UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL MODELO MARXISTA DE ROEMER: UNA PRESENTACIÓN MATEMÁTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

JULIO CÉSAR DOMÍNGUEZ GALVÁN

Tutor: César Eduardo Sousa Mondragón

2006

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno Dominguez Galvan Julio Cesar 12 51 33 69 Universidad Nacional Autonoma de Mexico Facultad de Ciencias Matematicas 095188665
2. Datos del tutor Mat Cesar Eduardo Sousa Mondragon
3. Datos del sinodal 1 M en C Sergio Hernandez Castañeda
4. Datos del sinodal 2 M en C Maria de la Paloma Zapata Lillo
5. Datos del sinodal 3 M en C Julio Cesar Cedillo Sanchez
6. Datos del sinodal 4 M en C Salvador Ferrer Ramirez
7. Datos del trabajo escrito El modelo marxista de Roemer: una presentacion matematica 87 p 2006

A mi madre, con profundo respeto, amor y admiración.
A mi esposa Adriana, por aparecer en mi vida cuando más lo necesitaba.
A Ivette, Diana y Hannia, por su cariño y apoyo incondicional.

Y sí: es un asunto de resistencia. Lo aprendí poco a poco durante el trayecto, pero es hasta ahora, al final del breve camino, que puedo verlo con toda claridad y en plenitud. Ha sido duro; a ratos, desesperantemente desilusionante. Pero pensándolo bien ... ¿quien dijo que sería fácil?. Claro que es muy probable que la llegada a este punto no hubiese ocurrido sin la presencia de muchas personas que, a favor o en contra, en mayor o menor medida, aparecieron en mi vida durante el proceso. Este es un humilde, pero sincero tributo a todas ellas:

Gracias a mis queridos amigos y amigas del célebre "círculo": Willy, Chris, Julissa, Mara, Mariana, René..

Gracias a Heriberto y Agustín, por su invaluable amistad y oportuno apoyo cuando las cosas se pusieron feas.

Gracias a Elvira (Big Sister), Betty, Rackelovickch, los ñoños roños (Ivonne y Edson), Mayra, Er´endira G., Enrique G., Beto (Mon), Charly, todos ellos entrañables amigos del CELE Mascarones.

Gracias muy especiales a mi tía Laura, que (afortunadamente) hizo todo lo posible por devolverme a la senda académica.

Un agradecimiento profundo al equipo de la Secretaría de Cultura y Educación del S.T.U.N.A.M., en especial a su titular, Mtro. Carlos R. Espinosa Salgado, un líder nato y gran ser humano.

A los chicos del Colmex (Sayuri, Yerania, Cabrito, Niño, Regio), por ese tiempo que pasamos juntos, que aunque fue corto, aprendí y me divertí mucho.

A la familia López Ramos, muchas gracias por sus atenciones y por su afecto.

Y a todas aquellas personas que han dejado cosas positivas en mi ser, muchas gracias.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La economía matemática es uno de los muchos campos en los que las herramientas analíticas desarrolladas en las matemáticas sirven para llevar lo que se dice en lenguaje natural a otro lenguaje en el que la precisión, la formalidad y la lógica ponen al descubierto el nivel de certeza que posee una teoría determinada: el marxismo es un ejemplo particular de una teoría que fue escrita en su totalidad en lenguaje natural y que después, con la ayuda de diversas ramas de la matemática, se formalizó para mostrar sus alcances en términos científicos, lo que dio paso al nacimiento del llamado *marxismo analítico*.

Indudablemente, la obra de Karl Marx es un parte aguas en la historia de la teoría económica. Sus aportaciones para definir con toda precisión cada uno de los elementos que constituyen al capitalismo y el manejo de estos elementos para poner de manifiesto la naturaleza explotadora de dicho sistema, marcaron un nuevo rumbo que llevó, incluso, a enormes movimientos sociales en diversos países del orbe.

Así, es natural que una teoría que cobró una importancia de enormes proporciones haya sido puesta bajo la lupa del análisis científico, ya por sus defensores, ya por aquellos que estaban en una posición antágonica a la que manifestaba el marxismo.

Muchos han sido los autores que han dedicado sus obras al marxismo analítico, entre los que destacan Morishima, Abraham-Frois y Roemer. Es la obra de éste último la que sirve de fundamento para el desarrrollo del presente trabajo. Muy en particular, se ha tomado el texto titulado “Analytical Marxism” como obra de análisis, y de ella se desprende toda la investigación que constituye éste texto.

En este punto, vale la pena revisar una breve biografía del autor en cuestión. John E. Roemer nació en 1945, en Washington D.C., E.U. Estudió matemáticas en Harvard y obtuvo su doctorado en economía en Berkeley. Ha escrito una cantidad importante de libros, además de que ha colaborado como editor en diversas publicaciones económicas y políticas. Actualmente es profesor en ciencia política y económica en la Universidad de Yale. Como ya se ha dicho, gran parte de su trabajo está directamente enfocado en la economía marxista.

Considerando lo anterior, es posible que una pregunta natural que se podría formular el lector sea la siguiente: ¿porque, de entre una bibliografía tan amplia, se ha escogido precisamente a "Analytical Marxism" como objeto de estudio? La respuesta es la que sigue: se trata de una obra que, aunque incluye un alto grado de dificultad para ser comprendida, es muy completa y extiende de manera considerable todo el análisis que se había hecho previamente en torno a la economía marxista.

Ahora bien, es justo el grado de complejidad de la obra lo que motiva este trabajo. Para un estudiante de economía es fundamental un buen manejo de los argumentos matemáticos incluidos en una determinada exposición. Si no se cuenta con esa facilidad, entonces un texto determinado, aún cuando esté directamente relacionado con el área de estudio, puede resultar, por lo menos, difícil de comprender. Así, se ha tomado el primer capítulo del texto ya citado y se ha hecho un análisis detallado, dandole una estructura matemática y formal más amplia que la contenida en la obra original, llenando aquellos espacios en donde varíos conceptos y demostraciones se dan por sentados y, además, brindando algunas aportaciones y correciones a la obra.

Este es un breve sumario de lo que se encontrará en este trabajo: en el primer capítulo, se establecen los antecedentes del modelo de Roemer, a saber, el modelo insumo-producto de Leontief. En el segundo capítulo se define el modelo con el que trabaja Marx y su teoría de los valores-trabajo; se establecen algunos conceptos trascendentes, como el de tasa de explotación, tasa de ganancia media y vector de precios; adicionalmente, se demuestran algunos teoremas, entre los que se encuentra el conocido Teorema Fundamental Marxista. En el capítulo 3, en el que se presenta propiamente el modelo de Roemer, se define el concepto de solución reproducible, el cual implica la introducción de las nociones factibilidad y reproducibilidad. El cuarto capiítulo trata una generalización del modelo definido en el tercer capítulo, a saber, el caso del modelo de competencia imperfecta. El último capítulo, el número 5, aborda una nueva generalización del modelo, pero esta vez en el sentido temporal, es decir, se analiza brevemente el modelo dinámico. Finalmente se incluye un apéndice con algunos resultados relevantes para la comprensión de éste trabajo.

Para concluir, se debe hacer notar que se busco preservar el carácter histórico del modelo, por lo que en la parte inicial de este trabajo se recurrió a la inclusión de citas textuales relacionadas con "El Capital". Además, en aras de la claridad, se hicieron tantas definiciones como se consideró necesario y, también por claridad, se incluyeron algunos ejemplos y gráficos.

Se espera que el presente trabajo sea de utilidad, principalmente, para los estudiantes de matemáticas, actuaría y economía.

Capítulo 2

El modelo insumo-producto de Leontief

El modelo de Roemer es un modelo económico lineal, y se basa en el modelo insumo-producto de Leontief. Por ello se hará una breve exposición de dicho modelo.
Hipótesis iniciales:

1) La economía está formada por n sectores;

2) Cada sector produce una y sólo una mercancía (no existe producción conjunta);

3) La producción total de cada sector se realiza en un sólo periodo de tiempo, p. ej. un año;

4) No hay evolución en las técnicas de producción, es decir, cada sector produce de una sola forma;

5) La relación entre insumos y productos es lineal;

6) Hay equilibrio económico entre la oferta y la demanda;

Sean:
x_i= la producción total del bien i, medida en unidades físicas, p. ej. millones de barriles de petroleo, millones de toneladas de maíz, miles de megawatts-hora, etc. con $i \in \overline{n}$[1]

La producción total x_i se distribuye entre los n sectores para funcionar como insumo. Si después de dicha distribución queda un excedente, es posible

[1]Vease la sección 8.1 del apéndice para conocer la notación.

usarlo para la exportación, gasto de gobierno, inversión, etc. En consecuencia es posible plantear la siguiente ecuación:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + f_i \tag{2.1}$$

donde x_{ij} es una fracción de la producción total de x_i que se vende al sector j para que éste a su vez lo use como insumo de su producción total y f_j representa el excedente.

Nota 1 *Observemos que, en principio, $x_i \geqq 0$. Sin embargo, si en la ecuación 2.1, $x_i = 0$ para algún i $\in \overline{n}$ debemos de considerar dos casos: en el primero $x_{ij} = 0 \ \forall \ j \in \overline{n}$. En éste caso tenemos una economía en la que el* i*-ésimo bien no se usa como insumo para producir ninguna de las otras mercancías, como es el caso de los bienes de lujo. En el segundo caso, en el que $x_{ij} \neq 0$ al menos para algún $j \in \overline{n}$, estaríamos hablando de que el sector* i *le compra insumos al menos a uno de los otros sectores y al final del periodo no produce nada, lo cual no es viable económicamente; en consecuencia, sólo consideramos el caso en el que $x_i > 0$. Por otro lado, y considerando lo anterior, $x_{ij} \geqq 0$; si $x_{ij} = 0$ significa que lo que produce el sector* i *no es usado como insumo para producir la mercancía* j*. Finalmente $f_i \geqq 0$; si $f_i = 0$ significa que toda la producción del sector* i *fue utilizada íntegramente durante el proceso de producción.*

Así, podemos escribir el balance de las ventas de cada sector a todos lo demás y sus excedentes de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} + f_1 \\ x_2 & = & x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} + f_2 \\ & \vdots & \\ x_n & = & x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} + f_n \end{array} \right\} \tag{2.2}$$

Por la hipótesis de linealidad tenemos que la fracción de la producción del sector i que es vendida al sector j es proporcional a la producción total del sector j. Matemáticamente, significa que $\forall i, j \in \overline{n} \ \exists \ a_{ij} \geqq 0$ constante tal que

$$x_{ij} = a_{ij} x_j \tag{2.3}$$

Sustituyendo 2.3 en 2.2 tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1 \\ x_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2 \\ & \vdots & \\ x_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n \end{array} \right\} \tag{2.4}$$

Podemos escribir el sistema de ecuaciones 2.4 de manera matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Si hacemos

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \ y \ F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

entonces escribimos 2.5 de la siguiente manera[2]:

$$X = AX + F \tag{2.6}$$

A estas ecuaciones se les conoce como **ecuaciones de balance físico**, pues se expresan en unidades físicas y además constituyen un equilibrio económico entre la oferta y la demanda, lo que es congruente con la hipótesis 6. Esto último se puede visualizar de la siguiente manera:

$$oferta = X = AX + F = demanda$$

Se puede observar que la demanda está compuesta de dos sumandos: el primer sumando, el vector AX, representa la demanda intermedia, o lo que es lo mismo, los insumos que requieren todos y cada uno de los sectores para generar su producción total; el segundo sumando, es el vector F que representa los excedentes en la producción.

Nota 2 *De las observaciones hechas en la Nota 1 se deduce que* $X > \overline{0}$*,* $A \geqq \overline{0}$ *y* $F \geqq \overline{0}$*.*

Resumimos todo lo anterior mediante las siguentes definiciones:

[2]Vease la sección 8.1 del apéndice para información relativa a la operación con vectores y matrices

Definición. 1 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

la matriz cuadrada de orden n, no negativa, cuyos coeficientes a_{ij} representan la proporción del bien i *para producir una unidad del bien* j.

Esta matriz es conocida como **matriz tecnológica** (ó **matriz de coeficientes técnicos** ó **matriz de insumos unitarios**) y representa, desde el punto de vista económico, el conjunto de proporciones de intercambio que ocurren en una economía durante el periodo de producción dado.

Las unidades físicas de cada componente a_{ij} son

$$\frac{unidades\ físicas\ de\ la\ mercancía\ i}{unidades\ físicas\ de\ la\ mercancía\ j} = \frac{u_i}{u_j}\ \forall\ i,j\ \in\ \overline{n}$$

Definición. 2 *Sea* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *el vector columna en R^n, positivo, cuyas componentes x_i representan la cantidad total producida de la* i-*ésima mercancía en un periodo de tiempo (un año, por ejemplo).*

A éste vector se le denomina **vector de producciónes totales** (ó **vector de producciónes brutas**).

Las unidades físicas de cada componente del mencionado vector son, precisamente, las unidades físicas de la *i*-ésima mercancía, o sea u_i.

Definición. 3 *Sea* $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ *el vector columna en R^n, no negativo, cuyas componentes f_i representan la demanda final de la* i-*ésima mercancía.*

Al vector F se le conoce como **vector de demanda final**.

Las unidades físicas de cada componente de dicho vector están definidas de la misma manera que las del vector X, es decir, u_i.

Definición. 4 *Sea AX el vector columna en R^n, semipositivo, cuyas componentes representan los insumos necesarios para la producción de la* i-*ésima mercancía.*

A éste vector se le conoce como **vector de demanda intermedia**.

Al igual que para los vectores X y F, las unidades físicas de AX son u_i.

De la ecuación 2.6 podemos despejar X. Haremos esto paso por paso, con la idea de explicar detalladamente algunos aspectos. Por 2.6, tenemos que

$$\begin{aligned} X &= AX + F \\ \Rightarrow X - AX &= F \end{aligned} \tag{2.7}$$

Esta nueva ecuación significa que si a la producción total se le restan los insumos totales lo que queda son precisamente las demandas finales. Si factorizamos X en 2.7 nos queda

$$(I - A)X = F \tag{2.8}$$

De ello se deriva la siguiente:

Definición. 5 *La matriz $I - A$ es una matriz de n x n, no negativa y a la cual denotaremos con B, es decir, $B = I - A$. Esta matriz posee la siguiente característica:*

$$\begin{cases} b_{ij} \leqq 0, & \forall\ i \neq j\ \in\ \overline{n}; \\ b_{ii} > 0, & \forall\ i\ \in\ \overline{n}. \end{cases}$$

Tal matriz es conocida como **matriz de Leontief**. De esta manera, 2.8 se reescribiría como sigue:

$$BX = F \tag{2.9}$$

Por último, supongamos que la matriz A es productiva e irreducible[3]; dado que se cumplen las condiciones del Teorema 20, por el inciso *iii*) se tiene que $\exists\ B^{-1} > \overline{0}$, de tal suerte que se puede despejar X:

$$X = B^{-1}F \tag{2.10}$$

Esta ecuación motiva una nueva definición:

[3]Veanse las secciones 8.2 y 8.3 para conocer estas definiciones.

Definición. 6 B^{-1} *es una matriz de n x n, semipositiva, y que desde el punto de vista económico representa las proporciones de intercambio de mercancías que deben ocurrir para que, dada una demanda final, se obtenga la producción que satisface dicha demanda.*

A la matriz B^{-1} se le conoce como **matriz inversa de Leontief**.

Nota 3 *Es importante destacar que de la hipótesis de que A es una matriz productiva e irreducible no sólo se deriva la existencia de* B^{-1}*, sino que además se puede garantizar que, en efecto,* $X > 0$ *y entonces la solución tiene sentido económico. Semejante afirmación se prueba en el teorema 20, inciso ii).*

Por ultimo, debemos mencionar que el modelo insumo-producto de Leontief se divide en dos tipos:

$$\begin{cases} abierto, & \text{si } F \geq \overline{0}; \\ cerrado, & \text{si } F = \overline{0}. \end{cases}$$

Ilustraremos todo lo anterior mediante el siguiente ejemplo de un modelo abierto:

Ejemplo. Supongase que existe una economía compuesta únicamente por dos sectores: el primero produce trigo y el segundo produce leche. La producción total de trigo es igual a 100 kilogramos (los cuales estarán denotados por kg.) y para producir esta cantidad es necesario utilizar 30 kg. de trigo y 50 litros de leche (los cuales estarán denotados por lt.); por otro lado, la producción total de leche es igual a 80 lt., y para producirlos se requiere insumir 10 kg. de trigo y 20 lt. de leche. Esta información puede agruparse en el siguiente cuadro de transacciones interindustriales:

Cuadro 2.1: Economía de dos sectores

	trigo	leche	producción total
trigo	30	10	100
leche	50	20	80

Nótese que de la producción total de trigo (100 kg.) sólo se utilizan 40 kg. como insumos; análogamente, de la producción total de leche, sólo se requieren 70 lt. como insumos. Las cantidades restantes de trigo y leche (60 kg. y 10 lt., respectivamente) quedarán agrupadas bajo el concepto de

Cuadro 2.2: Tabla detallada

	trigo	leche	demanda intermedia	demanda final	producción total
trigo	30	10	40	60	100
leche	50	20	70	10	80

demanda final. Dado lo anterior, el cuadro 2.1 se reformularía y daría por resultado el cuadro 2.2

Observese que, de acuerdo con los datos del cuadro 2.1, los coeficientes a_{ij} serían

$$a_{11} = \frac{30kg.}{100kg.} = 0.3 \quad ; \quad a_{12} = \frac{10kg.}{80lt.} = 0.125\frac{kg.}{lt.}$$
$$a_{21} = \frac{50lt.}{100kg.} = 0.5\frac{lt.}{kg.} \quad ; \quad a_{22} = \frac{20lt.}{80lt.} = 0.250$$

o en forma matricial $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.125\frac{kg.}{lt.} \\ 0.5\frac{lt.}{kg.} & 0.250 \end{pmatrix}$ y entonces, se puede verificar que en efecto

$$\begin{pmatrix} 100kg. \\ 80lt. \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.3 & 0.125\frac{kg.}{lt.} \\ 0.5\frac{lt.}{kg.} & 0.250 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100kg. \\ 80lt. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60kg. \\ 10lt. \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 100kg. \\ 80lt. \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40kg. \\ 70lt. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60kg. \\ 10lt. \end{pmatrix}$$

♠

Con base en el ejemplo anterior, sería natural pensar que cuando tenemos un modelo abierto las componentes de la matriz A cumplen que $0 \leqq a_{ij} < 1$ y, además, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$, es decir, la suma de los elementos de cualquier columna de la matriz A es menor a la unidad. En general, no ocurre así y lo ilustramos con la ayuda del siguiente:

Ejemplo. Consideremos la información del ejemplo anterior, sólo que ahora la producción total de trigo es igual a 40 kilogramos y para producir dicha cantidad son necesarios 20 kg. de trigo y 50 litros de leche; el resto de la información permanece igual. Así, se tendría el siguiente cuadro de transacciones interindustriales:

Cuadro 2.3: Economía de dos sectores (modificada)

	trigo	leche	producción total
trigo	20	10	40
leche	50	20	80

De manera análoga a como si hizo en el primer ejemplo, calculamos los nuevos coeficientes con la información contenida en la tabla 2.3:

$$a_{11} = \frac{20kg.}{40kg.} = 0.5 \quad ; \quad a_{12} = \frac{10kg.}{80lt.} = 0.125\frac{kg.}{lt.}$$
$$a_{21} = \frac{50lt.}{40kg.} = 1.25\frac{lt.}{kg.} \quad ; \quad a_{22} = \frac{20lt.}{80lt.} = 0.250$$

o en forma matricial $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.125\frac{kg.}{lt.} \\ 1.25\frac{lt.}{kg.} & 0.250 \end{pmatrix}$

La nueva matriz A resulta muy interesante. Formamos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 & 0.125\frac{kg.}{lt.} \\ 1.25\frac{lt.}{kg.} & 0.250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.125\frac{kg.}{lt.} \\ -1.25\frac{lt.}{kg.} & 0.750 \end{pmatrix}$$

Según lo expuesto en la sección 8.3 del apéndice[4], se tiene el siguiente resultado: B es de diagonal dominante $\Leftrightarrow$ A es productiva $\Leftrightarrow$ A tiene su raíz de Frobenius menor que la unidad. Primeramente, hay que obsevar que aunque la matriz B no es de diagonal dominante el sentido de Hadamard, sí es de diagonal dominante [5]; basta con considerar la matriz D=$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y entonces:

$$DA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & -0.125\frac{kg.}{lt.} \\ -1.25\frac{lt.}{kg.} & 0.750 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.375\frac{kg.}{lt.} \\ -1.25\frac{lt.}{kg.} & 0.750 \end{pmatrix}$$

Además, se cumple la productividad, pues

$$\begin{pmatrix} 40kg. \\ 80lt. \end{pmatrix} = X > AX = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.125\frac{kg.}{lt.} \\ 1.25\frac{lt.}{kg.} & 0.250 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40kg. \\ 80lt. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30kg. \\ 70lt. \end{pmatrix}$$

[4] Veanse los teoremas 19 y 20

[5] Veanse las definiciones 34 y 35

Finalmente, se verifica que la raíz de Frobenius de A es igual a 0.789578, que es menor que la unidad. ♠

¿Cual es entonces la relación entre la suma de los coeficientes de cualquiera de las columnas de la matriz A y su productividad? La respuesta es la siguiente: si $\forall\ i\ \in\ \overline{n}$ la suma de los coeficientes de la columna A^i es menor que la unidad, entonces la matriz es productiva. La prueba formal de esta afirmación se obtiene de aplicar los teoremas[6] 17 y 20.

