UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

PRODUCTOS CAJA Y ESPACIOS CASI - ω - RESOLUBLES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA
HUMBERTO VILLEGAS RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. ÁNGEL TAMARIZ MASCARÚA

MÉXICO, D.F. JUNIO DEL 2006

A mi esposa Diana Luz

A mis hijos Dianita, Adán y Alan

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Ángel Tamariz Mascarúa por todo el apoyo y paciencia que tuvo, para que pudiera hacer este trabajo de tesis. Sin duda uno de los mejores profesores que he conocido, tanto por su calidad humana como profesional.

A mis sinodales, por sus comentarios y correcciones que me ayudaron a entender un poco más sobre Topología General.

A todos los profesores de la ECFM de la UAS por su apoyo en momentos difíciles.

Contenido

INTRODUCCIÓN

Sean $X_1,\ X_2, ..., X_n$ espacios topológicos. La topología producto del conjunto $\prod_{i=1}^{n} X_n$ es la que tiene como base todos los conjuntos de la forma $\prod_{i=1}^{n} U_n$, donde U_i es un conjunto abierto de X_i, $i = 1, 2, ..., n$. Si ahora $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia infinita de espacios topológicos, una generalización natural de la topología anterior para el producto infinito $\prod_\alpha X_\alpha$, es la **topología caja,** que tiene como base todos los conjuntos de la forma $\prod_\alpha U_\alpha$, donde U_α es un conjunto abierto de $X_\alpha,\ \alpha \in I$. Generalmente se denota a $\prod_\alpha X_\alpha$ con la topología caja por $\Box_\alpha X_\alpha$.

La topología caja fue la primera topología que se consideró para un producto infinito de espacios ($Tietze$ 1924 [12]), pero dado que esta topología no preserva propiedades complejas como la compacidad, conexidad y metrizabilidad, entre otras, fue sustituida por la topología de Tychonoff. La topología de Tychonoff sobre $\prod_\alpha X_\alpha$ es la que tiene como base todos los conjuntos de la forma:

$\prod_\alpha U_\alpha$, donde U_α es un abierto de X_α, y $U_\alpha = X_\alpha$, excepto para un número finito de indices.

A partir de la década de los 70_s, el estudio de los productos caja toma gran interés, esto debido a que estos productos se aplican para construir contraejemplos de algunas conjeturas de la Topología General. Por ejemplo M. E. Rudin en 1974 construye un espacio normal no numerablemente paracompacto [8], este espacio es un subespacio de un producto caja. La existencia de espacios normales no numerablemente paracompactos fue un problema que estuvo abierto por cerca de 20 años. Otro ejemplo fue la respuesta a la pregunta hecha por Nyikos ¿el producto de un espacio metrizable y un espacio ω_u-metrizable es necesariamente normal? J. E. Vaughan responde negativamente a esta pregunta [9], él presenta dos espacios X y Y tales que X es metrizable, Y es un producto caja ω_1-metrizable y $X \times Y$ no es normal.

Un aspecto de los productos caja que se ha investigado más detenidamente es lo que se refiere a las propiedades de cubierta, principalmente las propiedades de paracompacidad y normalidad. Análogamente a lo que ocurre con los productos de Tychonoff, el estudio de estas propiedades presenta complicaciones y problemas muy difíciles, muchos de ellos aún sin resolver. Por ejemplo, no se sabe aún si se puede decidir en ZFC si un producto caja numerable de espacios compactos, es paracompacto o normal.

Un tipo de producto que se ha venido estudiando con especial interés, son los productos de copias de la recta real con la topología caja, esto es productos del tipo $\square\mathbb{R}^I$. Uno de los últimos resultados sobre este tipo de productos, es obtenido por L. B Lawrence, él prueba que si $|I| \geq \omega_1$, entonces $\square\mathbb{R}^I$ no es paracompacto [14].

La teoría que se ha desarrollado sobre productos caja aparece en la literatura matemática en forma mas o menos aislada, y generalmente en presentaciones especializadas, lo que dificulta su estudio y divulgación, aunque existen trabajos como [5] y [6] en los que se hacen resumenes de algunos aspectos de ésta. Por otra parte $C_\square(X)$, el espacio las funciones continuas de X a $\mathbb{R}$ con la topología que hereda de $\square\mathbb{R}^X$, es un espacio importante por sí mismo que no ha recibido atención por parte de los topólogos.

En esta tesis, se pretenden dos cosas. Una, reunir y articular una parte del desarrollo que ha tenido la topología caja, y dos, hacer un estudio de la propiedades topológicas de $C_\square(X)$. La tesis está dividida en cinco capítulos. En los primeros tres capítulos se hace revisión de una parte del desarollo que ha tenido la teoría de los productos caja. Los trabajos consultados para esta parte de la tesis fueron principalmente, [3] , [5] , [6] , y [7]. En los capítulos 4 y 5 se hace un estudio de las propiedades topológicas de $C_\square(X)$; los resultados obtenidos aquí son todos originales.

En el capítulo 1 se presentan las definiciones y resultados básicos sobre productos caja. En el capítulo 2 se estudia la paracompacidad de los productos caja numerables y en el capítulo 3 se presenta una aplicación de la teoría de los productos caja al análisis del espacio de las funciones continuas con la m-topología. En el capítulo 4 se estudian las propiedades de $C_\square(X)$ y los espacios $C_\square$-discretos, que son lo espacios X para los cuales $C_\square(X)$ es discreto; se prueba que los espacios $C_\square$-discretos es una clase amplia que contiene a la clase de los espacios ω-resolubles. Por último, en el capítulo 5 se estudian los espacios casi-ω-resolubles y sus relaciones con los espacios ω-resolubles. Los espacios casi-ω-resolubles es una clase especial de espacios contenida en la clase de los $C_\square$-discretos.

Capítulo 1

PRODUCTOS CAJA

Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Un conjunto de la forma $\Pi_\alpha U_\alpha$, en donde U_α es un abierto de X_α para cada α, es llamado **caja abierta** de $\Pi_\alpha X_\alpha$. La topología sobre $\Pi_\alpha X_\alpha$ que tiene como base todas las cajas abiertas, es llamada **topología caja** del producto cartesiano $\Pi_\alpha X_\alpha$. A $\Pi_\alpha X_\alpha$ con la topología caja lo denotamos por $\square_\alpha X_\alpha$. Si para cada $\alpha \in I$, $X_\alpha = X$, escribiremos $\square X^I$, en lugar de $\square_\alpha X_\alpha$ y a los subconjuntos $\Pi_\alpha F_\alpha$, donde $F_\alpha = F \subset X$ para todo $\alpha \in I$, los denotaremos por F^I. Si para cada $\alpha \in I$, τ_α es la topología de X_α entonces denotaremos por $\square_\alpha \tau_\alpha$ a la topología caja definida en $\Pi_\alpha X_\alpha$.

Ocasionalmente aplicaremos la siguiente generalización de la topología caja. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos y κ un cardinal infinito. La **topología κ-producto** en $\Pi_\alpha X_\alpha$ es la que tiene como base todos los subconjuntos de la forma $\Pi_\alpha U_\alpha$, donde U_α es un abierto en X_α y $U_\alpha = X_\alpha$, excepto quiza para un conjunto de factores de cardinalidad menor que κ.

Obsérvese que si $\kappa = \omega$, la topología ω-producto es la topología de Tychonoff, y si $|I| < \kappa$ la topología κ-producto es la topología caja.

La intención de este capítulo es, primeramente, presentar las propiedades básicas de los productos caja, para posteriormente presentar de manera introductoria, algunos resultados sobre estructuras uniformes, normalidad y funciones cardinales en productos caja.

La topología caja de un producto finito de espacios topológicos coincide con la topología de Tychonoff, de ahí que siempre se considere en este trabajo productos infinitos de espacios con más de un punto.

1.1 RESULTADOS BASICOS

Proposición 1.1 *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Entonces* *i*) La topología caja contiene a la topología de Tychonoff.

ii) La aplicación proyección $\pi_\beta : \square_\alpha X_\alpha \to X_\beta$ *es continua y abierta, para cada* $\beta \in I$.

iii) *Si para todo* α, $A_\alpha \subseteq X_\alpha$, *entonces* $\Pi_\alpha \overline{A_\alpha} = \overline{\Pi_\alpha A_\alpha}$.

iv) $\Pi_\alpha F_\alpha$ *es un subconjunto cerrado (abierto) de* $\square_\alpha X_\alpha$, *si y sólo si,* F_α *es un conjunto cerrado (abierto) de* X_α *para todo* $\alpha \in I$.

PRUEBA. *i*) Es claro de la definición de topología caja.

ii) Sea U_β un abierto de X_β, entonces

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) = \prod_\alpha V_\alpha, \text{ donde } V_\alpha = X_\alpha \text{ para toda } \alpha \neq \beta \text{ y } V_\beta = U_\beta.$$

Es claro que $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ es un abierto de $\square_\alpha X_\alpha$, luego se tiene la continuidad de π_β. Se muestra ahora que π_β es abierta. Sea $\Pi_\alpha U_\alpha$ una caja abierta, luego $\pi_\beta(\Pi_\alpha U_\alpha) = U_\beta$ es abierto. Dado que cualquier conjunto abierto U de $\square_\alpha X_\alpha$ se puede expresar como $U = \cup_i G_i$, donde G_i es una caja abierta, y $\pi_\beta(\cup_i G_i) = \cup_i \pi_\beta(G_i)$, se tiene el resultado.

iii) Sea $x = \{x_\alpha\} \in \overline{\Pi_\alpha A_\alpha}$. Para $\beta \in I$ arbitrario, considérese un abierto U_β en X_β tal que $x_\beta \in U_\beta$. Luego $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ es un abierto de $\square_\alpha X_\alpha$ que contiene a x y por lo tanto $\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap \Pi_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$, es decir $U_\beta \cap A_\beta \neq \emptyset$. Por lo tanto $x_\beta \in \overline{A_\beta}$. Dado que β es arbitrario, $x \in \Pi \overline{A_\alpha}$.

Supongamos ahora que $x \in \Pi \overline{A_\alpha}$ y que $\Pi_\alpha U_\alpha$ es una caja abierta que contiene a x. Entonces $U_\alpha \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in I$, es decir $\Pi_\alpha(U_\alpha \cap A_\alpha) = \Pi_\alpha U_\alpha \cap \Pi_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$. Luego $x \in \overline{\Pi_\alpha A_\alpha}$.

iv) Sea $\Pi_\alpha F_\alpha$ un conjunto cerrado de $\square_\alpha X_\alpha$. Entonces, por *iii*), $\overline{\Pi_\alpha F_\alpha} = \Pi_\alpha \overline{F_\alpha} = \Pi_\alpha F_\alpha$, es decir $F_\alpha = \overline{F_\alpha}$ para todo $\alpha \in I$. Por otra parte, si F_α es cerrado para todo $\alpha \in I$, entonces, por *iii*), $\overline{\Pi_\alpha F_\alpha} = \Pi_\alpha \overline{F_\alpha} = \Pi_\alpha F_\alpha$. ■

Como consecuencia de *iv*) de la proposición anterior, vemos que si cada X_α es un espacio discreto, entonces $\square_\alpha X_\alpha$ es un espacio discreto de cardinalidad $\prod_\alpha |X_\alpha|$.

Corolario 1.2 *Sea* $J \subset I$. *Entonces* $\square_{\alpha \in J} X_\alpha$ *es homeomorfo a un subespacio cerrado de* $\square_{\alpha \in I} X_\alpha$.

PRUEBA Sea $\{z_\alpha\}$ un punto arbitrario en $\prod\limits_{\alpha \in I-J} X_\alpha$. Se define

$$f : \square_{\alpha \in J} X_\alpha \to \square_{\alpha \in I} X_\alpha$$

por $f\left(\{x_\alpha\}_{\alpha \in j}\right) = \{y_\alpha\}_{\alpha \in I}$, donde

$$y_\alpha = \begin{cases} x_\alpha & \text{si } \alpha \in J \\ z_\alpha & \text{si } \alpha \in I - J. \end{cases}$$

Es claro que f es un homeomorfismo sobre $f\left(\square_{\alpha\in J}X_\alpha\right)$, y además este conjunto, por *iv)* de la proposición 1.1, es un conjunto cerrado de $\square_{\alpha\in I}X_\alpha$. ■

Proposición 1.3 *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Si $I = \bigcup\limits_{t\in T} I_t$ donde $I_t \cap I_{t'} = \emptyset$ para $t \neq t'$, entonces*

$$\square_\alpha X_\alpha \approx \square_{t\in T}\left(\square_{\alpha\in I_t}X_\alpha\right).$$

PRUEBA. Sea $f : \square_\alpha X_\alpha \to \square_{t\in T}\left(\square_{\alpha\in I_t}X_\alpha\right)$ la aplicación definida por $f(x) = \{x_t\}_{t\in T} \in \square_{t\in T}\left(\square_{\alpha\in I_t}X_\alpha\right)$, donde $x_t = \{x_\alpha\}_{\alpha\in I_t} \in \square_{\alpha\in I_t}X_\alpha$. Claramente f es uno-uno y sobre. Mostraremos que f es continua. Sea $x = \{x_\alpha\}_{\alpha\in I} \in \square_\alpha X_\alpha$ y $\prod\limits_{t\in T} W_t$ una caja abierta que contiene a $f(x) = \{x_t\}_{t\in T}$; esto es, $\{x_t\} \in \prod\limits_{t\in T} W_t$. Así para cada $t \in T$, $x_t \in W_t \subseteq \square_{\alpha\in I_t}X_\alpha$, luego para cada $t \in T$ existe un abierto básico $\prod\limits_{\alpha\in I_t} U_{\alpha,t}$ tal que

$$x_t = \{x_\alpha\}_{\alpha\in I_t} \in \prod_{\alpha\in I_t} U_{\alpha,t} \subset W_t \subseteq \square_{\alpha\in I_t}X_\alpha.$$

Por lo tanto $\prod_{t\in T,\alpha\in I_t} U_{\alpha,t}$ es un abierto que contiene a x y

$$f\left(\Pi U_{\alpha(t),t}\right) \subseteq \prod_{t\in T} W_t.$$

Esto último prueba que f es continua en x, y por lo tanto continua, ya que x es arbitrario. Por último f es abierta, ya que si $\Pi_\alpha U_\alpha$ es una caja abierta de $\square_\alpha X_\alpha$, entonces

$$f\left(\Pi_\alpha U_\alpha\right) = \square_{t\in T}\left(\prod_{\alpha\in I_t} U_\alpha\right).$$

Es claro que $\square_{t\in T}\left(\prod\limits_{\alpha\in I_t} U_\alpha\right)$ es abierto ya que U_α es abierto en X_α para todo $\alpha \in I$. ■

Proposición 1.4 *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos y A_α un subespacio de X_α para cada $\alpha \in I$. Entonces las dos topologías sobre $\Pi_\alpha A_\alpha$, la topología caja del producto de los subespacios $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$, y la topología de subespacio de $\square_\alpha X_\alpha$ coinciden.*

PRUEBA. Sea τ_c la topología caja del producto de los subespacios $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ y τ_s la topología de subespacio. Si $\Pi_\alpha V_\alpha$ es un abierto básico de τ_c, donde V_α es un abierto en A_α para todo $\alpha \in I$, existe un abierto $U_\alpha \subset X_\alpha$ tal que $V_\alpha = A_\alpha \cap U_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Así

$$\Pi_\alpha V_\alpha = \Pi_\alpha\left(A_\alpha \cap U_\alpha\right) = \Pi_\alpha A_\alpha \cap \Pi_\alpha U_\alpha \in \tau_s.$$

La demostración de la contención en el otro sentido es análoga. ■

Proposición 1.5 *Si X_α es Hausdorff (respectivamente regular, completamente regular) para cada $\alpha \in I$, entonces $\Box_\alpha X_\alpha$ es Hausdorff (respectivamente regular, completamente regular).*

PRUEBA. Si X_α es un espacio Hausdorff para todo α, entonces $\Pi_\alpha X_\alpha$ con la topología Tychonoff también lo es. Por otra parte la topología Tychonoff está contenida en la topología caja, por lo tanto ésta también es Hausdorff.

Supongamos ahora que X_α es regular para toda $\alpha \in I$. Si $x \in \Box_\alpha X_\alpha$ y $\Pi_\alpha U_\alpha$ es una caja abierta que contiene a x. Por la regularidad de X_α existe un abierto V_α en X_α tal que $x_\alpha \in V_\alpha \subseteq \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ para todo $\alpha \in I$; de aquí que $x \in \Pi_\alpha V_\alpha \subseteq \Pi_\alpha \overline{V_\alpha} \subseteq \Pi_\alpha U_\alpha$. Aplicando la Proposición 1(iii) se tiene

$$x \in \Pi_\alpha V_\alpha \subseteq \overline{\Pi_\alpha V_\alpha} \subseteq \Pi_\alpha U.$$

Por último, consideremos que X_α es completamente regular para toda $\alpha \in I$. Sea $A \subset \Box_\alpha X_\alpha$ un conjunto cerrado y $z \notin A$. Existe entonces una caja abierta $\Pi_\alpha U_\alpha$, tal que $z \in \Pi_\alpha U_\alpha \subset \Box_\alpha X_\alpha - A$; luego para cada $\alpha \in I$ existe una funcion continua $f_\alpha : X_\alpha \to [0,1]$ tal que $f_\alpha(X_\alpha - U_\alpha) = \{1\}$ y $f_\alpha(z_\alpha) = 0$.

Definimos entonces $f : \Box_\alpha X_\alpha \to [0,1]$ por $f(x) = \sup \{f_\alpha(x_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, donde $x = \{x_\alpha\}$. Es claro que $f(z) = 0$ y que $f(A) = \{1\}$. Mostraremos que f es continua. Sea $p = \{p_\alpha\} \in \Box_\alpha X_\alpha$ y $\epsilon > 0$. Para cada $\alpha \in I$, existe un abierto W_α de X_α que contiene a p_α tal que si

$$y \in W_\alpha \text{ entonces } |f_\alpha(y) - f_\alpha(p_\alpha)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea entonces la caja abierta $\Pi_\alpha W_\alpha$ que contiene a p. Si $x \in \Pi_\alpha W_\alpha$ entonces para todo $\alpha \in I$, $x_\alpha \in W_\alpha$ y por lo tanto $|f_\alpha(x_\alpha) - f_\alpha(p_\alpha)| < \frac{\epsilon}{2}$. Es decir para todo $\alpha \in I$, $f_\alpha(x_\alpha) < f(p) + \frac{\epsilon}{2}$, y por lo tanto $f(x) \leq f(p) + \frac{\epsilon}{2}$.

Por otra parte existe $\beta \in I$ tal $f(p) - \frac{\epsilon}{2} < f_\beta(p_\beta) \leq f(p)$. Combinando la desigualdad anterior con esta última se tiene que $f(p) - \epsilon < f\ _\beta(x_\beta)$, es decir $f(x) > f(p) - \epsilon$. Así que finalmente se tiene que $|f(x) - f(p)| < \epsilon$, lo que prueba que f es continua en p.■

Un espacio topológico X es un **P-espacio** si todo G_δ es abierto. X es **cero dimensional**, si tiene una base para su topología formada por conjuntos abiertos-cerrados. X es **un grupo topológico**, si es un grupo y las las aplicaciónes $(x, y) \to xy^{-1}$ y $x \to x^{-1}$ son continuas. Mostraremos ahora que estas propiedades topológicas se preservan bajo productos caja.

Teorema 1.6 *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos, entonces*

i) Si para cada $\alpha \in I$, X_α es un P-espacio, $\Box_\alpha X_\alpha$ es un P-espacio.

ii) Si para cada $\alpha \in I$, X_α es cero dimensional, $\square_\alpha X_\alpha$ es cero dimensional.

iii) Si para cada $\alpha \in I$, X_α es un grupo topológico, $\square_\alpha X_\alpha$ es un grupo topológico.

PRUEBA. *i*) Supongamos que para cada $\alpha \in I$, X_α es un P-espacio y sea G un conjunto G_δ de $\square X_\alpha$, esto es $G = \bigcap_{n<\omega} G_n$, donde cada G_n es un abierto de $\square_\alpha X_\alpha$. Sea $x \in G$, entonces para cada $n \in \omega$, $x \in G_n$, luego existe un abierto básico $\Pi_\alpha G_{\alpha,n}$ tal que $x \in \Pi_\alpha G_{\alpha,n} \subseteq G_n$. Así que $x \in \bigcap_{n\in\omega} \Pi_\alpha G_{\alpha,n} = \Pi_\alpha \bigcap_{n\in\omega} G_{\alpha,n} \subseteq G$. Dado que para cada $\alpha \in I$, $\bigcap_{n\in\omega} G_{\alpha,n}$ es abierto en X_α, se tiene que $\Pi_\alpha \bigcap_{n\in\omega} G_{\alpha,n}$ es un abierto de $\square_\alpha X_\alpha$. Esto prueba que G es abierto y por lo tanto $\square_\alpha X_\alpha$ es un P$-$espacio.

ii) En este caso es suficiente recordar que el conjunto de todos los $\Pi_\alpha G_\alpha$, donde G_α es abierto en X_α, es una base para $\square_\alpha X_\alpha$. Si G_α es también cerrado, entonces $\Pi_\alpha G_\alpha$ es cerrado por la Proposición 1(*iv*).

iii) Si definimos en $\square_\alpha X_\alpha$ el producto $xy = \{x_\alpha y_\alpha\}$ donde x, y son elementos de $\square_\alpha X_\alpha$ y $x_\alpha y_\alpha$ es el producto en el grupo X_α, es fácil ver que $\square_\alpha X_\alpha$ es un grupo. Aquí la identidad es $e = \{e_\alpha\}$, donde e_α es la identidad en X_α, y el inverso de cada $x = \{x_\alpha\}$ es $x^{-1} = \left\{x_\alpha^{-1}\right\}$, donde x_α^{-1} es el inverso de x_α en X_α.

