UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCION DE LA LOGICA DIFUSA A LAS FINANZAS Y ADMINISTRACION

T E S I S
Que para obtener título de:
Actuario

P R E S E N T A:
Gabriel Omar Cabello Leon

Director de Tesis:
ACT. RICARDO HUMBERTO SEVILLA AGUILAR

CIUDAD UNIVERSITARIA 2006

Agradecimientos:

Agradezco a Dios por darme la vida.

A mi padre† por su cariño, consejos, por enseñarme a trabajar y la mejor forma de ver la vida.

A mi madre por su cariño, compresión, por sus oraciones, por sus consejos, por sus enseñanzas y por tantos días de dedicación brindados a mis hermanos y a mí.

A mi hermano Luis Javier por todo su apoyo y por ser el ejemplo de lo que significa ser un gran hombre, a su esposa Beatriz, a la pequeña Bety y Luis Fernando que con su llegada brindan alegría a la familia.

A mis hermanas, Elizabeth y Carolina, por ser mis más grandes amigas.

A mi abuelita por su cariño y por sus oraciones.

A María Fernanda llenar un espacio vacío de mi vida.

A mis amigos.

FACULTAD DE CIENCIAS

División de Estudios Profesionales

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente.

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

"Introducción de la Lógica Difusa a las finanzas y administración"

realizado por **Cabello León Gabriel Omar**

con número de cuenta **09329238-2,** quien cubrió los créditos de la licenciatura en **Actuaría**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Tutor(a) Propietario	Act.	Ricardo Humberto Sevilla Aguilar	
Propietario	M. en I.	Fernando Eleazar Vanegas Chávez	
Propietario	Act.	Fernando Pérez Márquez	Fernando Pérez M.
Suplente	Dr.	Favio Ezequiel Miranda Perea	
Suplente	Dr..	Francisco Hernández Quiroz	

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D.F., a 12 de septiembre del 2006.
EL COORDINADOR DEL COMITÉ DE TITULACIÓN
DE LA LICENCIATURA EN ACTUARÍA

ACT. ROBERTO CÁNOVAS THERIOT

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

INDICE

INTRODUCCIÓN

En la actualidad el desarrollo económico y el surgimiento de nuevas tecnologías, ha generado consigo el aumento de información y la necesidad de contar con nuevas herramientas para facilitar la toma de decisiones, ya que hoy día la información fluye en forma más rápida, de manera masiva y en muchas veces con alto grado de imprecisión o ambigüedad, por lo que resulta necesario un razonamiento humano para su procesamiento, clasificación y análisis. No obstante, dicho desarrollo tecnológico también ha traído consigo diversas propuestas para proveer de herramientas que faciliten la tarea. En este sentido, de la rama de la Inteligencia Artificial surgen teorías para el desarrollo de procedimientos que basan su funcionamiento tomando como modelo los procesos de razonamiento del cerebro humano, asimismo, en la definición y modelación de variables y términos en los que se presenta imprecisión o ambigüedad, se ha desarrollado la teoría de la lógica difusa, cuyas características permiten que haciendo uso de dicha teoría en la modelación resulte mas fácil el manejo de la imprecisión y la ambigüedad presentes en muchos problemas de diversas disciplinas.

En el presente trabajo se presenta una forma de abordar diversos problemas del ámbito financiero y administrativo haciendo uso de la lógica difusa como una herramienta más a las que en dichas disciplinas ya existen, ya que en la resolución de problemas y en la toma de decisiones inmersas tanto en la administración y finanzas existe una gran cantidad de términos imprecisos o ambiguos cuya resolución puede ser analizada desde la perspectiva de la lógica difusa.

En el primer capítulo se presentan los antecedentes de la lógica difusa y se introduce el concepto, haciendo referencia a algunos datos históricos importantes, asimismo, se dan a conocer las definiciones sobre conjuntos difusos las operaciones básicas con conjuntos difusos y la definición de números difusos cuyo concepto es gran importancia dentro de los sistemas difusos ya que en base a ellos es posible abordar diversos problemas, definir y operar con aritmética difusa.

En el segundo capítulo se definen los conceptos de la lógica difusa y se expone la correspondencia existente entre la teoría clásica de conjuntos, la lógica clásica y la teoría de conjuntos difusos y la lógica difusa. Adicionalmente, se describen las operaciones aritméticas con números difusos, así como la forma de pasar los datos del mundo real a un ambiente difuso.

En el tercer capítulo se ejemplifica la aplicación de los conceptos teóricos descritos en el primero y segundo capítulos abordando un problema de determinación del importe de dividendos que una empresa debe repartir considerando una cierta política, la cual conforma las restricciones del modelo, asimismo, se presenta un ejemplo de asignación de precios para nuevos productos.

Finalmente en el capítulo cuatro se ejemplifica con un caso práctico los pasos de un modelo de inferencia difusa definido para realizar la clasificación de las instituciones del sector asegurador y afianzador mexicano de acuerdo con diversos supuestos descritos en detalle en dicho capítulo, tomando en cuenta tres indicadores regulatorios definidos por la Comisión nacional de Seguros y Fianzas.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES DE LA LOGICA DIFUSA

1.1 LOGICA DIFUSA (BORROSA)

Para introducir el concepto de lógica difusa, es importante referirse en primera instancia a los sistemas expertos, los cuales son sistemas de cómputo que se derivan de una rama de la investigación informática llamada Inteligencia Artificial (IA), término que en 1960 el matemático estadounidense John McCarthy le asignó a los métodos algorítmicos capaces de desarrollar habilidades tales como la capacidad de solucionar problemas, de aprender y de entender lenguajes y formas abstractas, destacando que la IA se ha enfocado principalmente en la solución de problemas, en los conceptos y los métodos para construir programas que razonen acerca de dichos problemas y que luego calculan una solución.

Durante los años sesentas, se dio un gran progreso de la IA con la realización de complejos programas de cómputo en los que se codifica el conocimiento de expertos en una materia concreta (análisis de crédito financiero, diagnostico de enfermedades, etc.) en forma de reglas de decisión, no obstante, hoy en día las computadoras son miles de veces más potentes que las de la época de los pioneros de la inteligencia artificial y sin embargo, pese a su gran potencia presentan problemas a la hora de abordar ciertas tareas del mundo real en las que la información que se presenta es masiva, imprecisa y distorsionada, por lo que para abordar este tipo de tareas, ha surgido como alternativa una serie de paradigmas de cómputo como los sistemas difusos, que basan su funcionamiento en la teoría de la lógica difusa.

En este sentido, en los sistemas digitales clásicos implementados con base en la lógica clásica o lógica booleana una proposición solamente puede ser verdadera o falsa, una cualidad está presente o no lo está mientras que en el mundo real las cosas no son necesariamente verdaderas o falsas. Según el criterio de un ser humano una habitación no solamente puede estar fría o caliente, sino que también puede definirse como helada, fría, fresca, templada, caliente o muy caliente. Los sistemas difusos pueden describirse como sistemas basados en lógica multivaluada que permite manejar estos conceptos borrosos o difusos típicos del mundo real y que emulan el tipo de razonamiento que los seres humanos realizamos con ellos, por ejemplo, suponiendo que nos encontramos enseñando a una persona a conducir un automóvil y al sentir inseguridad debido a que aumenta la velocidad del automóvil le diríamos al conductor aprendiz alguna de las siguientes expresiones "*frena un poco*" o "*disminuye un poco la velocidad*" la acción por parte del aprendiz que se obtendrá en respuesta a dichas declaraciones dependerá del grado de vaguedad con que dicho aprendiz las interprete**.**

En el mundo real las cualidades no aparecen perfectamente definidas sino que resultan más bien difusas o imprecisas por ejemplo solemos escuchar decir que el clima está templado por lo que resulta importante contar con la lógica difusa que se ocupe de estos conceptos imprecisos, como complemento de la lógica clásica tradicional.

1.2 HISTORIA DE LOS SISTEMAS DIFUSOS

El desarrollo formal de la teoría de conjuntos se dio en los inicios del siglo XIX con el trabajo de George Cantor. La teoría de conjuntos ha sido utilizada para establecer los fundamentos de las matemáticas y los métodos modernos de las pruebas o demostraciones matemáticas, sin embargo, dicha teoría no permite procesar o manipular información y datos afectados por incertidumbre e imprecisión no probabilística. En este contexto, la lógica difusa, es una extensión de las lógicas n-valuadas propuestas por Lukasiewicz en 1930 y que son a su vez extensión de la lógica trivaluada de Kosko quien propuso asignar valores de verdadero, falso e indeterminado, posteriormente en el año de

1965 Lofti A. Zadeh profesor de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de California en Berkeley introdujo una lógica que puede tomar una infinidad de valores de verdad ya que los mismos son asignados por medio de una función cuya imagen es el intervalo [0,1], caracterizando el concepto de conjunto difuso y por extensión la lógica difusa para representar matemáticamente el concepto de incertidumbre y vaguedad y proporcionar herramientas formales para trabajar con la imprecisión intrínseca en muchos problemas.

En este sentido cabe mencionar una paradoja surgida en la ancestral Grecia que ha causado problemas a los filósofos y matemáticos. Consideremos un “montón” de granos de arena, tomamos un grano de arena del mismo y el montón sigue estando allí. Entonces tomamos otro grano y posteriormente otro grano y así continúa el proceso. Eventualmente quedan 100 granos de arena y posteriormente 90, cuando queda un solo grano de arena que pasa con el “montón”, es decir, la cuestión que surge de lo anterior es ¿como saber a partir de cuantos granos arena se considera que es un montón?. Por otra parte aplicando el procedimiento al referirse a la riqueza de una persona considerando como ejemplo que una persona es rica si posee un millón de pesos. Que pasa con la riqueza de dicha persona si es que decide gastar 1 peso y luego 2 y así sucesivamente que pasa cuando esa persona ha gastado 100 pesos, ¿esa persona ha dejado de ser rica?.

En la teoría clásica de conjuntos tales dilemas son resueltos por medio del establecimiento de suposiciones. Para el caso del montón de arena se elige un numero n y si el numero de granos de arena es mayor o igual a n entonces los granos constituyen un “montón”, por lo que $n-1$ granos de arena no forman un “montón” de ninguna manera, pero ¿cómo definimos el número n apropiado?, podría ser 100, 1000, 1000,000 o mayor, lo que nos da a entender por sentido común que el concepto “montón” es vago o impreciso, e aquí la necesidad de una herramienta que pueda manejar los conceptos vagos o imprecisos, por lo que el concepto de conjunto difuso visto como una generalización de conjuntos de Cantor constituye, como ya se mencionó, la herramienta hasta hoy en día más adecuada para representar matemáticamente “incertidumbre y vaguedad” y que proporciona métodos formales para trabajar con la imprecisión intrínseca en muchos problemas.

Los conjuntos tradicionales (números enteros, naturales, reales, etc.) solamente nos permiten modelar variables que adquieren valores determinísticos, con un nivel de precisión dado, no admitiendo ambigüedades. Con los conjuntos de los números tradicionales podemos establecer relaciones del tipo “si o no” (pertenece o no a un conjunto), menor que o mayor que. La lógica convencional agrega relaciones del tipo verdadero o falso. La optimización determinística nos permite saber si una solución es o no factible, etc. Dichos modelos admiten una cierta precisión, lo que lleva a un modelo unívoco y sin incertidumbre.

El concepto de difuso o borroso (fuzzy) fue introducido por Lofti A. Zadeh en 1965, dicho concepto es cercano en relación con su significado a los términos vago, ambiguo, incierto e impreciso, existen diversas opiniones acerca del significado de dichos términos y de su uso indiscriminado en el lenguaje común, la filosofía y la lógica difusa, no obstante, el término difuso (fuzzy) está asociado al grado de asociación o de pertenencia de un elemento a un conjunto, el cual puede ser interpretado como grado de verdad. En este sentido, los objetos bajo el estudio de la lógica difusa admiten grados expresados por una función de pertenencia o por un conjunto difuso. Por lo tanto, los problemas y eventos de la realidad que involucran componentes etiquetados como vagos, ambiguos, inciertos o imprecisos son considerados para efectos del presente trabajo como problemas o eventos difusos si el grado de pertenencia o asociación es la herramienta para su descripción. En otras palabras vaguedad, imprecisión ambigüedad e incertidumbre son términos incluidos en el concepto de difuso (fuzzy).

Cabe destacar que la noción de conjuntos difusos es algunas veces considerada incorrectamente como probabilidad, sin embargo, a pesar de que hay similitudes hay que aclarar que son conceptos sustancialmente diferentes como veremos más adelante.

Como ya se mencionó, la teoría de conjuntos difusos parte de la teoría clásica de conjuntos, añadiendo a ésta una función de pertenencia la cual le asocia a cada elemento de un conjunto determinado, un número que va indicar el grado con que un elemento pertenece a dicho conjunto. Así se introduce el concepto de conjunto o subconjunto borroso asociado a un determinado valor lingüístico definido por una palabra, adjetivo o etiqueta lingüística.

Los conjuntos difusos permiten agrupar objetos o sucesos por el valor de una cierta magnitud, por ejemplo las personas pueden ser agrupadas por su altura así si utilizando la teoría clásica definimos el conjunto de las personas de estatura baja como aquellas que miden menos de 1.65m resulta que alguien de 1.64m es bajo mientras que una persona de 1.66m no lo es, lo cual no resulta perfectamente satisfactorio, ya que su estatura sólo difiere en 2 cm, por lo que una descripción en términos de conjuntos difusos es más adecuada en casos de este tipo, definiendo una función de pertenencia que nos indicaría que tan baja es una persona en torno al rango [0,1].

1.3 DEFINICIONES SOBRE CONJUNTOS DIFUSOS

De la teoría clásica de conjuntos, se observa que la pertenencia o inclusión de un objeto dentro de un conjunto determinado es un concepto preciso es decir el objeto es miembro del conjunto o no lo es simplemente, en este caso podemos hablar de una función de pertenencia que toma únicamente los valores 0 y 1.

Para describir una transición gradual Zadeh implementó funciones con imagen en el intervalo [0,1] y el concepto de grado de asociación o pertenencia.

Cabe señalar que de aquí en adelante nos referiremos a un conjunto de acuerdo a la teoría clásica al escribir únicamente la palabra conjunto a diferencia de conjunto difuso al cual se le especificará el adjetivo difuso o borroso.

1.3.1 CONJUNTOS DIFUSOS

La mayoría de los fenómenos que encontramos cada día son imprecisos, es decir, tienen implícito un cierto grado de vaguedad en la descripción de su naturaleza. Esta imprecisión puede estar asociada con su forma, posición, momento, color, textura, o incluso en la semántica que describe lo que son. En muchos casos, el mismo concepto puede tener diferentes grados de imprecisión en diferentes contextos o tiempo. Un día cálido en invierno no es exactamente lo mismo que un día cálido en primavera. La definición exacta de cuando la temperatura va de templada a caliente es imprecisa no podemos identificar un punto simple de templado, así que emigramos a un simple grado, la temperatura es ahora considerada caliente. Este tipo de imprecisión o difusidad asociado continuamente a los fenómenos es común en todos los campos de estudio: sociología, física, biología, finanzas, ingeniería, oceanografía, psicología, semiótica, etc.

1.3.2 IMPRECISIÓN.

Aceptamos la imprecisión como una consecuencia natural de cómo se perciben las cosas en el mundo. La dicotomía entre el rigor y la precisión del modelado matemático en todos los campos y la intrínseca incertidumbre de "el mundo real" no es generalmente aceptada por los filósofos. Nosotros simplemente aproximamos estos eventos a funciones numéricas y escogemos un resultado en lugar de hacer un análisis del conocimiento empírico. Sin embargo procesamos y entendemos de manera implícita la imprecisión de la información fácilmente. Estamos capacitados para formular planes, tomar decisiones y reconocer conceptos compatibles con altos niveles de vaguedad y ambigüedad. Considere las siguientes sentencias:

. La temperatura está caliente
. La inflación actual aumenta rápidamente
. Los grandes proyectos generalmente tardan mucho
. Alejandro es alto pero Ana no es bajita.

Estas proposiciones forman el núcleo de la forma en que percibimos el ambiente que nos rodea. Sin embargo, son incompatibles con el modelado tradicional y el diseño de sistemas de información. Si podemos incorporar estos conceptos logramos que los sistemas sean potentes y se aproximen más a la realidad.

Pero, ¿es la imprecisión un concepto artificial utilizado para aumentar o disminuir en una o más las propiedades de los fenómenos? o ¿es una parte intrínseca del fenómeno en sí mismo?

Esta es una pregunta importante ya que es la parte fundamental de las medidas de la teoría difusa. Como veremos la fusificación♦ es independiente de cualquier capacidad para medir, ya que un conjunto difuso es un conjunto que no tiene límites bien definidos. Un conjunto difuso tiene muchas propiedades intrínsecas que afectan la forma del conjunto, su uso y cómo participa en un modelo. Las propiedades más importantes de un conjunto difuso son las concernientes a las dimensiones verticales del conjunto difuso (altura y normalización) y las dimensiones horizontales (conjunto soporte y cortes alfa), mismos que se explican a detalle mas adelante.

♦ La fusificación establece una relación entre las variables no difusas, y sus correspondientes conjuntos difusos, en otras palabras es aplicar una función a las variables consideradas en la resolución de un problema que se resolverá utilizando la teoría de conjuntos difusos, para transformarlas en elementos pertenecientes a dichos conjuntos difusos.

1.3.3 DEFINICIÓN FORMAL DE UN CONJUNTO DIFUSO

Un conjunto difuso, es un conjunto en el cual la pertenencia de un elemento se define en forma difusa, es decir, considere a *C* como subconjunto del universo *U.* Un conjunto difuso *A* se define por un conjunto de pares ordenados y una relación binaria en la forma siguiente:

$$\mu_A : C \rightarrow [0,1] \qquad A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in C, \mu_A(x) \in [0,1] \} \tag{1.1}$$

donde $\mu_A(x)$ es una función denominada función de pertenencia o asociación la cual especifica el grado en el cual un elemento x en C pertenece al conjunto difuso A. La ecuación anterior asocia a cada elemento de x en C un número real $\mu_A(x)$ en el intervalo [0,1] el cual es asignado a x. Grandes valores de $\mu_A(x)$ indican alto grado de pertenencia o asociación del elemento x al conjunto difuso A. Cabe señalar que la función de pertenencia puede ser continua o discreta.

Por lo anterior, la función de inclusión o pertenencia de un conjunto difuso consiste de un conjunto de pares ordenados, por lo que un conjunto difuso A es formalmente igual a su función de pertenencia, es decir se puede identificar a un conjunto difuso con su función de pertenencia y el uso de esos dos conceptos es intercambiable.

De aquí que los conjuntos clásicos pueden ser considerados como un caso particular de la teoría de conjuntos difusos o viceversa, los conjuntos difusos como una extensión de la teoría clásica de conjuntos, lo anterior utilizando en el caso de conjuntos clásicos una función de pertenencia $\mu_A(x)$ que asigne los siguientes valores $\mu_A(x) = 1$ si $x \in A$ ó $\mu_A(x) = 0$ $x \notin A$.

1.3.4 CONJUNTOS DIFUSOS NORMALIZADOS

Se dice que un conjunto difuso es normalizado, cuando al menos alguna $x \in A$ tiene asociado el máximo grado de inclusión o pertenencia 1 de otra forma se dice que el conjunto no es normalizado y en esté caso se cumple que max $\mu_A(x) < 1$. Cabe destacar que es posible normalizar un conjunto difuso que no lo es lo cual se realiza mediante la normalización de su función de pertenencia dividiendo $\mu_A(x)$ entre max $\mu_A(x) < 1$.

1.3.5 CONJUNTO DIFUSO VACÍO

Se dice que un conjunto difuso es vacío si para toda $x \in A$ sucede que $\mu_A(x) = 0$.

1.3.6 CONJUNTO DIFUSO TIPO UNITARIO

Se llama conjunto difuso singleton a aquel cuya función de pertenencia toma el valor de 1 únicamente para uno de los elementos que pertenecen al conjunto y a todos los demás les asigna 0.

1.3.7 FORMAS DE REPRESENTAR A UN CONJUNTO DIFUSO

Existen diversas formas de denotar un conjunto difuso una de las cuales es:

$$A = \{(x_1, 0.1), (x_2, 0.5), (x_3, 0.3), (x_4, 0.8), (x_5, 1), (x_6, 0.2)\}$$

ó

$$A = \{\mu_A(x) / x \mid x \in C, \mu_A(x) \in [0,1]\ \}$$

mismo que puede ser representado como:

$$A = 0.1/x_1, 0.5/x_2, 0.3/x_3, 0.8/x_4, 1/x_5, 0.2/x_6$$

El conjunto difuso antes descrito consta de seis pares ordenados en donde los $x_i, i = 1,...,6$ son elementos que pertenecen al conjunto clásico $C = \{x_1,..., x_6\}$. Otra forma de interpretar a un conjunto difuso es por medio de una tabla como la que se muestra enseguida para representar al conjunto difuso anteriormente descrito en la forma siguiente:

$A =$ x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0.1	0.5	0.3	0.8	1	0.2

Destacando que el elemento x_5 pertenece completamente al conjunto A, mientras que el elemento x_1 es el elemento que pertenece en menor grado al conjunto A, en virtud de que $\mu_A(x_1) = 0.1$ siendo para este caso el valor más cercano a cero.

Otra forma de representar a un conjunto difuso es por medio de la gráfica de su función de pertenencia como se indica enseguida:

Considere el conjunto de los números cercanos a 10, y el conjunto difuso definido por la siguiente expresión:

$$A = \left\{(x, \mu_A(x)) \mid x \in [5,15], \mu_A(x) = \frac{1}{1+(x-10)^2}\right\}$$

en este caso la función de pertenencia $\mu_A(x_1)$ es una función continua la cual representa en forma difusa a los números reales cercanos a 10 tal como se muestra en la siguiente gráfica.

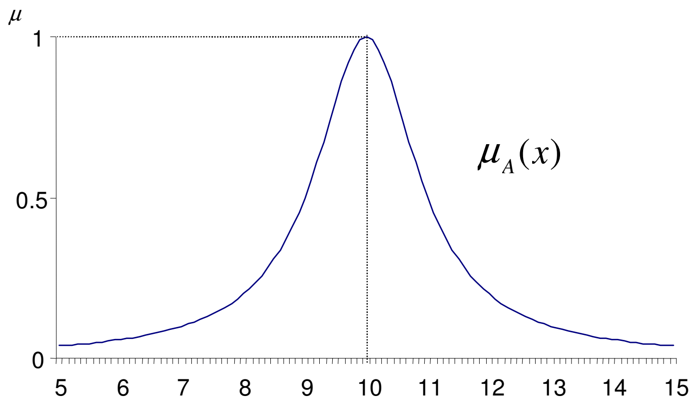


Fig.1 Números reales cercanos a 10

Los números enteros cercanos a 10 denotados por el conjunto difuso $A_2 = \{(7,0.1),(8,0.3),(9,0.8),(10,1),(11,0.8),(12,0.3),(13,0.1)\}$ se representan como se muestra en la siguiente figura:

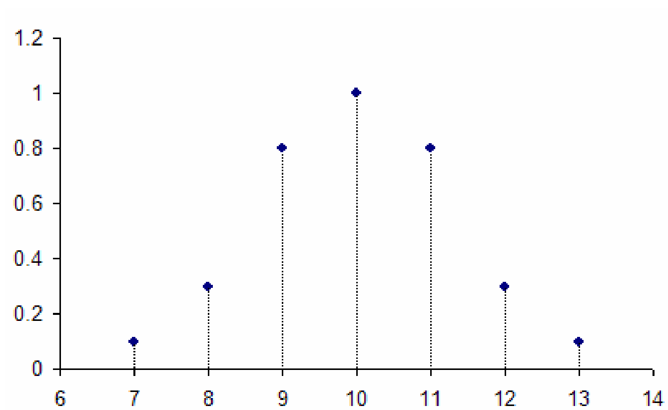


Fig.2 Números enteros cercanos a 10

1.3.8 DEFINICIÓN DE UN $\alpha - corte$.

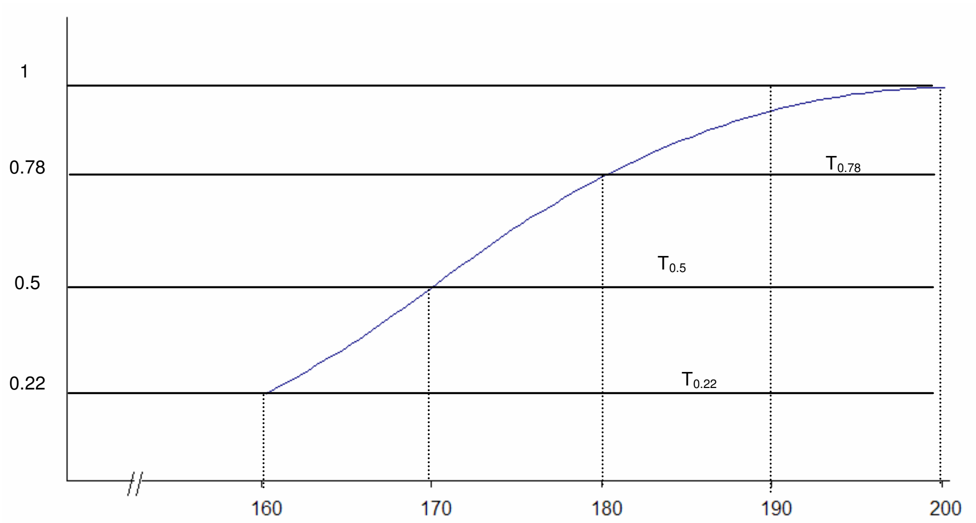
Se define un $\alpha - corte$ de un conjunto difuso denotado por A_α como el conjunto de todos los elementos del universo de referencia que pertenecen al conjunto difuso A en mayor grado que α es decir:

$$A_\alpha = \{x \mid x \in \Re, \mu_A(x) \geq \alpha\}, \qquad \alpha \in [0,1]$$

el cual se utiliza para establecer umbrales en una decisión o concepto modelado mediante un conjunto difuso. Por ejemplo considere el modelo que representa la estatura de una persona con el cual se describe lo "alta" que es una persona empleando el conjunto difuso $T = \{(x, \mu_T(x))\}$ en donde x representa la estatura de una persona medida en centímetros y suponiendo que $x \in [160,200]$, la función de pertenencia es la siguiente:

$$\mu_T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1800}(x-140)^2 & 160 \leq x < 170 \\ \dfrac{-1}{1800}(x-200)^2 + 1 & 170 \leq x \leq 200 \end{cases}$$

Cabe señalar que más adelante se describe la forma en que se definen las principales familias de funciones de pertenencia, por ahora de acuerdo a la definición del conjunto difuso anterior y observando su grafica correspondiente la cual se presenta enseguida, si la estatura de una persona es de 160cm es considerada dentro del grupo de las personas altas con un grado de 0.22, una persona con una estatura de 180cm pertenece al conjunto de personas altas con un grado de inclusión o pertenencia de 0.78.