Hasta aquí los elementos del modelo insumo-producto. Todos ellos servirán para plantear el sistema de valores-trabajo propuesto por Marx, según Roemer, el cual se describe en el siguiente capítulo.

[6] Ver las secciones 8.2 y 8.3 del apéndice.

Capítulo 3

El modelo de Marx

Antes que otra cosa, se deben considerar los supuestos que van a regir al modelo.

Hipótesis para el modelo de Marx. A las 6 hipótesis iniciales se les agregan las siguientes:

7) El trabajo es el único factor de producción primario;

8) El trabajo sólo se aplica una vez durante el periodo;

Teniendo en cuenta estos supuestos, se plantearán algunas definiciones.

Si L es la cantidad total de trabajo (medida en unidades de tiempo) que requiere la economía para producir X, tenemos entonces que L se divide de la siguiente manera:

$$L = l_1 + l_2 + \cdots + l_n \tag{3.1}$$

donde cada l_i representa la cantidad total de trabajo necesaria para producir la mercancía i.

Nuevamente, la hipótesis de linealidad entre insumos y productos (6) nos lleva a definir los siguientes coeficientes:

$$l_i = w_i x_i \ \forall \ i \ \in \ \overline{n} \tag{3.2}$$

donde w_i es la cantidad de trabajo directo que se usa en la producción del i-ésimo bien.

Así, si sustituimos 3.2 en 3.1 tenemos que:

$$L = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n \tag{3.3}$$

Se puede escribir 3.3 de manera vectorial como se muestra a continuación:

$$L = (w_1, \ldots, w_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

y si hacemos $W = (w_1, \ldots, w_n)$ y X queda como se definió anteriormente, entonces 3.4 quedaría como sigue:

$$L = WX \tag{3.5}$$

De lo anterior se desprende la siguiente:

Definición. 7 *Sea $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ el vector renglón en R^n, positivo, cuyos coeficientes w_i representan la cantidad de trabajo directo que es necesario insumir para producir una unidad de la i-ésima mercancía.*

A éste vector se le conoce como **vector de coeficientes de trabajo directo.**

Las unidades físicas de cada componente de dicho vector, si denotamos con u_T las unidades de tiempo, son

$$\frac{\textit{unidades de tiempo}}{\textit{unidades físicas de la mercancía } i} = \frac{u_T}{u_i}$$

En este punto es importante hacer una aclaración. Las unidades u_T no son precisamente unidades de tiempo tal y como se manejan en la física. Más específicamente, se trata de unidades de tiempo de trabajo, es decir, es el tiempo durante el cual los trabajadores aplican su fuerza de trabajo para la producción de las diversas mercancías. En los sucesivo, u_T denotará precisamente estas unidades de tiempo de trabajo.

Ahora bien, para continuar la construcción del modelo de valores-trabajo, es preciso recordar algunos conceptos. Primero que nada, hay que observar que, de acuerdo con Marx [9]

> "Únicamente el trabajo es la verdadera base, la sustancia del valor (de cambio)."

o en otras palabras [9]

> "Valor (de cambio) es el trabajo social de los productores materializado en mercancías"

Entonces se deduce que para cada mercancía su valor de cambio estará dado por la cantidad de trabajo que se ha invertido en ella; es por ello que a los valores de cambio también se les conoce como **valores-trabajo**. Por su puesto, habrá que dar por hecho que todo el trabajo es de la misma naturaleza.

Ahora bien, la cantidad de trabajo existente en una mercancía está formada por dos elementos: el trabajo directo para elaborarla, por un lado, y el trabajo cristalizado en los insumos que se utilizan en su producción, por el otro. En tales condiciones, se puede establecer la siguiente ecuación:

$$\lambda_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \ldots + \lambda_{in} + w_i \tag{3.6}$$

donde λ_{ij} es una fracción del trabajo total λ_i contenido en la i-ésima mercancía como trabajo indirecto y w_i es la cantidad de trabajo directo para producir la i-ésima mercancía.

Nota 4 *Observemos que, en principio, $\lambda_i \geqq 0$. Sin embargo, si $\lambda_i = 0$ entonces estaríamos hablando de que a pesar de que se han invertido horas de trabajo en insumos y/o trabajo directo, el valor-trabajo de esta mercancía sería 0 horas de trabajo por unidad física, lo cual es una clara contradicción; así, sólo consideramos el caso en el que $\lambda_i > 0$. En otras palabras, no existen valores-trabajo nulos.*

En consecuencia, y de manera análoga a como lo hicimos con las ecuaciones 2.2, se establece lo siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & \lambda_{11} + \lambda_{12} + \ldots + \lambda_{1n} + w_1 \\ \lambda_2 & = & \lambda_{21} + \lambda_{22} + \ldots + \lambda_{2n} + w_2 \\ & \vdots & \\ \lambda_n & = & \lambda_{n1} + \lambda_{n2} + \ldots + \lambda_{nn} + w_n \end{array}\right\} \tag{3.7}$$

Y considerando nuevamente la hipótesis de linealidad, vemos que

$$\lambda_{ij} = a_{ij}\lambda_i; \ \forall\ i,j \ \in \ \overline{n} \tag{3.8}$$

Si sustituimos 3.8 en 3.7 obtenemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1n}\lambda_n + w_1 \\ \lambda_2 & = & a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2n}\lambda_n + w_2 \\ & \vdots & \\ \lambda_n & = & a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \ldots + a_{nn}\lambda_n + w_n \end{array}\right\} \tag{3.9}$$

Utilizamos la notación matricial para reescribir el sistema 3.9 y nos queda como sigue:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^T + (w_1, w_2, \ldots, w_n) \tag{3.10}$$

Si denotamos por $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ y utilizamos las definiciones previas de A y W, entonces tenemos que es posible ver a 3.10 como sigue:

$$\Lambda = \Lambda A^T + W \tag{3.11}$$

De 3.11 se deriva una nueva

Definición. 8 *Sea* $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ *el vector renglón en* R^n*, positivo, cuyas componentes* λ_i *representan el valor-trabajo total de la* i-*ésima mercancía, que no es otra cosa que la suma de trabajo indirecto mas el trabajo directo invertido en su elaboración.*

A este vector lo llamamos **vector de valores-trabajo**.

Las unidades físicas de cada componente de este vector son, igual que en el caso de W,

$$\frac{\textit{unidades de tiempo}}{\textit{unidades físicas de la mercancía } i} = \frac{u_T}{u_i} \ \forall \ i \ \in \ \overline{n}$$

De manera similar a como se hizo en párrafos anteriores (y manteniendo el supuesto de que A es productiva e irreducible), podemos despejar Λ de la ecuación 3.11:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda A + W \\ \Rightarrow \Lambda - \Lambda A &= W \\ \Rightarrow \Lambda(I - A) &= W \\ \Rightarrow \Lambda B &= W \\ \Rightarrow \Lambda &= W B^{-1} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Es momento de definir uno de los conceptos más importantes en este capítulo, a saber, el de tasa de explotación. Para ello, es preciso establecer previamente algunas definiciones.

Primero que nada, hay que notar que para reproducir la fuerza de trabajo, los trabajadores requieren satisfacer ciertas necesidades de consumo. Dichos requerimientos quedan plasmados a continuación:

Definición. 9 *Sea* $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ *el vector columna en* R^n*, semipositivo, cuyas entradas* d_i *representan la cantidad de la mercancía* i *que requiere el trabajador para reproducir la fuerza de trabajo.*

A este vector le llamamos **vector de canasta de consumo**.

Las unidades físicas de la i-ésima componente de este vector son las mismas que las de los vectores X y F previamente definidos, es decir, u_i.

Es momento de hacer un pequeño paréntesis para recordar algunas definiciones que nos servirán más adelante. Comenzamos mencionando lo referente a la división del capital. Siguiendo nuevamente a Marx [9]:

> "Para poner en claro la naturaleza del capital y el mecanismo de la explotación capitalista reviste de gran importancia la división del capital en constante y variable."

Así, se tiene que [9]:

> "...La parte del capital, que se invierte en medios de producción...y que no cambia de magnitud en el proceso de producción, se llama capital constante."

Por otra parte, se tiene que [9]:

> "La parte del capital que se gasta en la compra de fuerza de trabajo y que crece en el proceso de producción debido a que los obreros crean la plusvalía, se denomina capital variable."

Finalmente, es importante mencionar que [9]:

> "La plusvalía es...el resultado de la explotación de la clase obrera por los capitalistas."

Regresemos al análisis formal. De las definiciones 8 y 9, tenemos que el valor de la fuerza de trabajo correspondiente a una jornada laboral sería

ΛD. A ΛD también se le conoce como **trabajo socialmente necesario** ó **capital variable**[1].

Establecemos dos definiciones adicionales:

Definición. 10 *Sea T la duración de la jornada laboral, medida en unidades de tiempo u_T. Dicha duración está determinada por la lucha de clases en un momento histórico dado.*

Definición. 11 *El **trabajo excedente** se define como la diferencia entre la jornada laboral y el trabajo socialmente necesario. Se puede expresar como sigue:*

$$T - \Lambda D \tag{3.13}$$

Al trabajo excedente también se le conoce como **plusvalor**.

Nota 5 *Observemos que, en general, $T - \Lambda D$ es un número real que puede ser positivo, cero ó negativo. Sin embargo, el caso que aquí interesa es aquel en el que $T > \Lambda D$ y en consecuencia $T - \Lambda D > 0$. Salvo que se diga lo contrario, este supuesto prevalecerá el resto del capítulo.*

Ahora es posible establecer una comparación entre el trabajo excedente y el trabajo socialmente necesario. Para ello, consideremos el cociente:

$$e = \frac{trabajo\ excedente}{trabajo\ necesario} \tag{3.14}$$

Si expresamos en notación matemática 3.14, podemos plantear, finalmente, la siguiente:

Definición. 12 *La **tasa de explotación** se define como sigue:*

$$e = \frac{T - \Lambda D}{\Lambda D} \tag{3.15}$$

A la tasa de explotación también se le denomina **tasa de valor excedente**. Además, se trata de un número real, es decir, no se expresa en unidades físicas

Veamos cómo puede variar la tasa de explotación bajo diferentes circunstancias. Se prueba el siguiente:

[1]Observemos que el producto ΛD está bien definido y da como resultado un número real positivo. Además, dicho número real queda expresado en unidades de tiempo (de trabajo).

Teorema 1 *Considerando la definición de la tasa de explotación establecida en 3.15, se tiene que:*

i) si $T > T' \Rightarrow e > e'$ si Λ y D son fijos.

ii) si $D \geq D' \Rightarrow e < e'$ si Λ y T son fijos.

iii) si $\Lambda \geq \Lambda' \Rightarrow e < e'$ si T y D son fijos[2].

Demostración.

i) Por hipótesis, $T > T'$,

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow & T - \Lambda D > T' - \Lambda D \\ \Rightarrow & e = \frac{T-\Lambda D}{\Lambda D} > \frac{T'-\Lambda D}{\Lambda D} = e' \end{array}$$

ii) Por hipótesis, $D \geq D'$,

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow & \Lambda D > \Lambda D' \\ \Rightarrow & -\Lambda D < -\Lambda D' \\ \Rightarrow & T - \Lambda D < T - \Lambda D' \quad (a) \end{array}$$

y, por otro lado, si

$$\begin{array}{ll} & \Lambda D > \Lambda D' \\ \Rightarrow & \frac{1}{\Lambda D} < \frac{1}{\Lambda D'} \quad (b) \end{array}$$

dado que las desigualdades (a) y (b) se dan entre números positivos, al multiplicar dichas expresiones se obtiene el resultado:

$$e = \frac{T - \Lambda D}{\Lambda D} < \frac{T - \Lambda D'}{\Lambda D'} = e'$$

iii) La demostración es totalmente análoga a la anterior.

[2]Éste último caso merece especial mención. Estrictamente hablando, no debiera incluirse en la demostración del teorema, pues contradice la hipótesis (4), ya que si el vector Λ cambia, necesariamente implica un cambio en la manera de producir algún bien, es decir, un cambio en la tecnología.

□

Veamos la interpretación económica del Teorema 1. Si la jornada laboral se ve incrementada, entonces la tasa de explotación aumenta. Contrariamente, si por ejemplo la canasta de consumo del trabajador aumenta en tan sólo uno de sus componentes, y el resto de los elementos de la ecuación se dejan fijos, entonces la tasa de explotación disminuye. Clarifiquemos esto un poco más con un ejemplo.

Ejemplo. Vamos a basarnos en el ejemplo del capítulo 1, en el que una economía sólo produce trigo y leche. Supongamos que para obtener la producción total se requiere de una jornada laboral semanal de 40 horas. Además, supongamos que para que el trabajador labore dicha jornada, se requiere satisfacer una canasta de consumo que consta de 4 kilogramos de trigo y 2 litros de leche. Finalmente, supongase que los valores-trabajo son los siguientes: una hora de trabajo por cada kilogramo de trigo y cuatro horas de trabajo por cada litro de leche. De manera vectorial, lo anterior quedaría expresado como sigue: $T = 40h.$, $D = \begin{pmatrix} 4kg. \\ 2lt. \end{pmatrix}$ y $\Lambda = (1\frac{h.}{kg}, 4\frac{h.}{lt.})$ Efectuando las operaciones, tenemos que

$$
\begin{aligned}
e &= \frac{T - \Lambda D}{\Lambda D} \\
&= \frac{40h. - (1\frac{h.}{kg}, 4\frac{h.}{lt.})\begin{pmatrix} 4kg. \\ 2lt. \end{pmatrix}}{(1\frac{h.}{kg}, 4\frac{h.}{lt.})\begin{pmatrix} 4kg. \\ 2lt. \end{pmatrix}} \\
&= \frac{40h. - 12h.}{12h.} \\
&= \frac{28h.}{12h.} \\
&= 2.333
\end{aligned}
$$

Ahora supongamos que la jornada laboral aumenta de 40 a 48 horas (por ejemplo, si se trabajaban 5 días a la semana ahora se trabajan 6). Entonces

$T' = 48h.$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} e' &= \frac{T' - \Lambda D}{\Lambda D} \\ &= \frac{48h. - (1\frac{h.}{kg}, 4\frac{h.}{lt.})\begin{pmatrix} 4kg. \\ 2lt. \end{pmatrix}}{(1\frac{h.}{kg}, 4\frac{h.}{lt.})\begin{pmatrix} 4kg. \\ 2lt. \end{pmatrix}} \\ &= \frac{36h.}{12h.} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Consideremos ahora el caso en el que lo que varía no es la jornada laboral, sino la canasta de consumo del trabajador. Pensemos que su demanda de unidades de trigo aumenta de 4 a 6. Esto implicaría que $D' = \begin{pmatrix} 6kg. \\ 2lt. \end{pmatrix}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} e' &= \frac{T - \Lambda D'}{\Lambda D'} \\ &= \frac{40h. - (1\frac{h.}{kg}, 4\frac{h.}{lt.})\begin{pmatrix} 6kg. \\ 2lt. \end{pmatrix}}{(1\frac{h.}{kg}, 4\frac{h.}{lt.})\begin{pmatrix} 6kg. \\ 2lt. \end{pmatrix}} \\ &= \frac{26h.}{14h.} \\ &= 1.857 \end{aligned}$$

♠

Regresemos a la ecuación 3.15. Como ya vimos, esta ecuación representa la tasa de explotación por jornada laboral. Mediante unas sencillas operaciones, podemos transformar dicha expresión en otra que puede resultar un poco más conveniente para el análisis posterior. Consideremos:

$$\begin{aligned} e &= \frac{T - \Lambda D}{\Lambda D} \\ &= \frac{\frac{1}{T}(T - \Lambda D)}{\frac{1}{T}(\Lambda D)} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{T}\Lambda D}{\frac{1}{T}\Lambda D} \\ &= \frac{1 - \Lambda(\frac{1}{T}D)}{\Lambda(\frac{1}{T}D)} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Hagamos $\widetilde{D} = \frac{1}{T}D$, de donde se tiene lo siguiente:

Definición. 13 *Sea* $\widetilde{D} = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{T} \\ \frac{d_2}{T} \\ \vdots \\ \frac{d_n}{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{d_1} \\ \widetilde{d_2} \\ \vdots \\ \widetilde{d_n} \end{pmatrix}$ *el vector columna en* R^n*, semipositivo, cuyas componentes* $\frac{d_i}{T} = \widetilde{d_i}$ *representan la cantidad de la* i-*ésima mercancía que consume el trabajador por hora trabajada.*

A este vector le llamamos **vector de canasta de consumo por hora trabajada.**

A diferencia del vector D, que está expresado en unidades físicas de la mercancía i, la i-ésima componente del vector $\widetilde{D}$ está expresada como sigue:

$$\frac{\textit{unidades físicas de la mercancía } i}{\textit{unidades de tiempo}} = \frac{u_i}{u_T} \ \forall\, i \ \in \ \overline{n}$$

Sustituyamos $\widetilde{D}$ en 3.16:

$$\begin{aligned} e &= \frac{1 - \Lambda(\frac{1}{T}D)}{\Lambda(\frac{1}{T}D)} \\ &= \frac{1 - \Lambda\widetilde{D}}{\Lambda\widetilde{D}} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Y entonces obtenemos una variante de la tasa de explotación:

Definición. 14 *La expresión 3.17 representa la* ***tasa de explotación por hora trabajada****.*

Mediante algunas operaciones elementales con la ecuación 3.17 se obtiene: $(1+e)\Lambda\widetilde{D} = 1$. Si sustituimos esta expresión en 3.11 se obtiene:

$$\begin{aligned}\Lambda &= \Lambda A + W \\ &= \Lambda A + W(1) \\ &= \Lambda A + W(1+e)\Lambda\widetilde{D} \\ &= \Lambda A + W(\Lambda\widetilde{D}) + eW(\Lambda\widetilde{D}) \qquad (3.18)\end{aligned}$$

Ahora bien, si se multiplica la ecuación 3.18 por el vector de producción X, queda:

$$\Lambda X = \Lambda AX + (WX)(\Lambda\widetilde{D}) + e(WX)(\Lambda\widetilde{D}) \qquad (3.19)$$

en donde
$\Lambda X =$ el valor de la producción total,
$\Lambda AX = c =$ el valor del capital constante total (medios de producción totales),
$(WX)(\Lambda\widetilde{D}) = v =$ el valor del capital variable total (fuerza de trabajo total),
$e(WX)(\Lambda\widetilde{D}) = s =$ el valor de la plusvalía total;

Con la ayuda de estos elementos, se presenta la siguiente:

Definición. 15 *Se define la* ***tasa de ganancia media****, denotada por r, como el número real determinado por el cociente:*

$$r = \frac{e(WX)(\Lambda\widetilde{D})}{(WX)(\Lambda\widetilde{D}) + \Lambda AX} = \frac{s}{c+v} \qquad (3.20)$$

En este punto es importante hacer una pausa para analizar con un poco más de detalle el concepto recién introducido. Primero que nada, es inmediato ver que esta tasa de ganancia está expresada en términos de los valores-trabajo. En segundo lugar, hay que hacer notar que Marx, al establecer dicha tasas, da por hecho que es la misma para todos los sectores. Esto en principio no es del todo cierto: concretamente, la diferencia en las tasas de ganancia estará determinada por la composición organica del capital en cada sector. Pero suponer que la tasa es uniforme en el sistema de valores-trabajo de Marx queda justificado bajo el siguiente argumento, ofrecido por [7, pag. 159] en el que cita a Sweezy:

> "En efecto, los capitalistas se moverán en busca de la tasa de ganancia más alta posible, hasta que ninguno pueda mejorar su situación por un nuevo moviemiento, un estado de cosas que sólo se alcanzará cuando la tasa de ganancia sea la misma en todas las industrias"

Se pueden econtrar ejemplos muy ilustrativos de lo anterior en [7, pag. 156 y 157]

Veamos ahora otra manera de expresar la tasa de ganancia media. Antes, establezcamos la siguiente:

Definición. 16 *Se define la ,composición orgánica media del capital como*

$$k = \frac{\Lambda A X}{(WX)(\Lambda \widetilde{D})} = \frac{c}{v} \tag{3.21}$$

Así, si en la ecuación 3.20 dividimos numerador y denominador por $(WX)(\Lambda \widetilde{D})$, lo cual es posible hacer ya que $(WX)(\Lambda \widetilde{D}) \neq \overline{0}$, se tiene como resultado

$$r = \frac{e}{1+k} \tag{3.22}$$

Una vez que se ha definido la tasa de ganancia media, es posible establecer una primera definición de precios de producción de equilibrio, en términos, por supuesto, de los valores-trabajo. Así, dichos precios de equilibrio quedan determinados por la siguiente ecuación:

$$P = (1+r)[\Lambda A + W(\Lambda \widetilde{D})] \tag{3.23}$$

Lo anterior motiva la siguiente:

Definición. 17 *Sea $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, el vector renglón en R^n, positivo, cuyas componentes p_i representan los precios unitarios de producción de la* i-*ésima mercancía en términos de los valores-trabajo.*

Tal vector es conocido como **vector de precios de producción** (ó **vector de precios de equilibrio**).

