



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

"Impacto Asimétrico de un Anillo de Vorticidad con  
una Pared"

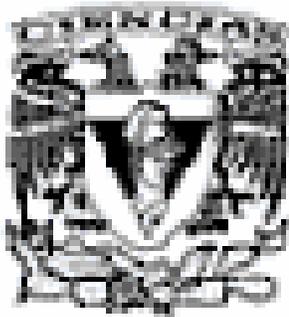
**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

FÍSICA

**P R E S E N T A :**

TANIA SANTIAGO ARCE

TUTOR: DR. GERARDO RUIZ CHAVARRÍA



2006



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres, hermanos y esposo.

## AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Gerardo Ruiz Chavarría por la paciencia, tiempo y confianza en el desarrollo y término del presente trabajo.

A los sinodales Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes, Dr. Steven Czitrom Baus, M. En C. Edgar Vázquez Luis y al Fís. Jorge Pérez López por su tiempo, revisión y comentarios del trabajo de Tesis.

Al M. en C. Gregorio Ruiz Chavarría y al M. en C. Sergio Hernández Zapata por la ayuda brindada en el desarrollo de la parte electrónica del dispositivo empleado para el experimento.

A Norma, Elizabeth, Alejandra, Alexandra, David, Walter, Felipe, los Marcos, los Carlos los Orlandos, los Robertos, los Alejandro, Pedro, Armando, Elio, Erick, Adrián, Noé, Gustavo por su ayuda y compañía para cerrar un ciclo en mi vida.

A Álvaro Vázquez por compartir su experiencia en el tema.

Este trabajo ha sido apoyado por los proyectos CONACYT 32731-E (Estudio de la dinámica de vórtices) y PAPIME PE 100505(Enseñanza Experimental de la Mecánica de Fluidos).

ÍNDICE	Pág.
RESUMEN	1
INTRODUCCIÓN	2
1. ANTECEDENTES	3
2. CONCEPTOS GENERALES DE LA DINÁMICA DE FLUIDOS	4
2.1 Movimiento general de un fluido	4
2.2 Principio de conservación de la masa y Segunda Ley de Newton	6
2.3 Fuerzas en un Fluido	6
2.3.1 Superficiales	7
2.3.1.1 Presión	7
2.3.1.2 Viscosidad	8
2.4 Teorema de Transporte de Reynolds	10
2.5 Teorema de Kelvin	11
3. VORTICIDAD	13
4. ANEMOMETRÍA DE HILO CALIENTE	15
4.1 Calibración	15
5. DESCRIPCIÓN DEL DISPOSITIVO EXPERIMENTAL	17
5.1 Sistema de Traslación	17
5.2 Montaje y Funcionamiento del Dispositivo Experimental	19
6. RESULTADOS	21
6.1 Impacto Ligeramente Asimétrico	21
6.2 Impacto Asimétrico	24
CONCLUSIONES	27
ANEXOS	28
BIBLIOGRAFÍA	28

## RESUMEN

En el presente trabajo se estudian anillos de vorticidad analizando el efecto de éstos al chocar con una pared plana y lisa, principalmente en un impacto asimétrico; centrándose en determinar el efecto sobre su velocidad y vorticidad, durante el proceso de destrucción del anillo al impactar en la pared, para lo cual se utilizó la técnica de anemometría de hilo caliente. Debido a la gran cantidad de datos a analizar se diseñó y desarrolló un sistema automatizado de toma de datos, este sistema consiste de un anemómetro de hilo caliente conectado a una tarjeta de adquisición de datos, una bocina que genera los anillos de vorticidad por la aplicación de una señal proveniente de un generador de funciones; un aparato de traslación “X-Y” accionado con motores a pasos, para obtener datos del campo de velocidad en diferentes puntos y tiempos, durante el recorrido del anillo hasta su impacto. La generación de los anillos, la toma de datos y el desplazamiento de la sonda con el aparato de traslación está sincronizado y controlado por programas de cómputo.

Los resultados se analizaron utilizando los programas Scilab y Matlab. Se observó el proceso de frenado y destrucción del anillo al chocar con la pared, encontrándose que el anillo al tener un impacto genera vórtices secundarios.

## INTRODUCCIÓN

El interés en estudiar los anillos de vorticidad se debe a que este fenómeno se presenta frecuentemente en la naturaleza y el análisis de éste ha sorprendido al hombre por mucho tiempo, ya que al estar rodeado de fluidos (aire y agua), los efectos de la vorticidad pueden ser tan divertidos y entretenidos como el ver una nube deformarse en el cielo, o agitar una taza de café humeante o tan peligrosos e imponentes como los que se presentan en un huracán, un tornado o un río turbulento.