Mostramos ahora que el producto y la inversión son continuas. Sean $x = \{x_\alpha\}$, $y = \{y_\alpha\}$ elementos en $\square_\alpha X_\alpha$ y $\Pi_\alpha G_\alpha$ una caja abierta que contiene a xy; luego para cada $\alpha \in I$ $x_\alpha y_\alpha \in G_\alpha$, y dado que X_α es un grupo topológico, existen abiertos U_α y V_α que contienen a x_α y y_α respectivamente tales que $U_\alpha V_\alpha \subset G_\alpha$, así que $\Pi_\alpha U_\alpha \Pi_\alpha V_\alpha \subset \Pi_\alpha G_\alpha$ y por lo tanto el producto es continuo. Sean ahora $x = \{x_\alpha\} \in \square_\alpha X_\alpha$ y $\Pi_\alpha G_\alpha$ un abierto que contiene a $x^{-1} = \left\{x_\alpha^{-1}\right\}$, esto es $x_\alpha^{-1} \in G_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Dado que X_α es un grupo topológico, existe un abierto V_α en X_α, tal que si $t \in V_\alpha$ entonces $t^{-1} \in G_\alpha$, para todo $\alpha \in I$. Así, $\Pi_\alpha V_\alpha$ es un abierto que contiene a $x = \{x_\alpha\}$ de tal manera que si $y \in \Pi_\alpha V_\alpha$, entonces $y^{-1} \in \Pi_\alpha G_\alpha$. Esto prueba que la inversión es continua. ■

El teorema que sigue es causa de que muchos consideren a la topología caja como una topología “mala”. Recordemos que un espacio X es **perfecto** si cada conjunto cerrado en X es un G_δ.

Teorema 1.7 *Sea* $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ *una familia de espacios regulares no discretos, entonces*

i) $\square_\alpha X_\alpha$ no es localmente compacto.

ii) $\square_\alpha X_\alpha$ no es separable.

iii) $\square_\alpha X_\alpha$ no es primero númerable.

iv) $\square_\alpha X_\alpha$ no es perfecto.

v) $\square_\alpha X_\alpha$ no es localmente conexo.

vi) $\square_\alpha X_\alpha$ no es conexo.

PRUEBA. Sea $p = \{p_\alpha\} \in \square_\alpha X_\alpha$ tal que p_α no es un punto aislado de X_α para cada $\alpha \in I$.

i) Supongamos que $\square_\alpha X_\alpha$ es localmente compacto, luego existe una vecindad V de p con cerradura compacta, y una caja abierta $\Pi_\alpha U_\alpha$ que contiene a p tal que $p \in \Pi_\alpha U_\alpha \subseteq V \subseteq \overline{V}$. Elegimos ahora $x_\alpha \in U_\alpha - \{p_\alpha\}$ para todo $\alpha \in I$. Ya que X_α es regular, existe para cada $\alpha \in I$ un conjunto abierto H_α de X_α tal que

$$p_\alpha \in H_\alpha \subseteq \overline{H_\alpha} \subseteq U_\alpha - \{x_\alpha\}.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{F} = \left\{\Pi_\alpha K_\alpha : K_\alpha \in \left\{H_\alpha, U_\alpha - \overline{H_\alpha}\right\} \ \forall \ \alpha \in I\right\}$$

es una cubierta abierta, no numerable y cuyos elementos son ajenos dos a dos del conjunto

$$C = \{y \in \square_\alpha X_\alpha : y_\alpha \in \{p_\alpha, x_\alpha\} \ \forall \ \alpha \in I\}.$$

El conjunto $C \subset \Pi_\alpha U_\alpha \subseteq V \subseteq \overline{V}$ es no numerable, de hecho tiene cardinalidad $2^{|I|} \geq 2^\omega$, es cerrado, por la Proposición 1.1 (iv), y no es compacto. Pero esto es una contradicción ya que los subconjuntos cerrados de conjuntos compactos son compactos.

ii) Sea $E \subset \square_\alpha X_\alpha$ un conjunto denso. Entonces para cada $\Pi_\alpha K_\alpha \in \mathcal{F}$, (donde $\mathcal{F}$ es el conjunto definido en *i*), $\Pi_\alpha K_\alpha \cap E \neq \emptyset$. Para cada $F = \Pi_\alpha K_\alpha \in \mathcal{F}$ elegimos un punto $p_F \in \Pi_\alpha K_\alpha \cap E$. Como los elementos en $\mathcal{F}$ son ajenos por pares, entonces $p_F \neq p_G$ si $F, G \in \mathcal{F}$ y $F \neq G$. Por lo tanto $|E| \geq |\mathcal{F}| = 2^{|I|} \geq 2^\omega$.

iii). Supongamos que U_1, U_2, $U_3, ...$ son cajas abiertas que contienen a $p \in \square_\alpha X_\alpha$ definidas por $U_n = \Pi_\alpha U_{\alpha,n}$, $n \in \omega$. Sea $\varphi : \omega \to I$ una aplicación inyectiva, y para cada $\alpha \in I$ definimos el conjunto V_α por

$$V_\alpha = \begin{cases} U_{\alpha,n} - F_n, & \text{donde } \alpha = \varphi(n), \ F_n \text{ es un conjunto} \\ & \text{finito contenido en } U_{\alpha,n} \text{ y } p_\alpha \notin F_n. \\ U_{\alpha,1} & \text{si } \alpha \neq \varphi(n) \text{ para todo } n \in \omega. \end{cases}$$

Entonces $p \in V = \Pi_\alpha V_\alpha$, y es claro que $\Pi_\alpha U_{\alpha,n} \nsubseteq V$ para todo $n \in \omega$, es decir las cajas abiertas U_1, U_2, $U_3, ...$, no forman una base.

iv) La propiedad de ser perfecto la heredan los subespacios cerrados, luego por el Corolario 1.2 basta que demostremos este resultado para $I = \omega$. Sea $p \in \square_n X_n$ tal que p_n no es un punto aislado de X_n y consideremos los conjuntos abiertos, $U_n = X_n - \{p_n\}$ para cada $n \in \omega$. Mostraremos que el conjunto $U = \Pi_n U_n$ no es un F_σ. Supongamos que F_n es un conjunto cerrado de $\square_n X_n$ y que $F_n \subseteq F_{n+1} \subseteq U$ para todo $n \in \omega$. Dado que $\square_\alpha X_\alpha$ es regular existe, para cada $n \in \omega$, una vecindad abierta $U_{n,0}$ de p_n tal que $F_0 \cap \Pi_n U_{n,0} = \emptyset$. Puesto que ninguna coordenada de p es aislada, existe $x^0 \in \Box_\alpha X_\alpha$ tal que $x_0^0 \in U_{0,0} - \{p_0\}$ y para todo $n > 0$, $x_n^0 = p_n$. Como $x^0 \notin F_1$, por la regularidad de $\Box_\alpha X_\alpha$, existe un abierto $U_{n,1}$ que contiene a x_n^0, para cada $n \in \omega$, tal que $\overline{U_{n,1}} \subset U_{n,0}$, que cumple además $\Pi_n U_{n,1} \cap F_1 = \emptyset$ y $x^0 \in \Pi_n U_{n,1}$.

Continuando el procedimiento anterior se obtiene para cada $m \in \omega$, cajas abiertas $\Pi_n U_{n,m}$ y puntos $x^m \in \Box_\alpha X_\alpha$ que satisfacen:

a) $\Pi_n U_{n,m}$ es una vecindad de x^{m-1} disjunta de F_m.

b) $\overline{U_{n,m}} \subset U_{n,m-1}$ para todo $m \in \omega$ y

c) Para todo $n, m \in \omega$, $x_n^m \in \begin{cases} U_{n,m} - \{p_n\} & \text{si } n = m \\ \{x_n^{m-1}\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Sea $x \in \Box_\alpha X_\alpha$ definido por $x_n = x_n^n$ para todo $n \in \omega$, entonces

$$x \in \bigcap_{m \in \omega} (\Pi_n U_{n,m}) - \bigcup_{m \in \omega} F_m.$$

Además $x \in U$, por lo tanto U no es un F_σ.

v) Sea $\Pi_\alpha G_\alpha$ una caja abierta que contiene a p. Dado que X_α es regular, para cada α existe una familia de abiertos $\{G_{\alpha,n}\}_{n \in \omega}$ en X_α tal que $p_\alpha \in \overline{G_{\alpha,n+1}} \subseteq G_{\alpha,n} \subseteq G$ para todo $n \in \omega$. Sea $\varphi : \omega \to I$ una aplicación inyectiva y para cada $m, k \in \omega$ definimos la caja cerrada $E(k, m)$ por

$$E_\alpha(k, m) = \begin{cases} \overline{G_{\alpha,n+k+1}} & si\ \varphi(n) = \alpha \quad y\ n \geq m \\ X_\alpha & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Mostraremos ahora que el conjunto $E = \bigcap_{k \in \omega} E(k)$, donde $E(k) = \bigcup_{m \in \omega} E(k, m)$, es abierto-cerrado en $\Box_\alpha X_\alpha$.

E es cerrado. En efecto, sea $x = \{x_\alpha\} \in \Box_\alpha X_\alpha - E$, luego existe $k \in \omega$ tal que $x \notin E(k)$, esto es, para cada m existe $\alpha_m \in I$ tal que $x_{\alpha_m} \notin E_{\alpha_m}(k, m)$, es decir $x_{\alpha_m} \notin \overline{G_{\alpha_m,n+k+1}}$. Así, para cada α_m, existe un abierto U_{α_m} en X_{α_m} que contiene x_{α_m} y $U_{\alpha_m} \cap G_{\alpha_m,n+k+1} = \emptyset$. Luego la caja abierta $U = \prod_\alpha U_\alpha$, donde

$$U_\alpha = \begin{cases} U_{\alpha_m}\ si\ \alpha = \alpha_m \\ X_\alpha\ en\ otro\ caso \end{cases}$$

satisface que $U \cap E(k) = \varnothing$, y por lo tanto $x \in U \subset \Box_\alpha X_\alpha - E$. Esto prueba que E es cerrado.

Mostramos ahora que E es abierto. Sea $x = \{x_\alpha\} \in E$, luego para cada $k \in \omega$ existe un número natural m_k tal que $x_\alpha \in \overline{G_{\alpha,n+k+1}}$, donde $n \geq m_k$ y $\varphi(n) = \alpha$. Podemos elegir los m_k de tal manera que $m_k < m_{k+1}$, $k = 1, 2, ...$ Consideremos ahora la caja abierta $U = \prod_\alpha U_\alpha$, donde

$$U_\alpha = \begin{cases} G_{\alpha,n+s}, & \textit{si } m_s \leq n < m_{s+1} \textit{ y } \varphi(n) = \alpha \\ X_\alpha, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que $x \in U$. Mostraremos que $U \subseteq E(k, m_{k+1})$ para todo $k \in \omega$, esto a su vez implica que $x \in U \subseteq E$. Sea $\alpha \in I$. Si existe n tal que $\varphi(n) = \alpha$ y $m_{k+1} \leq n$, entonces $E_\alpha(k, m_{k+1}) = \overline{G_{\alpha,n+k+1}}$. Por otra parte sea s tal que $m_s \leq n < m_{s+1}$, entonces $U_\alpha = G_{\alpha,n+s}$. Dado que $m_{k+1} \leq m_s$ es claro que $G_{\alpha,n+s} \subseteq G_{\alpha,n+k+1}$.

vi) En la demostración de v) se hace ver que toda caja abierta contiene un conjunto abierto-cerrado en $\square_\alpha X_\alpha$. Esto prueba que $\square_\alpha X_\alpha$ no es conexo. ■

Corolario 1.8 *Si $\mathcal{P}$ es una de las propiedades enlistadas en el Teorema anterior, entonces $\prod_\alpha X_\alpha$ con la topología κ-producto no satisface $\mathcal{P}$ si $\kappa > \omega$.*

PRUEBA. Se obtiene haciendo una pequeña modificación en la demostración del Teorema anterior. ■

Corolario 1.9 *i) El producto caja de espacios T_3 no discretos no es metrizable. ii) El producto caja de espacios T_3 no discretos no es un espacio vectorial topológico.*

PRUEBA. i) y ii) se obtienen del Teorema 1.7, incisos iii) y v) respectivamente. ■

Teorema 1.10 *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de espacios regulares no discretos. Entonces*

$$\square_\alpha X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} F_\alpha,$$

donde $|J| = 2^{|I|}$ y $\{F_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una colección de conjuntos abiertos-cerrados disjuntos dos a dos.

PRUEBA. Sea $\{I_\beta : \beta \in J,\ \ |J| = |I|\}$ una partición de I, donde $|I_\beta| = |I|$. Aplicando la ley asociativa para productos caja se tiene

$$\square_\alpha X_\alpha \approx \square_{\alpha \in J}(\square_{\beta \in I_\alpha} X_\beta)$$

Dado que un producto caja nunca es conexo, para cada $\alpha \in J$ existen conjuntos abiertos-cerrados H_α, W_α, ajenos, distintos del vacío, tales que $\square_{\beta \in I_\alpha} X_\beta = H_\alpha \bigcup W_\alpha$. Luego la colección

$$\left\{ \prod_\alpha U_\alpha : U_\alpha \in \{H_\alpha, W_\alpha\} \right\}$$

está formada por abiertos-cerrados, es disjunta dos a dos y su cardinalidad es $2^{|I|}$. Además

$$\square_{\alpha\in J}(\square_{\beta\in I_\alpha}X_\beta)=\bigcup\left\{\prod_\alpha U_\alpha : U_\alpha\in\{H_\alpha,W_\alpha\}\right\}. \blacksquare$$

1.2 ESTRUCTURAS UNIFORMES EN PRODUCTOS CAJA

Uno de los resultados de la teoría de los espacios uniformes es el siguiente: Un producto de Tychonoff de espacios topologicamente completos es topologicamente completo [2]. Sorprendentemente este resultado también es válido para productos caja. En esta sección se presenta una prueba de esta última afirmación.

Establecemos primero la siguiente notación. Sea X un conjunto

La diagonal de X es el conjunto $\triangle(X)=\{(x,x):x\in X\}$.

Para $x\in X$ y $D\subset X^2=X\times X$, $D[x]=\{y\in X:(x,y)\in D\}$.

Para $D\subset X^2$, $D^{-1}=\{(x,y):(y,x)\in D\}$. D es simétrico si $D=D^{-1}$.

Para $C,D\subseteq X^2, C\circ D=\big\{(x,z)\in X^2:\exists\, y\in X,(x,y)\in C,(y,z)\in D\big\}$.

Definición 1.11 *Una* ***uniformidad*** *sobre X es una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X^2 que satisface:*

i) $\cap\mathcal{U}=\triangle(X)$,

ii) $D\in\mathcal{U}\Rightarrow E\circ E\subset D$ para algún $E\in\mathcal{U}$,

iii) $D\in\mathcal{U}\Rightarrow E^{-1}\subset D$ para algún $E\in\mathcal{U}$,

iv) Si $A\in\mathcal{U}$ y $B\in\mathcal{U}$ entonces $A\cap B\in\mathcal{U}$,

v) Si $A\in\mathcal{U}$ y $A\subset B\subset X^2$, entonces $B\in\mathcal{U}$.

Al par $(X,\mathcal{U})$, donde $\mathcal{U}$ es una uniformidad sobre X lo llamamos **espacio uniforme.**

En vez de trabajar con toda la uniformidad, a veces es más conveniente trabajar con una subcolección de ella. Una subfamilia $\mathfrak{D}$ de una uniformidad $\mathcal{U}$ es una **base uniforme** o **base**, si cada miembro de $\mathcal{U}$ contiene algun miembro de $\mathfrak{D}$. El siguiente teorema caracteriza a las bases uniformes.

Teorema 1.12 *Una familia $\mathfrak{D}$ de subconjuntos de X^2 es una base uniforme para alguna uniformidad sobre X, si y sólo si,*

i) $\cap\mathfrak{D}=\triangle(X)$,

ii) $D\in\mathfrak{D}\Rightarrow E\circ E\subset D$ para algún $E\in\mathfrak{D}$,

iii) $D\in\mathfrak{D}\Rightarrow E^{-1}\subset D$ para algún $E\in\mathfrak{D}$,

iv) Si $A\in\mathfrak{D}$ y $B\in\mathfrak{D}$ existe $C\in\mathfrak{D}$ tal que $C\subseteq A\cap B$.

PRUEBA. La prueba se obtiene fácilmente de las definiciones de base uniforme y uniformidad. ■

Sea X un conjunto donde se tiene definida una base uniforme $\mathfrak{D}$. Es fácil ver que

$$\tau(\mathfrak{D}) = \{G \subseteq X : \text{para cada } x \in G, \exists\ D \in \mathfrak{D},\ D[x] \subseteq G\}$$

es una topología Hausdorff sobre X, que llamaremos la **topología uniforme.**

Ahora si X es un espacio topológico y está definida una base uniforme $\mathfrak{D}$ en X, la topología de X no necesariamente es igual a la topología uniforme. Cuando $\tau(\mathfrak{D})$ es igual a la topología de X decimos que $\mathfrak{D}$ es una base uniforme **compatible** con X. Una pregunta natural ahora es ¿en cuáles espacios se puede definir una base uniforme compatible? Se conoce la respuesta.

Teorema 1.13 *(véase* [4]*) Un espacio X posee una base uniforme compatible si y sólo si, X es completamente regular.*

Definimos ahora una base uniforme sobre un producto caja. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos y supóngase que para $\alpha \in I$, $\mathfrak{D}_\alpha$ es una base uniforme sobre el espacio X_α. Consideremos el conjunto

$$\Box_\alpha D_\alpha = \left\{(x,y) \in (\Pi_\alpha X_\alpha)^2 : \forall \alpha \in I,\ (x_\alpha, y_\alpha) \in D_\alpha\right\},$$

donde $D_\alpha \in \mathfrak{D}_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Mostraremos que el conjunto de todos los $\Box_\alpha D_\alpha$, que denotamos por $\Box_\alpha \mathfrak{D}_\alpha$, es una base uniforme sobre $\Box_\alpha X_\alpha$; aún más, si cada $\mathfrak{D}_\alpha$ es compatible con X_α, $\Box_\alpha \mathfrak{D}_\alpha$ es compatible con $\Box_\alpha X_\alpha$. Para esto aplicamos el siguiente lema, fácil de probar.

Lema 1.14 *Si D=$\Box_\alpha D_\alpha$,E= $\Box_\alpha E_\alpha$ son elementos de $\Box_\alpha \mathfrak{D}_\alpha$, entonces*

i) $(\Box_\alpha D_\alpha)^{-1} = \Box_\alpha D_\alpha^{-1}$,
ii) $\Box_\alpha (D_\alpha \circ E_\alpha) = \Box_\alpha D_\alpha \circ \Box_\alpha E_\alpha$,
iii) Si $x = (x_\alpha)_\alpha \in \Pi_\alpha X_\alpha$, entonces $\mathsf{D}[x] = \Pi_\alpha D_\alpha[x_\alpha]$.

Teorema 1.15 *Si para cada $\alpha \in I$, $\mathfrak{D}_\alpha$ es una base uniforme compatible con el espacio X_α, entonces $\Box_\alpha \mathfrak{D}_\alpha$ es una base uniforme compatible con $\Box_\alpha X_\alpha$.*

PRUEBA. Mostraremos que $\Box_\alpha \mathfrak{D}_\alpha$ es una base uniforme y que $\tau(\Box_\alpha \mathfrak{D}_\alpha) = \Box_\alpha \tau_\alpha$, donde τ_α es la topología de X_α para cada $\alpha \in I$. Para ver que $\Box_\alpha \mathfrak{D}_\alpha$ es una base uniforme aplicamos el Teorema 1.12

i) $\cap \Box_\alpha \mathfrak{D}_\alpha = \triangle(\Pi_\alpha X_\alpha)$: Sea $(x,x) \in \triangle(\Pi_\alpha X_\alpha)$ y D= $\Box_\alpha D_\alpha \in \Box_\alpha \mathfrak{D}_\alpha$, donde $D_\alpha \in \mathfrak{D}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Entonces $(x_\alpha, x_\alpha) \in D_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, es decir $(x,x) \in \mathsf{D}$. Esto prueba que

$\triangle(\Pi_\alpha X_\alpha) \subseteq \cap\square_\alpha\mathfrak{D}_\alpha$. Supóngase ahora que $(x,y) \in \cap\square_\alpha\mathfrak{D}_\alpha$ y sea $\beta \in I$, fijo. Luego $(x_\beta, y_\beta) \in D$, para todo $D \in \mathfrak{D}_\beta$. Dado que $\cap\mathfrak{D}_\beta = \triangle(X_\beta)$, $x_\beta = y_\beta$ y como β es arbitrario, concluímos que $x = y$. Esto prueba que $\cap\mathfrak{D}_\alpha \subseteq \triangle(\Pi_\alpha X_\alpha)$. Se ha probado entonces que $\cap\mathfrak{D}_\alpha = \triangle(\Pi_\alpha X_\alpha)$.

ii) $\mathsf{D} \in \square_\alpha\mathfrak{D}_\alpha \Rightarrow \mathsf{E}\circ\mathsf{E} \subset \mathsf{D}$ para algún $\mathsf{E} \in \square_\alpha\mathfrak{D}_\alpha$: Sea $\mathsf{D} = \square_\alpha D_\alpha \in \square_\alpha\mathfrak{D}_\alpha$,donde $D_\alpha \in \mathfrak{D}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$; luego existe $E_\alpha \in \mathfrak{D}_\alpha$ tal que $E_\alpha \circ E_\alpha \subseteq D_\alpha$. Aplicando *ii*) de lema anterior, $\square_\alpha(E_\alpha \circ E_\alpha) = \square_\alpha E_\alpha \circ \square_\alpha E_\alpha$. Entonces, si $\mathsf{E} = \square_\alpha E_\alpha$, $\mathsf{E}\circ\mathsf{E} \subseteq \mathsf{D}$.

iii) $\mathsf{D} \in \square_\alpha\mathfrak{D}_\alpha \Rightarrow \mathsf{E}^{-1} \subset \mathsf{D}$ para algún $\mathsf{E} \in \square_\alpha\mathfrak{D}_\alpha$: Sea ahora $\mathsf{D} = \square_\alpha D_\alpha \in \square_\alpha\mathfrak{D}_\alpha$, donde $D_\alpha \in \mathfrak{D}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, luego existe $C_\alpha \in \mathfrak{D}_\alpha$ tal que $C_\alpha^{-1} \subseteq D_\alpha$. Aplicando *i*) del lema anterior, $(\square_\alpha C_\alpha)^{-1} = \square_\alpha C_\alpha^{-1} \subseteq \square_\alpha D_\alpha$. Entonces si $\mathsf{C} = \square_\alpha C_\alpha$, $\mathsf{C}^{-1} \subseteq \mathsf{D}$.