Por la manera en que están determinados dichos precios de producción, tenemos que las unidades físicas de éste vector son:

$$\frac{unidades\ de\ tiempo}{unidades\ físicas\ de\ la\ mercancía\ i} = \frac{u_T}{u_i}\ \forall\ i\ \in\ \overline{n}$$

De acuerdo con el pensamiento marxista, esta forma de expresar los precios de producción cumple con las siguientes propiedades:

(a) La suma de las ganacias es necesariamente igual a la suma de las plusvalías. Esto resulta de tomar la ecuación 3.23 y multiplicarla por el vector X para obtener el precio de la producción total, es decir,

$$\begin{aligned} PX &= (1+r)[\Lambda A + W(\Lambda \widetilde{D})]X \\ &= (1+r)[\Lambda A X + (WX)(\Lambda \widetilde{D})] \\ &= [\Lambda A X + (WX)(\Lambda \widetilde{D})] + r[\Lambda A X + (WX)(\Lambda \widetilde{D})] \end{aligned} \tag{3.24}$$

El segundo sumando del lado derecho de la ecuación 3.24 es la *ganancia media total*[3] la cual indicaremos por la letra π, es decir, $\pi = r[\Lambda AX + WX(\Lambda\widetilde{D})]$ Ahora bien, si se considera la ecuación 3.20, π puede ser reexpresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\pi &= r[\Lambda AX + (WX)(\Lambda\widetilde{D})] \\
&= \frac{e(WX)(\Lambda\widetilde{D})}{(WX)(\Lambda\widetilde{D}) + \Lambda AX}\,[\Lambda AX + (WX)(\Lambda\widetilde{D})] \\
&= e(WX)(\Lambda\widetilde{D}) \;=\; s
\end{aligned}$$

con lo que la afirmación queda probada. Es importante resaltar el siguiente comentario de Abraham-Frois [1, pag. 21 y 22]:

> "Por supuesto, habrá una diferencia entre el valor excedente creado en cada sector y la ganancia total de cada sector, dado que la norma para la distribución del valor excedente es diferente de la norma para la creación del valor excedente. Más precisamente, la ganancia sera mayor que el valor excedente en aquellos sectores en donde la composición orgánica del capital sea mayor que la (composición ogánica) promedio..."

En otras palabras, lo anterior quiere decir que la forma en la que se crea el valor excedente en cada sector es distinta de la forma en la que éste se distribuye en cada sector, y que dicha diferencia depende directamente de la composición orgánica del capital de cada sector.

Dos aspectos importantes de esta afirmación son: primero, que existe una imprecisión en los conceptos, pues habría que aclarar que las cantidades que se estan comparando no son la tasa de ganancia y el valor excedente, sino la *masa de ganancia* (la cual queda bien definida un poco más adelante) y el valor excedente; segundo, que Abraham-Frois no prueba formalmente dicha afirmación. En las siguientes líneas, se presenta una demostración formal, aunque antes se precisarán algunos elementos.

[3] En rigor, esta cantidad vendría a ser la *masa de ganancia total*. Como el concepto de masa de ganancia se define más adelante, por el momento conservaremos este término.

De la ecuación 3.18, se tiene que para el i-ésimo sector se cumple la siguiente igualdad:

$$\lambda_i = \Lambda A_i + w_i \Lambda \widetilde{D} + e w_i \Lambda \widetilde{D} \ \forall \ i \ \in \ \overline{n}$$

en donde
λ_i = el valor de cambio de la i-ésima mercancía.
$\Lambda A_i = c_i$ = el valor del capital constante del i-ésimo sector,
$w_i \Lambda \widetilde{D} = v_i$ = el valor del capital variable del i-ésimo sector,
$e w_i \Lambda \widetilde{D} = s_i$ = el valor de la plusvalía del i-ésimo sector.

De manera muy similar a como lo hicimos en la definición 16, tenemos que

Definición. 18 *La composición orgánica del capital del* i-*ésimo sector está dada por*

$$k_i = \frac{\Lambda A_i}{w_i \Lambda \widetilde{D}} = \frac{c_i}{v_i} \ \forall \ i \ \in \ \overline{n} \tag{3.25}$$

Evidentemente, esto último genera un nuevo vector, que aunque no se utilizará durante el resto de éste trabajo, debemos mencionarlo a efecto de preservar la formalidad:

Definición. 19 *Sea* $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ *el vector en* R^n*, positivo, cuya* i-*ésima componente representa la composición orgánica del capital del* i-*ésimo sector*

Finalmente, consideremos esta:

Definición. 20 *La* masa de ganancia *del* i-*ésimo sector,* $\forall \ i \ \in \overline{n}$*, se define como:*

$$g_i = r(c_i + v_i) = r(\Lambda A_i + w_i \Lambda \widetilde{D}) = \frac{e(WX)(\Lambda \widetilde{D})}{(WX)(\Lambda \widetilde{D}) + \Lambda A X} \ (\Lambda A_i + w_i \Lambda \widetilde{D}) \tag{3.26}$$

Entonces, tomando en consideración las definiciones 16, 18, 20 y la de s_i, se enuncia y demuestra el siguiente:

Teorema 2 *Sea una economía con tasa de explotación $e > 0$. Si $k_i > k$ (respectivamente $=, <$), entonces $g_i > s_i$ (respectivamente $=, <$), es decir,*

$$\frac{e(WX)(\Lambda\widetilde{D})}{(WX)(\Lambda\widetilde{D}) + \Lambda AX}\,(\Lambda A_i + w_i\Lambda\widetilde{D}) > ew_i\Lambda\widetilde{D}$$

(respectivamente $=, <$).

Demostración. Se demostrará la desigualdad " $>$ ", las otras dos relaciones se demuestran de manera idéntica. Por hipótesis, $k_i > k$,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\Lambda A_i}{w_i\Lambda\widetilde{D}} &> \frac{\Lambda AX}{(WX)(\Lambda\widetilde{D})} \\
\Rightarrow \frac{\Lambda A_i}{w_i\Lambda\widetilde{D}} + 1 &> \frac{\Lambda AX}{(WX)(\Lambda\widetilde{D})} + 1 \\
\Rightarrow \frac{\Lambda A_i + w_i\Lambda\widetilde{D}}{w_i\Lambda\widetilde{D}} &> \frac{\Lambda AX + (WX)(\Lambda\widetilde{D})}{(WX)(\Lambda\widetilde{D})} \\
\Rightarrow \frac{(WX)(\Lambda\widetilde{D})}{w_i\Lambda\widetilde{D}}\,(\Lambda A_i + w_i\Lambda\widetilde{D}) &> \Lambda AX + (WX)(\Lambda\widetilde{D}) \\
\Rightarrow \frac{(WX)(\Lambda\widetilde{D})}{\Lambda AX + (WX)(\Lambda\widetilde{D})}\,(\Lambda A_i + w_i\Lambda\widetilde{D}) &> w_i\Lambda\widetilde{D}
\end{aligned}$$

si multiplicamos esta última desigualdad por $e > 0$, resulta

$$\frac{e(WX)(\Lambda\widetilde{D})}{\Lambda AX + (WX)(\Lambda\widetilde{D})}\,(\Lambda A_i + w_i\Lambda\widetilde{D}) > ew_i\Lambda\widetilde{D}$$

□

(b) La suma de los precios de producción de las mercancías es igual a la suma de sus valores-trabajo. Para verificar esto, consideramos la ecuación 3.24, y como el inciso anterior ha quedado demostrado, se tiene que:

$$\begin{aligned}
PX &= [\Lambda AX + (WX)(\Lambda\widetilde{D})] + r[\Lambda AX + (WX)(\Lambda\widetilde{D})] \\
&= [\Lambda A + W(\Lambda\widetilde{D})]X + r[\Lambda AX + (WX)(\Lambda\widetilde{D})] \\
&= [\Lambda A + W(\Lambda\widetilde{D})]X + e(WX)(\Lambda\widetilde{D}) \\
&= [\Lambda A + W(\Lambda\widetilde{D}) + eW(\Lambda\widetilde{D})]X \\
&= \Lambda X
\end{aligned}$$

Algebráicamente, la formulación de los precios de producción en la ecuación 3.23 no presentan ninguna inconsistencia. Sin embargo, desde el punto de vista lógico, sí son inconsistentes, pues mientras que de un lado de la igualdad se manejan precios de producción, en el otro lado se manejan valores-trabajo. Se encuetra una buena explicación de dicha inconsitencia en [7, pag. 166]:

> "El origen de esta contradicción está en que, por un lado, el capital constante está expresado en precios de producción y, por otro lado, el mismo capital constante, comprado por los sectores, es decir visto desde el ángulo de insumo, es expresado en valor...Dicho de otra manera, el error consiste en que en el esquema de la transformación las mercancías producidas son evaluadas a su precio de producción, y las mercancías utilizadas en la producción son evaluadas a su valor"

Es justo en esta falta de coherencia en donde los detractores de Marx apoyan su debate. En este punto, Abraham-Frois recurre a la aportación de Von Bortkiewicz, quien establece el siguiente sistema de precios:

$$P = (1 + R)[PA + wW] \tag{3.27}$$

en donde
$R =$ la tasa de ganancia, que por hipótesis es uniforme.
$P =$ el vector de precios de producción,
$A =$ la matriz de coeficientes técnicos (definida como antes),
$W =$ el vector de coeficientes de trabajo directo (definido como antes),
$w =$ la tasa de salario, definida como la cantidad de dinero que le permite al trabajador comprar su canasta de consumo; obviamente, dicha tasa está expresada en precios de producción, es decir, $w = P\widetilde{D}(= \sum_{i=1}^{n} p_i d_i)$

Aquí es importante destacar que aunque r y R denotan la tasa de ganancia, la primera se refiere el sistema de precios propuesto por Marx y la segunda es la que corresponde al sistema de precios propuesto por Bortkiewicz. El cambio de notación está bien justificado, pues a pesar de que las dos son tasas de ganancia, no representan el mismo concepto. Mientras que la primera tasa de ganancia, la cual se aplica a cada uno de los sectores, está determinada por la ecuación 3.20, expresada en valores trabajo, la tasa de ganancia en la ecuación 3.27 se halla expresada en precios de producción, y para el i-ésimo sector inicialmente está dada por la siguiente ecuación:

$$R_i = \frac{p_i - (\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i + w w_i)}{(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i + w w_i)} \tag{3.28}$$

Con algunas operaciones básicas, se tiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} p_i &= (\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i + w w_i) + R_i(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i + w w_i) \\ \Rightarrow p_i &= (1 + R_i)(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i + w w_i) \end{aligned} \tag{3.29}$$

Dado que estamos suponiendo que la tasa de ganancia es uniforme en todos los sectores, eso implica que $R = R_i \ \forall \ i \ \in \ \overline{n}$, por lo que 3.29 queda como sigue:

$$p_i = (1 + R)(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i + w w_i) \tag{3.30}$$

y cuando consideramos 3.30 $\forall \ i \ \in \ \overline{n}$, obtenemos 3.27. De manera aritmética, es posble ver que, calculando los precios de producción en uno y otro sistema, se llegan a resultados diferentes. En [2, pag. 66-98] y [7, pag. 167-174] se pueden econtrar ejemplos desrrollados y una explicación un poco más amplia de lo mencionado en estas líneas. Para finalizar, es muy importante resaltar el hecho de que, tanto Marx como Bortkiewicz, asumen de manera implicita que se ha dado un proceso mediante el cual, a pesar de iniciar con tasas de ganancia diferentes en cada sector, por medio de el libre flujo de los capitales de unos sectores a otros se alcanza una tasa uniforme para todos los sectores.

Ahora bien, este último sistema es lógicamente consistente, además de que tambien lo es matemáticamente, ya que se trata de un sistema con n ecuaciones y n incógnitas, pues cualquiera de las mercancías puede escogerse como numerario. La corrección propuesta por Bortkiewicz presenta, según Abraham-Frois, 3 consecuencias importantes:

1) Los bienes de lujo no influyen en la determinación de la tasa de ganancia. Esto se puede mostrar con un sencillo.

   Ejemplo. Supongase un economía constituida únicamente por tres sectores: el primero produce bienes de producción, el segundo bienes salario y el tercero bienes de lujo; adicionalmente se supone que los trabajadores sólo consumen bienes del segundo sector, por lo que la tasa de salario estaría dada por $w = p_2\widetilde{d}_2$. Así, se tendría lo siguiente: $P = (p_1, p_2, p_3)$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $W = (w_1, w_2, w_3)$ y entonces

$$\begin{aligned} P &= (1+R)[PA + wW] \Leftrightarrow \\ p_1 &= (1+R)[p_1 a_{11} + p_2(w_1\widetilde{d}_2 + a_{21})] \quad (3.31) \\ p_2 &= (1+R)[p_1 a_{12} + p_2(w_2\widetilde{d}_2 + a_{22})] \quad (3.32) \\ p_3 &= (1+R)[p_1 a_{13} + p_2(w_3\widetilde{d}_2 + a_{23})] \quad (3.33) \end{aligned}$$

Es claro que basta tomar las ecuaciones 3.31 y 3.32 para determinar los precios de producción y la tasa de ganancia, pues el precio de los bienes de lujo resulta ser una combinación lineal de los otros dos y de la tasa de ganancia. ♠

En otras palabras, los bienes de lujo no participan en la determinacion de la tasa de ganancia ni de los precios de los otros bienes, aunque estos últimos, junto con la tasa de ganancia, sí determinan a aquellos.

2) Una vez que se acepta el sistema de precios propuesto por Bortkiewicz, las propiedades mencionadas con anterioridad, relativas al la igualdad entre la suma de las ganancias y la suma de las plusvalías (a), por un lado, y a la igualdad entre la suma de los precios y la suma de los valores (b), por el otro, carecen de sentido, pues como afirma Abraham-Frois [1, pag. 27], “no son conmensurables”. Sin embargo, el propio Abraham-Frois propone normalizar el sistema de precios de tres maneras distintas de tal suerte que, en efecto, las igualdades se vuelvan conmensurables.

   i) Hagase $p_i = \lambda_i$. Aunque esta manera de normalizar es la primera que propone Abraham-Frois, es la que menos analiza. En principio, no especifica si dicha igualdad es valida para todos los sectores o para algúno en particular, aunque este último caso carecería de sentido práctico. Suponiendo lo primero, se tendría, como veremos mas adelante, que las relaciones (a) y (b) se cumplen de manera simultánea.

   ii) Hagase $PX = \Lambda X$. Tal como lo afirma Abraham-Frois, esto sería equivalente a aceptar la propiedad (b) como hipótesis, con lo que restaría probar la otra igualdad. A continuación, se hará ver que, en general, esto no ocurre. Retomamos la ecuación 3.19, la cual indica que:

$$\begin{aligned}
\Lambda X &= \Lambda A X + (WX)(\Lambda\widetilde{D}) + e(WX)(\Lambda\widetilde{D}) \\
\Rightarrow e(WX)(\Lambda\widetilde{D}) &= \Lambda X - \Lambda A X - (WX)(\Lambda\widetilde{D}) \\
&= \Lambda X - \Lambda A X - (\Lambda\widetilde{D})(WX) \\
&= \Lambda X - \Lambda(A + \widetilde{D}W)X \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Antes de continuar, hagamos una pequeña pausa para detallar el segundo sumando del lado derecho de la ecuación 3.34. Como sabemos, Λ, A y X ya han sido definidos. Pero el objeto $\widetilde{D}W$ es de reciente aparición. Así, consideremos una nueva:

Definición. 21 *Sea $\widetilde{D}W$, la matriz de n x n, positiva, cuyos coeficientes representan la cantidad de la mercancía* i *que es preciso consumir para reproducir la cantidad de trabajo* j.

Económicamente, la j-ésima columna de ésta matriz representa las cantidades de cada una de las mercancías que se requieren consumir para obtener la cantidad de trabajo directo necesario para conseguir una unidad de la j-ésima mercancía.

Una vez hecho lo anterior, planteamos la siguiente:

Definición. 22 *Sea $A^* = A + \widetilde{D}W$. Esta matriz, llamada* socio-tecnológica, *está formada por la suma de la matriz de coeficientes técnicos previamente definida y la matriz de la definición 21.*

Más interesante es su significado económico: se trata de una matriz que podría llamarse "de insumos globales"pues incluye tanto los insumos materiales como los que corresponden a la fuerza de trabajo. Ahora bien, si reemplazamos A^* en la expresión 3.34, se obtiene que la ecuación de la plusvalía total está dada por

$$e(WX)(\Lambda\widetilde{D}) = \Lambda X - \Lambda A^* X \qquad (3.35)$$

Por otra parte, del sistema de precios dado por la ecuación 3.27, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
P &= (1+R)(PA+wW) \\
&= (1+R)(PA+P\widetilde{D}W) \\
&= (1+R)P(A+\widetilde{D}W) \\
&= (1+R)PA^* \\
\Rightarrow PX &= (1+R)PA^*X \\
&= PA^*X+RPA^*X
\end{aligned}$$

lo que implica que la expresión para la ganancia total es

$$RPA^*X = PX - PA^*X \tag{3.36}$$

Ahora bien, aún considerando la hipótesis inicial, la cual indica que $PX = \Lambda X$, las ecuaciones 3.35 y 3.36 no necesariamente mantienen una relacion de igualdad, pues, en general, $\Lambda A^*X \neq PA^*X$. Para hacer ver esto último, considerese el siguiente:

Ejemplo.

Sean $P = (2,4,1)$, $\Lambda = (2,2,2)$, $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ Evidentemente, se cumple la hipótesis, pues

$$PX = 6+8+4 = 18 = 6+4+8 = \Lambda X$$

sin embargo, por un lado se tiene que

$$\begin{aligned}
\Lambda A^*X &= (2,2,2)\begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= (0.6, 0.2, 0.4)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= 1.8+0.4+1.6 \\
&= 3.8
\end{aligned}$$

y por otro lado, haciendo operaciones análogas, se obtiene

$$\begin{aligned} PA^*X &= (2,4,1)\begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= (0.3,0.2,0.8)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 0.9+0.4+3.2 \\ &= 4.5 \end{aligned}$$

♠

Con ello queda probado que, en general, las expresiones no son iguales. Ahora bien, en este inciso se ha supuesto válida la relación (b) y se ha demostrado que la relación (a) no se cumple. A continuación se muestra que el caso inverso tampoco ocurre.

iii) Hagase $P(I-A^*)X = \Lambda(I-A^*)X$ Es claro que esta condición de normalización equivale a que se cumpla la condición (a), es decir, que la suma de las plusvalías sea igual a la suma de las ganancias, pues

$$\begin{aligned} RPA^*X &= PX - PA^*X \\ &= P(I-A^*)X \\ &= \Lambda(I-A^*)X \\ &= \Lambda X - \Lambda A^*X \\ &= e(WX)(\Lambda\widetilde{D}) \end{aligned}$$

Ahora bien, la condición (b), equivalente a que $PX = \Lambda X$, no necesariamente se cumple, como se puede ver con el siguiente:

Ejemplo. Sean $P = (6,1,2)$, $\Lambda = (3,1,4)$, $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \\ 0.1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces, efectuando las operaciones se tiene que:

$$\begin{aligned} P(I - A^*)X &= (6,1,2)\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & 0 \\ 0 & 1 & -0.4 \\ -0.1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (6,1,2)\begin{pmatrix} 0.6 \\ 1.6 \\ 0.9 \end{pmatrix} \\ &= 7 \\ &= (3,1,4)\begin{pmatrix} 0.6 \\ 1.6 \\ 0.9 \end{pmatrix} \\ &= (3,1,4)\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & 0 \\ 0 & 1 & -0.4 \\ -0.1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \Lambda(I - A^*)X \end{aligned}$$

es decir, se cumple la hipótesis, pero debe observarse que, por un lado,

$$PX = (6,1,2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 10$$

y por otro lado

$$\Lambda X = (3,1,4)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 9$$

lo que demuestra lo dicho anteriormente. ♠

Del análisis anterior, se desprenden dos conclusiones importantes. La primera es que, ya sea que se utilicen las condiciones de normalización ii) ó iii), no es posible que se cumplan, de manera simultanea las relaciones anteriormente mencionadas, a saber (a) y (b). Así, parecería que la solución es tomar la condición de normalización i), pues con esta alternativa claramente ambas desigualdades se cumplen simultáneamente; pero esta presenta un problema que, de hecho, comparte con las dos restantes: las unidades físicas no son comparables. Esto es porque, de un lado, se tienen unidades monetarias, y del otro, unidades de tiempo. Es importante resaltar éste hecho, el cual pasa desapercibido para Abraham-Frois, pues ésta inconsistencia es exactamente la misma que Von Bortkiewicz pretende corregir con el sistema de precios que propone. En otras palabras: **los métodos de normalización no resultan efectivos para volver conmensurables las igualdades, por lo que siguen careciendo de sentido lógico.**

3) Dado que el nuevo sistema de precios está determinado por la ecuación $P = (1+R)PA^*$, resulta inmediato ver que el sistema de precios de producción es independiente del sistema de valores trabajo. Esto implica, en principio, un problema teorico para el sistema marxista, pues para Marx el problema de la transformación presenta un mecanismo que parte de la teoría del valor hacia la tasa de ganancia, y de este punto llega a los precios de producción. Sin embargo, y como se ha podido observar, tanto los precios de producción como la tasa de ganancia pueden ser determinados de manera simultánea, con lo que las teorías incluidas en los tomos I y III parecieran no tener relación.

