



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“MODELACIÓN Y ANÁLISIS DE UNA MEMBRANA  
ELÁSTICA BAJO LA ACCIÓN DE UN CAMPO  
ELÉCTRICO EN ESCALAS MICRO Y NANO”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

P R E S E N T A :

MANUEL TEJADA WRIEDT

DIRECTOR DE TESIS: DR. JORGE GILBERTO FLORES GALLEGOS



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

2006



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Modelación y Análisis de una Membrana Elástica  
Bajo la Acción de un Campo Eléctrico en Escalas  
Micro y Nano

Manuel Tejada Wriedt

1. Datos del alumno  
Tejada  
Wriedt  
Manuel  
56653469  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
099566012
2. Datos del tutor  
Dr  
Jorge Gilberto  
Flores  
Gallegos
3. Datos del sinodal 1  
Dr  
Arturo  
Olvera  
Chávez
4. Datos del sinodal 2  
Dr  
Guillermo Pablo  
Pulos  
Cárdenas
5. Datos del sinodal 3  
Dr  
Antonmaría  
Minzoni  
Alessio
6. Datos del sinodal 4  
Dra  
María de la Luz Jimena  
de Teresa  
de Oteyza
7. Datos del trabajo escrito  
Modelación y Análisis de una Membrana Elástica bajo la Acción de un Campo  
Eléctrico en Escalas Micro y Nano  
102 p  
2006

*A mis padres.  
Al Carlos.  
A Mara.*

# Agradecimientos

Al Dr. Gilberto Flores, mi asesor, por la confianza, la paciencia y el sinnúmero de enseñanzas. Gracias por mostrarme como se transita de lo simple a lo complejo sin necesidad de acabarse el gis.

Al Dr. Jorge Ize, quien ha jugado un papel fundamental en mi formación como físico y matemático. Me encuentro profundamente agradecido por todo el esfuerzo que nos has dedicado a mí y a todos tus alumnos a lo largo de los años.

A mis sinodales, los doctores Arturo Olvera, Guillermo Pulos, María de la Luz de Oteiza y Antonmaría Minzoni. Gracias por leer y corregir esta tesis. En especial, quiciera agradecer al Dr. Minzoni el haberme enseñado que la física y las matemáticas son dos caras de una misma moneda.

A toda la gente del Departamento de Matemáticas y Mecánica del IIMAS. En particular a la Dra. Catherine García por su interés y su apoyo, y a la Dra. Jorge por darme mi primer chamba.

A mis padres, Karin y Enrique. Por enseñarme la importancia del pensamiento crítico. Por los libros y las pláticas. Por siempre ponerme en primer lugar. A mi hermano Carlos, quien ha sido una gran influencia en mi vida. Carnalito, no hay más que decir.

A Mara, por todo el amor. La gravedad no es más que una ley...

Al Fede, mi otro hermano. No tengo palabras para agradecer lo que has hecho por mí todos estos años.

A mis compañeritos de la Facultad. Al Ramón. Todos estos años me has ayudado y divertido. Agradezco que nuestras pláticas nunca hayan pertenecido a la realidad. Al Damián. Las largas horas que has dedicado a explicarme los recovecos de la física nunca serán olvidadas. Vieje, ¡lo logramos! (al menos eso creo). Al Alejandro por su cariño y su “joi de vie”. A Víctor. Siempre que me encuentro entre una multitud me alegra que estés de mi lado. A Ayari. No sé como hubiera aprobado esas materias sin mi compañera de sufrimiento. Al Rafa por alimentar las teorías del complot. Al Xumo. Tienes razón, la vida es

cuellos de tortuga y convertibles. A Lau. Nunca esta universidad ha conocido mejor representante. A Amanda, por las risas y por todo el afecto. Emiliano, el rey de la parrilla y los vinos. Definitivamente te has encargado de hacer grande nuestra amistad. A Mauricio. Toda la vida me voy a acordar de como nos tomabas el pelo en las clases de Cálculo. A Bárbara. Todavía estoy esperando que me lleves al teatro. A mis compañeros de caja, Erika y Carlos. Han sido un gran apoyo siempre que lo he necesitado. A los internacionales, maese Ferrán, Nata y Octavio. Las tareas nunca han sido iguales sin ustedes.

A los biólogos por sacarme a pasear. Gracias Cheche por ser tan buena amiga y quererme tanto. Al Martí. Has sido un gran cuate y te lo agradezco. A los dos como pareja. Gracias por acompañarme en todas las condiciones. A Pablito por predicar con el ejemplo, y vaya ejemplo que has sido. Al Chupis por el desafane y la autenticidad. Algún día me enseñarás. A Paula. Sigue brincando que nos encanta verte.

Al Condyl F.C. Martí, Chupis, el primo Aurelio, Juan, Gori, Goyo, Picazo, Pulido, Mohar, Gerardo, Chop, Tona, y por supuesto D-Mike. Algún día llegará el tetra. A las hinchas que se han sentado bajo el sol, la lluvia y las golizas, Amaya y Pamela. A Mau, Betsa, Andrea, Paula V. y el capi Nico.

A mis cuates de toda la vida, Tadeo, Claudio y Jimena. Al Xevex, el Matute y la Gigi.

A la familia Vázquez Tejada y a la Wriedt Runne. Gracias Abuela por todos los cuidados.

A la gente que me ha acompañado en esta vida. La fortuna me ha sonreído al ponerme cerca de todos ustedes.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Consideraciones electrostáticas . . . . .	1
1.1.1. El Campo Eléctrico . . . . .	1
1.1.2. El Potencial Electrostático . . . . .	3
1.1.3. Distribución superficial de cargas . . . . .	4
1.1.4. Potencial Electrostático completo . . . . .	7
1.1.5. Energía Potencial Electrostática, Capacitancia . . . . .	9
1.2. Consideraciones mecánicas . . . . .	11
1.2.1. Ley de Hooke . . . . .	11
1.2.2. Esfuerzo . . . . .	12
1.2.3. El Tensor de Deformación . . . . .	13
1.2.4. Ecuaciones de movimiento de un medio continuo . . . . .	17
1.2.5. La energía de un cuerpo deformado . . . . .	21
<b>2. El Modelo de Gotas Coalescentes: Microcapacitores</b>	<b>23</b>
2.1. Ecuación de una membrana elástica . . . . .	23
2.2. Gotas coalescentes. Modelo de Taylor . . . . .	24
2.3. Ecuación de un microcapacitor . . . . .	26
2.3.1. El límite viscoso . . . . .	28
2.4. Extensión del modelo básico . . . . .	29
<b>3. El Problema Estacionario</b>	<b>33</b>
3.1. Principio del máximo para ecuaciones elípticas . . . . .	33
3.1.1. Principio débil del máximo . . . . .	34
3.1.2. Principio fuerte del máximo . . . . .	35
3.2. El método de soluciones superiores e inferiores . . . . .	38
3.3. La banda elástica . . . . .	43
3.4. El disco elástico . . . . .	48



<b>4. Dinámica del Sistema</b>	<b>55</b>
4.1. Principios del máximo para ecuaciones parabólicas . . . . .	55
4.2. El régimen de operación estable . . . . .	57
4.3. El régimen de contacto . . . . .	63
4.3.1. Soluciones cerca del contacto . . . . .	67
<b>5. Conclusiones</b>	<b>75</b>
<b>A. El Esquema de Crank-Nicolson</b>	<b>79</b>
<b>B. Evaluaciones Numéricas</b>	<b>81</b>
B.1. Programa 1: Cálculo de valores propios principales . . . . .	81
B.2. Programa 2: El esquema de Crank-Nicolson . . . . .	86

# Introducción

Soñada dinámicamente,  
la noche es una fuerza lenta.  
GASTON BACHELARD

Me gustaría describir un campo, en el que se ha hecho poco, pero en el que en principio se pueden hacer muchas cosas. Este campo no es exactamente igual a otros en tanto que no nos va a decir mucho de la física fundamental (es decir, “¿De qué están hechas las partículas extrañas?”), pero es más parecido a la física de estado sólido en el sentido de que podría decirnos muchas cosas de gran interés acerca del extraño fenómeno que ocurre en situaciones complejas. Más aún, un punto que es más importante es que tendría un número enorme de aplicaciones técnicas.

De lo que quiero hablar es del problema de manipular y controlar cosas en una pequeña escala.

Con estas palabras, Richard P. Feynman [6] comenzó en 1959 el estudio en uno de los campos de la ciencia más explorados en la actualidad: el campo de los sistemas en pequeñas escalas.

En los últimos 20 años, hemos atestiguado una revolución en la miniaturización de componentes electrónicos. Ahora, tenemos el potencial de realizar semejante revolución con muchos componentes mecánicos. Conforme encojemos diferentes aparatos, las propiedades fundamentales cambian dependiendo de la escala, aumentando el desempeño de estos pequeños sistemas.

Existen muchas razones para desarrollar sistemas electromecánicos de pequeña escala. Sistemas con dimensiones pequeñas ofrecen menores tiempos de respuesta y mayor exactitud. Son más sutiles al realizar tareas ya que tienen poca masa y utilizan fuerzas pequeñas. Se requiere poco material para fabricarlos, lo que disminuye su costo de manera significativa y permite que sean fabricados con materiales más costosos, mejorando su desempeño. Otra ventaja es que su almacenamiento es muy barato.

Antes de producir estos sistemas, es muy importante conocer el comportamiento que puedan llegar a desarrollar, por lo que es fundamental elaborar

modelos matemáticos que describan su funcionamiento, para así optimizar el diseño del sistema real.

Las fuerzas aplicadas a dichos sistemas son de particular interés. No es factible ni deseable intentar reproducir modos de locomoción que funcionan en escalas macroscópicas. Por ejemplo, las fuerzas magnéticas, que son comunmente usadas como medios de operación en el mundo macroscópico, escalan muy pobremente en el mundo microscópico, decreciendo por un factor de diez mil cuando las dimensiones lineales del sistema son reducidas por un factor de diez [26]. Este reescalamiento hace a las fuerzas magnéticas esencialmente inútiles a pequeñas escalas. En la escala de los micrones, los investigadores han propuesto una variedad de nuevos modelos de locomoción basados en fuerzas térmicas, biológicas y electrostáticas. Cada una de estas fuerzas escala de manera favorable conforme las dimensiones lineales del sistema son disminuídas. El ejemplo canónico estudiado en esta tesis, es la utilización de fuerzas electrostáticas para la operación de sistemas microelectromecánicos (MEMS por sus siglas en inglés). En general [26], las fuerzas electrostáticas decrecen sólo en un factor de cien cuando las dimensiones lineales del sistema decrecen en un factor de diez. Con un aumento pequeño en la intensidad del campo eléctrico, es posible obtener un escalamiento uno a uno entre la fuerza y las dimensiones lineales.

Este escalamiento favorable fue explotado por primera vez hace casi cincuenta años por Nathanson [16]. En su artículo, él y sus colegas describieron la construcción, experimentación y modelación de un transistor de compuerta resonante (TCR) de dimensiones milimétricas como el que se muestra en la figura 1.

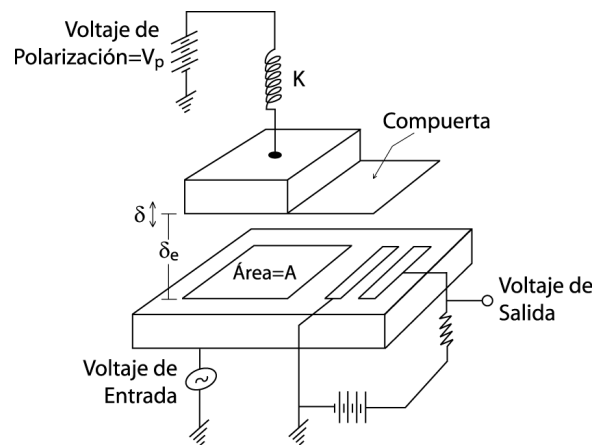


Figura 1: Modelo simplificado de un TCR

Haciendo un análisis de fuerzas, Nathanson encontró que el punto de

equilibrio  $\delta_e$  de la placa móvil está dado por la ecuación

$$\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A V_p^2}{\delta_0^2} - K(\delta_0 - \delta_e) = 0,$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío,  $K$  es la constante de restitución del resorte y  $\delta_0$  es la distancia entre las placas en ausencia del voltaje de polarización  $V_p$ .

De la ecuación de balance de fuerzas, podemos deducir que el sistema tiene dos tipos de comportamiento. Por un lado, para valores pequeños del voltaje de polarización, la fuerza mecánica compensa a la fuerza electrostática y el sistema alcanza una configuración estable. Por otro lado, se observa claramente que cuando el voltaje de polarización es mayor que cierto valor crítico, el resorte es incapaz de mantener el equilibrio y el sistema deja de ser estable, resultando en el contacto entre las placas. Dicha inestabilidad fue descrita por el autor como “inestabilidad de contacto”.

Por otro lado, en una coincidencia histórica, el investigador británico G.I. Taylor, realizó en 1968 un estudio similar [25] al de Nathanson. Taylor estaba interesado en la deflexión electrostática de películas de jabón y su modelo coincidía con el de Nathanson en el sentido en que la distancia de separación entre las películas es muy pequeña en comparación con su área. Sorprendentemente, Taylor encontró en su modelo una inestabilidad muy similar a la descrita por Nathanson.

Los trabajos de Taylor y Nathanson han servido de modelos a lo largo de los años para elaborar diferentes tipos de MEMS, entre ellos destacan acelerómetros, microbombas, transductores, etc. Es por ello que ha surgido la necesidad de entender de manera detallada la física de estos sistemas.

En esta tesis, se hace un estudio minucioso de una configuración muy similar a la de Taylor, sólo que en vez de una película de jabón hacemos uso de una membrana elástica.

En el primer capítulo, se hace una breve exposición de la teoría electrostática, concluyendo con la expresión de la presión generada por un campo eléctrico sobre una membrana. También se hace un pequeño desarrollo de la teoría mecánica de los medios continuos, que culmina en la deducción de la ecuación de Navier de la elasticidad lineal.

En el segundo capítulo, haciendo uso de los resultados anteriormente mencionados, encontramos la ecuación gobernante de una membrana elástica bajo la acción de un campo eléctrico, siendo esta una ecuación semilineal de tipo difusivo con un parámetro  $\lambda$ , que representa la relación entre las dimensiones del sistema y las fuerzas eléctrica y mecánica que actúan sobre el mismo.

En el tercer capítulo estudiamos el problema estacionario, que es modelado por una ecuación elíptica semilineal. Para ello, hacemos uso del principio del máximo para ecuaciones elípticas y el método de soluciones superiores e inferiores. Probamos la existencia de al menos una solución para el caso general, así como la no existencia cuando el parámetro  $\lambda$  es mayor que cierto valor crítico. Además, estudiamos con detalle los casos en que la membrana tiene geometría de banda y de disco. En el primer caso, encontramos que hay una, dos o ninguna

solución al problema estacionario, mientras que en el segundo puede haber una infinidad de soluciones.

En el cuarto capítulo se realiza el estudio de la dinámica del sistema, que está representada por una ecuación parabólica semilineal. De nuevo, utilizando el principio del máximo para ecuaciones parabólicas, deducimos algunas propiedades de dicha ecuación. Mostramos en general que, para cualquier valor de  $\lambda$  menor a un valor crítico  $\lambda^*$ , el sistema opera de manera estable. Haciendo un análisis de estabilidad lineal, encontramos en los casos particulares de la banda y el disco las soluciones estables. Además, probamos que si  $\lambda > \lambda^*$ , el sistema se vuelve inestable y la membrana hace contacto con la placa.

Por último, damos una representación asintótica de la forma que adquiere la membrana cerca del contacto.

Finalmente, en el último capítulo se presentan las conclusiones obtenidas de este estudio, así como algunos de los caminos a abordar en futuras investigaciones.

# Capítulo 1

## Preliminares

Este capítulo comprende un breve desarrollo de las teorías electrostática y mecánica, a fin de justificar la deducción del modelo que será estudiado en capítulos posteriores.

### 1.1. Consideraciones electrostáticas

En esta sección se presentarán algunos resultados importantes de la teoría electromagnética, que posteriormente van a ser usados para deducir el modelo de un sistema electromecánico de pequeña escala. Se incluye una elemental deducción de la ley de Gauss a partir de la ley de Coulomb, así como la manera natural en que se introduce el potencial escalar electrostático y sus respectivas ecuaciones. Se muestran las condiciones que debe cumplir un campo al atravesar una distribución de carga y se muestra la energía asociada a un campo eléctrico. Por último, usando argumentos energéticos se resuelve el problema de la presión electrostática actuando sobre una superficie.

#### 1.1.1. El Campo Eléctrico

Si consideramos una distribución de carga continua en el espacio, la ley de Coulomb establece que

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} d\mathbf{y}, \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico,  $\Omega$  representa el volumen que ocupa la distribución de carga y  $\rho(\mathbf{y})$  la densidad de carga volumétrica. En el caso de una distribución discreta de  $n$  cargas  $q_i$  en los puntos  $\mathbf{x}_i$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^3}.$$

Si aplicamos la divergencia a la ecuación (1.1) tendremos que

$$\nabla_x \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{y}) \nabla_x \cdot \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right) d\mathbf{y} \quad (1.2)$$

y siendo

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} = -\nabla_x \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right), \quad (1.3)$$

la ecuación (1.2) se vuelve

$$\nabla_x \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{y}) \Delta_x \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) d\mathbf{y}, \quad (1.4)$$

donde  $\Delta_x$  es el Laplaciano con respecto a  $\mathbf{x}$ . Esta integral presenta problemas cuando  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , por lo que consideremos la distribución de carga en  $\Omega$  como se muestra en la figura 1.1. En este caso  $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus B_\epsilon$ , donde  $B_\epsilon$  es la bola de centro en  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  y radio  $\epsilon$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{y}) \Delta_x \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) d\mathbf{y} &= \iiint_{\Omega_\epsilon} \rho(\mathbf{y}) \Delta_x \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) d\mathbf{y} \\ &\quad + \iiint_{B_\epsilon} \rho(\mathbf{y}) \Delta_x \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

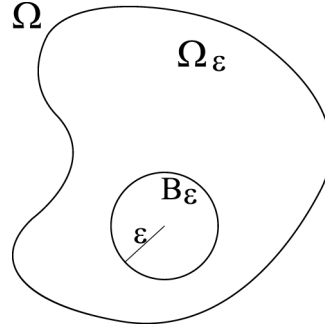


Figura 1.1: Distribución de carga en el volumen  $\Omega$ .

Para  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$

$$\Delta_x \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) = 0, \quad \text{por lo que}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{y}) \Delta_x \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) d\mathbf{y} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iiint_{B_\epsilon} \rho(\mathbf{y}) \Delta_x \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) d\mathbf{y}.$$

Ya que

$$\Delta_x \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = \Delta_y \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|},$$

podemos usar el primer teorema de Green

$$\iiint_{B_\epsilon} \rho(\mathbf{y}) \Delta_y \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) d\mathbf{y} = \iint_{\partial B_\epsilon} \rho(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) dS_{\mathbf{y}},$$

y dado que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{y}}} \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) \Big|_{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \epsilon} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \Big|_{r = \epsilon} = -\frac{1}{\epsilon^2} \implies \\ \iiint_{B_\epsilon} \rho(\mathbf{y}) \Delta_y \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) d\mathbf{y} &= -\frac{1}{\epsilon^2} \iint_{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \epsilon} \rho(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Tomando el cambio de variables  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \epsilon\boldsymbol{\eta}$  donde  $\|\boldsymbol{\eta}\| = 1$

$$\iiint_{B_\epsilon} \rho(\mathbf{y}) \Delta_y \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) d\mathbf{y} = - \iint_{\|\boldsymbol{\eta}\| = 1} \rho(\mathbf{x} + \epsilon\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}},$$

y tomando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{y}) \Delta_x \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) d\mathbf{y} = -\rho(\mathbf{x}) \iint_{\|\boldsymbol{\eta}\| = 1} dS_{\boldsymbol{\eta}} = -4\pi\rho(\mathbf{x}).$$

Sustituyendo en (1.4) tenemos que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \tag{1.5}$$

que es la Ley de Gauss en su forma diferencial.

### 1.1.2. El Potencial Electrostático

La ecuación (1.3) nos permite escribir la ley de Coulomb como

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla_x \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y} \right). \tag{1.6}$$



Por ser  $\mathbf{E}$  un campo vectorial gradiente, se tiene que  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ . Además, siendo más sencillo trabajar con una ecuación que con tres, podemos introducir la función  $\Phi$  definida por

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}, \quad (1.7)$$

que cumple

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi. \quad (1.8)$$

A  $\Phi$  se le conoce como el potencial escalar.

Dada la ley de Gauss (1.5), es fácil notar que el potencial  $\Phi$  satisface la ecuación de Poisson

$$-\Delta\Phi = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \quad (1.9)$$

donde  $\rho(\mathbf{x})$  es una distribución continua de carga en el espacio. En el caso de ausencia de carga ( $\rho = 0$ ), la ecuación (1.9) se vuelve

$$\Delta\Phi = 0 \quad (1.10)$$

que es la conocida ecuación de Laplace.

### 1.1.3. Distribución superficial de cargas

Uno de los problemas más comunes en la electrostática es la determinación del campo eléctrico o del potencial debido a una distribución dada de cargas. Consideremos la ley de Gauss como está en (1.5). Integrando sobre una región  $\Omega$ , el teorema de la divergencia nos dice que

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

donde  $\hat{\mathbf{n}}$  es la normal exterior unitaria de  $\Omega$ .

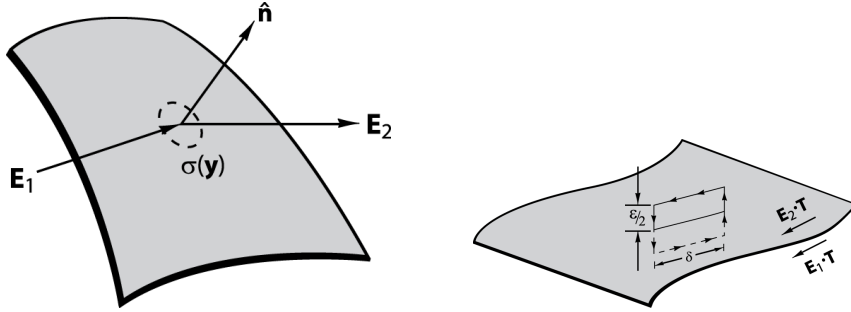
Sea una superficie  $\partial\Omega$  con normal exterior unitaria  $\hat{\mathbf{n}}$  con densidad de carga superficial  $\sigma(\mathbf{x})$  y campos eléctricos  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$  en cada cara, como se muestra en la figura 1.2(a). Usando la ley de Gauss

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{x}) dS,$$

de esta manera

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Al atravesar la superficie, la componente normal del campo eléctrico tiene una discontinuidad de  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .



(a) Discontinuidad en la componente normal del campo eléctrico, a través de una capa superficial de carga

(b) Contorno utilizado para determinar la continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico

Figura 1.2: Condiciones de frontera.

Consideremos ahora un punto  $\mathbf{a}$  sobre la superficie. Construimos un rectángulo cuyos vértices son  $\mathbf{a} - \epsilon \hat{\mathbf{n}}$ ,  $\mathbf{a} + \delta \mathbf{a} - \epsilon \hat{\mathbf{n}}$ ,  $\mathbf{a} + \delta \mathbf{a} + \epsilon \hat{\mathbf{n}}$  y  $\mathbf{a} + \epsilon \hat{\mathbf{n}}$ , donde  $\delta$  es pequeño y sea  $\mathcal{C}$  la trayectoria formada por el perímetro de ese rectángulo como se muestra en la figura 1.2(b). Dada la ecuación (1.8),  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ . Así, usando el teorema de Stokes,

$$\iint_{\partial\Omega} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} ds,$$

de esta manera, cuando  $\epsilon$  tiende a 0

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} ds &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{a} + \epsilon \hat{\mathbf{n}}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{T} ds + \int_{\mathbf{a} - \epsilon \hat{\mathbf{n}}}^{\mathbf{a}} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{T} ds + \int_{\mathbf{a} + \delta \mathbf{a} - \epsilon \hat{\mathbf{n}}}^{\mathbf{a} - \epsilon \hat{\mathbf{n}}} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{T} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbf{a} + \delta \mathbf{a}}^{\mathbf{a} + \delta \mathbf{a} - \epsilon \hat{\mathbf{n}}} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{T} ds + \int_{\mathbf{a} + \delta \mathbf{a} + \epsilon \hat{\mathbf{n}}}^{\mathbf{a} + \delta \mathbf{a}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{T} ds + \int_{\mathbf{a} + \epsilon \hat{\mathbf{n}}}^{\mathbf{a} + \delta \mathbf{a} + \epsilon \hat{\mathbf{n}}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{T} ds \right) \\ &= \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{a} + \delta \mathbf{a}} (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{T} ds = 0, \end{aligned}$$

por lo que el campo  $\mathbf{E}$  es continuo sobre el plano de tangencia.

En el caso de una superficie, la expresión para el potencial en cualquier punto del espacio puede ser obtenida de (1.7) reemplazando  $\rho d\mathbf{y}$  por  $\sigma dS$ :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\partial\Omega} \frac{\sigma(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} dS.$$

Para distribuciones de carga volumétricas o superficiales, el potencial es continuo. Con cargas puntuales, líneas de carga o capas dipolares, esta afirmación ya no es correcta.

En la actualidad, se pueden fabricar películas con un grosor de hasta  $3nm$ , por lo que otro problema de interés es determinar el potencial debido a una capa dipolar. Una capa dipolar puede ser imaginada como dos superficies, la primera superficie  $\Sigma$  con una distribución de carga  $\sigma(\mathbf{y})$  y muy cerca de ella, otra superficie  $\Sigma' \equiv \{\mathbf{y} + d(\mathbf{y})\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \Sigma\}$  a una distancia  $d(\mathbf{y})$  con una distribución de carga igual pero de signo opuesto, como se muestra en la figura 1.3(a). La distribución de capa dipolar de fuerza  $D(\mathbf{y})$  se forma permitiendo que  $\Sigma'$  se acerque infinitesimalmente a  $\Sigma$  mientras que la distribución de carga  $\sigma(\mathbf{y})$  se vuelve infinita, de tal manera que el producto de la densidad de carga  $\sigma(\mathbf{y})$  y la separación local  $d(\mathbf{y})$  se acerque al límite  $D(\mathbf{y})$ :

$$\lim_{d(\mathbf{y}) \rightarrow 0} \sigma(\mathbf{y})d(\mathbf{y}) = D(\mathbf{y}). \quad (1.11)$$

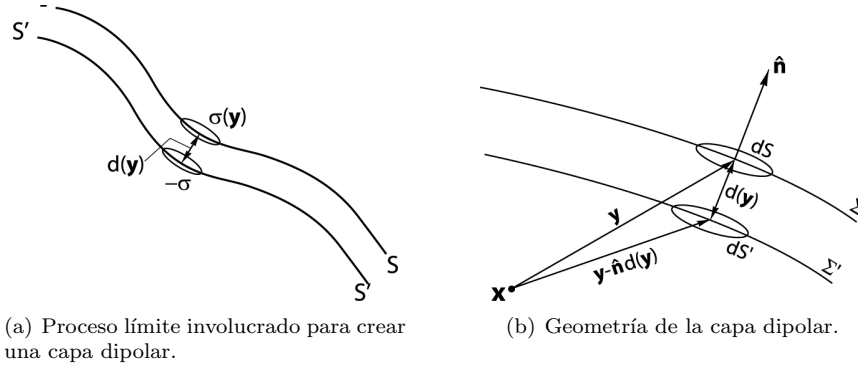


Figura 1.3: Capa dipolar.

La dirección del momento dipolar de la capa, de la carga negativa a la carga positiva, es normal a la superficie  $\Sigma$ .