(*iv*) Si $\mathsf{D} \in \square_\alpha\mathfrak{D}_\alpha$ y $\mathsf{E} \in \square_\alpha\mathfrak{D}_\alpha$ existe $\mathsf{F} \in \square_\alpha\mathfrak{D}_\alpha$ tal que $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{D} \cap \mathsf{E}$: Sean D, E elementos de $\square_\alpha\mathfrak{D}_\alpha$, luego $\mathsf{D} = \square_\alpha D_\alpha$ y $\mathsf{E} = \square_\alpha E_\alpha$, donde E_α, D_α son elementos de $\mathfrak{D}_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Por ser $\mathfrak{D}_\alpha$ una base uniforme existe $F_\alpha \in \mathfrak{D}_\alpha$ tal que $F_\alpha \subseteq D_\alpha \cap E_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Por lo tanto $\square_\alpha F_\alpha \subseteq \square_\alpha E_\alpha \cap \square_\alpha D_\alpha$.

$\tau(\square_\alpha\mathfrak{D}_\alpha) = \square_\alpha\tau_\alpha$: Sea $G \in \tau(\square_\alpha\mathfrak{D}_\alpha)$ y x un elemento de G. Existe entonces $\mathsf{D} \in \square_\alpha\mathfrak{D}_\alpha$ tal que $\mathsf{D}[x] \subseteq G$. Por (*iii*) del lema anterior, $x \in \Pi_\alpha D_\alpha[x_\alpha] = D[x] \subseteq G$. Dado que $\Pi_\alpha D_\alpha[x_\alpha]$ es un básico de $\square_\alpha X_\alpha$, $G \in \square_\alpha\tau_\alpha$.

Sea ahora $\Pi_\alpha G_\alpha$ un abierto básico en $\square_\alpha\tau$ y x un elemento de $\Pi_\alpha G_\alpha$. Por hipótesis, para cada $\alpha \in I$ existe, $D_\alpha \in \mathfrak{D}_\alpha$ tal que $x \in D_\alpha[x_\alpha] \subseteq G_\alpha$. Aplicando otra vez *iii*) del Lema anterior, $x \in \Pi_\alpha D_\alpha[x_\alpha] = \mathsf{D}[x] \subseteq \Pi_\alpha G_\alpha$, donde $\mathsf{D} = \square_\alpha\mathfrak{D}_\alpha$. Esto prueba que $\Pi_\alpha G_\alpha$ es un abierto en $\tau(\square_\alpha\mathfrak{D}_\alpha)$. ■

Este teorema tiene dos importantes corolarios:

Corolario 1.16 *El producto caja de espacios completamente regulares es completamente regular.*

PRUEBA Esto resulta de los Teoremas 1.13 y 1.14. ■

Para el segundo corolario necesitamos antes unas definiciones.

Definición 1.17 *Sea $\mathfrak{F}$ una colección no vacía de subconjuntos de un espacio topológico X. $\mathfrak{F}$ es un **filtro** si satisface:*

(*i*) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.
(*ii*) Si $A \in \mathfrak{F}$ y $B \in \mathfrak{F}$ entonces $A \cap B \in \mathfrak{F}$.
(*iii*) Si $A \in \mathfrak{F}$ y $A \subset B \subset X$, entonces $B \in \mathfrak{F}$.

Definición 1.18 *Sea $\mathfrak{F}$ un filtro de un espacio topológico X y $\mathfrak{D}$ una base uniforme compatible sobre X.*

i) Sea $x \in X$. $\mathfrak{F}$ **converge** a x ($\mathfrak{F} \to x$), si cada vecindad U de x pertenece a $\mathfrak{F}$.

ii) $\mathfrak{F}$ es de **$\mathfrak{D}$-Cauchy** si siempre que $D \in \mathfrak{D}$ existe $x \in X$ tal que $D[x] \in \mathfrak{F}$.

iii) $\mathfrak{D}$ es **completa** si todo filtro $\mathfrak{D}$-cauchy converge.

iv) X es **topologicamente completo** si posee una base uniforme compatible completa.

Corolario 1.19 *El producto caja de espacios topológicamente completos es topológicamente completo*

PRUEBA. Sea $\mathfrak{F}$ un filtro $\square_\alpha \mathfrak{D}_\alpha$-Cauchy sobre $\square_\alpha X_\alpha$. Para cada $\beta \in I$ definimos

$$\mathfrak{F}_\beta = \left\{ F \subset X_\beta : \pi_\beta^{-1}(F) \in \mathfrak{F} \right\}$$

Mostraremos que $\mathfrak{F}_\beta$ es un filtro $\mathfrak{D}_\beta$-Cauchy sobre X_β. Es fácil ver que $\mathfrak{F}_\beta$ es un filtro de X_β. Veamos entonces que $\mathfrak{F}_\beta$ es de $\mathfrak{D}_\beta$-Cauchy. Sea $D \in \mathfrak{D}_\beta$. Elegimos $\mathsf{D} = \square_\alpha D_\alpha \in \square_\alpha \mathfrak{D}_\alpha$ tal que $D_\alpha = X_\alpha^2$ si $\alpha \neq \beta$ y $D_\beta = D$; dado que $\mathfrak{F}$ es $\square_\alpha \mathfrak{D}_\alpha$-cauchy, existe $x \in \Pi_\alpha X_\alpha$ tal que $\mathsf{D}[x] \in \mathfrak{F}$. Por el Lema 1.14(*iii*) se tiene que

$$\mathsf{D}\left[x\right] = \Pi_\alpha D_\alpha \left[x_\alpha\right] = \pi_\beta^{-1}(D_\beta \left[x_\beta\right]) \in \mathfrak{F}.$$

Esto prueba que $\mathfrak{F}_\beta$ es $\mathfrak{D}_\beta$-Cauchy sobre X_β. Por otra parte dado que X_α es topologicamente completo para cada $\alpha \in I$, existe $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que $\mathfrak{F}_\alpha \to x_\alpha$. Mostraremos que $\mathfrak{F} \to x = \{x_\alpha\}$. Es suficiente probar que para todo $\mathsf{D} \in \square_\alpha \mathfrak{D}_\alpha$, $\mathsf{D}[x] \in \mathfrak{F}$. Sea $\mathsf{D} = \square_\alpha D_\alpha \in \square_\alpha \mathfrak{D}_\alpha$. Se puede ver que existe un elemento simétrico $\mathsf{E} \in \square_\alpha \mathfrak{D}_\alpha$ tal que $\mathsf{E} \circ \mathsf{E} \circ \mathsf{E} \subseteq \mathsf{D}$ y dado que $\mathfrak{F}$ un filtro $\square_\alpha \mathfrak{D}_\alpha$-Cauchy sobre $\square_\alpha X_\alpha$, existe $y \in \Pi_\alpha X_\alpha$ tal que $\mathsf{E}[y] \in \mathfrak{F}$.

Mostraremos que $\mathsf{E}[y] \cap \mathsf{E}[x] \neq \emptyset$. Para toda $\alpha \in I$, $E_\alpha\left[y_\alpha\right] \in \mathfrak{F}_\alpha$ y dado que $\mathfrak{F}_\alpha \to x_\alpha$ también $E_\alpha\left[x_\alpha\right] \in \mathfrak{F}_\alpha$. Luego $E_\alpha\left[y_\alpha\right] \cap E_\alpha\left[x_\alpha\right] \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in I$, por lo tanto, $\mathsf{E}[y] \cap \mathsf{E}[x] = \Pi_\alpha(E_\alpha[y] \cap E_\alpha[x_\alpha]) \neq \emptyset$. Asi que existe un elemento $q \in \mathsf{E}[y] \cap \mathsf{E}[x]$ y éste satisface que (y, q), $(x, q) \in \mathsf{E}$.

Se prueba ahora que $\mathsf{E}[y] \subset \mathsf{D}\left[x\right]$. Sea $z \in \mathsf{E}[y]$, luego $(y, z) \in E$. Se tiene entonces, por ser E simétrico que (x, q), (q, y) y (y, z) son elementos de E, luego $(x, z) \in \mathsf{E} \circ \mathsf{E} \circ \mathsf{E} \subset \mathsf{D}$, es decir $z \in \mathsf{D}[x]$. Por último, dado que $\mathfrak{F}$ es un filtro y $\mathsf{E}[y] \in \mathfrak{F}$, entonces $\mathsf{D}[x] \in \mathfrak{F}$, que es lo que se quería probar. ■

Sea $\mathfrak{D}$ una base uniforme. Una **sucesión normal** en $\mathfrak{D}$ es una colección numerable $\{D_n : n \in \omega\}$ de miembros de $\mathfrak{D}$ tal que para toda $n \in \omega$, $D_{n+1} \circ D_{n+1} \subseteq D_n \circ D_n^{-1}$. La siguiente proposición, sobre sucesiones normales, la probamos para referencia posterior.

Proposición 1.20 *Para cualquier sucesión $\{E_n : n \in \omega\}$ en una base uniforme $\mathfrak{D}$, existe una sucesión normal $\{D_n : n \in \omega\}$ tal que $D_n \subseteq E_n$ para toda $n \in \omega$.*

PRUEBA Tomemos $D_0 = E_0$. Sea $D_1^{'} \in \mathfrak{D}$ tal que $D_1^{'} \circ D_1^{'} \subseteq D_0 \cap D_0^{-1}$. Tomamos entonces $D_1 = D_1^{'} \cap E_1$, luego $D_1 \subseteq E_1$ y $D_1 \circ D_1 \subseteq D_0 \cap D_0^{-1}$. Sea ahora $D_2^{'} \in \mathfrak{D}$ tal que $D_2^{'} \circ D_2^{'} \subseteq D_1 \cap D_1^{-1}$, tomamos entonces $D_2 = D_2^{'} \cap E_2$, luego $D_2 \subseteq E_2$ y $D_2 \circ D_2 \subseteq D_1 \cap D_1^{-1}$. Continuando el procedimiento indefinidamente obtenemos la sucesión $\{D_n : n \in \omega\}$ que es normal y satisface además que $D_n \subseteq E_n$ para toda $n \in \omega$. ■

1.3 FUNCIONES CARDINALES

En esta sección se estudian algunas funciones cardinales que tienen importancia en el estudio de los productos caja.

Definición 1.21 *Sea X un espacio topológico.*

$i)$ La **densidad** de X denotada por $d(X)$ es

$$d(X) = \min\left\{|S| : S \subset X,\ \overline{S} = X\right\}.$$

$ii)$El **número de Lindelöf** de X, denotado por $L(X)$ es

$$L(X) = \min\{\kappa : \text{cualquier cubierta abierta de } X \text{ tiene una subcubierta de cardinalidad} \leq \kappa\}.$$

$iii)$ El **peso** de X, denotado por $w(X)$ es

$$w(X) = \min\{|\beta| : \beta \text{ es una base para } X\}.$$

Es fácil ver que $L(X) \leq \min\{|X|, w(X)\}$. Además si X es un producto caja de espacios regulares no discretos, por el Teorema 1.7 incisos (ii) y (iii), se tiene que $d(X) > \omega$ y $w(X) > \omega$.

Para las funciones continuas y sobreyectivas se tiene la siguiente propiedad del número de Lindelöf, que aplicaremos posteriormente.

Lema 1.22 *Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua y sobreyectiva, entonces $L(Y) \leq L(X)$.*

PRUEBA Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de Y, entonces $f^{-}(\mathcal{U}) = \{f^{-}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de X. Existe entonces una subcubierta $\mathcal{W}$ de $f^{-}(\mathcal{U})$ tal que $|\mathcal{W}| \leq L(X)$. Elegimos ahora para cada $x \in X$ un abierto $W_x \in \mathcal{W}$ que contiene a x, entonces $W_x = f^{-}(U_{f(x)})$ para un $U_{f(x)} \in \mathcal{U}$. Luego la colección $\left\{U_{f(x)} : x \in X\right\}$ es una subcubierta de $\mathcal{U}$ tal que $\left|\left\{U_{f(x)} : x \in X\right\}\right| \leq L(X)$. ■

Un espacio X es de **Lindelöf** si $L(X) = \omega$. La siguiente proposición muestra que un producto caja nunca es Lindelöf.

Proposición 1.23 *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos T_1 y $X = \square_\alpha X_\alpha$. Entonces $L(X) \geq 2^{|I|}$. En particular un producto caja nunca es un espacio de Lindelöf.*

PRUEBA. Para cada espacio X_α elegimos dos subconjuntos abiertos A_α *y* B_α de X_α, diferentes del $\emptyset$ y de X_α tales que $X_\alpha = A_\alpha \bigcup B_\alpha$. Así, la familia

$$\{\textstyle\prod_\alpha G_\alpha : G_\alpha \in \{A_\alpha, B_\alpha\}\}$$

es una cubierta abierta de X de cardinalidad $2^{|I|}$, de la que no se puede extraer ninguna subcubierta numerable. ■

Estimamos ahora la densidad de los espacios $\square(\omega+1)^\omega$ y $\square\mathbb{R}^\omega$. Estos espacios tienen un interés especial ya que se ha mostrado que bajo CH estos espacios son paracompactos, pero aún no se sabe si en ZFC se puede decidir su paracompacidad.

Proposición 1.24 $d(\square\mathbb{R}^\omega) = \mathfrak{c}$ *y* $d(\square(\omega{+}1)^\omega) = \mathfrak{c}$.

PRUEBA. Es claro que $d(\square\mathbb{R}^\omega) \leq \mathfrak{c}$ y $d(\square(\omega{+}1)^\omega) \leq \mathfrak{c}$. Por otra parte observemos que si D es un conjunto denso en $\square\mathbb{R}^\omega$ o en $\square(\omega{+}1)^\omega$, siguiendo la demostración de la prueba del Teorema 1.7 (*ii*) se obtiene que $|D| \geq 2^\omega = \mathfrak{c}$. Esto prueba la conclusión del teorema. ■

1.4 NORMALIDAD

En esta sección se presentan algunos resultados relacionados con la normalidad de los productos caja. Este tema presenta algunas dificultades y problemas que no se presentan para los productos Tychonoff. Por ejemplo, es conocido que el producto Tychonoff de una colección numerable de espacios metrizables es metrizable, y por lo tanto normal, contrastando con el hecho de que para productos caja esto no necesariamente ocurre, como mostramos en el siguiente teorema.

Teorema 1.25 *Si $\{X_n : n \in \omega\}$ es una familia de espacios métricos separables, entonces $\square_n X_n$ no es necesariamente normal.*

PRUEBA. Consideremos el producto de Tychonoff Z^ω, donde,

$$Z = \left\{\frac{1}{n+1} : n \in \omega\right\} \cup \{0\}$$

con la topología de subespacio de la recta real. Es claro que Z^ω es un espacio compacto metrizable. Denotemos por d a una métrica compatible con este espacio. Consideremos también el subespacio

$$P = \{t \in Z^\omega : t(n) \neq 0 \text{ para todo } n \in \omega\}$$

Este espacio es homeomorfo al espacio de los irracionales, véase [2] . Definimos ahora el espacio $X = P \times \Box L^{\omega}$, donde $L = \{-r : r \in Z\}$ con la topología de subespacio de la recta real. X es un producto caja de espacios metrizables; mostraremos que no es normal.

Consideremos los subconjuntos de X, $F = \{(p, -p) : p \in P\}$ y $G = P \times (L - \{0\})^{\omega}$, es claro que F es cerrado, G es abierto y $F \subset G$. Supongamos que existe un abierto U de X tal que $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq G$. Para cada $n \in \omega$ definimos el conjunto

$$U_n = \left\{-p : p \in P \text{ y } B(p, 2^{-n}) \times \{-p\} \in U\right\}$$

donde $B(p, 2^{-n})$ es una bola abierta con centro en p y radio 2^{-n}. Es claro que $\bigcup\limits_{n \in \omega} U_n = (L - \{0\})^{\omega}$ y si $n < m$ entonces $U_n \subseteq U_m$. Además siguiendo la demostración del teorema 1.7(iv) podemos ver que $(L - \{0\})^{\omega}$ no es un conjunto F_{σ} de $\Box L^{\omega}$; luego existe $a \in \Box Z^{\omega}$ y $m \in \omega$ tal que $-a \in \overline{U_m} - (L - \{0\})^{\omega}$ en $\Box L^{\omega}$.

Debido a que $\Box Z^{\omega}$ y $\Box L^{\omega}$ son homeomorfos, se tiene que

$$a \in \overline{\{t : -t \in U_m\}} - P \text{ en } \Box Z^{\omega},$$

y por la densidad de P en Z^{ω}, existe $b \in P$ tal que $d(a, b) < \frac{1}{2^{m+1}}$. Ahora como $(b, -a) \notin G$, existe una caja abierta $V \subset \Box L^{\omega}$ tal que $-a \in V$ y un natural $k \geqq m + 1$ tal que

$$U \cap (\left\{t \in P : d(b, t) < \frac{1}{2^k}\right\} \times V) = \emptyset. \tag{1.1}$$

Sea ahora $V' = \{v : -v \in V\}$, luego V' es una caja abierta en $\Box Z^{\omega}$ tal que $a \in V'$; dado que $a \in \overline{\{t : -t \in U_m\}}$, entonces

$$(B(a, \frac{1}{2^k}) \cap V') \cap \{t : -t \in U_m\} \neq \emptyset.$$

Por lo tanto existe un elemento c en

$$B(a, \frac{1}{2^k}) \cap V' \cap \{t : -t \in U_m\}$$

y esto implica que

$$\left\{t \in P : d(t, c) < \frac{1}{2^m}\right\} \times \{-c\} \subseteq U$$

Dado que $d(b, c) \leq d(b, a) + d(a, c) < \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^m}$ entonces $(b, -c) \in U$. Pero esto contradice 1.1. ■

Mostramos en seguida que los productos caja, siempre contienen subespacios no normales, si los factores son compactos o primero numerables. Para probar esto aplicamos el siguiente teorema debido a Katetov. Recuerdese que un espacio topológico X es **hereditariamente normal** si cada subespacio de X es normal.

Teorema 1.26 *(Teorema de Katetov)* [19] *Si $X \times Y$ es hereditariamente normal, entonces o cualquier subconjunto numerable de X es cerrado y discreto o cada subespacio cerrado de Y es un G_δ.*

Proposición 1.27 *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de espacios no discretos tales que $\Box_\alpha X_\alpha$ es hereditariamente normal. Entonces para cada $\alpha \in I$, cualquier subconjunto numerable de X_α es cerrado y discreto.*

PRUEBA. Sea $\beta \in I$ fijo y sea $\Box' = \Box_{\alpha \neq \beta} X_\alpha$. Por la Proposición 1.3, $\Box_\alpha X_\alpha \approx X_\beta \times \Box'$, y por el Teorema 1.7$(iv)$, $\Box'$ tiene un subconjunto cerrado que no es un G_δ. Aplicando ahora el Teorema de Katetov, se tiene el resultado. ■

Corolario 1.28 *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de espacios compactos o primero numerables no discretos, entonces $\Box_\alpha X_\alpha$ tiene un subespacio no normal.*

PRUEBA. Esto es claro, ya que un espacio compacto no tiene subconjuntos numerables que sean cerrados discretos, y un espacio primero numerable tiene al menos un subconjunto numerable que no es cerrado discreto. ■

Capítulo 2

PARACOMPACIDAD

De las propiedades de los productos caja que se han estudiado más detenidamente, están la paracompacidad y la normalidad; un problema de especial interés es el siguiente:

Determinar qué condiciones debe cumplir una familia de espacios topológicos, para que su producto caja sea paracompacto.

Para familias no numerables hasta 1990 no se sabía nada con respecto a este problema, hasta que en ese año L.B. Lawrence prueba el único resultado negativo que se tiene: En ZFC el producto caja no numerable de copias de la recta real no es normal. La situación es distinta para familias numerables, ya que en este caso se han obtenido algunos resultados positivos con axiomas adicionales a ZFC. El primero de ellos fue obtenido en 1972 por M.E. Rudin, [10]: La hipótesis del continuo implica que el producto caja de una familia numerable de espacios metrizables σ-compactos localmente compactos es paracompacto.

El teorema de M. E. Rudin se ha mejorado, pero aún son desconocidos muchos aspectos sobre la cuestión de la paracompacidad y normalidad de un producto caja. Por ejemplo, no se sabe si en **ZFC** el producto caja de una familia numerable es paracompacto o normal, cuando todos los factores son compactos metrizables o compactos primero numerables.

En este capítulo, se presentan algunos de los resultados obtenidos por K.Kunen [3] y E. K. van Douwen [6], relacionados con el problema anterior para familias numerables.

Se considera en este capítulo que los espacios son T_3, es decir regulares y T_1.