En la gráfica anterior se observan que los $\alpha - cortes$ varían de 0.22 a 1 de los cuales se observan algunos en dicha figura, los cuales están dados por:

$$T_{0.22} = \{x \mid x \in \Re, 160 \leq x \leq 200, \mu_T(x) \geq 0.22\}$$

$$T_{0.5} = \{x \mid x \in \Re, 170 \leq x \leq 200, \mu_T(x) \geq 0.5\}$$

$$T_{0.78} = \{x \mid x \in \Re, 180 \leq x \leq 200, \mu_T(x) \geq 0.78\}$$

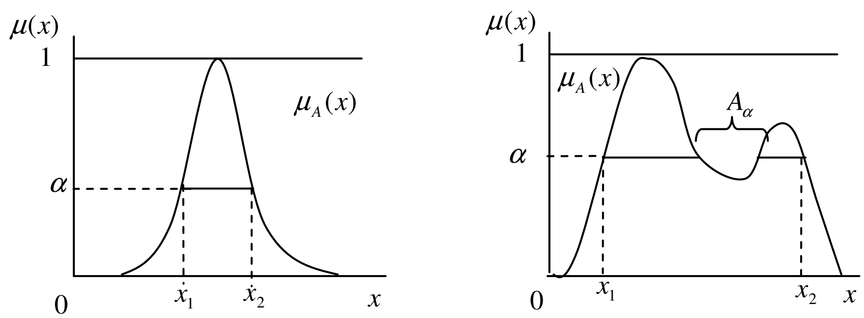
1.3.9 NÚCLEO DE UN CONJUNTO DIFUSO

Se define como núcleo de un conjunto difuso, al $\alpha - corte$ que presenta un grado de verdad igual a 1, es decir $N(A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) = 1\}$.

1.3.10 CONVEXIDAD DE UN CONJUNTO DIFUSO.

Un conjunto difuso A cuyo universo son los números reales es convexo (ver la figura de abajo), si la función de pertenencia es convexa para todos y cada uno de los A_α**,** es decir el conjunto difuso A es convexo si:

$$\forall x_1, x_2 \in A, \forall \lambda \in [0,1], \mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)).$$



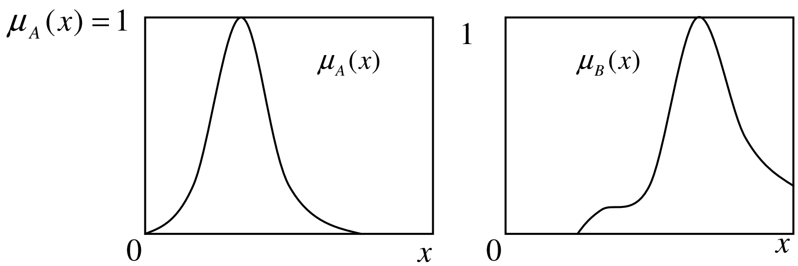
En este sentido, un conjunto difuso *A* es convexo si todos los puntos que forman el segmento de línea que une a cualquier par de puntos del conjunto son también puntos del conjunto difuso, es decir que dicho segmento no se corte tal y como se muestra en la figura anterior (derecha) en la que el segmento de línea que une a dos puntos del conjunto se corta, por lo que el conjunto de la izquierda es convexo y de la derecha no lo es.

1.4 OPERACIONES DE CONJUNTOS DIFUSOS

A los subconjuntos difusos, se les pueden aplicar determinados operadores, o bien pueden realizarse operaciones o establecerse relaciones entre ellos, al aplicar uno de los operadores descritos más adelante a un conjunto difuso, se obtiene otro conjunto difuso, asimismo al realizar una de dichas operaciones entre dos subconjuntos difusos, se obtiene otro conjunto difuso

Dados los conjuntos difusos A y B contenidos en el universo U donde,

$$A = \{(x, \mu_A(x)), \mu_A(x) \in [0,1]\}$$
$$B = \{(x, \mu_B(x)), \mu_B(x) \in [0,1]\}$$



Las gráficas mostradas arriba, representan la función de pertenencia de los conjuntos *A* y *B*, se eligió por conveniencia la forma que muestran dichas gráficas, a efectos de poder representar más fácilmente gráficamente algunas de las operaciones definidas para los conjuntos difusos mismas que se describen más adelante.

Las operaciones o relaciones entre A y B son definidas por medio de operaciones sobre sus funciones de pertenencia como se indica enseguida:

INCLUSIÓN

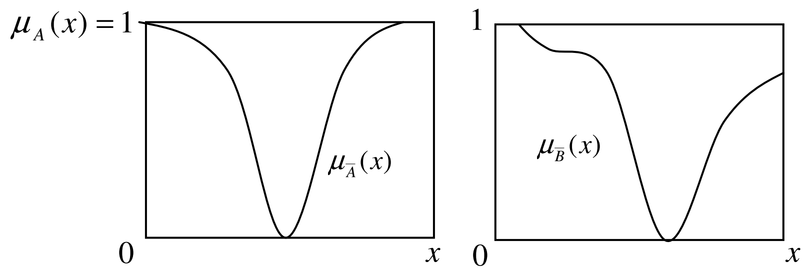
El conjunto difuso A está incluido en el conjunto difuso B, denotado por $A \subseteq B$ si $\forall x \in U$, $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.

IGUALDAD

Los conjuntos difusos A y B son iguales si y sólo si $\forall x \in U \quad \mu_A(x) = \mu_B(x)$.

COMPLEMENTACIÓN

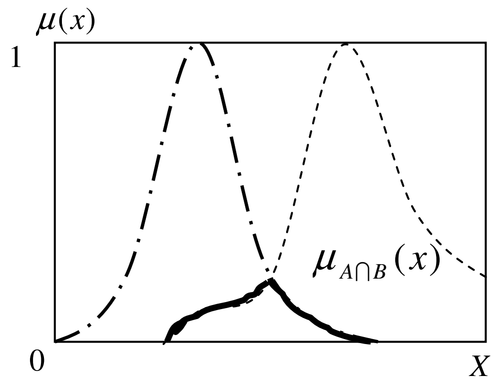
El conjunto difuso A^C es complemento del conjunto difuso A si $\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$. La función de pertenencia $\mu_{A^c}(x)$ es simétrica a $\mu_A(x)$ con respecto a la línea $\mu = 1/2$.



A diferencia de las graficas de los conjuntos *A* y *B,* mostradas en el apartado 1.4 del presente capítulo, las gráficas mostradas arriba representan a la función de pertenencias de los complementos de dichos conjuntos, en éstas se observa que en los valores extremos del eje de las *x* es donde la función de pertenencia toma valores cercanos a 1 y en el punto cercano a la mitad de la gráfica, la función de pertenencia toma un valor cero, es decir en las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos complemento de los ejemplos mostrados en las figuras de arriba se observan valores cercanos a cero en el intervalo en el que la función de pertenencia del conjunto principal muestra valores cercanos 1 y viceversa.

INTERSECCIÓN

La operación de intersección entre A y B denotada por $A \cap B$ está definida por: $\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$.



Ejemplo: Considere el universo $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, y los conjuntos difusos *A* y *B* definidos de la siguiente forma:

$$A=\{(x_1,0.2),(x_2,0.7),(x_3,1),(x_4,0)\}$$

$$B=\{(x_1,0.5),(x_2,0.3),(x_3,1),(x_4,0.1)\}$$

Por lo que la intersección de los conjuntos esta dada de la siguiente forma:

$$\mu_{A\cap B}(x)=\min(\mu_A(x),\mu_B(x)),x\in U$$

y sustituyendo se tiene:

$$\mu_{A\cap B}(x)=\{(x_1,0.2),(x_2,0.3),(x_3,1),(x_4,0)\}$$

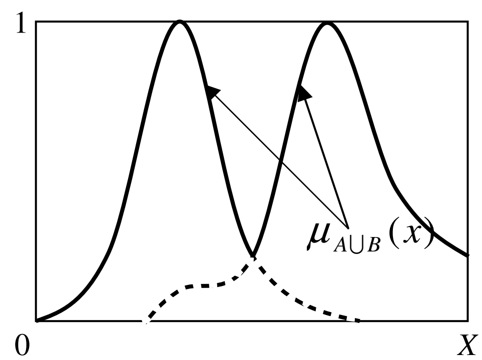
UNIÓN

La operación de unión entre A y B denotada por $A\cup B$ está definida por: $\mu_{A\cup B}(x)=\max(\mu_A(x),\mu_B(x))$.

Para el caso de los conjuntos descritos en el ejemplo anterior, la unión queda descrita como sigue:

$$\mu_{A\cup B}(x)=\{(x_1,0.5),(x_2,0.7),(x_3,1),(x_4,0.1)\}$$

En forma general la gráfica de la unión se representa en la siguiente figura:



T-NORMAS, T-CONORMAS.

Las funciones utilizadas para definir la intersección entre conjuntos difusos, son conocidas como *t-normas,* una t-norma *T:X->Y* es una función $z = T(a,b), 0 \le a,b,z \le 1$, la cual cumple con las cuatro siguientes propiedades:

1.- $T(a,1) = a$

2.- $T(a,b) = T(b,a)$

3.- $b_1 \le b_2 \rightarrow T(a,b_1) \le T(a,b_2)$

4.- $T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c)$

En este sentido, de la propiedad 1 se desprende que $T(1,1) = 1$, $T(0,1) = 0$, asimismo, de la propiedad 2 se observa que también $T(1,0) = 0$, adicionalmente de la propiedad 3 se advierte que al ser $0 \le 1$ implica que $T(0,0) \le T(0,1) = 0$ y que $T(0,0) = 0$, por lo que la función del mínimo descrita anteriormente, es una T-norma.

Análogamente, las funciones utilizadas para definir la unión entre conjuntos difusos, son conocidas como *t-conormas,* una t-conorma *C* es una función $z = C(a,b), 0 \le a,b,z \le 1$, la cual cumple con las cuatro siguientes propiedades:

1.- $C(a,0) = a$

2.- $C(a,b) = C(b,a)$

3.- $b_1 \le b_2 \rightarrow C(a,b_1) \le C(a,b_2)$

4.- $C(a, C(b,c)) = C(C(a,b),c)$

Por lo que *C* definida por medio de la función máximo, cumple análogamente a la definición de la intersección, con las propiedades de las T-conormas, requeridas para la definición de la unión entre dos conjuntos difusos.

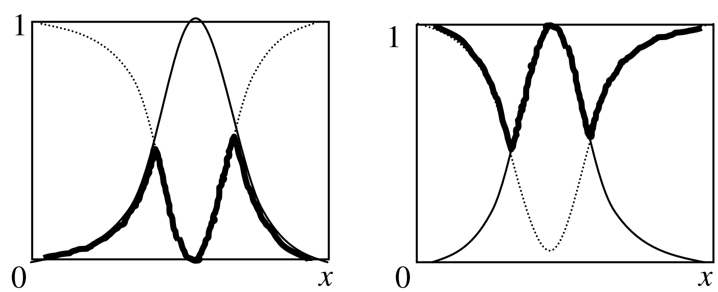
Las funciones correspondientes a la definición de la intersección y la unión entre subconjuntos difusos pueden estar definidas por otras t-normas o t-conormas, según sea el caso, distintas a las indicadas anteriormente, no obstante algunas de las t-normas y t-conormas más utilizadas son:

t-normas	**t-conormas**
min(a,b)	*max(a,b)*
(ab)	*(a+b-ab)*
max(0,a+b-1)	*min(1,a+b)*

En el presente trabajo las funciones que se utilizarán para la definición de la intersección y la unión entre subconjuntos difusos serán respectivamente las funciones *min(a,b) y max(a,b)*.

LEY DEL TERCERO EXCLUIDO

A diferencia de la teoría clásica de conjuntos, en la que se cumple la ley del tercero excluido que señala que $A \cap A^C = \varnothing$, así como que $A \cup A^C = U$ en conjuntos difusos la ley del medio excluido no es válida tal y como se muestra en la siguiente figura:



$A \cap A^C \neq \varnothing$ $A \cup A^C$

1.5 NUMEROS DIFUSOS

El concepto de número difuso es gran importancia dentro de los sistemas difusos, en los siguientes párrafos se habla acerca de la definición de los números difusos asimismo, se da a conocer los más utilizados así su aritmética y las propiedades de los números reales trasladadas a los números difusos. Los números difusos son subconjuntos difusos de números reales.

Un número difuso es definido sobre el universo de los números reales como un conjunto difuso normalizado y convexo, la figura (a) y figura (b) que se muestran enseguida representan números difusos. Cabe destacar que los números difusos son la principal herramienta de la lógica difusa para estimar cantidades o montos observados en forma difusa. Dentro del concepto de número difuso muchos autores establecen diferencia entre los números difusos propiamente dichos, para los cuales el núcleo es un valor real y los intervalos difusos, para los cuales el núcleo es un intervalo de confianza.

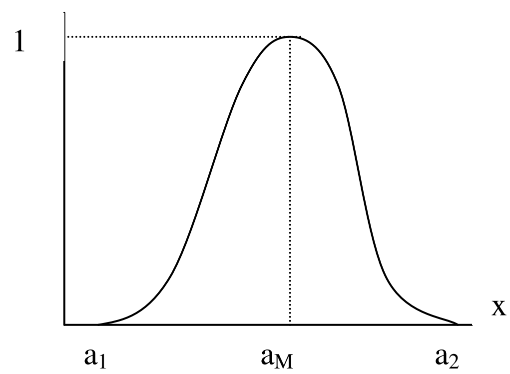


Figura (a)

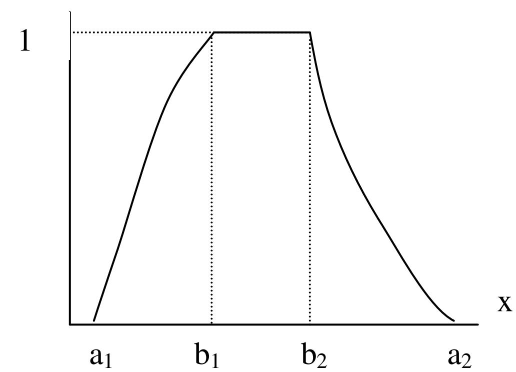


Figura (b)

El intervalo $[a_{1,}a_2]$ es llamado intervalo de soporte de un número difuso (el conjunto soporte está formado por aquellos puntos en los cuales la función de pertenencia es diferente de cero), por otra parte, en el caso de la figura (a) $x=a_M$ representa el máximo. Por su parte la figura (b) tiene todo un segmento máximo representado por la parte plana de dicha figura en el cual el valor de la función de pertenencia es igual a 1.

Diversas métodos se han aplicado para construir funciones de pertenencia de números difusos, de las cuales cabe destacar las siguientes:

- Evaluación subjetiva y construcción a partir de expertos: en esta estrategia los conjuntos difusos pueden determinarse a partir del conocimiento de expertos en el dominio de aplicación. Estos simplemente dibujan o especifican diferentes curvas de pertenencia de las cuales eligen una. En algunos casos, la elección puede estar determinada mediante métodos que tienen su base en la Psicología, Inteligencia Artificial Distribuida y Sistemas Multiagente♦.

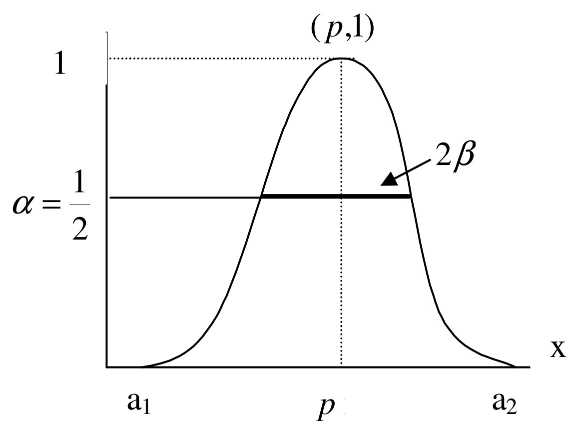
- Frecuencias convertidas o probabilidades: algunas veces, la información tomada a partir de histogramas de frecuencia u otras curvas de probabilidad se emplea como base para construir la función de pertenencia. Existe una gran variedad de métodos de conversión posibles y cada uno posee sus propias fortalezas y debilidades, tanto matemáticas como metodológicas. Sin embargo, es necesario recordar que las funciones de pertenencia, salvo que así se especifique, no son funciones de densidad probabilística.
- Medición física: muchas aplicaciones de lógica borrosa usan la medición física, pero casi ninguna mide el grado de pertenencia directamente. En su lugar, la función de pertenencia se obtiene mediante otro método y los grados de pertenencia individuales se calculan a partir de ella.
- Aprendizaje y adaptación: la aplicación de las técnicas de aprendizaje automatizado posibilitan construir de forma automática a partir de datos numéricos y simbólicos las funciones de pertenencia, generalmente las funciones de pertenencia construida por esta vía son representadas como modelos matemáticos lineales.

En general existen numerosas formas de representar las funciones de pertenencia; existiendo una estrecha relación entre la forma de representación, los distintos enfoques que se siguen en la construcción de las funciones de pertenencia y la naturaleza del problema que ellas representan, no obstante en el caso de la construcción de números difusos las funciones de pertenencia más utilizadas son familias de funciones a las cuales se les atribuye el nombre que reciben los siguientes números difusos.

♦ Se define la Inteligencia Artificial Distribuida como aquella parte de la IA que se centra en comportamientos inteligentes colectivos que son producto de la cooperación de diversos agentes. Estos agentes, son las entidades que colaboran en este sentido, un sistema multiagente es un sistema distribuido en el cual los elementos son sistemas de inteligencia artificial, o bien un sistema distribuido donde la conducta combinada de dichos elementos produce un resultado en conjunto inteligente.

1.5.1 NÚMEROS DIFUSOS CUADRÁTICOS

Un número difuso cuadrático está representado gráficamente por una campana simétrica con respecto a la línea $x = p$ y tiene un intervalo de soporte $A = [a_1, a_2]$, y está caracterizada por dos parámetros $p = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ y por $\beta \in (0, a_2 - p)$. El punto máximo es $(p,1)$; el segmento cuya longitud se muestra en la figura y que es igual a 2β es denominado ancho de banda y se define como el segmento o $\alpha - corte$ situado en el nivel $\alpha = 1/2$ situado entre los puntos $(p - \beta, 1/2)$ y $(p + \beta, 1/2)$. La función de pertenencia antes descrita se muestra en la siguiente figura:



La interpretación del número difuso de la figura anterior, describe al conjunto difuso de los números reales *cercanos* a *p,* puesto que, la palabra cercano es vaga, en el sentido de los conjuntos difusos la determinación el conjunto de los números reales cercanos a *p* depende de la selección de un intervalo de soporte y de un ancho de banda que sean supuestos dependiendo de la situación particular que se desea modelar o describir a través del número difuso de referencia. Cabe señalar que de está función puede ser aplicada al caso descrito en el punto 1.3.8 en el que se describe que tan alta es una persona y su función de pertenencia o inclusión está dada por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(p-\beta-a_1)}(x-a_1)^2 & a_1 \le x < p-\beta \\ \dfrac{-1}{2\beta^2}(x-p)^2 + 1 & p-\beta \le x < p+\beta \\ \dfrac{1}{2(p+\beta-a_2)}(x-a_2)^2 & p+\beta \le x \le a_2 \\ 0 & o.c. \end{cases}$$

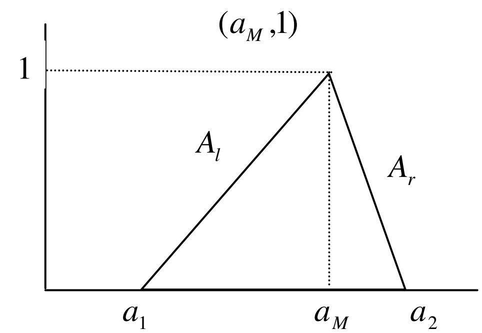
La gráfica anterior se es también conocida como la gráfica de una función beta.

1.5.2 NÚMEROS DIFUSOS TRIANGULARES

Se denomina número difuso triangular aquel cuya función de pertenencia está definida por funciones de tipo triangulares, las cuales pueden o no ser simétricas y están determinadas por tres parámetros como se muestra a continuación:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{a_M - a_1} & a_1 \le x \le a_M \\ \dfrac{x-a_2}{a_M - a_2} & a_M \le x \le a_2 \\ 0 & o.c. \end{cases}$$

donde $[a_1, a_2]$ es el intervalo de soporte y el punto máximo de la función de pertenencia, se localiza en $(a_M, 1)$, el cual se muestra en la figura siguiente:



Gráfica: Número difuso triangular.

Las aristas del triángulo indican un descenso lineal del grado de pertenencia a partir del punto a_M y hasta que el grado de pertenencia llega a ser cero.

La siguiente función de pertenencia corresponde a lo que se denomina un número difuso triangular central y esta dada por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 2\dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \le x \le \dfrac{a_1+a_2}{2} \\ 2\dfrac{x-a_2}{a_1-a_2} & \dfrac{a_1+a_2}{2} \le x \le a_2 \\ 0 & o.c. \end{cases}$$

Análogamente a los números difusos cuadráticos, los números difusos triangulares resultan útiles para representar, entre otras, a la variable lingüística "cercano a", en este sentido, los números difusos son utilizados en diversas aplicaciones, debido a que tienen una función de pertenencia descrita por dos segmentos de línea unidos en el punto $(a_M, 1)$, lo cual hace más simple la representación gráfica y las operaciones con dichos números.

Cabe destacar que los números difusos triangulares quedan perfectamente definidos con tres números reales que indican las abscisas de los vértices; las ordenadas se obtienen por la propia definición del número difuso, los valores de los extremos están a altura cero y el valor central estará a uno, de este modo, un número difuso triangular que queda perfectamente representado por:

$$A_{triang} = (a_1, a_M, a_2).$$

Un numero difuso triangular central, es simétrico con respecto al eje μ, si $a_1 = -a$ $a_2 = a$, por lo que $a_M = 0$, y de acuerdo a la notación anterior, éste queda denotado por

$A_{triang} = (-a,0,a)$. Resulta importante señalar que los números difusos triangulares centrales es conveniente utilizarlos para expresar la variable lingüística “pequeño”, es decir, el segmento derecho de la función de pertenencia de un número triangular central, esto es cuando $0 \le x \le a$, puede describir por ejemplo a las variables “poco riesgo” y “pequeñas ganancias”.

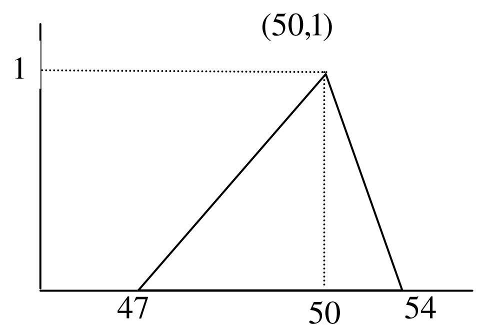
En forma más general, los segmentos izquierdo y derecho de un número triangular, pueden ser denotados en forma separada como dos números triangulares independientes cada uno, denotados correspondientemente por $A^l = (a_1, a_M, a_M)$ y $A^r = (a_M, a_M, a_2)$ los cuales se denominan números triangular izquierdo y triangular derecho, respectivamente, destacando que los números de tipo triangular izquierdo (L), pueden ser utilizados para describir variables como “grandes utilidades” ó “alto riesgo”.

