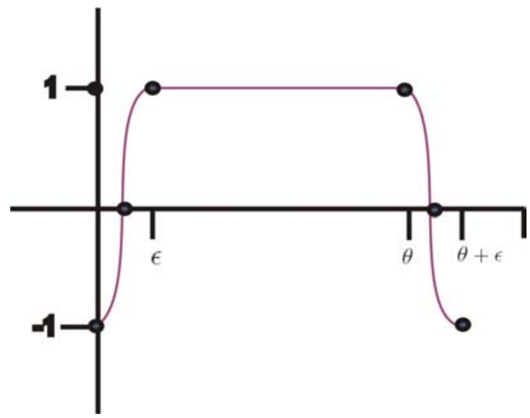


Figura 3.11: $f : [0, 1] \to [-1, 1]$

La función g cumple:

- $g(0) = g(\epsilon) = g(\theta) = g(\theta + \epsilon) = 0$
- $g(\epsilon/2) = g(\theta + \epsilon/2) = 1$
- Es par en los intervalos $[0, \epsilon]$ y $[\theta, \theta + \epsilon]$ con respecto a las rectas $x = \epsilon/2$ y $x = \theta + \epsilon/2$ respectivamente, y en los puntos no especificados se harán algunos ajustes que mencionaremos más adelante.

Todo está en el círculo, aplicamos rotaciones por un ángulo θ, $\overset{\curvearrowright}{g}$ se obtiene de g rodeando por θ, en la gráfica que tenemos esto se traduce a trasladar g una longitud θ hacia la derecha. Recordando el cálculo funcional continuo que se puede aplicar a los elementos normales del álgebra C^*, vamos a actuar al elemento u por f y g del modo siguiente:

$$f(u) + g(u)v + v^*g(u) = J.$$

Se cumple que J es hermitiano porque f y g son funciones reales,

$$g(u)v = (v^*g(u))^*.$$

Solo falta verificar que J es involución, considerando su cuadrado,

$$\begin{aligned} J^2 = f^2 + g^2 + v^*g^2(u)v + f(u)g(u)v \\ +g(u)vf(u) + f(u)v^*g(u) + v^*g(u)f(u) + [g(u)v]^2 + [v^*g(u)]^2, \end{aligned} \tag{3.8}$$

pero para cualquier función ψ se cumple

$$v^*\psi(u)v = \overset{\curvearrowright}{\psi}(u) \tag{3.9}$$

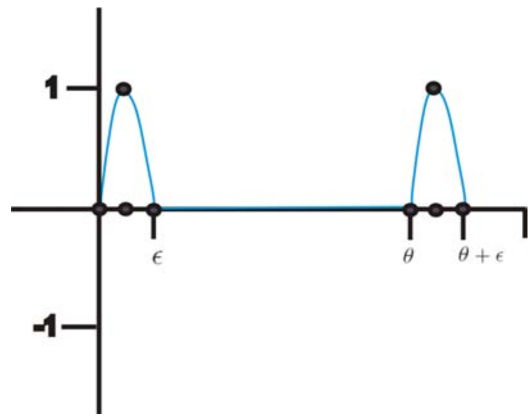


Figura 3.12: $g : [0,1] \to [-1,1]$

ya que ambos lados de la igualdad son automorfismos del álgebra de funciones $C[U(1)]$, para ver que son iguales basta checar la igualdad en el generador u, y tenemos

$$v^* uv = \overline{z}u$$

justamente lo que se obtiene al rotar por θ.

Queremos reducir la ecuación (3.8) a

$$J^2 = f^2(u) + g^2(u) + [\stackrel{\frown}{g}(u)]^2 = 1 \tag{3.10}$$

Al tomar el cuadrado de f obtenemos aproximadamente la gráfica que se ve en la figura 3.13.

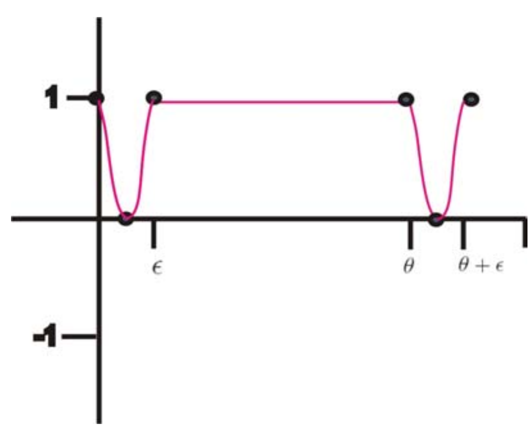


Figura 3.13: $f^2 : [0,1] \to [-1,1]$

el ajuste de g en los demás puntos consiste en definirla en los puntos restantes de modo que la suma en (3.10) sea 1, es claro que esto siempre se puede hacer.

Ahora veremos como todos los demás términos de la suma en verdad desaparecen, primero vemos que,

$$(g(u)v)^2 = g(u)vg(u)v = v \overset{\curvearrowright}{g}(u)g(u)v = 0$$

esto se obtiene multiplicando por v^*, y de esto ya tenemos

$$(g(u)v)^2 = (v^*g(u))^2 = 0$$

ahora bien,

$$f(u)g(u)v + g(u)vf(u) = g(u)[f(u) + \overset{\curvearrowright}{f}(u)]v = 0$$

esto se obtiene también multiplicando por v^* y porque $[f(u) + \overset{\curvearrowright}{f}(u)] = 0$.
De modo que estas relaciones y sus conjugados se hacen cero y por lo tanto, $J^2 = 1$.

Ya tenemos un proyector

$$p = \frac{J+1}{2}.$$

Este proyector está fuera del alcance de la "geometría algebraica". Si queremos conocer la "medida" de la componente que corresponde geométricamente al proyector p solo tenemos que calcular $\int p$,

$$\int p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int J$$

$$\int J = \int f(u) + \int [g(u)v + v^*g(u)]$$

$$= \int f(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[\theta - \epsilon - (1 - \theta - \epsilon)] = \theta.$$

De 0 a ϵ y de θ a $\theta + \epsilon$ integra cero. Este razonamiento se puede hacer con los nuevos generadores $u^n v^m$ y encontramos muchos otros proyectores cuya parte representada tendrá medida $nm\theta$ (módulo $\mathbb{Z}$). Obsérvese que este conjunto es denso en el intervalo $(0,1)$ en el caso irracional.
Se puede demostrar que cualquier proyector tiene medida dentro del conjunto antes mencionado. Como sabemos, dos proyectores p y q son equivalentes cuando $p = u^*u$, $q = uu^*$ donde u es una isometría parcial [25], es decir cuando se puede transformar uno a otro por medio de una isometría parcial. En este caso se puede mostrar que son equivalentes si y solo si $\int p = \int q$. En el caso clásico dos proyectores son equivalentes solo cuando coinciden.

Entonces acabamos de mostrar que el conjunto $\{\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}\}$ es una invariante algebraica ya que demostramos que $\int$ es el único estado-traza. Si consideramos otro ángulo que nos diera un conjunto distinto a $\{\mathbb{Z}+\theta\mathbb{Z}\}$, esto querría decir que el álgebra obtenida no es isomorfa con la primera.

Ahora queremos ver cuándo se obtienen álgebras isomorfas, para esto consideremos $\theta, \theta' \in (0,1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, supongamos que

$$(0,1) \cap \{\mathbb{Z}+\theta\mathbb{Z}\} = (0,1) \cap \{\mathbb{Z}+\theta'\mathbb{Z}\},$$

entonces $\theta = p + q\theta'$ y $\theta' = k + l\theta$, entonces $\theta = p + q(k + l\theta)$, pero como θ es irracional entonces $ql = 1$ por lo que $q = l = 1$ o $q = l = -1$.