Para encontrar el potencial debido a este arreglo, tomemos  $\hat{\mathbf{n}}$  la normal unitaria de  $\Sigma$  dirigida hacia afuera de  $\Sigma'$ , como se muestra en la figura 1.3(b), el potencial debido a las dos superficies es

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\sigma(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} dS - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma'} \frac{\sigma(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \hat{\mathbf{n}}d(\mathbf{y})\|} dS'.$$

Para  $d$  pequeña, podemos expandir  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \hat{\mathbf{n}}d(\mathbf{y})\|^{-1}$  en su serie de Taylor con respecto a  $\mathbf{y}$

$$\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \hat{\mathbf{n}}d\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - \hat{\mathbf{n}}d \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) + o(d^2).$$

De esta manera encontramos que el potencial se vuelve

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \sigma(\mathbf{y})d(\mathbf{y})\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) dS + o(d^2)$$

y tomando el límite (1.11)

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} D(\mathbf{y}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_y \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) dS.$$

Esta ecuación tiene una interpretación simple. Además,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_y \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) dS = -\frac{\cos \theta dS}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} = -d\Lambda,$$

donde  $\Lambda$  es el elemento de ángulo sólido subtendido en el punto de observación por el elemento de área  $dS$ , como se indica en la figura 1.4. Notemos que  $d\Lambda$  tiene signo positivo si  $\theta$  es un ángulo agudo, es decir, cuando el punto de observación ve el lado interior de la capa dipolar. El potencial puede entonces escribirse como

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} D(\mathbf{y}) d\Lambda.$$

Para un momento dipolar superficial constante  $D$ , el potencial es sólo el producto del momento y el ángulo sólido subtendido al punto de observación de la superficie, sin importar la forma de ésta.

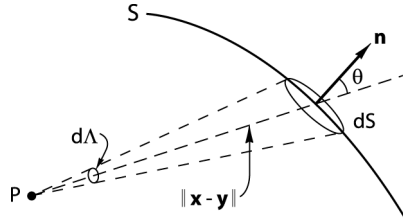


Figura 1.4: Ángulo sólido subtendido en el punto de observación por el elemento de área  $dS$ .

#### 1.1.4. Potencial Electrostático completo

Consideremos el teorema de la divergencia

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} \, d\mathbf{x} = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS.$$

Supongamos que  $\mathbf{A} = \phi \nabla \psi$  donde  $\phi$  y  $\psi$  son potenciales escalares arbitrarios. Ahora

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) \, d\mathbf{y} = \iint_{\partial\Omega} (\psi \nabla \phi) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS,$$

dado que

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \Delta \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi$$

y

$$\phi \nabla \psi \cdot \hat{\mathbf{n}} = \phi \frac{\partial \psi}{\partial n},$$

donde  $\partial/\partial n$  es la derivada en la dirección normal (exterior) de la superficie  $\partial\Omega$ . Si sustituimos estas dos ecuaciones en el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\iiint_{\Omega} \phi \Delta \psi = - \iiint_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \iint_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \quad (1.12)$$

que es la primera identidad de Green. Si ahora escribimos (1.12) con  $\phi$  y  $\psi$  intercaldados, y luego se la restamos a (1.12) obtenemos la segunda identidad de Green

$$\iiint_{\Omega} (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d\mathbf{x} = \iint_{\partial\Omega} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS. \quad (1.13)$$

A esta ecuación también se le conoce como el teorema de Green.

Usando este teorema, la ecuación diferencial de Poisson puede ser convertida en una ecuación integral si escogemos alguna  $\psi$  particular. Así, sea  $\psi = R$  el potencial escalar donde  $R = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{-1}$ ,  $\mathbf{x}$  es el punto de observación y  $\mathbf{y}$  es la variable de integración y sea  $\phi = \Phi$  el potencial escalar de (1.9). En la sección 1.1.1 se probó rigurosamente que

$$\Delta \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

por lo que si  $\Phi$  es solución de (1.9), la ecuación (1.13) se vuelve

$$\iiint_{\Omega} \left[ -4\pi \Phi(\mathbf{y}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\rho(\mathbf{y})}{\epsilon_0 R} \right] d\mathbf{y} = \iint_{\partial\Omega} \left[ \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] dS.$$

Si el punto  $\mathbf{x}$  se encuentra encerrado por  $\partial\Omega$ , obtenemos:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{y})}{R} d\mathbf{y} + \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) \right] dS. \quad (1.14)$$

Esta ecuación es la representación integral de la solución de la ecuación de Poisson.

Si  $\mathbf{x}$  se encuentra fuera de la superficie  $\partial\Omega$ , entonces el término izquierdo de la ecuación (1.14) es cero. Además, podemos interpretar de una manera consistente que la densidad superficial de carga  $\sigma$  y la capa dipolar  $D$  están dadas por

$$\begin{aligned} \sigma &= \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \\ D &= -\epsilon_0 \Phi. \end{aligned}$$

Es importante recalcar que si la superficie  $\partial\Omega$  tiende a infinito y el campo eléctrico en  $\partial\Omega$  cae más rápido que  $R^{-1}$ , el término superficial de (1.14) se anula y el potencial se reduce a la expresión dada en (1.7).

### 1.1.5. Energía Potencial Electrostática, Capacitancia

El potencial escalar tiene una interpretación física muy clara cuando consideramos el trabajo hecho sobre una carga prueba  $q$  al ser transportada de un punto  $\mathbf{a}$  a otro  $\mathbf{b}$  en la presencia de un campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ . La fuerza actuando sobre la carga en cualquier punto es

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E},$$

de tal forma que el trabajo realizado al moverla del punto  $\mathbf{a}$  al punto  $\mathbf{b}$  es

$$W = - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = -q \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} ds,$$

donde  $\mathbf{T}$  es el vector tangente a la trayectoria como se mueve la carga del punto  $\mathbf{a}$  al punto  $\mathbf{b}$ . El signo menos es debido a que se tiene que hacer un trabajo sobre la carga en oposición al campo eléctrico. Utilizando la ecuación (1.8), el trabajo se escribe como

$$W = q \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \nabla\Phi \cdot \mathbf{T} ds = q \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} d\Phi = q(\Phi_{\mathbf{b}} - \Phi_{\mathbf{a}})$$

que nos dice que la cantidad  $q\Phi$  puede ser interpretada como la energía potencial de la carga prueba en el campo eléctrico. Si una carga  $q_i$  es traída desde el infinito a un punto  $\mathbf{x}_i$  en una región del espacio donde los campos eléctricos están descritos por el potencial escalar  $\Phi$  (pedimos que éste sea 0 en el infinito), el trabajo hecho sobre la carga está dado por

$$W = q_i\Phi(\mathbf{x}_i).$$

El potencial  $\Phi$  puede ser visto como el producido por un arreglo de  $(n - 1)$  cargas  $q_j$  en las posiciones  $\mathbf{x}_j$ . De esta manera

$$\Phi(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i}^{n-1} \frac{q_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|},$$

por lo que la energía potencial de la carga  $q_i$  es

$$W = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}.$$

La energía potencial total de las cargas interactuando es entonces

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} \frac{q_i q_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}.$$

Una manera más simétrica de escribir esta ecuación es

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|},$$

donde los términos  $i = j$  son omitidos.

Para una distribución de carga continua, la energía potencial toma la forma

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \iiint \left( \iiint \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x},$$

o mejor dicho

$$W = \frac{1}{2} \iiint \rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Una manera alternativa de ver el potencial electrostático es con el campo eléctrico. Si utilizamos la ecuación de Poisson (1.9), podemos escribir el potencial como

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \iiint \Phi \Delta \Phi d\mathbf{x}.$$

Usando la identidad de Green (1.12)

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint \|\nabla \Phi\|^2 d\mathbf{x} = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint \|\mathbf{E}\|^2 d\mathbf{x},$$

donde la integración es sobre todo el espacio. En esta ecuación, toda la dependencia explícita de las cargas desaparece, y la energía se expresa en términos de la integral del cuadrado del campo eléctrico en todo el espacio. De esta manera, podemos pensar alternativamente que la energía es almacenada en el campo eléctrico que rodea las distribuciones de carga. Además, de manera natural podemos definir la densidad de energía  $w$  como

$$w := \frac{\epsilon_0}{2} \|\mathbf{E}\|^2. \quad (1.15)$$

Para un sistema de  $n$  conductores, cada uno con potencial  $V_i$  y carga total  $Q_i$ , la energía potencial electrostática puede ser expresada en términos del potencial y de ciertas cantidades geométricas llamadas coeficientes de capacidad. Para una configuración dada de conductores, la dependencia funcional del potencial con las cargas es lineal, por lo que el potencial puede ser escrito como

$$V_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} Q_j \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

donde  $p_{ij}$  depende de la geometría de los conductores. Estas  $n$  ecuaciones pueden ser invertidas para encontrar la carga en el  $i$ -ésimo conductor en términos de los potenciales:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j. \quad (1.16)$$

Los coeficientes  $C_{ii}$  son llamados capacidades o capacitancias, mientras que los coeficientes  $C_{ij}$ ,  $i \neq j$ , son llamados coeficientes de inducción. De esta manera, la capacitancia de un conductor es la carga total en el conductor cuando es mantenido a potencial unitario y todos los demás a potencial cero.

## 1.2. Consideraciones mecánicas

En esta sección se hace un breve repaso de la teoría de los medios continuos. Usando argumentos empíricos se deduce la ley de Hooke. Se muestra el tensor de esfuerzos y su relación con el tensor de deformación. Se plantean las ecuaciones de movimiento de un cuerpo elástico y se deducen las ecuaciones de Navier de la elasticidad lineal. Por último, se encuentra la energía de un cuerpo deformado.

### 1.2.1. Ley de Hooke

El comportamiento elástico de un sólido es determinado eventualmente por su estructura molecular, que no es considerada en la mecánica de medios continuos. Así, para establecer leyes para la teoría elástica, se requieren experimentos. En este caso debemos distinguir entre los enunciados basados en experimentos que no han sido derivados de manera lógica, y en las consecuencias puramente lógicas de esas leyes.

Las ecuaciones fundamentales que gobiernan el comportamiento elástico de sólidos isótropos pueden ser deducidas de dos hechos experimentales:

- (i) La extensión  $\delta l$  de una barra elástica de longitud  $l$  es proporcional a la fuerza de tensión  $F$  (que se asume es pequeña) aplicada a los extremos de la barra:  $F \sim \delta l$ .
- (ii) Durante el estiramiento la barra se contrae en la dirección transversal, esta contracción relativa es proporcional a la extensión longitudinal relativa  $\delta h/h \sim \delta l/l$ , donde  $h$  es la dimensión transversal característica de la barra (Fig. 1.5(a)).

El hecho experimental (i) es la ley de Hooke expresando la linealidad de la relación esfuerzo-deformación.

Establezcamos ahora la relación entre la fuerza de tensión  $F$  y la longitud de la barra  $l$ . Para ello pensemos en dos barras, cada una de longitud  $l$ , conectadas por sus extremos (Fig. 1.5(b)). Al aplicar la fuerza de tensión  $F$  a los extremos de la barra compuesta, cada barra estará sujeta a la misma fuerza  $F$  y tendrá una extensión  $\delta l$ . La extensión de la barra compuesta será de  $2\delta l$ . Como resultado, la fuerza  $F$  es proporcional a la longitud de la barra.

Consideremos ahora que las dos barras están unidas por su eje transversal, es decir, la distancia  $h$  es duplicada. Al aplicar una fuerza  $F$  al extremo de cada barra, la extensión será  $\delta l$  como en el caso de una sola barra, pero ahora la fuerza total sobre la barra será  $2F$ . Así, si el área  $S$  en donde se aplica la fuerza es duplicada, la extensión de la barra será la misma al aplicar el doble de la fuerza.

De esta manera, la relación entre la fuerza  $F$ , la longitud  $l$  y el área transversal  $S$  de la barra puede ser escrita en la forma

$$\frac{F}{S} = K \frac{\delta l}{l}. \quad (1.17)$$



Esta es la ley de Hooke, donde la constante  $K$  es conocida como el módulo de Young. La cantidad  $F/S$  es conocida como el esfuerzo y a la extensión relativa  $\varepsilon = \delta l/l$  se le llama deformación o elongación. A los esfuerzos normales a la frontera de un sólido se les conoce como tensiones o compresiones, mientras que a los esfuerzos tangenciales se les conoce como esfuerzos de corte o cortantes.

De acuerdo con el hecho experimental (ii), podemos introducir la constante  $\nu$  para relacionar las deformaciones longitudinales y transversales por

$$\delta h/h = -\nu \delta l/l. \quad (1.18)$$

A  $\nu$  se le conoce como la razón de Poisson. El signo menos es debido a lo observado en el laboratorio para la mayoría de los cuerpos.

La ley de Hooke y la relación (1.18) son la base de la teoría de elasticidad lineal para cuerpos isótropos. Sus leyes se siguen de estos hechos como la mecánica clásica sigue de las leyes de Newton y la electrodinámica de las ecuaciones de Maxwell.

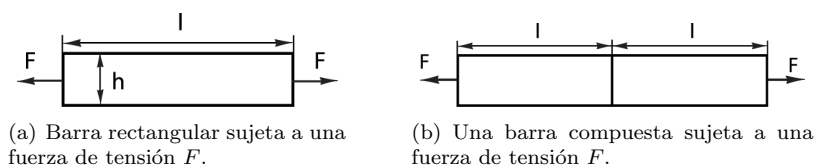


Figura 1.5: Ley de Hooke.

### 1.2.2. Esfuerzo

Consideremos un material continuo  $B$  ocupando un volumen en el espacio  $V$  en algún tiempo (Fig. 1.2.2). Imaginemos una superficie cerrada  $S$  dentro de  $B$ . Para expresar la interacción entre el material dentro y fuera de  $S$ , dividámosla

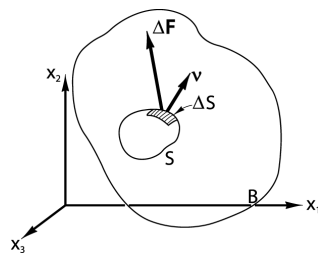


Figura 1.6: Principio de esfuerzo.

en dos clases: la primera debido a las fuerzas de acción a distancia o *fuerzas de cuerpo* tales como la gravitación y la fuerza electromagnética; y la segunda debido a la acción a través de la superficie  $S$ , llamada *fuerza de superficie*.

Para expresar esta fuerza consideremos un pequeño elemento de superficie  $\Delta S$  en nuestra superficie imaginaria  $S$ . Dibujemos en un punto de  $\Delta S$  un vector unitario  $\hat{\nu}$  normal a  $\Delta S$  con dirección hacia el exterior de  $S$  y llamemos al lado hacia el que este vector apunta el lado positivo. Consideremos la parte del material que se encuentra en el lado positivo de  $S$ , esta parte ejerce una fuerza  $\Delta \mathbf{F}$  en la parte que se encuentra del lado negativo de la normal. Supongamos que conforme  $\Delta S$  tiende a cero, la razón  $\Delta \mathbf{F}/\Delta S$  tiende a un límite definido  $d\mathbf{F}/dS$ , y que el momento de la fuerza actuando en la superficie  $\Delta S$  alrededor de cualquier punto dentro del área desaparece en el límite. El vector límite se escribe como

$$\overset{\nu}{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{F}}{dS},$$

donde el superíndice  $\nu$  denota la dirección de la normal  $\hat{\nu}$  a la superficie  $\Delta S$ . Al vector  $\overset{\nu}{\mathbf{T}}$  se le llama tracción o vector de esfuerzo y representa la fuerza por unidad de área actuando en la superficie.

La hipótesis de que hay un vector de esfuerzo definido para cualquier superficie cerrada en el interior de un material continuo es conocida como el *principio de esfuerzo de Euler y Cauchy*. Este principio está bien aceptado y parece satisfacer la mayoría de las necesidades de la mecánica de continuos. Sin embargo, esta declaración no es más que una hipótesis básica.

Consideremos el caso especial donde la superficie  $\Delta S_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , es paralela a uno de los planos coordenados. Denotemos al vector de esfuerzo actuando en  $\Delta S_k$  por  $\overset{k}{\mathbf{T}}$ , con tres componentes  $\overset{k}{T}_1, \overset{k}{T}_2, \overset{k}{T}_3$  sobre las direcciones de los ejes coordenados  $x_1, x_2, x_3$  respectivamente; el índice inferior denota las componentes de la fuerza y el símbolo  $k$  indica la normal (eje  $x_k$ ) a la superficie sobre la cual la fuerza actúa. En éste caso,

$$\overset{k}{T}_1 = \tau_{k1}, \quad \overset{k}{T}_2 = \tau_{k2}, \quad \overset{k}{T}_3 = \tau_{k3}.$$

Si arreglamos los componentes de la tracción en la superficie  $\Delta S_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , en una matriz cuadrada, obtenemos

	Esfuerzos		
Superficie normal a $x_1$	$\tau_{11}$	$\tau_{12}$	$\tau_{13}$ ,
Superficie normal a $x_2$	$\tau_{21}$	$\tau_{22}$	$\tau_{23}$ ,
Superficie normal a $x_3$	$\tau_{31}$	$\tau_{32}$	$\tau_{33}$ .

Esto se ilustra en la figura 1.2.2. Las componentes  $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$  son los esfuerzos normales y las componentes restantes  $\tau_{12}, \tau_{13}$ , etc. son los esfuerzos de corte.

### 1.2.3. El Tensor de Deformación

Las partículas de un cuerpo pueden asociarse a puntos en el espacio y por lo tanto cada partícula del cuerpo está representada por sus coordenadas con respecto a una base fija. Cuando el cuerpo se deforma, cada partícula asume una nueva posición, que está descrita por un nuevo conjunto de coordenadas. Por

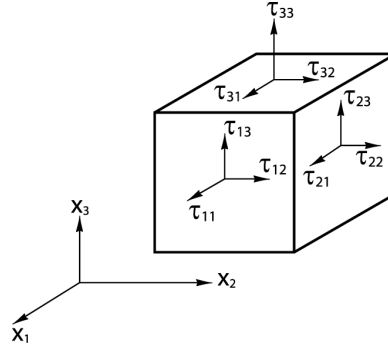


Figura 1.7: Componentes del Esfuerzo.

ejemplo, una partícula  $\mathbf{p}$  localizada originalmente en el lugar con coordenadas  $(a_1, a_2, a_3)$  es desplazada al lugar  $\mathbf{q}$  con coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  cuando el cuerpo se deforma. Entonces el vector  $\mathbf{pq}$  es llamado el vector de desplazamiento de la partícula. Las componentes del vector de desplazamiento son

$$x_1 - a_1, \quad x_2 - a_2, \quad x_3 - a_3.$$

Si el desplazamiento es conocido para cada partícula del cuerpo, podemos construir el cuerpo deformado a partir del original. Así, una deformación puede ser descrita por el campo de los desplazamientos. Sean  $(a_1, a_2, a_3)$  las coordenadas de cualquier partícula en la configuración original del cuerpo, y sean  $(x_1, x_2, x_3)$  las coordenadas de ese punto cuando es deformado. Entonces la deformación del cuerpo se conoce si  $x_1, x_2, x_3$  son funciones conocidas de  $a_1, a_2, a_3$ :

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3).$$

Este es un mapeo de  $(a_1, a_2, a_3)$  a  $(x_1, x_2, x_3)$ . En la mecánica de medios continuos, se asume que las deformaciones son continuas y uno a uno, por lo que existe un mapeo inverso.

El movimiento rígido de un cuerpo no induce esfuerzos, por lo que los desplazamientos por sí mismos no están relacionados con el esfuerzo. Para relacionarlos, debemos considerar los estiramientos y distorsiones del cuerpo.

Consideremos un elemento de recta infinitesimal conectando un punto  $\mathbf{p}(a_1, a_2, a_3)$  a un punto vecino  $\mathbf{p}'(a_1 + da_1, a_2 + da_2, a_3 + da_3)$ . El cuadrado de la distancia  $ds_0$  de  $\mathbf{pp}'$  en la configuración original esta dada por

$$ds_0^2 = da_1^2 + da_2^2 + da_3^2.$$

Cuando  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{p}'$  se deforman a los puntos  $\mathbf{q}(x_1, x_2, x_3)$  y  $\mathbf{q}'(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ , el cuadrado de la distancia del nuevo elemento  $\mathbf{qq}'$  es

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Siendo que

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} da_j, \quad da_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j.$$

Introduciendo la delta de Kronecker, podemos escribir

$$\begin{aligned} ds_0^2 &= \delta_{ij} \frac{\partial a_i}{\partial x_l} \frac{\partial a_j}{\partial x_m} dx_l dx_m, \\ ds^2 &= \delta_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial a_l} \frac{\partial x_j}{\partial a_m} da_l da_m. \end{aligned}$$

De esta manera, la diferencia entre los cuadrados puede ser escrita como

$$ds^2 - ds_0^2 = \left( \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right) da_i da_j,$$

ó

$$ds^2 - ds_0^2 = \left( \delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial a_\beta}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j.$$

Definimos los tensores de deformación

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right), \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial a_\beta}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

El tensor de deformación  $E_{ij}$  se conoce como el tensor de deformación de Green, mientras que  $e_{ij}$  es el tensor de deformación de Cauchy para deformaciones infinitesimales y de Almansi para deformaciones finitas. Claramente  $E_{ij} = E_{ji}$  y  $e_{ij} = e_{ji}$ .

Si consideramos el desplazamiento  $u_\alpha = x_\alpha - a_\alpha$ , podemos reducir los tensores  $E_{ij}$  y  $e_{ij}$  a una forma más simple

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_j} \right], \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right]. \end{aligned}$$

Si el desplazamiento es muy pequeño, podemos despreciar los cuadrados y productos de las derivadas, entonces  $e_{ij}$  se reduce al tensor de deformación infinitesimal de Cauchy,

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right].$$

En este caso, la distinción entre las coordenadas Eulerianas y Lagrangianas desaparece.

Para interpretar las componentes del tensor de deformación de Cauchy, sean  $x, y, z$  un conjunto de coordenadas rectangulares. Consideremos un segmento de

recta de longitud  $dx$  paralelo al eje  $x$ . El cambio del cuadrado de la distancia de este elemento debido a una deformación es

$$ds^2 - ds_0^2 = 2e_{xx}(dx)^2.$$

Así,

$$ds - ds_0 = \frac{2e_{xx}(dx)^2}{ds + ds_0}.$$

Pero en este caso  $ds = dx$  y  $ds_0$  difiere de  $ds$  por una pequeña cantidad de segundo orden si asumimos que las componentes de  $e_{ij}$  son infinitesimales. Así

$$\frac{ds - ds_0}{ds} = e_{xx},$$

por lo que  $e_{xx}$  representa la extensión o el cambio de longitud relativa de un vector paralelo al eje  $x$ .

Para la componente  $e_{xy}$  consideremos un rectángulo pequeño en el cuerpo con lados  $dx, dy$ . La suma  $\partial u_1/\partial y + \partial u_2/\partial x$  representa el cambio en el ángulo  $xOy$  que era originalmente un ángulo recto.

### Relación esfuerzo-deformación. Tensor de Elasticidad

Extendiendo la ley de Hooke para sólidos elásticos, podemos establecer la relación entre el tensor de esfuerzos con el tensor de deformación. Siempre que el sólido obedezca la ley de Hooke, el tensor de esfuerzo será linealmente proporcional al tensor de deformación. Es decir,

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}e_{kl},$$

donde  $C_{ijkl}$  es el tensor de elasticidad y es un tensor de rango 4, por lo que tiene 81 elementos. Siendo  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ , se debe cumplir que  $C_{ijkl} = C_{jikl}$ . Más aún, como  $e_{kl} = e_{lk}$  siempre podremos simetrizar las constantes  $C_{ijkl}$  con respecto a  $k$  y  $l$  sin alterar la suma. Así,

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ijkl} + C_{ijlk})e_{kl} = C'_{ijkl}e_{kl},$$

donde  $C'_{ijkl} = C'_{ijlk}$ . De esta manera, el tensor de elasticidad tiene a lo más 36 componentes independientes.

Para la mayoría de los sólidos elásticos, el número de constantes independientes es mucho menor que 36. La reducción se debe a las simetrías del material.

La mayor reducción en el número de constantes elásticas se obtiene cuando el material es isótropo, es decir, cuando las propiedades del material son idénticas en todas direcciones. Más precisamente, un material es isótropo si el arreglo de números  $C_{ijkl}$  tiene exactamente los mismos valores numéricos sin importar como esté orientado el material. Se puede probar [10], que para un material isótropo, sólo hay dos constantes que caracterizan al material. La ley de Hooke en este caso es

$$\tau_{ij} = \lambda e_{\alpha\alpha}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (1.19)$$

Las constantes  $\lambda$  y  $\mu$  son conocidas como constantes de Lamé.

### 1.2.4. Ecuaciones de movimiento de un medio continuo

Sea el sistema coordenado  $x_1, x_2, x_3$  un sistema inercial de referencia. Denotemos por  $B(t)$  a la región ocupada por el material al tiempo  $t$ . Sea  $\mathbf{r}$  el vector de posición de una partícula con respecto al origen del sistema de coordenadas,  $\rho$  la densidad de masa del material y  $\mathbf{V}$  el vector de velocidad de la partícula que está localizada en  $(x_1, x_2, x_3)$  con un volumen  $dv$  y masa  $\rho dv$ . La integral del momento lineal  $(\rho dv)\mathbf{V}$  de todas las partículas en el dominio  $B(t)$

$$\mathcal{P} = \int_{B(t)} \mathbf{V} \rho dv$$

se define como el momento lineal del cuerpo en la configuración  $B(t)$ , y sea la integral del momento angular de las partículas alrededor del origen  $\mathbf{r} \times \mathbf{V} \rho dv$ , sobre el dominio  $B(t)$ ,

$$\mathcal{H} = \int_{B(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{V} \rho dv,$$

se define como el momento angular del cuerpo. La ley de Newton para medios continuos establecida por Euler dice que la razón de cambio del momento lineal con respecto al tiempo es igual a la fuerza total  $\mathcal{F}$  actuando sobre el cuerpo, es decir,

$$\dot{\mathcal{P}} = \mathcal{F},$$

y que la razón de cambio del momento angular con respecto al tiempo es igual a la torca total  $\mathcal{L}$  aplicada alrededor del origen,

$$\dot{\mathcal{H}} = \mathcal{L}.$$

Para especificar las fuerzas de cuerpo, consideremos un volumen acotado por una superficie cerrada arbitraria  $S$ . Se asume que la fuerza resultante es representable en forma de integral de volumen sobre el dominio  $B$  encerrado por  $S$ ,

$$\int_{B(t)} \mathbf{X} dv.$$

El vector  $\mathbf{X}$ , con componentes  $X_1, X_2, X_3$  es conocido como el vector de fuerzas por unidad de volumen.