Existen números difusos a los que se les llama L-R ya que se construyen a partir de concebir a la función de pertenencia de un número difuso como una función formada por una parte izquierda (L) y una parte derecha (R), de modo que la función de pertenencia de un número difuso L-R, es una función compuesta por una parte que define el lado izquierdo y una que define el lado derecho de un cierto valor del dominio de la función. Tal y como se indica en el párrafo anterior, los números triangulares, así como los números trapezoidales, mismos que se describen en el siguiente apartado, pertenecen a este grupo (partes derecha e izquierda son funciones lineales), por lo que son muy utilizados. Los números L-R son una superclase de casi todos los tipos de números difusos.

Como ejemplo de aplicación de los números difusos triangulares dentro de un modelo económico , supongamos que un experto en el análisis y valuación de proyectos de inversión desea estimar el flujo de un proyecto de inversión real que se desea iniciar. Por su experiencia en proyectos similares, sus conocimientos etc., sí que podría intuir, por ejemplo, que los ingresos correspondientes al primer ejercicio de operación puede ser “aproximadamente 50 millones de pesos”. Una forma de representar razonablemente esta cuantía sería cuantificarla a través de un número borroso A ="aproximadamente 50 millones de pesos", cuya función de pertenencia podría ser:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-47}{3} & 47 \leq x \leq 50 \\ \dfrac{x-54}{-4} & 50 < x \leq 54 \\ 0 & o.c. \end{cases}$$

Por lo que la representación gráfica de la expresión "aproximadamente 50 millones de pesos" es:

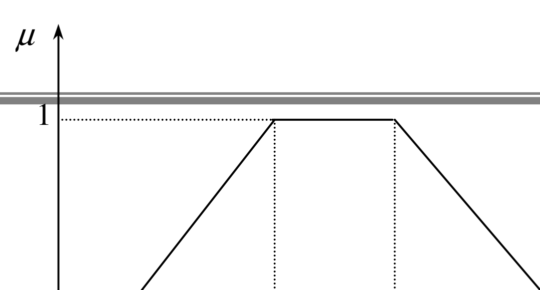


1.5.3 NÚMEROS DIFUSOS TRAPEZOIDALES

Un número difuso trapezoidal está definido sobre los números reales por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{b_1-a_1} & a_1 \leq x \leq b_1 \\ 1 & b_1 \leq x \leq b_2 \\ \dfrac{x-a_2}{b_2-a_2} & b_2 \leq x \leq a_2 \\ 0 & o.c. \end{cases}$$

Los números difusos trapezoidales son un caso especial de número difuso en cuya gráfica se observa una parte plana en el cual, tal y como se muestra en la siguiente figura, el intervalo de soporte esta dado por $A=[a_1,a_2]$ y el segmento plano en el alfa corte $\alpha=1$ tiene proyección $[b_1,b_2]$ sobre el eje x, tal y como se muestra en la gráfica de abajo. Al igual que para la descripción de los números difusos triangulares, se puede representar a un número difuso trapezoidal, denotándolo por $A_t=(a_1,b_1,b_2,a_2)$.



1.6 RELACIONES DIFUSAS.

Considere el producto cartesiano de dos conjuntos clásicos

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

en los que *A* y *B* son subconjuntos de los conjuntos universales *U_1 y U_2,* respectivamente, una relación difusa sobre *A×B* denotada por R *o* $R(x, y)$ se define como el conjunto

$$R = \{((x, y), \mu_R(x, y)) \mid (x, y) \in A \times B, \mu_R(x, y) \in [0,1]\}$$

En donde la función $\mu_R(x, y)$ es la función que asigna un número real comprendido en el intervalo [0,1] como el grado de pertenencia de cada par ordenado de la relación asociado a cada par ordenado en $A \times B$. En este sentido el grado de pertenencia indica el grado en el cual x está relacionada con y, se asume que $\mu_R(x, y)$ es una función de tipo continuo o discreto en el dominio $A \times B$ y que describe en forma gráfica, en el caso de las relaciones de tipo continúo una superficie en un espacio de representación gráfica tridimensional.

La definición anterior representa la generalización de la definición de un conjunto difuso representada en un espacio de dos dimensiones $(x, \mu_A(x))$ a un conjunto difuso de un espacio tridimensional $(x, y, \mu_A(x, y))$.

Cabe destacar el enorme potencial que existe en la relación difusa descrita anteriormente a diferencia de la relación definida en la teoría clásica de conjuntos en la cual se fundamenta, toda vez que relaciona a las variables *x,y,* dada la función de pertenencia $\mu_R(x, y)$, la cual asigna valores específicos a cada par *(x,y).*

En esencia las relaciones lingüísticas que pueden ser descritas mediante el uso o implementación de relaciones difusas apropiadas son por ejemplo *“x es mucho mas grande que y”, “x es cercana a y”, “x es relevante para y”, “tanto x como y son mas o menos iguales”, “x es muy lejana a y”, etc.*

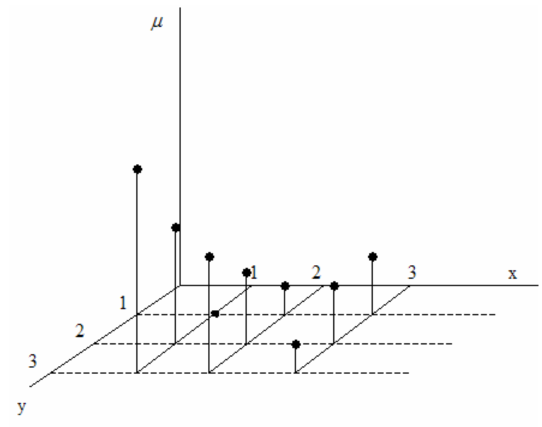
Otra forma de describir una relación difusa es a través de una matriz y de su representación gráfica en un espacio tridimensional tal y como se muestra en el siguiente ejemplo considere la relación difusa consistente en un número finito de pares ordenados.

$$R = \begin{Bmatrix} ((x_1, y_1),0), ((x_1, y_2),0.1), ((x_1, y_3),0.2) \\ ((x_2, y_1),0.7), ((x_2, y_2),0.2), ((x_2, y_3),0.3) \\ ((x_3, y_1),1), ((x_3, y_2),0.6), ((x_3, y_3),0.2) \end{Bmatrix}$$

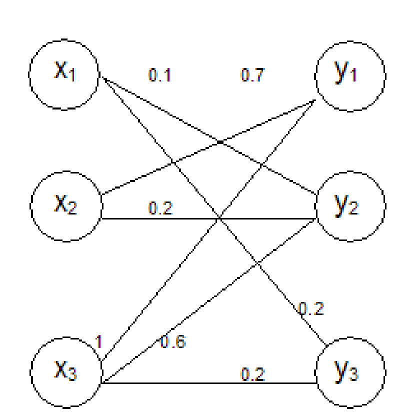
La expresión anterior para una relación difusa también queda descrita por la siguiente tabla:

$\mu_R(x,y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.0	0.1	0.2
x_2	0.7	0.2	0.3
x_3	1.0	0.6	0.2

Se puede representar la relación a través de una gráfica en un espacio tridimensional tal y como se muestra en la siguiente figura:



Otra forma de representar las relaciones difusas es a través de la siguiente gráfica, en la cual los números en los segmentos representan el grado de pertenencia:



Relación difusa

1.6.1 OPERACIONES BÁSICAS SOBRE RELACIONES DIFUSAS

Las operaciones sobre relaciones difusas son análogas a las operaciones sobre subconjuntos difusos, es decir la intersección, unión y complementación de conjuntos definidos por relaciones difusas son similares a las antes señaladas, no obstante en este caso la diferencia radica en que la función de pertenencia es una función que depende de dos variables.

De esta forma tenemos que dadas R_1 y R_2 relaciones difusas definidas sobre $A \times B$ tales que

$$R_1 = \{(x, y), \mu_{R_1}(x, y)\} \qquad (x, y) \in A \times B$$

$$R_2 = \{(x, y), \mu_{R_2}(x, y)\} \qquad (x, y) \in A \times B$$

La intersección de R_1 y R_2 se define como:

$$\mu_{R_1 \cap R_2} = \min(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y))$$

Por su parte la unión entre R_1 y R_2 se define como :

$$\mu_{R_1 \cup R_2} = \max(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y))$$

Asimismo, existe otra relación entre subconjuntos difusos denominada producto directo. Considere los conjuntos difusos *A* y *B*

$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid \mu_A(x) \in [0,1] \ \}$

$B = \{(y, \mu_B(y)) \mid \mu_B(y) \in [0,1] \ \}$

definidos sobre $x \in C \subset U_1$ así como $y \in D \subset U_2$

El producto directo mínimo denotado por $A \underset{\bullet}{\times} B$ se define como:

$A \underset{\bullet}{\times} B = \{[(x, y), \min(\mu_A(x), \mu_B(y))] \mid (x, y) \in C \times D \ \}$

3.3 Análogamente, el producto directo máximo denotado por $A \overset{\bullet}{\times} B$ se define como:

$A \overset{\bullet}{\times} B = \{[(x, y), \max(\mu_A(x), \mu_B(y))] \mid (x, y) \in C \times D \ \}$

3.3.1 Ejemplo dados los conjuntos difusos *A* y *B* siguientes:

$$A = \{(x_1,0),(x_2,0.1),(x_3,1)\}$$
$$B = \{(y_1,0.3),(y_2,1),(y_3,0.2),(y_4,0.1)\}$$

3.3.2 El producto directo mínimo y el producto directo máximo se determinan como sigue:

$A \underset{\bullet}{\times} B$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0	0
x_2	0.1	0.1	0.1	0.1
x_3	0.3	1	0.2	0.1

$A \overset{\bullet}{\times} B$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.3	1	0.2	0.1
x_2	0.3	1	0.2	0.1
x_3	1	1	1	1

Hasta aquí se han descrito los antecedentes sobre la teoría sobre conjuntos difusos, de lo cual se desprende la definición de los denominados números difusos, mismos que constituyen un concepto importante en dicha teoría, ya que su implementación en los modelos matemáticos que involucran a la teoría de conjuntos difusos, permite realizar operaciones aritméticas y definir conceptos como promedio y promedio ponderado difusos, los cuales se describen más adelante.

CAPÍTULO 2
CONCEPTOS DE LOGICA DIFUSA

En este capítulo se da una breve descripción de la lógica clásica en comparación con las lógicas multivaluadas, así como las funciones de verdad utilizadas tanto en la lógica clásica como su extensión a las lógicas multivaluadas, destacando que en estas últimas las proposiciones tienen más de dos valores de verdad a diferencia de la forma de evaluar las proposiciones en el contexto de la lógica clásica en la que las proposiciones sólo pueden ser verdaderas o falsas.

En este sentido se describe como es que la lógica difusa proporciona una metodología o un marco conceptual para tratar con variables lingüísticas imprecisas e incluir modificadores tales como “muchísimo”, “muy” , “bastante”, etc., para facilitar el razonamiento de proposiciones derivadas del lenguaje natural ayudando como herramienta en la toma de decisiones y en la implementación de acciones de control dentro de muy diversas disciplinas.

Al igual que la lógica clásica, la lógica difusa, se ocupa del razonamiento formal con proposiciones, pero a diferencia de la teoría clásica, las proposiciones pueden tomar valores intermedios entre verdadero y falso. De la misma forma que se define un isomorfismo entre la lógica y la teoría de conjuntos clásica, es posible definir también un isomorfismo, como más adelante se explica, entre la lógica difusa y la teoría de conjuntos difusos, y de éstas a su vez con el Álgebra de Boole♦. En este sentido, los conjuntos

♦ El matemático ingles George Boole desarrollo una lógica simbólica para aclarar la difícil lógica aristotélica, la idea básica de Boole consiste en que las proposiciones pueden representarse por medio de símbolos precisos, por lo que las relaciones entre dos o más proposiciones pueden leerse en forma tan exacta como una ecuación algebraica (álgebra booleana).

difusos también representan predicados en la lógica difusa de proposiciones, por lo que ésta, proporciona un soporte formal al razonamiento basado en el lenguaje natural, que se caracteriza por tratarse de un razonamiento de tipo aproximado, el cual hace uso de proposiciones que expresan información de carácter impreciso.

2.1 CONCEPTOS DE LOGICA CLASICA

Proposición

Una proposición es una oración declarativa que puede ser calificada como verdadera (1) o falsa (0) según corresponda, asimismo una proposición puede ser una expresión matemática misma que puede asumir uno de los dos valores, verdadero o falso.

Ejemplo considere las siguientes sentencias que se presentan dentro del ámbito económico financiero tales como: *"La evolución del mercado accionario es independiente de la tasa de inflación"* , lo cual resulta ser una proposición falsa.
"La oferta monetaria es un indicador económico", oración que resulta ser una proposición verdadera.

Sin embargo, si consideramos la expresión "el precio de un producto es x pesos donde x>100", esta no es una oración que dentro del contexto de la lógica clásica pueda ser calificada como verdadera o falsa, por lo que no es una proposición.

Conectivos lógicos

Considere las proposiciones p y q cuyos valores de verdad pertenecen al conjunto {0,1} a continuación se detalla la forma de evaluar sus conectores lógicos

Negación

Negación de *p* denotada por $\overline{p}$ resulta ser verdadera cuando *p* es falsa y viceversa.

$$\overline{p} = 1 - p$$

Conjunción

Conjunción de *p* y *q* denotada de como $p \wedge q$ resulta ser verdadera sólo cuando *p* y *q* son ambas verdaderas.

$$p \wedge q = \min(p, q)$$

Disyunción

Disyunción de *p* y *q* denotada como $p \vee q$ que resulta ser verdadera cuando *p* o *q* son verdaderos o cuando ambas proposiciones son verdaderas.

$$p \vee q = \max(p, q)$$

Implicación

La operación más importante para el desarrollo y creación de reglas lógicas es la implicación, que representa el "entonces" de las reglas heurísticas: “si (...) entonces (...)”.

La proposición *p* implica a *q* denotada por $p \rightarrow q$, es falsa sólo cuando *p* es verdadera y *q* es falsa de cualquier otra forma resulta verdadera.

$$p \rightarrow q = \min(1, 1 + q - p)$$

En este sentido, cabe destacar que los valores de verdad de las proposiciones compuestas señaladas anteriormente está determinado sólo por los valores de verdad de cada una de las proposiciones *p* y *q* y una forma muy útil para la evaluación de las proposiciones es el uso de tablas de verdad tal y como se muestra en la tabla siguiente:.

p	q	$\overline{p}$ $1-p$	$p \wedge q$ $\min(p,q)$	$p \vee q$ $\max(p,q)$	$p \rightarrow q$ $\min(1,1+q-p)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1

Aquí, se muestran los valores que resultan de evaluar las proposiciones lógicas *p* y *q* haciendo uso de las definiciones surgidas en la teoría de la lógica difusa para cada uno de los conectivos lógicos, con lo que se observan los mismos resultados que se obtienen al evaluar las proposiciones en forma simple con el uso de la lógica tradicional.

Tautología

Una tautología es una proposición compuesta cuyo valor es siempre verdadero independientemente del valor de las proposiciones que la forman.

Contradicción

Una contradicción es, en oposición a una tautología, una proposición compuesta cuyo valor es siempre falso independientemente de los valores de las proposiciones simples que la componen.

Predicado

Dentro del contexto de la lógica se denomina predicado a una sentencia declarativa que contiene una o más variables desconocidas, por lo que un predicado no es ni verdadero ni falso y no es una proposición lógica. Los predicados comúnmente se denotan como *p(x) o q(x,y),* donde *x* y *y* son variables, los predicados también son llamados funciones lógicas, si se asigna un valor fijo a cada una de las variables del predicado, entonces el predicado se convierte en una proposición, debido a esto los predicados están estrechamente relacionados con las proposiciones, en este sentido, los predicados son considerados como proposiciones generalizadas o indefinidas, por ejemplo la expresión x+3 = 5 es un predicado, el cual depende del valor que x tome para poder evaluarlo como verdadero o falso.

2.2 ISOMORFISMO ENTRE LA LÓGICA CLÁSICA Y LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Existe una correspondencia entre los conectivos lógicos y las operaciones de conjuntos, con lo cual cualquier resultado de la teoría de conjuntos tiene su contraparte en la lógica clásica, derivado de dicho isomorfismo, resulta sencillo abordar o modelar problemas en la teoría de conjuntos, apoyados en las bases teóricas de la lógica clásica. La correspondencia entre los conectivos lógicos y las operaciones entre conjuntos se muestra en la siguiente tabla:

Lógica	Teoría de conjuntos
$\vee$	$\cup$
$\wedge$	$\cap$
-	-
$\rightarrow$	$\subseteq$

2.3 LOGICA MULTIVALUADA

Desde los inicios del desarrollo de la lógica clásica han surgido inquietudes acerca del principio que establece que una proposición lógica es verdadera o falsa, una de las razones es que con referencia en dicho principio es difícil establecer valores de verdad a proposiciones que expresan eventos futuros como por ejemplo "*Mañana va a subir la cotización del dólar",* a los eventos futuros no se les puede calificar como verdaderos o falsos, ya que su valor de verdad es desconocido en el momento en que se formula la proposición. La lógica clásica que contempla únicamente dos posibles valores de verdad no resulta suficiente para describir el valor de verdad de ese tipo de proposiciones.

La primera formulación sistemática de una alternativa a la lógica bivalorada de Aristóteles fue formulada por J. Lukasiewicz entre 1917 y 1920. Este autor introdujo un tercer valor de verdad, que podriamos describir con el término "posible" y formuló consecuentemente una lógica trivaluada . Lukasiewicz asignó un valor numérico entre 0 y 1 al termino posible y construyo las matemáticas correspondientes a esa lógica trivalorada. Adicionalmente Lukasiewicz propuso una notación completa y un sistema axiomático a partir del cual esperaba derivar una "matemática moderna".

Lukasiewicz exploró posteriormente la posibilidad de manejar lógicas con cuatro, cinco, o más valores de verdad, llegando a la conclusión de que no existía un impedimento formal para la derivación de una lógica con un número infinito de valores de verdad. Esta lógica sería completamente formalizada hacia 1930.

Lukasiewicz consideraba que la lógica trivalorada y la infinito-valuada eran las más interesantes desde el punto de vista de sus propiedades, si bien la tetravalorada era la más fácilmente adaptable a los postulados aristotélicos clásicos.

Como ejemplo asumimos que en el contexto de la lógica trivaluada el valor neutral dentro del conjunto de posibles valores con los que puede ser calificada una proposición son

{0,0.5,1}, por lo que la tabla de verdad para las proposiciones vistas anteriormente en el contexto de la lógica es la siguiente:

p	q	$\overline{p}$ $1-p$	$\overline{q}$ $1-q$	$p \wedge q$ $\min(p,q)$	$p \vee q$ $\max(p,q)$	$p \rightarrow q$ $\min(1,1+q-p)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0.5	0	0.5	0.5	1	0.5
1	0	0	1	0	1	0
0.5	1	0.5	0	0.5	1	1
0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1
0.5	0	0.5	1	0	0.5	0.5
0	1	1	0	0	1	1
0	0.5	1	0.5	0	0.5	1
0	0	1	1	0	0	1

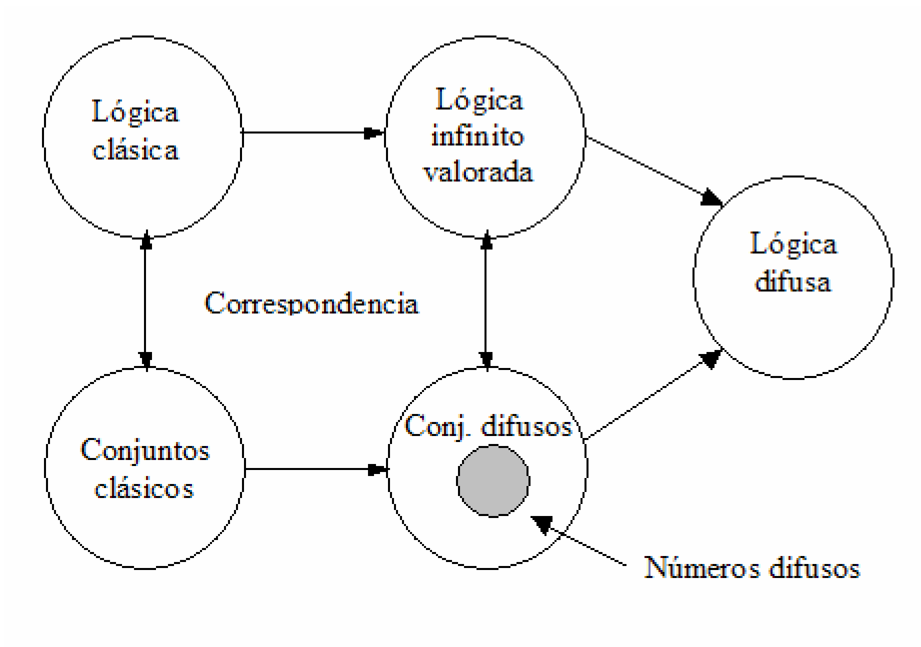
Derivado de lo anterior resulta sencillo generalizar las formas de valorar lógicas n-valuadas como resultado de una extensión de la lógica trivalorada antes descrita con la adición conceptual de que el conjunto de posibles valores con los que puede ser calificada una proposición son *n* posibles valores contenidos en el conjunto {0,...,1}.

En este sentido, en 1965 L.A. Zadeh introduce una lógica infinitamente valuada caracterizando el concepto de *conjunto difuso* y por extensión la *lógica difusa*. La idea de Zadeh es hacer que el rango de valores de pertenencia de un elemento a un conjunto pueda variar en el intervalo [0,1] en lugar de limitarse a uno de los valores del par {0,1} (o lo que es lo mismo Falso, Verdadero).

Posteriormente Zadeh extiendió los operadores conjuntistas clásicos (operadores lógicos, en virtud del isomorfismo) a la nueva formulación, probando que la formulación así obtenida extiende la lógica (Teoria de Conjuntos) clásica. A partir de la Teoria de

Conjuntos Difusos (borrosos) Zadeh introduce la Lógica Difusa como una extensión de las lógicas multivaloradas.

A lo largo de este trabajo se ha establecido vínculos tanto entre la teoría de conjuntos como la lógica clásica así como de sus respectivas extensiones hacia los conceptos que nos ocupan, por lo que resulta importante aclarar las relaciones existentes entre la teoría clásica de conjuntos, la lógica clásica los conjuntos difusos, así como aquellos conjuntos difusos particulares denominados números difuso, la lógica infinito valorada y la lógica difusa, relaciones que son mejor representadas en el siguiente esquema en el que las flechas indican la correspondencia:



La Lógica difusa se enfoca en la representación de variables lingüísticas existentes en el lenguaje natural y su objetivo es proveer fundamentos para una aproximación al razonamiento en el que están presentes proposiciones imprecisas. La mayor parte de la lógica difusa trata con variables y modificadores lingüísticos, proposiciones lógicas difusas, reglas de inferencia y razonamiento aproximado.

La lógica difusa (llamada también Lógica Borrosa por otros autores) o Fuzzy Logic es básicamente una lógica con múltiples valores, que permite definir valores en las áreas oscuras entre las evaluaciones convencionales de la lógica precisa: Si / No, Cierto / Falso, Blanco / Negro, etc. Se considera un súper conjunto de la Lógica clásica tal y como se muestra en el esquema anterior. Con la lógica difusa, las proposiciones pueden ser representadas con grados de certeza o falsedad. La lógica tradicional de las computadoras opera con ecuaciones muy precisas y dos respuestas: Si o no, uno o cero. Ahora, para aplicaciones que manipulan conceptos vagos se emplea la Lógica Difusa.

Por medio de la lógica difusa pueden formularse matemáticamente nociones como “un poco caliente” o “muy frío”, para que sean procesadas por computadoras y cuantificar expresiones humanas vagas, tales como "Muy alto" o "luz brillante". De esa forma, es un intento de aplicar la forma de pensar humana a la programación de los computadores. Permite también cuantificar aquellas descripciones imprecisas que se usan en el lenguaje y las transiciones graduales en electrodomésticos como ir de agua sucia a agua limpia en una lavadora, lo que permite ajustar los ciclos de lavado a través de sensores. La habilidad de la lógica difusa para procesar valores parciales de verdad ha sido de gran ayuda para la matemática.

2.4 VARIABLES LINGÜISTICAS

Se denomina variable lingüística a aquella que puede tomar por valor términos del lenguaje natural tales como *alto, bajo, mucho, poco, positivo, negativo, etc.* Que son las palabras que desempeñan las etiquetas en un conjunto difuso. Aunque el objetivo principal de este concepto es expresar de manera formal el hecho de que puede asignarse como valor de una variable palabras tomadas del lenguaje natural, a una variable lingüística también puede asignársele valores numéricos.

Lo primordial de las técnicas de modelado difuso es la idea de variable lingüística. Desde su raíz, una variable lingüística es el nombre de un conjunto difuso. Si tenemos un conjunto difuso al cual llamamos "largo" éste define a una simple variable lingüística que puede ser empleada en la modelación de un sistema basado en la longitud de un proyecto en particular, por ejemplo en el caso de un sistema que controla las actividades una organización el tiempo de duración de un proyecto es “largo” entonces se puede definir una asignación en función del plazo establecido en esos términos lingüisticos. Una variable lingüística encierra las propiedades de imprecisión en un sistema. Una variable lingüística siempre representa un espacio difuso.