2.1 PRELIMINARES.

En esta sección se presentan algunas propiedades de los espacios paracompactos que aplicaremos posteriormente.

Recordemos que si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son dos familias de conjuntos de un espacio topológico X, se dice que $\mathcal{U}$ **es localmente finita** si para cada $x \in X$ existe una vecindad de x que intersecta a lo más, un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. $\mathcal{U}$ **refina a** $\mathcal{V}$ si $\cup\mathcal{U} = \cup\mathcal{V}$ y si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \subseteq V$. X es **paracompacto** si cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.

Se puede encontrar en [1] sugerencias para la demostración de la siguiente caracterización de la paracompacidad.

Proposición 2.1 *Un espacio X es paracompacto si y sólo si para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, existe una vecindad V de la diagonal de X^2 tal que $\{V[x] : x \in X\}$ refina $\mathcal{U}$.*

Proposición 2.2 *En un espacio paracompacto X, el filtro de vecindades de la diagonal de X es una uniformidad completa compatible con X.*

PRUEBA. Sea $\mathcal{N}$ la colección de todas las vecindades de la diagonal de X. Mostraremos primero que $\mathcal{N}$ es una uniforme.

Es claro que $\triangle(X) \subseteq \cap\mathcal{N}$. Supóngase ahora que $(x, y) \in \cap\mathcal{N}$. Si $x \neq y$, entonces $(x, y) \notin \triangle(X)$ luego existe una vecindad V de (x, y) tal que $V \cap \triangle(X) = \emptyset$. Puesto que X^2 es regular existe una vecindad U de (x, y) tal que $(x, y) \in U \subset \bar{U} \subset V$. Así que $\triangle(X) \subset X^2 - \bar{U} \subset X^2 - U$ es decir $X^2 - U$ es una vecindad de $\triangle(X)$ y por lo tanto $(x, y) \notin X^2 - U$. Pero esto es una contradicción.

Sea $D \in \mathcal{N}$. Para cada $x \in X$ elegimos una vecindad abierta G_x de x tal que $G_x^2 \subseteq D$. De acuerdo a la Proposición 2.1 existe $E \in \mathcal{N}$ tal que $\{E[x] : x \in X\}$ refina a $\{G_x : x \in X\}$. Sea $C = E \cap E^{-1} \in \mathcal{N}$; probaremos que $C^{-1} \subseteq D$ y $C \circ C \subseteq D$. Sea $(y, x) \in C^{-1}$, entonces $(x, y) \in E$, esto es $y \in E[x]$; luego existe $z \in X$ tal que $E[x] \subseteq G_z$, y por lo tanto $x, y \in G_z$, es decir $(y, x) \in G_z^2 \subseteq D$. Esto muestra la primera contención. Ahora si $(x, z) \in C \circ C$, existe y tal que $(x, y) \in C$ y $(y, z) \in C$, y de ahí que $x, z \in E[y]$. Luego para un $w \in X$, $x, z \in G_w$, es decir $(x, z) \in G_w^2 \subseteq D$. Esto prueba la segunda contención.

$\mathcal{N}$ es compatible con X. En efecto, sea τ la topología de X. Hay que probar que $\tau(\mathcal{N}) = \tau$. Sea $G \in \tau(\mathcal{N})$ y $x \in G$. Luego existe $D \in \mathcal{N}$ tal que $D[x] \subset G$. Si se toma D abierto en X^2 se tiene que $D[x] \in \tau$. Esto prueba que $G \in \tau$. Sea ahora $G \in \tau$ y $y \in G$. Tomemos $F = (G \times G) \cup X - \{y\}) \times (X - y)$ que es una vecindad de $\triangle(X)$. Es claro que $F[y] \subseteq G$, es decir G es un abierto en $\tau(\mathcal{N})$. Esto prueba que $\mathcal{N}$ es compatible con X.

$\mathcal{N}$ es completa: Sea $\mathfrak{F}$ un filtro sobre X no convergente. Entonces para cada $y \in X$ existe una vecindad G_y de y tal que $G_y \notin \mathfrak{F}$. De acuerdo a la Proposición 2.1 existe $D \in \mathcal{N}$ tal que $\{D[x] : x \in X\}$ refina a $\{G_y : y \in X\}$. Es claro que $\mathfrak{F}$ no es $\mathcal{N}-$Cauchy. ■

Corolario 2.3 *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de espacios paracompactos. Entonces $\square_\alpha X_\alpha$ es topológicamente completo.*

PRUEBA. De la Proposición anterior se tiene que un espacio paracompacto es topologicamente completo. Aplicando el Corolario 1.19 se tiene el resultado. ■

Mostramos ahora que los P-espacios con número de Lindelöf igual a ω_1 son paracompactos.

Proposición 2.4 *Si X es un P-espacio y $L(X) \leq \omega_1$, entonces X es paracompacto.*

PRUEBA. Aceptemos por el momento que X es cero dimensional. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X, entonces $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento $\{V_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ donde cada V_α es un conjunto abierto-cerrado. Sea $W_\alpha = V_\alpha - \cup\{V_\beta : \beta < \alpha\}$, entonces $\{W_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una colección de conjuntos abiertos ajenos dos a dos que refina $\mathcal{U}$. En efecto, es claro que $\{W_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ refina a $\mathcal{U}$ y además cada W_α es un conjunto G_δ, pues es igual a $V_\alpha \cap \bigcap\limits_{\beta<\alpha} (X - V_\alpha)$ y $\alpha < \omega_1$. Como X es un P-espacio, entonces W_α es abierto para todo $\alpha < \omega_1$. Evidentemente, $\{W_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es localmente finita, por lo tanto X es paracompacto.

Mostramos por último que X es cero dimensional. Sea U un abierto de X y x un punto de U; por la regularidad de X existe una colección $\{G_n\}_{n<\omega}$ de conjuntos abiertos tal que $x \in \overline{G_{n+1}} \subset G_n \subset U$ para todo $n < \omega$. Es claro entonces que $\bigcap\limits_{n<\omega} G_n$ es un conjunto cerrado que contiene a x y a su vez está contenido en U. Por otra parte $\bigcap\limits_{n<\omega} G_n$ es abierto ya que X es un P-espacio. ■

Sea $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de un espacio X. $\mathcal{U}$ es **estrella finita** si para cada $U \in \mathcal{U}$, $\{V \in \mathcal{U} : U \cap V \neq \emptyset\}$ es finita. $\mathcal{U}$ es **estrella numerable** si para cada $U \in \mathcal{U}$, $\{V \in \mathcal{U} : U \cap V \neq \emptyset\}$ es a lo más numerable. Un espacio X es **fuertemente paracompacto**, si toda cubierta abierta tiene un refinamiento abierto estrella finito. Es claro que todo espacio fuertemente paracompacto es paracompacto.

La siguiente caracterización de los espacios fuertemente paracompactos es conocida, se puede hallar una demostración en [1].

Proposición 2.5 *Un espacio regular X es fuertemente paracompacto si y sólo si cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto estrella numerable.*

Un espacio X es **ultraparacompacto** si cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento formado por conjuntos abiertos ajenos dos a dos. Se puede encontrar una demostración del siguiente resultado en [6].

Proposición 2.6 *Un P-espacio paracompacto es ultraparacompacto.*

2.2 EL $\nabla-$PRODUCTO

Sea $\{X_n : n \in \omega\}$ una familia de espacios topologicos. Definimos la relación $\equiv$ en $\prod X_n$ por

$$x \equiv y \quad \text{si} \quad \{n : x_n \neq y_n\} \quad \text{es} \quad \text{finito}.$$

Se puede ver que $\equiv$ es una relación de equivalencia sobre $\prod X_n$, la cual induce un espacio cociente de $\square_n X_n$. A este espacio se le denota por $\triangledown_n X_n$, y lo llamaremos el **$\nabla-$producto** o **producto nabla** de los X_n. A la aplicación cociente que va de $\square_n X_n$ a $\triangledown_n X_n$ la designamos por q.

El producto nabla fue introducido por K. Kunen [3] para estudiar la paracompacidad de los productos caja numerables. En esta sección se presentan algunas propiedades básicas del $\nabla-$producto y de la aplicación cociente q, que aplicamos en la próxima sección.

Proposición 2.7 Sea $\{X_n : n \in \omega\}$ una familia de espacios y para cada $n \in \omega$, $A_n, B_n \subset X_n$. Entonces:
(i) $q(x) = q(y)$ si y sólo si $x_n = y_n$ para casi todo $n \in \omega$ (*es decir* $x_n = y_n$, excepto para un número finito de índices).
(ii) $q(x) \in q(\Pi_n A_n)$ si y sólo si $x_n \in A_n$, para casi todo $n \in \omega$.
(iii) $q(\Pi_n A_n) \subseteq q(\Pi_n B_n)$ si y sólo si $A_n \subseteq B_n$ para casi todo $n \in \omega$.
(iv) Si cada A_n es abierto (*cerrado*) en X_n entonces $q(\Pi_n A_n)$ es abierto (*cerrado*) en $\triangledown X_n$.

PRUEBA. *(i)* Es claro de la definición de $\equiv$.

(ii) Si $q(x) \in q(\Pi_n A_n)$, entonces existe $y \in \Pi A_n$ tal $q(x) = q(y)$. Por *(i)*, $x_n = y_n$ para casi todo n, y así $x_n \in A_n$ para casi todo n. El otro sentido es claro.

(iii) Supongamos que $q(\Pi_n A_n) \subseteq q(\Pi_n B_n)$. Entonces por *(ii)* si $x_n \in A_n$ para todo n, $x_n \in B_n$ para casi todo n. Esto implica que $A_n \subseteq B_n$ para casi todo n. El otro sentido es claro.

(iv) Supongamos que $A_n \subseteq X_n$ es abierto para cada $n \in \omega$. Se mostrará que $q^{-1}\{q(\Pi_n A_n)\}$ es abierto en $\square_n X_n$; esto prueba que $q(\Pi_n A_n)$ es abierto en $\nabla_n X_n$.

Sea $y \in q^{-1}\{q(\Pi_n A_n)\} = \{y \in \square_n X_n : y_n \in A_n \text{ para casi todo } n\}$. Entonces $y_n \in A_n$ para casi todo n. Para cada $n \in \omega$ tal que $y_n \in A_n$, tomemos un abierto V_n tal que $y_n \in V_n \subseteq A_n$, y para los $n \in \omega$ tal que $y_n \notin A_n$ tómese $V_n = X_n$. Entonces es claro que

$$y \in \Pi_n V_n \subseteq q^{-1}\{q(\Pi_n A_n)\}.$$

Por último, si A_n es cerrado en X_n para todo $n \in \omega$, entonces es suficiente mostrar que $\square_n X_n - q^{-1}\{q(\Pi_n A_n)\}$ es abierto. Repetimos el procedimiento anterior. ■

La siguiente proposición justifica el llamar producto a $\nabla_n X_n$.

Proposición 2.8 *Sea* $\{X_n : n \in \omega\}$ una familia de espacios y para cada $n \in \omega$, $A_n \subset X_n$. *Entonces* $q(\Pi_n A_n) \approx \nabla_n A_n$.

PRUEBA. Denotemos por q_A y q_X a las las aplicaciones cociente $\square_n A_n \to \nabla_n A_n$ y $\square_n X_n \to \nabla_n X_n$, respectivamente. Es claro que $q_A(x) = q_A(y)$, si y sólo si, $q_X(x) = q_X(y)$ para $x, y \in \square_n X_n$. Esto permite definir la aplicación $h : \nabla_n A_\alpha \to q_X(\square_n A_n)$ por $h(q_A(x)) = q_X(x)$, $x \in \square_n A_n$. Es fácil ver que h es uno-uno y sobre.

h es continua: Esto se puede ver si se observa que $h \circ q_A = q_X \mid \square_n A_n$ y se aplica el siguiente resultado que es bien conocido: Una aplicación $f : X \to Y$ donde X es un espacio cociente es continua si y sólo si la composición $f \circ q$ lo es, donde $q : Z \to X$ es la aplicación cociente, [1].

h es abierta: Sea $U_n \subseteq X_n$ un conjunto abierto para cada $n \in \omega$, entonces

$$q_X(\Pi_n(A_n \cap U_n)) = q_X(\square_n A_n) \cap q_X(\Pi_n U_n).$$

Esto prueba que h es una aplicación abierta. ■

Proposición 2.9 *Si para cada* $n \in \omega$, X_n *es un grupo topológico, entonces* $\nabla_n X_n$ *es un grupo topológico.*

PRUEBA Para $[x], [y]$ en $\nabla_n X_n$ se define $[x][y] = [xy]$. Es fácil ver que esta operación está bien definida y satisface los axiomas de grupo.

Mostramos que el producto es continuo. Sea U un abierto en $\nabla_n X_n$ que contiene $[x][y]$, luego $q^{-1}(U)$ es abierto en $\square_n X_n$ que contiene a xy. Dado que $\square_n X_n$ es un grupo topológico, existen conjuntos abiertos W_1 y W_2 en $\square_n X_n$ que contienen a x y y respectivamente tales que $W_1 W_2 \subseteq q^{-1}(U)$. Ya que

$$q^{-1}(W_1) q^{-1}(W_2) \subseteq q(W_1 W_2) \subseteq q(q^{-1}(U)) = U$$

se tiene la continuidad del producto. De manera similar se obtiene la continuidad de la inversión.
■

El $\nabla-$producto se comporta bien bajo axiomas de separación bajos.

Proposición 2.10 *Si para cada* $n \in \omega$, X_n *es Hausdorff, regular o completamente regular entonces también lo es* $\triangledown_n X_n$.

PRUEBA. La prueba de los casos Hausdorff y regular se obtiene inmediatamente aplicando la proposición 2.7(iv). Supongamos entonces que X_n es completamente regular T_2 para cada $n \in \omega$. Dado que un espacio es completamente regular T_2 si y sólo si es homeomorfo a un subespacio de una potencia de $[0,1]$, [1]; y a su vez $[0,1]$ es homeomorfo a un subespacio de un grupo topológico, por ejemplo el círculo, podemos afirmar que para cada $n \in \omega$, existe un grupo topológico Y_n y un subespacio $A_n \subseteq Y_n$ tal que $A_n \approx X_n$. Por otra parte aplicando la Proposición 2.8 $\triangledown_n A_n \approx q(\prod A_n) \subseteq \triangledown_n Y_n$. Dado que $\triangledown_n Y_n$ es un grupo topológico y $\triangledown_n A_n$ es homeomorfo a un subespacio de $\triangledown_n Y_n$ se tiene que $\triangledown_n A$ es completamente regular; esto debido a que un grupo topológico es completamente regular [1]. ■

Una interesante propiedad del $\triangledown$-producto es que siempre es un P-espacio. Para probar esta afirmación aplicaremos el lema siguiente.

Lema 2.11 *Si para todo $n \in \omega$, $\{A_{n,m} : m \in \omega\}$ es una sucesión de conjuntos tal que $A_{n,m+1} \subseteq A_{n,m} \subseteq X_n$ para todo $m \in \omega$, entonces $q\left(\Pi_n A_{n,n}\right) \subseteq \bigcap\limits_{m\in\omega} q\left(\Pi_n A_{n,m}\right)$.*

PRUEBA. Hay que mostrar que para cada $m \in \omega$, $q\left(\Pi_n A_{m,n}\right) \subseteq q\left(\Pi_n A_{n,m}\right)$. Por la proposición 2.7 (iii) es suficiente mostrar que para cada $m \in \omega$ existe k_m tal que $A_{n,n} \subseteq A_{n,m}$ si $n > k_m$. Esto se obtiene tomando $k_m = m$, ya que si $n > k_m = m$, entonces $A_{n,n} \subseteq A_{n,n-1} \subseteq ... \subseteq A_{n,m}$. ■

Proposición 2.12 *$\triangledown_n X_n$ es un $P-$espacio.*

PRUEBA. Sea U un G_δ en $\triangledown_n X_n$, esto es $U = \bigcap\limits_{m\in\omega} U_m$ donde cada U_m es un abierto en $\triangledown_n X_n$. Mostraremos que $q^{-1}(U)$ es abierto en $\square_n X_n$. Sea $x \in q^{-1}(U)$, luego para cada $m \in \omega$ existe un abierto básico $\Pi_n U_{n,m}$ en $\square_n X_n$ tal que $x \in \Pi_n U_{n,m} \subseteq q^{-1}(U_m)$; por lo tanto $q(x) \in q\left(\Pi_n U_{n,m}\right) \subseteq q\left(q^{-1}(U_m)\right) \subseteq U_m$, es decir

$$q(x) \in \bigcap_{m\in\omega} q\left(\Pi_n U_{n,m}\right) \subseteq \bigcap_{m\in\omega} U_m = U.$$

Dado que se pueden elegir los $\Pi_n U_{n,m}$ de tal manera que $\Pi_n U_{n,m+1} \subseteq \Pi_n U_{n,m}$ para todo $m \in \omega$, por el Lema 2.11 se tiene que $q\left(\Pi_n U_{n,n}\right) \subseteq \bigcap\limits_{m\in\omega} q\left(\Pi_n U_{n,m}\right)$. Esto permite mostrar que

$$x \in \Pi_n U_{n,n} \subseteq q^{-1}(U).$$

En efecto, es claro que $x \in \Pi_n U_{n,n}$ ya que $x_n \in U_{n,m}$ para todo $n \in \omega$; en particular para $n = m$. Sea ahora $y \in \Pi_n U_{n,n}$, entonces $q(y) \in q\left(\Pi_n U_{n,n}\right)$, esto es $q(y) \in U$. Por lo tanto $y \in q^{-1}(q(y)) \subset q^{-1}(U)$. ■

Corolario 2.13 *Si para cada $n < \omega$, X_n es un espacio regular entonces $\triangledown_n X_n$ es un espacio cero-dimensional.*

PRUEBA. Por las Proposicíónes 2.10 y 2.12, $\nabla_n X_n$ es un P-espacio regular. Por otra parte se mostró en la proposición 2.4 que los P-espacios regulares son cero-dimensioales. ■

Para finalizar esta sección consideremos la aplicación q. ¿Que propiedades topológicas tiene q? Por ser una aplicación cociente es continua, y por la Proposición 2.7(iv) es abierta. En la misma Proposición 2.7 se estableció que si F_n es un conjunto cerrado de un espacio X_n para toda $n \in \omega$, entonces $q(\Pi_n F_n)$ es cerrado en $\nabla_n X_n$. Esto sugiere preguntar si q también es cerrada. La respuesta es que, en general, no lo es; pero si cada X_n es σ-compacto y localmente compacto la aplicación cociente q resulta ser cerrada.

Teorema 2.14 *Si cada X_n es σ-compacto y localmente compacto entonces la aplicación cociente q es cerrada.*

PRUEBA. Para probar que q es cerrada aplicamos el siguiente teorema: Una aplicación continua $f : X \to Y$ es cerrada si y sólo si para cada punto $y \in Y$ y cada conjunto abierto $U \subseteq X$ el cual contiene a $f^{-1}\{y\}$, existe una vecindad V de y tal que $f^{-1}(V) \subseteq U$, [1].

Sea entonces $x \in \Box_n X_n$ y U una vecindad de $q^{-1}\{q(x)\}$. Para cada n se puede elegir una sucesión $\{X_{n,k}\}_k$ de subconjuntos compactos de X_n tal que

(i) $X_{n,0}$ es una vecindad de x_n,

(ii) $X_{n,k} \subseteq X_{n,k+1}$ y $X_n = \bigcup_k X_{n,k}$. (Ver el Teorema 7.2 en [2])

Afirmación: para cada k existe una sucesión $\{V_{n,k}\}_n$ de vecindades de x_n tal que

$$\prod_{n \leq k} X_{n,k} \times \prod_{n>k} V_{n,k} \subseteq U.$$

Para probar esto, obsérvese primero que $\Box_n X_n$ se puede identificar con $\prod_{n\leq k} X_n \times \Box_{n>k} X_n$; entonces U contiene a $\prod_{n\leq k} X_{n,k} \times \prod_{i>k} \{x_i\}$. Dado que $\prod_{n\leq k} X_{n,k}$ es compacto, existe una vecindad V de $\prod_{i>k}\{x_i\}$ en $\Box_{n>k} X_n$ tal que $\prod_{n\leq k} X_{n,k} \times V \subseteq U$, (ver el Teorema 3.9 en [1]); podemos suponer que V tiene la forma $\prod_{n>k} V_{n,k}$, donde los conjuntos $V_{n,k}$ son abiertos.

Definimos para cada $n < \omega$ una vecindad W_n de x_n por

$$W_0 = X_{0,0} \quad \text{y} \quad W_n = X_{n,0} \bigcap \left(\bigcap_{k<n} V_{n,k} \right) \text{ si } n > 0.$$

Entonces $\nabla_n W_n = q\left(\prod_n W_n\right)$ es una vecindad de $q(x)$. Mostramos ahora que $q^{-1}(\nabla_n W_n) \subseteq U$. Sea $y \in q^{-1}(\nabla_n W_n)$. Por la Proposición 2.7 (ii), existe m tal que $y_n \in W_n$ si $n > m$. Elegimos

$k \geq m$ tal que $y_n \in X_{n,k}$ para $n \leq m$. Dado que $y_n \in W_n \subseteq X_{n,0} \subseteq X_{n,k}$ para $n > m$, y $y_n \in W_n \subseteq V_{n,k}$ para $n > k$ vemos que

$$y \in \prod_{n \leq k} X_{n,k} \times \prod_{n > k} V_{n,k} \subseteq U.$$

Esto prueba que q es cerrada. ■

Corolario 2.15 *Si para cada $n \in \omega$, X_n es σ-compacto y localmente compacto, y además $\square_n X_n$ es paracompacto entonces, $\nabla_n X_n$ es paracompacto.*

PRUEBA Esto es consecuencia directa del Teorema 2.14 y el hecho de que las aplicaciones cerradas conservan la paracompacidad, [2] . ■

.