Hasta éste punto llegan las consideraciones derivadas del nuevo sistema de precios. En relación con la última, es cierto que, aunque no existe ningun procedimiento lógico-matemático (algoritmo) que permita pasar del espacio de los valores trabajo al de los precios de producción (o vicevesa), existe una conexión que relaciona ambos espacios. Dicha conexión es conocida como Teorema Fundamental Marxista, el cual se enuncia y demuestra a continuación.

Antes de proceder a la demostración del teorema, se debe señalar que se disponía, en principio, de dos versiones de dicha demostración: la que presenta Abraham-Frois y la de Roemer; ambas versiones son muy parecidas y, de hecho, ambas contienen algunas imprecisiones formales. Sin embargo, la segunda ofrece un mejor desarrollo lógico y es la que, una vez que se ha corregido, se incluye en éste trabajo.

Teorema 3 (Fundamental Marxista) *Sea $A^* = A + \widetilde{D}W$, como se definió previamente. Supongase que A^* es irreducible. Entonces la tasa de ganancia $R > 0 \Leftrightarrow e > 0$*

Demostración. Considerese el sistema $P = (1+R)P(A + \widetilde{D}W)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= (1+R)PA^* \\ \Rightarrow \frac{1}{1+R}P &= PA^* \end{aligned}$$

Así, se tiene que $\frac{1}{1+R}$ es un valor propio de A^*. Ahora bien, en general, este valor propio no es un número real[4]. Sin embargo, dado que A^* es irreducible, por el Teorema de Perron-Frobenius[5] existe una única $\widehat{R}$ tal que el valor propio $\frac{1}{1+\widehat{R}}$ es un número real y estrictamente positivo; asociado a éste valor propio, existe un único vector propio (por la izquierda) $\widehat{P} > \overline{0}$ que resuelve la ecuación en cuestión. Del mismo modo, existe un vector propio por la derecha $\widehat{X} > \overline{0}$ que cumple

$$\widehat{X} = (1 + \widehat{R})(A + \widetilde{D}W)\widehat{X} \tag{3.37}$$

En cuanto al valor propio, hay que notar que aunque $\frac{1}{1+\widehat{R}} > 0$, $\widehat{R}$ no necesariamente lo es, pues

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\widehat{R}} &> 0 \\ \Leftrightarrow 1 + \widehat{R} &> 0 \\ \Leftrightarrow \widehat{R} &> -1 \end{aligned}$$

Las siguientes líneas demuestran que $\widehat{R} > 0 \Leftrightarrow e > 0$. Por un lado, multipliquese la ecuación 3.37 por la izquierda por el vector Λ, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \Lambda\widehat{X} &= (1+R)\Lambda(A + \widetilde{D}W)\widehat{X} \\ &= (1+R)(\Lambda A\widehat{X} + (\Lambda\widetilde{D})(W\widehat{X})) \end{aligned} \tag{3.38}$$

Por otro lado, manipulando la ecuación 3.17 se tiene que

$$\begin{aligned} e &= \frac{1 - \Lambda\widetilde{D}}{\Lambda\widetilde{D}} \\ \Rightarrow e\Lambda\widetilde{D} &= 1 - \Lambda\widetilde{D} \\ \Rightarrow e\Lambda\widetilde{D} + \Lambda\widetilde{D} &= 1 \\ \Rightarrow \Lambda\widetilde{D}(1+e) &= 1 \\ \Rightarrow \Lambda\widetilde{D} &= \frac{1}{1+e} \end{aligned} \tag{3.39}$$

[4]Aquí es en donde Roemer presenta una imprecisión. Él comienza su demostración diciendo "Sea (π, P) el único par que satisface $P = (1+\pi)P(A + \widetilde{D}W)$" En realidad, como A^* es de orden $n \geq 2$, existen n pares (valores y vectores propios) que satisfacen el sistema. Las siguientes líneas de la demostración aclaran de manera apropiada dicha imprecisión

[5]Vease la sección 8.2 del apéndice

Al sustituir la última igualdad en 3.38 se tiene que

$$\Lambda\widehat{X} = (1+\widehat{R})(\Lambda A\widehat{X} + \frac{1}{1+e}(W\widehat{X})) \tag{3.40}$$

Dado que tanto Λ como $\widehat{X}$ son estrictamente positivos, entonces ambos lados de la ecuación 3.40 son estrictamente positivos, y así dicha igualdad se puede reescribir de la siguiente manera

$$1+\widehat{R} = \frac{\Lambda\widehat{X}}{(\Lambda A + \frac{1}{1+e}W)\widehat{X}} \tag{3.41}$$

Si se considera, por una parte, la forma en que está definido Λ por la ecuación 3.11 y, por otra parte, la ecuación 3.41, se puede observar que

$$\begin{array}{rcl}
\widehat{R} & > & 0 \\
\Leftrightarrow \Lambda\widehat{X} & > & (\Lambda A + \dfrac{1}{1+e}W)\widehat{X} \\
\Leftrightarrow (\Lambda A + W)\widehat{X} & > & (\Lambda A + \dfrac{1}{1+e}W)\widehat{X} \\
\Leftrightarrow W & > & \dfrac{1}{1+e}W \\
\Leftrightarrow 1+e & > & 1 \\
\Leftrightarrow e & > & 0
\end{array}$$

$\square$

Ha quedado demostrado el vínculo existente entre los espacios de los valores trabajo y los precios de producción. Pero en éste punto, es necesario retomar el estudio que realiza Roemer relativo al modelo que hasta el momento se ha presentado en nuestro trabajo. Dicho análisis tendrá lugar en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

El modelo de Roemer

Después de establecer las características del modelo económico, además de probar el Teorema Fundamental Marxista, Roemer indica que [12, pag. 17]:

> "En un modelo como el que se ha descrito, se asume de manera simple que un equilibrio marxista es aquel en el que un sistema de precios iguala la tasa de ganancia en todos los sectores."

Sin embargo, como apunta el propio Roemer, esta formulación del modelo presenta ciertos problemas; por un lado, el relacionado con el comportamiento (económico) de los sectores involucrados y, por otro lado, el problema relativo a los niveles de produción de los sectores que integran la economía. Ambos problemas se abordan a continuación.

En lo que respecta a la primera cuestión, Roemer afirma que [12, pag. 17]:

> "El concepto de equilibrio, en economía, es usualmente el siguiente: consiste en un estadío en el cual, si todos los agentes siguen sus reglas de comportamiento, el resultado consecuente es socialmente consistente"

y continúa [12, pag. 17]:

> "En el sistema capitalista (como en los demás), los capitalistas buscan maximizar sus gananacias. Así, se debería derivar el vector de precios de tasa de ganancia uniforme (TGU) como una consecuencia de la maximización de ganancias por parte de los capitalistas."

En cuanto al segundo problema, Roemer apunta: [12, pag. 18]:

> "Para una noción de equilibrio general, quisieramos no sólo especificar los precios, sino tambien cuales son los niveles de producción."

y agrega que [12, pag. 18]:

> "...una teoría del equilibrio debe proporcionar una descripción de los niveles de producción, aún si los precios resultan ser independientes de tales niveles."

En breves palabras, las problemáticas arriba planteadas se refieren a dos conceptos importantes: factibilidad y reproducibilidad. ¿Cómo resuelve Roemer las situaciones planteadas anteriormente? En primer lugar, se analiza la factibilidad. Supongamos que existen N capitalistas [1] y el ν-ésimo posee una dotación inicial de Ω^ν mercancías producidas; lo anterior da lugar a la siguiente:

Definición. 23 *Se define como* $\Omega^\nu = \begin{pmatrix} \omega_1^\nu \\ \omega_2^\nu \\ \vdots \\ \omega_n^\nu \end{pmatrix}$ *el vector columna en* R^n*, semipositivo, cuyas componentes* ω_i^ν *representan la cantidad de la* i-*ésima mercancía que posee el* ν*-ésimo capitalista como dotación inicial.*

Este vector es llamado **vector de patrimonios** ó **vector de dotaciones iniciales**

Las unidades físicas de la i-ésima componente de éste vector son, al igual que en los vectores X, F y D, unidades físicas de la mercancía i.

La introducción de este nuevo elemento, el vector Ω^ν, genera una consecuencia importante: si se tiene un vector de precios dado P, cada capitalista estará restringido en su nivel de actividad por el valor de su capital expresado en precios de producción, es decir, por $P\Omega^\nu$. Además de lo anterior, deben considerarse las siguientes

Hipótesis (de factibilidad):

f-1) Los trabajadores no tienen dotación de mercancías producidas; sólo cuentan con su fuerza de trabajo;

[1] Para este capítulo no existe ninguna restricción al respecto de como es N en relación con n. En la siguiente sección, en donde se analiza el modelo de competencia imperfecta, necesariamente se tiene que $N \leqq n$

f-2) La produccion toma tiempo; se ingresan insumos un día y se obtienen productos al día siguiente;

f-3) No hay mercado de crédito, por lo que se tiene que pagar por los insumos al momento de adquirirlos;

Una vez que se han establecido las hipótesis, comezamos a estructurar el modelo buscado.

Para lograr el objetivo, debemos tener claro que la idea principal es que el ν-ésimo capitalista comienza con su capital Ω^ν, con el cual busca incrementar su riqueza por medio de la tasa de ganancia más alta, tomando en cuenta, por supuesto, la restricción en los niveles de producción que le impone el precio de su capital incial.

Denotemos ahora el vector de producciones del ν-ésimo capitalista por X^ν. Entonces, según el sistema de precios determinado por la ecuación 3.27, tenemos que el precio de la produccón total de dicho capitalista sería:

$$PX^\nu = (1+R)(PA+wW)X^\nu \tag{4.1}$$

Y por consiguiente:

$$\begin{aligned} PX^\nu &= (PA+wW)X^\nu + R(PA+wW)X^\nu \\ \Rightarrow R(PA+wW)X^\nu &= PX^\nu - (PA+wW)X^\nu \\ \Rightarrow R(PA+wW)X^\nu &= [P-(PA+wW)]X^\nu \end{aligned} \tag{4.2}$$

De manera que, por un lado, tenemos que el ν-ésimo capitalista busca maximizar la cantidad expresada en el lado derecho de la ecuación 4.2. Por otro lado, ya hemos dicho que el susodicho capitalista producirá cada bien en la medida que se lo permita su capital incial. Esto último se puede expresar en notación matemática como sigue:

$$[P-(PA+wW)]X^\nu \leqq P\Omega^\nu \tag{4.3}$$

Roemer resume todo lo anterior mediante el planteamiento del siguiente programa lineal:

Dado un vector de precios P,
$\max[P-(PA+\widetilde{W})]X^\nu$
s.a.$(PA+\widehat{W})X^\nu \leqq P\Omega^\nu$ (PL)
con $X^\nu \geqq \widehat{0}$

En éste punto, merece la pena hacer una aclaración importante. Si el lector se detiene un instante para observar el programa lineal, notará que existe un vector $\widetilde{W}$ en lugar del vector W que se había venido manejando con antelación. La diferencia estiba en que cada vector maneja unidades físicas diferentes, lo cual queda justificado por dos argumentos. En primer lugar, y como ya se indicó previamente, Roemer inicia su trabajo utilizando el sistema de precios propuesto por Von Bortkiewicz, indicado en la ecuación 3.27. En segundo lugar, y considerando dicha ecuación, Roemer usa como hipótesis que el salario esta normalizado a la unidad, es decir, que $w = P\widetilde{D}(= \sum_{i=1}^{n} p_i d_i) = 1$ En otras palabras, con dicha hipótesis, los valores de los vectores W y $\widetilde{W}$ son los mismos entrada por entrada, pero las unidades físicas son distintas, pues mientras que las del vector W son las que especifica su definición, las del vector $\widetilde{W}$ son las mismas que las del vector PA, con lo cual el sistema es completamente consistente a este respecto [2].

Hecha la aclaración anterior, regresemos al programa lineal (PL). Llamemos $A^\nu(P)$ al conjunto de vectores solución de dicho programa lineal. Ahora bien, en éste modelo económico, dado un vector de precios P, podría ocurrir que las elecciones de producción hechas por cada uno de los diversos capitalistas no sean factibles en conjunto. Dicho de otra manera, se debe garantizar, para que un vector P sea considerado un vector de precios de equilibrio, que los niveles de producción de los capitalistas sean globalmente factibles. Ese hecho puede quedar bien identificado por medio de la siguiente:

Definición. 24 *Sea* $\Omega = \sum_{\nu=1}^{N} \Omega^\nu$. *Además, si para cada* $\nu, X^\nu \in A^\nu(P)$, *sea* $X = \sum_{\nu=1}^{N} X^\nu$. *Entonces se dice que* X *es globalmente factible si*

$$AX + \widetilde{D}(WX) \leqq \Omega \tag{4.4}$$

La interpretación de la desigualdad 4.4 es la siguiente: los insumos intermedios totales, más los bienes salario totales para los trabajadores empleados, no deben exceder los insumos totales disponibles.

Los párrafos anteriores han tratado la cuestión relativa a la factibilidad. Toca ahora el turno al problema de la reproducibilidad. De manera similar a lo hecho anteriormente, primero que nada establecemos las siguientes:

Hipótesis(de reproducibilidad):

r-1) Sólo los trabajadores empleados consumen bienes salario;

[2] Aquí Roemer presenta otra imprecisión, pues maneja de manera indistinta los vectores W y $\widetilde{W}$.

r-2) Los capitalistas no consumen bienes;

r-3) Todos las existencias que no se utilizan son almacenadas;

Cuando hablamos de reproducibilidad, lo que se quiere decir es que el modelo económico debe garantizar que puede reproducirse a sí mismo, o en palabras de Roemer [12, pag. 19]:

> "...debe crear las insitituciones y la ideología que le permita continuar existiendo."

En términos más prácticos (económicamente hablando), Roemer establece [12, pag. 19]:

> "... el simple prerrequisito económico de que la economía no deba operar en forma tal que el stock (de un bien) necesario tienda hacia cero, en cuyo caso la producción posterior sería imposible."

Para Roemer existe una manera simple de asegurarse que dicho prerrequisito se cumpla: pedir que el vector de existencias al principio del siguiente periodo sea, componente a componente, mayor o igual que el vector de existencias del periodo actual. Hagamos un planteamiento de lo anterior en notación matemática: supongamos que las existencias, o más precisamente, las dotaciones iniciales de un periodo determinado, están dadas por Ω_t; entonces las existencias totales del siguiente periodo estarán dadas por

$$\Omega_{t+1} = \Omega_t - [AX + \widetilde{D}(WX)] + X \tag{4.5}$$

en donde X es el mismo vector que se definió en el capítulo anterior.

Considerando todos los elementos mencionados, es posible establecer la condición de reproducibilidad como sigue [3]

$$\begin{aligned} \Omega_{t+1} &> \Omega_t \\ \Rightarrow \Omega_t - [AX + \widetilde{D}(WX)] + X &> \Omega_t \\ \Rightarrow X &> AX + \widetilde{D}(WX) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Se han determinado, entonces, las condiciones de factibilidad y reproducibilidad que se requerían para establecer con mas precisión la noción de equilibrio, la cual se enuncia a continuación:

[3] En su trabajo, Roemer establece la condición de reproducibilidad como "mayor" y no como "mayor ó igual". Sin embargo, cuando escribe la desigualdad usa el símbolo "$\geqq$". En este trabajo se ha hecho la corrección para evitar confusiones al lector.

Definición. 25 *Un vector de precios P es una solución reproducible (S.R.) para una economía* $(A, W; \widetilde{D}; \Omega^1, \Omega^2, \ldots, \Omega^N)$ *si*

(a) $\forall \nu, \exists X^\nu \in A^\nu(P)$ *tal que (maximización de ganancias)*

(b) $X = \sum_{\nu=1}^{N} X^\nu$ *y* $AX + \widetilde{D}(WX) \leqq X$ *(reproducibilidad)*

(c) $P\widetilde{D} = 1$ *(salario normalizado a la unidad)*

(d) $\Omega = \sum_{\nu=1}^{N} \Omega^\nu$ *y* $AX + \widetilde{D}(WX) \leqq \Omega$ *(factibilidad)*

De acuerdo con Roemer, aunque esta definición provee una idea de equilibrio más específica, no termina por ser del todo completa. En efecto, y como él señala [12, pag. 20]:

> "Se podría pedir una descripción ampliada de la conducta de los trabajadores (empleados). En el presente modelo,...siempre están requiriendo el mismo vector $\widetilde{D}$. Además, uno se podría preguntar qué consumen los capitalistas y qué pasa con aquellos trabajadores que están desempleados..."

El propio Roemer analizará esas situaciones en capítulos posteriores de su trabajo.

Mientras tanto, conviene seguir analizando el modelo hasta ahora descrito. La definición establece las condiciones que se han de satisfacer para que un vector de precios de equilibrio P sea considerado una S.R. Sin embargo, no se ha indicado hasta el momento si siempre existe dicha S.R. Roemer se pregunta [12, pag. 19]:

> "¿Existirá un conjunto de elecciones (de niveles de producción) que sean individualmente óptimas para los capitalistas, de tal forma que sean globalmente factibles y que la economía sea reproducible?"