Lo importante del concepto de variable lingüística es su estimación de variable de orden superior más que una variable difusa. En el sentido de que una variable lingüística toma variables difusas como sus valores. En el campo de la semántica difusa cuantitativa al significado de un término "x" se le representa como un conjunto difuso μ(x) del universo de discusión. Desde este punto de vista, uno de los problemas básicos es que se desea calcular el significado de un término compuesto, como por ejemplo “rentabilidad baja”, “rentabilidad más alta de normal”.

2.4.1 MODIFICADORES O ETIQUETAS LINGÜÍSTICAS

La idea básica sugerida por Zadeh es que una etiqueta lingüística tal como "muy", "más o menos", "ligeramente", etc... puede considerarse como un operador que actúa sobre un conjunto difuso asociado al significado de su operando. Por ejemplo en el caso de un término compuesto "muy alto", el operador "muy" actúa en el conjunto difuso asociado al significado del operando "alto". Una representación aproximada para una etiqueta lingüística se puede lograr en términos de combinaciones o composiciones de las operaciones básicas explicadas en la sección anterior. Es importante aclarar que se dará mayor énfasis en que estas representaciones se proponen principalmente para ilustrar el enfoque, más que para proporcionar una definición exacta de las etiquetas lingüísticas.

En otras palabras, las etiquetas lingüísticas pueden ser caracterizadas cómo operadores más que construcciones complicadas sobre las operaciones primitivas de conjuntos difusos. Zadeh también considera que las etiquetas lingüísticas pueden clasificarse en dos categorías que informalmente se definen como sigue:

2.4.1.1 ETIQUETAS LINGÜÍSTICAS DE TIPO I

Las etiquetas del tipo I son las que pueden representarse como operadores que actúan en un conjunto difuso: "muy", "más o menos", "mucho", "ligeramente", "altamente", "bastante", etc., de acuerdo a éste punto de vista y sabiendo que el lenguaje natural es muy rico y complejo, tomamos el operador "muy" puede ser utilizado para enfatizar la descripción de una variable lingüística por lo que si el significado de un término *x* es un conjunto difuso *A*, entonces el significado de muy X, donde X puede ser la variable lingüística “rapido”, da énfasis a la variable lingüística obteniendo un conjunto difuso determinado por la expresión “muy rapido” cuyas características son similares a las del conjunto difuso “rapido” pero con mayor énfasis, lo que se traduce en una contracción de la función de pertenencia, tal y como se verá en un apartado posterior.

Más y menos
Se pueden definir otras etiquetas lingüísticas, por ejemplo: más, menos, que son instancias de lo que puede llamarse acentuador y desacentuador respectivamente, cuya función es proporcionar ligeras variantes de la concentración y la dilatación cuya expresión matemática se describe en un apartado posterior del presente capítulo.

En este caso, los exponentes de la función de pertenencia se eligen de modo que se de la igualdad aproximada de tal forma que el valor de dicha función asociado, por ejemplo a la expresión “mas mas rápido” sea equivalente al que se le asocia a la expresión “menos muy rápido", y que, además, se pueden utilizar para definir etiquetas lingüísticas cuyo significado difiere ligeramente de otras, ejemplo:

Más o menos

Otra etiqueta lingüística interesante es "más o menos" cuya aplicación puede darse en usos como "más o menos rentable", "más o menos rectangular" etc.

Ligeramente

Su efecto es dependiente de la definición de proximidad u ordenamientos en el dominio del operando. Existen casos, sin embargo, en los que su significado puede definirse en términos de etiquetas lingüísticas tipo I, bajo la suposición de que el dominio del operando es un conjunto ordenado linealmente.

Regular

Es una etiqueta que tiene el efecto de reducir el grado de pertenencia de aquellos elementos que tienen tanto un alto grado de pertenencia al conjunto como de aquellos que lo tienen pequeño.

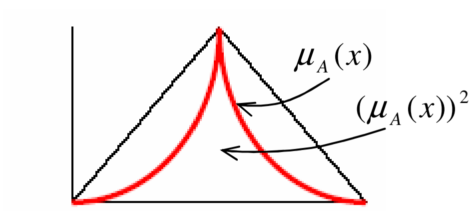
2.4.1.2 ETIQUETAS LINGÜÍSTICAS DE TIPO II

Las etiquetas del tipo II requieren una descripción de cómo actúan en los componentes del conjunto difuso (operando): "esencialmente", "técnicamente", "estrictamente", "prácticamente", "virtualmente", etc., Su caracterización envuelve una descripción de forma que afecta a los componentes del operando, y por lo tanto es más compleja que las del tipo I. En general, la definición de una etiqueta de este tipo debe formularse como un algoritmo difuso que envuelve etiquetas tipo I. Su inclusión en la función de pertenencia puede darse como una modificación de los coeficientes de ponderación en la determinación de un promedio difuso, el cual se define en el apartado 2.4 del presente capítulo. Como la magnitud de las ponderaciones es una medida del atributo asociado, intuitivamente una etiqueta de este tipo tiene el efecto de aumentar las ponderaciones de los atributos importantes y disminuir los que relativamente no lo son.

Desde el punto de vista matemático, una etiqueta lingüísticas es un operador que se aplica a un conjunto difuso es decir es una función $h:[0,1] \to [0,1]$, la cual contrae o dilata la función de pertenencia original del conjunto difuso al que se le aplica, en este sentido, tal y como se señaló anteriormente, el efecto que algunos de los modificadores o etiquetas lingüísticas, en especial las etiquetas de tipo I, tienen sobre la función de pertenencia implica una variante de la concentración o de la dilatación, motivo por el cual a continuación se describe el efecto de la concentración y de la dilatación sobre una función de pertenencia original.

2.4.1.3 MODIFICADOR LINGÜÍSTICO "MUY"

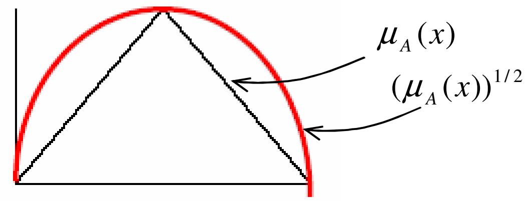
En el cual $h(\mu_A(x)) = ((\mu_A(x))^2$ el cual se conoce como concentración en virtud del efecto que causa sobre la función de pertenencia original, tal y como se muestra en la gráfica siguiente:



Contracción

2.4.1.3 MODIFICADOR LINGÜÍSTICO "MÁS O MENOS"

En el cual $h(\mu_A(x)) = ((\mu_A(x))^{1/2}$ el cual se conoce como dilatación en virtud del efecto que causa sobre la función de pertenencia original, tal y como se muestra en la gráfica siguiente:



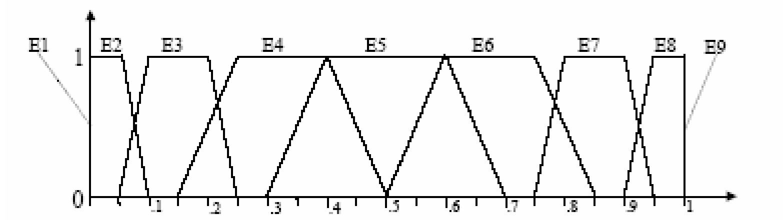
Dilatación

2.4.2 PARTICIONES DIFUSAS

Dada una variable lingüística *A*, definida en un rango de valores u_1 y u_2, es posible establecer en ella diversas particiones. Se conoce como partición al grupo de conjuntos difusos que se han definido para la variable *A.* Una partición es uno de los subconjuntos que pueden formarse con los términos que nombran los valores *x* que puede tomar *A.* Así para la variable "*utilidad del ejercicio"* una posible partición estaría formada por tres subconjuntos difusos cado uno identificado con una etiqueta {Baja, Media, Alta}, y una función de pertenencia $\{\mu_{Baja}(t), \mu_{Media}(t), \mu_{Alta}(t)\}$.

Se dice que una partición es completa si para todos los posibles valores de *U* existe en la partición un conjunto con pertenencia no nula. Dos conjuntos están traslapados si su intersección es no nula, de este modo el traslapar conjuntos difusos, es la relación del número de elementos que comparte con otros conjuntos de la misma partición con respecto al número total de elementos que lo forman.

Por ejemplo al referirnos a una clasificación del producto financiero de una empresa, se puede definir la partición de la categorización de dicho rubro, haciendo uso de la variable lingüística "alto", tal y como sigue:



Partición difusa

Tal y como se definió anteriormente, cada partición representa números difusos de tipo trapezoidal, lo cual como ya vimos anteriormente están representados en la siguiente tabla:

Valores lingüísticos	(a, b, c, d)
E1: Bájisimo	(0, 0, 0, 0)
E2: Muy bajo	(0, 0, 0.5, 0.1)
E3: Bastante bajo	(0.05, 0.1, 0.2, 0.25)
E4: Ligeramente bajo	(0.15, 0.25, 0.4, 0.5)
E5: Normal	(0.3, 0.4, 0.6, 0.7)
E6: Ligeramente alto	(0.5, 0.6, 0.75, 0.85)
E7: Bastante alto	(0.75, 0.8, 0.9, 0.95)
E8: Muy alto	(0.9, 0.95, 1, 1)
E9: Altisimo	(1, 1, 1, 1)

2.5 OPERACIONES ARITMETICAS CON NUMEROS DIFUSOS TRIANGULARES Y TRAPEZOIDALES

En este apartado, se presentan operaciones aritméticas que es posible realizar con los números difusos.

2.5.1 ADICIÓN DE NÚMEROS DIFUSOS TRAPEZOIDALES Y TRIANGULARES

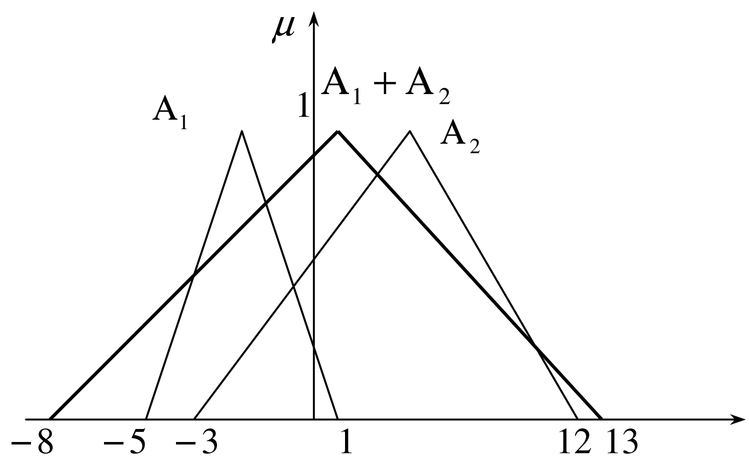
Dados los números triangulares $\mathrm{A}_1 = (a_1{}^{(1)}, a_M{}^{(1)}, a_2{}^{(1)})$ y $\mathrm{A}_2 = (a_1{}^{(2)}, a_M{}^{(2)}, a_2{}^{(2)})$ la adición de dichos números, se define por:

$$A_1 + A_2 = (a_1^{(1)} + a_1^{(2)}, a_M^{(1)} + a_M^{(2)}, a_2^{(1)} + a_2^{(2)}).$$

La formula anterior se extiende a *n* números triangulares difusos, asimismo, puede ser aplicada a números triangulares izquierdos y derechos, análogamente, la definición anterior puede ser extendida para la definición de la suma de números difusos trapezoidales.

Ejemplo, considere los números triangulares siguientes $A_1 = (-5,-2,1)$ y $A_2 = (-3,4,12)$, para los cuales la suma está determinada en la forma indicada abajo y está representada en la siguiente figura:

$$A_1 + A_2 = (-5 + (-3), -2 + 4, 1 + 12)$$



Suma de números triangulares

Por otra parte, la multiplicación de un número triangular difuso por un escalar ***r*** está dada por:

$$Ar = rA = r(a_1, a_M, a_2) = (ra_1, ra_M, ra_3)$$

Como ya se mencionó, la suma de números trapezoidales, es análoga a la suma de números difusos triangulares, con la particularidad de que la suma de los números trapezoidales, se suman cada una de las entradas de la cuarteta por la cual está representado el número trapezoidal, en esté sentido, debido a que los números triangulares pueden ser representados por números trapezoidales, (viceversa no es factible la representación), es posible extender la suma definida anteriormente para realizar la suma de un número triangular con un número trapezoidal.

2.5.2 PROMEDIO DIFUSO

En virtud de lo anterior, el cálculo del promedio de números difusos cuya determinación resulta de suma importancia en las aplicaciones que más adelante abordaremos se define de la siguiente manera:

Considere *n* números triangulares $\mathrm{A}_i = (a_1^{(i)}, a_M^{(i)}, a_2^{(i)})$, con $i = 1,...,n$, por que de las definiciones anteriores para la suma y multiplicación por un escalar de números difusos, se obtiene la fórmula para la determinación del promedio o media aritmética de números difusos tanto triangulares como trapezoidales, tal y como sigue:

$$\mathrm{A}_{prom} = \frac{\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + ... + \mathrm{A}_n}{n} = \frac{(a_1^{(1)}, a_M^{(1)}, a_2^{(1)}) + ... + (a_1^{(n)}, a_M^{(n)}, a_2^{(n)})}{n}$$

es decir:

$$\mathrm{A}_{prom} = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_M^{(i)}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_2^{(i)})$$

2.5.3 PROMEDIO DIFUSO PONDERADO

Sea el número real w_i el ponderador♦ del número triangular difuso $A_i = (a_1^{(i)}, a_M^{(i)}, a_2^{(i)})$, análogamente a la definición anterior, se define el promedio ponderado de ***n*** números difusos triangulares como:

$$A_{prom}^{w} = (\sum_{i=1}^{n} w_i a_1^{(i)}, \sum_{i=1}^{n} w_i a_M^{(i)}, \sum_{i=1}^{n} w_i a_2^{(i)})$$

2.6 DEFUSIFICACIÓN

Como ya se mencionó, los conjuntos difusos son originados de la utilización de variables lingüísticas (mucho, poco, positivo, negativo, etc) y se asocia a cada uno una función de pertenencia a la cual se le puede asignar un peso o factor de importancia –obtenidos, por ejemplo, de la opinión de expertos–. Un vez han sido ponderadas y operadas estas funciones forman un conjunto difuso del cual se espera obtener una respuesta o resultado. En muchos casos es importante que esta respuesta no sea difusa y se necesita pasar a una que no lo es. Para lograr esta trasformación se ha desarrollado el concepto de **defusificación** lo cual consiste en convertir un valor difuso (o una conclusión difusa) en información concreta expresada mediante un escalar.

Para el caso del resultado obtenido del promedio de números difusos triangulares, dado por $A_{prom} = (a_1, a_{M,} a_2)$, resulta útil determinar el valor escalar que resulte ser el mejor promedio para efectos de dar solución a un problema específico, por lo que el obtener dicho valor escalar es de lo que se ocupan los métodos de defusificación, cabe señalar que existen diversas formas para defusificar el promedio del número triangular descrito, ya que es factible considerar como dicho valor defusificado, al valor a_M comprendido en el intervalo de soporte del promedio difuso, ya que posee el mayor grado de pertenencia (uno), por lo que a partir de esto se pueden definir diversas formulas de defusificación las

♦ Número real que da un peso específico a un número difuso.

cuales consisten en esencia en un promedio estadístico tal y como se muestra en las siguientes formulas que representan tres formas de defusificar dicho promedio:

$$x_1 = \frac{a_1 + a_m + a_2}{3}$$

$$x_2 = \frac{a_1 + 2a_m + a_2}{4}$$

$$x_1 = \frac{a_1 + 4a_m + a_2}{6}$$

Existen varios métodos para defusificar, cuya utilización depende del tipo de aplicación que se desea llevar a cabo muchos de estos métodos fueron desarrollados por Lofti Zadeh, no obstante, cabe señalar que hoy día no existe un método sistemático para seleccionar el más adecuado, por lo que dicha selección dependerá del problema en el que se aplique, en seguida se mencionan algunos más que pueden aplicarse en forma más general a diversos casos, cabe destacar que en la elección del método a utilizar se debe considerar el costo en relación al cómputo, entendiendo esto como el número de operaciones que una computadora requiere realizar para obtener el resultado programado.

2.6.1 CENTROIDE DE AREA

La técnica más comúnmente utilizada consiste en estimar el área y el centroide[1] de cada conjunto difuso y obtener el valor concentrado de dividir la sumatoria del producto entre ellos por la sumatoria total de las áreas, como se expresa en la siguiente ecuación.

Para el caso discreto:

[1] En geometría, el centroide o baricentro de un objeto X perteneciente a un espacio n-dimensional es la intersección de todos los hiperplanos que dividen a X en dos partes de igual cantidad de movimiento con respecto al hiperplano. Informalmente, es el promedio de todos los puntos de X.

$$COA = \frac{\sum x_i \mu(x_i)}{\sum \mu(x_i)}$$

Para el caso continuo:

$$COA = \frac{\int_X \mu_A(x) x dx}{\int_X \mu_A(x) dx}$$

2.6.2 MÉTODO DEL MÁXIMO

En este caso se supone que la función de pertenencia tiene sólo un punto máximo simple y se defusifica tomando el valor concentrado en este punto como se muestra en la siguiente expresión:

$$x_0(A) = \max\{\mu_A(x) \mid x \in X\}$$

Ahora bien, si la función de pertenencia agregada o de salida tiene varios puntos máximos, se crea un grupo (Amax) con estos puntos (soluciones óptimas), como lo indica la siguiente expresión:

$$A_{\max} = \{x \in X \mid \mu_A(x) = \max_{z \in X} \mu_A(z)\}$$

y de este grupo de máximos se obtiene un único punto, que se puede escoger en forma aleatoria (se supone que todas las soluciones son igualmente buenas) pero es preferible obtener un punto en la mitad del conjunto de soluciones. La solución puede también hallarse también estimando el valor medio del conjunto, si este es un conjunto finito, como lo señala la ecuación

$$x_0(A) = \frac{1}{N} \sum_{x \in A_{\max}} x$$

donde *N* es el número de elementos en el conjunto. Utilizando el método del centro de gravedad se tiene en cuenta información relacionada con la función de pertenencia μ_B. Se toma la media de todos los pesos como se establece en expresión:

$$x_0(A) = \frac{1}{\sum \mu_A(x)} \sum_{x \in A_{\max}} x\mu_A(x)$$

En conclusión en este capítulo se han descrito algunos de los conceptos más esenciales de la lógica difusa que más adelante serán útiles en la descripción de aplicaciones y definición de modelos, en los que debido a la ambigüedad de las variables que los describen resulta útil la implementación de modelos basados en lógica difusa.

CAPÍTULO 3
TOMA DE DECISIONES EN UN ENTORNO DIFUSO

3.1 LA TOMA DE DECISIONES

La toma de decisiones es un proceso de resolución de problemas que involucra como resultado la elección de un curso de acción a seguir por parte del encargado de la resolución del problema. Es decir, la toma de decisiones, consiste en tomar un curso de acción definido por los valores de una o más variables controlables, destacando que en un problema de toma de decisiones debe haber disponibles cuando menos dos cursos de acción, de otra manera no hay elección y por tanto, no hay problema.

El que tiene que tomar una decisión, trata de elegir un curso de acción que produzca el resultado deseado, uno que sea eficaz respecto a lo que él valora por lo que dicho curso de acción se conoce como efectivo, la efectividad es producto de la eficiencia y el valor, quien busca el mejor y más efectivo curso de acción se dice que optimiza.

La toma de decisiones juega un papel importante en los negocios, la administración, las finanzas, la economía, las ciencias sociales y políticas, la ingeniería, la biología y la medicina. Los problemas involucrados en la toma de decisiones, en la mayoría de casos son problemas multicriterio puesto que hay que tener en cuenta distintos criterios y puntos de vista que a menudo están en conflicto, siendo la decisión el resultado de un compromiso entre todos ellos.

Todo proceso de decisión transcurre en un contexto que se denomina ambiente o entorno. El conjunto de características que define la situación de decisión respecto al entorno, puede ser de diversa naturaleza pudiéndose dar los siguientes casos:

- Decisiones en ambientes de certidumbre: cuando se conocen con exactitud las consecuencias que conlleva la selección de cada alternativa.

- Decisiones en ambientes de riesgo: cuando se conoce una distribución de probabilidades de las consecuencias que tiene la selección de una determinada alternativa.

- Decisiones en ambiente de incertidumbre o borrosos: cuando se desconoce la probabilidad de las consecuencias de una elección, y sólo se pueden caracterizar aproximadamente.

La mayoría de situaciones de decisión de la vida real tienen lugar en ambientes de incertidumbre en los que los objetivos, las restricciones y las consecuencias de los posibles cursos de acción no son conocidas con precisión. El origen de tal imprecisión tiene, entre otras, las siguientes causas:

- Información incuantificable. El precio de un nuevo coche puede ser fácilmente determinado mientras que la seguridad y el confort son siempre expresados en términos lingüísticos tales como bueno, aceptable, malo, etc. Se trata de datos cualitativos y, por lo tanto, sujetos a valoración subjetiva.

- Información incompleta. La velocidad de un objeto en movimiento puede ser medida por algunos equipos como “alrededor de 90 Km/h” pero no “exactamente

90 Km/h". Tales datos pueden ser representados mediante valores difusos pues la información es incompleta.

- Información imposible de obtener. Algunas veces la obtención de datos exactos se realiza a un coste muy elevado, pudiendo ser deseable obtener una "aproximación" a esos datos. Cuando los datos son muy sensibles (secretos gubernamentales, datos bancarios, etc.), se suelen usar datos aproximados o descripciones lingüísticas. La información es difusa debido a su no disponibilidad.

- Ignorancia parcial. Cierta borrosidad es atribuida a la ignorancia parcial de un fenómeno a causa del desconocimiento de parte de los hechos.

Los métodos clásicos de decisión han sido diseñados para tratar problemas de decisión en ambientes de certidumbre y de riesgo. Al margen de limitaciones y complejidad de los algoritmos matemáticos propuestos estos métodos presentan un serio inconveniente en cuanto a su aplicabilidad en entornos de incertidumbre. En estos ambientes no siempre es posible determinar los datos de partida exactos que requieren estos métodos y sólo es posible disponer de "aproximaciones" como "alrededor de cinco", "entorno a seis", "muy importante" o "entre seis y siete". Para tratar problemas de decisión de esta naturaleza, en los que los datos son imprecisos, vagos o borrosos, la teoría de la lógica difusa, se ha perfilado como la más adecuada, debido a su capacidad para tratar conceptos vagos e imprecisos.

En este sentido, en el presente capítulo se expondrán dos métodos para la toma de decisiones basados en conjuntos difusos y lógica difusa, el primero es la aproximación de Bellman-Zadeh (1970) en la cual el modelo de decisión se define como la intersección de objetivos y restricciones descritos por conjuntos difusos. El segundo método combina objetivos y restricciones haciendo uso del promedio difuso definido anteriormente.

3.2 TOMA DE DECISIONES POR MEDIO DE LA INTERSECCION DE OBJETIVOS Y RESTRICCIONES DIFUSAS.

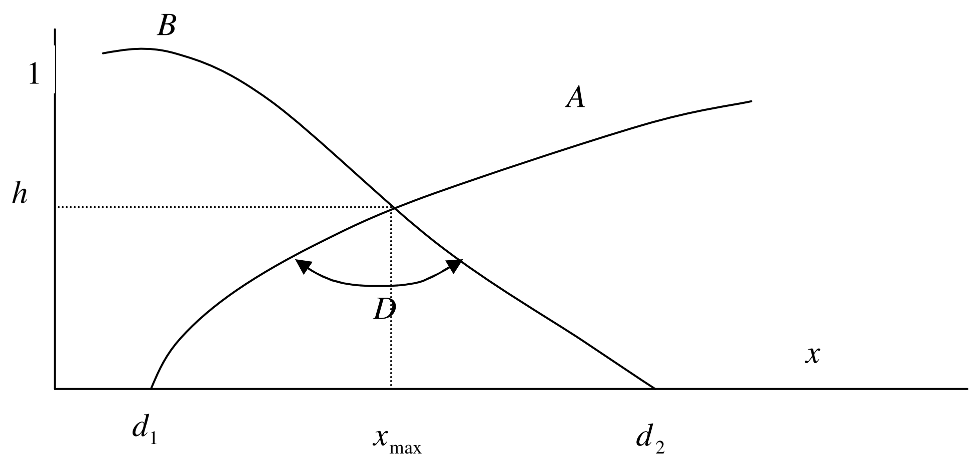
Como ya se mencionó, la toma de decisiones está caracterizada por la selección de alternativas viables para la solución de un problema. En el proceso de decisión, para alcanzar los objetivos específicos deben considerarse las restricciones específicas que influyen dentro del modelo.

Considere un modelo de toma de decisiones simple consistente de un objetivo descrito por un conjunto difuso *A* con una función de pertenencia $\mu_A(x)$ y una restricción descrita por el conjunto difuso *B* con función de pertenencia $\mu_B(x)$, en donde *x* pertenece al conjunto clásico de alternativas.

Por definición de (Bellman-Zadeh (1970)) el conjunto de alternativas de decisión es un conjunto difuso *D* con función de pertenencia $\mu_D(x)$, expresado como la intersección de *A* y *B*, es decir:

$$D = A \cap B = \{(x, \mu_D(x)) \mid x \in [d_1, d_2], \mu_D(x) \in [0, h], h \leq 1\},$$

por lo que la expresión anterior representa una decisión múltiple descrita por el intervalo $[d_1, d_2]$ contenido en el conjunto de alternativas posibles, en este sentido, $\mu_D(x)$ indica el grado en el cual alguna $x \in [d_1, d_2]$ pertenece a la decisión *D.* La representación gráfica de la definición anterior se muestra en la siguiente figura:



Utilizando la definición estándar para la intersección descrita en el primer capítulo de éste trabajo, la formula anterior quedaría de la siguiente forma $\mu_D(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$.