La fuerza superficial actuando en una superficie imaginaria en el interior del cuerpo es el vector de esfuerzo mencionado anteriormente. De acuerdo con esto, la fuerza total actuando sobre el material que ocupa la región  $B$  interior a la superficie cerrada  $S$  es

$$\mathcal{F} = \oint_{S(t)} \overset{\nu}{\mathbf{T}} dS + \int_{B(t)} \mathbf{X} dv,$$

donde  $\overset{\nu}{\mathbf{T}}$  es el vector de esfuerzo actuando en  $dS$  cuya normal exterior es  $\nu$ . De manera similar, la torca alrededor del origen esta dada por la expresión

$$\mathcal{L} = \oint_{S(t)} \mathbf{r} \times \overset{\nu}{\mathbf{T}} dS + \int_{B(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{X} dv.$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\oint_{S(t)} \overset{\nu}{\mathbf{T}} dS + \int_{B(t)} \mathbf{X} dv = \frac{D}{Dt} \int_{B(t)} \mathbf{V} \rho dv, \quad (1.20)$$

$$\oint_{S(t)} \mathbf{r} \times \overset{\nu}{\mathbf{T}} dS + \int_{B(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{X} dv = \frac{D}{Dt} \int_{B(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{V} \rho dv. \quad (1.21)$$

Una tercera ecuación surge al considerar la conservación de la masa a lo largo del tiempo. La masa contenida en un dominio  $B$  al tiempo  $t$  es

$$m(t) = \int_{B(t)} \rho dv,$$

donde  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  es la densidad de masa del continuo en el punto  $\mathbf{x}$ . La conservación de masa requiere que  $Dm/Dt = 0$ . Usando el hecho de que

$$\frac{D}{Dt} \int_{B(t)} A dv = \int_{B(t)} \left( \frac{DA}{Dt} + A \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right) dv, \quad (1.22)$$

donde  $A(\mathbf{x}, t)$  es una función continuamente diferenciable y  $V_j = \partial x_j / \partial t$ , podemos calcular la derivada con respecto al tiempo de la masa

$$\frac{D}{Dt} \int_{B(t)} \rho dv = \int_{B(t)} \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right) dv = 0,$$

por lo que podemos establecer la ecuación de continuidad

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0. \quad (1.23)$$

Cauchy logró establecer que si se conocen los esfuerzos  $\tau_{ij}$ , podemos escribir el vector de esfuerzo actuando en cualquier superficie con normal unitaria exterior  $\hat{\nu}$  cuyas componentes son  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ . Este vector de esfuerzo se denota por  $\overset{\nu}{\mathbf{T}}$ , con componentes  $\overset{\nu}{T}_1, \overset{\nu}{T}_2, \overset{\nu}{T}_3$  dadas por la fórmula de Cauchy,

$$\overset{\nu}{T}_i = \nu_j \tau_{ji}, \quad (1.24)$$

donde estamos usando la convención de Einstein de suma sobre el índice repetido. Para probar este resultado, consideremos el tetraedro infinitesimal formado por tres superficies paralelas a los planos coordenados y una normal al vector unitario  $\hat{\nu}$  (Fig. 1.2.4). Sea  $dS$  el área de la superficie normal a  $\hat{\nu}$ . Así, el área de las otras tres superficies es

$$\begin{aligned} dS_1 &= dS \cos(\hat{\nu}, \mathbf{x}_1) \\ &= \nu_1 dS = \text{área de la superficie paralela al plano } x_2 x_3, \\ dS_2 &= \nu_2 dS = \text{área de la superficie paralela al plano } x_3 x_1, \\ dS_3 &= \nu_3 dS = \text{área de la superficie paralela al plano } x_1 x_2, \end{aligned}$$

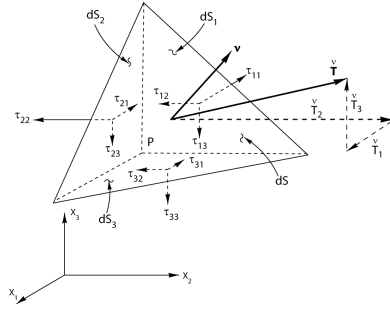


Figura 1.8: Tracciones superficiales en un tetraedro.

y el volumen del tetraedro es  $dv = \frac{1}{3}hdS$ , donde  $h$  es la altura del vértice  $P$  medida desde la superficie  $dS$ . Las fuerzas en el sentido positivo de  $x_1$ , actuando en las tres direcciones coordenadas puede ser escrita como

$$(-\tau_{11} + \epsilon_1)dS_1, \quad (-\tau_{21} + \epsilon_2)dS_2, \quad (-\tau_{31} + \epsilon_3)dS_3,$$

donde  $\tau_{11}, \tau_{21}, \tau_{31}$  son los esfuerzos en el vértice  $P$  opuestos a  $dS$  y las cantidades  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  son introducidas debido a que las tracciones actúan en puntos diferentes de  $P$ . Si asumimos que el campo de esfuerzos es continuo, entonces estas cantidades son infinitesimales. Por otro lado, la fuerza actuando en el triángulo normal a  $\hat{\nu}$  tiene una componente  $(\overset{\nu}{T}_1 + \epsilon)dS$  actuando en la dirección positiva de el eje  $x_1$ , la fuerza de cuerpo tiene una componente  $(X_1 + \epsilon')dv$  y la razón de cambio del momento lineal tiene una componente  $\rho \overset{\nu}{V}_1 dv$ , donde  $V_1$  es la componente de la velocidad en la dirección  $x_1$ . La primera ecuación de movimiento es

$$(-\tau_{11} + \epsilon_1)dS + (-\tau_{21} + \epsilon_2)dS + (-\tau_{31} + \epsilon_3)dS + (\overset{\nu}{T}_1 + \epsilon)dS + \frac{1}{3}h(X_1 + \epsilon')dS = \frac{1}{3}h\rho \overset{\nu}{V}_1 dS.$$

Dividiendo entre  $dS$  y tomando el límite cuando  $h \rightarrow 0$ , obtenemos

$$\overset{\nu}{T}_1 = \tau_{11}\nu_1 + \tau_{21}\nu_2 + \tau_{31}\nu_3,$$

que es la primera componente de la ecuación (1.24). Las demás componentes se encuentran de manera análoga.

Si sustituimos el vector de esfuerzos por (1.24) en (1.20), podemos usar el teorema de la divergencia. De esta manera

$$\int_{B(t)} \left( \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + X_i \right) dv = \frac{D}{Dt} \int_{B(t)} V_i \rho dv. \quad (1.25)$$

Además, dado que  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = e_{ijk}a_j b_k$  donde  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  son vectores arbitrarios y  $e_{ijk}$  es el símbolo de Levi-Civita, la ecuación (1.21) se puede escribir como

$$\oint_{S(T)} e_{ijk} x_j \overset{\nu}{T}_k dS + \int_{B(t)} e_{ijk} x_j X_k dv = \frac{D}{Dt} \int_{B(t)} e_{ijk} x_j V_k \rho dv,$$



al sustituir  $\overset{\nu}{T}_k = \tau_{lk}\nu_l$ , podemos utilizar de nuevo el teorema de la divergencia y obtener

$$\int_{B(t)} \left[ \frac{\partial}{\partial x_l} (e_{ijk}x_j\tau_{lk}) + e_{ijk}x_jX_k \right] dv = \frac{D}{Dt} \int_{B(t)} e_{ijk}x_jV_k\rho dv. \quad (1.26)$$

Usando la ecuación (1.22), el lado derecho de las ecuaciones (1.25) y (1.26) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{B(t)} V_i\rho dv &= \int_{B(t)} \left( \frac{D}{Dt}(\rho V_i) + (\rho V_i) \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right) dv, \\ \frac{D}{Dt} \int_{B(t)} e_{ijk}x_jV_k\rho dv &= \int_{B(t)} \left( \frac{D}{Dt}(e_{ijk}\rho x_jV_k) + e_{ijk}\rho x_jV_k \frac{\partial V_l}{\partial x_l} \right) dv. \end{aligned}$$

Las ecuaciones (1.25) y (1.26) son válidas para cualquier cuerpo  $B(t)$ , por lo que

$$\frac{D}{Dt}(\rho V_i) + \rho V_i \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + X_i, \quad (1.27)$$

$$\frac{D}{Dt}(e_{ijk}\rho x_jV_k) + e_{ijk}\rho x_jV_k \frac{\partial V_l}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l} (e_{ijk}x_j\tau_{lk}) + e_{ijk}x_jX_k. \quad (1.28)$$

Usando la regla de la cadena, el lado izquierdo de (1.25) se vuelve

$$\frac{D}{Dt}(\rho V_i) + \rho V_i \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = V_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j}{\partial x_j} \right) + \rho \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right).$$

La cantidad en el primer paréntesis se anula de acuerdo con la ecuación de continuidad (1.23), mientras que la segunda es la aceleración  $DV_i/Dt$ . Así obtenemos la ecuación Euleriana de movimiento

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + X_i. \quad (1.29)$$

Si ahora desarrollamos el lado derecho de la ecuación (1.28) obtenemos que

$$\frac{D}{Dt}(e_{ijk}\rho x_jV_k) + e_{ijk}\rho x_jV_k \frac{\partial V_l}{\partial x_l} = e_{ijk}x_j \frac{D}{Dt}(\rho V_k) + e_{ijk}\rho x_jV_k \frac{\partial V_l}{\partial x_l}.$$

Sustituyendo en (1.28) y usando  $\partial_{x_l}(e_{ijk}x_j\tau_{lk}) = e_{ijk}x_j\partial_{x_l}(\tau_{lk}) + e_{ijk}\tau_{jk}$  tenemos

$$e_{ijk}x_j \left[ \frac{D}{Dt}(\rho V_k) + \rho V_k \frac{\partial V_l}{\partial x_l} - \frac{\partial \tau_{lk}}{\partial x_l} - X_k \right] = e_{ijk}\tau_{jk}.$$

Usando la ecuación (1.27), la suma en el paréntesis es igual a cero, por lo que  $e_{ijk}\tau_{jk} = 0$ . Así

$$\tau_{ij} = \tau_{ji},$$

lo que nos dice que el tensor de esfuerzos es simétrico.

### Las ecuaciones de movimiento de un medio isótropo

Derivando con respecto a  $x_j$  la relación de esfuerzo deformación para cuerpos isótropos (1.19), obtenemos

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}).$$

Para deformaciones pequeñas

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{ii}}{\partial x_j} = \frac{\partial e_{kk}}{\partial x_j} &= \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k}, \\ \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right]. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Utilizando la ecuación Euleriana (1.29), la ecuación de desplazamiento para medios isótropos se escribe como

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + X_i. \quad (1.30)$$

A este conjunto de ecuaciones se les conoce como las ecuaciones de Navier de la elasticidad lineal.

#### 1.2.5. La energía de un cuerpo deformado

Para deformar un cuerpo elástico se debe aplicar un trabajo. Si asumimos que el cuerpo se deforma cuasi-estáticamente, es decir, lo suficientemente lento para que el cuerpo permanezca en equilibrio mecánico y termodinámico, podemos calcular este trabajo. Consideremos nuevamente el cuerpo  $B$  como en la sección 1.2.2. Supongamos que al aplicar un esfuerzo  $\overset{\nu}{\mathbf{T}}$  el cuerpo se desplaza un poco. Denotemos al incremento en el desplazamiento  $u_i$  como  $\delta u_i$ . El trabajo será  $\delta A = \int_S \tau_{ik} \nu_k \delta u_i dS$ . Aplicando el teorema de divergencia obtenemos

$$\delta A = \int_B \frac{\partial}{\partial x_k} (\tau_{ik} \delta u_i) dv = \int_B \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i dv + \int_B \tau_{ik} \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dv.$$

Para un proceso cuasiestático y en ausencia de fuerzas externas, la ecuación (1.29) nos dice que la primera integral del lado derecho es cero. En la segunda integral tenemos, dada la simetría del tensor  $\tau_{ik}$ ,

$$\tau_{ik} \delta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \tau_{ik} \delta \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] = \tau_{ik} \delta e_{ik}.$$

Si la deformación es puramente adiabática o puramente isotérmica, entonces  $dw = \tau_{ik} de_{ik}$  es la diferencial de energía contenida en el sólido. La función  $w(e_{ik})$  es la función de energía de deformación o la función de energía elástica. Podemos entonces escribir el tensor de esfuerzo como

$$\tau_{ik} = \frac{\partial w}{\partial e_{ik}}. \quad (1.31)$$

De acuerdo con la ley de Hooke generalizada,  $\tau_{ik}$  es una función lineal de  $e_{ik}$ , por lo que  $w(e_{ik})$  debe ser una función cuadrática homogénea de los componentes del tensor de deformación:

$$w = \frac{1}{2} C_{ikjl} e_{ik} e_{jl}. \quad (1.32)$$

## Capítulo 2

# El Modelo de Gotas Coalescentes: Microcapacitores

### 2.1. Ecuación de una membrana elástica

Consideremos una membrana como se muestra en la figura 2.1. Si asumimos que la membrana sólo se puede desviar en la dirección  $z$ , el vector de desplazamiento se puede escribir como

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Suponiendo además que la membrana es muy delgada, podemos pensar que  $U$

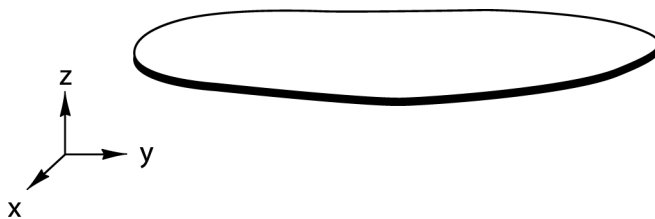


Figura 2.1: Una membrana delgada elástica.

es una función que depende únicamente de  $x$ ,  $y$  y  $t$ , es decir  $U = U(x, y, t)$ . Así, la ecuación de Navier (1.30) para la membrana se reduce a una sola ecuación para  $U$ ,

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T \Delta U + p(x, y, t),$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa,  $T$  es la tensión a la que está sujeta,  $\Delta$  es el operador Laplaciano y  $p(x, y, t)$  es la presión ejercida sobre la membrana en la dirección  $z$ . Si además consideramos que la membrana se encuentra en un medio con coeficiente de viscosidad  $a$ , tenemos

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a \frac{\partial U}{\partial t} - T \Delta U = p(x, y, t). \quad (2.2)$$

El problema está completamente determinado si conocemos la configuración inicial de la membrana  $U(x, y, 0) = f(x, y)$ , así como su velocidad  $U_t(x, y, 0) = g(x, y)$ .

## 2.2. Gotas coalescentes. Modelo de Taylor

Consideremos el problema de dos gotas de líquido vecinas a diferentes potenciales. Las gotas, cada una de radio  $R_0$ , se encuentran suspendidas en dos anillos conductores coaxiales de radio  $a$  separados a una distancia  $2h$  que es muy pequeña comparada con  $a$ , de tal manera que

$$h \ll a \ll R_0.$$

La geometría del problema se muestra en la figura 2.2. La posición inicial de la porción de las gotas que se encuentra entre los anillos se representa por una línea punteada que es parte de una esfera de radio  $R_0$ . Los puntos  $A, B$  y  $C, D$  representan a los anillos.

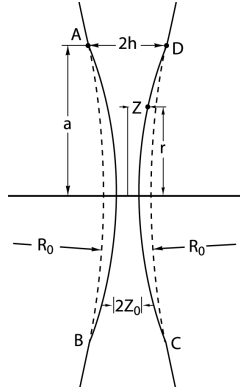


Figura 2.2: Porciones de dos gotas suspendidas en dos anillos cuyas secciones están en  $A, B$  y  $C, D$  respectivamente.

Los anillos se mantienen a una diferencia de potencial  $\pm V_s$  y la configuración de la porción de las gotas distorsionadas bajo la influencia del potencial es representada por las curvas que unen a  $AB$  y  $CD$ . Tomando coordenadas

cilíndricas  $(r, z)$  con  $Z = 0$  en el punto medio entre los anillos, la ecuación de equilibrio es

$$\gamma \left( \frac{d^2 Z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dZ}{dr} \right) = p(r, z),$$

donde  $Z$  es el desplazamiento de la superficie de la gota,  $p$  es la presión sobre la superficie y  $\gamma$  es la tensión superficial de la interfase. En este caso, la presión sobre las gotas se debe a la diferencia de potencial y la presión interna de las gotas. La presión electrostática  $p_v$  va a ser igual a la densidad de energía debido al campo. De esta manera, usando la ecuación (1.15) tendremos que

$$p_v = \frac{\epsilon_0}{2} \|\nabla \Phi\|^2, \quad (2.3)$$

donde  $\Phi$  es tal que

$$\Delta \Phi = 0, \quad (2.4)$$

$$\Phi(x, y, Z(x, y)) = V_s. \quad (2.5)$$

y  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío. Tomando las variables adimensionales

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{a}, \quad z' = \frac{z}{h}, \quad \psi = \frac{\Phi}{V_s}$$

y sustituyendo en (2.3)-(2.5) tenemos

$$p_v = \frac{V_s^2 \epsilon_0}{2h^2} \left[ \frac{h^2}{a^2} \left( \left( \frac{\partial \psi}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y'} \right)^2 \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z'} \right)^2 \right], \quad (2.6)$$

$$\frac{h^2}{a^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z'^2} = 0, \quad (2.7)$$

$$\psi(x', y', Z/h) = 1.$$

Escribiendo el potencial como  $\psi = \psi_0 + \frac{h}{a} \psi_1 + O\left(\frac{h^2}{a^2}\right)$  y  $h \ll a$ , las ecuaciones (2.6) y (2.7) a primer orden son:

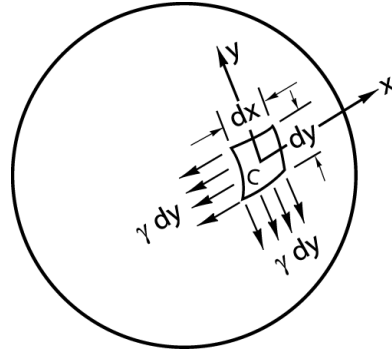
$$p_v = \frac{V_s^2 \epsilon_0}{2h^2} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial z'} \right)^2, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z'^2} = 0. \quad (2.9)$$

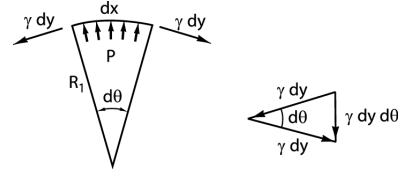
Dado que  $\psi(x', y', 0) = 0$ , la solución de (2.9) es  $\psi = hz'/Z$ . Sustituyendo en (2.8)

$$p_v = \frac{V_s^2 \epsilon_0}{2Z^2}. \quad (2.10)$$

Asumimos que el campo distorsionará a las gotas de manera tal que no afecte su forma y volumen lo suficiente para alterar su presión interna  $p_i$ . Esta



(a) Curva rectangular sobre una burbuja.



(b) Equilibrio de fuerzas actuando sobre la burbuja.

presión debe estar balanceada por la tensión superficial. Para calcular la tensión superficial, consideremos  $C$  una curva rectangular pequeña de lados  $dx$  y  $dy$  dibujada en la superficie de la gota como se muestra en 2.3(a). En el plano  $xz$ , la fuerza está dada por  $\gamma dy$  en cada lado (Fig. 2.3(b)). Dado que estas fuerzas son tangentes a la superficie, tendrán una resultante  $\gamma dy d\theta$  normal a la superficie, pero  $d\theta = dx/R_1$  donde  $R_1$  es el radio de curvatura de la superficie en el plano  $xz$ . De manera similar, para los otros lados del rectángulo, las fuerza es  $\gamma dx dy/R_2$ . La fuerza total resultante es normal a la superficie y vale  $\gamma dx dy/R_1 + \gamma dx dy/R_2$ . En el caso de las gotas,  $R_1 = R_2 = R_0$  por lo que

$$p_i = \frac{2\gamma}{R_0}.$$

La ecuación de equilibrio para la superficie de la gota es

$$\gamma \left( \frac{d^2 Z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dZ}{dr} \right) = \frac{2\gamma}{R_0} + \frac{V_s^2 \epsilon_0}{2Z^2}.$$

Esta ecuación fue deducida y estudiada por primera vez por G.I. Taylor [25] y ha sentado las bases de cualquier estudio de sistemas similares, como el que se mostrará a continuación.

### 2.3. Ecuación de un microcapacitor

Para modelar el comportamiento de un microcapacitor, consideremos el sistema mostrado en la figura 2.3. El potencial electrostático satisface

$$\Delta\Phi = 0, \quad (2.11)$$

$$\Phi(x', y', -l) = 0 \quad x \in [-L/2, L/2] \quad y \in [-w/2, w/2], \quad (2.12)$$

$$\Phi(x', y', U') = V_s \quad x \in [-L/2, L/2] \quad y \in [-w/2, w/2], \quad (2.13)$$

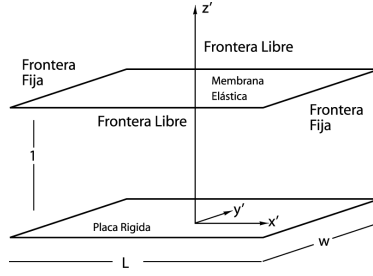


Figura 2.3: Geometría del sistema.

donde  $U'(x', y', t')$  es el desplazamiento desde  $z' = 0$  de la membrana y  $V_s$  es el voltaje aplicado.

Si combinamos (2.2) con (1.15), la dinámica del sistema va a estar descrita por

$$\rho \frac{\partial^2 U'}{\partial t'^2} + a \frac{\partial U'}{\partial t'} - T \Delta U' = -\frac{\epsilon_0}{2} \|\nabla \Phi\|^2. \quad (2.14)$$

Aquí  $\rho$  es la densidad superficial de masa,  $a$  es el coeficiente de viscosidad del medio,  $T$  es la tensión en la membrana y  $\epsilon_0$  es la constante de permitividad eléctrica en el vacío. Asumimos que la membrana está fija en la frontera, esto es

$$U' = 0 \quad \text{en la frontera.} \quad (2.15)$$

Para simplificar el problema, podemos introducir variables adimensionales y reescribir las ecuaciones (2.11)-(2.15) de manera adimensional. Definimos

$$\psi = \Phi/V_s, \quad U = U'/l, \quad x = x'/L, \quad y = y'/w, \quad z = z'/l \quad (2.16)$$

y sustituímos en las ecuaciones (2.11)-(2.15). De esta manera

$$\delta^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + g^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.17)$$

$$\psi(x, y, -1) = 0, \quad x \in [-1/2, 1/2], \quad y \in [-1/2, 1/2], \quad (2.18)$$

$$\psi(x, y, U) = 1, \quad x \in [-1/2, 1/2], \quad y \in [-1/2, 1/2], \quad (2.19)$$

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t'^2} + a \frac{\partial U}{\partial t'} - \frac{T}{L^2} \Delta U = -\frac{\epsilon_0 V_s^2}{2l^3} \left[ \delta^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \delta^2 g^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (2.20)$$

$$U = 0 \quad \text{en la frontera.} \quad (2.21)$$

Aquí  $\delta = l/L$  es la razón entre la dimensión de la membrana y su separación de la placa y  $g = L/w$  es la razón entre las dimensiones de la membrana misma. Asumimos que  $g^2 = O(1)$ . Por último, si tomamos el cambio de variables en el tiempo  $t = (T/aL^2)t'$ , la ecuación (2.20) se vuelve



$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial t} - \Delta U = -\lambda \left[ \delta^2 \left( \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (2.22)$$

donde  $\epsilon = \sqrt{\rho T}/aL$  y  $\lambda = \epsilon_0 V_s^2 L^2 / 2Tl^3$ . Aquí,  $\epsilon$  es el factor de calidad  $Q$  del sistema, que a grandes rangos nos dice el número de oscilaciones de éste antes de ser atenuado, y  $\lambda$  caracteriza las magnitudes relativas entre las fuerzas electrostáticas y mecánicas en el problema. Físicamente,  $\lambda > 0$ .

Igual que antes, escribimos el potencial  $\psi = \psi_0 + \delta\psi_1 + O(\delta^2)$  y dado que la geometría del microcapacitor es tal que  $l \ll L$ , podemos aproximar (2.17) y (2.22) por

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.23)$$

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial t} - \Delta U = -\lambda \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2. \quad (2.24)$$

Dado que  $\psi(x, y, -1) = 0$  y  $\psi(x, y, U) = 1$ ,

$$\psi(x, y, z) = \frac{1+z}{1+U}.$$

Sustituyendo en (2.24)

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial t} - \Delta U = -\frac{\lambda}{(1+U)^2}. \quad (2.25)$$

La ecuación (2.25) junto con la condición de frontera (2.21) y las condiciones iniciales apropiadas, constituyen un modelo reducido de deflexiones elásticas en un sistema electrostático-elástico como el mostrado en la figura 2.4.

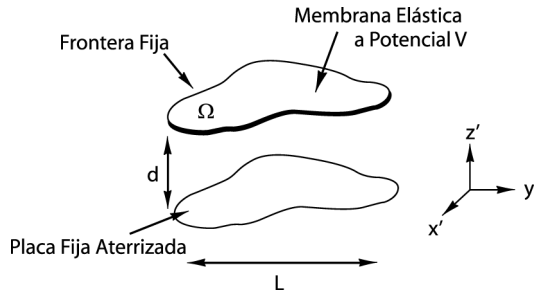


Figura 2.4: Estructura electrostática idealizada.

### 2.3.1. El límite viscoso

Si las fuerzas resultantes de la viscosidad o el forzamiento dominan sobre las fuerzas internas, se pueden realizar más simplificaciones sobre el modelo

básico. En particular, en el límite viscoso el parámetro  $\epsilon \ll 1$ . Mientras que este no es el caso para todos los sistemas, aparatos como microválvulas o microcapacitores pueden operar en este régimen. De hecho, el diseño exitoso de dichos sistemas requiere una  $Q$  baja. Los microcapacitores cuyos extremos oscilan indefinidamente después de la aplicación de un voltaje dado son de poca utilidad. Haciendo tender  $\epsilon$  a cero en la ecuación (2.25) obtenemos

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \Delta U = -\frac{\lambda}{(1+U)^2}. \quad (2.26)$$

La ecuación (2.26) es parabólica de tipo reacción-difusión. Ecuaciones similares se encuentran en la teoría de combustión, calentamiento de microondas, dinámica de poblaciones y películas delgadas. En el resto de esta tesis restringiremos nuestra atención al estudio de la ecuación (2.26) y analizaremos el comportamiento de aparatos que son modelados por esta ecuación. Asumimos que las condiciones de frontera están dadas por (2.21) e imponemos la condición inicial

$$U(x, y, 0) = 0. \quad (2.27)$$

Esta condición inicial asume que el sistema comienza en reposo y que el voltaje se aplica al tiempo  $t = 0$ .

## 2.4. Extensión del modelo básico

En las secciones anteriores se asumió sin ningún cuestionamiento que el voltaje  $V_s$  sobre la membrana se mantiene constante aún cuando ésta se deforma. Una extensión natural del modelo sería eliminar esta suposición. Consideremos el potencial electrostático como en (2.11); sabemos que el voltaje en la membrana depende de su desplazamiento, por lo que podemos cambiar la condición (2.13) por

$$\Phi(x', y', U') = V_s f(U'),$$

donde  $f(U')$  es una función adimensional que registra la dependencia del voltaje con el desplazamiento. Al tomar el cambio de variables (2.16),

$$\psi(x, y, U) = f(U). \quad (2.28)$$

Cuando nuestro sistema se encuentra en un circuito, la caída de potencial  $V$  a través del sistema depende de los demás elementos del circuito y su configuración. Consideremos el circuito mostrado en la figura 2.5. Las leyes de Kirchoff nos dicen que la carga que pasa por los capacitores debe ser la misma. Usando la ecuación (1.16),

$$V_s = V + V_f = \frac{q}{C} + \frac{q}{C_f} = q \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_f} \right) = \frac{q}{C} \frac{C + C_f}{C_f}.$$

Siendo  $V = q/C$ ,

$$V = \frac{V_s}{1 + C/C_f}. \quad (2.29)$$

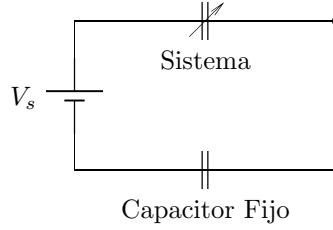


Figura 2.5: Esquema de un circuito de control básico.

Este es el esquema de control propuesto por Seeger [23]. La única componente adicional es el capacitor fijo. Esto significa que el circuito actúa como un divisor de voltaje y ejerce una influencia estabilizadora en el sistema. La capacitancia del sistema se incrementa conforme la membrana se aproxima a la placa, haciendo que  $V$  disminuya, reduciendo la fuerza electrostática y estabilizando el sistema. Podemos usar la ecuación (2.29) para definir  $f$  para este circuito como

$$f(U) = \frac{1}{1 + C/C_f}.$$

Para calcular la capacitancia del sistema, necesitamos conocer el potencial para el caso  $f(U) = 1$ , así usando la ecuación (1.16) y que la densidad de carga  $\sigma = \epsilon_0 \partial \Psi / \partial n$ ,

$$C = \iint_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial z'}(x', y', 0) dx' dy'.$$

Tomando el cambio de variables (2.16),

$$C = \frac{\epsilon_0 w L}{l} \iint_{\Omega^*} \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, y, 0) dx dy$$

donde  $\Omega^*$  es el dominio transformado. Siendo que  $l \ll L$ ,  $\epsilon_0 w L / l = C_0$  es la capacitancia del sistema sin deformar. Si resolvemos (2.23) con la condición (2.28)

$$\psi(x, y, z) = \frac{f(U)(1+z)}{(1+U)^2}.$$

Por consiguiente,

$$f(U) = \frac{1}{1 + \chi \iint_{\Omega^*} \frac{d\xi d\eta}{1+U(\xi, \eta)}},$$

donde  $\chi = C_0 / C_f$ . De esta manera, la ecuación

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial t} - \Delta U = - \frac{\lambda}{(1+U)^2 (1 + \chi \iint_{\Omega^*} \frac{d\xi d\eta}{1+U(\xi, \eta)})^2}$$

representa una extensión del modelo.