Roemer responde a esta pregunta mediante la mención y demostración de un teorema. Sin ambargo, por claridad, en este trabajo demostraremos primero un resultado útil. Sea C^* el conjunto definido como sigue:

$$C^* = \{\Omega \in R_+^n | \exists X \geqq \overline{0} \textit{ que cumple con } A^*X = \Omega \textit{ y } X \geqq A^*X\}$$

Es importante resaltar el sentido económico de dicho conjunto: se trata del conjunto de todos los vectores de dotaciones iniciales tales que existe un vector de producciones totales que cumplen, por un lado, que el vector de demandas intermedias es igual a dicho vector de dotaciones iniciales y, por el otro, que hacen que dichas produccióněs totales sean mayores o iguales que las demandas intermedias, es decir, que hacen que la economía sea reproducible. Ahora bien, Roemer afirma que este conjunto describe un cono convexo cerrado y no vacío, aunque no demuestra las tres primeras características. Así, para formalizar lo anterior, procedemos de la siguiente manera:

Teorema 4 *C^* es un cono convexo cerrado y no vacío.*

Demostración.

a) Se demostrará que en efecto C^* es un cono. Para ello, es necesario demostrar que si $\Omega \in C^*$ y $\alpha \geqq 0 \in R \Rightarrow \alpha\Omega \in C^*$. Sea $\Omega \in C^* \Rightarrow \exists X \geqq \overline{0}$ que cumple con $A^*X = \Omega$ y $X \geqq A^*X$. Sea $\alpha \geqq 0 \in R$ y consideremos $\alpha\Omega$, lo cual implica que $\alpha\Omega = \alpha A^*X$. Hagamos $\Omega' = \alpha\Omega$ y $X' = \alpha X$. Esto da como resultado:

$$\Omega' = A^*X' \tag{4.7}$$

lo cual significa que se cumple con la primera condición de pertenencia de C^*, pues $X' \geqq \overline{0}$. Además, como $\alpha \geqq 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned} X &\geqq A^*X \\ \Rightarrow \alpha X &\geqq \alpha A^*X \\ \Rightarrow X' &\geqq A^*X' \end{aligned}$$

cumpliendo con la segunda condición de pertenencia de C^*, que junto con la expresión 4.7, demuestra que C^* efectivamente es un cono.

b) Ahora tenemos que demostrar que el cono que genera C^* es convexo. En otras palabras, hay que probar que:

$$\forall\ \Omega_1, \Omega_2\ \in C^* \Rightarrow \alpha\Omega_1 + \beta\Omega_2\ \in C^*,\ con\ \alpha, \beta \geqq 0\ y\ \alpha + \beta = 1$$

Sean $\Omega_1, \Omega_2\ \in C^*$. Entonces, por definición,

$$\exists X_1 \geqq \overline{0} \mid A^*X_1 = \Omega_1\ y\ X_1 \geqq A^*X_1$$

y también

$$\exists X_2 \geqq \bar{0} \mid A^* X_2 = \Omega_2 \ y \ X_2 \geqq A^* X_2$$

Hagamos $\alpha\Omega_1 = \Omega_1'$ y $\beta\Omega_2 = \Omega_2'$. Por el inciso anterior, tenemos que Ω_1' y Ω_2' están en C^* Así, consideremos la suma de Ω_1' y Ω_2', lo que origina:

$$\Omega_1' + \Omega_2' = A^* X_1' + A^* X_2'$$

con $\alpha X_1 = X_1'$ y $\beta X_2 = X_2'$ Si hacemos $\Omega_1' + \Omega_2' = \Omega_3$ y $X_1' + X_2' = X_3$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \Omega_1' + \Omega_2' &= A^* X_1' + A^* X_2' \\ \Rightarrow \Omega_1' + \Omega_2' &= A^*(X_1' + X_2') \\ \Rightarrow \Omega_3 &= A^* X_3 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Por otro lado, y considerando las hipótesis, se tiene que:

$$\begin{aligned} X_1' + X_2' &\geqq A^* X_1' + A^* X_2' \\ \Rightarrow X_1' + X_2' &\geqq A^*(X_1' + X_2') \\ \Rightarrow X_3 &\geqq A^* X_3 \end{aligned} \tag{4.9}$$

De 4.8 y 4.9, se sigue que $\Omega_1' + \Omega_2' = \Omega_3 \in C^*$, lo que significa que C^* es un cono convexo.

c) Debemos demostrar ahora la cerradura de C^*. Para ello, recurriremos a la caracterización de la cerradura de un conjunto basada en las sucesiones. En otras palabras, se tiene que C^* es cerrado si y sólo si

$$\forall \ \{\Omega_m\} \subseteq C^* \mid \lim_{m\to\infty} \Omega_m = \Omega \Rightarrow \Omega \in C^*$$

Supongamos que tenemos la sucesión $\{\Omega_m\} \subseteq C^*$, de donde se desprende que

$$\forall \ m \in N \ \exists \ X_m \geqq \bar{0} \mid A^* X_m = \Omega_m \ y \ X_m \geqq A^* X_m$$

Tomando límites se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} A^* X_m &= \lim_{m\to\infty} \Omega_m = \Omega \\ \Rightarrow A^*(\lim_{m\to\infty} X_m) &= \Omega \\ \Rightarrow \ \exists X \mid \lim_{m\to\infty} X_m &= X \\ \Rightarrow A^* X &= \Omega \end{aligned} \tag{4.10}$$

Análogamente, tomando límites en la desigualdad se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} X_m &\geqq \lim_{m\to\infty} A^* X_m \\ \Rightarrow \lim_{m\to\infty} X_m &\geqq A^*(\lim_{m\to\infty} X_m) \end{aligned}$$

y por lo dicho en las líneas anteriores $\exists X \mid \lim_{m\to\infty} X_m = X$, entonces

$$X \geqq A^* X \tag{4.11}$$

De 4.10 y 4.11 se obtiene el resultado requerido.

d) Finalmente, vamos a probar que C^* es no vacío. Esto resulta inmediato si observamos que $\Omega = \overline{0} \in C^*$; basta hacer $X = \overline{0}$ para obtener el resultado buscado.

□

Con lo anterior ha quedado demostrado el Teorema 4. Pero antes de continuar, vale la pena hacer una pausa para plantear una discusión importante, relacionada con el inciso *d*) del teorema recien demostrado. Para demostrar que C^* es no vacío, Roemer afirma que la expresion $X^* = (1+\pi)A^*X^*$ corresponde a una *trayectoria de crecimiento balanceado*. Primero que nada, se debe decir que Roemer está trabajando, al menos durante esta sección, con un modelo estático, y las trayectorias de crecimiento balanceado estan definidas para los modelos dinámicos, de donde se sigue que existe una imprecisión conceptual. En segundo lugar, y suponiendo que se hicieran los ajustes necesarios para adaptar la expresion al modelo dinámico, la expresión en cuestión sí correspondería a una trayectoria de crecimiento balanceado, pero para un modelo en el que el trabajo es un bien y no un factor de producción primario, lo cual contradice una de las hipótesis iniciales. Finalmente, hay que decir que, de acuerdo con Takayama [14, pag. 399], y con las dos consideraciones hechas con anterioridad, no sólo se podría garantizar la existencia de la trayectoria de crecimiento balanceado, sino que además esta sería única, por el simple hecho de que la matriz A^* se ha supuesto irreducible.

A continuación, presentamos el resultado del que hablamos en líneas anteriores. El planteamiento del teorema en cuestión y su respectiva demostración presentan algunas imprecisiones, las cuales se señalan oportunamente, ademas de que se efectúan las respectivas correcciones. Roemer establece el teorema como sigue [12, pag. 20]:

"Sea el modelo dado $[A, W, \widetilde{D}]$ con A productiva e irreducible y la tasa de explotación $e > 0$. Sea $(P, X^1, X^2, \ldots, X^N)$ una S.R. no trivial (i.e. $\sum_{\nu=1}^{N} X^\nu = X \neq \overline{0}$). Entonces el vector de precios P es el vector de TGU (tasa de ganancia uniforme). Además una S.R. existe si y sólo si $\Omega \in\ C^*$, en donde C^* es un cono convexo particular en R^n, el cual contiene la trayectoria de crecimiento balanceado del modelo."

El planteamiento merece una observación. Aparentemente hay un error en los requerimientos de productividad e irreducibilidad, el cual obliga a analizar dos casos:

i) Supongamos que, en efecto, se pide que sea la matriz A la que debe ser productiva e irreducible. Aunque la irreducibilidad de la matriz A y el hecho de que $W\widetilde{D}$ sea una matriz semipositiva garantizan que A^* es irreducible, no se puede hacer la misma deducción con reespecto a la reproducibilidad. Esta aclaración tiene lugar, pues los argumentos que se usan en la demostración son precisamente la productividad y la irreducibilidad de A^* y no la de A.

ii) Supongamos que hay un error tipográfico (o de redacción) y que la hipótesis es que es A^* la matriz que debe ser productiva e irreducible. En este caso, hay que hacer notar que, bajo esa hipótesis, la condición de que $e > 0$ es redundante o inecesaria, pues por el inciso v) del Teorema 20 y por el Teorema Fundamental Marxista, A^* es productiva

$$\Leftrightarrow \lambda(A) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+\widehat{R}} < 1 \Leftrightarrow 1 + \widehat{R} > 1 \Leftrightarrow \widehat{R} > 0 \Leftrightarrow e > 0$$

En otras palabras, si A^* es productiva y $\frac{1}{1+\widehat{R}}$ es la raíz de Frobenius de A^*, entonces $e > 0$, por lo que no es necesario pedirlo como hipótesis.

Así, de acuerdo a lo mencionado con anterioridad, un planteamiento más acertado sería el siguiente:

Teorema 5 *Sea el modelo dado $[A, W, \widetilde{D}]$ con A^* irreducible y $e > 0$. Sea $(P, X^1, X^2, \ldots, X^n)$ una S.R. Entonces*

i) el vector de precios P es justamente el vector de TGU (tasa de ganancia uniforme).

ii) una S.R. $\exists \;\Leftrightarrow \Omega \in C^*$*, en donde* C^* *es el cono definido con anterioridad.*

En cuanto a la demostración, se hará el análisis de cada inciso por separado. Así, la demostración que hace Roemer de lo que sería el inciso *i*) es la siguiente [12, pags. 20 y 21]:

> "Sea $X \neq \overline{0}$ el vector de actividades agregadas asociado a la S.R. Por definición de S.R., $X \geqq A^*X$. Recuerdese que $A^* = A + \widetilde{D}W$ es la matriz aumentada de coeficientes de insumos. Nótese que por el Teorema Marxista Fundamental, se tiene que $e > 0$ implica que A^* es una matriz productiva, esto es, el valor propio de Frobenius de A^*, $\frac{1}{1+\widehat{R}}$, es menor que la unidad. Se sigue del teorema de Frobenius que $(I - A^*)^{-1}$ existe y es una matriz positiva, porque A^* es irreducible. Nótese también que como $X \neq \overline{0}$, de hecho tenemos que $X \geq A^*X$; pues si $X = A^*X$, entonces el valor propio de Frobenius de A^* sería igual a la unidad, lo cual no ocurre. Pero $X \geq A^*X$ implica que $(I - A^*)X \geq \overline{0}$; como $(I - A^*)^{-1} > \overline{0}$, esto implica que $X > \overline{0}$. Esto es, en una S.R. (No trivial) debe haber actividad en todos los sectores.
>
> Al maximizar ganancias, dados los precios P, los capitalistas operarán sólo aquellos procesos que generen la máxima tasa de ganancia, y operaran con dichos procesos en cualquier combinación convexa al límite de sus restricciones de capital (por linealidad). Esto se puede ver revisando el programa lineal. Así, para que todos los procesos operen es necesario que el vector de precios P genere la misma tasa de gananacia en todos los sectores. Por el Teorema de Perron-Frobenius, hay un único vector posible, salvo por un múltiplo escalar el cual esta determinado por la definicion de S.R. Entonces, hay a lo más un vector de precios viable, P^*, en donde $P^* = (1 + \widehat{R})P^*A^*$"

Hasta aquí la demostración de Roemer. Evidentemente, si tomamos en cuenta las observaciones que se le han hecho al planteamiento, es natural que la demostración que hace el autor nos parezca erronea. Primero que nada, es importante observar que del hecho de que se tenga una S.R. no trivial no es inmediato que $X > \overline{0}$. Para llegar a esa conclusión, Roemer usa la hipótesis de que A^* es productiva e irreducible. En segundo lugar, es claro que si se toma a A^* con dichas características no es necesario demostrar que X es un vector estrictamente positivo, pues por el Teorema

20, se garantiza la existencia (y de hecho también la unicidad) de dicho vector; independientemente de que estemos hablando de una S.R. Así, en realidad se tiene que se trata de dos resultados independientes, de ahí que la demostración que hace Roemer es fallida. En realidad, lo que se puede decir es que, en una S.R. con A^* es productiva e irreducible, existe un único vector de producciones totales en el que debe haber actividad en todos los sectores de la economía. Para finalizar, la condición de que $e > 0$ le da una interpretación económica concreta al Teorema en cuestión: si se tiene una S.R. (con A^* irreducible) y una tasa de explotación positiva, entonces existe un único vector de producciones estrictamente positivo.

Pasando al segundo párrafo de la demostración, se tiene una situacion muy parecida: Roemer no da una demostración formal, sino más bien da argumentos económicos. En realidad, tampoco hace falta dicha demostración formal. Basta con considerar que, por álgebra lineal, así como existe un vector propio $\widehat{X} > \overline{0}$ por la derecha, también existe un vector propio por la izquierda $\widehat{P} > \overline{0}$, el cual puede ser considerado como un vector de precios de equilibrio, y como el valor propio asociado a dicho vector es único y positivo, la tasa de ganancia es uniforme en todos los sectores. En todo caso, la "demostración" de Roemer más bien representa la interpretación económica del resultado matemático. Esto da por concluída la demostración del inciso i).

Es momento de pasar a probar el inciso ii). A diferencia del inciso anterior, en este caso no se incluirá la cita textual con la demostración que hace Roemer, pero se señalará, punto por punto, aquellas partes en las que aquel incurrió en errores o impresiciones. Comenzaremos probando la necesidad:

$\Rightarrow$) Supongamos que existe una solución reproducible. Por linealidad, cada capitalista gastará la totalidad de su patrimonio inicial si pretende maximizar ganancias, de donde se tiene que:

$$\forall \ \nu \ P^* A^* X^\nu = P^* \Omega^\nu$$

lo que tomando la respectivas sumas sobre ν en ambos lados de la igualdad implica que:

$$P^* A^* X = P^* \Omega$$

Por definición de SR, $A^* X \leqq \Omega$. Considerando estas dos ultimas situaciones, y si además se toma en cuenta que $P^* > \overline{0}$, se tiene que:

$$A^* X = \Omega$$

También por definición de SR se tiene que $X > A^*X^*$. De todo esto se sigue que $\Omega \in C^*$

$\Leftarrow$) Supongamos que $\Omega \in C^*$. Entonces existe X' tal que $MX' = \Omega$ y $X' \geqq MX'$. Con esto se cumplen las condiciones (b) y (d) de una S.R. Resta probar (a) y (b). Consideremos, por el inciso anterior, al único vector de precios P^*, que como sabemos, es el que genera Tasas de Ganancia Uniforme. En este caso, cualquier elección de producciones que haga el ν-ésimo capitalista que agote todas sus dotaciones iniciales será una elección que maximiza ganancias. Así, si hacemos $A(P^*) = \sum\limits_{\nu=1}^{N} A^\nu(P)$, tenemos que:

$$A(P^*) = \{X \geq \overline{0} |\ P^*MX' = P^*\Omega\}$$

Evidentemente, cualquier X se puede escribir como una combinación lineal de los X^ν En particular, $X' \in A(P^*)$. Y entonces se cumple la condición (a). Y de hecho, para que ello ocurra, necesariamente (c) debe ocurrir, pues ello permite factorizar el vector P^* en la restricción del programa lineal. Así, se tienen todas las condicones de una S.R.

Hasta aquí se ha analizado un modelo en el que se ha supuesto, implicitamente, que todos los capitalistas tienen acceso total e irrestricto a la tecnología. Antes de proceder a analizar el modelo en el que esto no ocurre, se debe insistir en que hasta el momento, y como lo indica el mismo Roemer [12, pag. 22]

"... el concepto de equilibrio es estàtico...".

Más adelante, en el capítulo 5 de este trabajo, se analizará con cierto detalle el modelo dinámico.

Capítulo 5

Roemer y su modelo de competencia imperfecta.

Antes de continuar con el presente trabajo es necesario realizar una distinción importante. Los modelos de equilibrio económico pueden clasificarse en dos tipos: los de competencia perfecta y los de competencia imperfecta. En los primeros, todos los participantes tienen acceso a la misma información y en consecuencia no existe ningun tipo de ventaja para nadie. Contrariamente, en los modelos de competencia imperfecta cada participante tiene acceso sólo a cierta cantidad de información, la cual puede o no compartir con otro participante, ya sea de manera parcial o total.

Como es fácil ver, en los capítulos anteriores se ha trabajado con el modelo de competencia perfecta, pues se ha supuesto que todos los capitalistas tienen acceso a todos los sectores. Sin embargo, en este capítulo se trabajará con el modelo de competencia imperfecta.

Así, además de las hipótesis que hemos venido manejando, consideraremos las siguientes:

Hipótesis de competencia imperfecta:

9) Cada capitalista puede ingresar sólo a una parte de la tecnología completa; en otras palabras, para éste modelo los capitalistas sólo pueden operar en algunos sectores;

10) Cada sector de la economía es operado por, al menos, uno de los capitalistas;

La primera hipótesis recien introducida tiene como consecuencia, como veremos más adelante, que no necesariamente se generan las mismas tasas de ganancia en todos los sectores.

Ahora bien, es posible que haya sectores a los cuales varios capitalistas tengan acceso de manera simultánea. Especifiquemos lo anterior por medio de la siguiente definición:

Definición. 26 *Denotamos con S_ν al subconjunto de $\overline{n}$, i.e. $S_\nu \subset \overline{n}$, el cual está formado por los subíndices de los sectores a los cuales tiene acceso el ν-ésimo capitalista. Alternativamente, se puede ver a S_ν como la información disponible para el ν-ésimo capitalista.*

Consideramos las SR como antes; sin embargo, tenemos que observar que existe una diferencia y es que el programa (lineal) para el ν-ésimo capitalista, para el cual el conjunto $A^\nu(P)$ es la colección de vectores de producción que representan las soluciones que maximizan las ganancias, está más restringido que antes, pues por la hipótesis (9) ahora el capitalista en cuestión sólo tiene acceso a algunas de las columnas de la tecnología $[A, W, \widetilde{D}]$. En este punto, un pregunta natural sería ¿cómo son los vectores de precios de producción que determinan a las soluciones reproducibles? Por el inciso i) del Teorema 5, los precios $\widehat{P}$ de TGU serán una SR; pero en general, según Roemer, habrá otros vectores de precios de equilibrio.

En efecto, Roemer apunta [12, pag. 23]:

> "El hecho, quizá sorpresivo, es que hay, en general, una infinidad de vectores de precios de equilibrio para este modelo económico."

Probaremos esta afirmación formalmente un poco más adelante. Antes es preciso comentar que en esta parte Roemer introduce el término *grado de monopolio* y señala que utiliza la defintión proporcionada por Kalecki en [8]. No obstante, dicha defintión involucra elementos que no están relacionados de manera directa con esta investigación; así, para efectos prácticos entenderemos por grado de monopolio la libertad que tiene un determinado capitalista para determinar la tasa de ganancia para su conjunto S_ν.

Considerando lo anterior, Roemer insiste en el punto [12, pag. 23]:

> "...podemos asegurar tajantemente lo siguiente: a cada una de las infinitas distribuciones de grados de monopolio entre los N capitalistas, le corresponde un vector de precios de equilibrio."

Procedemos a establecer de manera formal lo que hemos dicho con anterioridad, comenzando por el caso más simple. Supongamos que los conjuntos $S_1, \ldots, S_N$, los cuales representan los sectores a los que tienen acceso los capitalistas, son ajenos dos a dos, es decir,

$$S_i \cap S_j = \emptyset, \ \forall \ i,j \in \overline{N} \tag{5.1}$$

Por otro lado, por la hipótesis 10), se tiene que:

$$\bigcup_{\nu=1}^{N} S_\nu = \overline{n} \tag{5.2}$$

Por simplicidad, mantendremos el supuesto de que A^* es irreducible. Por lo tanto, como se vio en el Teorema 5, en una S.R. (no trivial) existe un vector de producciones totales en el que hay actividad en todos los sectores de la economía.

Ahora consideremos la siguiente:

Definición. 27 *El precio unitario de producción del* i-*ésimo sector está determinado por la siguiente igualdad:*

$$p_i = (1 + R_i)PA^{i*} \text{ en donde } A^{i*} = A^i + \widetilde{D}(W)^i \tag{5.3}$$

De la expresión 5.3 es necesario resaltar el número R_i, que viene a representar la tasa de ganancia en el i-ésimo sector asociada al vector de precios particular P; además A^{i*} y A^i son las i-ésimas columnas de las matrices A^* y A, respectivamente.

Con lo anterior podemos enunciar y demostrar el siguiente:

Teorema 6 *Supongamos que $S_\nu \cap S_\mu = \emptyset, \ \forall \ \nu, \mu \in \overline{N}$. P es un vector de precios asociado a una solución reproducible*[1] $\Leftrightarrow$

$$\forall \ \nu \ \in \ \overline{N}, \ si \ i,j \in S_\nu \Rightarrow R_i = R_j \tag{5.4}$$

Demostración.

$\Rightarrow$) La necesidad se sigue inmediatamente del inciso i) del teorema 5.

$\Leftarrow$) Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que para alguna ν se tiene que $R_i \neq R_j$ para algunas $i, j \in S_\nu$. Entonces ese capitalista operaría sólo en el sector de máxima tasa de ganancia disponible en su conjunto S_ν. Dado que, por hipótesis, $S_\nu \cap S_\mu = \emptyset, \ \forall \ \nu, \mu \in \overline{N}$, ningún otro capitalista podría operar en alguno de los sectores que el ν-ésimo capitalista dejara de operar, por lo que existe la posibilidad de que

[1] En la parte correspondiente del texto original, Romer introduce el término "vector de precios reproducible" para designar a este vector. Aquí se ha cambiado para evitar confusiones al lector.

ocurra que el vector de producciones totales X pudiera tener algunas de sus componentes nulas, es decir, podría darse el caso de que, para alguna $i \in \overline{n}$ $x_i = 0$, lo que viola[2] la positividad del vector X.