Dado que la operación intersección es conmutativa los objetivos y las restricciones pueden ser intercambiadas sin pérdida de la generalidad, lo cual implica únicamente establecer el punto de vista o la perspectiva desde la que se observa el problema, toda vez que muchas de las situaciones de aplicación del modelo los objetivos, pueden ser, consideradas como las restricciones del modelo y viceversa.

En muchos problemas, aunque estimemos las variables que lo describen mediante conjuntos difusos, será necesario acabar cuantificando las magnitudes que pretendemos estimar finalmente mediante un valor cierto, es decir, debemos asignarlas un valor no difuso, Tal y como se mencionó anteriormente esto es lo que en la literatura difusa se conoce como “defusificar” números o conjuntos difusos. Por lo que en el caso de la toma de decisiones en un entorno difuso, a los encargados de tomar las decisiones, les interesa obtener un resultado en el contexto clásico, es decir un monto o cantidad que les permita tomar una decisión en relación a la situación problemática planteada.

Por lo anterior, para el caso del modelo para la toma de decisiones se requiere llevar a cabo la defusificación del conjunto *D* de decisiones para lo cual resulta adecuado adoptar el valor de $x \in [d_1, d_2]$ que presente el mayor grado de pertenencia dentro del conjunto *D* de soluciones. Dicho valor está determinado por:

$$x_{\max} = \max\{\mu_D(x) \mid x \in [d_1, d_2]\}$$

El proceso de toma de decisiones en un entorno difuso, se muestra en el siguiente diagrama:

Objetivos A Restricciones B Alternativas	$\rightarrow$	Intersección $A \cap B$	$=$	Decisión Difusa D	$\rightarrow$	Decisión Maximizada $x_{\max}$

Las expresiones mostradas anteriormente pueden ser generalizadas, para casos en los que se tienen *n* objetivos y *m* restricciones, en tal caso, el conjunto de decisiones y la función de pertenencia del conjunto difuso de decisiones quedarían expresados de la siguiente forma:

$$D = A_1 \cap \ldots A_n \cap B_1 \cap \ldots \cap B_m$$

$$\mu_D(x) = \min(\mu_{A_1}(x), \ldots, \mu_{A_n}(x), \mu_{B_1}(x), \ldots, \mu_{B_m}(x))$$

y la decisión maximizada quedaría expresada por:

$$x_{\max} = \{x \mid \mu_D(x) \quad es \max\}$$

3.3 DISTRIBUCION DE DIVIDENDOS

En este apartado se expone un caso de toma de decisión en un entorno difuso en el que se intenta determinar que cantidad de las utilidades que un ente económico genera es viable destinar al reparto de dividendos, el caso se expone bajo dos métodos, en el primero se utiliza la técnica descrita en el punto anterior de la toma de decisiones por medio de la intersección de objetivos y restricciones difusas y en el apartado 3.2 del presente trabajo se aborda el mismo problema haciendo uso del promedio difuso descrito en el capítulo 2 de este trabajo.

Una vez que las empresas contabilizan el resultado obtenido a lo largo de un determinado ejercicio, éstas deben decidir que cuantía de las utilidades deben repartir en forma de dividendos, y cuanto deben retener para reinvertirlo en la empresa.

Ante todo, la decisión de aplicación del resultado adquiere una enorme trascendencia en el entorno económico actual, cada vez más complejo y competitivo, pues de la adecuada administración de las utilidades de las empresas se derivan consecuencias muy importantes en el porvenir económico-financiero de las mismas. Así, éstas deberán adoptar una política distributiva acorde con su situación actual y con las expectativas futuras, persiguiendo una adecuada relación entre la reinversión de dichas utilidades y la retribución a los accionistas.

Sin embargo, las sociedades mercantiles, a pesar de gozar de libertad para tomar la decisión de la repartición más conveniente para el desarrollo y sostén de la empresa, resulta que muchas de ellas, en esencia las empresas que cotizan en bolsa, deben procurar y mantener políticas de dividendos estables y ***“atractivos”***, orientadas a cuidar el precio de cotización de sus acciones, dado que las decisiones financieras adoptadas están sometidas a una continua evaluación. Por otra parte, la asignación de las utilidades debe someterse al cumplimiento de requisitos de diversa índole y naturaleza, por lo que dicha libertad no va a estar exenta de restricciones que conlleven a los encargados de tomar la decisión a llevar a cabo una repartición de dividendos ***“moderada”***, por lo que dicha problemática puede ser abordada haciendo uso de la teoría de toma de decisiones en un entorno difuso, en virtud de estar descrita con cierta vaguedad.

Consideremos para tal efecto la variable lingüística “dividendos atractivos” como el objetivo y a la variable lingüística “dividendos moderados” como la restricción de acuerdo a los componentes descritos anteriormente en el planteamiento de la teoría para la toma de decisiones por medio de la intersección de objetivos y restricciones difusas, en este sentido, suponiendo que se trata de una empresa que ha generado una utilidad por $8 millones de pesos, tanto el objetivo como las restricciones estarán definidos en el conjunto de alternativas $alt = \{x \mid 0 < x \le 8\}$, de este modo, debido a que consideramos como objetivo del problema el reparto de dividendos atractivo, resulta conveniente que la función de pertenencia del conjunto difuso A asociado a dicha variable sea definida como una función creciente dentro del intervalo de alternativas, por lo que la función de pertenencia del conjunto difuso B asociado a la restricción definida por la variable “dividendos moderados” será decreciente en dicho intervalo. Cabe señalar que para la descripción de este ejemplo se han elegido funciones de pertenencia que forman parte de la familia de funciones trapezoidales y triangulares, descritas en el capítulo 1 del presente trabajo. y están representadas por las siguientes funciones:

La función de pertenencia del conjunto difuso *A* asociado a la variable “dividendos atractivos” se define como♦:

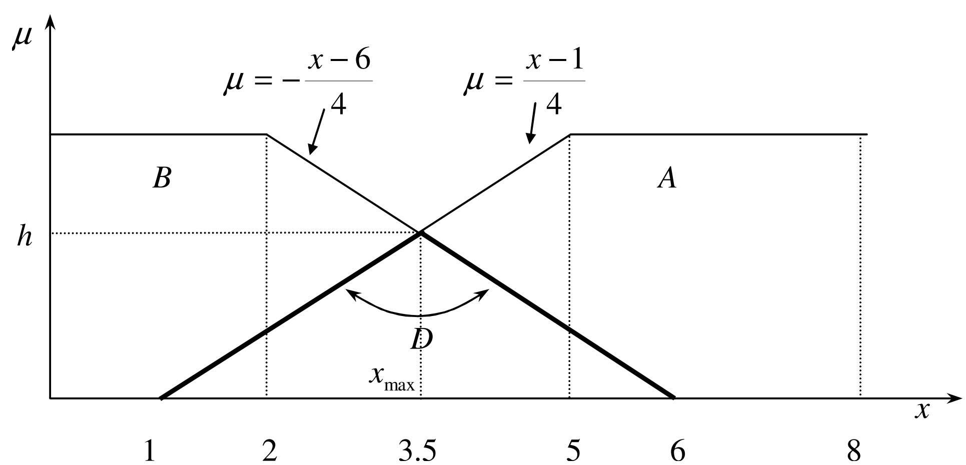
♦ La definición de las funciones de pertenencia depende del problema que se quiera modelar y resulta importante para su definición contar con la opinión de los expertos en el problema que se intenta modelar, a fin de que la elección de los rangos de las variables del entorno sean los adecuados al problema, cabe señalar que un modelo difuso debe ser probado y calibrado, lo que implica realizar ajustes a las funciones de pertenencia definidas originalmente a fin de lograr una mayor representatividad del modelo.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{4} & 1 \leq x \leq 5 \\ 1 & 5 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Por su parte la función de pertenencia asociada al conjunto difuso de restricción definido por la variable "dividendos moderados" se define como:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq 2 \\ -\dfrac{x-6}{4} & 2 \leq x \leq 6 \\ 0 & 6 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Por lo que de acuerdo a la definición la determinación del conjunto difuso de alternativas de decisión queda representado en la siguiente figura:



Para el caso específico del reparto de dividendos tenemos que de acuerdo a la definición del conjunto de decisiones antes descrita, tenemos que dicho conjunto difuso queda definido por:

$$D = A \cap B = \{(x, \mu_D(x)) \mid x \in [1,6], \mu_D(x) \in [0,h], h \leq 1\}$$

para encontrar la función de pertenencia del conjunto difuso *D* de soluciones de acuerdo a la formula de la definición $\mu_D(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ se calculó, en que punto se interceptan las rectas compuestas por la funciones $\frac{x-1}{4}$ y $-\frac{x-6}{4}$ determinando en forma analítica que la intersección de dichas rectas ocurre en el punto (3.5,0.625), tal y como se muestra en la figura anterior, por otra parte, la función de pertenencia $\mu_A(x)$ asociada a la variable lingüística "dividendos atractivos" es creciente en el intervalo [1,5], ya que la derivada $\mu'_A(x) = 1/4 > 0, \forall x \in [1,5]$ y a su vez la función de pertenencia $\mu_B(x)$ del conjunto de restricción asociado a la variable "dividendos moderados" es decreciente en el intervalo [2,6], ya que $\mu'_B(x) = -1/4 < 0, \forall x \in [2,6]$ y el punto de intersección entre el $\mu_A(x)$ y $\mu_B(x)$ como ya vimos ocurre en $x = 3.5$, por lo que para el intervalo soporte de conjunto de decisión *D,* es decir, el intervalo [1,6] ocurre que $\mu_A(x) < \mu_B(x)$ cuando $1 \le x \le 3.5$, por otra parte, $\mu_A(x) > \mu_B(x)$ cuando $3.5 \le x \le 6$, por lo que la función de pertenencia del conjunto decisión *D* queda representada en forma analítica por:

$$\mu_D(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{4} & 1 \le x \le 3.5 \\ -\frac{x-6}{4} & 3.5 \le x \le 6 \\ 0 & o.c. \end{cases}$$

de esta forma se determina la forma analítica del conjunto de decisión *D* representado en la gráfica anterior, por lo que para este ejemplo, resta solamente determinar cual es el valor de decisión maximizado es decir $x_{\max} = \max\{\mu_D(x), x \in [1,6]\}$, el cual en este caso corresponde al punto de intersección antes referido $x_{\max} = 3.5$, con lo cual se concluye que el dividendo a repartirse es de $3.5 millones de pesos, y es determinado como el valor máximo de un conjunto difuso de alternativas de solución con un grado de pertenencia a dicho conjunto de 0.62 por lo que el encargado de decidir la repartición de dividendos podrá concluir que repartió dividendos por dicho monto, considerados en un 62.5% atractivos análogamente tendrá elementos para justificar que protegió la política de desarrollo de la empresa en cuanto a la reinversión de utilidades se refiere, considerando que en este caso los dividendos también son moderados en un 62.5%.

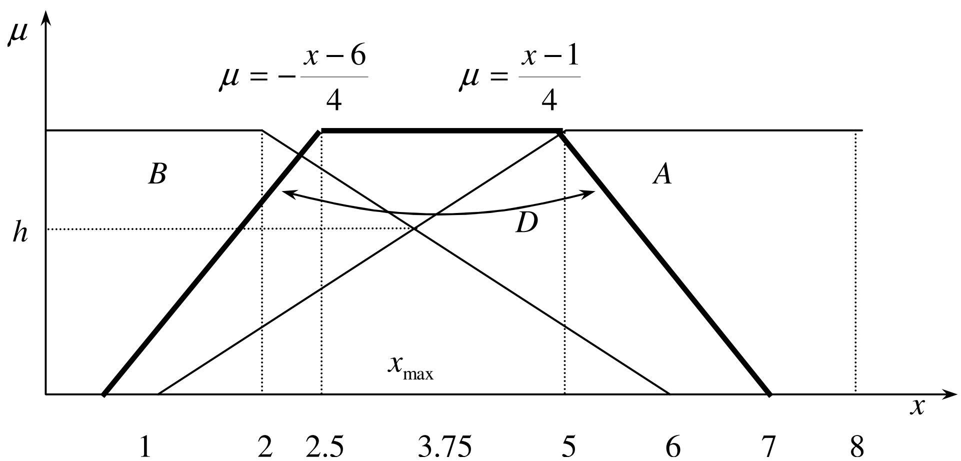
3.4 TOMA DE DECISIONES APLICANDO PROMEDIO PONDERADO DIFUSO

Como ya quedó descrito anteriormente, en el problema de toma de decisiones intervienen objetivos y restricciones mismos que son representados por números difusos triangulares o trapezoidales, los cuales, si queremos ordenarlos o ponderarlos de acuerdo a sus características o importancia, entonces resulta útil aplicar la técnica del promedio difuso para la toma de decisiones, la cual análogamente a la técnica descrita en el apartado anterior, arroja como resultado o conclusión un número difuso *D,* que interpreta al conjunto solución del problema de decisión, en el cual similarmente el valor que maximiza el resultado de decisión es el valor en el intervalo soporte de *D,* que presenta mayor grado de pertenencia al conjunto solución *D.*

Por lo anterior, haciendo uso de la técnicas del promedio difuso se analizará el problema del reparto de dividendos expuesto en el apartado anterior, para lo cual, en virtud de que tanto el conjunto objetivo *A* y el conjunto de restricciones *B* están representados por números difusos trapezoidales estos pueden ser descritos por $A = (1,5,8,8)$ y $B = (0,0,2,6)$ por lo que *D* se define haciendo uso del promedio difuso descrito en el capítulo 2 de este trabajo, con lo cual obtenemos que:

$$D = prom(A,B) = \frac{A+B}{2} = \frac{(1,5,8,8)+(0,0,2,6)}{2} = \frac{(1,5,10,14)}{2} = (0.5,2.5,5,7)$$

quedando representado el conjunto solución por la siguiente figura:



En la figura anterior, se observa que aplicando la técnica del promedio, el conjunto solución *D* queda representado por un número difuso trapezoidal, por lo que la función de pertenencia de dicho conjunto presenta un segmento plano horizontal cuya proyección en el eje *x* es el intervalo [2.5,5] determinado por el resultado del promedio difuso que define al conjunto *D*, por lo que en este caso para determinar la decisión máxima una buena aproximación es calcular el punto medio de dicho intervalo $x_{\max} = \frac{2.5+5}{2} = 3.75$.

Hasta aquí se ha obtenido la aproximación o la determinación de cual sería una repartición de dividendos que cumpliera con los objetivos y restricciones señalados haciendo uso de dos técnicas que permiten determinar las soluciones a dicho problema, sin embargo, la diferencia entre el método de la intersección y el promedio de objetivos y restricciones radica en que suponiendo que en el planteamiento del problema que nos ocupa, se decidiera dar mayor peso a las restricciones que a los objetivos o viceversa, es decir que a las personas encargadas de la repartición de dividendos, les pareciera más importante la expansión de las operaciones de la empresa por lo cual se inclinaran con mayor aprecio hacia una repartición de dividendos moderada por lo que suponiendo que del grupo encargado de tomar la decisión 6 de cada 10 miembros votaron a favor de una repartición de dividendos moderada, por lo que en este caso para agregar ésta información adicional al modelo de decisión resulta de gran utilidad aplicar el método de promedio ponderado de números de difusos, a fin de encontrar la solución que contemple el resultado de la votación de los encargados de tomar la decisión, no obstante, cuando no es necesaria dicha contemplación resulta más conveniente utilizar el método de la intersección de objetivos y restricciones ya que su implementación es más económica desde el punto de vista computacional, ya que requiere menos operaciones.

Por lo anterior, en virtud de la suposición expuesta se considera un factor de ponderación de 0.4 para el objetivo consistente en la repartición de “dividendos atractivos” y un factor de 0.6 para la restricción afectada por las suposiciones adicionales del modelo en la que mayor número de encargado de la decisión votaron a favor de una repartición de “dividendos moderados”, que quedaran expresados por $w_A = 0.4, w_B = 0.6$, lo cual representa que las repartición de dividendos moderados es un poco más importante que una asignación de dividendos atractivos. En este sentido, el conjunto solución de se calcula como:

$$
\begin{aligned}
D = prom_w(A,B) &= (0.4)A + (0.6)B \\
&= (0.4)(1,5,8,8) + (0.6)(0,0,2,6) \\
&= (0.4,2,3.2,3.2) + (0,0,1.2,6) = (0.4,2,4.4,6.8)
\end{aligned}
$$

El conjunto *D* queda representado por un número difuso trapezoidal con intervalo plano en [2,4.4], por lo que para la determinación de la solución procedemos a la defusificación, obteniendo el punto medio del segmento de referencia $x_{\max} = \frac{2+4.4}{2} = 3.2$ el cual es menor al resultado de 3.75 en el que no intervino un ponderador de preferencia en la determinación de la decisión que asignara mayor importancia a una repartición moderada de dividendos.

3.5 MODELO DE ASIGNACIÓN DE PRECIOS PARA NUEVOS PRODUCTOS

Cotizar un nuevo producto para un fabricante de productos de consumo final resulta una tarea de decisión en la cual intervienen diversos factores tales como el costo financiero, mercadotecnia, fuerza de ventas y las recomendaciones de expertos de cual deberá ser el precio del nuevo producto, asimismo, es importante destacar que una sobre valuación del precio del producto que se va a lanzar al mercado por primera vez puede crear condiciones de mercado favorables para la competencia en virtud de la desventaja del precio.

En este apartado se expondrá un modelo para la asignación de dicho precio el cual se basa en requerimientos (objetivos) designados por expertos en la asignación del precio de dicho producto, tales como son:

R_1: El producto debe tener precio bajo.
R_2: El producto debe tener un precio cercano al precio del producto de la competencia.
R_3: El producto debe tener un precio cercano al doble del costo de fabricación.

En éste caso las variables lingüísticas asociadas al problema son “precio bajo”, “precio alto”, “precio cercano a”, las cuales podrían ser modificadas por medio de los modificadores lingüísticos “muy”, “mas o menos” y “ligeramente”.

Un problema de decisión de asignación de precio debe tener por lo menos dos requerimientos, considerando a estos como objetivos de acuerdo a lo establecido en el modelo general para la toma de decisiones visto anteriormente a efectos de poder aplicar dicho modelo sin la necesidad de contar con objetivos y restricciones.

En este sentido, resulta adecuado representar a las variables lingüísticas “precio bajo” y “precio alto” por medio de números difusos trapezoidales o triangulares izquierdo y derecho, según corresponde. Por lo que respecta a la variable lingüística que define “precio cercano a” es conveniente representarla por medio de un número difuso triangular.

Por lo anterior, con las tres reglas definidas R_1, R_2 y R_3, suponiendo que el precio de la competencia es de $25, y el doble del costo de fabricación asciende a $30, si el costo de fabricación es de $10 y el precio máximo al que se podría cotizar el producto es de $40 entonces el conjunto de alternativas esta dado por el intervalo [10,40] ya que el precio del producto debe pertenecer a dicho intervalo.

El modelo que describe el comportamiento de las variables lingüísticas de referencia queda establecido como R_1 está representada por el número difuso triangular A_1 que representa a la variable “precio bajo”, R_2 está representada por el número difuso triangular A_2 que representa a la variable “precio cercano al precio de la competencia” y R_3 está representada por el número difuso triangular A_3 que representa a la variable “precio cercano al doble del costo de fabricación”, los cuales por facilidad en la explicación del modelo fueron definidos mediante números difusos triangulares, no obstante resulta importante destacar que dichas variables pueden ser representadas por medio de números difusos del tipo cuadrático, descritos en el capítulo1 del presente trabajo.

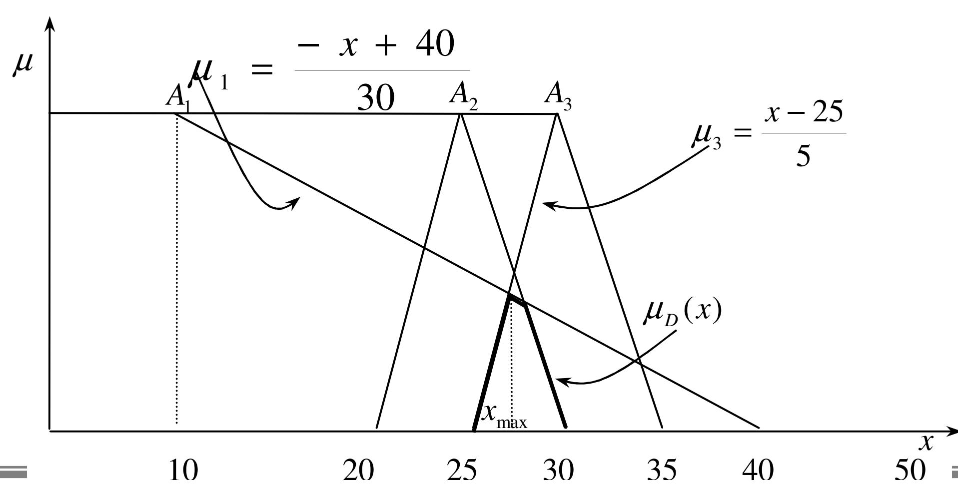
Las funciones de pertenencia de los números difusos A_1, A_2 y A_3, definidos anteriormente es:

$$A_1 := \mu_{A_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{-x+40}{30} & 10 \le x \le 40 \\ 0 & o.c. \end{cases}$$

$$A_2 := \mu_{A_2}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-20}{5} & 20 \le x \le 25 \\ \dfrac{-x+30}{5} & 25 \le x \le 30 \\ 0 & o.c. \end{cases}$$

$$A_3 := \mu_{A_3}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-25}{5} & 25 \le x \le 30 \\ \dfrac{-x+35}{5} & 30 \le x \le 35 \\ 0 & o.c. \end{cases}$$

Las cuales quedan representadas por los triángulos correspondientes en la siguiente gráfica:



Análogamente al modelo de reparto de dividendos, la función de pertenencia del conjunto difuso solución *D* está dado por:

$$\mu_D(x) = \min(\mu_{A1}(x), \mu_{A2}(x), \mu_{A3}(x))$$

Por lo que de la gráfica anterior se observa que determinando la intersección entre las rectas $\mu = \frac{-x+40}{30}$ y $\mu = \frac{x-25}{5}$, obtenemos el punto de decisión con mayor grado de pertenencia al conjunto solución *D* el cual es $x_{\max} = 27.14$ cifra que representa el precio más adecuado considerando las hipótesis del problema, no obstante se puede asignar cualquier precio contenido en el intervalo [25,30] ya que éste representa el soporte del conjunto difuso solución *D.*

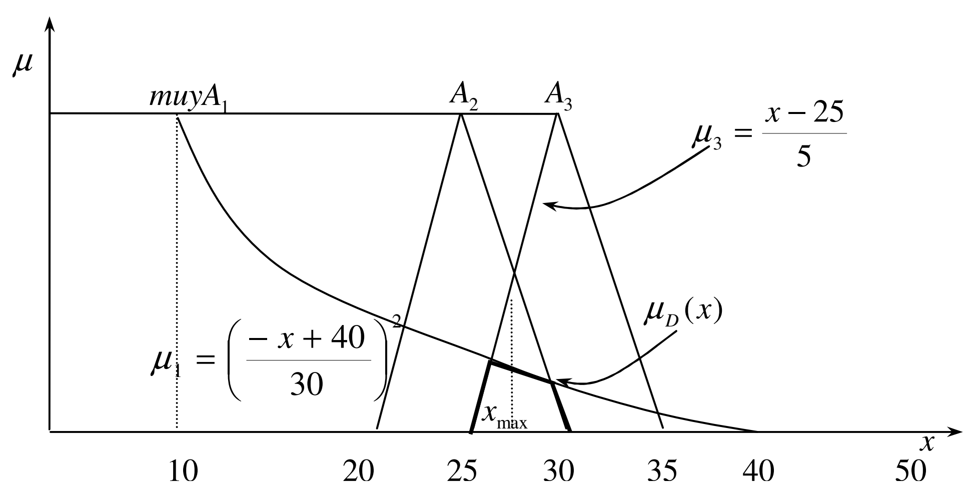
Por otra parte, de la observación de la gráfica anterior se puede advertir que el número difuso A_2 que representa a la variable lingüística “precio cercano al precio de la competencia” contribuye a determinación del conjunto difuso solución *D,* pero no tiene impacto en la determinación de la solución con grado de pertenencia máximo.