Si $q = 1$ entonces $p = 0$ y $\theta = \theta'$ y tenemos la misma álgebra.

Si $q = -1$ entonces $p = 1$ por lo que $\theta = 1-\theta'$, y este segundo caso corresponde a cambiar los papeles de los generadores, ya que $\theta \mapsto 1-\theta$ se traduce a $z \mapsto \overline{z}$.

Recordemos que el parámetro irracional θ es el ángulo tal que $z = e^{2\pi i\theta}$.

Obsérvese que si escribimos

$$p = f'(u) + g'(u)v + v^* g'(u), \tag{3.11}$$

entonces $g' = g/2$ y $f' = (1+f)/2$ ya que $p = (1+J)/2$. Consideremos en lugar de los generadores u y v, los generadores u^n y v^n, entonces la relación de conmutación para los nuevos generadores es

$$v^n u^n = z^{n^2} u^n v^n,$$

el ángulo θ se transforma en el ángulo $n^2\theta$, sin embargo nos interesa tomar números en el intervalo $(0,1)$ así que tomaremos $n^2\theta$ módulo $\mathbb{Z}$. Considerar enteros negativos es equivalente a considerar el proyector $1-p$ en lugar de p, en cuyo caso tendríamos $1-f'$ en lugar de f', $-v$ en lugar de v y $1-\theta$ en lugar de θ para que $1-p$ pueda escribirse como en la ecuación (3.11).

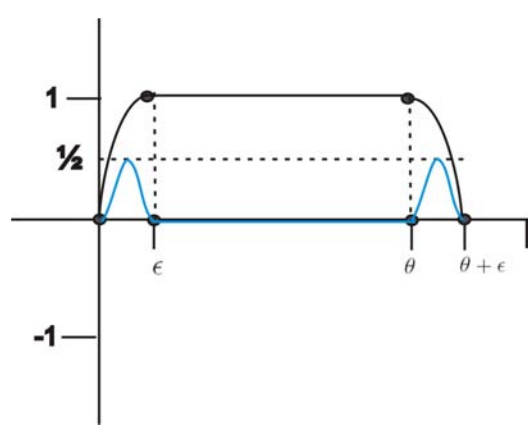


Figura 3.14: f' y g'

La longitud del soporte es ahora $1-(\theta-\epsilon)$. El toro cuántico se puede "descomponer" en mas componentes (dadas por proyectores), ya que para cualquier proyector p tenemos una descomposición del espacio cuántico en los subespacios a que proyectan p y su proyector ortogonal $1-p$, pero además siempre se pueden encontrar dos números reales $m_1, m_2 \in (0,1)\cap\{\mathbb{Z}+\theta'\mathbb{Z}\}$, tales que $\int p = m_1+m_2$ y por lo tanto dos proyectores p_1 y p_2 tales que $\int p_1 = m_1$ y $\int p_2 = m_2$, ya que para todos los proyectores existe alguno equivalente de los que hemos construido. Así que estos dos proyectores se pueden escribir como:

$$p_1 = f_1'(u) + g_1'(u)v^k + v^k g_1'(u)$$
$$p_2 = f_2'(u) + g_2'(u)v^k + v^k g_2'(u),$$

y para que sean ortogonales deben cumplir $p_1p_2 = p_2p_1 = 0$.

Entonces tenemos que p_1+p_2 es también un proyector y $\int(p_1+p_2) = \int p$, de modo que $p_1+p_2 \sim p$, pero esto quiere decir que podemos pasar de p_1+p_2 a p por medio de una isometría parcial,

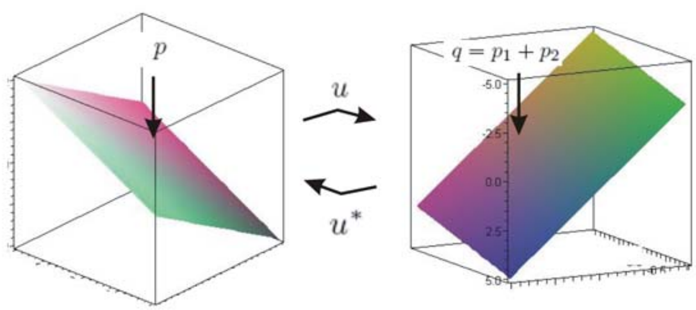


Figura 3.15: Isometría parcial

$$up_1u^* + up_2u^* = u^*qu = p,$$

donde $up_1u^* = q_1$ y $up_2u^* = q_2$.

Aplicando el mismo argumento podemos seguir dividiendo y en el límite obtenemos una subálgebra conmutativa formada por los proyectores obtenidos de este modo. Esta subálgebra corresponde a un espacio clásico extremadamente disconexo. Este espacio es nada menos que en el conjunto triádico de Cantor. El procedimiento que se hizo al descomponer los proyectores como suma de dos proyectores ortogonales es equivalente al modo en que se obtiene el conjunto triádico de Cantor. A su vez el conjunto de Cantor se puede identificar con el conjunto $[0,1]^{\mathbb{N}}$, que es como un cristal infinito, ya que para cada número natural n se puede proyectar a un hipercubo de dimensión n.

Capítulo 4

Grupos cuánticos compactos

4.1. Recordando grupos clásicos matriciales

En esta parte recordaremos los grupos de Lie matriciales. El grupo general lineal de matrices de $n \times n$ con coeficientes complejos se denota por $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, cada matriz en $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ representa una transformación lineal invertible de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^2$. El grupo especial lineal $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ cuyos elementos son matrices de determinante uno.

Otro subgrupo importante de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, es el de las matrices unitarias $\mathrm{U}(2)$ que cumplen

$$AA^* = A^*A = I$$

donde $A = (a_{ij})$ y $A^* = (\overline{a_{ji}})$. El grupo clásico $\mathrm{SU}(2)$ es la intersección de los subgrupos $\mathrm{U}(2)$ y $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Todos estos grupos caen dentro del marco conceptual de grupos de Lie.

Recordemos que un grupo de Lie es un grupo con estructura de variedad diferenciable en el cual la operación de producto y la función que manda cada elemento a su inverso son suaves.

El determinante es un mapeo continuo y suave, de modo que el conjunto de las matrices con determinante distinto de cero es abierto en el espacio euclidiano de todas las matrices por ser la imagen inversa del abierto
$\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ la condición algebraica del determinante disminuye una dimensión a la variedad.

En general el grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tiene dimensión compleja n^2, por lo que tiene $2n^2$ dimensiones reales, $\mathrm{SU}(n)$ tiene dimensión $n^2 - 1$.

4.2. SU(2) Clásico

Considérese la matriz

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$.

Para caracterizar las matrices de SU(2) debemos encontrar las restricciones para α, β, γ y δ. Utilizando el hecho de que la matriz g es unitaria, y que $\mathrm{Det}[g] = \alpha\delta - \gamma\beta = 1$, se obtienen las condiciones

- $\delta = \alpha^*$
- $\beta = -\gamma^*$

de modo que la matriz g es de la forma

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix} \quad \text{donde } |\alpha|^2 + |\gamma|^2 = \mathrm{Det}[g] = 1$$

El grupo SU(2) es difeomorfo a una esfera 3 - dimensional.

Variando los parámetros α y γ se obtienen todos los elementos de SU(2), que son matrices que se pueden pensar como elementos abstractos que viven en la esfera de dimensión 3, y que cada uno de ellos tiene asociadas dos funciones continuas,

$$\alpha(g) : \mathrm{SU}(2) \to \mathbb{C}$$
$$\gamma(g) : \mathrm{SU}(2) \to \mathbb{C}$$

de manera que la C^*-álgebra A está generada por las dos funciones α y γ,

$$C[\mathrm{SU}(2)] = C^*(\alpha, \gamma).$$

Después de este breve repaso estamos listos para la generalización cuántica de los grupos matriciales.