$\square$

Ahora bien, es posible probar que se pueden especificar las tasas de ganancia[3] para tener cualesquiera proporciones deseadas entre los $S_1, \ldots, S_N$, así como un vector de precios que provoca que esas tasas de ganacia existan.

Teorema 7 *Sean $d_1, \ldots, d_n$ números positivos tales que*

i) $min\{d_i\} = 1$

ii) $max\{d_i\} < 1 + \widehat{R}$

en donde $\frac{1}{1+\widehat{R}}$ es la raíz de Frobenius de la matriz A^*. Entonces existe un único vector de precios $P > 0$ que genera las tasas de ganancia positivas R_i (cada R_i se corresponde con el i-ésimo sector) y dichas tasas de ganancia son tales que

$$\forall\ i, j \in \overline{n},\ \frac{1 + R_i}{1 + R_j} = \frac{d_i}{d_j}$$

Demostración. Sea D la matriz diagonal formada con los números d_i. Por el Teorema 14, A^*D es irreducible[4]. Por otro lado, se prueba la siguiente:

***Afirmación.* 1** *A^*D es una matriz productiva.*

Demostración. Sea $\widehat{P}$ el vector propio (de precios de producción) asociado a la raíz de Frobenius de A^*, lo cual implica que

$$\widehat{P} = (1 + \widehat{R})\widehat{P}A^*$$

Si consideramos, por una parte, el resultado[5] del Teorema 13, y por otra, que $max\ \{d_i\} < 1 + \widehat{R}$, se deduce que

$$\widehat{P}D^{-1} > \widehat{P}A^*$$

y en consecuencia

$$\widehat{P} > \widehat{P}A^*D$$

[2]En su trabajo, Roemer indica que lo que se viola es la condición de reproducibilidad establecida en la definición 25, situación que no necesariamente ocurre, aún si $X \geq \overline{0}$

[3]Análogamente a la nota anterior, aquí se deja el término "tasa de ganancia" en lugar del de "factor de ganancia", que Roemer incluye en su trabajo original.

[4]Vease la seccin 8.1 del Apéndice

[5]Idem

mostrando la productividad de A^*D $\square$

Así, existe un único vector de precios unitarios $\widehat{\widehat{P}}$ y un número real positivo $1+\widehat{\widehat{R}}$ tal que

$$\widehat{\widehat{P}} = (1+\widehat{\widehat{R}})\widehat{\widehat{P}}A^*D$$

y entonces

$$\widehat{\widehat{p}} = d_i(1+\widehat{\widehat{R}})\widehat{\widehat{P}}A^{i*} \tag{5.5}$$

Entonces, dada la definición 27, se tiene que el precio de producción del i-ésimo sector está dado por

$$\widehat{\widehat{p_i}} = (1+\widehat{\widehat{R_i}})\widehat{\widehat{P}}A^{i*} \tag{5.6}$$

Cuando comparamos 5.5 y 5.6 obtenemos:

$$1+\widehat{\widehat{R_i}} = d_i(1+\widehat{\widehat{R}}) \tag{5.7}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \frac{1+\widehat{\widehat{R_i}}}{1+\widehat{\widehat{R_j}}} &= \frac{d_i(1+\widehat{\widehat{R}})}{d_j(1+\widehat{\widehat{R}})} \\ \frac{1+\widehat{\widehat{R_i}}}{1+\widehat{\widehat{R_j}}} &= \frac{d_i}{d_j} \end{aligned}$$

Además, por la ecuación 5.7, $\widehat{\widehat{R_i}} > 0 \ \forall \ i \ \in \ \overline{n}$, porque $d_i \geqq 1$ y $\widehat{\widehat{R}} > 0$. $\square$

Lo anterior ha probado el resultado. Sin embargo, Roemer también demuestra la unicidad del vector de precios de equilibrio. En realidad no hace falta tal demostración, pues al considerar la raíz de Frobenius de la matriz A^*D, el vector asociado a ella es único.

En este punto, Roemer hace la siguiente anotación [12, pag. 25]:

> "Nota: de la prueba del teorema se puede observar que la condición $max\{d_i\} < 1+\widehat{R}$ es sólo una condición suficiente para mantener el resultado del teorema. En general, $max\{d_i\}$ puede ser mayor que $1+\widehat{R}$ y el resultado aún puede mantenerse."

La afirmación es falsa. Si se considera la posibilidad de que $max\{d_i\} \geqq 1+\widehat{R}$, entonces esto afecta directamente los coeficientes de D^{-1}, haciendo que se pierda la productividad de A^*D y en consecuencia no se obtendría el resultado buscado.

Para continuar, tenemos que una aplicación directa del Teorema 7 al caso que se está analizando, es decir, cuando $S_\nu \cap S_\mu = \emptyset$, $\forall\ \nu, \mu\ \in\ \overline{N}$, muestra que, dada una distribución cualquiera de grados de monopolio $(d_1, \ldots, d_N)$ entre los diferentes capitalistas, existe un único vector de precios de equilibrio que permite dicha distribución. Para ello, basta con asignar cada d_ν a cada S_ν.

Es momento de generalizar lo que se ha dicho hasta el momento al respecto del modelo de competencia imperfecta, lo cual implica considerar el caso donde S_μ y S_ν pueden traslaparse. Pero primero debe definirse un concepto importante para mostrar dicha generalización, a saber, el de indexación admisible. Se desea asignar a los capitalistas de 1 a N en forma tal que un capitalista con índice ν nunca tenga acceso a algún sector al cual el capitalista con índice $\nu + 1$ tiene acceso. Formalmente, lo anterior se puede expresar de la forma siguiente:

Definición. 28 *Consideremos los N capitalistas en cuestión. Tenemos una* ***indexación admisible*** *si, cuando se forman los conjuntos T_k como sigue*

$$\begin{aligned} T_1 &= S_1 \\ T_2 &= S_2 - S_1 \\ T_3 &= S_3 - (S_1 \cup S_2) \\ &\vdots \\ T_k &= S_k - \bigcup_{i<k} S_i \\ &\vdots \\ T_N &= S_N - \bigcup_{i<N} S_i \end{aligned}$$

dichos conjuntos tienen la siguiente propiedad: para algún entero $1 \leqq \tau \leqq N$, $T_k \neq \emptyset$ si $k \leqq \tau$ y $T_k = \emptyset$ si $k > \tau$.

Observemos que $\forall\ i, j\ \in\ \overline{N}, T_i \cap T_j = \emptyset$. En otras palabras, una indexación admisible también define una partición de los n sectores.

Con el fin de clarificar la definición anterior, consideremos el caso en el que $N = 3$ y representemoslo de manera gráfica, como aparece en la figura 5.1.

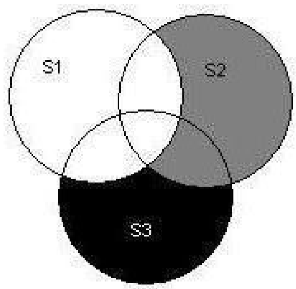

Figura 5.1: Indexación de tres capitalistas. La zona blanca corresponde a T_1, la zona gris a T_2 y la zona negra a T_3

En este punto, y considerando la definición 28, resulta que para cualquier partición $S_1, \ldots, S_N$ de las actividades, se tiene que hay al menos una indexación admisible para los capitalistas. Consideremos el siguiente caso especial: supongamos que cada capitalista tiene acceso a un sector al cual ningún otro capitalista tiene acceso, en cuyo caso cualquier indexación de los capitalistas es admisible, pues es claro que $T_k = S_k - \bigcup_{i<k} S_i \neq \emptyset \; \forall \; k \; \in \; \overline{N}$; notemos que lo anterior es equivalente a que $k = \tau = N$. El caso en que los conjuntos S_ν son ajenos dos a dos es un caso particular de éste caso especial; o dicho de otra forma: $T_k = S_k \; \forall \; k = 1, 2, \ldots, N$.

Es momento de establecer un resultado, muy similar al Teorema 6, pero en cierta medida más general, pues este se refiere al caso que hemos estado tratando en los últimos parrafos, a saber, cuando los conjuntos S_ν se traslapan.

Teorema 8 *Consideremos el modelo de competencia imperfecta en donde el v-ésimo capitalista tiene acceso sólo a los sectores de su subconjunto S_v. Sea $\theta = \{i_1, i_2, \ldots, i_N\}$ cualquier indexación admisible de capitalistas. Sea*

$$T_{i_j} = S_{i_j} - \bigcup_{k<j} S_{i_k}$$

Consideremos los τ_θ conjuntos no vacíos T_{i_j}, obtenidos a partir de la definición de indexación admisible. Sean $d_1 \leqq d_2 \leqq \ldots \leqq d_{\tau_\theta}$ números tales que

i) $d_1 = 1$

ii) $d_{\tau_\theta} < 1 + \widehat{R}$

en donde $\frac{1}{1+\widehat{R}}$ es la raíz de Frobenius de la matriz A^*. Entonces existe un único vector de precios unitarios $P > 0$ que genera los grados de monopolio d_j para el i_j-ésimo capitalista al que le corresponde el conjunto no vacío T_{i_j}.

Demostración. La necesidad resulta ser una aplicación directa del Teorema 7. $\square$

Como en el Teorema 5, la existencia de una S.R. correspondiente a P está sujeta al requerimiento de que las dotaciones iniciales agregadas inicales estén dentro del cono que se definió en dicho Teorema.

Para redondear el resultado anterior, hay que hacer notar que en el enunciado del Teorema 8, por una cuestión de claridad, no se ha especificado cual sería el grado de monopolio que obtiene el ν-ésimo capitalista dada una indexación cualquiera θ. El procedimiento para decidir se describe a continuación: insértese el subconjunto S_ν del ν-ésimo capitalista dentro de la cadena original $T_1, \ldots, T_\tau$, y encuéntrese en que momento deja de tener acceso a nueva información. En otras palabras, definimos los conjuntos

$$\begin{aligned} T_1^\nu &= S_\nu \\ T_2^\nu &= S_\nu - S_1 \\ &\vdots \\ T_k^\nu &= S_\nu - \bigcup_{i<k} S_i \end{aligned}$$

De lo anterior, se tiene que para algun $k \leqq \tau$, $T_k^\nu = \emptyset$. Sea k_ν el mayor entero para el cual $T_k^\nu \neq \emptyset$. Entonces el ν-ésimo capitalista sustentará el grado de monopolio d_k en el equilibrio.

Una interpretación economica del teorema 8 merece ser mencionada, y sería la siguiente: cualquier partición arbitraria de información puede generar un vector de precios unitarios de equilibrio que provee rendimientos diferenciales para la información especial poseida por cada uno de los diferentes capitalistas.

Cabe entonces una pregunta natural: ¿qué tan especial es la información poseida por un capitalista en particular? Eso puede estimarse por cuan alto es su índice en alguna indexación admisible. Veamos el siguiente:

Ejemplo. Vamos a suponer, por claridad, que el conjunto S_ν del ν-ésimo capitalista está estrictamente contenido en el resto de los S_μ: entonces siempre estará entre los índices más bajos en cualquier indexación admisible, y su grado de monopolio será mínimo. La figura 5.2 ilustra lo anterior. ♠

De hecho, se tiene el siguiente:

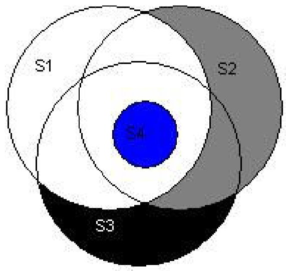

Figura 5.2: Indexación de cuatro capitalistas en la que S_4 está contenido en los demás S_i. La nomenclatura de colores es la misma que en la figura 5.1

Corolario 1 *Sean los conjuntos $S_1, \ldots, S_N$, tales que $S_\nu \subset S_\mu\ \forall \mu \in \overline{N},\ \mu \neq \nu$. Entonces el ν-ésimo capitalista obtiene el menor grado de monopolio.*

Demostración. Resulta inmediata del teorema 8 y de la definición de diferencia de conjuntos. □

Consideremos ahora el caso opuesto, es decir, el caso en el que un capitalista tiene acceso a un sector al cual ningún otro tiene acceso; entonces existe una indexación admisible en la cual su índice será el más alto y, en consecuencia, hay un vector de precios unitarios de equilibrio para el cual dicho capitalista posee el grado de monopolio más alto. (Notemos, sin embargo, que podría haber indexaciones admisibles en la cuales tenga un índice bajo). Este último punto puede sintetizarse claramente como sigue:

Teorema 9 *Sea un partición $S_1, \ldots, S_N$ tal que cada capitalista posea acceso a un sector que no es asequible para ningún otro capitalista, esto es, $\bigcup_J S_i \neq \{1, \ldots, n\}$, donde J es cualquier subconjunto propio de $\{1, \ldots, N\}$. Entonces hay un vector de precios reproducible que asigna el máximo grado de monopolio a cualquier capitalista dado.*

Otra consecuencia inmediata del Teorema 8 es que, una vez que se ha obtenido una distribución de los grados de monopolio asociada a una indexación admisible, la ordinalidad de los grados de monopolio queda determinada.

Así, se tiene una determinación jerárquica de los grados de monopolio: en otras palabras, hay cotas superiores e inferiores ubicadas en el rango ordinal de un capitalista en los grados de monopolio basados en la cantidad de información que posee -ésta idea se resume por sus posibles posiciones en asignaciones admisibles.

Lo que ha sido tratado en esta sección ha sido para proveer una base para un posterior modelo de conducta oligopólica en el modelo lineal Marxista. Se ha visto, primero, que cualquier particion que incluya accesos restringidos en una tecnología lineal de Leontief puede mantener una SR; pero, además, hay un gran rango de soluciones reproducibles. Cual SR puede obtenerse depende directamente de la distribución de los grados de monopolio

Capítulo 6

Roemer y su modelo dinámico.

En el capítulo anterior se realizó una generalización del modelo lineal en el sentido de la cantidad de información a la que tenían acceso los capitalistas; sin embargo, aun considerando la variación ya mencionada, el modelo era estático, es decir, no se tomó en consideración el transcurso del tiempo antes o después del proceso de producción.

De lo anterior se deduce que existe otra manera de generalizar el modelo descrito en el capítulo 3, a saber, la consideración del caso dinámico, en el que el tiempo juega un papel importante en el comportamiento del modelo.

Consideramos los supuestos utilizados en el capítulo 3, además de lo siguiente.

Hipótesis del modelo dinámico:

11) Es un modelo de competencia perfecta, es decir, que todo los capitalistas tienen acceso a toda la tecnología.

10) Se considera el tiempo transcurrido entre un periodo de producción y el siguiente. Se hace la distinción entre el periodo presente con el subíndice "t", mientras que aquellos objetos relacionados con el periodo siguiente se distinguirán con el subíndice "t+1"

Ahora bien, recordemos que por el inciso *ii*) del Teorema 5 una solución reproducible existe si y sólo si las dotaciones iniciales Ω se encuentran dentro de un cierto cono C^*, el cual se definió oportunamente[1]. Supongamos que $\Omega \in C^*$ y que, en consecuencia, una S.R. prevalece. Tenemos entonces que, si

[1] Ver página 44.

denotamos las dotaciones inciales del periodo presente con Ω_t, al principio del siguiente periodo habrá nuevas dotaciones iniciales Ω_{t+1}, como consecuencia inmediata del último periodo de producción. La pregunta entonces sería: ¿estará $\Omega_{t+1} \in C^*$? O dicho de otra manera: ¿las S.R. se preservan aún en un modelo dinámico? Responderemos a esta pregunta más adelante.

Primeramente vamos a establecer una noción de equilibrio más débil que la de solución reproducible. En este caso, a los capitalistas no les preocupa si un equilibrio es reproducible o no; ellos simplemente maximizan ganancias. Esto motiva la siguiente definición:

Definición. 29 Un equilibrio competitivo *(E.C.) con respecto al conjunto de dotaciones iniciales* $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_N\}$ *es un par* (P, X) *tal que:*

(a) $X \in A(P) = \sum\limits_{\nu=1}^{N} A^\nu(P)$

(b) $P\widetilde{D} = 1$

(c) $AX + (WX)\widetilde{D} \leqq \Omega$ *o equivalentemente* $A^*X \leqq \Omega$

En otras palabras, un E.C. que también es reproducible es una S.R. Incluso si $\Omega \notin C^*$ el equilibrio competitivo existe. Probemos esta última aseveración con el siguiente resultado:

Teorema 10 *Para cualesquiera* $\{\Omega^1, \ldots, \Omega^N\}$*, existe un equilibrio competitivo.*

Demostración. Sea $S = \{P | P\widetilde{D} = 1\}$ el simplejo.(Se asume que $\widetilde{D} > \widehat{O}$, de tal suerte que S es un simplejo). Construyase la correspondencia $z(P) = \{A^*X - \Omega | X = \sum\limits_{\nu=1}^{n} X^\nu,\ con\ X^\nu \in A^\nu(P)\}$. Se puede verificar facilmente que $z(P)$ satisface las condiciones del Teorema 15; entonces, existen los vectores $\widehat{P}$ y $\widehat{X}$ tales que $A^*X - \Omega \leqq \widehat{0}$ y $X \in A(P)$ y en consecuencia, se cumplen las condiciones de un E.C. □

Ahora bien, tenemos que, por las hipótesis especificadas al principio de éste capítulo, las dotaciones iniciales para el próximo periodo serán

$$\Omega_{(t+1)} = \Omega_{(t)} - A^*X + X$$

es decir, las dotaciones previas más las producciones netas $X - A^*X$.

Antes de continuar, es preciso que consideremos la siguiente:

Definición. 30 *Decimos que la* i-*ésima mercancía se encuentra en cantidad excedente en un E.C. si* $\omega_i > [A^*X]_i$ *con* $i \in \overline{n}$.

Hecho lo anterior, procedemos a enunciar y demostrar el teorema que se menciona a continuación:

Teorema 11 *Sea* (P, X) *un E.C. para la tecnología* $\{A, W, \widetilde{D}\}$*, para la cual se asume que* $e > 0$. *Si* $P\Omega > 0$*, entonces* (P, X) *genera ganancias totales positivas.*

Demostración. Supongase que con (P, X) había ganancias totales nulas. Entonces cada capitalista tiene ganancias nulas. Como $P\Omega > 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P\sum_{\nu=1}^{N}\Omega^{\nu} &> 0 \\ \Rightarrow P\Omega^1 + \cdots + P\Omega^{\nu} + \cdots + P\Omega^N &> 0 \\ \Rightarrow P\Omega^{\nu} &> 0 \; p.a. \; \nu \in \overline{N} \end{aligned}$$

Este capitalista operaría en una actividad de tasa de ganancia positiva, si la hubiera, pero por hipótesis todas la actividades deberán tener tasas de ganancia no positivas, de donde

$$P \leqq PA^* \tag{6.1}$$

Consideremos ahora X^*, el vector propio columna de A^*. Se sabe, por el teorema de Perron-Frobenius y tomando en cuenta el supuesto de que $e > 0$, que $A^*X^* < X^*$; por los mismos argumentos, tenemos que en la expresión 6.1 $P = PA^*$ es imposible, pues A^* tiene asociado un único vector positivo por la izquierda, y éste está asociado al valor propio $\frac{1}{1+\widehat{R}} < 1$. En consecuencia, se debe reescribir la expresión 6.1 como sigue:

$$P \leq PA^* \tag{6.2}$$

Post-multiplicando ésta última expresión por X^* se obtiene

$$PX^* < PA^*X^* \tag{6.3}$$

Pero

$$X^* = (1 + \widehat{R})A^*X^* \tag{6.4}$$

por lo que si sustituimos el valor de X^* en el lado izquierdo de la desigualdad 6.3, entonces tenemos que en realidad

$$PX^* > PA^*X^* > 0 \tag{6.5}$$

Esto contradice la suposición inicial, pues se tiene que las ganancias totales $PX^* > 0$. $\square$

Vayamos ahora al análisis de otro resultado:

Teorema 12 *Supongamos que el* i-*ésimo bien se encuentra en cantidad excedente en un E.C., entonces*

i) ese bien es gratuito, es decir, si $\omega_i > [A^*X]_i \Rightarrow p_i = 0$

ii) ese bien no se produce, es decir, si $\omega_i > [A^*X]_i \Rightarrow x_i = 0$

Demostración.

i) Consideremos al capitalista con dotaciones iniciales Ω^ν. Sea (P, X) un E.C. Por hipótesis tenemos que $P\Omega > 0$ y en consecuencia, por el teorema 11, hay ganancias totales positivas; entonces debe existir un proceso de tasa de ganancia positiva, por lo que el ν-ésimo capitalista puede operar precisamente ese proceso y obtener ganancias positivas. Por linealidad, el ν-ésimo capitalista operará al límite de su restricción de capital. Esto es, escogerá un vector de niveles de producción X^ν tal que

$$PA^*X^\nu = P\Omega^\nu \tag{6.6}$$

Entonces, sumando sobre X^ν y sobre Ω^ν respectivamente, se tiene que:

$$\begin{aligned} PA^*X^\nu &= P\Omega^\nu \\ \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{N} A^*X^\nu &= \sum_{\nu=1}^{N} P\Omega^\nu \\ \Rightarrow PA^*\sum_{\nu=1}^{N} X^\nu &= P\sum_{\nu=1}^{N}\Omega^\nu \\ \Rightarrow PA^*X &= P\Omega \end{aligned} \tag{6.7}$$

o bien

$$P(A^*X - \Omega) = O \tag{6.8}$$

Consideremos ahora la i-ésima componente de los vectores que constituyen la igualdad 6.8, de donde se tiene que:

$$P_i([A^*X]_i - \omega_i) = O \tag{6.9}$$

Por hipótesis tenemos que

$$\begin{aligned} \omega_i &> [A^*X]_i \\ \Rightarrow 0 &> [A^*X]_i - \omega_i \end{aligned} \tag{6.10}$$

Sustituyendo 6.10 en 6.9, tenemos como consecuencia que $p_i = 0$, lo que prueba el resultado.

ii) Como consecuencia directa de i), tenemos que la tasa de ganancia de un bien cuyo precio unitario de producción es cero debe ser no positiva. Como por el teorema anterior sabemos que hay procesos de tasa de ganancia positiva, entonces los capitalistas solo operarán en los procesos de tasa de ganancia positiva y, por tanto, los sectores que producen bienes con tasa de ganancia no positiva no serán operados, por lo que $x_i = 0$.