2.3 PARACOMPACIDAD Y PRODUCTOS CAJA NUMERABLES

Una cuestión natural que surge del Corolario 2.15 es la siguiente: ¿La paracompacidad del producto nabla $\nabla_n X_n$, implica la paracompacidad de $\square_n X_n$, si los espacios X_n son $\sigma-$compactos y localmente compactos? El siguiente teorema muestra que la respuesta es afirmativa y aun más, $\square_n X_n$ resulta ser fuertemente paracompacto. Esto trae como consecuencia un hecho interesante: en los productos caja numerables de espacios σ-compactos y localmente compactos, los conceptos de paracompacidad y paracompacidad fuerte son equivalentes. Damos una prueba de este hecho enseguida.

Teorema 2.16 *Supóngase que para cada $n < \omega$, X_n es un espacio regular σ-compacto y localmente compacto. Las afirmaciones siguientes son equivalentes.*

i) $\square_n X_n$ es fuertemente paracompacto.
ii) $\square_n X_n$ es paracompacto.
iii) $\triangledown_n X_n$ es paracompacto.

PRUEBA *i)* $\rightarrow$ *ii)* es clara. La implicación *ii)* $\rightarrow$ *iii)* es el Corolario 2.15. Probemos ahora *iii)* $\rightarrow$ *i)*. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $\square_n X_n$. Para cada $x \in \square_n X_n$ se define el conjunto

$$E(x) = \bigcup_{n < \omega} \{y \in \square_n X_n : y_k = x_k \text{ para } k > n\}.$$

$E(x)$ es σ-compacto, dado que para cada n el conjunto

$$\{y \in \square_n X_n : y_k = x_k \text{ para } k > n\} = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \times \prod_{k>n} \{x_k\}$$

es σ-compacto. Por el Teorema 2.14, la aplicación $q : \square_n X_n \to \triangledown_n X_n$ es cerrada, aplicamos entonces la siguiente caracterizacion de la aplicaciones cerradas: Una aplicación $f : X \to Y$ es cerrada si sólo si dado un subcunjunto $S \subset Y$ y un abierto U que contiene a $f^{-}(S)$, entonces existe un conjunto abierto $V \supset S$ tal que $f^{-}(V) \subset U$, [1]. Luego para el conjunto $q(x) = E(x)$ se puede elegir una subcolección numerable $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}$ tal que $q^{-1}\{q(x)\} \subseteq \bigcup \mathcal{U}_x$ y un conjunto abierto $V_{q(x)}$ en $\triangledown_n X_n$ tal que

$$q(x) \in V_{q(x)} \text{ y } q^{-1}\left(V_{q(x)}\right) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_x.$$

Por hipótesis y por la Proposición 2.12, $\triangledown_n X_n$ es un P-espacio paracompacto, de ahí que este espacio es ultraparacompacto, por la Proposición 2.6. Sea entonces $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un refinamiento de $\left\{V_{q(x)} : x \in \square_n X_n\right\}$ formado por conjuntos abiertos ajenos dos a dos. Luego para cada $\alpha \in I$, existe $V_\alpha = V_{q(x)}$ para algún $x \in \square_n X_n$ tal que $W_\alpha \subseteq V_\alpha$. Entonces

$$\left\{q^{-1}(W_\alpha) \cap U : U \in \cup \mathcal{U}_x, \text{ donde } W_\alpha \subseteq V_\alpha = V_{q(x)}, \alpha \in I\right\}$$

es un refinamiento estrella numerable y abierto de $\mathcal{U}$. Dado que $\square_n X_n$ es regular, por la Proposición 2.5 se tiene que $\square_n X_n$ es fuertemente paracompacto. ■

El corolario siguiente es una versión mejorada del Teorema de M. E. Rudin [10].

Corolario 2.17 ***(CH)*** *Si para cada $n \in \omega$, X_n es un espacio regular σ-compacto localmente compacto y $w(X_n) \leq \omega_1$, entonces $\square_n X_n$ es paracompacto.*

PRUEBA Dado que $w(X_n) \leq \omega_1$ para toda $n \in \omega$, entonces $w(\square_n X_n) \leq \omega_1$, y de ahí que $L(\square_n X_n) \leq \omega_1$. Por el Lema 1.22, $L(\nabla_n X_n) \leq \omega_1$, y por las Proposiciones 2.12 y 2.4, $\nabla_n X_n$ es paracompacto. Concluimos que $\square_n X_n$ es paracompacto por el Teorema 2.16. ■

Una interesante propiedad de los productos caja numerables es que bajo CH, la paracompacidad se puede caracterizar en términos del número de Lindelöf, cuando los factores son compactos. Para probar esto, aplicamos la siguiente propiedad de los espacios compactos, debida a Arhangel'skii.

Lema 2.18 *Cualquier partición de un espacio compacto de conjuntos cerrados G_δ tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$.*

Se puede encontrar una prueba de este resultado en [5].

Teorema 2.19 *(CH) Si para cada $n < \omega$, X_n es un espacio compacto regular, entonces $\Box_n X_n$ es paracompacto si y sólo si $L(\Box_n X_n) \leq \omega_1$.*

PRUEBA Supongamos que $L(\Box_n X_n) = \omega_1$. Por el Lema 1.22 se tiene que $L(\nabla_n X_n) \leq \omega_1$, y dado que $\nabla_n X_n$ es un $P-$espacio regular, $\nabla_n X_n$ es paracompacto por la Proposición 2.4. Aplicando ahora el Teorema 2.16 se tiene que $\Box_n X_n$ es paracompacto.

Supongamos ahora que $\Box_n X_n$ es paracompacto. Sea $\mathcal{R}_0$ una cubierta abierta de $\Box_n X_n$. Aplicando las Proposiciones 2.1 y 2.2 construimos recursivamente una sucesión normal $\{D_n : n \in \omega\}$ de vecindades de la diagonal de $\Box_n X_n$, y una sucesión $\{\mathcal{R}_{n+1} : n \in \omega\}$ de cubiertas de cajas abiertas de $\Box_n X_n$ que satisfacen:

i) D_n refina a $\mathcal{R}_n$, y

ii) $\{\overline{R} : R \in \mathcal{R}_{n+1}\}$ refina a $\{D_n[x] : x \in \Pi_n X_n\}$.

Dado que $\{D_n : n \in \omega\}$ es normal, $E = \bigcap_{n<\omega} D_n$ es una relación de equivalencia sobre $\Pi_n X_n$ y E refina $\mathcal{R}_0$. Mostraremos que para cada $x \in \Pi_n X_n$, $E[x]$ es un conjunto G_δ cerrado en $\Pi_n X_n$ con la topología Tychonoff. Sea $x \in \Pi_n X_n$ fijo y sea $m \in \omega$. Por *i)* existe $R_{m+3} \in \mathcal{R}_{m+3}$ tal que $D_{m+3}[x] \subseteq R_{m+3}$. De *ii)* existe $y \in \Pi_n X_n$ tal que $\Pi_n \overline{R_{n,m+3}} \subseteq D_{m+2}[y]$. Dado que $\{D_n : n < \omega\}$ es normal, es decir para todo $m < \omega$, $D_{m+1} \circ D_{m+1} \subseteq D_m \cap D_m^{-1}$, se tiene que $D_{m+2}[y] \subseteq D_m[x]$ y por lo tanto $\Pi_n \overline{R_{n,m+3}} \subseteq D_n[x]$. Para cada $m \in \omega$ definimos una caja abierta $G_m = \prod_n G_{n,m}$, donde

$$G_{n,m} = \begin{cases} R_{n,m} & si \quad n \leq m \\ X_n & si \quad n > m \end{cases}$$

Mostraremos que en $\Pi_n X_n$ con la topología Tychonoff

$$\bigcap_{m<\omega} \overline{G_m} = \bigcap_{m<\omega} G_m = E[x].$$

Dado que $\Pi_n \overline{R_{n,m+3}} \subseteq \Pi_n R_{n,m}$ para todo $m \in \omega$, entonces $\overline{G_{m+3}} \subseteq G_m$ para todo $m \in \omega$, luego es claro que $\bigcap_{m<\omega} \overline{G_m} = \bigcap_{m<\omega} G_m$. Para ver la otra igualdad tomemos $y \in E[x]$, luego $y \in D_m[x]$ para todo $m \in \omega$. Dado que $D_m[x] \subseteq \Pi_n R_{n.m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $y \in G_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, es decir $y \in \cap G_m$. Tomemos ahora $y \in \cap G_m$ y m fijo. Aplicando *i)* y *ii)* se tiene que $y \in \Pi_n R_{n,m+3}$ y dado que $\Pi_n R_{n,m+3} \subseteq D_m[x]$, $y \in D_m[x]$. Podemos concluir entonces que $y \in E[x]$.

Se ha probado entonces que $E[x]$ es un conjunto cerrado G_δ en $\Pi_n X_n$. Aplicando el Lema 2.18 se tiene que $|\{E[x] : x \in \Pi_n X_n\}| \leq \mathfrak{c}$. Además es claro que $\{E[x] : x \in \Pi_n X_n\}$ cubre a $\Box_n X_n$ y refina a $\mathcal{R}_0$. Por lo tanto existe $\mathcal{R}_0' \subset \mathcal{R}_0$ con $\left|\mathcal{R}_0'\right| \leq \mathfrak{c}$ y $\mathcal{R}_0'$ cubre a $\Box_n X_n$. ■

Capítulo 3

LA m-TOPOLOGIA

Existen varias topologías naturales que se pueden asociar a $C(X)$ y entre las más importantes se pueden mencionar a la topología de la convergencia puntual, la topología de la convergencia uniforme, la topología compacto abierta y la $m-$topología. Esta última topología fue introducida por Hewitt [11] en 1948 y generaliza en forma natural a la topología de la convergencia uniforme.

En este capítulo se muestra, aplicando la teoría de los productos caja, que $C(X)$ con la $m-$topología no es normal si X es localmente compacto o primero numerable, y X no es pseudocompacto ni discreto.

Se considera en todo este capítulo que los espacios son Tychonoff, es decir T_1 y completamente regulares.

Empezamos con las definiciones de topología uniforme y m-topología. Para cada $\varepsilon > 0$ y $f \in C(X)$ sea $B(f, \varepsilon) = \{g \in C(X) : |g(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ para toda } x \in X\}$. La topología de la **convergencia uniforme** en $C(X)$ es la generada por la base $\mathcal{B} = \{B(f, \varepsilon) : f \in C(X),\ \varepsilon > 0\}$. Esta topología sobre $C(X)$ es metrizable; una métrica $\hat{d}$ que genera esta topología está definida por $\hat{d}(f, g) = \sup\{d_{\mathbb{R}}(f(x), g(x)) : x \in X\}$, donde $d_{\mathbb{R}}$ es una métrica acotada compatible con la topología usual de $\mathbb{R}$. Denotamos por $C_u(X)$ a $C(X)$ con la topología de la convergencia uniforme.

Sea $C^+(X)$ el conjunto de las funciones estrictamente positivas en $C(X)$, y para cada $e \in C^+(X)$ y $f \in C(X)$ sea

$$B(f, e) = \{g \in C(X) : |g(x) - f(x)| < e(x) \text{ para } x \in X\}.$$

La m-**topología** sobre $C(X)$ es la generada por la base

$$\mathcal{B} = \left\{B(f, e) : f \in C(X), e \in C^+(X)\right\}.$$

Es claro que la m-topología es más fina que la topología de la convergencia uniforme. En lo que sigue, $C_m(X)$ denota a $C(X)$ equipado con la m-topología. No es difícil ver que $C_m(X)$ es un espacio de Tychonoff, es decir, T_1 y completamente regular. El siguiente resultado relaciona a la m-topología con los productos caja.

Proposición 3.1 *Si X es discreto, entonces $C_m(X) \approx \square\mathbb{R}^X$.*

PRUEBA. Si X es discreto, entonces $C(X) = \mathbb{R}^X$. Sea $B(f, \varepsilon)$ un básico en la m-topología, donde $f \in C_m(X)$ y $e \in C^+(X)$ es claro entonces que

$$B(f, e) = \prod_{x \in X} (f(x) - e(x), f(x) + e(x)).$$

Sea ahora $\prod\limits_{x \in X} G_x$ un abierto básico en $\square\mathbb{R}^X$, donde $G_x = (a_x, b_x)$ para todo $x \in X$. Si $e \in C^+(X)$ está definida por $e(x) = \frac{b_x - a_x}{2}$ y $f : X \to \mathbb{R}$ por $f(x) = a_x + e(x)$, entonces es claro que $\prod\limits_{x \in X} G_x = B(f, e)$. ■

La topología de la convergencia uniforme está contenida en la $m-$topología. Por lo tanto una pregunta natural es ¿ cuándo $C_u(X) = C_m(X)$? No es difícil la demostración de la siguiente proposición que responde a esta pregunta. Recuerdese que un espacio X es **pseudocompacto** si toda función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es acotada.

Proposición 3.2 *Las condiciones siguientes son equivalentes:*

a) X es pseudocompacto,
b) $C_m(X) = C_u(X)$,
c) $C_m(X)$ es metrizable.

Esta última proposición nos dice que una condición necesaria para que $C_m(X)$ no sea normal es que X no sea pseudocompacto, por lo tanto nos será útil la siguiente caracterización de los espacios que no son pseudocompactos en términos de sucesiones abiertas discretas. Una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es **discreta** si para cualquier $x \in X$, existe una vecindad W de x que tiene intersección no vacía con a lo más un elemento de $\mathcal{U}$.

Proposición 3.3 *Un espacio X no es pseudocompacto si y sólo si tiene una sucesión discreta de conjuntos abiertos no vacíos.*

PRUEBA. Sea $\{U_n\}_{n \in \omega}$ una sucesión discreta de conjuntos abiertos no vacíos de X y sea $x_n \in U_n$. Dado que X es completamente regular se puede elegir para cada $n \in \omega$ una funcion continua $f_n : X \to \mathbb{R}$ tal que $f_n(X - U_n) = 0$ y $f_n(x_n) = n$. Entonces $\sum\limits_n f_n : X \to \mathbb{R}$ es una función continua ya que $\{U_n\}_{n<\omega}$ es discreta. Además claramente $\sum\limits_n f_n$ no es acotada en X.

Supongamos ahora que X no es pseudocompacto. Existe entonces una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ y un conjunto de puntos $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ de X tal que $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < ...$ y además $f(x_n) + 1 \leq f(x_m)$ para todo $n, m \in \omega$ y $n < m$.

Por la continuidad de f podemos elegir para cada $n \in \omega$ una vecindad abierta V_n de x_n tal que

$$\text{si } x \in V_n \text{ entonces } |f(x) - f(x_n)| < \frac{1}{4}.$$

La sucesión $\{V_n\}_{n<\omega}$ es discreta; en efecto sea $x \in X$, existe entonces una vecindad de V de x tal que

$$\text{si } y \in V \text{ entonces } |f(y) - f(x)| < \frac{1}{4}.$$

Supongamos que V intersecta a V_n y a V_m donde $n < m$. Luego existen puntos y_1, y_2 en V_n y V_m respectivamente tales que

$$|f(y_1) - f(x_n)| < \frac{1}{4} \text{ y } |f(y_2) - f(x_m)| < \frac{1}{4},$$

y como y_1, $y_2 \in V$ se satisface además que

$$|f(y_1) - f(x)| < \frac{1}{4} \text{ y } |f(y_2) - f(x)| < \frac{1}{4}.$$

Luego

$$\begin{aligned} |f(x_m) - f(x_n)| &\leq |f(x_m) - f(y_2)| + |f(y_2) - f(x)| + |f(x) - f(y_1)| + |f(y_1) - f(x_n)| \\ &< \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = 1. \end{aligned}$$

Pero esto último contradice las propiedades del conjunto $\{x_1, x_2, ...\}$. ■

3.1 LA m-TOPOLOGIA Y LOS PRODUCTOS CAJA

En esta sección mostramos que $C_m(\mathbb{R})$ no es normal y extendemos este resultado a espacios localmente compactos y primero numerables.

Denotamos en lo que sigue por $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ al conjunto de todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, equipado con la métrica d definida por

$$d(x, y) = \sum_{x(n) \neq y(n)} 2^{-n}, \; x, y \in \mathbb{N}^\mathbb{N}, \quad \sum \emptyset = 0.$$

$\mathbb{N}^\mathbb{N}$ con esta métrica d es un espacio métrico completo y es homeomorfo al espacio de los irracionales, [1]. Denotamos también por Z al espacio $\left\{\frac{1}{n+1} : n \in \omega\right\} \cup \{0\}$ con la topología usual de subespacio de $\mathbb{R}$. Se puede ver que cualquier espacio no discreto, primero numerable tiene necesariamente un subespacio cerrado homeomorfo a Z.

Proposición 3.4 *Sean A_n, $n \in \omega$, A, y B conjuntos definidos por*

$$\begin{aligned}
&A_n = \{f \in C_m(\mathbb{R}) : f(x) = 0 \text{ si } x \notin (2n, 2n+1)\},\\
&A = \left\{f \in C_m(\mathbb{R}) : f(x) = 0 \text{ si } x \notin \bigcup_{n<\omega} (2n, 2n+1)\right\} \text{ y}\\
&B = \{f \in C_m(I) : f(0) = f(1) = 0\}.
\end{aligned}$$

Entonces:

i) A es cerrado en $C_m(\mathbb{R})$,

ii) $A_n \approx B$,

iii) $A \approx \Box_n A_n$,

iv) B contiene un subespacio cerrado homeomorfo a $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

PRUEBA. *i)* Sea $f \in C_m(\mathbb{R}) - A$, luego existe $y \notin \bigcup_{n<\omega} (2n, 2n+1)$ tal que $f(y) \neq 0$. Si $\varepsilon = |f(y)|$, entonces $B(f, \varepsilon) \subset C_m(\mathbb{R}) - A$; en efecto, sea $g \in B(f, \varepsilon)$ entonces para todo $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - g(x)| < \varepsilon = |f(y)|$, luego $g(y) \neq 0$ y por lo tanto $g \notin A$. Esto prueba que A es cerrado en $C_m(R)$.

ii) Para cada $n \in \omega$, sea $A'_n = \{f \in C_m([2n, 2n+1]) : f(2n) = f(2n+1) = 0\}$. Es fácil ver que la aplicación $\psi : A_n \to A'_n$ definida por $\psi(f) = f \mid [2n, 2n+1]$ es un homeomorfismo; es decir $A_n \approx A'_n$. Por otro lado la aplicación $\psi : A'_n[2n, 2n+1] \to B$ definida por $\psi(f) = f \circ \varphi$, donde $\varphi : [0,1] \to [2n, 2n+1]$ es una aplicación lineal, es un homeomorfismo, esto es $A'_n \approx B$. Por lo tanto $A_n \approx B$.

iii) Sea $\sigma : \Box A_n \to A$ definida por $\sigma(f) = \sum f_n$. Es claro que $\sum f_n \in A$ para todo $f = \{f_n\} \in \Box A_n$. Mostraremos que σ es un homeomorfismo.

σ es sobre: Si $g \in A$, definimos para cada $n \in \omega$, la aplicación $f_n : X \to R$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} g(x) & si\ x \in (2n, 2n+1) \\ 0 & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

Es claro que $f_n \in A_n$. Luego $\sigma(f) = \sigma(\{f_n\}) = \sum f_n = g$.

σ es uno-uno: Supongamos que $\sigma(f) = \sigma(g)$, donde $f = \{f_n\}$ y $g = \{g_n\}$. Esto es $\sum f_n = \sum g_n$; luego para cada n, $f_n = g_n$. Así $f = g$.

σ es continua: Sea $f = \{f_n\} \in \Box_n A_n$. Es fácil ver que para todo $e \in C^+(\mathbb{R})$, $\sigma(\prod_n B(f_n, e)) = B(\sigma(f), e)$. Se sigue entonces la continuidad de σ.

σ es abierta: Sea $\Pi B(f_n,e_n)$ un abierto básico en $\square_n A_n$, donde $e_n \in C^+(\mathbb{R})$ para cada $n \in \omega$. Definimos $e \in C^+(\mathbb{R})$ por

$$e(x) = \begin{cases} e_n(x) & \text{si } x \in (2n, 2n+1) \\ const = e_0(0) & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ \text{lineal} & \text{si } x \in [2n+1, 2n+2]. \end{cases}$$

Luego $\sigma(\Pi_n B_n(f_n, e_n)) = B(\sigma(f), e)$; es decir σ es abierta.

iv) Dado que I es compacto, $C_m(I)$ es un espacio de Banach, bajo la norma $\|f\| = \max_{x\in I} |f(x)|$. B es cerrado en $C_m(I)$; en efecto sea $f \in C_m(I) - B$, luego $f(0) \neq 0$ ó $f(1) \neq 0$. Supongamos que $f(0) \neq 0$ y tomemos $\varepsilon = |f(0)|$, entonces $B\left(f, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq C_m(I) - B$. Para probar esta afirmación tomemos $g \in B\left(f, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, entonces$|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in [0,1]$. En particular $|f(0) - g(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y por lo tanto $g(0) \neq 0$. Esto prueba que $g \in C_m(I) - B$.

Sea $\{U_{n,k}\}_{n,k<\omega}$ una colección de conjuntos abiertos ajenos dos a dos de $[0,1]$, y sea $x_{n,k}$ un punto de $U_{n,k}$. Para cada $n, k \in \omega$ elegimos una función continua $f_{n,k} : [0,1] \to [0,1]$ tal que $f_{n,k}(x_{n,k}) = 1$ y $f_{n,k}([0,1] - U_{n,k}) = 0$. La sucesión $\{f_{n,k}\}_{n,k<\omega}$ está en B y tiene las siguientes propiedades:

1) $\|f_{n,k}\| = 1$ para todo $n, k \in \omega$.