4.3. Grupos cuánticos matriciales

Definición 43 *Un grupo cuántico matricial es una terna (A, U, Φ) donde A es un álgebra C^*, U es una matriz unitaria en $\mathcal{M}_n(A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes A$ cuyas entradas general el álgebra $\mathcal{A}$,*

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum c_\omega u^{(*)}_{i_1 j_1} \dots u^{(*)}_{i_k j_k}, \quad \omega \mapsto (i_1 j_1 \dots i_k j_k) \right\},$$

que es densa en todas partes dentro de A, y $\Phi : A \to A \otimes A$ es un homomorfismo C^* que cumple

$$\Phi(u_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \otimes u_{kj}.$$

Se puede demostrar que el coproducto Φ es coasociativo,

$$(\Phi \otimes \mathrm{Id})\Phi(u_{ij}) = \sum_{k,l=1}^{n} u_{ik} \otimes u_{kl} \otimes u_{lj} = (\mathrm{Id} \otimes \Phi)\Phi(u_{ij}),$$

como los homomorfismos $(\Phi \otimes \mathrm{Id})\Phi(u_{ij})$ y $(\mathrm{Id} \otimes \Phi)\Phi(u_{ij})$ coinciden en los generadores, coinciden en todo $\mathcal{A}$.

Los puntos del grupo son los caracteres del álgebra, cada caracter está completamente determinado por sus valores en los generadores. Sea $\kappa : A \to \mathbb{C}$ un caracter, entonces la fórmula

$$\kappa_{ij} = \kappa(u_{ij})$$

nos proporciona una identificación de los caracteres y ciertas matrices en particular. El producto entre dos caracteres φ y ψ tiene traducción a lenguaje matricial y la encontraremos por medio de la definición del coproducto:

$$(\varphi \cdot \psi)(a) = (\varphi \otimes \psi)\Phi(a)$$

$$\begin{aligned}
(\varphi \cdot \psi)_{ij} = (\varphi \cdot \psi)(u_{ij}) &= (\varphi \otimes \psi)\Phi(u_{ij}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\varphi \otimes \psi)(u_{ik} \otimes u_{kj}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \varphi(u_{ik})\psi(u_{kj})
\end{aligned}$$

de modo que (utilizando notación por índices),

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(u_{ik})\psi(u_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{ik}\psi_{kj} = (\varphi \cdot \psi)_{ij}.$$

Se ha llegado al producto común de matrices, el producto del grupo es el producto usual de matrices.

Si u es unitario en A entonces $\Phi(u)$ es unitario en $A \otimes A$ ya que si $f : A \hookrightarrow B$ es un homomorfismo entonces $\mathrm{Id} \otimes f : \mathcal{M}_n(A) \to \mathcal{M}_n(B)$ donde $\mathcal{M}_n(A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes A$ y $\mathcal{M}_n(B) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes B$ es un homomorfismo y como tal preserva la estructura algebraica por lo que Φ lleva elementos unitarios en elementos unitarios.

Cuando $n = 1$ tenemos escalares en lugar de matrices con coeficientes en $\mathcal{A}$, de modo que

$$u = 1 \qquad u = u_{11}$$
$$\Phi(u) = \Phi(u_{11}) = u_{11} \otimes u_{11} = u \otimes u$$

según la fórmula del coproducto.

Tenemos un álgebra C^* generada por un solo elemento unitario u, esta álgebra se corresponde con el círculo U(1). Esto se puede ver a través de los caracteres ya que si κ es un caracter $\kappa \leftrightarrow \kappa(u_{ij})$ y el producto entre caracteres es el producto entre matrices que en este caso son escalares complejos.

En este trabajo no se estudian en detalle todos los grupos cuánticos matriciales, sin embargo analizaremos el caso en que $n = 2$ para matrices con determinante 1, es el grupo SU(2) cuántico.

4.4. SU(2) cuántico

Considérese la matriz

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & -\mu\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix} \quad \alpha, \gamma \in \mathcal{A}, \quad \mu \in [-1, 1] \setminus \{0\}$$

El álgebra $\mathcal{A}$ se define por medio de los generadores α y γ y las relaciones que induce la unitaridad de la matriz U,

$$UU^* = \begin{pmatrix} \alpha & -\mu\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ -\mu\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

donde U^* es la matriz transpuesta conjugada de U.

Entonces

- $\alpha\alpha^* + \mu^2\gamma^*\gamma = 1$
- $\alpha\gamma^* = \mu\gamma^*\alpha$
- $\gamma\alpha^* = \mu\alpha^*\gamma$
- $\gamma\gamma^* + \alpha^*\alpha = 1$

Vemos que la penúltima relación se obtiene conjugando la segunda. De la segunda relación de unitaridad

$$U^*U = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ -\mu\gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\mu\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se obtienen las relaciones

- $\alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = 1$
- $-\alpha^*\mu\gamma^* + \alpha\gamma = 0 \quad$ de donde $\quad \gamma^*\alpha^* = \mu\alpha^*\gamma^*$
- $-\mu\gamma\alpha + \alpha\gamma = 0 \quad$ de donde $\quad \alpha\gamma = \mu\gamma\alpha$
- $\mu^2\gamma\gamma^* + \alpha\alpha^* = 1.$

Estas relaciones no son todas independientes. Se observa que $\gamma\gamma^* = \gamma^*\gamma$, así que γ es un elemento normal.

En resumen, el grupo cuántico compacto matricial SU(2) tiene estructura interna de álgebra C^* con dos generadores α y β, y las relaciones:

1. $\alpha\alpha^* + \mu^2\gamma^*\gamma = 1 = \alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma$
2. $\gamma\gamma^* = \gamma^*\gamma$
3. $\alpha\gamma = \mu\gamma\alpha, \qquad \alpha\gamma^* = \mu\gamma^*\alpha.$

Las relaciones deben preservarse bajo la acción del coproducto, y bastaría verificarlo en los generadores. Sin embargo como Φ es homomorfismo $*$ preserva la unitaridad y las relaciones. Recordemos la definición del coproducto:

$$\Phi : A \to A \otimes A$$

$$\Phi(u_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \otimes u_{kj}.$$

Si quisieramos comprobar directamente en los generadores que las relaciones se cumplen, la expresión explícita de Φ quedaría como

$$\Phi(\alpha) = u_{11} \otimes u_{11} + u_{12} \otimes u_{21} = \alpha \otimes \alpha - \mu\gamma^* \otimes \gamma$$

$$\Phi(\alpha^*) = \alpha^* \otimes \alpha^* - \mu\gamma \otimes \gamma^*$$

$$\Phi(\gamma) = \gamma \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \gamma$$
$$\Phi(\gamma^*) = \gamma^* \otimes \alpha^* + \alpha \otimes \gamma^*.$$

Se ve también haciendo un cálculo directo que Φ actúa como homomorfismo.

Tenemos 3 casos para μ esencialmente distintos,

1. $\mu = 1$
2. $|\mu| \in (0, 1)$
3. $\mu = -1$

En el primer caso, podemos observar en las relaciones que la C^*-álgebra A es conmutativa y se obtiene el grupo SU(2) clásico:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix},$$

como hemos visto.

En el caso $|\mu| \in (0,1)$ el álgebra A ya no es conmutativa, y buscaremos representaciones irreducibles (suponiendo que existen representaciones).