3.6 ADICION DE MODIFICADORES LINGÜÍSTICOS A UN MODELO BASADO EN CONJUNTOS DIFUSOS.

Desde el punto de vista matemático, las etiquetas lingüísticas son operadores que se aplican a un conjunto difuso, es decir, constituyen una función que contrae o dilata la función de pertenencia original del conjunto difuso al que se le aplican, a través de los modificadores lingüísticos es posible darle mayor énfasis a una variable lingüística, en este sentido, para el ejemplo del caso de asignación de precio de un producto la variable "precio bajo" podemos afectarla por el modificador lingüístico "muy" con lo cual obtendríamos la expresión lingüística "precio muy bajo" la cual en el entorno de la matemática difusa se representa elevando al cuadrado la función de pertenencia de la variable lingüística original, a lo cual se le conoce como dilatación de la función de pertenencia, debido al efecto que tiene sobre esta, resultando para la representación de dicha expresión la función de pertenencia siguiente:

$$A_1 := \mu_{muyA_1}(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{-x+40}{30}\right)^2 & 10 \le x \le 40 \\ 0 & o.c. \end{cases}$$

La función de pertenencia anterior representa gráficamente en el intervalo [10,40] un segmento de parábola, mismo que refleja la interacción del modificador "*muy*" con las funciones de pertenencia de las otras dos variables lingüísticas del problema de asignación de precio cuyo efecto se muestran en la siguiente gráfica.



El precio $x_{\max}$ se localiza en la intersección de $\left(\frac{-x+40}{30}\right)^2$ y $\frac{x-25}{5}$, la cual ocurre en 26.08, en este sentido, debido a que el modificador lingüístico "muy" da mayor énfasis a la variable "bajo" se obtiene un precio de asignación para el producto menor que el obtenido en el apartado anterior en el cual el modelo contemplaba las variables lingüísticas originales sin la aplicación de ningún modificador.

En este capítulo se han expuesto diversas aplicaciones de la toma de decisiones en un entorno difuso, por lo que de los ejemplos expuestos se observa que las herramientas que proporciona la lógica difusa con el uso de los números difusos, pueden ser adaptadas a problemas de toma de decisiones en las que intervienen variables o términos ambiguos, obteniendo resultados cuantificables y comparables en un entorno no difuso.

CAPÍTULO 4
CASO PRACTICO (MODELO DIFUSO)

4.1 ANTECEDENTES.

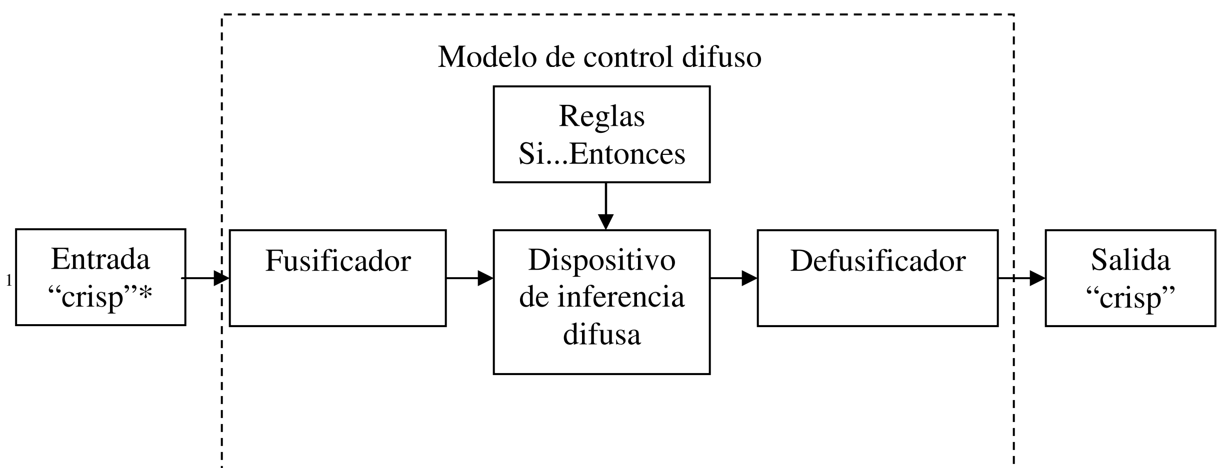
Los modelos y sistemas de control difuso, han sido desarrollados principalmente para las necesidades de la ingeniería industrial, por lo que desde hace tiempo existen múltiples aplicaciones de dichos modelos en las industrias para el desarrollo de la tecnología de electrodomésticos como son lavadoras de ropa, sistemas de aire acondicionado, aparatos de reconocimiento de voz, sistemas de gestión de bases de datos, etc. Sin embargo, debido a la bondad de los modelos difusos para trabajar con conceptos inciertos e imprecisos, han surgido diversas aplicaciones de los mismos al mundo de las finanzas y la administración.

En la implementación de modelos en los que se utilizan las herramientas de la lógica difusa se emplean conjuntos difusos para operar y describir fenómenos complejos e imprecisos y se hace uso de operaciones lógicas para obtener una conclusión. En este sentido, los conjuntos difusos, en particular los números difusos y la lógica difusa aplicada a problemas de control en el campo del razonamiento es denominado Control Lógico Difuso (FLC), por sus siglas en ingles (Fuzzy Logic Control).

Los modelos de control difuso conocidos en los textos como modelos o sistemas de inferencia difusa imitan el razonamiento humano utilizando valores lingüísticos derivados de la aplicación lo que se denomina reglas de inferencia difusa "si....entonces", por ejemplo un inversionista con un alto grado de aversión al riesgo razonaría invertir poco en un instrumento altamente riesgoso, lo cual descrito en términos de una regla de inferencia difusa se describirá que *"si riesgo del instrumento es* *alto, entonces, la inversión debe ser moderada"*, en este caso la variable "riesgo alto" representa una entrada del modelo de inferencia difusa y la variable "inversión moderada" es una salida del mismo.

En este sentido, la realización de un modelo de inferencia difusa requiere el desarrollo de bases de conocimiento las cuales se integran al modelo como reglas de inferencia basadas en los conjuntos o números difusos que describen a las variables lingüísticas del modelo. El principal objetivo de la implementación de modelos de control difuso en la ingeniería y la industria es la realización de una acción, por ejemplo, en los sistemas de aire acondicionado una de las reglas de inferencia establecería "si temperatura es alta entonces enfría mucho". Sin embargo, en las finanzas y la administración la acción toma otra interpretación, en el sentido de que está representa un aviso o sugerencia como en el caso de la inversión en un instrumento de alto riesgo.

La arquitectura básica de un modelo de control difuso queda explicada por el siguiente diagrama.



[1] "Crisp" se utiliza para referirse a valores que aún no han sido fusificados.

Como se observa en el diagrama anterior las entradas y salidas del modelo de control difuso son valores discretos, el bloque denominado fusificador realiza la conversión de valores discretos a términos difusos. La salida es utilizada por el bloque de inferencia difusa para aplicarla a cada una de las regla de inferencia difusa, siguiendo alguno de los métodos de inferencia difusa indicados en el apéndice A de este trabajo; la salida de dicho bloque pueden ser *n* conjuntos difusos cada uno de los cuales es resultado de aplicar la entrada fusificada a cada una de las *n* reglas de inferencia o bien un único conjunto difuso que es resultado de aplicar la unión de los n conjuntos difusos haciendo uso de una de las T-normas definidas en el capítulo 1 del presente trabajo.

4.2 OBJETIVO.

En este caso práctico se ha dispuesto aplicar la teoría de la lógica difusa para analizar el comportamiento de tres indicadores (índice de cobertura de reservas técnicas, índice de cobertura de capital mínimo de garantía e índice de cobertura de capital mínimo pagado) los cuales se detallan más adelante, dichos indicadores describen la solvencia de una institución de seguros o de una institución de fianzas, a fin de analizar a través de los resultados obtenidos de dichos índices, el posicionamiento que las empresas de los sectores asegurador y afianzador mexicano guardan con relación a su grado de solvencia.

Hoy día uno de los aspectos básicos de la regulación y supervisión de las operaciones de dichas instituciones se basa en lograr que las empresas sujetas por ley a dicha regulación cumplan con las obligaciones que han pactado con los asegurados, el cumplimiento de tales obligaciones consiste fundamentalmente en hacer frente a las reclamaciones futuras, para lo cual las empresas deben contar con los recursos financieros suficientes.

En este sentido, los principales fondos o recursos con los que una empresa aseguradora debe contar son las inversiones necesarias destinadas a cubrir sus reservas técnicas, es decir inversiones que superen por lo menos al monto de las mismas, ya que de esta forma llegado el momento de resarcir un daño, se garantiza que una institución contará con los fondos necesarios para el pago de la indemnización correspondiente, así como capital suficiente para soportar financieramente posibles desviaciones en la siniestralidad determinada en los modelos actuariales de cada producto (seguro) que ofrecen las instituciones de seguros, a fin de no incurrir en gastos excesivos por concepto de financiamiento de las erogaciones estimadas en los modelos que conlleven a un quebranto de la estructura financiera de una institución de seguros o fianzas.

A lo anterior, como podemos conocer que una aseguradora nacional cumple adecuadamente o más bien cuenta con los recursos necesarios descritos en el párrafo anterior, al respecto cabe destacar que trimestralmente el regulador, da a conocer a través de su portal de internet al público en general indicadores para tal efecto de los cuales se hará mención más adelante.

4.2.1 DEFINICIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LOS INDICADORES

Para la determinación del grado de cumplimiento que las instituciones de seguros y fianzas proveen para mantener los recursos financieros descritos en el apartado anterior, el organismo regulador, ha instrumentado tres indicadores sencillos denominados indicadores estatutarios, los cuales se detallan a continuación.

4.2.1.1 INDICE DE COBERTURA DE RESERVAS TÉCNICAS

Definición

Las reservas técnicas representan las provisiones necesarias para hacer frente a los riesgos asumidos con los asegurados. Dichas reservas deben ser respaldadas con inversiones que cumplen con condiciones adecuadas de seguridad, rentabilidad y liquidez. Es importante mencionar que estas inversiones deben mantenerse colocadas en todo momento conforme a la regulación aplicable.

Formula

IRT / RT

Donde:

IRT= Inversiones que respaldan las reservas técnicas.

RT= Reservas Técnicas

Interpretación

Cuando este índice es mayor o igual a uno significa que las inversiones cubren las reservas técnicas y que la institución mantiene recursos suficientes para respaldar sus obligaciones; en caso de ser menor a uno la institución no cuenta con inversiones suficientes que cumplen con los requisitos de seguridad y liquidez para respaldar sus reservas técnicas.

Ejemplo de interpretación:

Indice mayor o igual a 1, (condición “buena”)

La Cia. "X" presenta 1.10, esto significa que cubre con inversiones sus reservas técnicas y además tiene un sobrante del 10%.

Indice menor que 1 (condición “mala”)

La Cia. "Z" presenta 0.80, esto significa que sus inversiones no cubren sus reservas técnicas por lo que tiene un faltante del 20%.

4.2.1.2 INDICE DE COBERTURA DE CAPITAL MINIMO DE GARANTIA

Definición

El capital mínimo de garantía es el requerimiento de los recursos patrimoniales, adicional a las reservas técnicas, con los que la institución debe contar para hacer frente a las obligaciones con los asegurados, derivados de desviaciones no esperadas relacionadas con los riesgos técnicos, de reaseguro, financieros y operativos. Las inversiones que respaldan este requerimiento deben encontrarse en condiciones adecuadas de seguridad y liquidez conforme a la regulación aplicable.

Formula

ICMG / RCMG

Donde:

ICMG = Inversiones que respaldan el capital mínimo de garantía más el excedente de inversiones que respaldan las reservas técnicas.

RCMG= Requerimiento de capital Mínimo de Garantía.

Interpretación

Cuando este índice es mayor a uno refleja que las inversiones que pueden respaldar el capital mínimo de garantía cubren el requerimiento y que la institución mantiene inversiones adicionales para respaldarlo; en caso de ser menor a uno las inversiones que cumplen con los requisitos de seguridad y liquidez no son suficientes para respaldar dicho requerimiento.

No tiene caso dar ejemplos de la interpretación de este indicador, ya que su interpretación es análoga a la interpretación que se le da al índice de cobertura de reservas técnicas.

4.2.1.3 INDICE DE COBERTURA DE CAPITAL MINIMO PAGADO

Definición

El Capital Mínimo Pagado es el requerimiento mínimo de recursos que exige la SHCP de conformidad con la regulación aplicable para operar como Institución de Seguros, de acuerdo a las operaciones y ramos autorizados por dicha dependencia.

Formula

CMP / RCMP

Donde:

CMP = Los recursos de capital de la institución computables de acuerdo a la regulación.

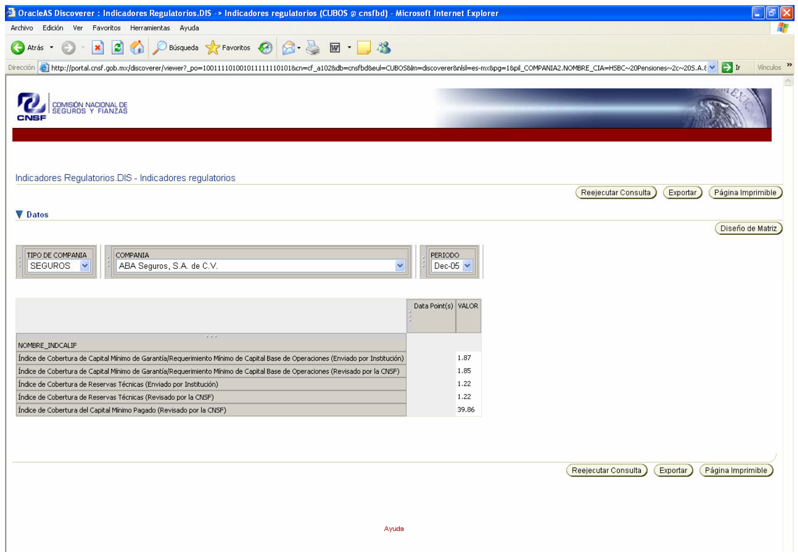
RCMP = Requerimiento de capital mínimo pagado para cada operación y/o ramo para los que esté autorizada la institución.

Interpretación

Cuando este índice es mayor a uno refleja que el total de recursos de capital de la institución, computables de acuerdo a la legislación, es mayor al requerimiento de capital mínimo pagado establecido anualmente por la SHCP para cada operación y/o ramo para los que esté autorizado la institución; cuando es menor a uno representa que los recursos de capital de la institución son menores al requerimiento.

4.3 FUENTE DE INFORMACIÓN

Hasta este momento se han definido los índices que se utilizarán en el modelo de inferencia difusa, antes de continuar, resulta importante señalar la fuente de información para la obtención de la información necesaria para este caso práctico, en este sentido, como ya se mencionó el regulador ofrece a través de su página web la posibilidad de realizar consultas dinámicas de la información que requerimos tal y como se muestra en la siguiente figura:



Cabe destacar que en la figura anterior, se presentan dos datos distintos para cada uno de los índices descritos anteriormente, refiriéndose el campo que señala "Enviado por la institución" al indicador original previó a la auditoria por parte del regulador, ya que cabe destacar que como resultado de la auditoría practicada por dicho Organismo, el indicador puede cambiar debido a las irregularidades detectadas en la revisión de la información con la que se determinan dichos indicadores. En el modelo trabajaremos con el indicador reportado por la institución destacando que el objetivo es mostrar la utilidad del modelo, por lo que no importa cuales datos se consideren.

La tabla siguiente muestra el resultado obtenido para cada uno de los indicadores reportados por las instituciones de seguros y fianzas para el cierre del ejercicio de 2005.

COMPANIA	CRT REV	CMG REV	CMP REV
ABA Seguros, S.A. de C.V.	1.22	1.85	39.86
ACE Seguros, S.A.	1.08	1.08	6.95
Agroasemex, S.A.	1.84	3.02	7.96
AIG México, Compañía de Seguros de Vida, S.A. de C.V.	1.12	1.26	7.04
AIG México, Seguros Interamericana, S.A. de C.V.	1.22	1.3	8.72
Allianz México, S.A., Compañía de Seguros	1.24	2.7	11.32
Amedex, S.A. de C.V.	2.26	2.54	2.25
American National de México, Compañía de Seguros de Vida, S.A. de C.V.	1.04	3.09	1.3
A.N.A. Compañía de Seguros, S.A. de C.V.	1.23	0.97	4.13
Aseguradora Interacciones, S.A., Grupo Financiero Interacciones	1	0.91	3.31
Aseguradora Patrimonial Daños, S.A.	1.56	1.79	1.26
Aseguradora Patrimonial Vida, S.A.	4.94	1571.05	1.02
Assurant Daños México, S.A.	11.79	2.76	1.24
Assurant Vida México, S.A.	9897.48	2740.98	1.18
Atradius Seguros de Crédito, S.A.	1.56	3.21	9.75
Chubb de México, Compañía de Seguros, S.A. de C.V.	1.08	1.4	3.29
Cumbre Compañía de Seguros, S.A. de C.V.	1.23	2.27	2.15
Deco Seguros, S.A. de C.V.	0.87	1.73	1.03
El Aguila, Compañía de Seguros, S.A. de C.V.	1.38	1.78	2.59
Euler Hermes Seguro de Crédito, S.A.	1.19	1.47	1.35
GE Seguros, S.A. de C.V.	1.32	1.7	3.29
General de Seguros, S.A.	1.28	2.16	9.76
Gerling de México Seguros, S.A.	1.65	5.8	1.43
Grupo Mexicano de Seguros, S.A. de C.V.	1	0.94	2.85
Grupo Nacional Provincial, S.A.	0.99	0.78	25
HIR Compañía de Seguros, S.A. de C.V.	1.11	2.55	1.66
HSBC Seguros, S.A. de C.V., Grupo Financiero HSBC	1.34	1.53	17.45
HSBC Vida, S.A. de C.V.	2.34	8.29	18.88
International Health Insurance Danmark México, S.A.	1.67	2290.43	1.3
La Latinoamericana Seguros, S.A.	1	1.1	1.01
La Peninsular Seguros, S.A.	1.07	1.13	1.41
Mapfre Seguros de Crédito, S.A.	2.51	5.64	2.68
Mapfre Tepeyac, S.A.	1.01	1.22	18.86
Metlife México, S.A.	1.11	2.12	202.37
Metropolitana Compañía de Seguros, S.A.	1.06	1.53	5.67
Patrimonial Inbursa, S.A.	4.86	1.58	6.42
Principal México, Compañía de Seguros, S.A. de C.V.	1.02	1.43	3.94
Protección Agropecuaria, Compañía de Seguros, S.A.	1.05	1.48	4.06

QBE del Istmo México, Compañía de Reaseguros, S.A. de C.V.	1.04	1.14	2.4
Quálitas, Compañía de Seguros, S.A. de C.V.	1.06	1	23.75
Reaseguradora Patria, S.A.	1.03	3.43	8.47
Royal & SunAlliance Seguros (México), S.A. de C.V.	1	0.49	3.08
Seguros Afirme, S.A. de C.V., Afirme Grupo Financiero	1.09	1.29	1.78
Seguros Argos, S.A. de C.V.	1.14	1.46	3.59
Seguros Atlas, S.A.	1.01	2.21	15.53
Seguros Azteca, S.A. de C.V.	1.01	0.43	6.19
Seguros Banamex, S.A. de C.V., Grupo Financiero Banamex	1.21	6.53	32.76
Seguros Bancomext, S.A. de C.V.	2.27	3.74	3.9
Seguros Banorte Generali, S.A. de C.V., Grupo Financiero Banorte	1.17	1.21	19.28
Seguros BBVA Bancomer, S.A. de C.V., Grupo Financiero BBVA Bancomer	1.28	2.27	19.62
Seguros Comercial América, S.A. de C.V.	1.07	1.23	58.4
Seguros El Potosí, S.A.	1.23	2.04	1.41
Seguros Inbursa, S.A., Grupo Financiero Inbursa	1.04	1.62	21.26
Seguros Monterrey New York Life, S.A. de C.V.	1.01	1.53	19.63
Seguros Santander Serfín, S.A., Grupo Financiero Santander Serfín	1.51	4.83	9.28
Skandia Vida, S.A. de C.V.	4.26	1.78	2.21
Sompo Japan Insurance de México, S.A. de C.V.	1.21	4.74	2.06
Stewart Title Guaranty de México, S.A. de C.V.	1.64	1.78	1.13
Tokio Marine, Compañía de Seguros, S.A. de C.V.	1.32	1.42	2.01
Torreón, Sociedad Mutualista de Seguros	1.02	100	100
XL Insurance México, S.A. de C.V.	1.56	3.67	1.19
Zurich, Compañía de Seguros, S.A.	1.32	1.89	22.23
Zurich Vida, Compañía de Seguros, S.A.	1.19	2.36	4.09
General de Salud, Compañía de Seguros, S.A.	1.62	2.19	5.31
Médica Integral GNP, S.A de C.V.	1.07	1.26	11.05
Novamedic Seguros de Salud, S.A. de C.V.	1.59	1.74	1.03
Plan Seguro, S.A. de C.V., Compañía de Seguros	1.07	1.09	7.63
Preventis, S.A. de C.V., Grupo Financiero BBVA Bancomer	1.36	1.12	12.49
Salud Comercial América, S.A. de C.V.	1.4	2.02	6.86
Salud Inbursa, S.A.	1.65	4.34	19.75
SaludCoop México, S.A. de C.V.	2.6	54.12	5.23
Seguros Centauro, Salud Especializada, S.A. de C.V.	1.24	1.02	1.93
Seguros del Sanatorio Durango, S.A. de C.V.	1.12	1.23	2.56
Servicios Integrales de Salud Nova, S.A. de C.V.	1.31	2.86	6.3
Vitamédica, S.A. de C.V.	19.46	151.21	6.69
HSBC Pensiones, S.A.	1.03	2.11	1.73

HSBC Rentas Vitalicias, S.A.	1.08	5.78	1.84
Metlife Pensiones México, S.A.	1.07	4.4	3.43
Pensiones Banamex, S.A. de C.V., Grupo Financiero Banamex	1.07	4.28	6.61
Pensiones Banorte Generali, S.A. de C.V., Grupo Financiero Banorte	1.01	1.66	3.23
Pensiones BBVA Bancomer, S.A. de C.V., Grupo Financiero BBVA Bancomer	1	5.28	11.59
Pensiones Comercial América, S.A. de C.V.	1.06	3.23	2.96
Pensiones Inbursa, S.A., Grupo Financiero Inbursa	1	1.47	25.16
Principal Pensiones, S.A. de C.V.	1	1.25	1.14
Profuturo GNP Pensiones, S.A. de C.V.	1	2.09	3.66
Royal & SunAlliance Pensiones (México), S.A. de C.V.	1.1	11.15	1.03
Afianzadora Aserta, S.A. de C.V.	3.22	1.07	2.04
Afianzadora Fiducia, S.A. de C.V.	1.44	100	1.25
Afianzadora Insurgentes, S.A. de C.V.	1.33	1.56	17.59
Afianzadora Sofimex, S.A.	1.58	1.54	4.6
Chubb de México, Compañía Afianzadora, S.A. de C.V.	1.07	100	2.52
Crédito Afianzador, S.A., Compañía Mexicana de Garantías	1.37	100	2.97
Fianzas Asecam, S.A., Grupo Financiero Asecam	1.03	100	1.56
Fianzas Atlas, S.A.	2.27	100	5.97
Fianzas Banorte, S.A. de C.V., Grupo Financiero Banorte	1.44	100	2.58
Fianzas Comercial América, S.A.	1.7	100	2.65
Fianzas Guardiana Inbursa, S.A., Grupo Financiero Inbursa	1.37	100	18.14
Fianzas Monterrey, S.A.	1.6	100	8.65
HSBC Fianzas, S.A., Grupo Financiero HSBC	1.69	100	5.84

4.4 SUPUESTOS DEL MODELO

Una vez determinado el rango en el que los datos se ubican considerado éste como la diferencia entre los índices de mayor y menor magnitud, se procederá al establecimiento de ciertas consideraciones aplicables al modelo respecto al rango en el cual se definirán las variables difusas:

- Para el índice de cobertura de reservas técnicas el rango será de (0.0 a 2.0).

- Para el índice de cobertura de capital mínimo de garantía el rango será de (0.0 a 2.0).
- Para el índice capital mínimo pagado de el rango será de (0.0 a 4.0).

Lo anterior, debido a que según la definición de los indicadores dada a conocer por el regulador, cuando los niveles de dichos índices se encuentran por arriba de la unidad, los niveles e inversión o capitalización según sea el caso, son adecuados con relación al monto de las respectivas bases que fungen como denominador en la determinación de los índices correspondientes. Por lo que corresponde a los casos observados que se encuentran fuera del rango de los indicadores establecido, es posible asignar un valor de pertenencia cero y/o uno, según se requiera, para obtener un mapeo adecuado de la función de pertenencia cuya imagen, por la definición de función de pertenencia citada en el capítulo 1 del presente trabajo, es el intervalo [0,1].

Otra consideración que se tomará en cuenta para la aplicación del modelo, se deriva de la observación de que existen compañías para las cuales el indicador de cobertura de capital mínimo de garantía no está determinado, situación que se debe a que ocurre el caso que la institución no presenta un requerimiento de capital es decir el requerimiento es igual a cero debido a la aplicación de deducciones aplicadas establecidas en el marco regulatorio que propician dicho resultado, no obstante en el modelo se considera análogamente a lo citado en el párrafo anterior una función de pertenencia que toma el valor de uno en estos casos, ya que al tener un requerimiento nulo resulta como considerar que los recursos de la compañía fueron suficientes para realizar su operación de acuerdo a lo que señala el marco regulatorio aplicable.