Otra corrección es considerar que la membrana elástica tiene propiedades dieléctricas. Las variaciones espaciales en éstas propiedades introducen el término  $g(x, y)$  a esta ecuación, que modifica localmente la fuerza de Coulomb. La función  $g(x, y) = \frac{\epsilon_0}{\epsilon(x, y)}$  se conoce como perfil de permitividad, está definida en términos de la permitividad dieléctrica  $\epsilon(x, y)$  de la membrana y satisface  $0 < g(x, y) \leq 1$ . Procediendo de manera similar, se encuentra que la ecuación que describe el comportamiento de la membrana es

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial t} - \Delta U = - \frac{\lambda g(x, y)}{(1 + U)^2 (1 + \chi \iint_{\Omega^*} \frac{d\xi d\eta}{1 + U(\xi, \eta)})^2}.$$

Detalles de la deducción de este modelo pueden ser encontrados en [13].

Existen varios trabajos que contemplan estas modificaciones. En [21], podemos encontrar un estudio detallado de la ecuación con control capacitivo, mientras que en [13] y [18] se estudia el problema de la membrana con un perfil de permitividad no constante.

En esta tesis, nos concentraremos en estudiar el modelo básico representado por las ecuaciones (2.26) con condición de frontera (2.21) y condición inicial (2.27).

## Capítulo 3

# El Problema Estacionario

En este capítulo se analizará la existencia de soluciones clásicas para la ecuación (2.26) cuando ésta no depende del tiempo. En este caso estudiaremos el problema estacionario

$$\begin{aligned}\Delta u - \frac{\lambda}{(1+u)^2} &= 0 && \text{en } \Omega, \\ u &= 0 && \text{en } \partial\Omega,\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $u = u(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . Posteriormente, se analizarán a detalle los casos en que  $\Omega$  es una banda elástica y  $\Omega$  es un disco.

Para poder determinar la existencia de soluciones de la ecuación (3.1), nos basaremos en la construcción de sucesiones monótonas.

### 3.1. Principio del máximo para ecuaciones elípticas

Supongamos que la función  $u$  tiene un máximo local en un punto interior de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Sabemos por el cálculo multivariable que en ese punto

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0,$$

y que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \leq 0.$$

Así, en un máximo local la desigualdad  $\Delta u \leq 0$  se debe mantener. Este sencillo razonamiento nos permite concluir que si una función  $u$  satisface  $\Delta u > 0$  en cada punto del dominio  $\Omega$ , entonces  $u$  no puede alcanzar un máximo en un punto interior de  $\Omega$ . Más aún, supongamos que  $b_1(x_1, x_2)$  y  $b_2(x_1, x_2)$  son funciones acotadas definidas en  $\Omega$ , si  $u$  satisface la desigualdad estricta

$$\Delta u + b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} > 0$$

en  $\Omega$ , entonces  $u$  no puede alcanzar su máximo en cualquier punto interior.

Usando argumentos similares, podemos establecer diferentes principios del máximo para operadores elípticos. En nuestro estudio nos restringiremos al operador  $Lu := -\Delta u + cu$  y  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , pero los resultados que se muestran a continuación son válidos para cualquier operador elíptico en  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.1.1. Principio débil del máximo

Supondremos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es abierto, acotado y conexo para el resto de la sección.

**Teorema 3.1** (Principio débil del máximo). *Sea  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  y  $c \geq 0$  en  $\Omega$ .*

(i) *Si  $Lu \leq 0$ , entonces*

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+. \quad (3.2)$$

(ii) *Del mismo modo, si  $Lu \geq 0$  en  $\Omega$  entonces*

$$\min_{\bar{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-, \quad (3.3)$$

donde  $u^+(x) := \max(u, 0)$  y  $u^-(x) := -\min(u, 0)$ .

En particular, si  $Lu = 0$  en  $\Omega$ , entonces

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

**Nota.** Una función que satisfaga la hipótesis de (i) con  $u \geq 0$  en la frontera es llamada solución inferior o subsolución de  $Lu$ . Análogamente, si una función satisface la hipótesis de (ii) con  $u \leq 0$  en la frontera se llama solución superior o supersolución de  $Lu$ .  $\square$

*Prueba.* Sea  $V := \{(x, y) \in \Omega \mid u(x, y) > 0\}$ . Supongamos que  $V \neq \emptyset$ , entonces

$$Ku := Lu - cu \leq -cu \leq 0 \quad \text{en } V.$$

Supongamos ahora que tenemos la desigualdad estricta  $Ku < 0$  en  $V$ , y que existe un punto  $(x_0, y_0) \in V$  con

$$u(x_0, y_0) = \max_V u.$$

En este punto se cumple que

$$\nabla u(x_0, y_0) = 0 \quad \text{y} \quad D^2u(x_0, y_0) \leq 0,$$

donde  $D^2u \leq 0$  significa que la matriz Hessiana es negativa definida en  $(x_0, y_0)$ .

Así, en el punto  $(x_0, y_0)$

$$u_{xx} + u_{yy} \leq 0.$$

Por lo que en  $(x_0, y_0)$

$$Ku = -\Delta u \geq 0.$$

que es una contradicción.

En el caso general en que  $Ku \leq 0$ , tomemos

$$u^\epsilon := u(x, y) + \epsilon e^{\lambda x} \quad (x, y) \in V,$$

donde  $\lambda > 0$  y  $\epsilon > 0$ . Así,

$$\begin{aligned} Ku^\epsilon &= Ku + \epsilon K(e^{\lambda x}) \\ &\leq -\epsilon \lambda^2 e^{\lambda x} < 0. \end{aligned}$$

Usando esta desigualdad, podemos concluir que  $\max_{\bar{V}} u^\epsilon = \max_{\partial V} u^\epsilon$ . Si  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\max_{\bar{V}} u = \max_{\partial V} u = \max_{\partial \Omega} u^+.$$

Queda entonces probado el enunciado (i) en el caso en que  $V \neq \emptyset$ . De otra manera,  $u \leq 0$  en todo  $\Omega$  y (3.2) se cumple.

El enunciado (ii) se prueba de manera similar, al aplicar el enunciado (i) a  $-u$ , ya que  $(-u)^+ = u^-$ .  $\square$

### 3.1.2. Principio fuerte del máximo

A continuación se demostrará que una subsolución  $u$  no puede alcanzar su máximo en un punto interior de una región conexa, a menos que sea constante. A esta afirmación se le conoce como el principio fuerte del máximo.

**Lema 3.1** (Lema de Hopf). *Sea  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  y  $c \equiv 0$  en  $\Omega$ . Supongamos además que  $Lu \leq 0$  en  $\Omega$  y que existe un punto  $(x^0, y^0) \in \partial \Omega$  tal que*

$$u(x^0, y^0) > u(x, y) \quad \text{para todo } (x, y) \in \Omega.$$

*Finalmente, supongamos que  $\Omega$  satisface la condición de la bola interior en  $(x^0, y^0)$ ; esto es, que existe una bola  $B \subset \Omega$  con  $(x^0, y^0) \in \partial B$ .*

(i) *Entonces*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0, y^0) > 0,$$

*donde  $\nu$  es la normal unitaria exterior a  $B$  en  $(x^0, y^0)$ .*

(ii) *Si  $c \geq 0$  en  $\Omega$ , la misma conclusión se mantiene siempre que  $u(x^0, y^0) \geq 0$ .*

*Prueba.* Supongamos que  $c \geq 0$  y que  $B = B^\circ(0, r)$  para algún  $r > 0$ . Definimos

$$v(x, y) := e^{-\lambda(x^2+y^2)} - e^{-\lambda r^2}, \quad (x, y) \in B(0, r)$$

para  $\lambda > 0$ . En este caso,

$$\begin{aligned} Lv = -\Delta v + cv &= e^{-\lambda(x^2+y^2)} [-4\lambda^2(x^2+y^2) + 4\lambda] \\ &+ c(e^{-\lambda(x^2+y^2)} - e^{-\lambda r^2}) \\ &\leq e^{-\lambda(x^2+y^2)} [-4\lambda^2(x^2+y^2) + 4\lambda + c]. \end{aligned}$$

Tomemos ahora la región anular dada por  $R := B(0, r) \setminus B(0, r/2)$ . En  $R$

$$Lv \leq e^{-\lambda(x^2+y^2)} [-4\lambda^2 r^2 + 4\lambda + c] \leq 0$$

si  $\lambda \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \|c\|_\infty r^2}$ .

Dado que  $u(x^0, y^0) > u(x, y)$  para toda  $(x, y) \in \Omega$ , existe una constante  $\epsilon$  lo suficientemente pequeña para que

$$u(x^0, y^0) \geq u(x, y) + \epsilon v(x, y) \quad (x, y) \in \partial B(0, r/2).$$

De hecho, esta desigualdad es válida en  $\bar{B}(0, r)$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeña, pues  $v$  es acotada en  $\bar{B}(0, r)$ .

Dado que  $Lv \leq 0$  tenemos que

$$L(u + \epsilon v - u(x^0, y^0)) \leq -cu(x^0, y^0) \leq 0 \quad \text{en } R,$$

además,

$$u + \epsilon v - u(x^0, y^0) \leq 0 \quad \text{en } \partial R.$$

En vista del principio débil del máximo,  $u + \epsilon v - u(x^0, y^0) \leq 0$  en  $R$ . Pero  $u(x^0, y^0) + \epsilon v(x^0, y^0) - u(x^0, y^0) = 0$ , así

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0, y^0) + \epsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x^0, y^0) \geq 0.$$

Consecuentemente,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0, y^0) \geq -\epsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x^0, y^0) = -\frac{\epsilon}{r} \nabla v(x^0, y^0) \cdot (x^0, y^0) = 2\lambda \epsilon r e^{-\lambda r^2} > 0,$$

lo que prueba el lema. □

**Teorema 3.2** (Principio fuerte del máximo). *Sea  $\Omega$  conexo,  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  y  $c \geq 0$  en  $\Omega$ .*

- (i) *Si  $Lu \leq 0$  en  $\Omega$  y  $u$  alcanza un máximo no negativo en un punto interior de  $\Omega$ , entonces  $u$  es constante en  $\Omega$ .*
- (ii) *Análogamente, si  $Lu \geq 0$  en  $\Omega$  y  $u$  alcanza un mínimo no positivo en un punto interior de  $\Omega$ , entonces  $u$  es una constante en  $\Omega$ .*



*Prueba.* (i) Sea  $M := \max_{\bar{\Omega}} u \geq 0$  y  $C := \{(x, y) \in \Omega \mid u(x, y) = M\}$ . Si  $u \not\equiv M$ , sea  $V := \{(x, y) \in \Omega \mid u(x, y) < M\}$ . Sea  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon((x^0, y^0)) \subset \Omega$ , donde  $(x^0, y^0) \in C \cap \Omega$ , que por hipótesis es no vacía. Entonces cualquier  $(\xi, \eta) \in B_\epsilon((x^0, y^0))$  cumple que  $\text{dist}((\xi, \eta), C) < \text{dist}((\xi, \eta), \partial\Omega)$ . Sea  $B$  la bola más grande con centro en  $(\xi, \eta)$  y cuyo interior esté contenido en  $V$ . Existe un punto  $(x^0, y^0) \in C$  tal que  $(x^0, y^0) \in \partial B$ . El conjunto  $V$  satisface la propiedad de la bola interior en  $(x^0, y^0)$ , por lo que el Lema de Hopf (ii) implica que  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0, y^0) > 0$ . Pero esto es una contradicción ya que  $u$  alcanza su máximo en  $(x^0, y^0) \in \Omega$ , donde  $\nabla u(x^0, y^0) = 0$ .

La prueba de (ii) se sigue al aplicar (i) a  $-u$ .  $\square$

El principio fuerte del máximo nos permite derivar el siguiente lema, que juega un papel fundamental en el estudio de los problemas elípticos no lineales.

**Lema 3.2.** *Supongamos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es abierto,  $v \in C^2(\bar{\Omega})$ , y  $c \in L^\infty(\Omega)$ . Además,*

$$\begin{aligned} -\Delta v + cv &\geq 0 && \text{en } \Omega \\ v &\geq 0 && \text{en } \Omega \end{aligned}$$

y  $v \not\equiv 0$ .

(i) *Si  $(x^0, y^0) \in \partial\Omega$ ,  $v(x^0, y^0) = 0$ , y  $\Omega$  satisface la condición de la bola interior en  $(x^0, y^0)$ , entonces*

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x^0, y^0) < 0.$$

(ii) *Más aún,  $v > 0$  en  $\Omega$ .*

*Prueba.* Sea  $w := e^{-\lambda x} v$ , donde  $\lambda > 0$ . Entonces  $v = e^{\lambda x} w$  y así

$$cv \geq \Delta v = \lambda^2 v + 2\lambda e^{\lambda x} w_x + e^{\lambda x} \Delta w.$$

Por lo tanto,

$$-\Delta w - 2\lambda w_x \geq (\lambda^2 - c)w \geq 0 \quad \text{en } \Omega,$$

si  $\lambda \geq \|c\|_{L^\infty}^{1/2}$ .

Consecuentemente,  $w$  satisface la desigualdad (3.3) y el principio fuerte del máximo implica que  $w > 0$  en  $\Omega$ . De hecho, dado que  $v \geq 0$  en  $\Omega$ , se tiene que  $w \geq 0$  en  $\Omega$  y por lo tanto en  $\partial\Omega$ .

Usando el Lema de Hopf,  $\frac{\partial w}{\partial \nu}(x^0, y^0) < 0$ . Pero

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x^0, y^0) = \nabla w(x^0, y^0) \cdot \nu(x^0, y^0) = e^{-\lambda x^0} \frac{\partial v}{\partial \nu}(x^0, y^0),$$

ya que  $v(x^0, y^0) = 0$ . El enunciado (i) queda demostrado y el enunciado (ii) es consecuencia de que  $w > 0$  en  $\Omega$ .  $\square$

### 3.2. El método de soluciones superiores e inferiores

Consideremos la ecuación diferencial parcial elíptica

$$\begin{aligned}\Delta u - \lambda f(u) &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega,\end{aligned}\tag{3.4}$$

donde  $f(u) = \frac{1}{(1+u)^2}$ . Si además suponemos que  $-a < u(x)$  en  $\bar{\Omega}$  con  $a < 1$ ,  $f(u)$  satisface la condición de Lipshitz

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leq c|u_1 - u_2| \quad \text{para } -a < \hat{u} \leq u_2 \leq u_1 \leq \tilde{u} \tag{3.5}$$

con  $c = 2/(1-a)^4$ .

Para desarrollar un esquema de iteración monótona para el problema (3.4) es necesario escoger una iteración inicial adecuada. Esta función puede ser una solución superior o una solución inferior definida de la siguiente manera:

**Definición 3.1.** Una función  $\tilde{u} \in C^2(\bar{\Omega})$  es llamada solución superior de (3.4) si

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{u} - \lambda f(\tilde{u}) &\leq 0 \quad \text{en } \Omega \\ \tilde{u} &\geq 0 \quad \text{en } \partial\Omega.\end{aligned}\tag{3.6}$$

De manera similar,  $\hat{u} \in C^2(\bar{\Omega})$  es llamada solución inferior si satisface las desigualdades inversas a (3.6).

En esta definición, asumimos que la derivada normal exterior  $\partial\tilde{u}/\partial\nu$  existe en cada punto  $x \in \partial\Omega$ . Es claro que cada solución de (3.4) es tanto solución superior como inferior del problema. Al par de soluciones superiores e inferiores se le dice ordenado si  $\tilde{u} \geq \hat{u}$  en  $\bar{\Omega}$ . Para un par de soluciones superior e inferior  $\tilde{u}$  y  $\hat{u}$  denotamos  $\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$  al sector de todas las funciones  $u \in C(\bar{\Omega})$  tales que  $\hat{u} \leq u \leq \tilde{u}$  en  $\bar{\Omega}$ . De esta manera, para cada  $u^{(0)} \in C^2(\bar{\Omega})$  dada, podemos construir una sucesión  $\{u^{(k)}\}$  generada por el proceso de iteración

$$\begin{aligned}\Delta u^{(k)} &= \lambda f(u^{(k-1)}) \quad \text{en } \Omega \\ u^{(k)} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Las sucesiones correspondientes a las iteraciones iniciales  $u^{(0)} = \tilde{u}$  y  $u^{(0)} = \hat{u}$  son de especial interés. Denotaremos a estas sucesiones por  $\{\bar{u}^{(k)}\}$  y  $\{\underline{u}^{(k)}\}$  respectivamente y nos referiremos a ellas como sucesiones superior e inferior.

Construyamos primero una sucesión superior. Para esto, notemos que  $\tilde{u} \equiv 0$  en  $\bar{\Omega}$  es una solución superior de (3.4). En este caso,

$$\begin{aligned}\Delta \bar{u}^{(1)} &= \lambda \quad \text{en } \Omega \\ \bar{u}^{(1)} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Siendo que ésta es una ecuación elíptica lineal, sabemos que  $\bar{u}^{(1)}$  existe, es única y  $\bar{u}^{(1)} \in C^2(\bar{\Omega})$ . De esta manera,  $f(\bar{u}^{(1)}) \in C^2(\bar{\Omega})$  siempre que  $\bar{u}^{(1)} > -1$ . Reemplazando  $\bar{u}^{(1)}$  por  $\bar{u}^{(2)}$ , el mismo argumento muestra que  $\bar{u}^{(2)}$  está bien definida y es  $C^2(\bar{\Omega})$ . Si continuamos este argumento, podemos concluir que la sucesión superior está bien definida.

Si encontramos una solución inferior, el razonamiento análogo nos permitirá establecer una sucesión inferior que esté bien definida. Para ello, sea  $\hat{u}$  solución de  $\Delta \hat{u} = 1$  en  $\Omega$  y  $\hat{u} = 0$  en  $\partial\Omega$ . Por el principio del máximo,  $\hat{u} < 0$  en  $\Omega$ .

Sea  $m := \inf \{\hat{u}(x) | x \in \Omega\}$  y  $\alpha := -\frac{1}{2m}$ . Si  $\lambda \leq \alpha/4$ , entonces

$$\Delta(\alpha \hat{u}) - \frac{\lambda}{(1 + \alpha \hat{u})^2} \geq \alpha - 4\lambda \geq 0, \quad (3.9)$$

por lo que  $\hat{u}$  es una solución inferior si  $\lambda \leq \alpha/4$ . Utilizando el mismo esquema, podemos construir la sucesión inferior  $\{\underline{u}^{(k)}\}$ .

**Lema 3.3.** *Las sucesiones superiores e inferiores cumplen*

$$\hat{u} \leq \underline{u}^{(k)} \leq \underline{u}^{(k+1)} \leq \bar{u}^{(k+1)} \leq \bar{u}^{(k)} \leq \tilde{u} \quad \text{en } \bar{\Omega} \quad (3.10)$$

para cada  $k$ . Mas aún, para cada  $k$ ,  $\bar{u}^{(k)}$  y  $\underline{u}^{(k)}$  son soluciones superior e inferior ordenadas.

*Prueba.* Sea  $w = \bar{u}^{(0)} - \bar{u}^{(1)} = \tilde{u} - \bar{u}^{(1)}$ . Por (3.6) y (3.7)

$$\Delta w = \Delta \tilde{u} - \lambda f(\tilde{u}) \leq 0$$

$$w = \tilde{u} \geq 0 \quad \text{en } \partial\Omega.$$

De acuerdo con el Lema 3.2,  $w \geq 0$ , lo que muestra que  $\bar{u}^{(1)} \leq \bar{u}^{(0)}$ . Un argumento similar usando la solución inferior prueba que  $\underline{u}^{(0)} \leq \underline{u}^{(1)}$ . Sea  $w^{(1)} = \bar{u}^{(1)} - \underline{u}^{(1)}$ . Por (3.7) y la monotonía de  $f(u)$ ,

$$\Delta w^{(1)} = \lambda f(\bar{u}^{(1)}) - \lambda f(\underline{u}^{(1)}) \leq 0$$

y dado que  $w^{(1)} = 0$  en  $\partial\Omega$ , el Lema 3.2 implica que  $w^{(1)} \geq 0$ . De esta manera hemos mostrado que  $\underline{u}^{(0)} \leq \underline{u}^{(1)} \leq \bar{u}^{(1)} \leq \bar{u}^{(0)}$  en  $\bar{\Omega}$ . Supongamos por inducción que

$$\underline{u}^{(k-1)} \leq \underline{u}^{(k)} \leq \bar{u}^{(k)} \leq \bar{u}^{(k-1)} \quad \text{en } \bar{\Omega}.$$

Por (3.5) y (3.7) la función  $w^{(k)} = \bar{u}^{(k)} - \bar{u}^{(k-1)}$  satisface la relación

$$\Delta w^{(k)} = \lambda f(\bar{u}^{(k-1)}) - \lambda f(\bar{u}^{(k)}) \leq 0$$

y la condición de frontera  $w^{(k)} = 0$ . De nuevo el Lema 3.2 implica que  $w^{(k)} \geq 0$ , lo que nos dice que  $\bar{u}^{(k+1)} \leq \bar{u}^{(k)}$ . Un argumento similar nos lleva a la relación  $\underline{u}^{(k)} \leq \underline{u}^{(k+1)}$  y  $\underline{u}^{(k+1)} \leq \bar{u}^{(k+1)}$ . La propiedad (3.10) sigue del principio de inducción.

Para mostrar que  $\bar{u}^{(k)}$  y  $\underline{u}^{(k)}$  son soluciones superior e inferior ordenadas observamos del proceso de iteración (3.7) que

$$\Delta \bar{u}^{(k)} = \lambda f(\bar{u}^{(k-1)}) = \lambda \left[ f(\bar{u}^{(k-1)}) - f(\bar{u}^{(k)}) \right] + \lambda f(\bar{u}^{(k)}).$$

Siendo que  $\bar{u}^{(k)} \leq \bar{u}^{(k-1)}$  la monotonicidad de  $f(u)$  implica que

$$\Delta \bar{u}^{(k)} - f(\bar{u}^{(k)}) \leq 0$$

con  $\bar{u}^{(k)} = 0$  en la frontera, por lo que  $\bar{u}^{(k)}$  es una solución superior. Un argumento similar muestra que  $\underline{u}^{(k)}$  es una solución inferior. Así queda probado que  $\bar{u}^{(k)}$  y  $\underline{u}^{(k)}$  son soluciones superior e inferior ordenadas.  $\square$

**Nota.** Este lema sigue siendo válido aún cuando  $f(u)$  no cumple con la propiedad de monotonicidad, siempre y cuando sea Hölder continua. Para ello basta considerar el problema

$$\Delta u + cu = cu + \lambda f(u) \quad \text{en } \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

con  $c$  una constante positiva adecuada.

La función  $F(u) = cu + f(u)$  tiene la monotonicidad requerida y el lema se mantiene.  $\square$

El Lema 3.3 implica que los límites

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{u}^{(k)}(x) = \bar{u}(x) \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{u}^{(k)}(x) = \underline{u}(x)$$

existen puntualmente y satisfacen la relación  $\hat{u} \leq \underline{u} \leq \bar{u}$  en  $\bar{\Omega}$ . El siguiente teorema muestra que dichos límites son soluciones de (3.4).

**Teorema 3.3.** Sean  $\tilde{u}$ ,  $\hat{u}$  soluciones ordenadas superior e inferior. Entonces  $\{\bar{u}^{(k)}\}$  converge monótonamente por arriba a una solución  $\bar{u}$  y  $\{\underline{u}^{(k)}\}$  converge monótonamente por abajo a una solución  $\underline{u}$ . Más aún,  $\hat{u} \leq \underline{u} \leq \bar{u} \leq \tilde{u}$  en  $\bar{\Omega}$  y si  $u^*$  es alguna otra solución en  $\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$  entonces  $\underline{u} \leq u^* \leq \bar{u}$ .

*Prueba.* Denotemos por  $u^{(k)}$  a cualquiera de las soluciones  $\bar{u}^{(k)}$  ó  $\underline{u}^{(k)}$ . La solución integral del problema (3.7) puede ser expresada por

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) = \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \lambda f(u^{(k-1)})(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (3.11)$$

donde  $G(\mathbf{x}; \mathbf{y})$  es la función de Green correspondiente al dominio  $\Omega$ . La continuidad y monotonicidad de  $f(u)$  implica que  $f(u^{(k)})$  converge a  $f(u)$  cuando  $u^{(k)} \rightarrow u$ . Si dejamos que  $k \rightarrow \infty$  en (3.11) y aplicamos el teorema de la convergencia dominada, el límite satisface la ecuación integral

$$u(\mathbf{x}) = \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \lambda f(u)(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Un argumento de regularidad [17], muestra que  $u$  es una solución clásica del problema (3.4). Esto prueba el primer resultado del teorema, así como  $\underline{u} \leq \bar{u}$ . Por último, si  $u^*$  es otra solución de (3.4) en  $\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$ , considerando  $(\hat{u}, u^*)$  y  $(u^*, \tilde{u})$  como dos pares de soluciones ordenadas superiores e inferiores, el Lema 3.3 muestra que  $u^* \leq \bar{u} \leq \tilde{u}$  y  $\hat{u} \leq \underline{u} \leq u^*$ , respectivamente. Esto prueba la relación  $\underline{u} \leq u^* \leq \bar{u}$  y el teorema queda probado.  $\square$

Notemos que si además  $f(u_2) \leq f(u_1)$  para  $\hat{u} \leq u_2 \leq u_1 \leq \tilde{u}$ , este teorema junto con el Lema 3.2 nos garantizaría la unicidad de la solución en  $\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$ .

**Nota.** En el caso de que  $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}\}$ , la función de Green es

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{l}(x + \frac{l}{2})(y - \frac{l}{2}) & \text{si } x < y \\ \frac{1}{l}(y + \frac{l}{2})(x - \frac{l}{2}) & \text{si } y < x \end{cases}.$$

En el caso en que  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq r\}$ , la función de Green correspondiente está dada por

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \left( \frac{\|x - y\|}{\|x - \bar{y}\|} \frac{r}{\|y\|} \right) \quad \text{con } \bar{y} = \frac{y}{\|y\|^2} r^2. \quad \square$$

La existencia de soluciones negativas para la ecuación (3.1) puede ser asegurada por el principio del máximo ya que  $\tilde{u} \equiv 0$  es una solución superior. De hecho, podemos asegurar lo siguiente:

**Teorema 3.4.** *Existe  $\lambda_0$  tal que (3.4) tiene al menos una solución  $u_s$  en  $\langle \hat{u}, 0 \rangle$  donde  $\hat{u}$  está dada por (3.9).*

*Prueba.* La existencia de  $u_s$  es consecuencia del Teorema 3.3 y la elección de  $\lambda_0$  está dada por la construcción de la solución inferior  $\hat{u}$  en (3.9). Ahora bien, dado que la primera iteración  $\bar{u}^{(1)}$  correspondiente a  $\bar{u}^{(0)} = 0$  es gobernada por la ecuación lineal (3.8), el Lema 3.2 implica que  $\bar{u}^{(1)} < 0$ . En vista de que  $u_s \leq \bar{u}^{(1)}$ ,  $u_s < 0$ , lo que concluye la prueba.  $\square$

**Corolario 3.1.** *Si  $\Omega$  es una banda de longitud  $L$ , existen soluciones estacionarias para  $\lambda \leq L^{-2}$ .*

*Prueba.* Siendo  $\hat{u}(x) = \frac{1}{2}(x^2 - Lx)$  podemos escoger  $\alpha = \frac{4}{L^2}$ .  $\square$

**Corolario 3.2.** *Si  $\Omega$  es un disco de radio  $R$ , existen soluciones estacionarias para  $\lambda \leq \frac{1}{2}R^{-2}$ .*

*Prueba.* Se sigue de que en este caso,  $\hat{u}(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 - R^2)$  y que podemos escoger  $\alpha = R^{-2}$ .  $\square$

Existe un considerable interés por conocer el comportamiento del sistema modelado por (3.4) cuando variamos el parámetro  $\lambda$ , pues éste controla las características físicas del sistema. Usando el método de soluciones superiores e inferiores, es posible mostrar que existen soluciones negativas al problema (3.4) para  $\lambda$  en un intervalo determinado de  $\mathbb{R}^+$  y que no existen soluciones negativas fuera de este intervalo. El conjunto de valores de  $\lambda$  para los que existen soluciones negativas es conocido como el espectro del problema.