El objetivo del presente trabajo es observar el proceso de destrucción de un anillo de vorticidad que choca contra una pared plana, la generación de vórtices secundarios y la investigación de las asimetrías que se producen cuando la dirección del movimiento del vórtice no es paralelo al vector normal de la pared.

Desde antaño la vorticidad ha sido un tema de interés para muchos, por esto en el capítulo 1 se recogen algunos datos sobre los antecedentes de este fenómeno. Debido a que la vorticidad es una cantidad que se presenta en la dinámica de fluidos, es necesario conocer los principios básicos que la rigen, por ello en el capítulo 2 se desarrollan algunos de estos principios.

En el capítulo 3 se establece qué es un vórtice, que es vorticidad y que se entiende por anillo de vorticidad. También se establece la analogía entre las ecuaciones para el campo de velocidad en un flujo incompresible y el campo magnético sin corrientes de desplazamiento, lo que nos permite establecer la semejanza entre el campo producido por una espira circular y la velocidad alrededor de un anillo de vorticidad que es el caso de un anillo libre.

Para la determinación del campo de velocidad de los anillos se empleó la técnica de **anemometría de hilo caliente**, cuyos principios se enuncian en el capítulo 4.

En el capítulo 5 se da la descripción del sistema de traslación diseñado y elaborado, así como el montaje de este con otros aparatos utilizados en el experimento, para la generación de los anillos de vorticidad y la adquisición de los datos.

Los resultados se presentan en el capítulo 6. Para el análisis de los resultados se utilizaron los programas Scilab y Matlab. Con la velocidad obtenida se encontró la vorticidad del anillo, también se muestra el desarrollo del anillo hasta impactarse con la pared, observándose que, el anillo al chocar disminuye su velocidad y genera vórtices secundarios. Por último tenemos las conclusiones del trabajo, así como las propuestas para mejorar este experimento.

## 1 ANTECEDENTES

La vorticidad ha sido observada y estudiada desde hace tiempo, Leonardo Da Vinci observó vórtices creados en un río en el siglo XV. Posteriormente esta observación fue retomada en el siglo XIX (1878) por V. Strouhal (Pankanin, 2005), quien encontró que los tonos generados por un alambre en el viento son proporcionales a la velocidad del viento dividida por el espesor del alambre. Theodore Von Kármán presentó un artículo de la estela de vórtices en la Academia de Göttingen en 1911 (Smith, 2003).

En cuanto a los antecedentes de la técnica de Anemometría de Hilo Caliente, los fundamentos del método fueron establecidos por King en 1914 (Bruun, 1996). Este método se ha usado con éxito en diferentes flujos, incluyendo mediciones en turbulencia desarrollada.

Existen muchas situaciones en que los vórtices ocurren, los hay pequeños con diámetros de milímetros o centímetros y de muy poca duración, como los que se generan en un lavabo, o en las aspas de una hélice. También los hay grandes, de diámetros de miles de kilómetros y pueden durar días como los huracanes o los tornados o también como la mancha roja de la atmósfera de Júpiter que ha existido por siglos (Velasco, 2003).

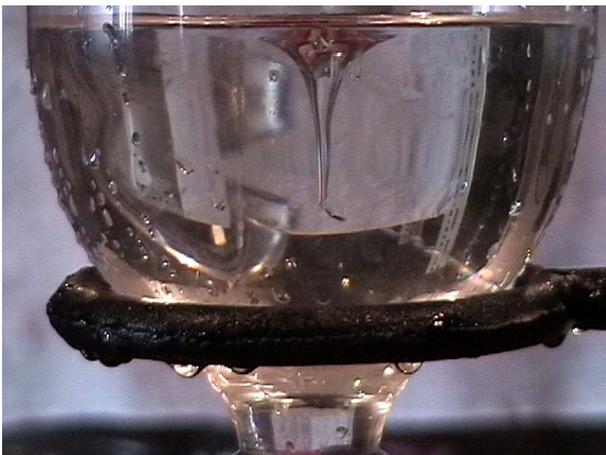


Fig. 1. a) vórtice semejante al producido en un lavabo, experimento realizado en el Laboratorio de Acústica y b) el Huracán Elena (NASA/Science Source/Photo Researchers, Inc. Enciclopedia Microsoft © Encarta © 2003).