Sea $D : A \to B(H)$ una representación, entonces $D(\alpha)$ y $D(\gamma)$ satisfacen las relaciones del álgebra. De la primera relación

$$\alpha\alpha^* + \mu^2\gamma\gamma^* = 1 = \alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma$$

se deduce que los operadores positivos $D(\alpha\alpha^*)$ y $D(\gamma\gamma^*)$ están mayorados por el operador idéntico 1,

$$\|D(\alpha)\| \leq 1, \quad \|D(\gamma)\| \leq 1,$$

esto nos garantiza que la norma es acotada.

Se hacen estas observaciones para garantizar la existencia de la envolvente universal C^* de $\mathcal{A}$ ya que de este modo podemos tomar el supremo de las normas.

Primero vamos a suponer que $D(\gamma)$ tiene un vector propio ψ de tal modo que $D(\gamma)\psi = c\psi$. Entonces utilizamos la relación $\alpha\gamma = \mu\gamma\alpha$, si a esta igualdad le aplicamos la representación D y aplicamos esto en el vector ψ obtenemos $cD(\alpha)\psi = \mu D(\gamma)D(\alpha)\psi$ lo que nos dice que también $D(\alpha)\psi$ es vector propio para $D(\gamma)$ con valor propio c/μ. Por medio del producto interior podemos calcular $\|D(\alpha)\|$, ya que:

$$\|D(\alpha)\psi\|^2 = \langle\psi, D(\alpha^*\alpha)\psi\rangle = \langle\psi, (1 - D(\gamma^*\gamma))\psi\rangle$$

porque $\alpha^*\alpha = 1 - \gamma^*\gamma$.

De modo que

$$\|D(\alpha)\psi\|^2 = \|\psi\|^2 - \|D(\gamma)\psi\|^2 = (1 - |c|^2)\|\psi\|^2.$$

Por lo tanto $\|D(\alpha)\psi\| = \sqrt{1 - |c|^2}$. Con esto estamos encontrando una restricción para el complejo c, su módulo no puede ser mayor que 1.

Por medio de aplicaciones sucesivas de $D(\alpha)$ en la ecuación anterior se obtiene la siguiente sucesión de vectores propios para $D(\gamma)$:

$$\{\psi, D(\alpha)\psi, D^2(\alpha)\psi, \ldots\}$$

y sus valores propios son:

$$\{c, c/\mu, c/\mu^2, \ldots\}.$$

Observemos que al dividir entre las potencias de μ se están obteniendo valores propios cada vez más grandes, lo que no puede suceder si estamos suponiendo que $D(\gamma)$ es un operador acotado en un espacio de Hilbert. Como en realidad nosotros estamos buscando un espacio de Hilbert en donde exista una representación irreducible de nuestra álgebra C^*, podemos cortar esta sucesión de vectores propios para generar el espacio de Hilbert que nos conviene y lo haremos en la potencia k de μ tal que $c/\mu^{k_0} = 1$. Al parecer podemos tomar a c de modo que se cumpla esta hipótesis, hasta ahora nada nos lo impide solo tiene que tener módulo menor o igual a 1 y de hecho tomar esta hipótesis implicaría que c fuera un número real. Entonces podemos reescalar todo para que $c = 1$.

Si calculamos ahora $\|D(\alpha^*)\psi\|$ de la misma manera que lo hicimos para $D(\alpha)\psi$ obtenemos que $\|D(\alpha^*)\psi\| = \sqrt{1-\mu^2|c|^2}\|\psi\|$.

Ahora conjugando la relación $\alpha\gamma^* = \mu\gamma^*\alpha$ obtenemos $\gamma\alpha^* = \mu\alpha^*\gamma$. Si se aplica D a la última ecuación y esto se aplica a su vez en el vector ψ, obtenemos que $D(\alpha^*)\psi$ también es vector propio para $D(\gamma)$ con valor propio asociado $c\mu$. También podemos aplicar sucesivamente $D(\alpha^*)$ en esta ecuación y obtenemos la sucesión de vectores propios:

$$\{D(\alpha^*\psi, D^2(\alpha^*)\psi, \ldots\}.$$

Sus valores propios son:

$$\{c\mu, c\mu^2, \ldots\}.$$

Pero a diferencia de la otra sucesión de valores propios, no tenemos ningún problema con estos números, así que todos los vectores propios hallados a partir de $D(\alpha^*)$ pueden vivir en nuestro espacio de Hilbert.

Si consideramos el espacio H como el espacio generado por estos vectores propios con el producto interior que hace que este conjunto de vectores sea una base ortogonal, la representación D es irreducible.

Otro modo de hacerlo es a partir del operador $D(\gamma^*\gamma)$. Utilizando la relación $\alpha\alpha^* = 1 - \mu^2\gamma\gamma^*$. Y partiendo igualmente de que $D(\gamma)\psi = \psi$ (ya considerando que $c = 1$).

De lo anterior podemos ver que:

$$\begin{aligned} D(\alpha)D(\alpha^*) &= 1 - \mu^2 D(\gamma)D(\gamma^*) \\ D(\alpha^*)D(\alpha) &= 1 - D(\gamma^*)D(\gamma), \end{aligned}$$

y recordando el resultado general

$$\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\},$$

obtenemos

$$\sigma\left(D(\alpha)D(\alpha^*)\right) \cup \{0\} = \sigma\left(D(\alpha^*)D(\alpha)\right) \cup \{0\}$$

y de las relaciones,

$$\begin{aligned} \sigma\left(1 - \mu^2 D(\gamma)D(\gamma^*)\right) &= 1 - \sigma\left(\mu^2 D(\gamma)D(\gamma^*)\right) \\ \sigma\left(1 - D(\gamma^*)D(\gamma)\right) &= 1 - \sigma(D(\gamma^*)D(\gamma)) \end{aligned}$$

se obtiene la ecuación

$$\sigma\left(\mu^2 D(\gamma)D(\gamma^*)\right) \cup \{1\} = \sigma\left(D(\gamma^*)D(\gamma)\right) \cup \{1\},$$

al multiplicar por μ^2 se contrae el espectro ya que $|\mu| < 1$. Se ve que necesariamente $1 \in \sigma D\gamma\gamma^*$. Iterando la aplicación de D se puede ver que

$$\sigma(\gamma\gamma^*) = \{1, \mu^2, \mu^4, \ldots\}, \cup\{0\}$$

el cero queda incluido por ser cerrado el espectro.

Nótese que estamos suponiendo implícitamente que $\sigma(D(\gamma)D(\gamma^*)) \neq \{0\}$.

Un espectro discreto se corresponde con los valores propios de una matriz, esto significa que para cada $\omega \in \sigma(\gamma\gamma^*)$ existe un subespacio $H_\omega \subset H$ en el que el operador $\gamma\gamma^*$ actúa trivialmente, es decir, $D(\gamma)D(\gamma^*)\psi = \omega\psi$ para cada $\psi \in H_\omega$. Como queremos encontrar representaciones irreducibles, debemos volver a la relación

$$\alpha(\gamma\gamma^*) = \mu^2(\gamma\gamma^*)\alpha$$

y su conjugada

$$\alpha^*(\gamma\gamma^*) = \mu^{-2}(\gamma\gamma^*)\alpha^*.$$

Al aplicar D en la primera expresión se obtiene

$$\omega D(\alpha)\psi = \mu^2 D(\gamma\gamma^*)\{D(\alpha)\psi\},$$

de la segunda expresión se obtiene

$$\omega D(\alpha^*)\psi = \mu^{-2} D(\gamma\gamma^*)\{D(\alpha^*)\psi\}$$

esto quiere decir que

$$D(\alpha) : H_\omega \to H_{\omega/\mu^2}$$
$$D(\alpha^*) : H_\omega \to H_{\omega\mu^2}.$$