2) $f_{n,k}(x) = 0$ ó $f_{i,j}(x) = 0$ para todo $x \in I$ y todo $n, k, i, j \in \omega$ con $n \neq i$, o $k \neq j$.

Dado que B es es subespacio cerrado de $C_m(I)$ podemos definir la aplicación $\psi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to B$ por $\psi(x) = \sum 2^{-n} f_{n,x(n)}$. Mostraremos que ψ es una inclusión, es decir mostraremos que ψ es inyectiva y continua, además de la continuidad de la aplicación $\psi^{-1} : \psi(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

ψ es inyectiva: Si $\psi(x) = \psi(y)$ entonces

$$\sum_n 2^{-n} f_{n,x(n)} - \sum_n 2^{-n} f_{n,y(n)} = \sum_n 2^{-n}(f_{n,x(n)} - f_{n,y(n)}) = 0$$

Supongamos que existe n tal que $x(n) \neq y(n)$. Si $t \in [0,1]$ es tal que $f_{n,x(n)}(t) = 1$, entonces $f_{n,y(n)}(t) = 0$ y por lo tanto

$$0 = \sum_n 2^{-n}\left(f_{n,x(n)} - f_{n,y(n)}\right) = 2^{-n}(f_{n,x(n)} - f_{n,y(n)})(t) = 2^{-n} f_{n,x(n)}(t) = 2^{-n}.$$

Pero esto es una contradicción, así que $x(n) = y(n)$ y por lo tanto $x = y$.

ψ es continua: Para todo $x, y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

$$d(\psi(x), \psi(y)) = \left\|\sum 2^{-n} f_{n,x(n)} - \sum 2^{-n} f_{n,y(n)}\right\| \leq 2^{-m} \leq \sum_{x(n)\neq y(n)} 2^{-n} = d(x,y)$$

donde m es tal que $x(m) \neq y(m)$ y si $i < m$ entonces $x(i) = y(i)$. La continuidad de ψ es entonces clara.

$\psi^{-1} : \psi\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right) \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es continua: Sea $g \in \psi\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)$ y $\varepsilon > 0$. Afirmamos que $\psi^{-1}(B\left(g, \frac{\varepsilon}{2}\right)) \subseteq B\left(x, \varepsilon\right)$ donde $x = \psi^{-1}(g)$; para probar esta afirmación tomemos $y = \psi^{-1}(h)$ donde $h \in B(g, \frac{\varepsilon}{2})$. Se tiene que

$$\|g - h\| = \left\| \sum 2^{-n} f_{n,y(n)} - \sum 2^{-n} f_{n,x(n)} \right\| \leq 2^{-m} < \frac{\varepsilon}{2},$$

donde m es tal que $x(m) \neq y(m)$ y si $i < m, x(i) = y(i)$.

Por otra parte $d\left(x, y\right) = \sum\limits_{x(n) \neq y(n)} 2^{-n} \leq \sum\limits_{n \geq m} 2^{-n} = 2^{-m+1} < \varepsilon$. Esto prueba que $y \in B\left(x, \varepsilon\right)$.

Se ha probado entonces que $\psi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to B$ es una inclusión. Ahora, dado que $\psi(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ es un subespacio completo de B, éste es cerrado en B. Es decir B tiene un subespacio cerrado homeomorfo a $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. ■

Teorema 3.5 *$C_m\left(\mathbb{R}\right)$ no es normal.*

PRUEBA Supongamos que $C_m(\mathbb{R})$ es normal. De $i), ii)$ y $iii)$ de la Proposición 3.4 se tiene que $\square B^{\omega}$es normal, donde $B = \left\{f \in C_m(I) : f(0) = f(1) = 0\right\}$, y de $iv)$ de la misma Proposición deducimos que $\square(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\omega}$ es normal. Por otra parte, dado que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ contiene un subespacio cerrado homeomerfo a $Z = \left\{\frac{1}{n+1} : n \in \omega\right\}$ con la topología usual de subespacio de $\mathbb{R}$, se tiene que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \square Z^{\omega}$ es un espacio normal. Pero esto es una contradicción, ya que en el Teorema 1.5 se prueba que el espacio $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \square Z^{\omega}$ no es normal. ■

Extendemos ahora el resultado del Teorema 3.5 a espacios localmente compactos o primero numerables.

Teorema 3.6 *Sea X un espacio el cual no es pseudocompacto ni discreto. Entonces $C_m(X)$ no es normal si X es localmente compacto o primero numerable.*

PRUEBA. De acuerdo con la Proposición 3.3 existe una sucesión discreta $\{V_n\}_{n<\omega}$ de conjuntos abiertos no vacíos en X, y como X no es discreto podemos suponer que V_0 contiene un punto no aislado.

Construimos ahora una sucesión $\{U_n\}_{n<\omega}$ de conjuntos de la siguiente manera: Si para $n \in \omega$, V_n está compuesto sólo de puntos aislados elegimos algún x_n de ellos y definimos $U_n = \{x_n\}$. Si para $n \in \omega$, V_n contiene algún punto x_n no aislado, entonces, dado que X es completamente regular, existe una función continua $\varphi_n : X \to [0, 2]$ tal que $\varphi_n(x_n) = 2$ y $\varphi_n(x) = 0$ si $x \notin V_n$. Definimos entonces $U_n = \varphi_n^{-1}((0, 2])$. Es fácil ver que$\{U_n\}_{n<\omega}$ así construida es una sucesión discreta de abiertos no vacíos tales que $U_n \subseteq V_n$.

Consideremos ahora los conjuntos

$$A_n = \{f \in C_m(X) : f(x) = 0 \text{ si } x \notin U_n\}\, n \in \omega, y$$

$$A = \left\{ f \in C_m(X) : f(x) = 0 \text{ si } x \notin \bigcup_{n<\omega} U_n \right\}.$$

Estos conjuntos tienen las siguientes propiedades:

1) A es cerrado en $C_m(X)$.

2) $A \approx \square_n A_n$.

3) A_n tiene un subespacio cerrado homeomorfo a $Z = \left\{ \frac{1}{n+1} : n \in \omega \right\}$ para $n > 0$.

4) A_0 tiene un subespacio cerrado homeomorfo a $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Prueba de 1) Sea $f \in C_m(X) - A$, luego existe $y \notin \bigcup\limits_{n<\omega} U_n$ tal que $f(y) \neq 0$. Si $\varepsilon = |f(y)|$ entonces $B(f, e) \subseteq C_m(X) - A$: en efecto sea $g \in B(f, e)$ entonces $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$. Luego $g(y) \neq 0$ y por lo tanto $g \in C_m(X) - A$.

Prueba de 2) Definimos $\sigma : \square_n A_n \to A$ por $\sigma(f) = \sum\limits_n f_n$. En forma análoga como se hizo en la Proposición 3.4(iii) se prueba que σ es una aplicación uno-uno, sobre y continua. Sólo queda mostrar que σ es abierta, para hacer esto definimos para cada $n \in \omega$ una aplicación continua $h_n : X \to [0,1]$ como sigue: si n es tal que x_n es un punto no aislado de V_n entonces $h_n = \min\{1, \varphi_n\}$ y para el caso en que $x_n \in V_n$ es aislado se define $h_n(x) = 1$ si $x = x_n$ y $h_n(x) = 0$ en otro caso. Se tiene entoncesque para cada n, $h_n : X \to [0,1]$ es continua, $h_n(x) = 1$ si $x \in U_n$ y $h_n(x) = 0$ si $x \notin V_n$.

Sea $\Pi_n B(f_n, e_n)$ un abierto básico en $\square_n A_n$ donde $e_n \in C^+(X)$. Entonces se define $e \in C^+(X)$ por $e = \sum (h_n e_n) + 1 - \sum\limits_n h_n$. Se puede ver que para todo $x \in X$ y $n \in \omega$, $e(x) = e_n(x)$, y por lo tanto $\sigma(\Pi B_n(f, e_n)) = B(\sigma(f), e)$. Es decir σ es abierto.

Prueba de 3) Si x_n es un punto aislado de V_n, entonces la aplicación $\sigma : A_n \to \mathbb{R}$ definida por $\sigma(f) = f(x_n)$, $f \in A_n$, es un homeomorfismo. Dado que $\mathbb{R}$ es primero numerable no discreto, A_n tiene un subespacio cerrado homeomorfo a Z.

Supongamos ahora que $x_n \in V_n$ es un punto no aislado. Se define entonces

$$B = \{f \in C_u(X) : f(x) = 0 \text{ si } x \notin U_n\}.$$

Siguiendo la prueba del Teorema 3.4(iv) y el hecho de que X es completamente regular se tiene que existe una sucesión doble $\{ f_{n,k}\}_{n,k<\omega}$ en B tal que

$i)$ $|f_{n,k}| \leq 1$ para todo $n, k \in \omega$ y existe x tal que $f_{n,k}(x) = 1$.

$ii)$ $f_{n,k}(x) = 0$ o $f_{i,j}(x) = 0$ para todo $x \in X$ y para todo n, k, i, j con $n \neq i$ o $k \neq j$.

Sea $\psi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to B$ la aplicación definida por $\psi(x) = \sum\limits_n 2^{-n} f_{n,x(n)}$. De manera análoga a como se hizo en la proposición 3.4(iv) se prueba que ψ es una inclusión con imagen cerrada.

Si X es localmente compacto, se puede elegir $U_n \subset V_n$ de tal manera que $\overline{U_n}$ sea compacto, pero esto implica que $A_n = B$. Dado que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es primero numerable, A_n tiene un subespacio cerrado homeomorfo a Z.

Supongamos ahora que X es primero numerable. Si $\{W_n\}_{n<\omega}$ es una base local decreciente de x_n, se puede elegir la sucesión $\{f_{n,k}\}$ en B de tal manera que para todo $n, k \in \omega$ y $x \in X$, si $x \notin W_n$ entonces $f_{n,k}(x) = 0$. Dado que la topología de la convergencia uniforme está contenida en la m-topología, la aplicación $\psi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow A_n$ definida como antes, es abierta y $\psi\left({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}\right)$ es cerrada en A_n. Además $\psi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow A_n$ continua; para ver esto observese primero que para cualquier $e \in C^+(X)$ existe m, tal que $e(z) > 2^{-m}$ siempre que $z \in W_m$. Entonces para todo $x, y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, si $x_n = y_n$ para $n \leq m$ se tiene

$$|\psi(x)(z) - \psi(y)(z)| \leq 2^{-m} = \sum_{n>m} 2^{-n} < e(z) \text{ para } z \in W_n.$$

Esto prueba que ψ es continua y por lo tanto ψ es una inclusión. Luego A_n tiene un subespacio cerrado homeomorfo a Z.

4) Este es el caso $n = 0$ en 3).

Por último, procediendo de manera análoga a como se hizo en la prueba del Teorema 3.5 se prueba que $C_m\left(X\right)$ no es normal. ■

Capítulo 4

ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS CON LA TOPOLOGIA CAJA

Consideremos el espacio $\mathbb{R}^X$, el espacio de todas las funciones de X a $\mathbb{R}$ con la topología de Tychonoff. La topología puntual sobre $C(X)$, es la topología que hereda como subespacio de $\mathbb{R}^X$; es natural considerar entonces la topología que hereda $C(X)$ como subespacio de $\Box\mathbb{R}^X$. A la topología que hereda $C(X)$ como subespacio $\Box\mathbb{R}^X$ la llamaremosmos la **topología caja**, y a $C(X)$ con esta topología lo denotamos por $C_\Box(X)$.

En este capítulo se hace un estudio de $C_\Box(X)$, que hasta donde sabemos, no se había hecho. Se trata principalmente el siguiente problema: ¿cuándo $C_\Box(X)$ es un espacio discreto?

En este capítulo no se suponen de antemano axiomas de separación, pero sí suponemos, a menos que se diga otra cosa, que los espacios son infinitos.

4.1 ALGUNAS PROPIEDADES DE C$_\Box(X)$

Empezamos mostrando que $C_\Box(X)$ es un subespacio cerrado de $\Box\mathbb{R}^X$.

Teorema 4.1 *Para cualquier espacio X, $C_\Box(X)$ es un subespacio cerrado de $\Box\mathbb{R}^X$.*

PRUEBA. Sea $f \in \Box\mathbb{R}^X - C(X)$. Existe entonces $x_0 \in X$ tal que f no es continua en ese punto; luego, existe una vecindad U de $f(x_0)$ tal que para toda vecindad V de x_0 existe $x_v \in V$ tal que $f(x_v) \notin U$. Podemos elegir entonces una vecindad $U_{f(x_0)}$ de $f(x_0)$ contenida en U y una vecindad $V_{f(x_v)}$ de $f(x_v)$ para cada $x_v \in V$ tal que $U_{f(x_0)} \bigcap V_{f(x_v)} = \emptyset$.

Consideremos ahora la caja abierta $\prod_{x\in X} U_x$, donde

$$U_x = \begin{cases} U_{f(x_0)} & si \quad x = x_0 \\ V_{f(x_v)} & si \quad x = x_v \\ \mathbb{R} & en \quad otro \quad caso. \end{cases}$$

Es claro entonces que $f \in \prod_{x\in X} U_x \subset \Box\mathbb{R}^X - C_\Box(X)$. ■

Proposición 4.2 $C_\Box(\mathbb{R})$ *es un espacio discreto.*

PRUEBA. Sea $f \in C_\Box(\mathbb{R})$. Mostraremos que existe una caja abierta $\prod_{x\in\mathbb{R}} G_x$ tal que $f \in \prod_{x\in\mathbb{R}} G_x$ y ésta es la única función continua que contiene.

Para cada $r \in \mathbb{Q}$ existe una sucesión $\{x_n^r\}$ de puntos irracionales tal que $x_n^r \to r$, que cumple además que si $r_1 \neq r_2$, entonces $\{x_n^{r_1}\}_{n\in\omega} \cap \{x_n^{r_2}\}_{n\in\omega} = \emptyset$. Consideremos la caja abierta $\prod_{x\in\mathbb{R}} G_x$, donde

$$G_x = \begin{cases} G_x = (f(x) - \frac{1}{n}, f(x) + \frac{1}{n}) & si \quad x = x_n^r, r \in \mathbb{Q}, n \in \omega \\ (f(x) - 1, f(x) + 1) & en \quad otro \quad caso. \end{cases}$$

Es claro que $f \in \prod_{x\in\mathbb{R}} G_x$, y además f es la única función continua que contiene $\prod_{x\in\mathbb{R}} G_x$; en efecto sea $g \in \prod_{x\in\mathbb{R}} G_x$ una función continua; dado que para cada $r \in \mathbb{Q}$, $x_n^r \to r$ entonces $g(x_n^r) \to g(r)$. Por otro lado se tiene que para cada $n \in \omega$,

$$f(x_n^r) - \frac{1}{n} < g(x_n^r) < f(x_n^r) + \frac{1}{n},$$

tomando límites tenemos que $f(r) \leq g(r) \leq f(r)$, esto es $f(r) = g(r)$. Como r es arbitrario y $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ se tiene que $f(x) = g(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. ■

Nos preguntamos ahora ¿qué propiedades debe tener un espacio X para que $C_\Box(X)$ sea discreto? Mostramos enseguida que si X es T_1 y tiene puntos aislados, entonces $C_\Box(X)$ no puede ser discreto. Recordemos que un punto $x \in X$ es **aislado** en X si $\{x\}$ es abierto.

Proposición 4.3 *Si X es un espacio T_1 con puntos aislados entonces $C_\Box(X)$ no es discreto.*

PRUEBA. Sean $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua, $\prod_{x\in X} U_x$ una caja abierta que contiene a f y x_0 un punto aislado de X. Definimos una función $g : X \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x)$ si $x \neq x_0$, y $g(x_0) = y_0$ donde $y_0 \in U_{x_0} - \{x_0\}$. Es claro que $g \in \prod_{x\in X} U_x$, y dado que $\{x_0\}$ es cerrado y abierto, g es continua.

Hemos probado que cualquier caja abierta de $\square\mathbb{R}^X$ no puede contener una única función continua, es decir $C_\square(X)$ no es discreto. ■

Esta última proposición nos plantea el siguiente problema: ¿cómo es la estructura topológica de $C_\square(X)$ cuando X es un espacio T_1 con puntos aislados? Damos una solución a este problema cuando el espacio X se puede escribir como $X = Y \cup F$, donde $C_\square(Y)$ es discreto y F es el conjunto formado por todos los puntos aislados de X.

Teorema 4.4 *Si X es un espacio topológico que se puede escribir como $X = Y \cup F$ donde F es discreto cerrado y abierto en X con $|F| = \kappa$ y $C_\square(Y)$ es discreto, entonces $C_\square(X) \approx \oplus_{s\in S}(X_s)$, donde $X_s \approx \square\mathbb{R}^\kappa$ para toda $s \in S$ con $S = C(Y)$.*

PRUEBA. Dado que $X = Y \cup F$, y F es un conjunto abierto cerrado y discreto de X, es fácil ver que $C_\square(X) \approx C_\square(Y) \times C_\square(F)$, además como $C_\square(Y)$ es discreto y $C_\square(F) \approx \square\mathbb{R}^\kappa$ se tiene entonces que $C_\square(X) \approx \oplus_{s\in S}(X_s)$, donde $X_s \approx \square\mathbb{R}^\kappa$ para toda $s \in S$ con $S = C(Y)$. ■

Un caso especial de este Teorema es cuando $\kappa = \omega_1$, en este caso se tiene que $C_\square(X) \approx \oplus_{s\in S}(\square\mathbb{R}^{\omega_1})$. L. B. Lawrence probó que $\square\mathbb{R}^{\omega_1}$ no es un espacio paracompacto [14] ; luego, si $|F| \geq \omega_1$, $C_\square(X)$ no es paracompacto, ya que en este caso $\square\mathbb{R}^F$ no es paracompacto.

También, si en el Teorema 4.4, se tiene que F es finito, esto es $|F| = n$, entonces $C_\square(X) \approx \oplus_{s\in S}(X_s)$ donde $X_s \approx \square\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, es dcir $C_\square(X)$ es metrizable.

Por último observemos que existen espacios que no se pueden escribir como lo requiere el Teorema 4.4. Un ejemplo de este tipo es $X = \left\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3...\right\} \cup \{0\}$ con la topología que hereda como subespacio de $\mathbb{R}$.

4.2 ESPACIOS C$_\square$-DISCRETOS

Un espacio X es $C_\square-$**discreto** si $C_\square(X)$ es discreto. $\mathbb{R}$ es $C_\square$-discreto y los espacios T_1 con puntos aislados no son $C_\square$-discretos, ver las Proposiciones 4.2 y 4.3. En esta sección estudiamos algunas de las propiedades de los espacios C$_\square$-discretos; probamos en particular que ésta es una clase grande de espacios que contiene a los espacios ω-resolubles.

En la prueba de la Proposición 4.2 no aplicamos el hecho de que $\mathbb{R}$ es un espacio separable. Mostramos ahora que esta condición es suficiente para garantizar que un espacio T_1 sin puntos aislados es C$_\square$-discreto. Tenemos antes el siguiente lema.

Lema 4.5 *Si X es un espacio T_0 sin puntos aislados, entonces todo conjunto abierto de X tiene un número infinito de puntos.*

PRUEBA Sea U un conjunto abierto de X y supongamos que

$$U = \{x_1, ..., x_n\}, \ n > 2$$

Para los puntos x_1 y x_2, por ser X un espacio T_0, podemos suponer que existe un abierto V tal que $x_1 \in V$ y $x_2 \notin V$, (para el otro caso el razonamiento es análogo). Entonces $U \cap V$ es un abierto que contiene a lo más $n - 1$ puntos.

Es decir, de un conjunto abierto con n puntos siempre podemos construir otro con a lo más $n - 1$ puntos. Podemos aplicar entonces este hecho las veces necesarias para obtener un conjunto abierto de un solo punto, lo cual contradice que X no tiene puntos aislados. ■

Teorema 4.6 *Un espacio X sin puntos aislados T_0, tal que*

$$min\{|D| : D \subset X \ es\ denso\ y\ denso\ en\ si\ mismo\} = \aleph_0$$

es $C_\square$-discreto. En particular un espacio X separable T_1 y denso en si mismo es $C_\square$-discreto.

Prueba. Sean $D = \{x_1, \ x_2, \ x_3, ...\}$ un conjunto denso numerable de X tal que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, y $f \in C_\square(X)$. Consideremos la caja abierta $\prod\limits_{x \in X} G_x$, donde

$$G_x = \begin{cases} (f(x) - \frac{1}{n}, f(x) + \frac{1}{n}) & si \quad x = x_n \\ . \quad . \quad . \\ (f(x) - 1, f(x) + 1) & en \ \ otro \ \ caso. \end{cases}$$

Es claro que $f \in \prod\limits_{x \in X} G_x$. Veamos que f es la única función continua que contiene $\prod\limits_{x \in X} G_x$. Sea g una función continua tal que $g \in \prod\limits_{x \in X} G_x$. Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Por la continuidad de f y g existe una vecindad V de x tal que si $y \in V$ entonces

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ y } |g(y) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1}$$

Por otra parte

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - g(y)| + |g(y) - g(x)|. \tag{2}$$

Se tiene además que $|f(y) - g(y)| < \frac{1}{n}$ cuando $y = x_n$. Dado que D es denso en X y denso en si mismo se tiene que $D \cap V$ es infinito, ya que si fuera finito entonces $D \cap V$ sería un abierto finito del subespacio D, que no tiene puntos aislados, y además es T_0. Pero esto contradice el

Lema 4.5. Luego existe $y = x_n \in V$ con $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{3}$. De (1) y (2) se obtiene que $|f(x) - g(x)| < \epsilon$, luego $f(x) = g(x)$.