## 2. CONCEPTOS GENERALES DE LA DINÁMICA DE FLUIDOS

En general, un fluido es toda sustancia que tiene la propiedad de deformarse al aplicarle una fuerza tangencial o de corte, por esta razón la denominación de fluido se refiere a los líquidos y los gases.

Existen dos maneras de describir el movimiento de un fluido, la representación euleriana en la que los “parámetros del flujo se dan como una variable de campo, es decir, como una función del tiempo y del espacio. Por ejemplo,  $f = f(x, y, z, t)$ . Una partícula en una posición y tiempo dados, debe tener cierta densidad, velocidad, energía, etcétera y, al transcurrir el tiempo, partículas diferentes ocuparían esa posición” (Smith, 2003). Y la representación lagrangiana en donde cada partícula se identifica por su posición en un tiempo dado, es decir,  $(x_0, y_0, z_0, t_0)$  y se observa en el tiempo. Por ejemplo  $f = f(x_0, y_0, z_0, t - t_0)$ . Es difícil seguir el movimiento de las posiciones de todas las partículas de un campo de flujo, porque sus posiciones relativas cambian continuamente en el tiempo por eso se prefiere en general el método de Euler.

### 2.1. Movimiento general de un fluido

El movimiento más general de un fluido es la suma de una traslación, una rotación y una deformación, es decir,  $T + R + D =$  Movimiento de un fluido.

Para probarlo tomamos las velocidades de dos partículas en las posiciones  $\bar{x}$  y  $(\bar{x} + \delta\bar{x})$ :

$$\bar{v}(\bar{x}) \text{ y } \bar{v}(\bar{x} + \delta\bar{x})$$

si desarrollamos en una serie de Taylor al segundo término obtenemos:

$$\bar{v}(\bar{x} + \delta\bar{x}) = \bar{v}(\bar{x}) + (\delta x_i) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} + \frac{(\delta x_i)^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x_i^2} + \dots \quad (1)$$

$$= \bar{v}(\bar{x}) + \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} dz \right], \quad (2)$$

El primer término después del signo igual representa la traslación. Los términos entre paréntesis cuadrados corresponden a la rotación y deformación; debido a que  $\bar{v}$  tiene tres componentes (u, v, w), entonces estos términos representados en forma de matriz transpuesta, toman la siguiente forma:

$$\delta \bar{\mathbf{v}}^T(\bar{\mathbf{x}} + d\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} \quad (3)$$

Ahora, para encontrar la deformación y la rotación, consideremos cualquiera, dos cantidades A y B, (escalares, vectores o tensores) . Estas cumplen siempre la siguiente relación:

$$A = 1/2(A + B) + 1/2(A - B) \quad (4)$$

hagamos

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{Tomemos a B como la transpuesta de A:} \quad B = A^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (5)$$

sustituyendo las matrices A y B en el primer término de la ecuación (4) obtenemos:

$$\frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} & 2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} & 2 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} \quad (6)$$

Esta matriz contiene las deformaciones del sistema. Por otra parte, el término restante:

$$\frac{1}{2}(A - B) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) \delta y + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \right) \delta z \\ \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \delta x + \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} \right) \delta z \\ \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) \delta x + \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) \delta y \end{pmatrix} \quad (7)$$

representa la rotación. Podemos ver que la matriz anterior se puede escribir como un producto vectorial (cruz):

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \times (\delta x, \delta y, \delta z) = (\bar{\boldsymbol{\Omega}} \times \delta \bar{\mathbf{r}}) \quad (8)$$

El primer vector en el producto cruz anterior es la mitad del rotacional del campo de velocidades.

Recordemos que en un movimiento de rotación la velocidad lineal y la angular se relacionan a través de la ecuación :  $\bar{u} = \bar{\Omega} \times \bar{r}$ . Por lo tanto el término anterior corresponde a una rotación alrededor del punto (x, y, z) que fue donde se hizo el desarrollo en serie de Taylor, donde  $\Omega$  es la velocidad angular, y  $r$  el vector posición de las partículas. El primer término entre paréntesis de la ecuación (8) Es una cantidad que se conoce, en la mecánica de fluidos, como vorticidad y la representamos como:  $\bar{\omega} = \nabla \times \bar{u}$ . (9)

### 2.2. Principio de Conservación de la Masa y Segunda Ley de Newton

El movimiento de los fluidos debe satisfacer el principio de conservación de la masa, el cual “establece que: la cantidad de masa permanece constante en el universo.”(Ruiz, 1988), de donde se desprende que un volumen (V) fijo de fluido no tiene cambio de masa (M) a menos que, a) exista una adición o, b) una sustracción; a través de la superficie que lo limita.