Por lo tanto, una vez realizadas las consideraciones descritas anteriormente los datos que se muestran en la tabla anterior son las entradas al modelo difuso los cuales conforman lo que en el esquema del mismo descrito con antelación se denomina entrada "crisp", y constituyen los datos que ingresaran al fusificador o módulo que convierte las variables del entorno en variables de conjuntos difusos.

4.5 DEFINICIÓN DE VARIABLES DIFUSAS

Como ya se mencionó, en este caso se aplicará un modelo de inferencia difusa para la clasificación de las instituciones de seguros y fianzas que operan en México en lo que se refiere al cumplimiento de tres requerimientos estatutarios, para lo cual enseguida se definen las variables que intervienen en el modelo.

4.6 DATOS DE ENTRADA AL MODELO

Los datos derivados de la observación del comportamiento de las instituciones de seguros y fianzas son: el índice de cobertura de reservas técnicas, índice de cobertura de capital mínimo de garantía e índice de capital mínimo pagado, por lo que para cada uno de ellos se define las siguientes las variables difusas y los valores que estas pueden tomar, mismas que constituyen las variables de entrada al sistema de inferencia difusa:

- Cobertura de reservas técnicas (buena, regular, mala)♦.
- Cobertura de capital mínimo de garantía (buena, regular, mala).
- Cobertura de capital mínimo pagado (buena, regular, mala).

♦ Cabe destacar que es posible hacer una partición mas refinada, es decir se pudieron utilizar un número mayor a tres de etiquetas lingüísticas.

Debido a que el objetivo del caso práctico es clasificar a las instituciones de acuerdo a su grado de solvencia, los datos de salida resultantes de aplicar a los indicadores de coberturas las funciones implícitas del modelo de inferencia difusa, deben proporcionar la base para realizar dicha clasificación por lo que se define a la variable de salida del modelo de inferencia como “Índice global de cobertura”, el cual va a tomar valores dentro de los subconjuntos difusos “bueno”, “regular” y “malo”.

4.7 FUNCIONES DE PERTENENCIA

En lo párrafos anteriores hemos definido tanto las variables de entrada y salida del modelo de inferencia difusa las cuales son de naturaleza difusa y como ya se ha mencionado a lo largo de este trabajo cada subconjunto difuso tiene asociada una función de pertenencia, que indica el grado de pertenencia de un elemento a cada uno de los subconjuntos difusos, en este caso práctico las funciones de pertenencia para el caso de la información de entrada que enseguida se definen, deben asociar un valor a cada uno de los indicadores de cada compañía, que indique el grado de pertenencia de cada indicador para cada uno de los conjuntos borrosos (“bueno”, “regular”, “malo”).

Para la definición de las funciones de pertenencia de los subconjuntos difusos se utilizarán funciones de tipo triangular definidas en el primer capítulo de este trabajo debido a la economía que presentan en cuanto a los cálculos computacionales se refiere.

Tomando en cuenta las consideraciones realizadas en párrafos anteriores acerca de los datos que están fuera de los rangos determinados para cada uno de los indicadores, así como de aquellos que no son determinados, la función de pertenencia de los subconjuntos difusos de las variables “Indice de cobertura de reservas técnicas (malo, regular, bueno)”, e “Indice de cobertura de capital mínimo de garantía (malo, regular, bueno), se mapea dentro del intervalo [0,2], por lo que para los índices que se encuentran fuera de dicho rango se considera que pertenecen al conjunto difuso malo o bueno, según sea el caso, con un grado de pertenencia igual a uno. En la siguiente figura se muestra la grafica de la función de pertenencia de los subconjuntos de difusos de referencia.

La selección de los rangos para cada uno de los subconjuntos difusos depende de la experiencia de los especialistas, de tal forma que un modelo o sistema de análisis difuso debe ser calibrado a fin de que la información derivada de la experiencia sea adecuadamente considerada en el modelo, en este caso práctico la selección de rangos para las funciones de pertenencia se determinó con base en la observación que se ha tenido del comportamiento de dichos indicadores y tomando en cuenta para el caso de la función de pertenencia del subconjunto difuso asociado a la variable lingüística “regular”, que aún cuando un índice se ubica por debajo de la unidad se produce una infracción al marco normativo aplicable a las coberturas, el haber seleccionado el rango a partir de 0.75 y hasta 1.25 como “regular” se explica debido a que en la práctica cuando una aseguradora muestra un índice por debajo de la unidad las aseguradoras pueden implementar mecanismos de regularización, por lo que existe una fuerte tendencia a recuperar la estabilidad en el resultado de dicho indicador, sin embargo, cuando los niveles de déficit superan a un 25.0%, se considera una condición mala.

La función de pertenencia para cada uno de los subconjuntos difusos esta dada por:

Función de pertenencia para la variable lingüística “malo” (M).

$$\mu_M(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 0.75 \\ 4(1-x) & 0.75 < x < 1 \\ 0 & o.c. \end{cases}$$

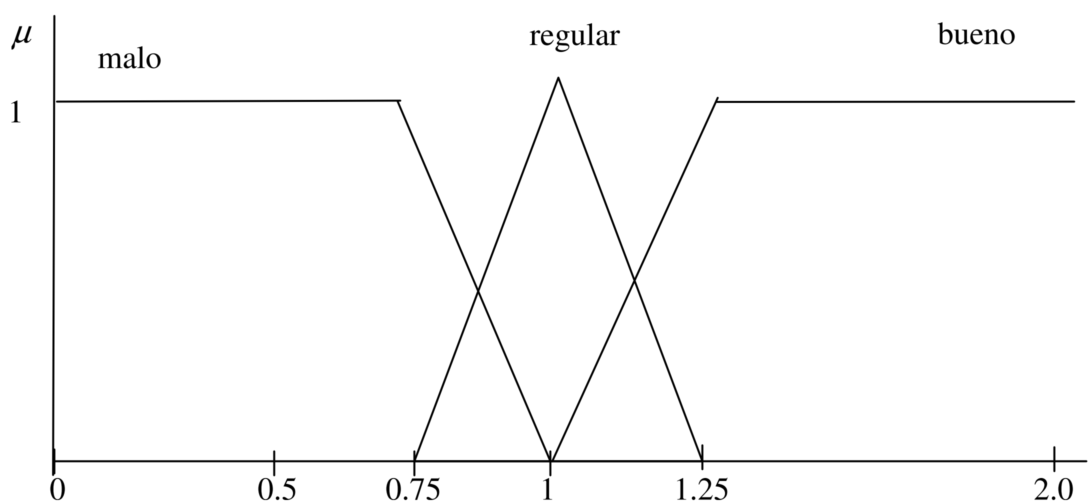
Función de pertenencia para la variable lingüística "regular" (R).

$$\mu_R(x) = \begin{cases} 4x-3 & 3/4 \le x \le 1 \\ 5-4x & 1 < x \le 5/4 \\ 0 & o.c. \end{cases}$$

Función de pertenencia para la variable lingüística "bueno" (B).

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 4(x-1) & 1 \le x \le 5/4 \\ 1 & 5/4 < x \le \infty \\ 0 & o.c. \end{cases}$$

Gráfica de las funciones anteriores.



Las funciones de pertenencia antes definidas serán aplicadas para determinar los valores de pertenencia de los subconjuntos difusos correspondientes a las variables difusas definidas para el índice de cobertura de reservas técnicas e índice de cobertura de capital mínimo de garantía. Cabe señala que las funciones de pertenencia de los subconjuntos difusos asociados al índice de cobertura de capital mínimo pagado difieren de las anteriores en virtud de que dicho índice toma valores en un rango distinto, no obstante, la forma de dicha función es similar a las descritas anteriormente, en este sentido las funciones de pertenencia de los subconjuntos difusos asociados al índice de capital mínimo pagado son las siguientes:

Función de pertenencia para la variable lingüística “malo” (M).

$$\mu_M(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1.0 \\ 3 - 2x & 1 < x < 3/2 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Función de pertenencia para la variable lingüística “regular” (R).

$$\mu_R(x) = \begin{cases} 2(x-1) & 1 \le x \le 3/2 \\ 2(2-x) & 3/2 < x \le 2 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Función de pertenencia para la variable lingüística “bueno” (B).

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 2(x-3) & 3/2 \leq x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \leq \infty \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

4.8 FUSIFICADOR

Se realizó un programa en Visual Basic para la implementación del modelo en excel, llevando a cabo en primera instancia la carga de los datos conformados por los índices de cobertura observados para cada una de las instituciones de seguros y fianzas desde la hoja de cálculo hacia un arreglo en memoria, aplicando posteriormente a cada uno de los indicadores la función de pertenencia correspondiente, con lo cual se obtienen los subconjuntos difusos en los que se agrupa a cada uno de dichos índices. La subrutina se encuentra en forma completa como anexo 1 del presente trabajo.

4.8.1 SALIDA DEL FUSIFICADOR

En la siguiente tabla se muestra parte de los datos de los subconjuntos difusos ya con el grado de pertenencia para cada uno de ellos, la tabla completa para la totalidad del las instituciones se muestra en el anexo 2 del presente trabajo.

COMPANIA	CRT REV	M	R	B	CMG REV	M	R	B	CMP REV	M	R	B
ABA Seguros, S.A. de C.V.	1.22	0.00	0.12	0.88	1.85	0.00	0.00	1.00	39.86	0.00	0.00	1.00
ACE Seguros, S.A.	1.08	0.00	0.68	0.32	1.08	0.00	0.68	0.32	6.95	0.00	0.00	1.00
Agroasemex, S.A.	1.84	0.00	0.00	1.00	3.02	0.00	0.00	1.00	7.96	0.00	0.00	1.00

COMPANIA	CRT REV	M	R	B	CMG REV	M	R	B	CMP REV	M	R	B
AIG México, Compañía de Seguros de Vida, S.A. de C.V.	1.12	0.00	0.52	0.48	1.26	0.00	0.00	1.00	7.04	0.00	0.00	1.00
AIG México, Seguros Interamericana, S.A. de C.V.	1.22	0.00	0.12	0.88	1.3	0.00	0.00	1.00	8.72	0.00	0.00	1.00
Allianz México, S.A., Compañía de Seguros	1.24	0.00	0.04	0.96	2.7	0.00	0.00	1.00	11.32	0.00	0.00	1.00
Amedex, S.A. de C.V.	2.26	0.00	0.00	1.00	2.54	0.00	0.00	1.00	2.25	0.00	0.00	1.00
American National de México, Compañía de Seguros de Vida, S.A. de C.V.	1.04	0.00	0.84	0.16	3.09	0.00	0.00	1.00	1.3	0.40	0.60	0.00
A.N.A. Compañía de Seguros, S.A. de C.V.	1.23	0.00	0.08	0.92	0.97	0.12	0.88	0.00	4.13	0.00	0.00	1.00
Aseguradora Interacciones, S.A., Grupo Financiero Interacciones	1	0.00	1.00	0.00	0.91	0.36	0.64	0.00	3.31	0.00	0.00	1.00
Aseguradora Patrimonial Daños, S.A.	1.56	0.00	0.00	1.00	1.79	0.00	0.00	1.00	1.26	0.48	0.52	0.00
Aseguradora Patrimonial Vida, S.A.	4.94	0.00	0.00	1.00	1571.05	0.00	0.00	1.00	1.02	0.96	0.04	0.00
Assurant Daños México, S.A.	11.79	0.00	0.00	1.00	2.76	0.00	0.00	1.00	1.24	0.52	0.48	0.00

Tabla de datos fusificados

4.9 REGLAS DE INFERENCIA DIFUSA

Hasta este momento ya se cuenta con los datos de entrada al modelo de inferencia difusa, lo que sigue es determinar las reglas de inferencia difusa que son la base del conocimiento del modelo de inferencia, como ya se menciono en otro apartado del presente trabajo, dichas reglas están formadas por sentencias del tipo "si...entonces", es decir, si el antecedente se presenta entonces se activara o presentará lo consecuente, para el caso práctico que se esta detallando se utilizaron un total de 27 reglas de inferencia, ya que cada una de las variables difusas cuenta con tres posibles valores por lo que el total de reglas difusas es 3x3x3= 27.

En este caso, debido a que son pocas las reglas de inferencia difusa, se utilizaran todas, no obstante para otros casos en los que esto no sucede, la revisión por parte de los expertos puede ayudar a determinar aquellas reglas que son útiles al modelo, ya que no siempre la combinación de todas las reglas resulta de utilidad debido a que muchas de ellas en la vida real no se cumplen, asimismo, resulta importante destacar que es en esta parte de la implementación del modelo de inferencia difusa, que los conocimientos de los expertos en el problema resultan importantes, ya que es en esta parte en la cual se genera la base de decisiones.

Para exhibir las reglas de inferencia difusa se utilizaran las palabras en ingles reservadas para los conectores y operadores lógicos dispuestos en diversos entornos de programación (IF, AND y THEN).

		CONJUNTO 1	VR1		CONJUNTO 2	VR2		CONJUNTO 3	VR3		GLOBAL	RES
1	IF	Nivel de Indice de CRT	M	AND	Nivel de Indice de CMG	M	AND	Nivel de Indice de CMP	M	THEN	Nivel general	MM
2	IF	Nivel de Indice de CRT	M	AND	Nivel de Indice de CMG	M	AND	Nivel de Indice de CMP	R	THEN	Nivel general	MM
3	IF	Nivel de Indice de CRT	M	AND	Nivel de Indice de CMG	M	AND	Nivel de Indice de CMP	B	THEN	Nivel general	M
4	IF	Nivel de Indice de CRT	M	AND	Nivel de Indice de CMG	R	AND	Nivel de Indice de CMP	M	THEN	Nivel general	MM
5	IF	Nivel de Indice de CRT	M	AND	Nivel de Indice de CMG	R	AND	Nivel de Indice de CMP	R	THEN	Nivel general	R
6	IF	Nivel de Indice de CRT	M	AND	Nivel de Indice de CMG	R	AND	Nivel de Indice de CMP	B	THEN	Nivel general	R
7	IF	Nivel de Indice de CRT	M	AND	Nivel de Indice de CMG	B	AND	Nivel de Indice de CMP	M	THEN	Nivel general	M
8	IF	Nivel de Indice de CRT	M	AND	Nivel de Indice de CMG	B	AND	Nivel de Indice de CMP	R	THEN	Nivel general	R
9	IF	Nivel de Indice de CRT	M	AND	Nivel de Indice de CMG	B	AND	Nivel de Indice de CMP	B	THEN	Nivel general	R
10	IF	Nivel de Indice de CRT	R	AND	Nivel de Indice de CMG	M	AND	Nivel de Indice de CMP	M	THEN	Nivel general	MM
11	IF	Nivel de Indice de CRT	R	AND	Nivel de Indice de CMG	M	AND	Nivel de Indice de CMP	R	THEN	Nivel general	R
12	IF	Nivel de Indice de CRT	R	AND	Nivel de Indice de CMG	M	AND	Nivel de Indice de CMP	B	THEN	Nivel general	R
13	IF	Nivel de Indice de CRT	R	AND	Nivel de Indice de CMG	R	AND	Nivel de Indice de CMP	M	THEN	Nivel general	R
14	IF	Nivel de Indice de CRT	R	AND	Nivel de Indice de CMG	R	AND	Nivel de Indice de CMP	R	THEN	Nivel general	B
15	IF	Nivel de Indice de CRT	R	AND	Nivel de Indice de CMG	R	AND	Nivel de Indice de CMP	B	THEN	Nivel general	B
16	IF	Nivel de Indice de CRT	R	AND	Nivel de Indice de CMG	B	AND	Nivel de Indice de CMP	M	THEN	Nivel general	R
17	IF	Nivel de Indice de CRT	R	AND	Nivel de Indice de CMG	B	AND	Nivel de Indice de CMP	R	THEN	Nivel general	R
18	IF	Nivel de Indice de CRT	R	AND	Nivel de Indice de CMG	B	AND	Nivel de Indice de CMP	B	THEN	Nivel general	MB
19	IF	Nivel de Indice de CRT	B	AND	Nivel de Indice de CMG	M	AND	Nivel de Indice de CMP	M	THEN	Nivel general	M
20	IF	Nivel de Indice de CRT	B	AND	Nivel de Indice de CMG	M	AND	Nivel de Indice de CMP	R	THEN	Nivel general	R
21	IF	Nivel de Indice de CRT	B	AND	Nivel de Indice de CMG	M	AND	Nivel de Indice de CMP	B	THEN	Nivel general	R

		CONJUNTO 1	VR1		CONJUNTO 2	VR2		CONJUNTO 3	VR3		GLOBAL	RES
22	IF	Nivel de Indice de CRT	B	AND	Nivel de Indice de CMG	R	AND	Nivel de Indice de CMP	M	THEN	Nivel general	R
23	IF	Nivel de Indice de CRT	B	AND	Nivel de Indice de CMG	R	AND	Nivel de Indice de CMP	R	THEN	Nivel general	R
24	IF	Nivel de Indice de CRT	B	AND	Nivel de Indice de CMG	R	AND	Nivel de Indice de CMP	B	THEN	Nivel general	MB
25	IF	Nivel de Indice de CRT	B	AND	Nivel de Indice de CMG	B	AND	Nivel de Indice de CMP	M	THEN	Nivel general	R
26	IF	Nivel de Indice de CRT	B	AND	Nivel de Indice de CMG	B	AND	Nivel de Indice de CMP	R	THEN	Nivel general	B
27	IF	Nivel de Indice de CRT	B	AND	Nivel de Indice de CMG	B	AND	Nivel de Indice de CMP	B	THEN	Nivel general	MB

Tabla de base de reglas difusas

Nomenclatura de la tabla (Variables difusas)

MM := muy malo

M := Malo

R := Regular

B := Bueno

MB := muy bueno

Por lo tanto, las reglas difusas establecidas en la tabla anterior, combinan los tres conjuntos difusos de entrada conocidos como antecedentes o premisas (VR1, VR2 y VR3) y les asocian el conjunto difuso de salida RES conocido como consecuente; como se puede observar en la tabla, los conjuntos difusos antecedentes se asocian mediante los conectivos lógicos. Las reglas difusas permiten expresar el conocimiento que se dispone sobre la relación entre antecedentes y consecuentes. Al conjunto de reglas difusas se le conoce como base de reglas y constituye el conjunto de reglas que expresan las relaciones conocidas entre antecedentes y consecuentes.

4.10 METODO DE INFERENCIA DIFUSA

El siguiente paso es introducir cada una de las variables difusas y la base de reglas difusas, con el fin de obtener los valores de salida a partir de los valores de las variables lingüísticas de entrada mostrados en la tabla de datos fusificados. Para determinar el grado de pertenencia del indicador global, será necesario conocer el grado de verdad de la regla utilizada. Dado que se trata de reglas compuestas por más de un antecedente, el grado de pertenencia de la regla se determinará a partir del grado de verdad de cada uno de los antecedentes, relacionados a través de una T-norma. En este caso la T-norma que va a utilizarse será el producto descrito en el primer capítulo de este trabajo, de tal forma que para la base de reglas definida en la tabla anterior se tiene que:

$$\mu_{RES}(global) = \mu_{VR1}(conj1) * \mu_{VR2}(conj2) * \mu_{VR3}(conj3)$$

Dado que en la base de reglas difusas, existen reglas diferentes con el mismo consecuente como por ejemplo:

IF Nivel de Indice de CRT R AND Nivel de Indice de CMG B AND Nivel de Indice de CMP B THEN Nivel general MB

IF Nivel de Indice de CRT B AND Nivel de Indice de CMG R AND Nivel de Indice de CMP B THEN Nivel general MB

Para determinar del grado de pertenencia total al subconjunto Nivel general Muy bueno, se utilizó la forma propuesta por Sugeno♦, en el que la función de salida es una combinación lineal de las variables de entrada ya que mantiene la unicidad en el grado de pertenencia total a los diferentes subconjuntos borrosos de una variable, por lo que para cada uno de los subconjuntos difusos tienen las funciones que determinan el grado de pertenencia total para cada uno de ellos.

♦ Ver bibliografía.

$$\mu_{MM\_TOTAL}(índiceCRT) = \sum_{i} \mu_{MMi}(índCRT)$$

Donde i suma la totalidad de las 27 reglas difusas cuyo consecuente se establece como “muy malo” (MM). Análogamente para el grado de pertenencia de los restante subconjuntos difusos se realiza el mismo procedimiento.

4.11 RESULTADO

La determinación del indicador global arroja la siguiente clasificación para cada una de las compañías del sector asegurador y afianzador mostrando en las columnas el grado de pertenencia asociado a cada uno de los subconjuntos difusos del indicador global planteado para este caso práctico.

COMPAÑÍA	M	R	B	MB
ABA Seguros, S.A. de C.V.				1.00
ACE Seguros, S.A.			0.46	0.54
Agroasemex, S.A.				1.00
AIG México, Compañía de Seguros de Vida, S.A. de C.V.				1.00
AIG México, Seguros Interamericana, S.A. de C.V.				1.00
Allianz México, S.A., Compañía de Seguros				1.00
Amedex, S.A. de C.V.				1.00
American National de México, Compañía de Seguros de Vida, S.A. de C.V.		0.90	0.10	
A.N.A. Compañía de Seguros, S.A. de C.V.		0.12	0.07	0.81
Aseguradora Interacciones, S.A., Grupo Financiero Interacciones		0.36	0.64	
Aseguradora Patrimonial Daños, S.A.		0.48	0.52	
Aseguradora Patrimonial Vida, S.A.		0.96	0.04	
Assurant Daños México, S.A.		0.52	0.48	
Assurant Vida México, S.A.		0.64	0.36	
Atradius Seguros de Crédito, S.A.				1.00
Chubb de México, Compañía de Seguros, S.A. de C.V.				1.00
Cumbre Compañía de Seguros, S.A. de C.V.				1.00
Deco Seguros, S.A. de C.V.	0.49	0.51		
El Aguila, Compañía de Seguros, S.A. de C.V.				1.00
Euler Hermes Seguro de Crédito, S.A.		0.47	0.53	

GE Seguros, S.A. de C.V.				1.00
General de Seguros, S.A.				1.00
Gerling de México Seguros, S.A.		0.14	0.86	
Grupo Mexicano de Seguros, S.A. de C.V.		0.24	0.76	
Grupo Nacional Provincial, S.A.	0.04	0.85	0.12	
HIR Compañía de Seguros, S.A. de C.V.		0.38	0.30	0.32
HSBC Seguros, S.A. de C.V., Grupo Financiero HSBC				1.00
HSBC Vida, S.A. de C.V.				1.00
International Health Insurance Danmark México, S.A.		0.40	0.60	
La Latinoamericana Seguros, S.A.		0.99	0.01	
La Peninsular Seguros, S.A.		0.60	0.40	
Mapfre Seguros de Crédito, S.A.				1.00
Mapfre Tepeyac, S.A.			0.12	0.88
Metlife México, S.A.				1.00
Metropolitana Compañía de Seguros, S.A.				1.00
Patrimonial Inbursa, S.A.				1.00
Principal México, Compañía de Seguros, S.A. de C.V.				1.00
Protección Agropecuaria, Compañía de Seguros, S.A.				1.00
QBE del Istmo México, Compañía de Reaseguros, S.A. de C.V.			0.37	0.63
Quálitas, Compañía de Seguros, S.A. de C.V.			0.76	0.24
Reaseguradora Patria, S.A.				1.00
Royal & SunAlliance Seguros (México), S.A. de C.V.		1.00		
Seguros Afirme, S.A. de C.V., Afirme Grupo Financiero		0.28	0.16	0.56
Seguros Argos, S.A. de C.V.				1.00
Seguros Atlas, S.A.				1.00
Seguros Azteca, S.A. de C.V.		1.00		
Seguros Banamex, S.A. de C.V., Grupo Financiero Banamex				1.00
Seguros Bancomext, S.A. de C.V.				1.00
Seguros Banorte Generali, S.A. de C.V., Grupo Financiero Banorte			0.05	0.95
Seguros BBVA Bancomer, S.A. de C.V., Grupo Financiero BBVA Bancomer				1.00
Seguros Comercial América, S.A. de C.V.			0.06	0.94
Seguros El Potosí, S.A.		0.25	0.75	
Seguros Inbursa, S.A., Grupo Financiero Inbursa				1.00
Seguros Monterrey New York Life, S.A. de C.V.				1.00
Seguros Santander Serfín, S.A., Grupo Financiero Santander Serfín				1.00
Skandia Vida, S.A. de C.V.				1.00
Sompo Japan Insurance de México, S.A. de C.V.				1.00
Stewart Title Guaranty de México, S.A. de C.V.		0.74	0.26	
Tokio Marine, Compañía de Seguros, S.A. de C.V.				1.00
Torreón, Sociedad Mutualista de Seguros				1.00
XL Insurance México, S.A. de C.V.		0.62	0.38	
Zurich, Compañía de Seguros, S.A.				1.00
Zurich Vida, Compañía de Seguros, S.A.				1.00
General de Salud, Compañía de Seguros, S.A.				1.00
Médica Integral GNP, S.A de C.V.				1.00

Novamedic Seguros de Salud, S.A. de C.V.		0.94	0.06	
Plan Seguro, S.A. de C.V., Compañía de Seguros			0.46	0.54
Preventis, S.A. de C.V., Grupo Financiero BBVA Bancomer				1.00
Salud Comercial América, S.A. de C.V.				1.00
Salud Inbursa, S.A.				1.00
SaludCoop México, S.A. de C.V.				1.00
Seguros Centauro, Salud Especializada, S.A. de C.V.		0.12	0.05	0.83
Seguros del Sanatorio Durango, S.A. de C.V.			0.04	0.96
Servicios Integrales de Salud Nova, S.A. de C.V.				1.00
Vitamédica, S.A. de C.V.				1.00
HSBC Pensiones, S.A.		0.48	0.06	0.46
HSBC Rentas Vitalicias, S.A.		0.22	0.10	0.68
Metlife Pensiones México, S.A.				1.00
Pensiones Banamex, S.A. de C.V., Grupo Financiero Banamex				1.00
Pensiones Banorte Generali, S.A. de C.V., Grupo Financiero Banorte				1.00
Pensiones BBVA Bancomer, S.A. de C.V., Grupo Financiero BBVA Bancomer				1.00
Pensiones Comercial América, S.A. de C.V.				1.00
Pensiones Inbursa, S.A., Grupo Financiero Inbursa				1.00
Principal Pensiones, S.A. de C.V.		1.00		
Profuturo GNP Pensiones, S.A. de C.V.				1.00
Royal & SunAlliance Pensiones (México), S.A. de C.V.		0.98	0.02	
Afianzadora Aserta, S.A. de C.V.				1.00
Afianzadora Fiducia, S.A. de C.V.		0.50	0.50	
Afianzadora Insurgentes, S.A. de C.V.				1.00
Afianzadora Sofimex, S.A.				1.00
Chubb de México, Compañía Afianzadora, S.A. de C.V.				1.00
Crédito Afianzador, S.A., Compañía Mexicana de Garantías				1.00
Fianzas Asecam, S.A., Grupo Financiero Asecam		0.77	0.11	0.12
Fianzas Atlas, S.A.				1.00
Fianzas Banorte, S.A. de C.V., Grupo Financiero Banorte				1.00
Fianzas Comercial América, S.A.				1.00
Fianzas Guardiana Inbursa, S.A., Grupo Financiero Inbursa				1.00
Fianzas Monterrey, S.A.				1.00
HSBC Fianzas, S.A., Grupo Financiero HSBC				1.00

Cabe destacar que en la tabla anterior, se omitieron los ceros en las celdas vacías a fin de apreciar los valores que clasifican a la variable difusa.