Figura 4.1: Valores propios de $D(\alpha)$

Las aplicaciones $D(\alpha)$ y $D(\alpha^*)$ se mueven en direcciones opuestas, son casi inversas una de la otra, excepto por un escalar que se puede calcular del siguiente modo; si $\psi \in H_\omega$, el producto

$$\langle\psi, D(\alpha)^* D(\alpha)\psi\rangle = \|D(\alpha)\psi\|^2 = (1-\omega)\|\psi\|^2$$

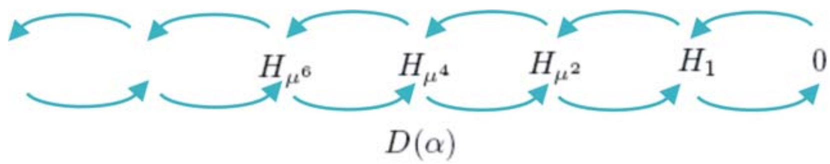


Figura 4.2: Subespacios invariantes para $D(\alpha)$ y $D(\alpha^*)$

permite construir un sistema de vectores ortonormales, tomando las aplicaciones sucesivas de $D(a)$ sobre ψ y normalizando,

$$\{e_0, e_1, \ldots\}, \quad e_k \in H_{\mu^{2k}}$$

$$D(\alpha)e_k = \sqrt{1-\mu^{2k}}e_{k-1},$$

de modo que $\sqrt{1-\mu^{2k}}$ es el escalar que se buscaba. De manera similar la relación conjugada nos da

$$\|D(\alpha)^*\psi\|^2 = (1-\mu^2\omega)\|\psi\|^2.$$

de donde

$$D(\alpha^*)e_{k-1} = \sqrt{1-\mu^{2k}}e_k.$$

En cada uno de los espacios H_ω la representación $D(\gamma)$, $D(\gamma^*) : H \to H_\omega$ se reduce. Como $D(\gamma)$ es un operador normal, se puede tomar su descomposición espectral.

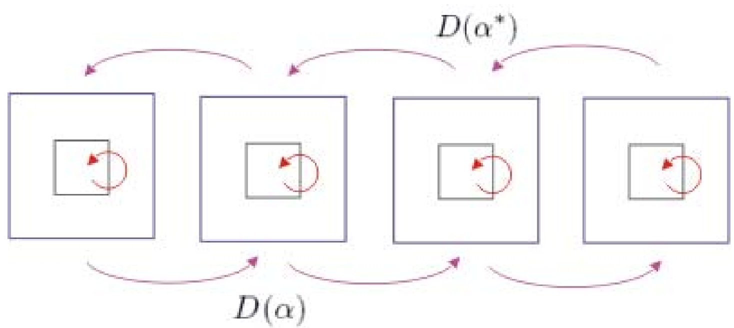


Figura 4.3: Cómo actúa la representación D

La figura 4.3 pretende ilustrar el subespacio invariante donde se reduce $D(\alpha)$, al tomar la suma de todos esos subespacios se obtiene un subespacio invariante donde se reducen $D(\gamma)$ y $D(\gamma^*)$ y cada uno de esos subespacios debe tener dimensión 1 para que D sea una representación irreducible.

Ahora se analizará cómo actúan los operadores $D(\gamma)$ y $D(\gamma^*)$.

$$D(\gamma)e_k = \lambda_k \mu^k e_k$$

$$D(\gamma^*)e_k = \overline{\lambda_k} \mu^2 e_k$$

donde λ_k es en cada caso una constante compleja de módulo 1, y se ve que es la única forma de tener un sistema irreducible.

Como no se afecta el factor fase, el factor fase λ es único para el sistema de vectores así que la expresión anterior no depende de k. Ahora podemos proceder a la inversa definir la representación D según las condiciones que hemos obtenido y queda garantizado que las relaciones de $\mathcal{A}$ se cumplen,

$$D(\gamma)e_k = \lambda \mu^k e_k \qquad D(\alpha)e_k =$$

Geométricamente α y γ corresponden a proyecciones de la 3-esfera en dos planos complejos. Al restringirse a la proyección en γ, como λ es fijo (es el factor fase) el módulo de esta coordenada está dado por $|\mu|^k$. Si nos imaginamos una partícula dentro de la esfera cuántica, la coordenada de esta partícula no puede tomar cualquier valor, sino que queda restringido su módulo por los círculos de la figura 4.4. Cada círculo representa la distancia $|\mu|^k$.

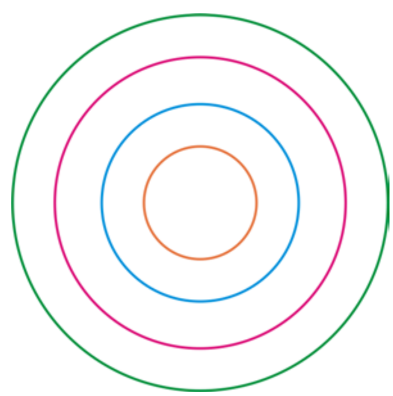


Figura 4.4: Niveles de energía

Si $D(\gamma) = 0$ las relaciones se reducen a

$$D(\alpha)D(\alpha^*) = 1 = D(\alpha^*)D(\alpha),$$

se puede hacer la descomposición espectral para encontrar las representaciones irreducibles, excepto cuando $\dim H = 1$, en cuyo caso D actúa como un operador escalar. Pero las representaciones unidimensionales son caracteres, y como no hay otras restricciones $D(\alpha) \in \mathrm{U}(1)$, el grupo $\mathrm{U}(1)$ es la parte clásica de $\mathrm{SU}(2)$.

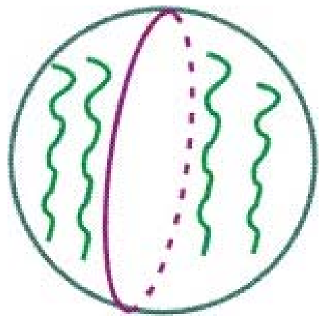


Figura 4.5: Esfera cuántica

En la figura 4.5 se ven dos coordenadas complejas, si una de ellas se anula, obtenemos el círculo U(1) como intersección de uno de los planos complejos y la esfera unitaria.

La esfera de dimensión 3 queda asociada con el haz de Hopf. La esfera se fibra sobre la 2-esfera y las fibras son círculos. Para obtener el haz de Hopf clásico se toma el espacio del haz principal cuyo grupo estructural es U(1) (matrices diagonales), y se actúa por la multiplicación derecha

$$\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1) \to \mathrm{SU}(2)$$

La parte invariante que son las órbitas de la acción, forman el espacio base.

Se obtiene S^2. Tenemos a nivel de espacios la inclusión $\mathrm{U}(1) \hookrightarrow \mathrm{SU}(2)$, y a nivel de álgebras la proyección del álgebra correspondiente a SU(2) a la correspondiente a U(1). Esto mismo obtenemos al factorizar las relaciones por $\gamma = 0$. Es como tomar un solo generador unitario z,

$$\delta : g \to g \otimes g$$

$$\delta(z) = z \otimes z,$$

más detalladamente, la inclusión de U(1) en SU(2) corresponde a la proyección

$$\pi : \mathcal{A} \to g$$

$$\pi(\alpha) = z$$

$$\pi(\alpha^*) = z^*$$

$$\pi(\gamma) = \pi(\gamma^*) = 0.$$

Ahora vamos a considerar el mapeo $F : A \to A \otimes g$, dual del mapeo que va de $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ a SU(2), como $F = (\mathrm{Id} \otimes \pi)\Phi$. Evaluando en los generadores,