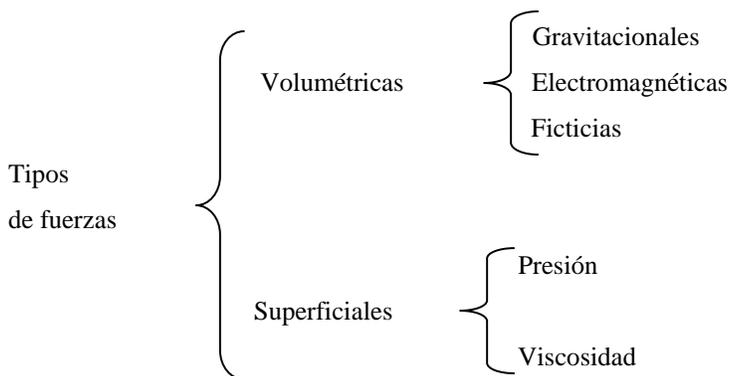
De esta manera, considerando un fluido de densidad  $\rho$  y volumen  $V$ , tenemos que su masa M la podemos representar como:  $M = \int \rho dv$ . (10)

Considerando el principio de conservación de la materia, lo anterior implica que la derivada con respecto al tiempo de una masa dada, debe ser cero, es decir,  $\frac{d}{dt} M = \frac{d}{dt} \int \rho dv = 0$ . (11).

La segunda Ley de Newton establece que la variación por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento de un elemento de fluido es igual a la resultante instantánea de las fuerzas que actúan sobre él  $\bar{F} = \frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \int \rho \bar{u} dV$ . (12)

### 2.3. Fuerzas en un Fluido

Las fuerzas que actúan en un fluido se pueden clasificar en dos tipos: las volumétricas que influyen sobre cada punto material del fluido y, las superficiales que intervienen sobre la superficie del elemento de fluido (Ruiz, 1988). En el siguiente cuadro se indican cuales son cada una de ellas.



### 2.3.1. Fuerzas Superficiales

Una fuerza ( $\vec{F}$ ) que actúa en un área (A), puede ser descompuesta en una componente normal y una componente tangencial, la fuerza ( $\vec{F}$ ) dividida entre el área (A) en la cual se ejerce se llama *esfuerzo*, la componente normal genera un esfuerzo normal, el cual tiende a comprimir o expandir la partícula de fluido en estudio, y la componente tangencial produce un esfuerzo cortante, deformando su figura. De esta manera, la presión es un esfuerzo normal y la viscosidad es un esfuerzo que puede ser tanto cortante como normal.

#### 2.3.1.1. Presión

Considérese un fluido en reposo y tomemos un elemento de volumen cúbico, como se muestra en la figura 2, la gravedad  $g$  actúa sobre el eje  $z$ , en la dirección negativa.

Sabemos que  $\vec{F} = PA \cdot \hat{n}$ , donde  $P$  es la presión,  $\vec{F}$  la fuerza, A el área y  $\hat{n}$  el vector normal a la superficie

Considérese la fuerza inducida por la presión en las caras a y b.

Tenemos que:

$$d\overline{F}_{presión}^x = P(x)\Delta y\Delta z - P(x+\Delta x)\Delta y\Delta z = -[P(x+\Delta x) - P(x)]\Delta y\Delta z = -\frac{P(x+\Delta x) - P(x)}{\Delta x}\Delta x\Delta y\Delta z \approx -\frac{\partial P}{\partial x}\Delta V$$

(13)

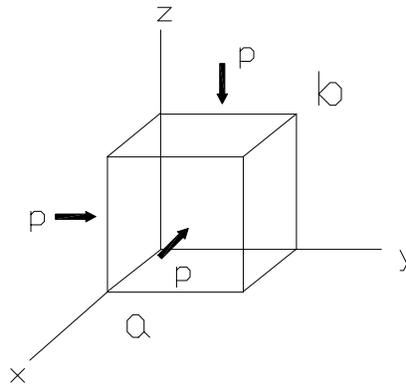


Fig. 2. Fuerzas que actúan en un elemento de volumen cúbico debido a la existencia de la presión .

lo mismo en la dirección  $y$  y  $z$ .