Denotamos  $\lambda^*$  como la mínima cota superior del espectro y por  $u(\mathbf{x}; \lambda)$  a la solución correspondiente de (3.4). Nuestro objetivo es derivar algunos estimados para el espectro de (3.4) y algunas propiedades de monotonicidad de  $u(\mathbf{x}; \lambda)$  con respecto a  $\lambda$ . Es necesario aclarar que  $\lambda < 0$  no tiene ningún significado físico, por lo que nos limitaremos a estudiar el caso en que  $\lambda > 0$ .

**Lema 3.4.** *Cada  $\lambda$  en el espectro de (3.4) es positiva y si  $\lambda_1 > 0$  pertenece al espectro, todo el intervalo  $(0, \lambda_1]$  pertenece al espectro.*

*Prueba.* Asumamos por contradicción que  $u(\mathbf{x}; \lambda) \leq 0$  para alguna  $\lambda \leq 0$  y toda  $x \in \Omega$ . Dado que  $f(u) > 0$ ,  $\lambda f(u) \leq 0$  y por lo tanto  $\Delta u \leq 0$  en  $\Omega$  y  $u = 0$  en  $\partial\Omega$ . Por el Teorema 3.1  $u > 0$  y esto es una contradicción. Ahora, si  $\lambda_1$  está en el espectro y  $u \equiv u(\mathbf{x}; \lambda_1)$  es la solución correspondiente de (3.4), entonces para cada  $\lambda \in (0, \lambda_1]$

$$\Delta u_1 = \frac{\lambda_1}{(1 + u_1)^2} \geq \frac{\lambda}{(1 + u_1)^2} \quad \text{en } \Omega.$$

Dado que  $u_1 = 0$  en  $\partial\Omega$ , esta desigualdad muestra que  $u_1$  es una solución superior de (3.4) para  $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ . Más aún, el Teorema 3.4 garantiza la existencia de una solución negativa  $u(x; \lambda)$  tal que  $u(x; \lambda) \leq u(x; \lambda_1)$ . Esto prueba que el intervalo completo  $(0, \lambda_1]$  está contenido en el espectro.  $\square$

**Teorema 3.5.** *Existe  $\lambda_*$  tal que hay al menos una solución estacionaria para  $\lambda < \lambda_*$  y ninguna para  $\lambda > \lambda_*$ .*

*Prueba.* La primera parte del teorema se debe al Lema 3.4. Necesitamos probar que  $\lambda_*$  es finito. Para ello, sea  $\mu_0$  el primer valor del Laplaciano con condiciones de Dirichlet y sea  $u_0$  una solución positiva correspondiente a  $\mu_0$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\Omega} u_0 \left[ \Delta u - \frac{\lambda}{(1 + u)^2} \right] dx = \iint_{\Omega} \Delta u_0 \left[ u - \frac{\lambda}{(1 + u)^2} \right] dx \\ &= \mu_0 \iint_{\Omega} \frac{u_0}{(1 + u)^2} \left[ u(1 + u)^2 - \frac{\lambda}{\mu_0} \right] dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Si  $\lambda > -\frac{4}{27}\mu_0$ , entonces el lado derecho de la ecuación es negativo, lo que muestra que no hay soluciones estacionarias para tales valores de  $\lambda$   $\square$

Hemos probado en esta sección que el problema (3.1) tiene al menos una solución. Para ello hemos construido la solución superior  $\tilde{u}$  y la inferior  $\hat{u}$ . Hemos probado que dichas soluciones son decrecientes con respecto al parámetro  $\lambda$  y que si encontramos al menos una  $\lambda_1$  para la cual (3.1) tiene solución, entonces (3.1) tiene solución para toda  $\lambda \in (0, \lambda_1]$ .

### 3.3. La banda elástica

A continuación se estudiará el caso en que  $\Omega$  es una banda elástica. Para esto, supondremos que la banda sólo se encuentra sujeta a lo largo del eje  $y$  y que su desplazamiento depende únicamente de la posición en el eje  $x$ , esto es  $u = u(x)$ . En este caso, las ecuaciones (3.1) se escriben como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{(1+u)^2} &= 0, & \lambda > 0, \\ u(\pm \frac{1}{2}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

De manera inmediata se ve que las ecuaciones (3.13) son invariantes bajo la transformación  $x \rightarrow -x$  por lo que la solución es par, es decir  $u(x) = u(-x)$ . Siendo que la segunda derivada de  $u$  es positiva, la solución es cóncava hacia arriba o más claramente, convexa. Combinando estos dos resultados podemos decir que  $u(0) \leq u(x) \leq u(1/2)$  y establecer el siguiente teorema:

**Teorema 3.6.** *Cualquier solución suave  $u \in C^2[-1/2, 1/2]$  de las ecuaciones (3.13) satisface*

- (i)  $u(x) = u(-x)$
- (ii)  $u(x)$  es convexa
- (iii)  $u(0) \leq u(x) \leq 0$  para toda  $x \in [-1/2, 1/2]$ .

Con este teorema, podemos construir soluciones implícitas de la ecuación (3.13). Para ello multipliquemos la ecuación diferencial por  $u'(x)$ . Es claro que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{d}{dx} \left( \frac{\lambda}{1+u} \right) = 0.$$

Al integrar esta relación obtenemos

$$\frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{1+u} = E_0$$

donde  $E_0$  es la energía inicial del sistema.

Dado que  $u(x)$  es convexa,  $u'(x) > 0$  en  $0 < x < 1/2$ , por lo que

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{E_0 - \frac{\lambda}{1+u}}}, \quad 0 < x < \frac{1}{2}.$$

Integrando,

$$x = \frac{1}{\sqrt{2E_0}} \int^u \frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{\gamma+y}} dy,$$

donde  $\gamma = 1 - \lambda/E_0$ . Tomando el cambio de variables  $y = \frac{\gamma\eta^2-1}{1-\eta^2}$ ,

$$x = (\gamma - 1) \int^{\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{\gamma+u}}} \frac{2\eta^2}{(1-\eta^2)^2} d\eta.$$

Usando fracciones parciales e integrando

$$x = \sqrt{\frac{(1+u)(u+1-\lambda/E_0)}{2E_0}} + \frac{\lambda \tanh^{-1} \sqrt{\frac{u+1-\lambda/E_0}{1+u}}}{E_0 \sqrt{2E_0}} + C.$$

Siendo  $u(x)$  una función par,  $C = 0$ . Usando las condiciones de frontera, podemos obtener el valor de  $E_0$ . Así,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(1+u)(u+1-\lambda/E_0)}{2E_0}} + \frac{\lambda \tanh^{-1} \sqrt{\frac{u+1-\lambda/E_0}{1+u}}}{E_0 \sqrt{2E_0}} &= x, \\ \sqrt{\frac{1-\lambda/E_0}{2E_0}} + \frac{\lambda \tanh^{-1} \sqrt{1-\lambda/E_0}}{E_0 \sqrt{2E_0}} &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Por lo tanto, si existen  $E_0 \in \mathbb{R}^+$  y  $u \in C^2[-1/2, 1/2]$  tales que el sistema (3.14) tiene solución,  $u(x)$  es solución de (3.13).

Difícilmente podremos obtener información de estas ecuaciones. Sólo por métodos numéricos podremos encontrar tales  $E_0$  y  $u(x)$ . Para poder determinar la existencia de dicha solución, así como su unicidad, es necesario proceder de manera distinta.

Tomemos el cambio de variables  $\xi = \sqrt{\lambda}x$ . En este caso,

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = \frac{1}{(1+u)^2} \quad \text{en} \quad (-\sqrt{\lambda}/2, \sqrt{\lambda}/2), \quad (3.15)$$

$$u(\pm\sqrt{\lambda}/2) = 0.$$

**Teorema 3.7.** *Existe una constante  $C^*$  tal que la ecuación (3.15) tiene cero, una o dos soluciones si  $\sqrt{\lambda}/2 > C^*$ ,  $C^* = \sqrt{\lambda}/2$  ó  $\sqrt{\lambda}/2 < C^*$  respectivamente.*

*Prueba.* En el plano fase de  $u$ ,  $v = u'$ , las curvas integrales satisfacen la ecuación

$$\frac{v^2}{2} + \frac{1}{1+u} = E_0,$$

donde  $E_0$  la energía inicial.

Una curva integral que empiece en  $(\bar{u}, 0)$  con  $-1 < \bar{u} < 0$  alcanzará al eje  $v$  en el punto  $(0, \bar{v})$ . De esta manera

$$E_0 = \frac{\bar{v}^2}{2} + 1.$$



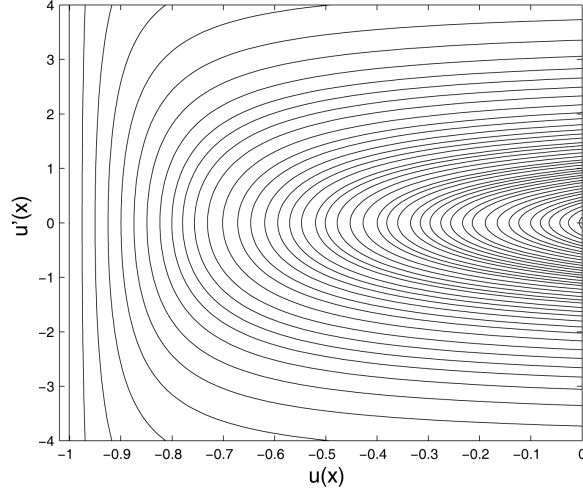


Figura 3.1: Plano fase de la ecuación (3.15).

Las ecuaciones para las curvas integrales toman la forma

$$v = \pm \sqrt{\bar{v}^2 + \frac{2u}{1+u}},$$

que están bien definidas para  $u \geq -\frac{2\bar{v}}{2+\bar{v}} = \bar{u}$ . Podemos usar esta ecuación para definir el tiempo de recorrido del punto  $(\bar{u}, 0)$  al punto  $(0, \bar{v})$  como el mapeo  $T$  dado por

$$T(\bar{v}^2) = \int_{\bar{u}}^0 \frac{du}{\sqrt{\bar{v}^2 + \frac{2u}{1+u}}}.$$

Además, si  $v \rightarrow 0$ ,  $\bar{u} \rightarrow 0$  y  $T \rightarrow 0$ , mientras que si  $v \rightarrow +\infty$ ,  $\bar{u} \rightarrow -1$  y  $T \rightarrow 0$ . Tomando el cambio de variables  $u = \beta \sin \theta$  con  $\beta = \frac{\alpha}{\alpha+2}$  y  $\alpha = \bar{v}^2$ , tenemos que

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= \frac{\sqrt{\alpha}}{2+\alpha} \int_{-\pi/2}^0 \frac{\sqrt{1+\beta \sin \theta}}{\sqrt{1+\sin \theta}} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{\sqrt{\alpha}}{2+\alpha} \int_{-\pi/2}^0 \sqrt{1+\beta \sin \theta} \sqrt{1-\sin \theta} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{\alpha}}{2+\alpha} + \frac{1}{(2+\alpha)^{3/2}} \left[ \tanh^{-1} \beta + \log \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) \right]. \end{aligned}$$

Usando esta expresión, podemos derivar con respecto a  $\alpha$  y calcular numéricamente el punto crítico de  $T$ , obteniendo así que  $\alpha^* = 1,2698263$ . De esta manera  $C^* = T(\alpha^*) = 0,5916114$  y finalmente  $\lambda^* = 1,400016$ .  $\square$

Al observar el plano fase mostrado en la figura 3.3, podemos concluir que, para valores pequeños de  $\lambda$ , una de las soluciones es de pequeña amplitud y muy suave, mientras que la otra es de amplitud muy grande y sufre un cambio abrupto (aunque continuo) en la derivada cerca de  $x = 0$ .

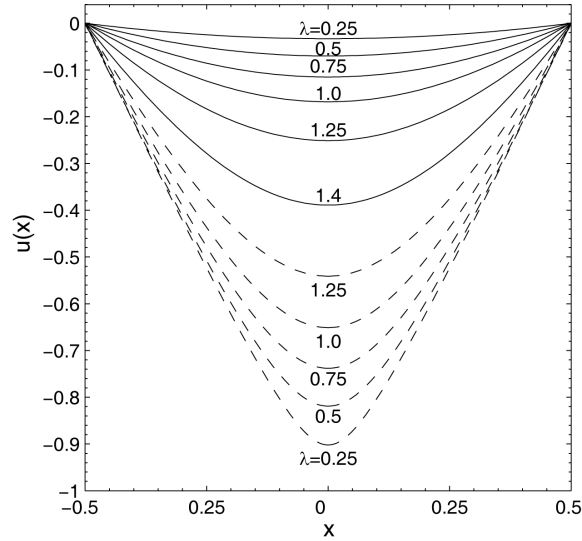


Figura 3.2: Desplazamiento de la membrana para varios valores de  $\lambda$ .

Para estudiar la bifurcación, consideremos el cambio de variables  $u(x) = -1 + \beta w(\gamma x)$ . Con la nueva variable  $w$ , podemos reemplazar el problema de valores a la frontera (3.13) por el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} &= \frac{1}{w^2}, \\ w(0) &= 1, \\ w'(0) &= 0, \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde

$$\beta = \frac{1}{w(\gamma/2)} \quad \text{y} \quad \frac{\lambda}{\gamma^2 \beta^3} = 1.$$

De esta manera, el diagrama de bifurcación de (3.13) está dado por la gráfica de  $\lambda$  contra  $\|u\|_\infty = -u(0)$ . Así,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\gamma^2}{w(\gamma/2)^3} \\ \|u\|_\infty &= 1 - \frac{1}{w(\gamma/2)}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

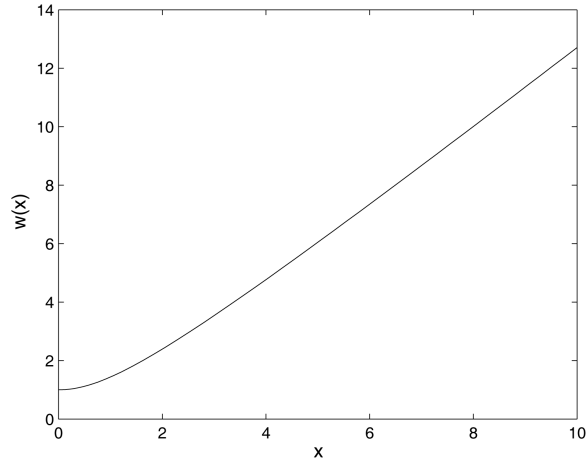


Figura 3.3: Solución de la ecuación (3.16).

Podemos integrar (3.16) y usar el resultado para obtener el diagrama de bifurcación completo para el problema.

$$\sqrt{2}x = \sqrt{w(w-1)} + \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{w} + \sqrt{w-1}}{\sqrt{w} - \sqrt{w-1}}. \quad (3.18)$$

Observemos que si  $w \rightarrow 1$ ,  $\gamma \rightarrow 0$ . Por lo que en ese caso,  $\lambda \rightarrow 0$  y  $\|u\|_\infty \rightarrow 0$ . Cuando  $w \rightarrow \infty$  también lo hace  $\gamma$ , ya que

$$\sqrt{2}\gamma \sim \log \frac{2w}{e} + w + O(w^{-1}).$$

De este modo  $\lambda \sim \frac{2}{w} + O(\frac{1}{w^2} \log w)$ . En este caso,  $\|u\|_\infty \rightarrow 1$  y  $\lambda \rightarrow 0$ . Así, debe existir un doblez en el diagrama y la bifurcación es supercrítica. Este diagrama nos muestra de manera clara lo que había sido establecido previamente en el Teorema 3.7. Para  $\lambda < \lambda^*$  existen dos soluciones representadas por cada rama. Para  $\lambda = \lambda^*$  estas dos soluciones son la misma, mientras que para  $\lambda > \lambda^*$  no hay soluciones.

Hemos probado de manera rigurosa que este simple modelo de banda bajo un campo eléctrico contiene un doblez en su espacio de soluciones. Este doblez es el responsable de la existencia de un voltaje crítico después del cual no existe ninguna solución estacionaria.

### 3.4. El disco elástico

Cuando el dominio  $\Omega$  tiene la forma de un disco, podemos obtener un esquema completo de las soluciones. Probaremos a continuación que en este caso, todas las soluciones tienen simetría radial.

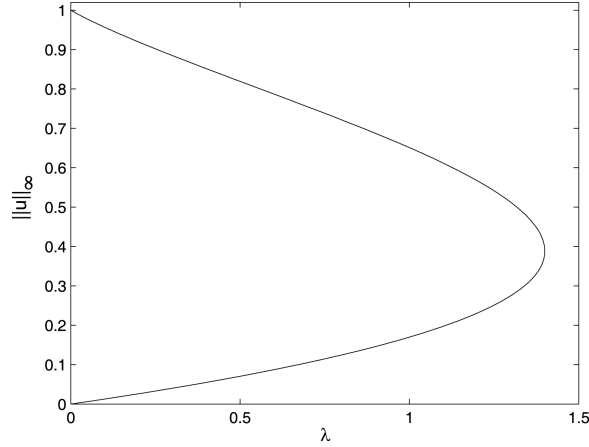


Figura 3.4: Diagrama de bifurcación cuando  $\Omega$  es una banda.

**Lema 3.5.** Sea  $\Omega$  el disco unitario y  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  solución de (3.4). Entonces para cada punto  $(x^0, y^0) \in \partial\Omega \cap \{y > 0\}$

$$u_y(x^0, y^0) > 0,$$

$u$  es estrictamente creciente como función de  $y$  cerca de  $(x^0, y^0)$ .

*Prueba.* Dado que  $f(0) = 1$

$$0 = \Delta u - \lambda f(u) = \Delta u - \lambda f(u) - \lambda f(0) + \lambda f(0) \leq \Delta u + cu,$$

donde  $c(x) := \lambda \int_0^1 f'(su(x)) ds$ . De acuerdo con el Lema 3.2,  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0, y^0) > 0$ . Siendo que  $\nabla u$  es paralelo a  $\nu$  en  $\partial\Omega$  y que  $\nu_y > 0$  entonces  $u_y(x^0, y^0) > 0$ .  $\square$

Para probar el siguiente teorema, vamos a usar la siguiente notación:

(i) Sea  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Definimos la recta

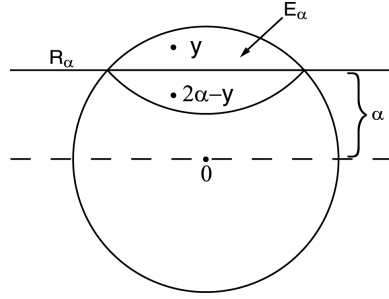
$$R_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid y = \alpha\}.$$

(ii)  $E_\alpha := \{(x, y) \in \Omega \mid \alpha < y < 1\}$ .

**Teorema 3.8** (Gidas-Ni-Nirenberg). Sea  $\Omega$  el disco unitario y  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  solución de (3.4). Entonces  $u$  es radial, esto es

$$u(x) = v(r) \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2})$$

para alguna función creciente  $v : [0, 1] \rightarrow (-\infty, 0]$ .

Figura 3.5:  $R_\alpha$  y  $E_\alpha$ 

*Prueba.* Primero observemos que si tomamos el cambio de variables  $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{s}$  donde  $\mathbf{P}$  es una matriz de rotación. En ese caso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}, \end{aligned}$$

donde  $\theta$  es el ángulo de rotación. Así,

$$\Delta_{(x,y)} u - \lambda f(u) = \Delta_{(s,t)} u - \lambda f(u) = 0.$$

La ecuación (3.4) es invariante bajo rotaciones.

Consideremos para cada  $0 \leq \alpha < 1$ . Si  $(x, y) \in E_\alpha$ . Si  $\alpha < 1$ , la desigualdad

$$u(x, y) > u(x, 2\alpha - y)$$

es válida de acuerdo con el Lema 3.5, siempre que  $2\alpha - y > 0$ . Sea

$$\alpha_0 := \inf\{0 \leq \alpha < 1 \mid u(x, y) > u(x, 2\mu - y) \forall \mu \text{ tal que } \alpha \leq \mu < 1\}.$$

Supongamos que  $\alpha_0 > 0$ . Tomemos la función  $w(x) := u(x, y) - u(x, 2\alpha_0 - y)$  con  $(x, y) \in E_{\alpha_0}$ .

$$-\Delta w = \lambda [f(u(x, y)) - f(u(x, 2\alpha_0 - y))] = -cw \quad \text{en } E_{\alpha_0},$$

para  $c(x) := \lambda \int_0^1 f'(su(x, 2\alpha_0 - y) + (1-s)u(x, y)) ds$ . Siendo que  $w \geq 0$  en  $E_{\alpha_0}$ , deducimos por el Lema 3.2  $w > 0$  en  $E_{\alpha_0}$ ,  $w_y > 0$  en  $R_{\alpha_0}$ . Así

$$u(x, 2\alpha_0 - y) < u(x, y) \quad \text{en } E_{\alpha_0},$$

y

$$u_y > 0 \quad \text{en } R_{\alpha_0} \cap \Omega.$$

Usando estas desigualdades y el Lema 3.5 concluimos que

$$u(x, 2[\alpha_0 - \varepsilon] - y) < u(x, y) \quad \text{en } E_{\alpha_0 - \varepsilon} \text{ para toda } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

si  $\varepsilon_0$  es lo suficientemente pequeña. Esta afirmación contradice nuestra elección de  $\alpha_0$  si  $\alpha_0 > 0$ .

Dado que  $\alpha_0 = 0$ ,  $u(x, -y) \leq u(x, y)$  para toda  $(x, y) \in \Omega \cap \{y > 0\}$ . Un argumento similar nos muestra que en  $\Omega \cap \{y < 0\}$ ,  $u(x, y) \leq u(x, -y)$  para toda  $(x, y) \in \Omega \cap \{y < 0\}$ . Por lo tanto,  $u$  es simétrica con respecto a la recta  $R_0$  y  $u_y = 0$  en  $R_0$ .

Este argumento se aplica después de cualquier rotación de coordenadas y el teorema queda probado.  $\square$

**Nota.** El Lema 3.5 y el Teorema de Gidas-Ni-Nirenberg son válidos para  $\mathbb{R}^n$ . Las demostraciones son análogas a las mostradas en esta sección.  $\square$

Aplicando este Teorema al problema (3.1) para  $\Omega$  el disco unitario, es equivalente a resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\lambda}{(1+u)^2} &= 0, & r \in [0, 1] \\ u(1) &= 0, \\ u'(0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Del mismo modo que en la banda, hagamos el cambio de variable  $u(r) = -1 + \alpha w(\gamma r)$ , donde

$$\alpha = \frac{1}{w(\gamma)}, \quad \frac{\lambda}{\gamma^2 \alpha^3} = 1$$

y  $w$  satisface el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} &= \frac{1}{w^2}, \\ w(0) &= 1, \\ w'(0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Tomando  $\lambda = \frac{\gamma^2}{w(\gamma)^3}$  y  $\|u\|_\infty = -u(0) = 1 - \frac{1}{w(\gamma)}$ , el diagrama de bifurcación queda parametrizado por  $\gamma$  y  $w$ . Si resolvemos numéricamente las ecuaciones (3.20), obtenemos la figura 3.7.

Podemos estudiar analíticamente las ecuaciones para  $w(r)$  y así tener una mejor comprensión de lo que pasa cuando  $r \rightarrow \infty$ . Para ello tomemos el cambio de variables  $\eta = \log(r)$  y  $w(r) = r^{2/3} v(\eta)$ . Sustituyendo en (3.20) obtenemos la ecuación autónoma

$$\frac{d^2 v}{d\eta^2} + \frac{4}{3} \frac{dv}{d\eta} + \frac{4}{9} v - \frac{1}{v^2} = 0.$$

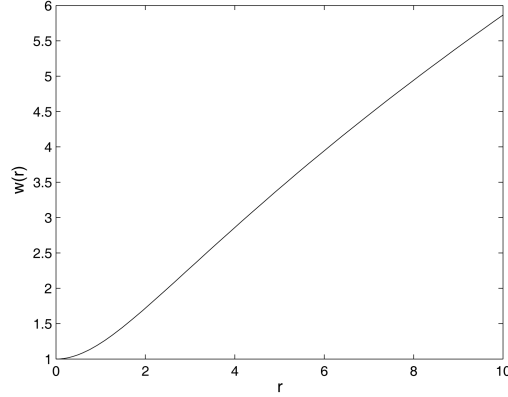


Figura 3.6: Solución de la ecuación (3.20).

Si reescribimos esta ecuación como el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\eta} &= h \\ \frac{dh}{d\eta} &= -\frac{4}{3}h - \frac{4}{9}v + \frac{1}{v^2}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

éste tiene un punto crítico en  $v = \left(\frac{9}{4}\right)^{1/3}$ ,  $h = 0$ . Al linealizar alrededor de este punto y tomar el cambio de variable  $m = v - \left(\frac{9}{4}\right)^{1/3}$ , el sistema se vuelve

$$\frac{d}{d\eta} \begin{pmatrix} m \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ h \end{pmatrix} + \dots$$

Los valores propios del sistema estan dados por

$$\mu = -\frac{2}{3} \pm \frac{2\sqrt{2}i}{3}$$

y el punto crítico es una espiral estable. Usando la función de Lyapunov

$$F(\mathbf{v}) = \frac{2}{9}v^2 + \frac{1}{v} + \frac{h^2}{2} - \left(\frac{9}{4}\right)^{1/3} + \frac{2}{9}\left(\frac{9}{4}\right)^{2/3}$$

obtenemos

$$\frac{dF}{d\eta} = \nabla V \cdot \mathbf{v} = -\frac{4}{3}h^2 \leq 0.$$

Es claro que  $F(0, (9/4)^{1/3}) = F(\mathbf{v}_0) = 0$ . Sea  $D$  un disco con centro en  $\mathbf{v}_0$ ; la función  $F$  debe alcanzar un mínimo  $M > 0$  en  $\partial D$ . Sea  $W := \{\mathbf{v} \in D^\circ \mid F < M\}$ . La región  $W$  es una vecindad de  $\mathbf{v}_0$  más pequeña que  $D$ .

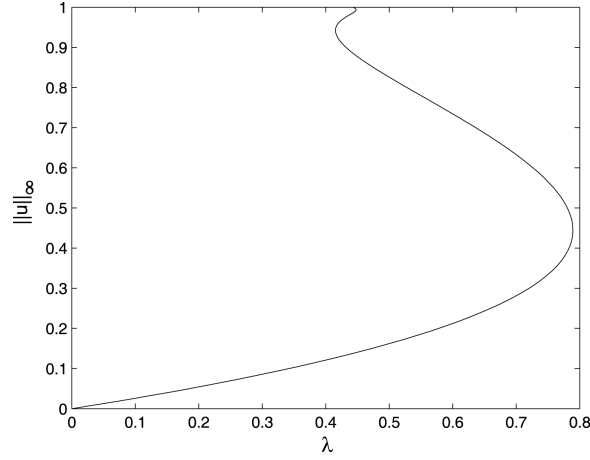


Figura 3.7: Diagrama de bifurcación cuando  $\Omega$  es un disco.