Cabe destacar que los sistemas o modelos de lógica difusa deben ser calibrados a fin de que reflejen con mayor precisión el conocimiento de los expertos en el problema que a través de ellos se aborda. Asimismo, resulta importante señalar que en la determinación de la clasificación anterior no se consideró el efecto de la revisión por parte de los auditores de la CNSF, por lo que los datos que se concluyen consideran los índices originales reflejados por las compañías del sector asegurador y afianzador.

CONCLUSIONES

Con base en la teoría de la lógica difusa es posible realizar una clasificación de las instituciones del sector asegurador y afianzador, cabe destacar que en este trabajo se eligieron únicamente tres indicadores, no obstante, el análisis aquí presentado puede ser extendido a fin de utilizar más indicadores técnico financiero y de reaseguro a fin de obtener un marco de referencia más amplio.

Por otra parte, es importante señalar que hoy día debido al reducido tamaño de los sectores asegurador y afianzador mexicano, resulte no muy atractivo realizar un análisis de este tipo haciendo uso de la teoría de la lógica difusa, no obstante, a medida que la información con la que se cuenta es más densa y el crecimiento de los sectores aumenta, podría ser útil implementar mecanismos que ayuden a la evaluación y supervisión de entes no solo del sector asegurador y afianzador, sino de cualquier sector de la economía y en este, sentido, la lógica difusa resulta ser una herramienta más para la resolución de problemas en la toma de decisiones.

No obstante lo anterior, como conclusión principal de esta trabajo esta el hecho de ver como la lógica difusa puede ser una herramienta útil en la toma de decisiones en problemas en los que la ambigüedad se hace presente, y como es posible aplicar la teoría de la lógica difusa a problemas del ámbito financiero y administrativo.

BIBLIOGRAFIA

Bonifacio Martín del Brío (2002), Alfredo Sanz Molina Redes Neuronales y Sistemas Difusos, Alfaomega Grupo Editorial S.A. de C.V.

Bojadziev George, Bojadziev María, Fuzzy Logia For Business, Finance and Management, BrithisLibrary Cataloguing.

Sugeno, M. (1985), "An Introductory Survey of Fuzzy Control", in: Information Science.

Altrock, C. von. Fuzzy Logic and Neurofuzzy Applications Explained. Prentice-Hall, 1995.

kaufmann, A. (1975) Introduction to the Theory of Fuzzy Substs Academic press, New York.

kaufmann, A., Gupta, M.M.(1985), Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications, Van Nostrand Reinhold, New York.

Zimmerman, H. J. (1984), Fuzzy Set Theory and its Applications, Kluwer-Nijhoff Publishing, Boston.

ANEXOS

Anexo 1

Subrrutina (fusificador)

```
Sub fusificador()

' México, D.F., a 22 de eneno de 2006.
' La siguiente subrrutina realiza la fusificación de los datos de
' entrada al modelo de inferencia difusa a través de la implementación de números
' difusos de tipo triangular y trapezoidal.

'** Definiciòn de variables

'* La dimenciòn de los arreglos se establecio en 104,
'* por lo que de querer considerar más instituciones habría que reservar
'* un espacio mayor en memoria

Dim cias(104) As String
Dim ICRT(104) As Double
Dim ICMG(104) As Double
Dim ICMP(104) As Double
Dim i As Integer
Dim f1M(104, 2), f1R(104, 2), f1B(104, 2) As Double 'Variables difusas para ICRT
Dim f2M(104, 2), f2R(104, 2), f2B(104, 2) As Double 'Variables difusas para ICMG
Dim f3M(104, 2), f3R(104, 2), f3B(104, 2) As Double 'Variables difusas para ICMG
```

```
'* Lectura y carga de los datos a la memoria.
'* Para la realización de la lectura y carga de los índices a la memoria
'* es necesario situarlos en tres columnas contiguas despues del
'* identificador de la institución en el orden ICRT, ICMG e ICMP y a partir
'* del segundo renglón de la hoja 1 del libro activo.

Sheets(1).Select

For i = 1 To 104
    cias(i) = Range(Cells(1 + i, 1), Cells(1 + i, 1)).Value
    ICRT(i) = Range(Cells(1 + i, 2), Cells(1 + i, 2)).Value
    ICMG(i) = Range(Cells(1 + i, 3), Cells(1 + i, 3)).Value
    ICMP(i) = Range(Cells(1 + i, 4), Cells(1 + i, 4)).Value
Next i

'******** Indice de cobertura de reservas técnicas *********************

'* Implementación de la función del subconjunto de la variable "malo"

For i = 1 To 104
    f1M(i, 1) = ICRT(i)

    If ICRT(i) >= 0 And ICRT(i) < 0.75 Then
       f1M(i, 2) = 1
       ElseIf ICRT(i) >= 0.75 And ICRT(i) < 1 Then
            f1M(i, 2) = 4 * (1 - ICRT(i))
       Else
            f1M(i, 2) = 0
    End If

Next i

'* Implementación de la función del subconjunto de la variable "regular"

For i = 1 To 104
    f1R(i, 1) = ICRT(i)
```

```
    If ICRT(i) >= 0.75 And ICRT(i) < 1 Then
       f1R(i, 2) = 4 * ICRT(i) - 3
       ElseIf ICRT(i) >= 1 And ICRT(i) < 1.25 Then
            f1R(i, 2) = -4 * ICRT(i) + 5
       Else
            f1R(i, 2) = 0
    End If

Next i

'* Implementación de la función del subconjunto de la variable "bueno"

For i = 1 To 104
    f1B(i, 1) = ICRT(i)

    If ICRT(i) >= 1 And ICRT(i) < 1.25 Then
       f1B(i, 2) = 4 * (ICRT(i) - 1)
       ElseIf ICRT(i) >= 1.25 And ICRT(i) <= 100000 Then
            f1B(i, 2) = 1
       Else
            f1B(i, 2) = 0
    End If

Next i

For i = 1 To 104
    Range(Cells(1 + i, 5), Cells(1 + i, 5)).Value = f1M(i, 2)
    Range(Cells(1 + i, 6), Cells(1 + i, 6)).Value = f1R(i, 2)
    Range(Cells(1 + i, 7), Cells(1 + i, 7)).Value = f1B(i, 2)

Next i
```

.... La parte que continúa del código es análoga a la presentada solamente cambia el nombre de las variables y los rangos de lectura y asignación de los datos utilizados.

```
End sub.
```

Anexo 2

Tabla de datos fusificados.

COMPANIA	CRT REV	M	R	B	CMG REV	M	R	B	CMP REV	M	R	B
ABA Seguros, S.A. de C.V.	1.22	0.00	0.12	0.88	1.85	0.00	0.00	1.00	39.86	0.00	0.00	1.00
ACE Seguros, S.A.	1.08	0.00	0.68	0.32	1.08	0.00	0.68	0.32	6.95	0.00	0.00	1.00
Agroasemex, S.A.	1.84	0.00	0.00	1.00	3.02	0.00	0.00	1.00	7.96	0.00	0.00	1.00
AIG México, Compañía de Seguros de Vida, S.A. de C.V.	1.12	0.00	0.52	0.48	1.26	0.00	0.00	1.00	7.04	0.00	0.00	1.00
AIG México, Seguros Interamericana, S.A. de C.V.	1.22	0.00	0.12	0.88	1.3	0.00	0.00	1.00	8.72	0.00	0.00	1.00
Allianz México, S.A., Compañía de Seguros	1.24	0.00	0.04	0.96	2.7	0.00	0.00	1.00	11.32	0.00	0.00	1.00
Amedex, S.A. de C.V.	2.26	0.00	0.00	1.00	2.54	0.00	0.00	1.00	2.25	0.00	0.00	1.00
American National de México, Compañía de Seguros de Vida, S.A. de C.V.	1.04	0.00	0.84	0.16	3.09	0.00	0.00	1.00	1.3	0.40	0.60	0.00
A.N.A. Compañía de Seguros, S.A. de C.V.	1.23	0.00	0.08	0.92	0.97	0.12	0.88	0.00	4.13	0.00	0.00	1.00
Aseguradora Interacciones, S.A., Grupo Financiero Interacciones	1	0.00	1.00	0.00	0.91	0.36	0.64	0.00	3.31	0.00	0.00	1.00
Aseguradora Patrimonial Daños, S.A.	1.56	0.00	0.00	1.00	1.79	0.00	0.00	1.00	1.26	0.48	0.52	0.00
Aseguradora Patrimonial Vida, S.A.	4.94	0.00	0.00	1.00	1571	0.00	0.00	1.00	1.02	0.96	0.04	0.00
Assurant Daños México, S.A.	11.79	0.00	0.00	1.00	2.76	0.00	0.00	1.00	1.24	0.52	0.48	0.00
Assurant Vida México, S.A.	9897	0.00	0.00	1.00	2741	0.00	0.00	1.00	1.18	0.64	0.36	0.00
Atradius Seguros de Crédito, S.A.	1.56	0.00	0.00	1.00	3.21	0.00	0.00	1.00	9.75	0.00	0.00	1.00
Chubb de México, Compañía de Seguros, S.A. de C.V.	1.08	0.00	0.68	0.32	1.4	0.00	0.00	1.00	3.29	0.00	0.00	1.00
Cumbre Compañía de Seguros, S.A. de C.V.	1.23	0.00	0.08	0.92	2.27	0.00	0.00	1.00	2.15	0.00	0.00	1.00
Deco Seguros, S.A. de C.V.	0.87	0.52	0.48	0.00	1.73	0.00	0.00	1.00	1.03	0.94	0.06	0.00
El Aguila, Compañía de Seguros, S.A. de C.V.	1.38	0.00	0.00	1.00	1.78	0.00	0.00	1.00	2.59	0.00	0.00	1.00
Euler Hermes Seguro de Crédito, S.A.	1.19	0.00	0.24	0.76	1.47	0.00	0.00	1.00	1.35	0.30	0.70	0.00
GE Seguros, S.A. de C.V.	1.32	0.00	0.00	1.00	1.7	0.00	0.00	1.00	3.29	0.00	0.00	1.00
General de Seguros, S.A.	1.28	0.00	0.00	1.00	2.16	0.00	0.00	1.00	9.76	0.00	0.00	1.00
Gerling de México Seguros, S.A.	1.65	0.00	0.00	1.00	5.8	0.00	0.00	1.00	1.43	0.14	0.86	0.00
Grupo Mexicano de Seguros, S.A. de C.V.	1	0.00	1.00	0.00	0.94	0.24	0.76	0.00	2.85	0.00	0.00	1.00
Grupo Nacional Provincial, S.A.	0.99	0.04	0.96	0.00	0.78	0.88	0.12	0.00	25	0.00	0.00	1.00
HIR Compañía de Seguros, S.A. de C.V.	1.11	0.00	0.56	0.44	2.55	0.00	0.00	1.00	1.66	0.00	0.68	0.32

HSBC Seguros, S.A. de C.V., Grupo Financiero HSBC	1.34	0.00	0.00	1.00	1.53	0.00	0.00	1.00	17.45	0.00	0.00	1.00
HSBC Vida, S.A. de C.V.	2.34	0.00	0.00	1.00	8.29	0.00	0.00	1.00	18.88	0.00	0.00	1.00
International Health Insurance Danmark México, S.A.	1.67	0.00	0.00	1.00	2290	0.00	0.00	1.00	1.3	0.40	0.60	0.00
La Latinoamericana Seguros, S.A.	1	0.00	1.00	0.00	1.1	0.00	0.60	0.40	1.01	0.98	0.02	0.00
La Peninsular Seguros, S.A.	1.07	0.00	0.72	0.28	1.13	0.00	0.48	0.52	1.41	0.18	0.82	0.00
Mapfre Seguros de Crédito, S.A.	2.51	0.00	0.00	1.00	5.64	0.00	0.00	1.00	2.68	0.00	0.00	1.00
Mapfre Tepeyac, S.A.	1.01	0.00	0.96	0.04	1.22	0.00	0.12	0.88	18.86	0.00	0.00	1.00
Metlife México, S.A.	1.11	0.00	0.56	0.44	2.12	0.00	0.00	1.00	202.4	0.00	0.00	1.00
Metropolitana Compañía de Seguros, S.A.	1.06	0.00	0.76	0.24	1.53	0.00	0.00	1.00	5.67	0.00	0.00	1.00
Patrimonial Inbursa, S.A.	4.86	0.00	0.00	1.00	1.58	0.00	0.00	1.00	6.42	0.00	0.00	1.00
Principal México, Compañía de Seguros, S.A. de C.V.	1.02	0.00	0.92	0.08	1.43	0.00	0.00	1.00	3.94	0.00	0.00	1.00
Protección Agropecuaria, Compañía de Seguros, S.A.	1.05	0.00	0.80	0.20	1.48	0.00	0.00	1.00	4.06	0.00	0.00	1.00
QBE del Istmo México, Compañía de Reaseguros, S.A. de C.V.	1.04	0.00	0.84	0.16	1.14	0.00	0.44	0.56	2.4	0.00	0.00	1.00
Quálitas, Compañía de Seguros, S.A. de C.V.	1.06	0.00	0.76	0.24	1	0.00	1.00	0.00	23.75	0.00	0.00	1.00
Reaseguradora Patria, S.A.	1.03	0.00	0.88	0.12	3.43	0.00	0.00	1.00	8.47	0.00	0.00	1.00
Royal & SunAlliance Seguros (México), S.A. de C.V.	1	0.00	1.00	0.00	0.49	1.00	0.00	0.00	3.08	0.00	0.00	1.00
Seguros Afirme, S.A. de C.V., Afirme Grupo Financiero	1.09	0.00	0.64	0.36	1.29	0.00	0.00	1.00	1.78	0.00	0.44	0.56
Seguros Argos, S.A. de C.V.	1.14	0.00	0.44	0.56	1.46	0.00	0.00	1.00	3.59	0.00	0.00	1.00
Seguros Atlas, S.A.	1.01	0.00	0.96	0.04	2.21	0.00	0.00	1.00	15.53	0.00	0.00	1.00
Seguros Azteca, S.A. de C.V.	1.01	0.00	0.96	0.04	0.43	1.00	0.00	0.00	6.19	0.00	0.00	1.00
Seguros Banamex, S.A. de C.V., Grupo Financiero Banamex	1.21	0.00	0.16	0.84	6.53	0.00	0.00	1.00	32.76	0.00	0.00	1.00
Seguros Bancomext, S.A. de C.V.	2.27	0.00	0.00	1.00	3.74	0.00	0.00	1.00	3.9	0.00	0.00	1.00
Seguros Banorte Generali, S.A. de C.V., Grupo Financiero Banorte	1.17	0.00	0.32	0.68	1.21	0.00	0.16	0.84	19.28	0.00	0.00	1.00
Seguros BBVA Bancomer, S.A. de C.V., Grupo Financiero BBVA Bancomer	1.28	0.00	0.00	1.00	2.27	0.00	0.00	1.00	19.62	0.00	0.00	1.00
Seguros Comercial América, S.A. de C.V.	1.07	0.00	0.72	0.28	1.23	0.00	0.08	0.92	58.4	0.00	0.00	1.00
Seguros El Potosí, S.A.	1.23	0.00	0.08	0.92	2.04	0.00	0.00	1.00	1.41	0.18	0.82	0.00
Seguros Inbursa, S.A., Grupo Financiero Inbursa	1.04	0.00	0.84	0.16	1.62	0.00	0.00	1.00	21.26	0.00	0.00	1.00
Seguros Monterrey New York Life, S.A. de C.V.	1.01	0.00	0.96	0.04	1.53	0.00	0.00	1.00	19.63	0.00	0.00	1.00
Seguros Santander Serfín, S.A., Grupo Financiero Santander Serfín	1.51	0.00	0.00	1.00	4.83	0.00	0.00	1.00	9.28	0.00	0.00	1.00
Skandia Vida, S.A. de C.V.	4.26	0.00	0.00	1.00	1.78	0.00	0.00	1.00	2.21	0.00	0.00	1.00
Sompo Japan Insurance de	1.21	0.00	0.16	0.84	4.74	0.00	0.00	1.00	2.06	0.00	0.00	1.00

México, S.A. de C.V.												
Stewart Title Guaranty de México, S.A. de C.V.	1.64	0.00	0.00	1.00	1.78	0.00	0.00	1.00	1.13	0.74	0.26	0.00
Tokio Marine, Compañía de Seguros, S.A. de C.V.	1.32	0.00	0.00	1.00	1.42	0.00	0.00	1.00	2.01	0.00	0.00	1.00
Torreón, Sociedad Mutualista de Seguros	1.02	0.00	0.92	0.08	100	0.00	0.00	1.00	100	0.00	0.00	1.00
XL Insurance México, S.A. de C.V.	1.56	0.00	0.00	1.00	3.67	0.00	0.00	1.00	1.19	0.62	0.38	0.00
Zurich, Compañía de Seguros, S.A.	1.32	0.00	0.00	1.00	1.89	0.00	0.00	1.00	22.23	0.00	0.00	1.00
Zurich Vida, Compañía de Seguros, S.A.	1.19	0.00	0.24	0.76	2.36	0.00	0.00	1.00	4.09	0.00	0.00	1.00
General de Salud, Compañía de Seguros, S.A.	1.62	0.00	0.00	1.00	2.19	0.00	0.00	1.00	5.31	0.00	0.00	1.00
Médica Integral GNP, S.A de C.V.	1.07	0.00	0.72	0.28	1.26	0.00	0.00	1.00	11.05	0.00	0.00	1.00
Novamedic Seguros de Salud, S.A. de C.V.	1.59	0.00	0.00	1.00	1.74	0.00	0.00	1.00	1.03	0.94	0.06	0.00
Plan Seguro, S.A. de C.V., Compañía de Seguros	1.07	0.00	0.72	0.28	1.09	0.00	0.64	0.36	7.63	0.00	0.00	1.00
Preventis, S.A. de C.V., Grupo Financiero BBVA Bancomer	1.36	0.00	0.00	1.00	1.12	0.00	0.52	0.48	12.49	0.00	0.00	1.00
Salud Comercial América, S.A. de C.V.	1.4	0.00	0.00	1.00	2.02	0.00	0.00	1.00	6.86	0.00	0.00	1.00
Salud Inbursa, S.A.	1.65	0.00	0.00	1.00	4.34	0.00	0.00	1.00	19.75	0.00	0.00	1.00
SaludCoop México, S.A. de C.V.	2.6	0.00	0.00	1.00	54.12	0.00	0.00	1.00	5.23	0.00	0.00	1.00
Seguros Centauro, Salud Especializada, S.A. de C.V.	1.24	0.00	0.04	0.96	1.02	0.00	0.92	0.08	1.93	0.00	0.14	0.86
Seguros del Sanatorio Durango, S.A. de C.V.	1.12	0.00	0.52	0.48	1.23	0.00	0.08	0.92	2.56	0.00	0.00	1.00
Servicios Integrales de Salud Nova, S.A. de C.V.	1.31	0.00	0.00	1.00	2.86	0.00	0.00	1.00	6.3	0.00	0.00	1.00
Vitamédica, S.A. de C.V.	19.46	0.00	0.00	1.00	151.2	0.00	0.00	1.00	6.69	0.00	0.00	1.00
HSBC Pensiones, S.A.	1.03	0.00	0.88	0.12	2.11	0.00	0.00	1.00	1.73	0.00	0.54	0.46
HSBC Rentas Vitalicias, S.A.	1.08	0.00	0.68	0.32	5.78	0.00	0.00	1.00	1.84	0.00	0.32	0.68
Metlife Pensiones México, S.A.	1.07	0.00	0.72	0.28	4.4	0.00	0.00	1.00	3.43	0.00	0.00	1.00
Pensiones Banamex, S.A. de C.V., Grupo Financiero Banamex	1.07	0.00	0.72	0.28	4.28	0.00	0.00	1.00	6.61	0.00	0.00	1.00
Pensiones Banorte Generali, S.A. de C.V., Grupo Financiero Banorte	1.01	0.00	0.96	0.04	1.66	0.00	0.00	1.00	3.23	0.00	0.00	1.00
Pensiones BBVA Bancomer, S.A. de C.V., Grupo Financiero BBVA Bancomer	1	0.00	1.00	0.00	5.28	0.00	0.00	1.00	11.59	0.00	0.00	1.00
Pensiones Comercial América, S.A. de C.V.	1.06	0.00	0.76	0.24	3.23	0.00	0.00	1.00	2.96	0.00	0.00	1.00
Pensiones Inbursa, S.A., Grupo Financiero Inbursa	1	0.00	1.00	0.00	1.47	0.00	0.00	1.00	25.16	0.00	0.00	1.00
Principal Pensiones, S.A. de C.V.	1	0.00	1.00	0.00	1.25	0.00	0.00	1.00	1.14	0.72	0.28	0.00
Profuturo GNP Pensiones, S.A. de C.V.	1	0.00	1.00	0.00	2.09	0.00	0.00	1.00	3.66	0.00	0.00	1.00

Royal & SunAlliance Pensiones (México), S.A. de C.V.	1.1	0.00	0.60	0.40	11.15	0.00	0.00	1.00	1.03	0.94	0.06	0.00
Afianzadora Aserta, S.A. de C.V.	3.22	0.00	0.00	1.00	1.07	0.00	0.72	0.28	2.04	0.00	0.00	1.00
Afianzadora Fiducia, S.A. de C.V.	1.44	0.00	0.00	1.00	100	0.00	0.00	1.00	1.25	0.50	0.50	0.00
Afianzadora Insurgentes, S.A. de C.V.	1.33	0.00	0.00	1.00	1.56	0.00	0.00	1.00	17.59	0.00	0.00	1.00
Afianzadora Sofimex, S.A.	1.58	0.00	0.00	1.00	1.54	0.00	0.00	1.00	4.6	0.00	0.00	1.00
Chubb de México, Compañía Afianzadora, S.A. de C.V.	1.07	0.00	0.72	0.28	100	0.00	0.00	1.00	2.52	0.00	0.00	1.00
Crédito Afianzador, S.A., Compañía Mexicana de Garantías	1.37	0.00	0.00	1.00	100	0.00	0.00	1.00	2.97	0.00	0.00	1.00
Fianzas Asecam, S.A., Grupo Financiero Asecam	1.03	0.00	0.88	0.12	100	0.00	0.00	1.00	1.56	0.00	0.88	0.12
Fianzas Atlas, S.A.	2.27	0.00	0.00	1.00	100	0.00	0.00	1.00	5.97	0.00	0.00	1.00
Fianzas Banorte, S.A. de C.V., Grupo Financiero Banorte	1.44	0.00	0.00	1.00	100	0.00	0.00	1.00	2.58	0.00	0.00	1.00
Fianzas Comercial América, S.A.	1.7	0.00	0.00	1.00	100	0.00	0.00	1.00	2.65	0.00	0.00	1.00
Fianzas Guardiana Inbursa, S.A., Grupo Financiero Inbursa	1.37	0.00	0.00	1.00	100	0.00	0.00	1.00	18.14	0.00	0.00	1.00
Fianzas Monterrey, S.A.	1.6	0.00	0.00	1.00	100	0.00	0.00	1.00	8.65	0.00	0.00	1.00
HSBC Fianzas, S.A., Grupo Financiero HSBC	1.69	0.00	0.00	1.00	100	0.00	0.00	1.00	5.84	0.00	0.00	1.00