Hemos probado que para cada función continua f existe una caja abierta $\prod_{x \in X} G_x$ que contiene a f y ésta es la única función continua que contiene, es decir $C_\square(X)$ es discreto.

Por último, si X es T_1 y separable cualquier denso D numerable de X es infinito, ya que los conjuntos finitos de X son cerrados, y estamos considerando espacios infinitos. Además D no tiene puntos aislados, ya que si x es un punto aislado de D existe un abierto W en X tal que $\{x\} = W \cap D$, y entonces $(W - \{x\}) \cap D = \emptyset$, pero esto contradice la densidad de D. Ahora sólo aplicamos la primera parte del enunciado de este teorema. ■

Corolario 4.7 *Un espacio infinito numerable T_0 sin puntos aislados es $C_\square$-discreto.*

Observemos que dado cualquier espacio topológico X, podemos construir un subconjunto denso $D = D_1 \cup D_2$ de X tal que D_1 es denso en sí mismo, D_1 puede ser vacío, y cada punto en D_2, si $D_2 \neq \emptyset$, es aislado en D. Se puede probar, omitimos la demostración, el siguiente resultado más general que el expresado en el Teorema 4.6: Si X es un espacio T_0 sin puntos aislados tal que $|D_1| = \aleph_0$ y $cl_X(D_1) \cap cl_X(D_2) = \emptyset$, entonces X es $\mathrm{C}_\square$-discreto.

La siguiente condición para que un espacio sea $\mathrm{C}_\square$-discreto es sugerida por la demostración de la Proposicion 4.2.

Proposición 4.8 *Si un espacio X tiene la propiedad: X contiene un conjunto denso D, no necesariamente numerable, tal que para cada $r \in D$ existe una sucesión $\{x_n^r\}_{n\in\omega}$ en $X - D$ que tiende a r, y si $r_1 \neq r_2$, $\{x_n^{r_1}\}_{n\in\omega} \cap \{x_n^{r_2}\}_{n\in\omega} = \emptyset$. Entonces X es $C_\square$-discreto.*

PRUEBA. Sea $f \in C_\square(X)$. Consideremos la caja abierta $\prod_{x\in X} G_x$, donde

$$G_x = \begin{cases} (f(x) - \frac{1}{n}, f(x) + \frac{1}{n}) & si\ x = x_n^r, r \in D, n \in \omega \\ (f(x) - 1, f(x) + 1) & en \text{ otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que $f \in \prod_{x\in X} G_x$. Veamos que f es la única función continua que contiene $\prod_{x\in X} G_x$. Sea g una una función continua tal que $g \in \prod_{x\in X} G_x$ y r un punto de D. Existe entonces una sucesión $\{x_n^r\}_{n\in N}$ en $X - D$ tal que $x_n^r \to r$, y por lo tanto $g(x_n^r) \to g(r)$. Dado que

$$f(x_n^r) - \frac{1}{n} < g(x_n^r) < f(x_n^r) + \frac{1}{n},$$

tomando límites, tenemos que $f(r) \leq g(r) \leq f(r)$; esto es $f(r) = g(r)$. Es decir f y g son continuas que coinciden en un denso D, por lo tanto $f = g$.

Hemos mostrado que para cada $f \in C_\square(X)$ existe una caja abierta $\prod_{x\in X} G_x$ tal que $f \in \prod_{x\in X} G_x$ y ésta es la única función continua que contiene, es decir $C_\square(X)$ es discreto. ■

Como una aplicación de este Teorema, mostramos que $\square\mathbb{R}^\omega$ es un espacio $\mathrm{C}_\square$-discreto. Verificamos que $\square\mathbb{R}^\omega$ satisface las condiciones del Teorema. Tomemos $D = \mathbb{Q}^\omega$, es claro que este conjunto es denso en $\square\mathbb{R}^\omega$. Además, para $r = \{r_n\} \in D$, tomamos la sucesión $s^r = \{s^r_m\}$ donde $s^r_m = \left\{r_1 + \frac{\sqrt[2]{2}}{m}, r_2, ...\right\}$, $m > 0$. Es fácil ver que si $r_1 \neq r_2$ entonces $\{s^{r_1}_m\} \cap \{s^{r_2}_m\} = \emptyset$. Así que $\square\mathbb{R}^\omega$ es un espacio $\mathrm{C}_\square$-discreto. De manera análoga se puede ver que para cualquier cardinal β, $\square\mathbb{R}^\beta$ y $\mathbb{R}^\beta$ con la topología de Tychonoff, son $\mathrm{C}_\square$-discretos.

Obtenemos ahora unas caracterizaciones de los espacios $\mathrm{C}_\square$-discretos que nos permitirán obtener clases más amplias de este tipo de espacios.

Teorema 4.9 *Para un espacio completamente regular X sin puntos aislados, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i) X es $\mathrm{C}_\square$-discreto.

ii) Se puede definir en X una función positiva $f : X \to \mathbb{R}$ tal que todo abierto V de X contiene un conjunto numerable de puntos $\{x_1,\ x_2,\ x_3, ...\}$ para el cual $f(x_n) \to 0$.

iii) X tiene una cubierta $\{D_n\}_{n>0}$ de conjuntos ajenos dos a dos, tal que cualquier conjunto abierto de X intersecta una infinidad de elementos de los $\{D_n\}_{n>0}$.

PRUEBA

i) $\to$ *ii)* Dado que X es $\mathrm{C}_\square$-discreto, para cada funcíon $h \in C_\square(X)$ existe una caja abierta $\prod_{x\in X} G_x$ tal que $C_\square(X) \cap \prod_{x\in X} G_x = \{h\}$. Tomemos en particular la aplicación constante cero, que denotamos por c. Asi que existe una caja abierta $\prod_{x\in X} G_x$ tal que $C_\square(X) \cap \prod_{x\in X} G_x = \{c\}$.

Para cada $x \in X$ podemos considerar a G_x como un intervalo abierto que contiene al cero, asi que podemos escribir $G_x = (g(x),\ f(x))$, $f(x) > 0$.

Afirmamos que la aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ tiene la propiedad requerida. Sea V un abierto de X y x_0 un punto de V. Existe una funcion continua $f_1 : X \to [0, 1]$ tal que $f_1(X - V) = \{0\}$ y $f_1(\ x_0) = 1$. Como $f_1 \notin \prod_{x\in X} G_x$ existe $x_1 \in V$ tal que $f(x_1) < f_1(\ x_1) \leq 1$. Elijamos ahora una funcion continua $f_2 : X \to \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tal que $f_2(X - V) = \{0\}$ y $f_2(\ x_0) = \frac{1}{2}$. Como $f_2 \notin \prod_{x\in X} G_x$, existe $x_2 \in V$ tal que $f(x_2) < f_2(x_2) \leq \frac{1}{2}$. Continuando de esta manera obtenemos una sucesión de puntos $x_1\ , x_2\ , x_3 ...$ en V tal que $f(x_n) < \frac{1}{n}$, es decir $f(x_n) \to 0$.

ii) $\to$ *iii)* Definamos la función $d : X \to \mathbb{N}$ por $d(x) =$ mínimo natural, tal que $\frac{1}{d(x)} < f(x)$, y, para cada $n > 0$ definimos los conjuntos D_n por

$$D_n = \{x \in X : d(x) = n\}.$$

Es claro que la colección $\{D_n\}_{n>1}$ es ajena dos a dos y cubre a X. Sea ahora V un abierto de X, por hipótesis existe una sucesión de puntos x_1, x_2, $x_3, ...$ en V tal que $f(x_n) \to 0$, luego $\frac{1}{d(x_n)} \to 0$. Es decir, $d(x_n) \to \infty$, y por lo tanto V intersecta a una infinidad de elementos de $\{D_n\}_{n>1}$.

$iii) \to ii)$ Definamos una función $f : X \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{1}{n}$ si $x \in D_n$. Sea ahora V un abierto de X, existe entonces una sucesión creciente de enteros positivos n_1, $n_2, ...$ tal que la sucesión $x_{n_1}, x_{n_2}, ...$ está en V y además $x_{n_i} \in D_{n_i}$, $i = 1, 2, 3....$Es claro entonces que $f(x_{n_i}) \to 0$.

$ii) \to i)$ Sea $h : X \to \mathbb{R}$ una función positiva tal que todo abierto V no vacío de X contiene un conjunto numerable de puntos $F_V = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ para el cual $h(x_n) \to 0$ y sea τ el conjunto de abiertos no vacíos de X.

Tomemos $f \in C_\Box(X)$ y consideremos la caja abierta $\prod\limits_{x\in X} G_x$ donde

$$G_x = \begin{cases} (f(x) - h(x), f(x) + h(x)) & si \quad x \in \cup\{F_V : V \in \tau\} \\ . \quad . & . \\ (f(x) - 1, f(x) + 1) \quad en & otro \;\; caso. \end{cases}$$

Es claro que $f \in \prod\limits_{x\in X} G_x$. Veamos ahora que f es la única función continua que contiene $\prod\limits_{x\in X} G_x$. Sea g una una función continua tal que $g \in \prod\limits_{x\in X} G_x$. Sea $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$. Por hipótesis existe una vecindad abierta V de x_0 tal que si $y \in V$ entonces

$$|f(y) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ y } |g(y) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1}$$

Por otra parte

$$|f(x_0) - g(x_0)| \le |f(x) - f(y)| + |f(y) - g(y)| + |g(y) - g(x)|. \tag{2}$$

Además se tiene que $|f(y) - g(y)| < h(y)$ cuando $y \in \cup F_\alpha$. Dado que $F_V \subset V$ y $h(F_V) \to 0$, podemos elegir un $x_n \in F_V$ tal que $h(x_n) < \frac{\varepsilon}{3}$. Luego de (1) y (2) se obtiene que $|f(x_0) - g(x_0)| < \epsilon$, y así $f(x_0) = g(x_0)$. Dado que x_0 es arbitrario se tiene que $f = g$.

Hemos mostrado que para cada $f \in C_\Box(X)$ existe una caja abierta $\prod\limits_{x\in X} G_x$ tal que $f \in \prod\limits_{x\in X} G_x$ y ésta es la única función continua que contiene, es decir X es $C_\Box$-discreto. ■

Observemos que las demostraciones de las implicaciones $iii) \to ii) \to i)$ del teorema anterior no requieren la condición de que el espacio sea completamente regular.

Un espacio X es **resoluble** si existen dos conjuntos densos ajenos D y F . Más generalmente, dado un cardinal α, decimos que X es un espacio α-**resoluble** si existe una familia de subconjuntos densos de X, ajenos dos a dos, de cardinalidad α. Un caso de especial importancia en este trabajo son lo espacios ω- resolubles, es decir espacios para los cuales existe una familia numerable de subconjuntos densos ajenos dos a dos. Se puede ver en [13] una selección de resultados que tratan sobre los espacios resolubles y ω- resolubles.

Proposición 4.10 *Todo espacio ω-resoluble es $C_\square$-discreto.*

PRUEBA. Sea X un espacio ω-resoluble, es decir existe una familia $\{D_n\}_{n<\omega}$ de conjuntos densos, ajenos dos a dos. Es claro entonces que $\{D_n\}_{n<\omega} \cup \left\{X - \bigcup\limits_{n<\omega} D_n\right\}$ satisface la condición *iii*) del Teorema 4.9, luego X es $\mathrm{C}_\square$-discreto. ■

Eric K. van Douwen mostró que existen espacios numerables regulares sin puntos aislados que no son ω-resolubles [15], y por otro lado por el Corolario 4.7 se tiene que todo espacio numerable sin puntos aislados es $\mathrm{C}_\square$-discreto. Esto nos muestra que la clase de espacios $\mathrm{C}_\square$-discretos contiene en sentido propio a la clase de los espacios ω-resolubles.

Consideremos ahora el espacio $C_\square(X,Y)$, donde X y Y son espacios topológicos. Para finalizar esta sección mostraremos que $C_\square(X,Y)$ es un subespacio cerrado de $\square Y^X$ cuando Y es regular, y $C_\square(X,Y)$ es discreto cuando Y es metrizable y X es ω-resoluble.

Proposición 4.11 *Si X y Y son espacios topológicos y Y es regular, entonces $C_\square(X,Y)$ es un subespacio cerrado de $\square Y^X$.*

PRUEBA. Sea $f \in \square Y^X - C(X,Y)$. Existe entonces $x_0 \in X$ tal que f no es continua en ese punto. Luego existe una vecindad U de $f(x_0)$ tal que para toda vecindad V de x_0, existe $x_v \in V$ tal que $f(x_v) \notin U$. Tomemos ahora un conjunto abierto W en Y tal que $f(x_0) \in W \subseteq \overline{W} \subseteq U$ y una vecindad $V_{f(x_v)}$ de $f(x_v)$ para cada x_v tal que $W \bigcap V_{f(x_v)} = \emptyset$.

Consideremos la caja abierta $\prod\limits_{x\in X} U_x$ en $\square Y^X$, donde

$$U_x = \begin{cases} W & si \quad x = x_0 \\ V_{f(x_v)} & si \quad x = x_v \\ Y & en \quad otro \ \ caso \end{cases}$$

Es claro entonces que $f \in \prod\limits_{x\in X} U_x \subset \square Y^X - C(X,Y)$. ■

Proposición 4.12 *Si X es un espacio ω-resoluble y Y es un espacio metrizable, entonces $C_\square(X,Y)$ es un espacio discreto.*

PRUEBA. Sea $\{D_n\}_{n<\omega}$ una colección de densos disjuntos dos a dos en X y d una métrica en Y. Si $f \in C_{\square}(X,Y)$ consideremos la caja abierta $\prod_{x\in X} G_x$, donde

$$G_x = \begin{cases} \left\{y \in Y : d(y, f(x)) < \frac{1}{n}\right\} & si \qquad x \in D_n \\ \qquad\qquad . \qquad\qquad\qquad . & \qquad\qquad . \\ (f(x)-1, f(x)+1) & en \quad otro \quad caso. \end{cases}$$

Es claro que $G = \prod_{x\in X} G_x$ contiene a f. Mostramos ahora que f es la única función continua que está contenida en G. Sea $g \in \prod_{x\in X} G_x$ una función continua, x_0 un punto de X y $\epsilon > 0$. Existe entonces una vecindad V de x_0 tal que si

$$x \in V, \text{ entonces } d(f(x_0), d(f(x)) < \tfrac{\epsilon}{3} \qquad (1)$$
$$x \in V, \text{ entonces } d(g(x_0), d(g(x)) < \tfrac{\epsilon}{3} \qquad (2)$$

Por otra parte existe $y \in V \cap D_n$ con $\frac{1}{n} < \frac{1}{3}$, es decir

$$d(f(y), d(g(y)) < \frac{\epsilon}{3} \qquad (3)$$

Por la desigualdad del triangulo se tiene

$$d(f(x_0), g(x_0)) \leq d(f((x_0), f(y)) + d(f(y), g(y)) + d(g(y), g(x_0)).$$

Ahora, dado que $y \in V$ y por 1), 2) y 3) se tiene que

$$d(f(x_0), g(x_0)) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Esto prueba que $f(x_0) = g(x_0)$, y como x_0 es arbitrario se tiene que $f = g$.

Hemos mostrado que para cada $f \in C_{\square}(X,Y)$ existe una caja abierta $\prod_{x\in X} G_x$ tal que $f \in \prod_{x\in X} G_x$ y ésta es la única función continua que contiene, es decir $C_{\square}(X,Y)$ es discreto. ■

Capítulo 5

ESPACIOS CASI-ω-RESOLUBLES

5.1 INTRODUCCION

Un espacio X es **casi-ω-resoluble** si X tiene una cubierta $\{D_n\}_{n<\omega}$ de conjuntos ajenos dos a dos, tal que cualquier conjunto abierto de X intersecta una infinidad de elementos de $\{D_n\}_{n<\omega}$. Los espacios casi-ω-resolubles son $C_\square$-discretos, y en la clase de los espacios completamente regulares estos conceptos de espacio son equivalentes, ver el Teorema 4.9. Por otra parte la clase de los espacios casi-ω-resolubles es grande, ya que ésta contiene propiamente a la clase de los ω-resolubles. Esto sugiere la siguiente pregunta: ¿existen espacios que no sean casi-ω-resolubles ? Este capítulo trata sobre esta cuestión.

En la primera sección se presenta un estudio de los espacios casi-ω-resolubles, y en la sección dos mostramos que si V=L entonces todo espacio sin puntos aislados es casi-ω-resoluble y por lo tanto $C_\square$-discreto. También probamos que la existencia de un cardinal medible es equiconsistente con la existencia de un espacio que no es casi-ω-resoluble. Recordemos que sólo se están considerando espacios infinitos.

5.2 ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS CASI-ω-RESOLUBLES

En esta sección se presentan algunas propiedades de los espacios casi-ω-resolubles. Empezamos presentando ejemplos de este tipo de espacios. Primeramente, es claro que los espacios ω-resolubles son casi-ω-resolubles.

Ejemplo 5.1 *Los espacios T_0 sin puntos aislados tales que*

$$min\,\{|D| : D \subset X \ \textit{es denso y denso en si mismo}\} = \aleph_0$$

son casi-ω-resolubles. En particular cualquier espacio T_1 separable es casi-ω-resoluble.

Esto es fácil de ver, ya que si $D = \{x_1, x_2, ...\}$ es un denso numerable en X, entonces es claro, por el Lema 4.5, que la coleccion numerable $\{\{x_1\}, \{x_2\}, ...\} \cup \{X - D\}$ satisface la definición de casi-ω-resolubilidad.

Ejemplo 5.2 *Los espacios T_0 numerables sin puntos aislados son casi-ω-resolubles.*

En este caso si $X = \{x_1, x_2, ...\}$ es el espacio numerable, tomamos la colección $\{\{x_1\}, \{x_2\}, ...\}$, que claramente satisface la definición, ya que X no tiene puntos aislado y cada abierto en X es infinito por el Lema 4.5.

Posteriormente se presentan más ejemplos de espacios casi-ω-resolubles. Antes se tienen algunas propiedades de estos espacios.

Proposición 5.3 *Si X es casi-ω-resoluble, entonces X no tiene puntos aislados.*

PRUEBA. Se obtiene directamente de la definición.

Proposición 5.4 *Si X tiene un subconjunto denso D casi-ω-resoluble, entonces X es casi-ω-resoluble.*

PRUEBA. Dado que D es casi-ω-resoluble, existe una colección numerable de conjuntos $\{D_1, D_2, ...\}$ ajenos dos a dos en D tal que para cualquier abierto U en D existe una sucesión estrictamente creciente de naturales $n_1, n_2, ...$ tal que $U \cap D_{n_i} \neq \emptyset$, $i = 1, 2, 3, ...$ Afirmamos que la colección $\{D_1, D_2, ...\} \cup \{X - D\}$ satisface la definición de casi-ω-resolubilidad en X. Sea V un abierto en X, luego $D \cap V$ es un abierto no vacío en D. Asi que $(V \cap D) \cap D_{n_i} = V \cap D_{n_i} \neq \emptyset$, $i = 1, 2, 3, ...$, es decir X es casi-ω-resoluble. ■

Proposición 5.5 *Sea X un espacio casi-ω-resoluble. Entonces:*

i) Cualquier subespacio abierto de X es casi-ω-resoluble.

ii) X con cualquier topología más chica es casi-ω-resoluble.

iii) Si la aplicación $f : X \to Y$ es continua y biyectiva, entonces Y es casi-ω-resoluble.

iv) Si la aplicación $f : Y \to X$ satisface que $int f(A) \neq \emptyset$ para cada abierto no vacío A de Y, (en particular si f es abierta) entonces Y es casi-ω-resoluble.

PRUEBA.- *i*) y *ii*) se obtienen directamente aplicando la definición de casi-ω-resolubilidad. Probemos *iii*). Sea $\{D_1, D_2, ...\}$ la colección de conjuntos en X, ajenos dos a dos, tal que cualquier conjunto abierto de X intersecta una infinidad de elementos de $\{D_1, D_2, ...\}$. Luego, $\{f(D_1),\ f(D_2)...\}$ es una colección de subconjuntos de X ajenos dos a dos. Sea ahora V un abierto de Y y supongamos que existe n_0 tal que $V \cap f(D_n) = \emptyset$ para todo $n > n_0$. Entonces $f^{-1}(V) \cap D_n = \emptyset$ para todo $n > n_0$, lo que contradice que X es casi-ω-resoluble, dado que $f^{-1}(V)$ es un abierto no vacío de X.

Prueba de iv). Dado que X es casi-ω-resoluble, existe una colección $\{D_1, D_2, ...\}$ de subconjuntos de X, ajenos dos a dos, que satisface la definición de casi-ω-resolubilidad. La colección $\left\{f^{-1}(D_1),\ f^{-1}(D_2), ...\right\}$ de subconjuntos de Y es ajena dos a dos. Si V es un abierto de Y para el que existe n_0 tal que $V \cap f^{-1}(D_n) = \emptyset$, donde $n > n_0$, entonces $\operatorname{int}(f(V)) \neq \emptyset$ y $\operatorname{int}(f(V)) \cap D_n = \emptyset$, donde $n > n_0$. Pero esto contradice que X es casi-ω-resoluble, dado que $\operatorname{int}(f(V)) \neq \emptyset$. ■

Teorema 5.6 *Si un espacio X se puede expresar como $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, donde cada X_i es un subespacio casi-ω-resoluble, entonces X es casi-ω-resoluble.*

PRUEBA.-Sea $\mathcal{M}$ una familia maximal disjunta dos a dos de subespacios casi-ω-resolubles. Aceptemos por el momento que $\cup\mathcal{M}$ es denso en X. Para cada $M \in \mathcal{M}$ elegimos una colección $\{M_n : n < \omega\}$ que satisface la definición de casi-ω-resolubilidad. Definimos entonces para cada $n < \omega$, $D_n = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M_n$. Es claro que la colección $\{D_n : n < \omega\}$ es disjunta dos a dos. Sea ahora V un abierto de X; dado que $\cup\mathcal{M}$ es denso en X entonces $V \cap (\cup\mathcal{M}) \neq \emptyset$. Elijamos entonces $M \in \mathcal{M}$ tal que $V \cap M \neq \emptyset$. Dado que $V \cap M$ es un abierto en M, se tiene que $(V \cap M) \cap M_n \neq \emptyset$ para un número infinito de índices, esto a su vez implica que V intersecta a una infinidad de elementos de $\{D_n : n < \omega\}$.