Supongamos que  $\mathbf{v}(\eta) \in W$ . Dado que  $F(\mathbf{v}(\eta))$  es una función decreciente,  $F < M$  para  $\eta > \eta_0$ , por lo que la solución  $\mathbf{v}(\eta) \in W \forall \eta > \eta_0$ .

Consideremos ahora una sucesión creciente  $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ . La compacidad de  $W$  nos garantiza que existe una subsucesión  $\{\eta_{n_j}\}$  tal que  $\lim_{n_j \rightarrow \infty} \mathbf{v}(\eta_{n_j})$  existe. Así, la sucesión  $F(\mathbf{v}_{n_j})$  tiene límite y la sucesión de las diferencias

$$F(\mathbf{v}_{n_{j+1}}) - F(\mathbf{v}_{n_j}) \rightarrow 0 \quad \text{si } n_j \rightarrow \infty.$$

Por el Teorema del Valor Medio, existe un número  $s_{n_j} \in [\eta_{n_j}, \eta_{n_{j+1}}]$  tal que

$$\frac{d}{d\eta} F(\mathbf{v}(s_{n_j})) = F(\mathbf{v}_{n_{j+1}}) - F(\mathbf{v}_{n_j}).$$

Podemos extraer una subsucesión  $s_{n_{j_i}}$  tal que que  $\mathbf{v}(s_{n_{j_i}})$  converge a algún punto  $\mathbf{v}_{\infty}$ . Si  $\mathbf{v}_{\infty} \neq \mathbf{v}_0$ ,

$$\frac{d}{d\eta} F(\mathbf{v}_{\infty}) < 0,$$

que es una contradicción. Por lo tanto  $\mathbf{v}(s_{n_{j_i}}) \rightarrow \mathbf{v}_0$  conforme  $n_{j_i} \rightarrow \infty$ .

Este resultado nos garantiza que  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} F(\mathbf{v}(\eta)) = 0$ , pues la función  $F$  es decreciente y tiene un límite. Si  $\mathbf{v}$  no converge a  $\mathbf{v}_0$ , entonces existe una sucesión  $\eta_i \rightarrow \infty$  tal que  $\mathbf{v}(\eta_i)$  si converge en  $W$  a algún punto  $\mathbf{w}_{\infty} \neq \mathbf{v}_0$ . Así,  $F(\mathbf{v}(\eta_i)) \rightarrow F(\mathbf{w}_{\infty}) \neq 0$  y esto es una contradicción. De esta manera, el punto crítico  $\mathbf{v}_0$  es un atractor global del sistema.

Siendo que  $w(r) > 1$ ,  $v > 0$ . Resolviendo el sistema linealizado

$$v(\eta) \sim \left(\frac{9}{4}\right)^{1/3} + Ae^{-2\eta/3} \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\eta + B\right) + o(e^{-2\eta/3}) \quad \text{cuando } \eta \rightarrow \infty,$$



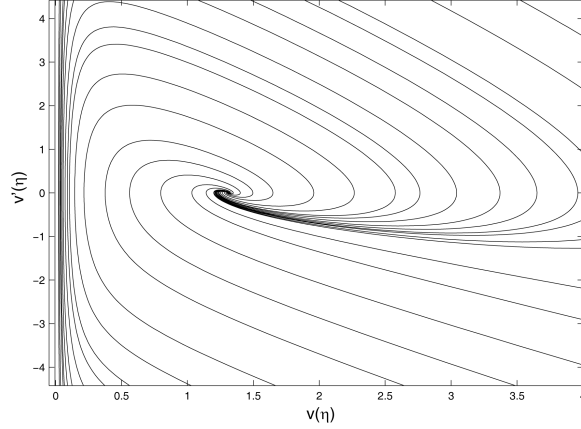


Figura 3.8: Plano fase del sistema.

lo que nos permite calcular el comportamiento asintótico de  $w(r)$

$$w(r) \sim \left(\frac{9}{4}\right)^{1/3} r^{2/3} + A \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \log(r) + B\right) + o(1) \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty.$$

Por último, podemos usar esta información para encontrar el comportamiento del diagrama de bifurcación conforme  $r \rightarrow \infty$ . Primero, siendo que

$$\|u\|_\infty = 1 - \frac{1}{w(\gamma)}, \quad \text{si } \gamma \rightarrow \infty$$

$$\|u\|_\infty \sim 1 - \left(\frac{4}{9\gamma^2}\right)^{1/3} \left[1 - \left(\frac{4}{9\gamma^2}\right)^{1/3} A \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \log(\gamma) + B\right)\right] + O\left(\frac{1}{\gamma^2}\right),$$

y por otro lado

$$\lambda = \frac{\gamma^2}{w(\gamma)^3} \sim \frac{4}{9} \left[1 - \left(\frac{12}{\gamma^2}\right)^{1/3} A \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \log(\gamma) + B\right)\right] + O\left(\frac{1}{\gamma^{4/3}}\right).$$

Observamos también, que la curva de soluciones comienza a oscilar infinitamente conforme nos acercamos al punto  $\lambda = 4/9$ .

Es claro que en el disco también existe un valor crítico  $\lambda^*$  después del cual no existe ninguna solución al problema. Este valor está dado por  $\frac{d\lambda}{d\gamma} = 0$ . Numéricamente,  $\lambda^* = 0,7892979$ . Sin embargo, cuando  $\lambda < \lambda^*$  el comportamiento es muy diferente al de la banda. Hay valores de  $\lambda$  para los cuales existen una, dos, tres o un infinito número de soluciones. En la figura 3.9 se puede observar como cambia la concavidad de las soluciones cuando cambiamos de rama. El subíndice indica en que rama está la solución.

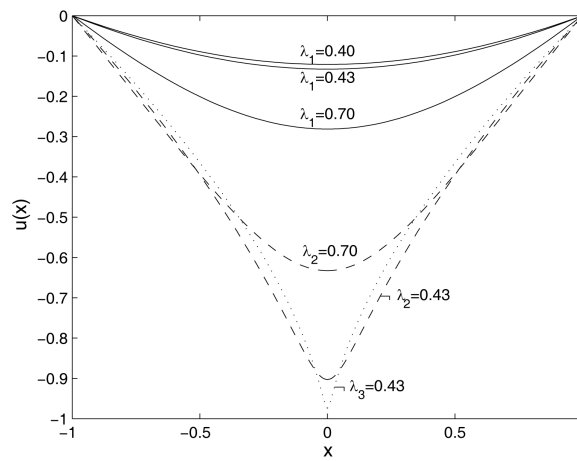


Figura 3.9: Diferentes soluciones de la ecuación (3.19).

## Capítulo 4

# Dinámica del Sistema

En el capítulo anterior establecimos la existencia de al menos un estado estacionario para el sistema (3.1), en un rango de valores del parámetro  $\lambda \in [0, \lambda^*]$ . En los casos en que el sistema tiene una geometría de banda o de disco, caracterizamos por completo estos estados. En este capítulo, nos concentraremos en la dinámica del sistema.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto, acotado y conexo. Definimos para cada  $T > 0$  al conjunto  $\Omega_T := \Omega \times (0, T]$  y a la frontera del conjunto  $\Omega_T$  como  $\Gamma_T := \partial(\Omega_T) = (\partial\Omega \times [0, T]) \cup (\Omega \times \{0\})$ . La dinámica del sistema está descrita por las ecuaciones de evolución

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + \frac{\lambda}{(1+u)^2} &= 0 \quad \text{en } \Omega_T, \\ u &= 0 \quad \text{en } \Gamma_T, \\ u(x, y, 0) &= 0 \quad \text{en } \Omega. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dado que  $f(u) = \frac{\lambda}{(1+u)^2}$  es Lipschitz en  $-1 < u \leq 0$ , podemos garantizar que localmente existe una solución a (4.1) y es única. Detalles de esta prueba se pueden encontrar en el libro de Smoller [24].

### 4.1. Principios del máximo para ecuaciones parabólicas

Como en el capítulo anterior, contar con un principio del máximo que se pueda aplicar al problema (4.1) es de gran utilidad. Por esta razón, en esta sección se enuncia y demuestra el principio del máximo para la ecuación de calor, como lo presenta Evans [5] en su libro.

**Teorema 4.1** (Principio débil del máximo). *Sea  $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$  y  $c \in C(\Omega)$ .*

(i) Si

$$u_t - \Delta u + cu \leq 0 \quad \text{en } \Omega_T,$$

entonces

$$\max_{\bar{\Omega}_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u^+.$$

(ii) Del mismo modo, si

$$u_t - \Delta u + cu \geq 0 \quad \text{en } \Omega_T,$$

entonces

$$\min_{\bar{\Omega}_T} u \geq -\max_{\Gamma_T} u^-.$$

En particular, si  $u_t - \Delta u + cu = 0$  en  $\Omega_T$ , entonces

$$\max_{\bar{\Omega}_T} |u| = \max_{\Gamma_T} |u|.$$

*Prueba.* Primero probaremos el caso en que  $c \geq 0$ .

Supongamos que  $u$  satisface  $u_t - \Delta u + cu < 0$ , en  $\Omega_T$  y que alcanza un máximo positivo en el punto  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega_T$ .

Si  $0 < t_0 < T$ , el punto  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  se encuentra en el interior de  $\Omega_T$ , y así  $u_t(\mathbf{x}_0, t_0) = 0$ . Además, la matriz Hessiana  $D^2u$  es negativa definida, por lo que  $\Delta u \leq 0$ . De esta manera,  $u_t - \Delta u + cu \geq 0$  en  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  lo que es una contradicción.

Supongamos ahora que  $t_0 = T$ . Dado que  $u$  alcanza su máximo sobre  $\bar{\Omega}_T$ , entonces  $u_t(\mathbf{x}_0, t_0) \geq 0$ , y como  $\Delta u \leq 0$ , llegamos a la misma contradicción que en el caso anterior.

En el caso general, definimos  $u^\epsilon := u - \epsilon t$  donde  $\epsilon > 0$ . Entonces

$$u_t^\epsilon - \Delta u^\epsilon + cu^\epsilon = u_t + \Delta u - \epsilon(c+t) < 0, \quad \text{en } \Omega_T.$$

Más aun, si  $u$  alcanza un máximo positivo en  $\Omega_T$ , entonces  $u^\epsilon$  alcanza un máximo positivo en algún punto dentro de  $\Omega_T$ , siempre que  $\epsilon > 0$  sea lo suficientemente pequeña. En este caso, como en los anteriores, hay una contradicción.

En general, si  $c \in C(\bar{\Omega})$ , definimos la función  $v := e^{(k+1)t}u$ . De este modo

$$v_t - \Delta v + cv = e^{(k+1)t}(u_t - \Delta u + [c + (k+1)]u),$$

entonces  $[c + (k+1)] \geq 0$  si  $k > \|c\|_\infty$  y se puede repetir el argumento. Así, el enunciado (i) queda probado.

El enunciado (ii) se prueba aplicando (i) a  $-u$ . □

**Teorema 4.2** (Principio fuerte del máximo). *Sea  $\Omega$  conexo,  $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$  y  $c \in C(\Omega_T)$  tal que  $c \geq 0$ .*

(i) Si

$$u_t - \Delta u + cu \leq 0 \quad \text{en } \Omega_T$$

y  $u$  alcanza un máximo no negativo sobre  $\bar{\Omega}_T$  en un punto  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega_T$ , entonces  $u$  es constante en  $\Omega_{t_0}$ .

(ii) De manera similar, si

$$u_t - \Delta u + cu \geq 0 \quad \text{en } \Omega_T$$

y  $u$  alcanza un mínimo no positivo sobre  $\bar{\Omega}_T$  en un punto  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega_T$ , entonces  $u$  es constante en  $\Omega_{t_0}$ .

*Prueba.* Sea  $M := \max_{\bar{\Omega}_T} u$ . Supongamos que  $M \geq 0$ ,  $u_t - \Delta u + cu \leq 0$  y  $u$  alcanza este máximo en un punto  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega_T$ .

Sea  $W \subset\subset \Omega$  un conjunto suave y abierto, donde  $\mathbf{x} \in W$  y  $v$  solución de

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0 & \text{en } W_T \\ v = u^+ & \text{en } \Sigma_T, \end{cases}$$

donde  $\Sigma_T$  denota la frontera parabólica de  $W_T$ .

En este caso,  $0 \leq v \leq M$ . Dado que  $u_t - \Delta u \leq -cu \leq 0$  en  $\{u \geq 0\}$ , el principio débil del máximo implica que  $u \leq v$ . De esta manera  $v = M$  en  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ .

Sea  $\tilde{v} := M - v$  tal que

$$\tilde{v}_t - \Delta \tilde{v} = 0, \quad \tilde{v} \geq 0 \quad \text{en } W_T.$$

Escojamos cualquier  $V \subset\subset W$  con  $\mathbf{x}_0 \in V$  y  $V$  conexo. Sea  $0 < t < t_0$ . Dada la desigualdad de Harnack

$$\max_V \tilde{v}(\cdot, t) \leq C \inf_V \tilde{v}(\cdot, t_0).$$

Pero  $\inf_V \tilde{v}(\cdot, t_0) \leq \tilde{v}(\mathbf{x}_0, t_0) = 0$ . Siendo  $\tilde{v} \geq 0$ , entonces  $\tilde{v} \equiv 0$  en  $V \times \{t\}$  para cada  $0 < t < t_0$ . Esta deducción es válida para cualquier conjunto  $V$  como el anterior, por lo que  $\tilde{v} \equiv 0$  en  $W_{t_0}$ . Entonces  $v \equiv M \equiv u^+$  en  $\partial W \times [0, t_0]$ . Podemos entonces concluir que  $u \equiv M$  en  $\partial W \times [0, t_0]$ .

Dado que este argumento es válido para todos los conjuntos  $W$ ,  $u \equiv M$  en  $\Omega_{t_0}$  y entonces queda probado (i).

Como en el principio débil del máximo, si aplicamos (i) a  $-u$ , obtenemos (ii) y el teorema queda probado.  $\square$

## 4.2. El régimen de operación estable

En esta sección, caracterizaremos el régimen de operación estable del sistema en términos del parámetro  $\lambda$ . Comenzaremos por establecer algunas propiedades de las soluciones de la ecuación de evolución (4.1), y posteriormente estudiaremos a detalle los casos en que el sistema tiene una geometría de banda o de disco.

**Teorema 4.3.** *Supongamos que  $u(x, y, t; \lambda) > -1$  para  $\lambda > 0$ , y para todo punto  $(x, y) \in \Omega$  y  $t \in [0, T]$ . Entonces*

(i)  $u(x, y, t; \lambda)$  es decreciente en  $t$  para cada  $(x, y) \in \Omega$ .

(ii)  $u(x, y, t; \lambda)$  es una función decreciente de  $\lambda$ .

*Prueba.* (i) Sea  $v = u_t$ . Si derivamos la ecuación (4.1), tenemos que

$$v_t - \Delta v - \frac{2\lambda}{(1+u)^3}v = 0 \quad \text{en } \Omega_T,$$

$$v = 0 \quad \text{en } \Gamma_T,$$

$$v(x, 0) = -\lambda \quad \text{en } \Omega.$$

Por el principio débil del máximo,  $u_t \leq 0$ , y la desigualdad estricta se mantiene en el interior del dominio.

(ii) Supongamos que  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  y sea  $v := u_1 - u_2$ , entonces

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v &= -\frac{\lambda_1}{(1+u_1)^2} + \frac{\lambda_2}{(1+u_2)^2} \\ &= \frac{1}{(1+u_2)^2}[\lambda_2 - \lambda_1] + \lambda_1 \left[ \frac{1}{(1+u_2)^2} - \frac{1}{(1+u_1)^2} \right] \geq \frac{2\lambda_1}{(1+\eta)^3}v, \end{aligned}$$

donde  $\eta := \eta(x, y, t; \lambda)$  es un valor intermedio entre  $u_1(x, t; \lambda_1)$  y  $u_2(x, t; \lambda_2)$ . Si tomamos  $c = \frac{2\lambda_1}{(1+\eta)^3}$ , entonces

$$v_t - \Delta v + cv \leq 0 \quad \text{en } \Omega_T.$$

Usando el principio débil del máximo,  $v \geq 0$  en  $\Omega_T$  y entonces  $u$  es una función decreciente de  $\lambda$ . □

Para  $\lambda < \lambda_*$ , la solución  $u(x, y, t; \lambda)$  se estabiliza en un estado estacionario.

**Teorema 4.4.** *Para  $\lambda < \lambda_*$ , la solución  $u(x, y, t; \lambda)$  converge a una solución estacionaria conforme  $t \rightarrow \infty$ .*

*Prueba.* Tomando otra vez  $v = u_t$ , podemos observar que cualquier solución estacionaria es una cota inferior de  $u(x, y, t; \lambda)$ . Así,  $u(x, y, t; \lambda)$  está definida para todo  $t$ . Además, es decreciente en  $t$  para todo  $(x, y) \in \Omega$ . De esta manera,  $u(x, y, t; \lambda)$  converge conforme  $t \rightarrow \infty$ .

Definimos el funcional de energía

$$E(u(t)) = \iint_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - \frac{\lambda}{1+u} \right] dx dy,$$

entonces

$$\frac{dE}{dt} = D_{u_t} E(u) = \iint_{\Omega} \left[ -\Delta u + \frac{\lambda}{(1+u)^2} \right] u_t dx dy.$$

De esta manera, si  $u(x, y, t; \lambda)$  es solución de (4.1),  $\frac{dE}{dt} = -\iint_{\Omega} u_t^2 dx dy \leq 0$ , por lo que la energía es decreciente sobre las soluciones. Así, el teorema de Liapunov [14] nos garantiza que los únicos puntos en el conjunto  $\omega$ -límite de tales trayectorias son estados estacionarios. □

### La banda elástica

En el caso de la banda elástica,  $\Omega_T = \{(x, t) \mid x \in [-1/2, 1/2], t \in [0, T]\}$ . La dinámica del sistema está gobernada por

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + \frac{\lambda}{(1+u)^2} &= 0 & \text{en } \Omega_T, \\ u &= 0 & \text{en } \Gamma_T \\ u(x, 0) &= 0 & \text{en } \Omega. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Con ayuda del principio fuerte del máximo, podemos demostrar el siguiente teorema:

**Teorema 4.5.** *Sea  $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$  solución de (4.2). Entonces  $u(x, t; \lambda)$  es una función par en  $x$  que alcanza su mínimo en  $x = 0$  y es creciente para  $x \in [0, 1/2]$ .*

*Prueba.* La simetría de la solución se debe a la simetría del dominio, así como de las condiciones iniciales y de frontera. De esta manera,  $u_x(x, t)$  es una función impar en  $x$ , por lo que  $u_x(0, t) = 0$ . Más aún, derivando la ecuación (4.2) con respecto a  $x$  obtenemos que  $(u_x)_t - (u_x)_{xx} - \frac{2\lambda}{(1+u)^3} u_x = 0$ . De este modo  $u_x$  es solución de una ecuación parabólica para  $x \in [0, 1/2]$  con  $u_x(0, t) = 0$ , por lo que el principio del máximo garantiza que  $u_x(1/2, t) > 0$ . Consecuentemente,  $u$  no puede alcanzar un mínimo negativo y entonces  $u_x \geq 0$ . Por el principio fuerte del máximo,  $u_x$  no puede alcanzar su mínimo en la región  $x \in (0, 1/2)$  y  $t \in (0, T]$ . Así,  $u_x(x, t) > 0$  para  $x \in (0, 1/2)$  y  $t \in (0, T]$ .  $\square$

Como se mostró en el capítulo anterior, al menos una solución estacionaria existe para  $\lambda \leq \lambda^*$ . El diagrama de bifurcación mostrado en la figura 3.4 muestra cómo la transición de la existencia a la no existencia es debido a un punto de retorno o doblez. También podemos observar en esta figura, la existencia de distintas soluciones estacionarias debido a las distintas ramas que separa este doblez. Una manera natural de comenzar al análisis dinámico, es tratar de determinar la estabilidad lineal de las diferentes ramas. Para ello, sea  $u(x, t) = u_0(x) + \delta v(x, t) + O(\delta^2)$  donde  $\delta \ll 1$  y  $u_0(x)$  es una solución estacionaria. Sustituyendo en (4.2), obtenemos

$$-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{(1+u_0)^2} + \delta \left( \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{2\lambda}{(1+u_0)^3} v \right) + O(\delta^2) = 0.$$

Dado que  $u_0(x)$  es una solución estacionaria, la estabilidad lineal a orden  $O(\delta)$  será determinada por el comportamiento de la ecuación

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} - \frac{2\lambda}{(1+u_0)^3} v &= 0 & \text{en } \Omega_T, \\ v &= 0 & \text{en } \Gamma_T, \\ v(x, 0) &= 0 & \text{en } \Omega. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Esta ecuación es lineal, por lo que podemos usar separación de variables. Sea  $v(x, t) = T(t)w(x)$ , la ecuación (4.3) se transforma en el sistema de ecuaciones

$$\frac{dT}{dt} - \mu T = 0; \quad T(0) = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \left[ \frac{2\lambda}{(1+u_0)^3} - \mu \right] w = 0; \quad w(\pm 1/2) = 0, \quad (4.5)$$

donde  $\mu$  es una constante.

La ecuación (4.4) tiene como solución

$$T(t) = \begin{cases} 1 - e^{\mu t} & \text{si } \mu \leq 0 \\ e^{\mu t} - 1 & \text{si } \mu > 0 \end{cases},$$

por lo que la solución  $u_0$  será estable siempre que el valor propio principal sea menor que cero.

Para determinar los valores propios  $\mu$ , utilizaremos el método de diferencias centrales, que consiste en la discretización del problema (4.5). Dividamos el intervalo  $[-1/2, 1/2]$  en  $n$  partes iguales, donde  $n = 1$  corresponde al punto  $x = -\frac{1}{2}$  y  $n + 1$  al punto  $x = \frac{1}{2}$ . Aproximamos la primera y segunda derivada en el punto  $x_k$  por

$$w'(x_k) = \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2h}, \quad w''(x_k) = \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{h^2}, \quad k = 2, \dots, n,$$

donde  $h = \frac{1}{n}$  y  $x_k = -\frac{1}{2} + hk$ . Sustituyendo en (4.5), transformamos la ecuación diferencial en un sistema de  $n$  ecuaciones algebraicas

$$w_{k+1} + \left[ -2 + \frac{2h^2\lambda}{[1+u_0(x_k)]^3} - \mu h^2 \right] w_k + w_{k-1} = 0,$$

con condiciones de Dirichlet  $w_1 = w_{n+1} = 0$ . Este sistema se puede escribir de manera matricial como

$$\begin{pmatrix} \alpha(x_2) & & & & \\ 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \mu h^2 \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix},$$

donde  $\alpha(x_k) = -2 + \frac{2\lambda h^2}{[1+u_0(x_k)]^3}$ . De este modo, hemos aproximado el problema de determinar los valores propios de una ecuación diferencial ordinaria por el de encontrar los valores propios una matriz tridiagonal.

Podemos calcular numéricamente los valores propios en función del parámetro  $\lambda$ . En la figura 4.1 se muestra como varía el valor propio principal  $\mu$  como función de  $\lambda$ .

Al sustituir en la ecuación matricial las dos soluciones estacionarias  $u_0$  obtenidas en la sección 3.3, podemos graficar los valores propios principales para cada valor de  $\lambda$ . Observemos que los valores propios principales correspondientes



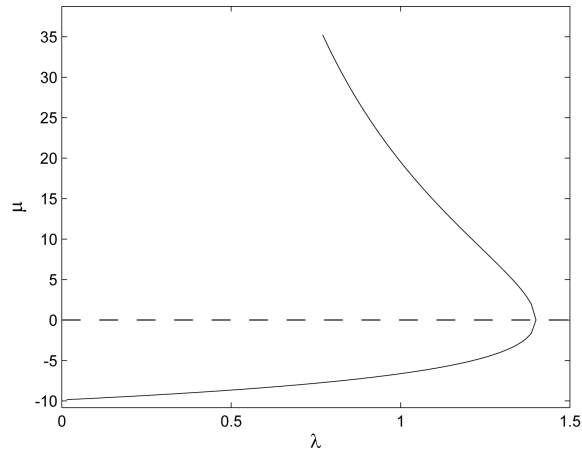


Figura 4.1: Comportamiento del valor propio principal  $\mu$ .

a la rama inferior de soluciones son negativos, el valor propio cero corresponde a  $\lambda^*$  y los valores propios principales positivos corresponden a la rama superior de soluciones. Concluimos que la rama inferior es estable, mientras que la rama superior es inestable. Es decir, la membrana tiende a la configuración de menor amplitud cuando el sistema opera de manera estable.

Usando el esquema de Crank-Nicolson implícito (Apéndice B), podemos encontrar soluciones numéricas a la ecuación (4.2). Una secuencia típica de soluciones acercándose al estado estacionario es mostrada en la figura 4.2.

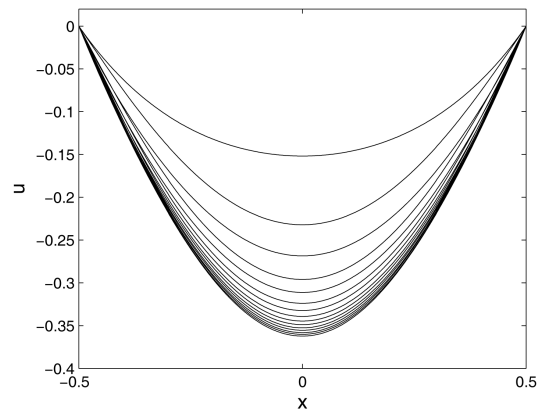


Figura 4.2: El acercamiento al estado estacionario para  $\lambda = 1,4$ .

### El disco elástico

Para el disco elástico, el Teorema de Gidas-Ni-Nirenberg nos dice que la ecuación (4.1) se puede escribir como

$$\begin{aligned} u_t - u_{rr} - \frac{1}{r}u_r + \frac{\lambda}{(1+u)^2} &= 0 \quad \text{en } \Omega_T, \\ u(1, t) &= 0, \\ u_r(0, t) &= 0, \\ u(r, 0) &= 0, \quad \text{en } \Omega, \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde  $\Omega_T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, t \geq 0 \mid x^2 + y^2 \leq 1, t \in [0, T]\}$ .

Si cambiamos  $r$  por  $-r$  en (4.6), podemos observar que  $u(r, t)$  es una función par en la variable  $r$ . Usando este resultado, podemos tomar  $r \in [-1, 1]$  y cambiar la condición de frontera  $u_r(0, t) = 0$  por  $u(-1, t) = 0$ . Al hacer esto, no hemos perdido información, pues  $u_r(0, t) = 0$  y entonces  $u$  resuelve el problema de valores a la frontera (4.6).

A continuación, presentamos el análisis de estabilidad lineal alrededor de las soluciones estacionarias  $u_0(r)$ . Realizando el mismo procedimiento que en la sección anterior, encontramos que cerca de las soluciones estacionarias, las soluciones al problema (4.6) están dadas por  $u(r, t) = u_0(r) + \delta v(r, t) + O(\delta^2)$ , donde  $\delta \ll 1$  y  $v(r, t) = T(t)w(r)$ ,  $T(t)$  está dada por (4.4) y  $w(r)$  es la solución del problema de valores a la frontera

$$\begin{aligned} w_{rr} + \frac{1}{r}w_r &= \left[ \mu - \frac{2\lambda}{(1+u_0)^3} \right] w, \\ w(1) &= w'(0) = 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Una vez más, la función  $w$  es par, por lo que podemos considerar que  $r \in [-1, 1]$  y utilizar el método de diferencias centrales para aproximar el problema de valores a la frontera, por una ecuación matricial con condiciones  $w_1 = w_{n+1} = 0$ . En este caso, la ecuación matricial es

$$\begin{pmatrix} \alpha(r_2) & 1 - \frac{h}{2r_2} & & & \\ 1 + \frac{h}{2r_3} & \alpha(r_3) & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \mu h^2 \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

De nuevo, calculamos numéricamente los valores propios principales de la matriz y los graficamos como función del parámetro  $\lambda$ . Los valores propios negativos corresponden a la primera rama de soluciones, mientras que los valores propios positivos corresponden a la segunda rama. Las demás ramas no se pueden apreciar en esta gráfica, pues son altamente inestables. El valor propio principal más pequeño para la tercera rama es  $\mu \approx 8193,2$ .