□

Usando el teorema 12, es posible construir un clasificación completa de los E.C. para el caso en que A^* es una matriz cuadrada e irreducible de orden 2. Sea A^* irreducible de 2 x 2, y sean α_1 y α_2 los vectores (positivos) de insumos requeridos para operar el primer y el segundo procesos, respectivamente, en niveles unitarios:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= A^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 &= A^* \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Consideremos el ortante positivo en R^2, y establezcamos la siguiente:

Definición. 31 *Sean los vectores α_i para $i = 1, 2$, como se ha definido previamente. Entonces consideremos el cono A_1OA_2, formado por las combinaciones lineales de dichos vectores α_i. Llamaremos a éste conjunto* ***cono de requerimientos factibles de insumos***

Ahora bien, cualquier vector de producciones totales X generará requerimientos de insumos que caen dentro del cono A_1OA_2. Ahora supongamos que el vector de dotaciones iniciales Ω se ubica a la derecha de A_1OA_2. Entonces por el inciso b) de la definción de E.C., éste debe tener sus requerimientos de insumos A^*X dentro del rectángulo $C\Omega DO$, al sureste de Ω, i.e.

$A^*X \in C\Omega DO$; pero de manera simultánea tenemos que $A^*X \in A_1OA_2$, lo cual se traduce en que $A^*X \in C\Omega DO \cap A_1OA_2$, de donde se sigue que el bien 1 se encuentra en cantidad excedente en un equilibrio competitivo. Por el teorema 12, tenemos que $p_1 = 0 = x_1$. Entonces, sólo se operará el proceso 2, y este proceso se operará al límite de las restricciones de capital de cada capitalista.

Pasemos ahora al tratamiento del modelo dinámico; para ello, debe reemplazarse el modelo discreto aquí expuesto por un modelo contínuo. No presentaremos en este trabajo la construcción del modelo con detalles rigurosos, pero la idea general es la que se plantea a continuación: tomemos a Ω no como el stock de insumos iniciales que ha representado hasta éste momento, sino como un stock de capital generador de capital de servicios durante un largo número de periodos. En cada periodo, la dotación inicial de capital global, Ω, se ve ajustada por el producto neto $X - MX$, en el sentido en que lo hemos discutido previamente, es decir,:

$$\Omega_{t+1} = \Omega_t - A^*[X_t] + X_t, \ con\ t \in N \cup \{0\} \tag{6.11}$$

En los párrafos anteriores hemos encontrado que si Ω_t se encuentra a la derecha del cono A_1OA_2, entonces se obtiene un vector de producciones X_t que tiene la siguiente propiedad:

$$[x_1]_t = 0 \tag{6.12}$$

y

$$[x_2]_t > 0 \tag{6.13}$$

Además, tenemos que $A^*[X_t] > \overline{0}$, ó lo que es lo mismo

$$\{A^*[X_t]\}_1 > 0 \tag{6.14}$$

y

$$\{A^*[X_t]\}_2 > 0 \tag{6.15}$$

Y finalmente, por la productividad de A^* tenemos que

$$[x_1]_t > \{A^*[X(t)]\}_1 \tag{6.16}$$

y

$$[x_2]_t > \{A^*[X(t)]\}_2 \tag{6.17}$$

Así, de las ecuaciones 6.11, 6.12 y 6.14, se sigue que

$$[\Omega_1]_{t+1} < [\Omega_1]_t \tag{6.18}$$

mientras que de las ecuaciones 6.11 y 6.17 obtenemos lo siguiente

$$[\Omega_2]_{t+1} > [\Omega_2]_t \tag{6.19}$$

Damos entonces una interpretación de lo que se ha dicho en las últimas líneas: si el vector de dotaciones iniciales del periodo actual se encuentra fuera del cono de requerimientos factibles de insumos, entonces el vector de dotaciones iniciales del próximo periodo se "mueve" hacia el cono A_1OA_2. Para mayor claridad, vease la interpretación geométrica que se hace en la figura 6.1.

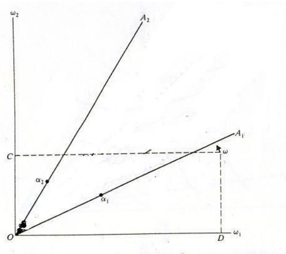

Figura 6.1: Modelo dinámico con dotaciones iniciales fuera del cono de factibilidad

Se puede llevar este análisis para otras posiciones del vector de dotaciones iniciales, lo cual genera el diagrama de fase de la figura 6.2.

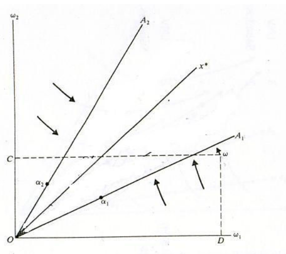

Figura 6.2: El caso general en que Ω cae en cualquier lugar fuera del cono A_1OA_2

Consideremos ahora la figura 6.3. En ella, X^* es la trayectoria de crecimiento balanceado del modelo. Por otra parte, B_1OB_2 es el cono C^*, definido en el capítulo 3, en el cual existen las soluciones reproducibles.

A_1OA_2 es el cono previamente definido. Entonces, de acuerdo con Roemer, dependiendo del comportamiento de Ω, tenemos cuatro casos a considerar:

i) Cuando Ω coincide precisamente con la trayectoria de crecimiento balanceado. En tales circunstancias es justo ahí en donde se tiene un E.C.

2) Cuando Ω cae en cualquier otro lado dentro del cono A_1OA_2. En tal caso, el vector de dotaciones inicales Ω, conforme pasa el tiempo, se mueve de la trayectoria de crecimiento balanceado hacia las cotas del cono.

3) Cuando Ω cae inicialmente afuera del cono, entonces se mueve hacia el cono.

4) $\Omega \in B_1OB_2$ si y sólo si las dotaciones de ambos bienes se incrementan durante ese periodo.

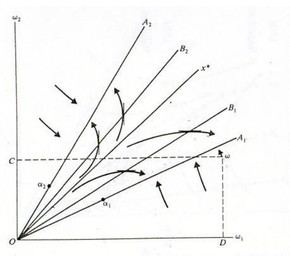

Figura 6.3: El caso general en que Ω cae en cualquier lugar fuera del cono A_1OA_2

De lo anterior se desprende la siguente conclusión: la dinámica es inestable, es decir, Ω_{t+1} no converge a ningún valor dentro de B_1OB_2.

Capítulo 7

Conclusiones

Es momento de exponer los resultados generados a partir del análisis de la obra de Roemer. Para ello, hagamos una distinción entre las conclusiones relativas a la formalidad y las que son relativas al contenido.

En primer lugar se debe decir que el modelo de Roemer está fuertemente apoyado en dos trabajos previos: el modelo insumo-producto de Leontief, por un lado, y la teoría de los valores-trabajo, desarrollada fundamentalmente por Morishima. En cuanto a lo primero, la correcta definición de cada uno de los elementos del modelo es básica, porque de ello depende que dicho insumo pueda ser llevado al álgebra lineal, facilitando el manejo analítico del tema. En cuanto a lo segundo, hay que remarcar que dicha teoría es la parte medular del proceso de transformación de la teoría marxista del lenguaje natural al leguaje matemático: es aquí en donde se definen, matemáticamente, conceptos como tasa de explotación, tasa de ganancia y otros. Como resultado principal de estos dos puntos, se tiene el Teorema Marxista Fundamental, el cual no representa propiamente la solución al problema de la transformación, pero si un "pasaje" entre el espacio de los valores-trabajo y el de los precios de producción. Sin embargo, no es el objetivo de Roemer trabajar con el sistema de los valores-trabajo: la mención de éste sistema al principio de su obra es, al parcer, solamente de carácter hstórico. Roemer está más interesado en los precios de producción y en la teoría del equilibrio económico.

Para el desarrollo de su modelo de equilibrio económico, Roemer considera dos hipótesis analíticas fundamentales: la productividad e irreducibilidad de la matriz A^*. De hecho, cuando define el concepto de solución reproducible, una de las ideas que caracterizan a este vector de precios es que la matriz A^* es productiva en un sentido "débil". En lo que respecta a la irreducibilidad de la ya citada matriz, se debe hacer notar que es de vital importancia, pues gracias a ella es posible aplicar, en una buena cantidad de las demostraciones, el teorema de Perrón-Frobenius.

Cuando se analiza el modelo de competencia imperfecta, el trabajo de Roemer nos lleva a una demostración formal de que la cantidad de información a la que tiene acceso un capitalista dado, determina la tasa de ganancia que puede alcanzar de una manera directamente proporcional a dicho acceso a la tecnología de producción. El buen manejo de una teoría elemental de conjuntos fue básico para comprender completamente esta sección.

Por otro lado, y en relación a la breve exposición del modelo dinámico que hace Roemer, es muy importante resaltar que la dinámica del modelo en general no resulta estable, pues depende fuertemente de la posición inicial del vector de dotaciones iniciales.

En lo tocante a la precisión del trabajo de Roemer debemos decir que, si bien plantea algunas definiciones y enuncia y demuestra teoremas, lemas y corolarios, su trabajo dá por sentadas varías hipótesis, situación que genera el notable nivel de dificultad de la obra. En primer lugar, se da por supuesto, por citar sólo un ejemplo, que se está tratando con el sistema de precios propuesto por Von Bortkiewicz. Además, Roemer no contempla un análisis dimensional de las ecuaciones, lo cual resulta necesario para verificar la consistencia de las mismas. Por otro lado, y de cierta manera un tanto contrario a lo que se ha dicho en las líneas previas, existen otros pasajes en los que, al momento de enunuciar los teoremas se piden condiciones redundantes, y al momento de demostrar otros, se cae en pruebas inecesarias. Finalmente, existen ocasiones en las que se enuncia un resultado con palabras, cuando en realidad podría darsele forma de teoerema e incluir la demostración que, la mayoría de las veces, resulta no muy difícil de deducir. Ahora bien, todo lo anterior parece tener una explicación, y es que, dado que se trata de un texto dirigido principalmente al público relacionado con el área económica, el autor sacrificó un poco de formalidad y precisón en aras de no presentar un trabajo con lenguaje muy técnico; no obstante, para que su objetivo se cumpla, el lector debe contar con un nivel de especialización relativamente alto en cuanto a la teoría económica y la herramienta matemática utilizada se refiere, pues para un estudiante recién iniciado en el área de la economía (y aún de las matemáticas) puede fácilmente extraviarse en la obra. Justamente el objetivo de éste trabajo ha sido clarificar, tanto como ha sido posible, una parte del trabajo de Roemer.

Es momento de hablar del contenido. A este respecto, es justo decir que el trabajo del autor representa un planteamiento muy completo en lo que se refiere a la teoría del equilibrio económico. Lo anterior se afirma por lo siguiente. En general, no es difícil encontrar bibliografía que trate del modelo insumo-producto de Leontief, que aborde el ya célebre "problema de la transformación" (relativo a la incompatibilidad entre el sistema de valoes-trabajo y el sistema de precios), o que se refiera a modelos de competencia imperfecta o dinámicos. No obstante, Roemer ha conjuntado, apenas en un sólo capítulo de su obra, todas estas ideas y variaciones del modelo económico lineal. Ahora bien, para lograr lo anterior, Roemer recurre al uso de diversas áreas, entre las que se pueden citar el álgebra lineal, principalmente, pero también la programación lineal, la microeconomía e incluso, aunque en menor medida, la teoría de correspondencias.

Por último, es conveniente mencionar que, si bien en principio resulta complicado entender la obra en cuestión, por las razones expuestas con anterioridad, la riqueza de conocimientos que se puede adquirir al leerla es enorme, pues el proceso de comprensión de la obra lleva al lector a internarse en algunas áreas del conocimiento, tal vez conocidas, ó tal vez totalmente ajenas a él.

En ese sentido, el presente trabajo muy bien puede tomarse como punto de partida para realizar una investigación muchísimo más extensa y profunda, la cual consistiría en el análisis de todos y cada uno de los capítulos restantes de la obra "Analytical Marxism". De hecho, es muy probable que dicha investigación pudiese derivar en una especie de proyecto en el cual se pueda contextualizar, de manera didáctica, el estudio de diversas ramas de las matématicas, además de que con ello los estudiantes de economía matemática (y áreas afínes) encontrarían la posibilidad de apreciar, desde un punto de vista muy diferente al usual, una teoría económica que por si sola ya es bastante interesante, pero que a la luz de las herramientas análiticas adecuadas puede revelar una faceta sensiblemente atrayente.

Capítulo 8

Apéndice

8.1. Notación y algunos resultados útiles.

Primero que nada, debemos notar que se está trabajando con elementos en R^n. En consecuencia, definiremos el siguiente conjunto de índices: Sea

$$\overline{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

Por otro lado, durante el desarrollo de este trabajo se considera la existencia de N capitalistas que operan los diferentes sectores de la economía. De esto se desprende el siguiente conjunto de índices: Sea

$$\overline{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$$

A continuación se definen las relaciones entre vectores. Sean dos vectores X y Y en R^n. Se dice que

a) $X \geqq Y$ si $x_i \geqq y_i$ $\forall i$.

b) $X \geq Y$ si $x_i \geqq y_i$ y para alguna i se cumple que $x_i > y_i$.

c) $X > Y$ si $x_i > y_i$ $\forall i$.

Lo mismo sucede para las matrices. Sean A y B dos matrices en M_{mxn}. Se dice que

a) $A \geqq B$ si $a_{ij} \geqq b_{ij}$ $\forall i, j$.

b) $A \geq B$ si $a_{ij} \geqq b_{ij}$ y para alguna i, j se cumple que $a_{ij} > b_{ij}$.

c) $A > B$ si $a_{ij} > b_{ij}$ $\forall i, j$.

Definición. 32 *Se dice que una matriz N es diagonal si sólo los elementos de la diagonal son no nulos.*

Teorema 13 *Sea N una matriz diagonal con componentes $n_{ii} > 0$. Entonces N^{-1} es también una matriz diagonal, y las componentes de su diagonal son precisamente $\frac{1}{n_{ii}}$.*

Demostración. Sean N= $\begin{pmatrix} n_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n_{nn} \end{pmatrix}$ con $n_{ii} > 0$. Consideremos la matriz $\overline{N}$ definida como sigue: $\overline{N}$= $\begin{pmatrix} \frac{1}{n_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n_{nn}} \end{pmatrix}$. Hagamos el producto

$$N\overline{N} = \begin{pmatrix} n_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{n_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n_{nn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I$$

Análogamente, se tiene que $\overline{N}N = I$. De esto se concluye que $\overline{N} = N^{-1}$ y entonces se obtiene el resultado buscado. $\square$

Definición. 33 *Se dice que una matriz A de orden 2 o superior es irreducible si no existe una permutación Π tal que $A_\Pi = \Pi A \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ con A_{11} y A_{22} matrices cuadradas.*

Teorema 14 *Si M es una matriz irreducible y N es una matriz diagonal tal que $n_{ii} > 0$, entonces MN también es irreducible.*

Demostración. Considerese M_i, la i-ésima columna de la matriz M. Al momento de efectuar el producto MN, se tiene que la i-ésima columna de la matriz MN, es de la forma $M_i n_{ii}$. Como $n_{ii} > 0$ las componentes nulas de la matriz M son exactamente los mismos en la matriz MN, por lo que MN también es irreducible. $\square$

Teorema 15 *Sea $z(p) : S \rightarrow T$ una correspondencia superiormente semi-contínua del simplejo S a un conjunto compacto T. Sea $z(p)$ cerrada y convexa para todo p y $pz(p) \leqq O$ Entonces $\exists \widetilde{p} \in z(\widetilde{p})$ tal que $\widetilde{z} \leqq O$*[1].

Notas importantes:

- Aunque arriba se consideraron las matrices en M_{mxn}, en este trabajo todas la matrices a que se hace referencia son cuadradas, es decir, las matrices en realidad pertenecen a M_{nxn}.
- En realidad, los vectores son un caso particular de las matrices. Es por eso que las definiciones de las relaciones son muy parecidas.

8.2. El Teorema de Frobenius.

A continuación se enuncia y demuestra un resultado muy importante en la realización de este trabajo[2].

Teorema 16 *Sea $A \geq \overline{0}$, una matiz cuadrada irreducible de orden n. Entonces:*

1. *A tiene una valor propio $r > 0$ tal que*
2. *a r se le puede asociar vector propio $X_0 > \overline{0}$;*
3. *si α es cualquier otro valor propio de A, entonces $|\alpha| \leqq r$;*
4. *r se incrementa si cualquier elemento de A se incrementa;*
5. *r es una raíz característica simple.*

Demostración.

1.a Sea $X \geq \overline{0}$. Entonces $AX \geq \overline{0}$, pues de lo contrario A tendría una columna con todos sus elementos iguales a cero, lo cual violaría la irreducibilidad de A.

1.b Sea $S = \{X \in R^n | \ X \geq \overline{0} \ y \ \sum_{i=1}^{n} x_i\}$ el simplejo en R^n. Definimos la transformación $T(X) = \frac{1}{\rho(X)}AX$ en donde $\rho(X) > 0$ y está determinado de tal forma que $T(X) \in S$ (por 1.a , se garantiza la existencia

[1] Para la demostración de este teorema vease [3, pag. 106].

[2] Esta sección fue tomada de [4, pag. 598 y 599].

de ρ para todo $X \in S$). Claramente, $T(X)$ es una transformación contínua de S en S. Entonces, por el teorema del punto fijo de Brower[3], existe un $X_0 \in S$ que cumple con $X_0 = T(X_0) = \frac{1}{\rho(X_0)} AX_0$. Hagamos $r = \rho(X_0)$, con lo que se obtiene el resultado.

2. Supongamos que despues de aplicar una permutación apropiada Π, se tiene que $\widehat{X}_0 = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$, con $\xi > \overline{0}$. Apliquemos la misma partición Π a la matriz A. Se tiene entonces que $A_\Pi \widehat{X}_0 = r\widehat{X}_0$ o lo que es lo mismo

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\xi \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo cual implica que $A_\Pi \xi = \overline{0}$; como $\xi > \overline{0}$, entonces $A_\Pi = \overline{0}$, lo cual es una clara contradicción, pues se viola la irreducibilidad de A. Por lo tanto, $\widehat{X}_0 > \overline{0}$.

3-4. Supongamos que $\overline{0} \leq B \leqq A$ Considerese A^T. A^T es irreducible y en consecuencia, por los incisos anteriores, tiene un valor propio $r_1 > 0$ y asociado a dicho valor existe un vector propio $X_1 > \overline{0}$ tal que $A^T X_1 = r_1 X_1$. Además, $\beta Y = BY$. Tomando valores absolutos y usando la desigualdad del triángulo, obtenemos lo siguiente:

(i) $|\beta| Y^* \leqq BY^* \leqq AY^*$. Entonces
(ii) $|\beta| X_1^T Y^* \leqq X_1^T AY^* = r_1 X_1^T Y^*$

Dado que $X_1 > \overline{0}$, $X_1^T Y^* > \overline{0}$, por lo cual $|\beta| \leqq r_1$. Haciendo $B = A$ se obtiene $|\alpha| \leqq r_1$. En particular, $r \leqq r_1$, y dado que, por un argumento análogo $r_1 \leqq r$, se tiene que $r_1 = r$. Regresando a la comparación entre A y B y suponiendo que $|\beta| = r$, de (i) y (ii) se tiene que:

$$rY^* = BY^* = AY^*$$

De $rY^* = AY^*$, por el inciso (ii) se concluye que $Y^* > \overline{0}$. Como $BY^* = AY^*$, y además $B \leqq A$, entonces $B = A$.