$$F(\alpha) = \alpha \otimes z$$

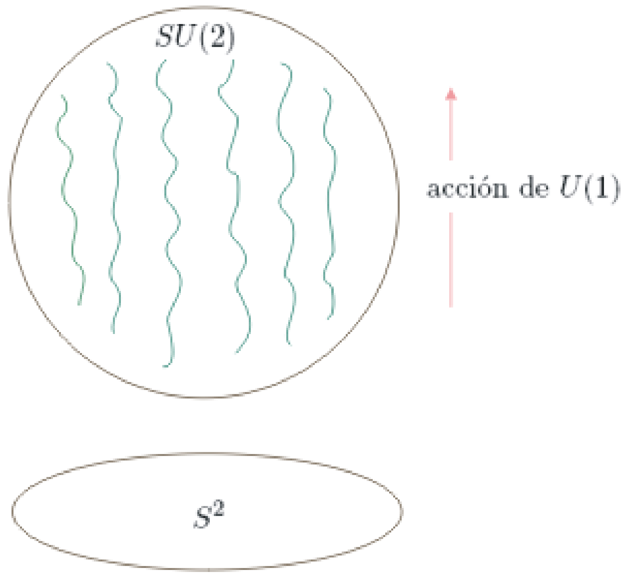


Figura 4.6: Acción de U(1) y fibración sobre S^2

$$F(\alpha^*) = \alpha^* \otimes z^*$$

$$F(\gamma) = \gamma \otimes z$$

$$F(\gamma^*) = \gamma^* \otimes z^*.$$

El espacio base será una proyección del espacio total del haz. A nivel de álgebras, esto quiere decir que el álgebra se ve como una inyección, una imagen inyectiva dentro del álgebra del haz y consiste de todas las funciones que son constantes a lo largo de las fibras, esto quiere decir que son invariantes bajo la acción del grupo. Ser invariante bajo esta acción quiere decir a su vez que al tensorizar del lado derecho, solo debe aparecer 1, entonces tenemos que $F(a) = a \otimes 1$ para cada a en la subálgebra B que corresponde al espacio base, de tal modo que $B \hookrightarrow A$, donde

$$B = \{F(a) = a \otimes 1, \quad a \in A\}.$$

Para saber quienes son los elementos de B debemos observar qué sucede al mover de lugar los generadores en los monomios. Siempre se pueden pasar de un lado los α y de otro los γ, y cualquier expresión algebraica queda como producto de potencias de α, α^*, γ y γ^*. Podemos escribir $\alpha^k \gamma^m (\gamma^*)^n$ donde $k \geq 0$, $m \geq 0$ y $n \geq 0$. Extenderemos la notación $\alpha^k \gamma^m (\gamma^*)^n$ con $k \in \mathbb{Z}$, $m, n \geq 0$ con la convención de que $\alpha^k = (\alpha^*)^{-k}$ para $k \leq 0$. Se puede demostrar que estos elementos son linealmente independientes y forman una base para $\mathcal{A}$.

Al actuar por F en los elementos de la base se obtiene,

$$F(\alpha^k\gamma^m(\gamma^*)^n) = \alpha^k\gamma^m(\gamma^* \otimes z^{k+m-n})$$

para que el monomio esté en B necesitamos que $k+m-n$ sea cero, y esto solo se obtendrá en los siguientes casos de combinaciones algebraicas,

$$\rho = \gamma^*\gamma \qquad \xi = \alpha\gamma^* \qquad \xi^* = \gamma\alpha^*,$$

esto quiere decir que ρ y ξ generan el espacio base (considerando la estructura $*$), que corresponde a una "esfera".

El álgebra B se puede expresar en términos de las siguientes simples relaciones entre ρ y ξ,

- $\rho = \rho^*$
- $\xi\rho = \mu^2\rho\xi$
- $\xi^*\rho = \dfrac{1}{\mu^2}\rho\xi^*$
- $\xi\xi^* = \mu^2\rho(1-\mu^2\rho)$
- $\xi^*\xi = \rho - \rho^2.$

A su vez estas relaciones determinan exactamente el álgebra B, pero reescribiendo

$$\xi\xi^* = \mu^2\rho(1-\mu^2\rho) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \mu^2\rho\right)^2,$$

$$\xi^*\xi = \rho - \rho^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \rho\right)^2,$$

se hace evidente que se trata de una "esfera 2-dimensional", tenemos dos coordenadas ortogonales de una esfera con centro en $1/2$ y radio $1/2$, una coordenada compleja y una real.

Si $\mu = 1$ o $\mu = -1$ tenemos como base un objeto clásico, pero si $\mu \in (-1,1) \setminus \{0\}$, al buscar caracteres κ se obtienen las relaciones correspondientes y llegamos a que $\kappa(\xi) = 0$ o $\kappa(\rho) = 0$, por lo tanto existe un solo caracter κ_0.

Tenemos una esfera con un solo punto y todo lo demás completamente cuántico, esta esfera es base de un haz cuyo grupo estructural es U(1) y el espacio total es SU(2) cuántico, para construir el haz del que esta esfera es fibra tendríamos que pegar las fibras pero este punto debe pegarse con los puntos correspondientes de las otras esferas por simetría, obteniendo algo como en la figura 4.8.

En el caso clásico SU(2) es geométricamente la esfera S^3, lo que acabamos de ver es una generalización cuántica del haz de Hopf.

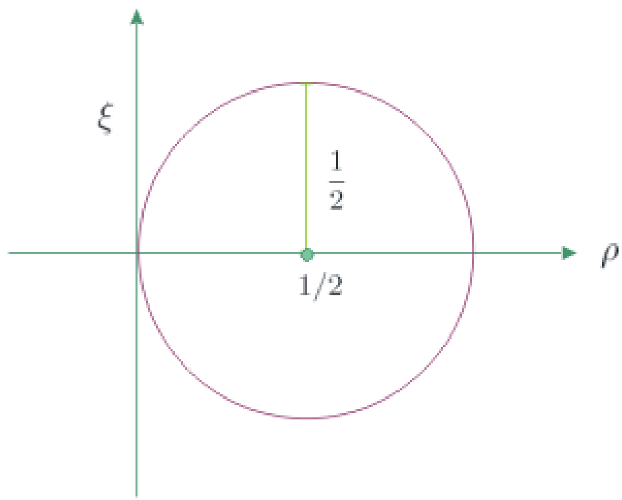


Figura 4.7: El espacio no homogeneo

La esfera de dimensión 3 se fibra sobre la esfera de dimensión 2 y las fibras son círculos, el grupo estructural es U(1).

CASO $\mu = -1$

Si $\mu = -1$ tenemos como base una esfera clásica, pero SU(2) es un objeto cuántico, de modo que tenemos un ejemplo interesante de un haz cuántico con base y fibra clásica.

Hemos visto que las representaciones irreducibles se escriben todas como

$$D : A \to B(H)$$

$$D(\alpha)e_k = \sqrt{1-\mu^{2k}}e_{k-1}$$

$$D(\alpha^*)e_{k-1} = \sqrt{1-\mu^{2k}}e_k$$

$$D(\gamma)e_k = \lambda\mu^k e_{k-1}$$

$$D(\gamma^*)e_{k-1} = \overline{\lambda}\mu^k e_k$$

donde $\{e_k\}$ es una base de H y cuando $k = 0$, tenemos que $e_{k-1} = 0$, el complejo λ tiene módulo 1. Con esto clasificamos todas las representaciones irreducibles para el álgebra $\mathcal{A}$, en particular se ve que todas son de dimensión finita.