Como en el caso de la banda elástica, se observa que la membrana tiende a la configuración de menor amplitud, en el régimen de operación estable.

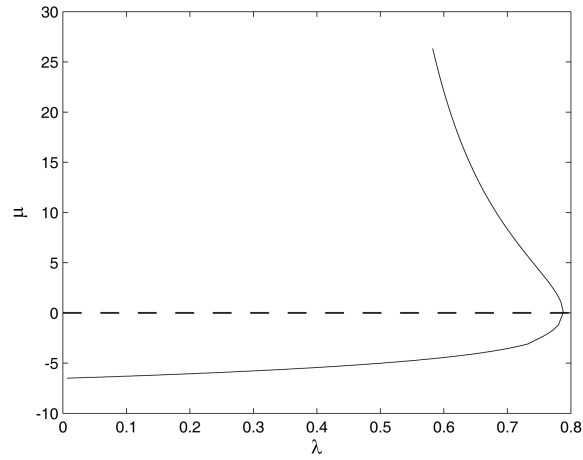


Figura 4.3: Valores propios principales  $\mu$  como función de  $\lambda$ .

Utilizando el esquema de Crank-Nicolson, obtenemos la figura 4.4 que muestra una secuencia de soluciones aproximándose al estado estacionario.

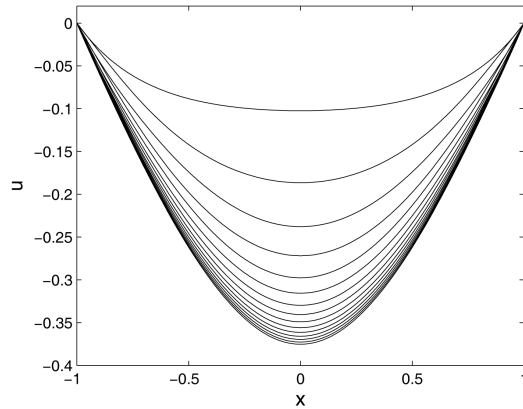


Figura 4.4: El acercamiento al estado estacionario para  $\lambda = 0,78$ .

### 4.3. El régimen de contacto

Cuando  $\lambda > \lambda^*$ , no existen soluciones estacionarias al problema (4.1). En este caso, aparece una inestabilidad conocida como inestabilidad de contacto. En lo que resta de esta sección, se mostrará que efectivamente la solución de (4.1) hace contacto en tiempo finito. También se encontrará la estructura de las soluciones cerca del contacto.

El primer resultado es un estimado en los valores de  $\lambda$  para los cuales ocurre el contacto.

**Teorema 4.6.** *Para  $\lambda > -\frac{4}{27}\mu_0$ ,  $u(x, y, t; \lambda) = -1$  en tiempo finito.*

*Prueba.* Sea  $\mu_0$  el valor principal del operador Laplaciano con condiciones de Dirichlet en  $\Omega$  y sea  $u_0$  la función propia correspondiente. Podemos escoger a  $u_0$  de tal manera que esté normalizada (es decir,  $\iint_{\Omega} u_0 = 1$ ) y sea estrictamente positiva en  $\Omega$ .

Al multiplicar (4.1) e integrar sobre el dominio  $\Omega$

$$\iint_{\Omega} u_0 u_t - \iint_{\Omega} u_0 \Delta u = -\lambda \iint_{\Omega} \frac{u_0}{(1+u)^2}.$$

Utilizando el teorema de Green,

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Omega} u u_0 - \mu_0 \iint_{\Omega} u u_0 = -\lambda \iint_{\Omega} \frac{u_0}{(1+u)^2}.$$

Definimos la energía

$$E(t) = \iint_{\Omega} u u_0$$

y reescribimos la ecuación anterior como

$$\frac{dE}{dt} - \mu_0 E = -\lambda \iint_{\Omega} \frac{u_0}{(1+u)^2}.$$

Entonces, aplicando la desigualdad de Jensen<sup>1</sup> y la condición inicial de nuestro problema, encontramos que

$$\frac{dE}{dt} - \mu_0 E \leq -\frac{\lambda}{(1+E)^2} \tag{4.8}$$

$$E(0) = 0.$$

Ahora, notemos que

$$E(t) = \iint_{\Omega} u u_0 \geq \inf u \iint_{\Omega} u_0 = \inf u.$$

Sea  $\phi$  la solución de

$$\frac{d\phi}{dt} = \mu\phi - \frac{\phi}{(1+\phi)^2} \tag{4.9}$$

$$\phi(0) = 0.$$

<sup>1</sup>La desigualdad de Jensen es válida para cualquier medida  $g$ . Dado que  $u_0 > 0$ , entonces  $g = u_0 dx$  es una medida y (4.8) se cumple.

Usando principios de comparación [14], tenemos que

$$E(t) \leq \phi(t),$$

para todo tiempo, así

$$\inf u \leq \phi(t)$$

y el peor comportamiento de  $u$  es capturado por  $\phi(t)$ . Usando separación de variables en la ecuación (4.9),

$$T = - \int_0^{\phi(T)} \frac{d\phi}{-\mu_0\phi + \frac{\lambda}{(1+\phi)^2}}.$$

Si la integral

$$\int_{-1}^0 \frac{d\phi}{-\mu_0\phi + \frac{\lambda}{(1+\phi)^2}}$$

es finita, hay existencia para  $\phi$  sólo en un intervalo finito, y debe ocurrir el contacto en tiempo finito. Esta integral es finita si el denominador nunca se anula. Las raíces del polinomio  $\phi^3 + 2\phi^2 + \phi - \frac{\lambda}{\mu_0}$  son todas complejas si  $\lambda > -\frac{4}{27}\mu_0$ . Si este es el caso, la integral permanece finita y el teorema queda probado.  $\square$

En el caso de la banda, el valor propio principal es  $\mu_0 = -\pi^2$ , entonces hay contacto si  $\lambda > \frac{4\pi^2}{27}$ . Para el disco, el valor propio principal está dado por el primer cero de la función de Bessel de orden cero [3], y así  $\lambda > \frac{4j_0^2}{27}$ .

Como ocurre en el caso de las soluciones estacionarias, el conjunto de parámetros para los cuales ocurre el contacto es un intervalo.

**Teorema 4.7.** *Existe  $\lambda^* > 0$  tal que hay contacto si  $\lambda > \lambda^*$ . Más aún, no ocurre contacto para  $\lambda < \lambda^*$ .*

*Prueba.* Las soluciones de la ecuación (4.1) son funciones estrictamente decrecientes de  $\lambda$  en  $\Omega$ , por lo que el conjunto  $B := \{\lambda \mid \text{hay contacto}\}$  es un intervalo. El teorema anterior nos garantiza que es no vacío y que  $\lambda^* := \inf B$  cumple con la propiedad requerida.  $\square$

Si definimos  $T^*$  como el tiempo de contacto, podemos acotar  $T^*$  superiormente. Para ello, sea  $\lambda$  tal que ocurre contacto, entonces

$$T^* \leq \int_{-1}^0 \frac{ds}{\mu_0 s + \frac{\lambda}{(1+s)^2}}.$$

También podemos acotar  $T^*$  inferiormente. Supongamos que  $v(t)$  resuelve

$$v_t = -\frac{\lambda}{(1+v)^2},$$

$$v(0) = 0.$$

Entonces,  $v(0)$  es una solución inferior de (4.1). Esto es,  $v(t) \leq E(t)$  para todo tiempo. El tiempo de contacto de  $v$  es

$$t^* = \int_{-1}^0 \frac{(1+s)^2}{\lambda} ds = \frac{1}{3\lambda}.$$

De este modo,

$$\frac{1}{3\lambda} \leq T^* \leq \int_{-1}^0 \frac{ds}{\mu_0 s + \frac{\lambda}{(1+s)^2}}.$$

En la figura 4.5 se comparan las cotas de  $\inf u$  con las soluciones numéricas calculadas.

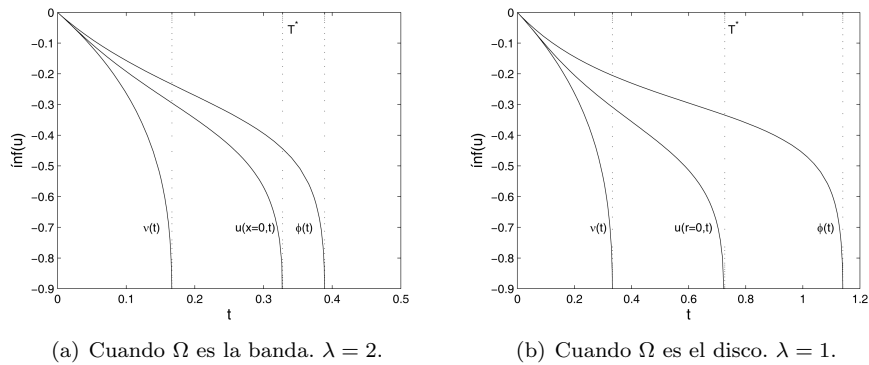


Figura 4.5: Cotas en el tiempo de contacto.

Además, podemos usar de nuevo el esquema de Crank-Nicolson para obtener las soluciones numéricas conforme se acercan al contacto.

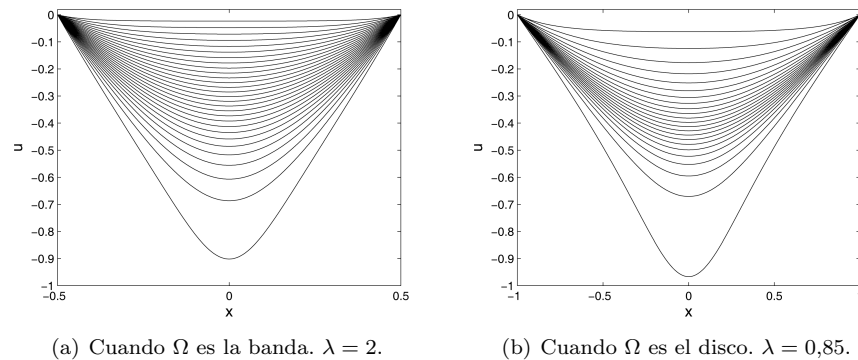


Figura 4.6: Acercamiento al contacto.

### 4.3.1. Soluciones cerca del contacto

A continuación, estudiaremos la estructura de las soluciones cuando están cerca del contacto. Para ello, transformaremos la ecuación (4.1) utilizando variables autosimilares y caracterizaremos el comportamiento de las soluciones autosimilares.

Tomemos el cambio de variables  $w = 1 + u$  en la (4.1), así

$$\begin{aligned} w_t - \Delta w + \frac{\lambda}{w^2} &= 0 \quad \text{en } \Omega_T, \\ w &= 0 \quad \text{en } \Gamma_T, \\ w(x, y, 0) &= 0. \end{aligned}$$

#### La banda elástica

En este caso, el problema es

$$\begin{aligned} w_t - w_{xx} &= \frac{\lambda}{w^2}, \\ w(-1/2, t) &= w(1/2, t) = 1. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Sabemos que si  $\lambda > 4\pi^2/27$  hay contacto en tiempo finito. También sabemos que la solución es simétrica con respecto a  $x = 0$  y monótona decreciente en el tiempo. Aplicando el teorema 4.5 a esta ecuación, podemos afirmar que la pendiente de  $w$  es positiva para  $x > 0$  mientras que si  $x < 0$  es negativa. Toda esta información nos dice que el contacto debe ocurrir en  $x = 0$ . Consideremos el caso  $\lambda > 4\pi^2/27$ . Para saber que pasa cerca del punto  $x = 0$ , hagamos un reescalamiento con respecto a una longitud y un tiempo de contacto desconocidos

$$w = L\hat{w}, \quad x = X\hat{x}, \quad t - T^* = \kappa\hat{t}.$$

Al sustituir en nuestra ecuación, obtenemos que

$$\frac{L}{\kappa} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} = \frac{L}{X^2} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} - \frac{\lambda}{L^2 \hat{w}^2}.$$

El término a la izquierda de la ecuación representa la velocidad cerca del contacto. Es de esperarse que ésta sea grande y por lo tanto que este término sea significativo cerca del contacto. El primer término a la derecha de la ecuación, representa la curvatura cerca del punto de contacto. De nuevo, esperamos que este término sea grande e importante cerca del contacto. El último término representa la fuerza electrostática cerca del contacto. Una vez más, esperamos que este término sea grande cerca del contacto. Este análisis sugiere que cerca del punto de contacto, los tres términos deben balancearse, por lo que nuestro escalamiento debe ser

$$L = \kappa^{1/3}, \quad X = \kappa^{1/3}.$$

Esto sugiere a su vez, que busquemos una solución que tenga como estructura

$$w(x, t) = (T - t)^{1/3} H(y, \tau),$$

donde  $H$  es una función desconocida y  $y, \tau$  son las variables autosimilares  $y = \frac{x}{\sqrt{T-t}}, \tau = \log\left(\frac{1}{T-t}\right)$ . Substituyendo esta ecuación en (4.10)

$$H_\tau = H_{yy} - \frac{y}{2} H_y + \frac{H}{3} - \frac{\lambda}{H^2}, \quad (4.11)$$

en la región  $|y| \leq \frac{1}{2} e^{\tau/2}, \tau \geq \tau_0 := \log\left(\frac{1}{T}\right)$ , con condiciones de frontera  $H\left(\pm \frac{1}{2} e^{\tau/2}, \tau\right) = e^{\tau/3}$ . La condición inicial para  $H$  es  $H(y, \tau_0) = T^{-1/3}$ .

Es claro que la función  $H(y, \tau)$  es una función par de  $y$  para cada  $\tau \geq \tau_0$ .

La ecuación (4.11) admite un funcional de energía, por lo que  $H(y, \tau)$  convergerá a una solución estacionaria. Sin embargo, hay un continuo de estados estacionarios.

El comportamiento conforme  $y \rightarrow \infty$  de las soluciones estacionarias, así como la naturaleza autosimilar del contacto para la ecuación (4.10), ha sido descrito en el artículo de Fila y Hulsof [7], bajo la suposición de la existencia de soluciones globales no constantes. A continuación, se prueba la existencia global de soluciones estacionarias pares. Así, consideramos a las soluciones de la ecuación

$$H'' - \frac{y}{2} H' + \frac{1}{3} H - \frac{\lambda}{H^2} = 0 \quad (4.12)$$

en  $y \geq 0$  con  $H(0) = \alpha > 0$  y  $H'(0) = 0$ .

**Teorema 4.8.** *Para cada  $\alpha > 0$ , la solución del problema de valores iniciales (4.12) está definida para todo  $y \in [0, \infty)$ .*

*Prueba.* Supongamos que  $H(y)$  es una solución definida para  $y \in [0, y_0]$  y que satisface  $H(y) > 0$  en ese intervalo. Si multiplicamos la ecuación (4.12) por  $e^{y^2/2} H'$  e integramos sobre el intervalo  $[0, y]$ , obtenemos

$$\frac{e^{-y^2/2} H'^2(y)}{2} + \int_0^y \left( \frac{H(s)}{3} - \frac{\lambda}{H^2(s)} \right) e^{-s^2/2} ds = 0.$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \frac{e^{-y^2/2} H'^2(y)}{2} + \int_0^y \left( \frac{H^2(s)}{6} + \frac{\lambda}{H(s)} \right) s e^{-s^2/2} ds \\ + \left( \frac{H^2(y)}{6} + \frac{\lambda}{H(y)} \right) e^{-y^2/2} - \left( \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\lambda}{\alpha} \right) = 0. \end{aligned}$$

Consideremos la energía

$$E(y) := \frac{H'^2(y)}{2} + \frac{H^2(y)}{6} + \frac{\lambda}{H(y)}.$$



Entonces  $E(y) \leq E(0)e^{y^2/2}$  con  $E(0) = \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\lambda}{\alpha}$ . Para  $y \in [0, y_0]$ ,

$$\frac{\lambda}{E(0)}e^{-y^2/2} \leq H(y) \leq \sqrt{6E(0)}e^{y^2/4},$$

y usando el teorema de continuación,  $y_0 = \infty$ .  $\square$

**Lema 4.1.** *Existen constantes positivas  $c_j$ , para  $j = 1, 2, 3$  tales que*

$$c_3 \leq H(y) \leq c_1 + c_2|y|$$

para cada  $y$  y  $\tau$  en el dominio de la ecuación (4.11).

*Prueba.* Sea  $c_3 < T^{-1/3}$ , entonces  $c_3$  es una solución inferior del problema parabólico definido por (4.11) y nuestra solución.

La cota superior se obtiene de la siguiente manera: escojamos  $c_1$  de tal manera que  $c_1^3 < 3\lambda$ , entonces

$$f(y) := \frac{c_2}{6}y - \frac{c_1}{3} + \frac{\lambda}{(c_1 + c_2y)^2}$$

satisface  $f(0) > 0$ ,  $f'(0) < 0$ , es convexa y alcanza un mínimo positivo si  $c_2 > 4\lambda$ . Entonces  $c_1 + c_2y$  es una supersolución del problema parabólico en  $y > 0$  siempre y cuando las desigualdades en la frontera y la condición inicial sean válidas. Así,  $c_1 \geq T^{-1/3}$  y  $c_2 > e^{-\tau_0/6}$ . La cota superior en todo el dominio es consecuencia de la simetría de las funciones involucradas en la comparación.  $\square$

Fila y Hulshof probaron que las soluciones estacionarias son crecientes y convexas para  $\alpha < (3\lambda)^{1/3}$ . Si la desigualdad es invertida, las soluciones estacionarias tienen un sólo mínimo positivo en  $(0, \infty)$ . Después de ese mínimo, las soluciones son crecientes y convexas.

Si usamos el método de variación de parámetros en la ecuación (4.12), entonces

$$H'(y) = e^{y^2/4} \int_0^y \left( \frac{\lambda}{H^2(\eta)} - \frac{H(\eta)}{3} \right) e^{-\eta^2/4} d\eta,$$

por lo que toda solución no constante tiene una derivada que crece como  $e^{y^2/4}$  conforme  $y \rightarrow \infty$ . Esto muestra que nuestra solución  $H(y, \tau)$  converge de manera uniforme en intervalos acotados de  $y$  a la solución estacionaria  $(3\lambda)^{1/3}$ .

En resumen, tenemos

**Teorema 4.9.** *Sea  $u(x, t)$  la solución de (3.12), (3.13) y (3.15), entonces*

$$u(x, t) = -1 + [3\lambda(T - t)]^{1/3}(1 + o(1)) \text{ conforme } t \rightarrow T.$$

La representación asintótica es válida en las regiones parabólicas definidas por  $|y| \leq C$ .

### El disco elástico

En coordenadas polares  $(r, \theta)$ , la ecuación para el disco elástico toma la forma

$$w_t - w_{rr} - \frac{1}{r}w_r + \frac{\lambda}{w^2} = 0 \quad (4.13)$$

$$w(1, t) = 0, \quad w'(0, t) = 0.$$

Tomando el cambio de variables

$$y = \frac{r}{\sqrt{T-t}}, \quad \tau = \log\left(\frac{1}{T-t}\right), \quad w = (T-t)^{1/3}H(y, \tau),$$

y sustituyendo en la ecuación (4.13),

$$H_\tau = H_{yy} + \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{2}\right)H_y + \frac{H}{3} - \frac{\lambda}{H^2} \quad (4.14)$$

en la región  $|y| < e^{\tau/2}$ ,  $\tau \geq \tau_0 := \log\left(\frac{1}{T}\right)$ , con condiciones de frontera  $H(e^{\tau/2}, \tau) = e^{\tau/3}$ ,  $H_y(0, \tau) = 0$  y condición inicial  $H(y, \tau_0) = T^{1/3}$ .

El comportamiento de las soluciones estacionarias cuando  $y \rightarrow \infty$ , así como la naturaleza autosimilar de las soluciones, ha sido estudiado a detalle en Guo [12] bajo la suposición de la existencia de soluciones no constantes. A continuación, se prueba la existencia global de soluciones estacionarias. Consideremos la ecuación

$$H'' + \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{2}\right)H' + \frac{H}{3} - \frac{\lambda}{H^2} = 0 \quad (4.15)$$

en  $y > 0$  con  $H(0) = \eta > 0$  y  $H'(0) = 0$ .

**Teorema 4.10.** *Para cualquier  $\eta > 0$ , existe una única solución global  $H(y) = H(y; \eta)$  de (4.15) con  $H(0) = \eta$  y  $H'(0) = 0$ .*

*Prueba.* Dado que  $y = 0$  es un punto singular regular y  $f(H) = \frac{H}{3} - \frac{\lambda}{H^2}$  es analítica en  $H = \eta$ , hay existencia y unicidad local. Sea  $y \in [0, y_0)$  el intervalo máximo en donde  $H$  está definida y supongamos que  $H(y) > 0$  en ese intervalo. Multiplicando la ecuación (4.15) por  $e^{-y^2/2}H'$  e integrando sobre el intervalo  $[0, y]$ , obtenemos

$$\frac{e^{-y^2/2}H'^2(y)}{2} + \int_0^y \frac{e^{-s^2/2}H'^2(s)}{s} ds + \int_0^y \left(\frac{H(s)}{3} - \frac{\lambda}{H^2(s)}\right) e^{-s^2/2} ds = 0.$$

La primera integral es impropia en  $s$ , lo cual no representa ningún problema, pues la condición inicial  $H'(0) = 0$ , nos dice que en  $s = 0$ , la singularidad es integrable. Al integrar por partes la segunda integral,

$$\begin{aligned} \frac{e^{-y^2/2}H'^2(y)}{2} + \int_0^y \frac{e^{-s^2/2}H'^2(s)}{s} ds + \int_0^y \left(\frac{H^2(s)}{6} + \frac{\lambda}{H(s)}\right) se^{-s^2/2} ds \\ + e^{-y^2/2} \left(\frac{H^2(y)}{6} + \frac{\lambda}{H(y)}\right) - \left(\frac{\eta^2}{6} + \frac{\lambda}{\eta}\right) = 0. \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{e^{-y^2/2}H'^2(y)}{2} + e^{-y^2/2} \left( \frac{H(y)}{6} + \frac{\lambda}{H(y)} \right) \leq \left( \frac{\eta^2}{6} + \frac{\lambda}{\eta} \right).$$

Si definimos la energía

$$E(y) := \frac{H'^2(y)}{2} + \frac{H^2(y)}{6} + \frac{\lambda}{H(y)},$$

la desigualdad anterior nos dice que  $E(y) \leq E(0)e^{y^2/2}$ . Igual que en el caso de la banda

$$\frac{\lambda}{E(0)}e^{-y^2/2} \leq H(y) \leq \sqrt{6E(0)}e^{y^2/4},$$

y usando el teorema de continuación,  $y_0 = \infty$ .  $\square$

**Lema 4.2.** *Existen constantes positivas  $c_j$ , para  $j = 1, 2, 3$ , tales que*

$$c_3 \leq H(y, \tau) \leq c_1 + c_2y^2$$

para cada  $y$  y  $\tau$  en el dominio de la ecuación (4.14).

*Prueba.* Como en el Lema 4.1,  $c_3 < T^{-1/3}$  es una solución inferior del problema parabólico (4.14). Escogamos  $c_1$  tal que  $c_1^3 < \frac{6\lambda}{7}$ , entonces

$$f(y) := \frac{2c_2}{3}y^2 - \frac{7c_1}{6} + \frac{\lambda}{(c_1 + c_2y^2)^2}$$

cumple  $f(0) > 0$ ,  $f'(0) = 0$  y  $f'(\epsilon) < 0$  para  $\epsilon > 0$ . Además, existe un punto  $y_0 > 0$  a partir del cual  $f(y)$  es convexa y alcanza un mínimo positivo. Entonces  $c_1 + c_2y^2$  es una supersolución siempre y cuando cumpla con las desigualdades adecuadas en la frontera, es decir  $c_1 \geq T^{-1/3}$  y  $c_2 > e^{-2\tau/3}$ .  $\square$

**Nota.** De hecho,  $H(y, \tau)$  es tal que  $c_3 \leq H(y, \tau) \leq c_1 + c_2y$ . La prueba de la segunda desigualdad es mucho más complicada. Los detalles pueden ser encontrados en [13].  $\square$

El lema anterior garantiza que la única solución constante a (4.15) sea  $H \equiv (3\lambda)^{1/3}$ . Los detalles de esta prueba se pueden encontrar en el trabajo de Bebernes y Eberly [1]. Además, los autores prueban que esta solución se encuentra en el conjunto  $\omega$ -límite de (4.14).

Por otro lado, Guo muestra que todas las soluciones no constantes de (4.15) crecen indefinidamente para valores grandes de  $y$ .

Como en el caso de la banda elástica, podemos resumir con el siguiente teorema:

**Teorema 4.11.** *Sea  $u(r, t)$  la solución de (3.12) y (3.19), entonces*

$$u(r, t) = -1 + [3\lambda(T - t)]^{1/3}(1 + o(1)) \text{ conforme } t \rightarrow T.$$

La representación asintótica es válida en las regiones parabólicas definidas por  $|y| \leq C$ .

### Representación asintótica espacial

Par concluir este capítulo, encontraremos una representación asintótica espacial cerca del contacto.

Cuando la membrana se encuentra cerca de la placa, la difusión es muy pequeña y la ecuación (4.1) debe aproximarse a  $u_t = -\frac{\lambda}{(1+u)^2}$ . Integrando esta ecuación diferencial y escogiendo  $u(T) = -1$ , obtenemos  $(1+u)^3 = -\lambda(t-T)$ . Esta solución motiva la introducción de una nueva variable  $v(x, t) = \frac{1}{3\lambda}(1+u)^3$ . En términos de  $v$ , (4.1) se transforma a

$$\begin{aligned} v_t &= \Delta v - \frac{2}{3v} \|\nabla v\|^2 - 1, \quad (x, y) \in \Omega; \\ v &= \frac{1}{3\lambda}, \quad (x, y) \in \partial\Omega; \quad v = \frac{1}{3\lambda}, \quad t = 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Tanto en la banda como en el disco, buscamos soluciones radialmente simétricas de la forma

$$v(r, t) = v_0(t) + \frac{r^2}{2}v_2(t) + \frac{r^4}{4}v_4(t) + \dots,$$

donde  $r = |x|$  en el caso de la banda y  $r^2 = x^2 + y^2$  para el disco.

Sustituyendo en (4.16) y agrupando en coeficientes de  $r$ , obtenemos las siguientes ecuaciones acopladas para  $v_0$  y  $v_2$ :

$$v_0' = -1 + Nv_2, \quad v_2' = -\frac{4}{3v_0}v_2^2 + \frac{4}{3}v_4,$$

con condiciones  $v(T) = 0$ ,  $v_0' < 0$  y  $v_2 > 0$  para  $T-t > 0$  y  $T-t \ll 1$ , mientras que  $N = 1$  para la banda y  $N = 2$  para el disco. Siendo que  $v_2$  depende de  $v_4$ , el sistema no es cerrado, por lo que supondremos que  $v_4 \ll v_2^2/v_0$  cerca de la singularidad. Así, el sistema se vuelve

$$v_0 = -1 + Nv_2, \quad v_2' = -\frac{4}{3v_0}v_2^2.$$

Para resolver este sistema asintóticamente conforme  $t \rightarrow T^-$ , suponemos que  $Nv_2 \ll 1$  cerca de  $t = T$ , entonces  $v_0 \sim T-t$ , y la ecuación diferencial para  $v_2$  es

$$v_2' \sim \frac{-4}{3(T-t)}v_2^2, \quad \text{conforme } t \rightarrow T^-.$$

Integrando esta ecuación, obtenemos que

$$v_2 \sim \frac{3}{4 \log(T-t)} + \frac{B_0}{\log^2(T-t)} + \dots, \quad \text{cuando } t \rightarrow T^-$$

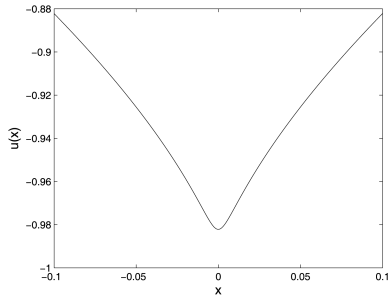
para una constante desconocida  $B_0$ . Observemos que efectivamente  $Nv_2 \ll 1$  cuando  $t \rightarrow T^-$ .