5.a Si B es una submatriz principal de A y β es un valor propio de B, entonces $\beta < r$. Esto se sigue porque, dadas las hipótesis, β es también un valor propio de la matriz cuadrada de orden n $\widehat{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dado que A es irreducible, entonces $B \leq A_\Pi$, para una permutación adecuada Π, y por tanto, por (3-4), $\beta < r$.

[3]Vease la demostración de este resultado en [14].

5.b r es una raíz simple de $\Phi(t) = \det(tI - A) = 0$. $\Phi'(r)$ es la suma de los menores principales de orden $(n-1)$ del $\det(rI - A)$. Sea A_i una de las submatrices principales de orden $(n-1)$ de A. Por (5.a), $\det(tI - A_i)$ no puede anularse para $t \geqq r$, donde $\det(rI - A_i) > 0$ y $\Phi'(r) > 0$.

$\square$

Teorema 17 *Sea $A \geq \overline{0}$, una matiz cuadrada irreducible de orden n y sea r la raíz de Freobenius. Entonces*

$$\min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leqq \ r \ \leqq \ \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Sólo se cumplen las dos igualdades de manera simultánea. (El mismo resultado se sigue para las columnas.)

Demostración. La demostración se sigue inmediatamente del inciso (4.) del teorema anterior. Para el caso de la igualdad, basta con aumentar (resp. disminuir) algunos elementos de A hasta hacer todas y cada una de las sumas de los renglones igual a $\max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ (resp. $\min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$). $\square$

8.3. Teoría de matrices productivas

A continuación se proporciona un poco de la teoría de las matrices producivas, la cual sirve de base para el desarrollo de este trabajo. Considerese lo siguiente:

Definición. 34 *Sea B_{mxm}. Decimos que B es de diagonal dominante en el sentido de Hadamard si $\forall j \in \overline{m}$ $|b_{ii}| > \sum_{i \neq j}^{m} |b_{ij}|$*

Definición. 35 *Sea B_{mxm}. Decimos que B es de diagonal dominante $\Leftrightarrow$ $\exists$ D, una matriz diagonal tal que $d_{ii} > 0$ y que DB es de diagonal dominante en el sentido de Hadamard. En otras palabras, B es de diagonal dominante*

$\Leftrightarrow \exists\ D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$ *con $d_{ii} > 0$ y tal que*

$$DB = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1b_{11} & d_1b_{12} & \cdots & d_1b_{1n} \\ d_2b_{21} & d_2b_{22} & \cdots & d_2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_nb_{n1} & d_nb_{n2} & \cdots & d_nb_{nn} \end{pmatrix}$$

y ademas

$$\begin{aligned}
|d_{jj}b_{jj}| &> \sum_{i\neq j}^{m} |d_{ii}b_{ij}| \\
\Rightarrow |d_{jj}||b_{jj}| &> \sum_{i\neq j}^{m} |d_{ii}||b_{ij}| \\
\Rightarrow d_{jj}|b_{jj}| &> \sum_{i\neq j}^{m} d_{ii}|b_{ij}|
\end{aligned}$$

Teorema 18 *Sea B_{mxm}. Si B es de diagonal dominante, entonces B es no singular.*

Demostración. Supongamos que B es singular. Por hipótesis, B es de diagonal dominante, lo que significa que $\exists\ D$, una matriz diagonal cuyos $d_{ii} > 0\ \forall i \in\ \overline{m}$ y tal DB es de diagonal dominante en el sentido de Hadamard. Observese que

$$|DB| = |D||B| = |D|0 = 0$$

pues supusimos que B es singular. En consecuencia, $DB = E$ es singular. Ahora bien, como E es singular, $\exists\ X \neq \overline{0}$ tal que $XE = \overline{0}$. Dicho de otra forma $\exists\ X \neq \overline{0}$ tal que

$$(x_i, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{m2} & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix} = (0, 0, \cdots, 0)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (\sum_{i=1}^{m} x_i e_{i1}, \sum_{i=1}^{m} x_i e_{i2}, \cdots, \sum_{i=1}^{m} x_i e_{im}) &= (0, 0, \cdots, 0) \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} x_i e_{ij} &= 0 \quad \forall\ j\ \in\ \overline{m} \\
\Rightarrow x_j e_{jj} + \sum_{i\neq j}^{m} x_i e_{ij} &= 0 \quad \forall\ j\ \in\ \overline{m} \\
\Rightarrow x_j e_{jj} &= -\sum_{i\neq j}^{m} x_i e_{ij} \quad \forall\ j\ \in\ \overline{m}
\end{aligned} \tag{8.1}$$

Sacando valores absolutos y aplicando la desigualdad del triángulo, de la ecuación 8.1 se obtiene:

$$
\begin{aligned}
|x_j||e_{jj}| = |x_j e_{jj}| &= |-\sum_{i\neq j}^{m} x_i e_{ij}| \\
&= |\sum_{i\neq j}^{m} x_i e_{ij}| \\
&\leqq \sum_{i\neq j}^{m} |x_i e_{ij}| \\
&= \sum_{i\neq j}^{m} |x_i||e_{ij}| \\
\Rightarrow |x_j||e_{jj}| &\leqq \sum_{i\neq j}^{m} |x_i||e_{ij}|
\end{aligned}
$$

Sea $\overline{j} \subseteq \overline{m}$, el conjunto de índices tales que $|x_j| \geqq |x_i| \forall i \in \overline{m}$ cuando $j \in \overline{j}$ Así, se tendría que:

$$
\begin{aligned}
|x_j||e_{jj}| \leqq \sum_{i\neq j}^{m} |x_i||e_{ij}| &\leqq \sum_{i\neq j}^{m} |x_j||e_{ij}| \quad j \in \overline{j} \\
\Rightarrow |x_j||e_{jj}| &\leqq \sum_{i\neq j}^{m} |x_j||e_{ij}| \quad j \in \overline{j} \\
\Rightarrow |e_{jj}| &\leqq \sum_{i\neq j}^{m} |e_{ij}| \quad j \in \overline{j}
\end{aligned}
$$

Esto es una contradicción, pues teníamos que $E = DB$ es de diagonal dominante en el sentido de Hadamard, $\therefore B$ es no singular. □

Teorema 19 *Sea B_{mxm} y tal que*

$$
\begin{aligned}
B = b_{ii} &> 0 \\
b_{ij} &\leqq 0
\end{aligned}
$$

Entonces B es de diagonal dominante $\Leftrightarrow \forall\ C > \overline{0}\ \exists! X > \overline{0}$ tal que $BX = C$

Demostración.
$\Rightarrow]$ Como B es de diagonal dominante, por el teorema anterior B es no

singular y, por tanto, el sistema $BX = C$ tiene solución única X. Para hacer ver que $X > \overline{0}$, supongamos que existe un subconjunto de índices $\emptyset \neq \overline{j} \in \overline{m}$ tales que $x_j \leqq 0$ si $j \in \overline{j}$ y $x_j > 0$ si $j \notin \overline{j}$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} b_{ij}x_j &= c_i > 0 \quad \forall\, i \,\in\, \overline{j} \\ \Rightarrow \sum_{j\in\overline{j}}^{m} b_{ij}x_j + \sum_{j\notin\overline{j}}^{m} b_{ij}x_j &= c_i > 0 \quad \forall\, i \,\in\, \overline{j} \end{aligned} \tag{8.2}$$

Como por hipótesis B es de diagonal dominante, $\exists D$, una matriz diagonal tal que $d_{ii} > 0 \forall\ i \in \overline{m}$ que hace que DB sea de diagonal dominante en el sentido de Hadamard. Entonces, si se multiplica la ecuación (2) por d_{ii} y se efectúa la doble suma, se tiene que

$$\sum_{i\in\overline{j}}^{m}\sum_{j\notin\overline{j}}^{m} d_{ii}b_{ij}x_j + \sum_{i\in\overline{j}}^{m}\sum_{j\in\overline{j}}^{m} d_{ii}b_{ij}x_j = \sum_{i\in\overline{j}}^{m} d_{ii}c_i > 0 \tag{8.3}$$

La demostración se basa en el análisis del lado izquierdo de la igualdad, el cual se efectúa a continuación. Por una parte, observese que el primer sumando es no positivo, pues como $j \notin \overline{j} \Rightarrow x_j > 0$ y $b_{ij} \leqq 0$; notese que, en este sumando, las entradas b_{ii} de la matriz B nunca pueden estar, pues los índices j e i están en subconjuntos ajenos. Por otra parte, por hipótesis B es de diagonal dominante, lo que significa que $d_{jj}|b_{jj}| > \sum_{i\neq j}^{m} d_{ii}|b_{ij}|\ \forall\ j \in \overline{m}$, en particular para $j \in \overline{j}$ Como $b_{jj} > 0$ y $b_{ij} \leqq 0$, entonces

$$0 < -\sum_{i\neq j;j\in\overline{j}}^{m} d_{ii}b_{ij} + d_{jj}b_{jj} = \sum_{j\in\overline{j}}^{m} d_{jj}b_{ij} \tag{8.4}$$

y como $j \in \overline{j}$, entonces $x_j \leqq 0$, y si se multiplica por esta cantidad y se efectúa la doble suma en el término del lado derecho de la ecuación (4) da como resultado

$$\sum_{i\in\overline{j}}^{m}\sum_{j\in\overline{j}}^{m} d_{ii}b_{ij}x_j < 0$$

es decir, el segundo sumando del lado izquierdo de la ecuación (3) es no positivo. Así, se tiene que la suma de dos números no positivos da como resultado un número estrictamente positivo, lo cual es una clara contradicción.

$\Leftarrow$] Por hipótesis, se tiene que $\forall\ C > \overline{0}\ \exists!\ X > \overline{0}$ tal que $BX = C$, es decir,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} b_{ij}x_j = c_i &> 0 \quad \forall\ i \in \overline{m} \\
\Rightarrow b_{ii}x_i + \sum_{i\neq j}^{m} b_{ij}x_j &> 0 \quad \forall\ i \in \overline{m} \\
\Rightarrow b_{ii}x_i > \sum_{i\neq j}^{m} (-b_{ij})x_j &\geqq 0 \quad \forall\ i \in \overline{m} \\
\Rightarrow b_{ii}x_i &> 0 \quad \forall\ i \in \overline{m}
\end{aligned}$$

y como $X > \overline{0}$, sea $d_{ii} = x_i > 0 \quad \forall\ i \in \overline{m}$, y entonces

$$d_{ii}|b_{ii}| = x_i b_{ii} > \sum_{i\neq j}^{m} d_{ii}(-b_{ij}) = \sum_{i\neq j}^{m} d_{ii}|b_{ij}| \tag{8.5}$$

o sea $d_{ii}|b_{ii}| > \sum\limits_{i\neq j}^{m} d_{ii}|b_{ij}|\ \forall\ i \in \overline{m},\ \therefore\ B^T$ es de diagonal dominante. Repitiendo todo el proceso sobre B^T, se tiene que $(B^T)^T = B$ es también de diagonal dominante. □

Corolario 2 *Sea B_{mxm} y tal que*

$$\begin{aligned} B = b_{ii} &> 0 \\ b_{ij} &\leqq 0 \end{aligned}$$

entonces B es de diagonal dominante $\Leftrightarrow B^T$ lo es.

Demostración. La demostración, de hecho, se encuentra dentro de la suficiencia del teorema anterior. □

Teorema 20 *Sea $A \geq \overline{0}$ y tal que*

$$\begin{aligned} (I - A) = B = b_{ii} &> 0 \\ b_{ij} &\leqq 0 \end{aligned}$$

Se cumplen las siguientes equivalencias:

i) A es productiva, i.e., $\exists\ X > \overline{0}$ tal que $X > AX \Rightarrow X - AX > \overline{0} \Rightarrow (I - A)X > \overline{0} \Rightarrow BX > \overline{0}$

ii) $\forall\ C > \overline{0}\ \exists!\ X > \overline{0}$ *talque* $BX = C$

iii) B *es no singular y* $B^{-1} \geq \overline{0}$

iv) *La serie* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k = B^{-1}$

v) $\widehat{\lambda} < 1$

Demostración.
$i) \Rightarrow ii)$] Por hipótesis, $\exists\ X > \overline{0}$ tal que $BX > \overline{0}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} b_{ij}x_j &> 0 \quad \forall\ i \in \overline{m} \\ \Rightarrow b_{ii}x_i + \sum_{i \neq j}^{m} b_{ij}x_j &> 0 \quad \forall\ i \in \overline{m} \\ \Rightarrow b_{ii}x_i > \sum_{i \neq j}^{m} (-b_{ij})x_j &\geqq 0 \quad \forall\ i \in \overline{m} \\ \Rightarrow b_{ii}x_i &> 0 \quad \forall\ i \in \overline{m} \end{aligned}$$

dado que $X > \overline{0}$, hagase $d_{ii} = x_i > 0 \quad \forall\ i \in \overline{m}$, y entonces

$$d_{ii}|b_{ii}| = x_i b_{ii} > \sum_{i \neq j}^{m} x_j(-b_{ij}) = \sum_{i \neq j}^{m} d_{jj}|b_{ij}|$$

$\Rightarrow\ B^T$ es de diagonal dominante, y por el Corolario 1 B también lo es, y por el Teorema 19, $\forall\ C > \overline{0}\ \exists!\ X > \overline{0}$ tal que $BX = C$
$ii) \Rightarrow iii)$] Dada la hipótesis, por el Teorema 19 se tiene que B es de diagonal dominante, y por el Teorema 18, B es no singular. Resta probar que $B^{-1} \geq 0$. Se sabe que $\forall\ C > \overline{0}\ \exists!\ X > \overline{0}$ tal que $BX = C$. Como B es no singular, $\exists B^{-1}$ y por tanto $X = B^{-1}C$, $\forall\ C$ de donde se tiene que $B^{-1} \geq 0$
$iii) \Rightarrow iv)$] Antes de comenzar esta demostración, se establece la siguiente:

Definición. 36 *Sea* P_{mxm} *y* Q_{mxm}. *Se dice que la matriz* P *converge a la matriz* Q *si se da la convergencia entrada por entrada, es decir,* $P \rightarrow Q$ *si* $p_{ij} \rightarrow q_{ij}\ \forall\ i, j \in \overline{m}$

Se tiene, por definición, que

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} A^k$$

Sea $T_n = \sum_{k=0}^{n} A^k = I + A + A^2 + \cdots + A^n$, entonces

$$\begin{aligned} T_n \cdot B &= (I + A + A^2 + \cdots + A^n)(I - A) \\ &= (I + A + A^2 + \cdots + A^n) - (A + A^2 + \cdots + A^{n+1}) \\ &= I - A^{n+1} \\ \Rightarrow T_n \cdot B &\leq I \\ \Rightarrow T_n \cdot &\leq B^{-1} \end{aligned} \tag{8.6}$$

pues por hipótesis $\exists B^{-1}$. La última desigualdad significa que T_n está acotada superiormente. Además, esta sucesión es creciente. Esto es porque, por hipótesis, $A \geq \overline{0}$ y en consecuencia $A^k \geq \overline{0}\ \forall\ k \in \mathcal{N}$. Así

$$\begin{aligned} I + A + A^2 + \cdots + A^n &\leq I + A + A^2 + \cdots + A^n + A^{n+1}\ \forall\ n \in \mathcal{N} \\ \Rightarrow T_n &\leq T_{n+1}\ \forall\ n \in \mathcal{N} \end{aligned} \tag{8.7}$$

De las ecuaciones 8.6 y 8.7, se tiene que la serie T_n es convergente (entrada por entrada), es decir,

$$\exists \lim_{n\to\infty} T_n = T$$

Resta verificar que la serie converge a B^{-1}. Considerese

$$\begin{aligned} T_n \cdot B &= I - A^{n+1} \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (T_n \cdot B) &= \lim_{n\to\infty} (I - A^{n+1}) \\ \Rightarrow T \cdot B &= I - \lim_{n\to\infty} A^{n+1} \end{aligned} \tag{8.8}$$

Basta probar que $\lim_{n\to\infty} A^{n+1} = \overline{0}$. En efecto, considerese

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= \sum_{k=0}^{n+1} A^k + \sum_{k=0}^{n} A^k \\ &= A^{k+1} \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (T_{n+1} - T_n) &= \lim_{n\to\infty} A^{n+1} \end{aligned}$$

Pero $\lim_{n\to\infty}(T_{n+1} - T_n) = \overline{0}$, pues se tiene que como T_n converge, entonces T_{n+1} también converge, y ambas convergen (entrada por entrada) al mismo límite T, por tanto

$$\lim_{n\to\infty} A^{n+1} = \overline{0} \tag{8.9}$$

Así, si se sustituye 8.9 en 8.8, se obtiene

$$\begin{aligned} T \cdot B &= I - \lim_{n\to\infty} A^{n+1} \\ &= I - \overline{0} \\ &= I \\ \Rightarrow T &= B^{-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\exists \lim_{n\to\infty} T_n = B^{-1}$ o, dicho de otra forma, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k = B^{-1}$

$iv) \Rightarrow v)]$[4] Supongase que $\widehat{\lambda}$ es un valor propio de A y X el vector propio correspondiente. Entonces

$$[I + A + A^2 + \cdots]X = [1 + \widehat{\lambda} + \widehat{\lambda}^2 + \cdots]X$$

Dado que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ es convergente, debe serlo tambien la serie de valores propios de A. Pero del analisis complejo, se sabe que la condicion para que ocurra tal convergencia es que $|\widehat{\lambda}| < 1$, lo cual prueba el resultado.
$v \Rightarrow i]$ Por hipotesis, A tiene un valor propio $\widehat{\lambda} < 1$. Sea $\widehat{X} > \overline{0}$ el vector propio asociado a dicho valor, el cual existe por el teorema de Perron Frobenius. Ahora bien, como $\widehat{\lambda}$ es valor propio de A, se tiene que:

$$\begin{aligned} A\widehat{X} = \widehat{\lambda}\widehat{X} &< \widehat{X} \\ \Rightarrow A\widehat{X} &< \widehat{X} \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. □

[4]Se transcribe la demostracion incluida en [6]

Bibliografía

[1] Abraham-Frois, Gilbert,(1979). *Theory of Value, Prices and Acummulation.* Cambridge University Press. Great Britain, 1979.

[2] Cravioto Padilla, Graciela B. *El desarrollo de los modelos lineales a partir del problema de la transformación de valores en precios.*Tesis de Licenciatura en Matemáticas. México, 1985.

[3] Debreu, Gerard. *Un análisis axiomático del equilibrio económico.* Antoni Bosch. Barcelona, 1973.

[4] Debreu, Gerard y Hernstein, I. N. *Nonnegative square matrices.* Econometrica, Journal of the Econometric Society, Vol. 21, No. 4, October, 1953. The University of Chicago, Chicago 37, Illinois, U.S.A.

[5] Gale, David. *The Theory of Linear Economic Models.* The University of Chicago Press. U.S.A, 1989.

[6] Graham, Alexander. *Nonnegative Matrices and Applicable Topics in Linear Algebra.* Ellis Horwood Limited. Great Britain, 1987.

[7] Guillén Romo, Héctor,(1988). *Lecciones de economía marxista.* Fondo de Cultura Económica. México, 1988.

[8] Kalecki, Michal. *Theory of economic dynamics: an essay on cyclical and long-run changes in capitalist economy.* A. M. Keller. New York, 1969.

[9] Marx, K.(1989). *El capital. Crítica de la Economía política.* Tomo I. Fondo de Cultura Económica. México, 1980.

[10] Morishima, Michio. *La teoria econmica de Marx. Una teoría dual del valor y el crecimiento.* Editorial Tecnos. España, 1977.

[11] Puyana,Jaime. *Modelos macroeconómicos de crecimiento y de fluctuaciones cclicas.* U. A. M. México, 1995.

[12] Roemer, John E.(1986). *Analitycal Marxism.* Cambridge University Press. Great Britain, 1986.

[13] Roemer, John E. *Valor, explotación y clase.* Fondo de Cultura Económica. México, 1989.

[14] Takayama,Akira (1974). *Mathematical Economics.* The Dryden Press. U.S.A., 1974.

[15] Vegara Carrio, Josep Ma. *Economía política y modelos multisectoriales.* Editorial Tecnos. España, 1979.

Índice alfabético