Para terminar la prueba mostramos que $\cup\mathcal{M}$ es denso en X. Supongamos lo contrario, esto es $X - \overline{\cup\mathcal{M}} = U$ es un abierto no vacio. Esto es, existe $x \in U$ y $x \notin \overline{\cup\mathcal{M}}$; luego para un X_i, se tiene que $X_i \cap U$ es un subespacio abierto de X_i. Aplicando i) de la Proposicion 5.5(i) se tiene que $X_i \cap U$ es casi-ω-resoluble. Luego $\mathcal{M} \cup \{X_i \cap U\}$ es una familia maximal disjunta dos a dos, contradiciendo la maximalidad de $\mathcal{M}$. ■

Recordemos que X es **homogéneo** si para cualesquiera $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$.

Corolario 5.7 *Si X es homogéneo y contiene un subespacio casi ω-resoluble, entonces X es casi-ω-resoluble.*

PRUEBA. Sea Y es un subespacio casi- ω-resoluble de X y tomemos un $x \in Y$ fijo; para cada $y \in X$ formamos el homeomorfismo $h_y : X \to X$ tal que $h_y(x) = y$. Luego $X = \bigcup_{y \in X} h_y(Y)$, y cada $h_y(Y)$ es casi ω-resoluble. ■

Una consecuencia de este corolario es que cualquier espacio del tipo $C_p(X)$ es casi ω-resoluble ya que éste es homogéneo y contiene como subespacio una copia de los reales.

Corolario 5.8 *Un espacio T_0 es casi-ω-resoluble si se puede escribir como una unión de subespacios numerables sin puntos aislados.*

PRUEBA. Esto es inmediato del Teorema 5.6 y del Ejemplo 5.3. ■

Corolario 5.9 *Cualquier producto de Tychonoff de los espacios $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$, donde cada X_α es T_1 y tiene más de un punto, y además I es infinito, es casi-ω-resoluble.*

PRUEBA. Sea $x = \{x_\alpha\} \in X = \prod_\alpha X_\alpha$ y consideremos el conjunto $A_x = \prod_\alpha \{x_\alpha, y_\alpha\}$, donde y_α es un punto en X_α distinto de x_α. Luego A_x es un subespacio compacto de X sin puntos aislados y por lo tanto casi-ω-resoluble, ver [13]. Dado que $X = \bigcup_{x\in X} A_x$, por el Teorema 5.6 se tiene el resultado. ■

Tenemos enseguida algunas caracterizaciones de la casi-ω-resolubilidad.

Teorema 5.10 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i) X es casi-ω-resoluble.

ii) X contiene una cubierta de conjuntos $\{D_0, D_1, D_2, ...\}$ ajenos dos a dos, tal que $Int(D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n) = \emptyset$ para todo $n < \omega$.

iii) X contiene una sucesion numerable de conjuntos densos $\{F_n\}_{n<\omega}$, estrictamente decreciente, tal que $\cap F_n = \emptyset$.

iv) X contiene una cubierta numerable de conjuntos $\{G_n\}_{n<\omega}$, estrictamente creciente, tal que $Int(G_n) = \emptyset$ para toda $n < \omega$.

PRUEBA. *i)* $\to$ *ii)*. Por definición X contiene una cubierta $\{D_n\}_{n<\omega}$ de conjuntos ajenos dos a dos, tal que cualquier conjunto abierto de X intersecta una infinidad de elementos de $\{D_n\}_{n<\omega}$. Supongamos que existe n_0 tal que $Int(D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_{n_0}) \neq \emptyset$, existe entonces un abierto $V \subseteq D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_{n_0}$ que no puede intersectar una infinidad de elementos de $\{D_n\}_{n<\omega}$.

ii) $\to$ *iii)* Si para cada $n < \omega$ definimos $F_n = D_n \cup D_{n+1} \cup ...$, entonces la colección $\{F_n\}$ tiene la propiedad requerida.

iii) $\to$ *iv)* Por hipótesis, existe en X una colección $\{F_n\}$ decreciente de conjuntos densos tal que $\cap F_n = \emptyset$. Luego si $G_n = X - F_n$ para todo $n < \omega$, entonces $X = \bigcup_{n<\omega} G_n$. Además es claro que la sucesión de conjuntos $\{G_n\}_{n<\omega}$ es creciente y $Int(G_n) = \emptyset$ para todo $n < \omega$.

iv) $\to$ *i)* Definimos los siguientes conjuntos $D_1 = F_1$, $D_2 = F_2 - F_1$,..., $D_n = F_n - F_{n-1}$. Es fácil ver que la colección $\{D_n\}$ satisface las propiedades requeridas. ■

Un subconjunto F de un espacio topológico X es **denso en ninguna parte** si Int$(\overline{F})$ $=\emptyset$. No es difícil ver que la unión finita de conjuntos densos en niguna parte es densa en ninguna parte. Un espacio topológico X es de **primera categoría** si se puede expresar como una unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Un espacio X es de **segunda categoría** si no es de primera categoría. La siguiente propiedad de los espacios de segunda categoría es muy conocida: En un espacio de segunda categoría cualquier sucesión de conjuntos densos abiertos, tiene intersección no vacía.

Un espacio X es **Baire,** si cualquier sucesión de conjuntos densos abiertos en X tiene intersección densa. Es conocido que la propiedad de Baire se preserva para subespacios abiertos de X.

Mostramos ahora que los espacios de primera categoría son casi-ω-resolubles.

Proposición 5.11 *Si X es un espacio de primera categoría sin puntos aislados, entonces X es casi-ω-resoluble.*

PRUEBA. Por hipótesis X se puede expresar como $X = \bigcup_{n<\omega} F_n$, donde cada F_n es un conjunto denso en ninguna parte, esto es $\mathrm{Int}(\overline{F_n}) = \emptyset$. Definimos los conjuntos $D_1 = F_1$, $D_2 = F_1 \cup F_2$, ..., $D_n = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n$. Entonces la colección de conjuntos $\{D_n\}_{n<\omega}$ es estrictamente creciente y $X = \bigcup_{n<\omega} D_n$. Dado que la unión finita de conjuntos densos en ninguna parte es denso en ninguna parte se tiene que cada conjunto D_n es denso en ninguna parte. Por *iv*) de la Proposición 5.10 se tiene el resultado. ■

Corolario 5.12 *Si X es un espacio que contiene un denso infinito de primera categoría sin puntos aislados, entonces X es casi-ω-resoluble.*

PRUEBA. Sea $D \subset X$ un denso infinito de primera categoría, por la Proposición 5.11 D es un denso casi-ω-resoluble; aplicando ahora la Proposición 5.4 se tiene el resultado.

5.3 ESPACIOS CASI-ω-IRRESOLUBLES

Consideramos ahora la pregunta que se mencionó en la introducción de este capítulo: ¿existen espacios que no sean casi-ω-resolubles? A un espacio sin puntos aislados que no sea casi-ω-resoluble lo llamaremos **casi-ω-irresoluble.** En lo que sigue se determinan algunas condiciones para que un espacio sea casi-ω-irresoluble. Tenemos antes algunos hechos sobre topologías maximales y espacios irresolubles.

Un espacio X sin puntos aislados es **irresoluble,** si no se puede escribir como la unión de dos subconjuntos densos ajenos, es decir, si X no es resoluble. Un espacio X sin puntos aislados es **hereditariamente irresoluble,** si cualquier subespacio sin puntos aislados es irresoluble. Un espacio X es **hereditariamente irresoluble con respecto a los subespacios abiertos,** si cualquier subespacio abierto es irresoluble.

Proposición 5.13 *(Eric K. van Douwen* [15]*) Un espacio X es hereditariamente irresoluble con respecto a sus subespacios abiertos, si y sólo si, para todo $A \subset X$, Int$(A) = \emptyset$ implica que A es denso en ninguna parte.*

Proposición 5.14 *(Eric K. van Douwen* [15]*) Cualquier espacio irresoluble tiene un subespacio abierto no vacío, hereditariamente irresoluble.*

Una técnica para construir espacios irresolubles es debida a Hewitt [16]. El concepto básico de esta construcción es el de topología maximal. Un espacio X es **maximal** si no tiene puntos aislados y cualquier topología más fuerte sobre X tiene puntos aislados. Un espacio X es **submaximal** si todo subespacio denso de X es abierto.

Es claro que todo espacio submaximal es irresoluble y se puede ver en [16] que todo espacio maximal es submaximal. El siguiente teorema fue probado por Hewitt [16].

Teorema 5.15 *Todo espacio topológico sin puntos aislados tiene una extensión maximal, es decir una topología más fuerte maximal.*

Probamos ahora que todo espacio submaximal de segunda categoría, es casi-ω-irresoluble.

Proposición 5.16 *Si X es un espacio submaximal de segunda categoría sin puntos aislados, entonces X es casi-ω-irresoluble.*

PRUEBA. Sea $\{D_n\}$ una sucesión decreciente de conjuntos densos en X. Por ser X submaximal cada conjunto D_n es un conjunto abierto, y por ser X de segunda categoría, $\cap D_n \neq \emptyset$. Luego por el Teorema 5.10(iii) X no es casi-ω-resoluble. ■

Otro tipo de espacios casi-ω-irresolubles son los espacios Baire irresolubles. Mostramos esto enseguida.

Proposición 5.17 *Si X es un espacio sin puntos aislados Baire irresoluble, entonces X es casi-ω-irresoluble.*

PRUEBA. Supongamos que X es casi-ω-resoluble. Por la Proposición 5.14 X tiene un subespacio abierto no vacío Y hereditariamente irresoluble, y por la Proposicion 5.5 (i), Y es un espacio casi-ω-resoluble con la propiedad de Baire. Luego podemos escribir Y como $Y = \cup D_n$, donde la colección $\{D_n\}_{n<\omega}$ es estrictamente creciente y además Int$(D_n) = \emptyset$, para cada $n < \omega$.

Por la Proposición 5.13 se tiene que cada D_n es denso en ninguna parte, luego Y es un espacio de primera categoría, lo que contradice que Y es un espacio Baire. ■

Kunen, Szymanski y Tall establecen en [17] el siguiente resultado:

Proposición 5.18 *La existencia de un cardinal medible es equiconsistente con la existencia de un espacio Baire irresoluble.*

Un espacio X es es **σ-discreto** si se puede expresar como una unión numerable de espacios discretos. En [18] Alas, Sanchis, Tkacenko, Tkachuk y Wilson prueban el siguiente teorema:

Teorema 5.19 *Las siguientes condiciones son equivalentes en ZFC:*

$i)$ existe un espacio Baire irresoluble;

$ii)$ existe un espacio submaximal que no es σ-discreto;

$iii)$ existe un espacio maximal que no es σ-discreto.Mostraremos que este teorema también

es cierto si se cambia la propiedad "no es $\sigma-$discreto" por la propiedad "casi-$\omega-$irresoluble". Necesitamos mostrar primero que un espacio $\sigma-$discreto es casi-ω-irresoluble, para hacer esto aplicamos la siguiente proposición.

Proposición 5.20 *En un espacio T_0 sin puntos aislados, la unión finita de subconjuntos discretos tiene interior vacío.*

PRUEBA. Sea X un espacio T_0 sin puntos aislados y X_1 un subconjunto discreto de X. Si existe un abierto no vacío V tal que $V \subset X_1$, tomamos un punto $x \in V$; luego, por ser X_1 discreto, existe un abierto U en X tal que $\{x\} = U \cap X_1$. Pero entonces $U \cap V = \{x\}$, es decir x es un punto aislado X, lo cual es una contradicción. Esto prueba que $\mathrm{int}(X_1) = \emptyset$.

Sean ahora X_1, X_2 subconjuntos discretos de X. Supongamos que existe un abierto no vacío $V \subset X_1 \cup X_2$. Existe entonces un punto $x \in V$ tal que $x \in X_1$ y $x \notin X_2$; luego, existe un abierto U en X tal que $U \subset V$ y $U \cap X_1 = \{x\}$. Podemos elegir entonces un punto $y \in U$ distinto de x y un conjunto abierto $W \subset U$ tal que $W \cap X_2 = \{y\}$. Si ahora $z \in W$, donde $z \neq y$ y $z \neq x$ entonces $z \in V$ y $z \notin X_1 \cup X_2$, lo cual es una contradicción.

Supongamos entonces que la proposición es válida para n conjuntos. Tomemos entonces X_1, X_2,...,X_n, X_{n+1} subconjuntos discretos de X. Si existe un abierto no vacío $V \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n}$ por hipótesis podemos suponer que existe $x_1 \notin X_1$ y $x_1 \in \bigcup\limits_{i=2}^{n}$. Sea $J = \{2, 3, ..., n+1\}$ y sea J_1 el conjunto de índices tales que $x_i \in X_i$, si y sólo si $i \in J_1$. Existe entonces un abierto $U_1 \subset V$ tal que $U_1 \cap X_i = \{x_1\}$, $i \in J_1$. Elegimos ahora un punto $x_2 \in U_1$, $x_2 \neq x_1$; entonces $x_2 \notin X_i$, $i \in J_1$, por lo tanto existe $J_2 \subset J$, $J_2 \cap J_1 = \emptyset$, tal que $x_2 \in X_i$, si y sólo si $i \in J_2$.

Existe entonces un abierto $U_2 \subset U_1$ tal que $U_2 \cap X_i = \{x_2\}$, $i \in J_2$. Elegimos otra vez un punto $x_3 \in U_2$, $x_3 \neq x_1$, $x_3 \neq x_1$ y entonces $x_3 \notin X_i$, $i \in J_2$, por lo tanto existe $J_3 \subset J$, $J_3 \cap J_2 = \emptyset$, $J_3 \cap J_1 = \emptyset$, tal que $x_3 \in X_i$, si y sólo si $i \in J_3$.

Continuando el procedimiento, y dado que J es finito se puede construir:

a) una sucesión finita de conjuntos abierto U_k, $U_{k-1}, ..., U_1$, tales que

$U_k \subset U_{k-1} \subset ... \subset U_1 \subset V$.

b) una partición $\{J_1,\ J_2, ..., J_k\}$ de J y

c) una sucesión de puntos x_1, $x_2, ...,$ x_k tales que $U_l \cap X_i = \{x_l\}$, $i \in J_{l,}$ $\quad l = 1, ..., k$.

Si ahora $z \in U_k,\ z \neq x_k, ..., z \neq x_1$, aplicando repetidamente a), b), y c) tenemos que $z \in V$ y $z \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n}$, lo cual es una contradición. ■

Corolario 5.21 *Un espacio T_0 sin puntos aislados σ-discreto es casi-ω-resoluble.*

PRUEBA. Sea X un espacio σ-discreto T_0 sin puntos aislados. Entonces X se puede expresar como $X = \bigcup\limits_{n<\omega} X_n$, donde cada X_n es un espacio discreto. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la sucesión $\{X_n\}_{n<\omega}$ es estrictamente creciente y cada X_n es una unión finita de conjuntos discretos. Aplicando la Proposición 5.20 y el Teorema 5.10(iv) se tiene el resultado. ■

Teorema 5.22 *Las siguientes condiciones son equivalentes en ZFC:*

i) existe un espacio Baire irresoluble;

ii) existe un espacio submaximal casi-ω-irresoluble;

iii) existe un espacio maximal casi-ω-irresoluble.

PRUEBA. $i) \rightarrow iii)$ Sea (X, τ) un espacio Baire irresoluble. De acuerdo a la Proposición 5.14 podemos suponer que X es un espacio Baire hereditariamente irresoluble y por el Teorema 5.15 podemos elegir una topología $\mu \supset \tau$ sobre X tal que (X, μ) es maximal.

Supongamos que (X, μ) es casi-ω-resoluble; esto es, existe una sucesión $\{X_n\}_{n<\omega}$ estrictamente creciente con $X = \bigcup\limits_{n<\omega} X_n$ y $\mathrm{Int}_\mu(X_n) = \emptyset$ para todo $n < \omega$. Dado que $\mu \supset \tau$, se tiene entonces que $\mathrm{Int}_\tau(X_n) = \emptyset$ para todo $n < \omega$. Por otra parte (X, τ) es heritariamente irresoluble, luego podemos aplicar la Proposición 5.13 para obtener que $\mathrm{Int}_\tau(\overline{X_n}) = \emptyset$ para todo $n < \omega$, es decir X es de primera categoría, lo cual es una contradicción, ya que X es un espacio de Baire.

$iii) \rightarrow ii)$ Es claro. $ii) \rightarrow i)$. Sea X un espacio submaximal casi-ω-irresoluble, por el Corolario 5.21 tenemos que X es un espacio submaximal que no es σ-discreto; aplicando ahora el Teorema 5.19 se tiene el resultado. ■

Corolario 5.23 *Si $V = L$, entonces todo espacio Haussdorff X sin puntos aislados, es casi-ω-resoluble y por lo tanto $C_\square$-discreto.*

PRUEBA El Corolario 3.4 de [18] establece que si $V = L$, entonces cualquier espacio Hausdorff submaximal es $\sigma-$discreto. Aplicando ahora el Corolario 3.21 tenemos entonces que todo espacio Hausdorff submaximal sin puntos aislados es casi-ω-resoluble.

Por último, sea (X, t) un espacio sin puntos aislados y consideremos su extensión maximal (X, t'), donde $t \subset t'$. Se tiene entonces que (X, t') es casi-ω-resoluble. Dado que la aplicación $id : (X, t') \to (X, t)$ es biyectiva y continua se tiene, por la Proposición 5.5 (iii), que (X, t) es casi-ω-resoluble. ■

Corolario 5.24 *La existencia de un cardinal medible es equiconsistente con la existencia de un espacio maximal casi-ω-irresoluble.*

PRUEBA. Es consecuencia de los Teoremas 5.18 y 5.22. ■

Para finalizar mostramos que la existencia de un cardinal medible implica la existencia de un espacio T_0 casi-ω-irresoluble.

Proposición 5.25 *Si existe un cardinal medible, entonces existe un espacio T_0 casi-ω-irresoluble.*

PRUEBA Sea α un cardinal medible, y sea p un ultrafiltro sobre α ω^+-completo. Sea $X = \alpha \cup \{p\}$. Definimos una topología t para X como sigue: A es abierto en X si y sólo si $p \in A$ y $A \cap \alpha \in p$. Supongamos que X con esta topología es casi-ω-resoluble, es decir $X = \cup X_n$, y $X_n \subset X_{n+1}$ para $n < \omega$. Sea n_0 un número natural tal que $p \in X_{n_0}$ y sea $n_1 < \omega$ tal que $X_{n_1} \cap \alpha \in p$ (esto porque p es ω^+-completo). Luego si $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, entonces $\mathrm{int}(X_n) \neq \emptyset$. Esto significa, por Teorema 5.10(iv), que X es casi-ω-irresoluble. ■

Bibliografía

[1] Engelking R., *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[2] Dugundji J. *Topology*, Allin and Bacon, Boston, 1966.

[3] Kunen K., *On paracompactness of box products of compact spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **240** (1978), 307-316.

[4] García-Máynez Adalberto, Tamariz Mascarúa Angel, *Topología General*, Porrúa, México, 1988.

[5] Williams S.W., *Box Products*, en Handbook of set Theoretic Topology, Kunen K. y Vaughan J.E., editores, North Holland, (1984), 169-200.

[6] van Douwen E.K., *Covering and separation properties of box products*, en Surveys in General Topology, Academic Press, New York, (1980), 55-130.

[7] van Dowen E.K., *Nonnormality or hereditary paracompactness of some spaces of real functions,* Topology Appl. **39** (1991), 3-32.

[8] Rudin M. E., *A normal space X for which $X \times I$ is not normal*, Fund. Math. **73** (1971), 179-186.

[9] Vaughan J. E., *Non-normal products of ω_μ-metrizable spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **51** (1975), 203-208.

[10] Rudin M. E., *The box product of countably many compact metric spaces*, General Topology Appl. **2** (1972), 293-298.

[11] Hewitt E., *Rings of real-valued continuos functions I*, Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 175-179.

[12] Tietze H., *Beitrage zur allgemeinen topologie I*, Math. Ann. **88** (1923), 280-312.

[13] Comfort W. W., García-Ferreira S., *Resolvability: a selective survey and some new results*, Topology Appl. **74** (1996), 149-167.

[14] Lawrence L. B., Trans. Amer. Math. Soc. **348** 1996, 187-203.

[15] van Dowen E. K., *Applications of maximal topologies*, Topology Appl. **51** (1993), 125-139.

[16] Hewitt E., *A problem of set-theoretic topology*, Duke Math. J. **10** (1943), 309-333.

[17] Kunen K., Szymanski A., Tall F., *Baire irresoluble spaces and ideal thory*, Annal. Math. Silesiana **2** (14) (1986), 98-107.

[18] Alas O. T., Sanchis M., Tkachenko M. G., Tkachuk V. V., Wilson R. G., *Irresolvable and maximal espaces: Homogeneity versus σ-discreteness and new ZFC examples*, Topology Appl. **107** (2000), 259-273.

[19] Przymusinski T. C., *Products of normal spaces*, en Handbook of set Theoretic Topology, Kunen K., Vaughan J. E., editores, North Holland, (1984), 781-826.

[20] Hušek M., van Mill J., *Recent Progress in General Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1992.