Sustituyendo  $v_2$  en la ecuación diferencial para  $v_0$  e integrando

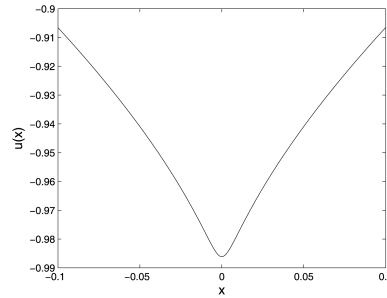
$$v_0 \sim (T-t) \left[ 1 - \frac{3N}{4|\log(T-t)|} + \frac{3r^2}{8(T-t)|\log(T-t)|} + \dots \right],$$

para  $r \ll 1$  y  $t-T \ll 1$ . Finalmente, regresando a nuestra solución  $u$ , concluimos que

$$u \sim -1 + [3\lambda(T-t)]^{1/3} \left( 1 - \frac{3N}{4|\log(T-t)|} + \frac{3r^2}{8(T-t)|\log(T-t)|} + \dots \right)^{1/3}.$$



(a) Banda cerca del contacto. Aquí,  $\lambda = 2$ ,  $T-t = 1 \times 10^{-6}$ .



(b) Disco cerca del contacto. Aquí,  $\lambda = 1$ ,  $T-t = 1 \times 10^{-6}$ .

Figura 4.7: Aproximaciones asintóticas cerca del contacto.

## Capítulo 5

# Conclusiones

De manera inmediata, hemos obtenido resultados que pueden ser directamente aplicados en la construcción de MEMS.

El enfoque cualitativo nos ha permitido encontrar ciertas propiedades del sistema en si mismo, mientras que el cuantitativo nos ha proporcionado una manera sistemática de encontrar valores del parámetro que caracterizan la manera en que operan estos sistemas. Por ejemplo, si lo que se requiere es un microcapacitor que tenga un mayor régimen de operación estable, entonces es preferible que su geometría sea de banda, mientras que si lo deseado es que alcance una capacitancia mayor, es mejor que su geometría sea de disco. Además, se han producido herramientas numéricas para predecir cuales serán los parámetros de operación de dichos sistemas.

Por otro lado, la manera de proceder del estudio puede ser extendida a situaciones más generales, como por ejemplo el sistema con control capacitivo, o bien, un sistema en el cual la permitividad eléctrica de la membrana no sea constante. Lo único que se necesita para ello es que el modelo permita ciertos procesos clave, como lo es poder aplicar un principio del máximo.

Consideremos, por ejemplo, el sistema con control capacitivo. En este caso, un simple lema nos da la oportunidad de aplicar directamente los resultados de este trabajo:

**Lema.** *Una solución  $u$  del problema*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \frac{\beta}{(1+u)^2 \left(1 + \chi \iint_{\Omega^*} \frac{d\xi d\eta}{1+u(\xi,\eta)}\right)^2} = 0 \quad \text{en } \Omega_T,$$

$$u = 0 \quad \text{en } \Gamma_T,$$

*es solución de*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \frac{\lambda}{(1+u)^2} = 0 \quad \text{en } \Omega_T,$$

$$u = 0 \quad \text{en } \Gamma_T,$$

para  $\beta = \lambda(1 + \chi \iint_{\Omega^*} \frac{d\xi d\eta}{1+u(\xi,\eta)})^2$ .

Haciendo uso de este lema, podemos extender de manera inmediata nuestros resultados al problema de control capacitivo. Una primera aplicación, nos permite concluir que no importa qué esquema de control capacitivo propongamos, el sistema nunca va a ser completamente estable.

Consideremos ahora el problema en que la permitividad eléctrica de la membrana no sea constante. Siempre que este perfil sea Hölder continuo, podemos aplicar los principios del máximo, así como los métodos de soluciones superiores e inferiores, para obtener resultados de existencia de estados estacionarios. Además, en el caso en que el perfil dependa sólo de una variable, o tenga determinadas simetrías, es posible realizar análisis particulares del comportamiento de las soluciones en estos casos.

Todo esto muestra que, aunque nuestros resultados hayan sido obtenidos para un caso simplificado, los métodos utilizados pueden ser extendidos a problemas más generales. Como ejemplo está el artículo de Guo, Pan y Ward [13].

Este trabajo, también nos da una perspectiva de como se deberían comportar sistemas más realistas. Por ejemplo, consideremos el caso en el que en vez de una membrana tenemos una placa. La ecuación gobernante de dicho sistema es

$$a \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + D\Delta^2 u - T\Delta u + \frac{\lambda}{(1+u)^2} = 0,$$

donde  $a$  es el coeficiente de viscosidad,  $T$  es la tensión superficial de la placa y  $D$  es la rigidez. Podemos pensar que esta ecuación va a tener un comportamiento similar, en el sentido en que se pueda probar la existencia de la inestabilidad de contacto, y que ésta se deba a la desaparición de soluciones estacionarias. Sin embargo, un estudio detallada del sistema debe ser realizado.

Un problema que también debe ser analizado, es el contrario a este estudio. Si queremos un generador de ondas mecánicas, por ejemplo un microdiapasón. En este sistema, el término inercial debe ser muy significativo, y la naturaleza hiperbólica de la ecuación gobernante hace que el análisis tenga que ser muy distinto. Podemos pensar que, en el caso en que se permitan pequeñas oscilaciones, un argumento de capa límite nos ayudará a comprender de manera parcial el comportamiento del aparato. De cualquier forma, habrá que despolvar los libros y atacar de otra manera este problema.

Cuando Feynman dió su legendaria charla acerca de las pequeñas escalas, mencionó que no se iban a responder grandes preguntas de la física fundamental. En cambio, dijo que el verdadero conocimiento se iba a generar en el ámbito de los sistemas complejos. Después de las horas que he dedicado a este trabajo, creo que por fin he logrado comprender lo que Feynman quiso decir con esas palabras.

Las pequeñas escalas, nos permiten realizar simplificaciones a nuestros modelos, que de otra manera no serían válidas. Estas simplificaciones, nos dejan observar al máximo la naturaleza no lineal de estos sistemas. Es en

esta coyuntura, que el conocimiento a nivel fundamental es desarrollado, pues comprender la manera en que se comportan dichos sistemas, así como su interacción con el entorno en que se encuentran, requiere de todo el conocimiento que existe en fenómenos no lineales, así como el ingenio suficiente para construir conceptos y procesos nuevos e innovadores.



## Apéndice A

# El Esquema de Crank-Nicolson

El esquema de Crank-Nicolson es usado para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales parciales que involucran al tiempo. A continuación se muestra el esquema adaptado al problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + f(u) &= 0 \quad (x, t) \in [a, b] \times (t_0, T], \\ u(a, t) = u(b, t) &= 0, \\ u(x, t_0) &= 0. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Consideremos las derivadas discretizadas en el tiempo y espacio

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{u(x, t_{i+1}) - u(x, t_i)}{h} = \frac{u^{i+1} - u^i}{h} \\ u_x &= \frac{u(x_{j+1}, t) - u(x_j, t)}{k} = \frac{u_{j+1} - u_j}{k}, \end{aligned}$$

donde  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 2, \dots, m$ ,  $h = \frac{T-t_0}{n}$  y  $k = \frac{b-a}{m}$ .

El método de Crank-Nicolson toma en cuenta el promedio de las derivadas espaciales en los extremos de cada paso en el tiempo, es decir

$$\frac{u^{i+1} - u^i}{h} - \frac{1}{2}(u_{xx}^{i+1} + u_{xx}^i) + \frac{1}{2}[f(u^{i+1}) + f(u^i)] = 0.$$

Adoptando la derivada discretizada en el espacio, la ecuación (A.1) se puede escribir como

$$\begin{aligned} u_j^{i+1} - \frac{h}{2k^2}[u_{j+1}^{i+1} - 2u_j^{i+1} + u_{j-1}^{i+1}] + \frac{h}{2}f(u_j^{i+1}) \\ = u_j^i + \frac{h}{2k^2}[u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i] - \frac{h}{2}f(u_j^i), \end{aligned}$$

con condiciones  $u_j^1 = 0$ ,  $u_1^i = u_{m+1}^i = 0$ . Además,

$$f(u_j^{i+1}) = f(u_j^i + [u_j^{i+1} - u_j^i]) = f(u_j^i) + [u_j^{i+1} - u_j^i]f'(u_j^i) + O([u_j^{i+1} - u_j^i]^2),$$

por lo que

$$\begin{aligned} -u_{j+1}^{i+1} + \left[ \frac{2k^2}{h} + 2 + k^2 f'(u_j^i) \right] u_j^{i+1} - u_{j-1}^{i+1} = \\ + u_{j+1}^i + \left[ \frac{2k^2}{h} - 2 + k^2 f'(u_j^i) \right] u_j^i + u_{j-1}^i - 2k^2 f(u_j^i), \end{aligned}$$

o de manera matricial

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{B}\mathbf{u}^i - 2k^2\mathbf{f}(\mathbf{u}^i),$$

donde

$$\mathbf{u}^i = \begin{pmatrix} u_2^i \\ u_3^i \\ u_4^i \\ \vdots \\ u_m^i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}^i) = \begin{pmatrix} f(u_2^i) \\ f(u_3^i) \\ f(u_4^i) \\ \vdots \\ f(u_m^i) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = - \begin{pmatrix} -a_1^i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -a_2^i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -a_3^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_m^i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1^i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & b_2^i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & b_3^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_m^i \end{pmatrix}$$

$$\text{y } a_j^i = -\left[\frac{2k^2}{h} + 2 + k^2 f'(u_j^i)\right], \quad b_j^i = \frac{2k^2}{h} - 2 + k^2 f'(u_j^i).$$

## Apéndice B

# Evaluaciones Numéricas

A continuación se presenta el código de Matlab usado para obtener las estimaciones numéricas utilizadas tanto en el capítulo 3, como en el capítulo 4. Sólo se ha incluido el código correspondiente al problema de la banda, pues el del disco es un poco más tedioso y no es significativamente diferente.

**Nota.** Se han incluido algunas de las subrutinas opcionales para obtener los gráficos mostrados en ambos capítulos. Estas subrutinas disminuyen considerablemente el desempeño del código, por lo que deben ser incluidas sólo si el tiempo de ejecución no es importante.

### B.1. Programa 1: Cálculo de valores propios principales

*% En este código se encuentra numéricamente  $u(0; \lambda)$  para  $\lambda \in [0, \lambda^*]$ . Utilizando este dato, interpola las soluciones  $u(x; \lambda)$  para cada  $u_0$ . Por último, aproxima los valores propios principales de la ecuación de estabilidad lineal (4.5) usando el método de diferencias centrales y crea un archivo de datos con los valores propios correspondientes a cada  $\lambda$ .*

```
function eigb(n)
```

```
if nargin < 1
```

```
% Rutina para determinar el número de valores propios a calcular.
```

```
while (1)
```

```
    nin=input('Eigenvalores Principales (0 para terminar): ', ...  
            's');
```

```
    n=str2num(nin);
```

```
    if ( n>0 )
```

```

        break
    elseif ( n<0 )
        disp('ERROR: n debe de ser un numero positivo');
    elseif ( isempty(n)==1 )
        disp('ERROR: n debe de ser un numero positivo');
    elseif ( n==0)
        break
    end
end
end

disp('Calculando los parametros...');

% Definimos las opciones del Integrador.
options=odeset('Refine',10000);

% Resolvemos con el método de Runge-Kutta el PVI (3.16), donde w = wbanda
definida al final del archivo.

wint=[ 0; 1000000]; % Dominio de integración de w.
wini=[ 1; 0];      % Condiciones iniciales w0 y w'0.

[x,W]=ode45(@wbanda1,wint,wini,options); % Runge-Kutta 45 para w.

% Utilizando la solución numérica W, calculamos los valores de λ y u0 dados por
(3.17).
lambda=4*x.^2./W(:,1).^3;
u0=1-1./W(:,1);

% La siguiente subrutina es opcional.
% Con esta subrutina se realizaron las figuras 3.3 y 3.4 respectivamente.
figure(1);
plot(x,W(:,1));axis[0 10 0 14];
xlabel('x','fontsize',13);ylabel('w(x)','fontsize',13);
set(1,'color','w');
set(gca,'box','on');
figure(2);
plot(lambda,u0);axis[0 1.5 0 1.02];
xlabel('\lambda','fontsize',13);
ylabel('\|u\|-\infty','fontsize',13);
set(2,'color','w');
set(gca,'box','on');
% Termina subrutina opcional.

% Determinamos el valor máximo de λ, así como en que renglón se encuentra.
[lambda_max, indice]=max(lambda);

% Con el valor máximo determinado, partimos el diagrama de bifurcación en sus
ramas inferior y superior respectivamente.
lambda1=lambda(1:indice);
u01=u0(1:indice);

```

```

lambda2=lambda(indice+1:length(lambda));
u02=u0(indice+1:length(lambda));

% Liberamos las variables que ya no necesitamos.
clear wint wini x W indice lambda u0;
disp('Terminado');

% Una vez determinado el número de valores propios que se desea, necesitamos igual
número de valores de  $\lambda$  para obtenerlos.

% Primero dividimos el intervalo  $[0, \lambda_{max}]$  en  $n$  subintervalos.
h_lambda =(lambda_max-0.00001)/n;
lambda=0.00001;

% Parámetros para calcular los valores propios principales  $\mu$ .
h_mu=0.01;
x_mu=-0.5:h_mu:0.5;
n_mu=length(x_mu)-1;

% Extraemos los valores numéricos de  $\lambda$  más cercanos a los valores de  $\lambda$  requeridos.
Usando estos valores de  $\lambda$  obtenemos las condiciones iniciales para cada rama.

fid=fopen('vp.dat','w'); % Archivo de datos lambda y mu.
for k=1:n
    lambda = lambda+h_lambda;
    [dif1 , indice1]=min(abs(lambda1-lambda));
    [dif2 , indice2]=min(abs(lambda2-lambda));
    lambda_inf=lambda1(indice1); lambda_sup=lambda2(indice2);
    a=-u01(indice1); b=-u02(indice2);

% Ya que se tienen los valores de  $\lambda$  y  $u(0)$  obtenemos  $u(x)$  en el intervalo  $[0, 1/2]$  y
luego extendemos de manera par.
    int=[0;0.5];
    uini=[a; 0; b; 0];
    [y,U]=ode45(@ubanda1,int,uini,options);
    [e,f]=size(U);
    yy=[sort(-y);y];yy(e)=[];yInt=-0.5:0.00001:0.5;
    U1=[sort(U(:,1),'descend');U(:,1)];U1(e)=[];
    U2=[sort(U(:,3),'descend');U(:,3)];U2(e)=[];

% Calculamos los valores propios con el método de diferencias centrales. Para
ello, primero discretizamos la segunda derivada. Después interpolamos las soluciones
numéricas  $U_1$  y  $U_2$ . Sustituimos en la ecuación de estabilidad lineal (4.5) y obtenemos
 $n_{mu}$  ecuaciones en diferencias con condiciones de Dirichlet  $v_1 = v_{n+1} = 0$ . Escribimos
el sistema como una matriz  $\mathbf{M}$  de  $(n_{mu} - 1) \times (n_{mu} - 1)$  componentes y encontramos
los valores propios para cada una de las soluciones.

    Ml=diag(-2+(2*lambda_inf*(h_mu)^2)./(1+interp1(yy,U1,...
        x_mu(1:n_mu-1)).^3)+diag(ones(1,n_mu-2),1)+...
        diag(ones(1,n_mu-2),-1);

```

```

M2=diag(-2+(2*lambda_sup*(h_mu)^2)./(1+interp1(yy,U2,...
        x_mu(1:n_mu-1))).^3)+diag(ones(1,n_mu-2),1)+...
        diag(ones(1,n_mu-2),-1);
[C,D] = eig(M1);
[H,I] = eig(M2);
[mu,index1]=sort(diag(D)/(h_mu)^2);
[nu,index2]=sort(diag(I)/(h_mu)^2);
if ( imag(mu) == 0 )
    [mul,index1]=sort(mu,'descend');
    mul;
end
if ( imag(nu) == 0 )
    [nul,index2]=sort(nu,'descend');
    nul;
end
muprin=mul(1);
nuprin=nul(1);

% Capturamos los datos en el archivo vp.dat
fprintf(fid, '%f %f %f \n',lambda_inf ,muprin ,...
        lambda_sup ,nuprin);

% La siguiente subrutina es opcional.
% Con los valores propios principales calculados, realizamos dos figuras. La figura 1
son las soluciones de (3.13). Las soluciones correspondientes a la rama inferior en
azul, las correspondientes a la rama superior en verde y la crítica en rojo. La figura 2
son los valores propios principales de cada una de las soluciones.
s=get(0,'ScreenSize');
if ( k<n )
    figure(3);
    hold on
    plot(yInt ,interp1(yy,U1,yInt) ,yInt ,interp1(yy,U2,...
        yInt));
    xlabel('x','fontsize',13);ylabel('u','fontsize',13);
    axis([-0.5 0.5 -1 0.02]);
    set(3,'Position',[6 sz(4)/3 sz(3)/2-10 sz(4)/2],...
        'Name','Soluciones','color','w');
    set(gca,'box','on');
    figure(4);
    hold on
    plot(lambda_inf ,muprin ,'*',...
        lambda_sup ,nuprin ,'*');
    xlabel('\lambda','fontsize',13);
    ylabel('\nu','fontsize',13);
    set(4,...
        'Position',[s(3)/2+4 s(4)/3 s(3)/2-10 s(4)/2],...
        'Name','Valores Propios Principales','color','w');
    set(gca,'box','on');
else
    figure(3);

```

```

        hold on
        plot(yInt,interp1(yy,U1,yInt),'r');
        xlabel('x','fontsize',13);
        ylabel('u','fontsize',13);
        axis([-0.5 0.5 -1 0.02]);
        set(gca,'box','on');
    figure(4);
    hold on
    plot(lambda_inf,muprin,'r*');
    xlabel('\lambda','fontsize',13);
    ylabel('\mu','fontsize',13);
    set(gca,'box','on');
end
% Termina subrutina opcional.

    fprintf('Pasos restantes: %d\n',n-k);

    k=k+1;
end
fclose(fid);

% La siguiente subrutina es opcional.
% Con esra subrutina se realizó la figura (4.1).
[lambda_mu,mu_prin,lambda_nu,nu_prin]=textread('vp.dat',...
        '%f %f %f %f',n);
[mumin,muind]=min(mu_prin);
ymin=mumin+mumin/10;
nuind=min(find(nu_prin < (3.3)*abs(ymin)));
ymax=nu_prin(nuind)+nu_prin(nuind)/10;
z1=0:0.0001:lambda_max;
z2=lambda_nu(nuind):0.0001:lambda_nu(length(nu_prin));
figure(5);
    plot(z1,interp1(lambda_mu,mu_prin,z1),'k-',z2,...
        interp1(lambda_nu(nuind:length(nu_prin)),...
            nu_prin(nuind:length(nu_prin)),z2),'k-');
    xlabel('\lambda','fontsize',13);
    ylabel('\mu','fontsize',13);
    axis([0 1.5 ymin ymax]);
    set(3,'Title','Valores Propios Principales','color','w');
    set(gca,'box','on');
% Termina subrutina opcional.

else
end
function dw = wbanda1(x,w)
    dw=zeros(size(w));
    dw(1)=w(2);
    dw(2)=1/w(1)^2;
end
function du = ubanda1(x,u)

```

```

    du=zeros(size(u));
    du(1)=u(2);
    du(2)=lambda_inf/(1+u(1))^2;
    du(3)=u(4);
    du(4)=lambda_sup/(1+u(3))^2;
end
end

```

## B.2. Programa 2: El esquema de Crank-Nicolson

*% Este programa está diseñado para encontrar la solución de la ecuación (4.5).*

```

function cnb(t)
if nargin <1

    % Parámetros del sistema .
    lambda=input('Dame el valor de lambda: ');
    n=input('Numero de puntos en x: ');
    t=input('Dame el tiempo final T: ');
    m=input('Dame el numero de pasos en el tiempo: ');
    k=1/n;
    h=t/m;
    % Discretizamos el intervalo x y asignamos la dimensión de u.
    s=-.5:k:.5;
    u=zeros(1,n-1)';
    % Creamos el archivo de datos donde se va a guardar la solución numérica.
    fid=fopen('infu.dat','w');
    sz=get(0,'ScreenSize');

    % En esta subrutina, se calculan los valores del vector  $u^i$  para cada paso en el tiempo.
    hold on;
    for i=1:m
        u=inv(diag((2*k^2)/h+2+(-2*k^2*lambda)./(1+u).^3) - ...
            diag(ones(1,n-2),1) - diag(ones(1,n-2),-1))*...
            ((diag((2*k^2)/h-2+(-2*k^2*lambda)./(1+u).^3) ...
            +diag(ones(1,n-2),1) + diag(ones(1,n-2),-1)) ...
            *u - (2*k^2*lambda)./(1+u).^2);
        v=[0;u;0];
    % Usando este cálculo, construimos la gráficas 4.2 y 4.6.
    figure(1);
    plot(s,v,'k'); axis([-0.5 0.5 -1 0.02]);
    xlabel('x','fontsize',13); ylabel('u','fontsize',13);
    set(gcf,'Name','Soluciones','color','w',...
        'Position',[6 sz(4)/3 sz(3)/2-10 sz(4)/2]);
    set(gca,'box','on');
    tiempo=i*h;
    [infu,indice]=min(u);
    if( -1.5 <=infu )

```



```

        fprintf(fid, '%f %f \n', tiempo, infu);
    end
end
fclose(fid);
t=h*m;
[t1, infu1]=textread('infu.dat', '%f %f', m);

% Usando el método de Runge-Kutta, obtenemos los valores numéricos de las cotas
de la energía.
[y, V]=ode45(@vt, [0 t], [0]);
[z, P]=ode45(@pt, [0 .5], [0]);

tmin=1/(3*lambda);
tcontacto=interp1(infu1, t1, -1)
tmax=quad(@wt, -.9999999, 0);

% Usando estos valores, construimos la grafica de la figura 4.5.
figure(2);
plot([0; t1], [0; infu1], 'k-', tmin, V, 'k-', y, V, 'k-', z, P, ...
     'k-', tcontacto, V, 'k-', tmax, V, 'k-');
axis([0 .5 -.9 0]); xlabel('t', 'fontsize', 13);
ylabel('inf(u)', 'fontsize', 13);
text(tmin-0.03, -.7, '\nu(t)', 'HorizontalAlignment', ...
     'center', 'fontsize', 10);
text(tcontacto-0.04, -.7, 'u(x=0,t)', 'HorizontalAlignment', ...
     'center', 'fontsize', 10);
text(tcontacto+.015, -.05, 'T^*', 'HorizontalAlignment', ...
     'center', 'fontsize', 10);
text(tmax-0.03, -.7, '\phi(t)', 'HorizontalAlignment', ...
     'center', 'fontsize', 10);
set(gcf, 'Position', ...
     [sz(3)/2+4 sz(4)/3 sz(3)/2-10 sz(4)/2], ...
     'Name', 'inf u', 'color', 'w');
set(gca, 'box', 'on');
end
% La cota inferior v(x,t) satisface la ecuación diferencial  $v_t = -\lambda/(1+v)^2$ .
function dv=vt(y, v)
    dv=-lambda/(1+v)^2;
end
% La función  $\phi$  que satisface (4.9)
function dp=pt(z, p)
    dp=-pi^2*p-lambda/(1+p)^2;
end

function w=wt(z)
    w=1./(pi^2*z+lambda./(1+z).^2);
end
end

```

# Bibliografía

- [1] J. BEBERNES Y D. EBERLY. *A description of self-similar blow-up for dimensions  $n \geq 3$* . Ann. of Inst. Henri Poincare, 5, (1998), págs. 1–21.
- [2] D. BERNSTEIN, P. GUIDOTTI, Y J. PELESKO. *Mathematical analysis of an electrostatically actuated MEMS devices*. En *Proceedings of MSM* (2000).
- [3] J. BRAUN Y R. V. CHURCHILL. *Fourier series and boundary value problems*. McGraw-Hill International (2001).
- [4] R. COURANT. *Differential and Integral Calculus*, tomo 2. Wiley & Sons (1988).
- [5] L. C. EVANS. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society (1998).
- [6] R. P. FEYNMAN. *There's plenty of room at the bottom: An invitation to enter a new field of physics*. Engineering and Science, 23(5), (1960).
- [7] M. FILA Y J. HULSHOF. *A note on the quenching rate*. Proceedings of the American Mathematical Society, 112, (1991), págs. 473–477.
- [8] G. FLORES, G. MERCADO, J. PELESKO, Y N. SMYTH. *Dynamics and touchdown in a model of electrostatic MEMS*. SIAM Journal of Applied Mathematics. Enviado.
- [9] G. FLORES, G. A. MERCADO, Y J. A. PELESKO. *Dynamics and touchdown in electrostatic MEMS*. Proc. of DETC'03 (2003), págs. 1–8.
- [10] Y. C. FUNG. *A First Course in Continuum Mechanics*. Prentice-Hall (1969).
- [11] D. J. GRIFFITHS. *Introduction to electrodynamics*. Pertinence Hall (1999).
- [12] J. GUO. *On the semilinear elliptic equation  $\Delta w - \frac{1}{2}y\nabla w + \lambda w - w^{-\beta} = 0$  in  $\mathbb{R}^n$* . Chinese Journal of Mathematics, 19(4), (1991), págs. 355–377.
- [13] Y. GUO, Z. PAN, Y M. WARD. *Touchdown and pull-in voltage behavior of a MEMS device with varying dielectric properties*. Enviado a SIAM Journal of Applied Mathematics.

- [14] J. HUBBARD Y B. WEST. *Differential equations: a dynamical systems approach*, tomo 1 & 2. Springer-Verlag (1995).
- [15] J. D. JACKSON. *Classical Electrodynamics*. Wiley & Sons (1999).
- [16] H. NATHANSON, W. NEWELL, R. WICKSTORM, Y J. DAVIS. *The resonant gate transistor*. IEEE Transactions on on Electron Devices, 14, (1967), págs. 117–133.
- [17] C. V. PAO. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*. Plenum Press (1992).
- [18] J. PELESKO. *Mathematical modeling of electrostatic MEMS with tailored dielectric properties*. SIAM Journal of Applied Mathematics, 62(3), (2002), págs. 888–908.
- [19] J. PELESKO Y D. BERNSTEIN. *Modeling MEMS and NEMS*. Chapman Hall and CRC Press (2002).
- [20] J. PELESKO Y X. CHEN. *Electrostatic deflection of circular elastic membranes*. Journal of Electrostatics, 57, (2003), págs. 1–8.
- [21] J. PELESKO Y A. TRIOLO. *Nonlocal problems in MEMS device control*. Journal of Engineering Mathematics (2001), págs. 345–366.
- [22] M. PROTTER Y H. WEINBERGER. *Maximum principles in differential equations*. Prentice-Hall (1967).
- [23] J. SEEGER Y S. CRARY. *Stabilization of electrostatically actuated mechanical devices*. Proceedings of the 1997 International Conference on Solid-State Sensors and Actuators, págs. 1133–1136.
- [24] J. SMOLLER. *Shock Waves and Reaction-Difusion Equations*. Springer-Verlag (1994).
- [25] G. TAYLOR. *The coalecence of closely spaced drops when they are at different electric potentials*. Proceedings of the Royal Society A, 306, (1968), págs. 423–434.
- [26] W. TRIMMER. *Microbots and micromechanical systems*. Sensors and Actuators, 19, (1989), págs. 267–287.