Caso $\mu = -1$

En el caso $\mu = -1$ buscamos el centro $Z(\mathcal{A})$. Para encontrarlo consideremos de nuevo los monomios $\alpha^k\gamma^m(\gamma^*)^n$ y veamos bajo qué condiciones conmutan con

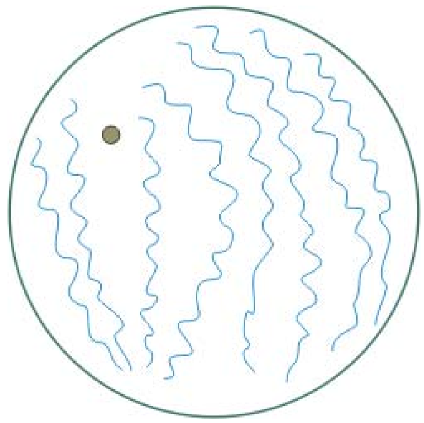


Figura 4.8: El círculo se proyecta en un punto en el espacio base

los generadores, en el caso de α vemos que la condición es que $m+n$ sea par, y para γ obtenemos que k debe ser par.

Según el lema de Schur, cualquier operador que conmuta con una representación irreducible, debe ser un operador escalar. Sea $D : Z(\mathcal{A}) \to B(H)$ una representación irreducible, entonces el operador $D(a)$ es un caracter de $\mathcal{A}$ multiplicado por el operador identidad, a estos elementos se les llama caracteres centrales.

Los monomios que no están en el centro siempre se pueden descomponer de modo que una parte queda en el centro, lo que muestra que tenemos muchos operadores escalares, y los operadores que no son escalares son básicamente de la forma $D(\alpha)$, $D(\alpha^*)$, $D(\gamma)$, $D(\gamma^*)$ y $D(\alpha^{(*)}\gamma^{(*)})$. Entonces la dimensión del espacio generado por los operadores fuera del centro es finita, la imagen de la representación D es una subálgebra de dimensión finita que actúa irreduciblemente en el espacio de Hilbert H, lo que nos permite concluir que H es de dimensión finita.

Ahora averiguaremos cuál es la dimensión, si $\dim D = 1$ la representación es un caracter, y tenemos la subálgebra generada por las relaciones,

$$\alpha^{(*)}\gamma^{(*)} = -\gamma^{(*)}\alpha^{(*)}$$

$$\alpha\alpha^* = \alpha^*\alpha$$

$$\gamma^*\gamma = \gamma^*\gamma$$

$$\alpha\alpha^* = 1 - \gamma\gamma^*,$$

pero al tomar los valores de los caracteres sobre los generadores, de la primera relación se infiere que α o γ es cero lo que quiere decir que tenemos un caracter $\kappa : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, $\kappa(\alpha) \in \mathrm{U}(1)$ que corresponde al círculo ecuatorial en el haz de Hopf, o bien $\kappa(\gamma) \in \mathrm{U}(1)$ lo que nos da un círculo ecuatorial en S^3.

Estos son todos los puntos de nuestra esfera cuántica, forman dos círculos disjuntos, como grupo es $\mathrm{U}(1) \times \mathbb{Z}_2$ clásico.

Si la dimensión de D es mayor que 1, todos los operadores asociados a α y γ se pueden diagonalizar, suponiendo que $D(\gamma)\psi = \gamma\psi$ obtenemos $D(\gamma)[D(\alpha)\psi] = -\lambda D(\alpha)\psi$, tenemos dos vectores propios que generan dos subespacios ortogonales siempre y cuando $\lambda \neq 0$.

Ahora $\|D(\alpha)\psi\| = \sqrt{(D(\alpha)\psi, D(\alpha)\psi)} = \sqrt{1-|\lambda|^2}\|\psi\|$, para esto λ debe cumplir $0 < |\lambda| \leq 1$, porque si $\lambda = 0$ se anularía $D(\gamma)\psi$ y entonces tendríamos otro subespacio que se anularía, que por lo tanto sería invariante y ahí se reduciría D.

Al escribir en notación matricial los operadores $D(\gamma)$ y $D(\alpha)$, suponiendo que $\|\psi\| = 1$ y normalizando $D(\alpha)\psi$ tenemos,

$$D(\gamma) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

y

$$D(\alpha) = \sqrt{1-|\lambda|^2}\begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde f es un complejo de módulo 1. Vemos que $\dim D = 2$ y éstas son todas las representaciones irreducibles.

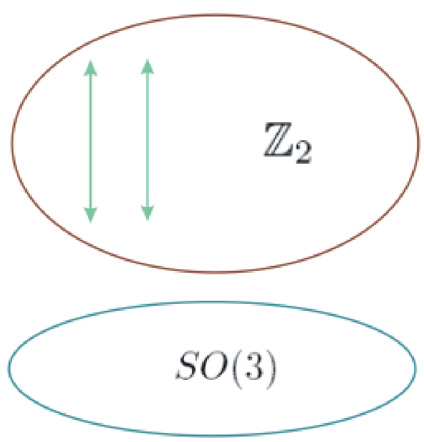


Figura 4.9: Proyección

Dentro de este contexto, es interesante mencionar que aparece el grupo clásico $SO(3)$ dentro de SU(2) cuántico. La reflexión corresponde a la acción de f, bajo esta acción todos los generadores adquieren un signo $(-)$ y el álgebra $\mathcal{A}_0$ asociada a SO(3), será el álgebra de los monomios que no cambian bajo esta reflexión, de modo que estos monomios son productos pares de generadores de $\mathcal{A}_0$. En el caso cuántico $\mathcal{A}_0 \hookrightarrow \mathcal{A}$ y la estructura de grupo proyectada de SU(2) a SO(3) se refleja en el hecho de que $\Phi(\mathcal{A}_0) \hookrightarrow \mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{A}$.

4.5. Más detalles sobre grupos cuánticos compactos

Ahora vamos a platicar en más detalles sobre las propiedades geométricas incorporadas en el concepto de grupo cuántico. En un grupo clásico, el producto es una aplicación suave de $G \times G \to G$ y se hace corresponder a G una C^*-álgebra A, el espacio producto $G \times G$ se corresponderá con $A \otimes A$, donde $\otimes$ denotará para nosotros el producto tensorial C^* que es una completación del producto tensorial algebraico usual y se detallará a continuación. La traducción en A del producto en G como aplicación suave debe ser un homomorfismo $*$, que denotaremos por $\Phi : A \to A \otimes A$, que dualiza el producto en la C^*-álgebra A ya que es el homomorfismo inducido a nivel de las álgebras C^* por el producto. Nosotros procederemos a la inversa, es decir consideramos primero un álgebra C^* y una acción de un grupo de Lie en esta álgebra, suponiendo que ya tenemos esto buscaremos las condiciones y los homomorfismos que deben existir en el álgebra C^*, esto lo hacemos para no recurrir explícitamente al grupo sino mas bien encontrar la traducción de su estructura en el álgebra C^*.

A partir de dos C^*-álgebras A y B se puede construir un álgebra $*$ por medio del producto tensorial algebraico

$$A \otimes_{\text{alg}} B = \left\{ \sum a \otimes b : a \in A, b \in B \right\},$$

donde

$$(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*,$$

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd.$$

También hay que recordar que siempre existe una aplicación bilineal fija $v : A \times B \to A \otimes_{\text{alg}} B$ de tal modo que si E es cualquier espacio lineal y $f : A \times B \to E$ es una aplicación bilineal existe una única aplicación lineal $\tilde{f} : A \otimes_{\text{alg}} B \to E$, tal que $f = \tilde{f}v$ y el siguiente diagrama conmuta, y $a \otimes b = v(a, b)$ para cada $a \in A$, $b \in B$, esta es la propiedad universal del producto tensorial que se representa en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle v}\big\downarrow & & \big\| \\ A \otimes_{\text{alg}} B & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \end{array}$$

El álgebra $\mathcal{A} = A \otimes_{\mathrm{alg}} B$ es un álgebra $*$. Por el teorema de Gelfand y Naimark, $A \hookrightarrow B(H_1)$ y $B \hookrightarrow B(H_2)$ para espacios de Hilbert H_1 y H_2 adecuados, se forma el producto $H_1 \otimes H_2$ y se realiza la inclusión

$$\mathcal{A} = A \otimes_{\mathrm{alg}} B \hookrightarrow B(H_1 \otimes H_2),$$

al tomar la cerradura de $\mathcal{A}$ se obtiene un álgebra C^* que se denotará por $A \otimes B$, el producto tensorial C^* de las álgebras A y B,

$$A \otimes B = \overline{A \otimes_{\mathrm{alg}} B}.$$

Para demostrar que la construcción es independiente de las realizaciones $A \hookrightarrow B(H_1)$ y $B \hookrightarrow B(H_2)$ hay que ver que la norma es la misma. Si $c \in A \otimes_{\mathrm{alg}} B$ se demuestra que

$$\|c\|^2 = \sup \left\{ \frac{(\varphi \otimes \psi)(d^* c^* c d)}{(\varphi \otimes \psi)(d^* d)} \right\},$$

donde φ y ψ son estados en A y B respectivamente y $d \in A \otimes_{\mathrm{alg}} B$, de modo que la expresión para $\|c\|$ es independiente de las realizaciones.

Se dualiza la propiedad asociativa del producto entre los elementos del grupo en el coproducto y se restringe al producto tensorial algebraico, esto queda bien ilustrado en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "\mathrm{Id}\times\cdot"] \arrow[d, "\cdot\times\mathrm{Id}"'] & G \times G \arrow[d, "\cdot"'] \\ G \times G \arrow[r, "\cdot"] & G \end{tikzcd}$$

Cuyo diagrama dual se ve como sigue.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[l, "\mathrm{Id}\otimes\Phi"'] \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[u, "\Phi\otimes\mathcal{A}"] & \mathcal{A} \arrow[l, "\Phi"'] \arrow[u, "\Phi"] \end{tikzcd}$$

Cualquier homomorfismo que satisface este diagrama conmutativo se dice coasociativo.

La ecuación que describe la coasociatividad es

$$(\Phi \otimes \mathrm{Id})\Phi = (\mathrm{Id} \otimes \Phi)\Phi$$

el coproducto también puede representarse por medio del diagrama
en el cual las entradas y salidas representan objetos y los dibujos entre ellos a morfismos [19]. El diagrama correspondiente a la coasociatividad se ve como sigue,

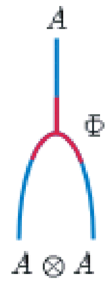


Figura 4.10: Coproducto

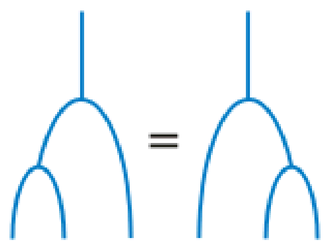


Figura 4.11: Coasociatividad del coproducto

Si $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es la operación de producto en el álgebra, $m(a \otimes b) = ab$, cada $x \in Z(\mathcal{A})$ cumple $\Phi : x \mapsto (x, x)$, de modo que a nivel de grupos tenemos $\Phi : G_{Z(A)} \to G_{Z(A)} \times G_{Z(A)}$. El diagrama correspondiente a la asociatividad se ve como en la figura 4.12.

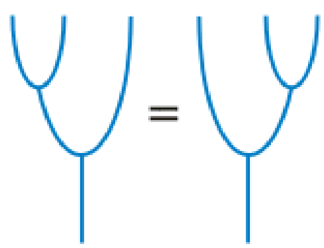


Figura 4.12: Asociatividad del producto

Para tener una estructura de grupo se pide siempre la existencia de un elemento neutro y los inversos de cada elemento del grupo, sin embargo aquí tenemos el problema conceptual de que los espacios cuánticos carecen en general de puntos. Una solución para este problema es pedir la condición de que los mapeos $(y, x) \mapsto (yx, x)$ y $(y, x) \mapsto (y, yx)$ que tenemos en la versión clásica y que quedan representados en los siguientes diagramas, sean biyectivos, ya que en el caso conmutativo esto es equivalente a tener la estructura de grupo.

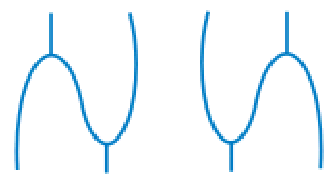


Figura 4.13: Condición de regularidad

Un grupo cuántico se define como un espacio cuántico, dotado de un homomorfismo $*$

$$\Phi : A \to A \otimes A$$

que cumplen tanto la coasociatividad como la **condición de regularidad** cuántica.

Bibliografía

[1] Bratteli, Ola, Robinson, Derek W., *Operator algebras and quantum statistical mechanics* **vol** (I), *C*- and W* algebras, symmetry groups, decomposition of states* (Springer, 2002, cop. 1987)

[2] Bartle, Robert, *Self-adjoint operators and some generalizations*

[3] Kolmogorov A.N., Fomin S.V., *Elements of the theory of functions and functional analysis.* **vol** (I), *Metric and normed spaces*, (Rochester: Graylock Press, 1957)

[4] Abramovich, Yuri A., *Invitation to operator theory*, (Graduate studies in mathematics, Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, c2002)

[5] Conway, John B., *A course in functional analysis*, (New York : Springer, c1990)

[6] Conway, John B., *A course in operator theory*,(Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, c2000)

[7] Erdelyi, Ivan, *Operator theory and functional analysis* (San Francisco : Pitman advanced, c1979)

[8] Cohn, Donald L, *Measure theory*, (Boston : Birkhauser, 1993)

[9] Aupetit, Bernard, *A primer on spectral theory*, (New York : Springer, c1991)

[10] Constantinescu Corneliu, C^* *-Algebras*, (Amsterdam : Elsevier, 2001)

[11] Curtis, Morton Landers, *Matrix groups*, (New York : Springer, c1984)

[12] Pederson, Gert K., C^**-Algebras and their automorphism groups*, (London : Academic, 1979)

[13] Porteous, Ian R., *Topological Geometry*, (Cambridge, Great Britain : Cambridge University, 1981)

[14] Smirnov, Vladimir Ivanovich, *Linear Algebra and Group Theory*, (New York : Dover, 1970c1961)

[15] Scott, William Raymond, *Group theory*, (New York : Dover, 1987)

[16] Eijndhoven, Stephanus J. L. Van, *A mathematical introduction to Dirac's formalism*, (Amsterdam ; New York : North-Holland, 1986)

[17] Durdevich, Micho, *Quantum Geometry and New Concept of Space*, (http://www.matem.unam.mx/∼ micho)

[18] Durdevich, Micho, *Quantum Principal Bundles*, (http://www.matem.unam.mx/∼ micho)

[19] Durdevich, Micho, *Braided Quantum Groups*, (http://www.matem.unam.mx/∼ micho)

[20] Kadison V. Richard, Ringrose John R., *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, **vol** (I), (Berlin : Springer, 1978)

[21] Feynman, Richard Phillips, *El caracter de la ley física*, (Barcelona : A. Bosch, 1983)

[22] Mlodinow, Leonard, *El arcoiris de Feynman*, (New York, Warner Books, 2003)

[23] Feynman, Richard Phillips, *The Feynman's lectures on Physics*, ([Pasadena] : California Institute of Technology, c1963-1989)

[24] Woronowicz, Quantum Groups

[25] N.E. Wegge - Olsen, *K - Theory and C^* algebras*

[26] Jost, Jurgen, Riemannian Geometry and Geometric Analysis, (Berlin: Springer, c2002)

[27] Pontryagin, Lev Semenovich, Topological groups, (Princeton: Princeton University, 1946c1939)

[28] Primas, Hans, Quantum Mechanics, and Reductionism: Perspectives in Theoretical Chemistry, (Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG Hardcover - 1983)