$$d\overline{F}_{presión}^y = -\frac{\partial P}{\partial y}\Delta V \quad (14) \quad \text{y} \quad d\overline{F}_{presión}^z = -\frac{\partial P}{\partial z}\Delta V \quad (15), \quad \text{entonces la fuerza total sobre el elemento de}$$

volumen es:

$$d\bar{F}_{\text{presión}} = \left( -\frac{\partial P}{\partial x}, -\frac{\partial P}{\partial y}, -\frac{\partial P}{\partial z} \right) \Delta V = -\nabla P \Delta V \quad (16)$$

$$\text{integrando } \bar{F}_{\text{presión}} = \int -\nabla P dV \quad (17)$$

### 2.3.1.2. Viscosidad

La viscosidad es la resistencia de un fluido al movimiento. La presencia de este fenómeno la analizaremos empezando por tomar de una cantidad de fluido en movimiento un elemento de volumen cúbico, como lo muestra la figura 3,

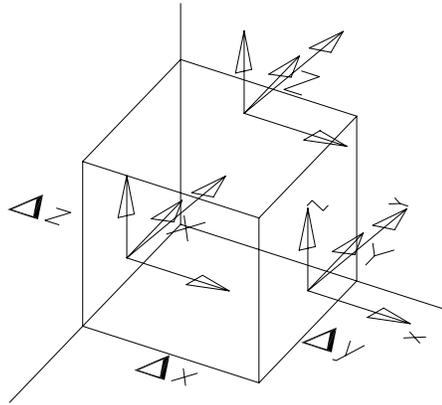


Fig. 3. Muestra el esfuerzo viscoso que actúa en un elemento de volumen cúbico

donde identificamos nueve componentes de esfuerzos, tres para cada plano cartesiano. Se obtiene un tensor de esfuerzo

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \text{ Tensor de esfuerzo viscoso. (18)}$$

Cada elemento del tensor, representa fuerzas por unidad de superficie (esfuerzos) que apuntan en una cierta dirección. El primer índice de cada elemento indica el plano y el segundo índice indica la dirección sobre el plano, sobre el que actúa el esfuerzo.

Para obtener el esfuerzo viscoso es necesario considerar las fuerzas que actúan en cada cara y en cada dirección de la partícula que estamos analizando, partiendo del tensor de esfuerzo,

$$\begin{aligned} d\bar{F}_{\text{viscosa}}^{x(x,y,z)} &= \sigma_x(x + \Delta x) \Delta y \Delta z - \sigma_x(x) \Delta y \Delta z \\ &= [\sigma_x(x + \Delta x) - \sigma_x(x)] \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma_x(x+\Delta x) - \sigma_x(x)}{\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Delta V \quad (19)$$

$\sigma_x$  es el esfuerzo que actúa en el plano X, haciendo lo mismo para los esfuerzos que actúan en los planos Y y Z, se obtienen los esfuerzos en las seis caras de la partícula

$$\overline{dF}_{viscosa}^{y(x,y,z)} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \Delta V \quad (20) \quad \text{y} \quad \overline{dF}_{viscosa}^{z(x,y,z)} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \Delta V \quad (21);$$

como  $\sigma_x = (\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz})$  entonces  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}, \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}, \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} \right) \Delta V \quad (22)$

$$d\overline{F}_{viscosa}^x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Delta V + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \Delta V + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \Delta V = \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \Delta V \quad (23)$$

el mismo desarrollo para  $\sigma_y = (\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz})$  entonces  $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \left( \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y}, \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}, \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} \right) \Delta V \quad (24)$

$$d\overline{F}_{viscosa}^y = \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \Delta V \quad (25)$$

y para  $\sigma_z = (\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz})$  luego  $d\overline{F}_{viscosa}^z = \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \Delta V \quad (26)$ , por lo tanto

$$d\overline{F}_{viscosa} = \left( \frac{\partial \overline{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\sigma}_z}{\partial z} \right) \Delta V \quad (27)$$

$$d\overline{F}_{viscosa} = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) \hat{i} dV + \left( \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right) \hat{j} dV + \left( \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \hat{k} dV \quad (28)$$

Usemos ahora la hipótesis de fluido newtoniano  $\overline{\sigma} = \mu \overline{D}$  donde  $\overline{\sigma}$  es el tensor de esfuerzo viscoso,  $\mu$  es la viscosidad dinámica y  $\overline{D}$  es el tensor de deformación.

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & 2\frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (29) \quad \text{entonces de } \overline{\sigma} = \mu \overline{D} \text{ y considerando}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) & \sigma_{yy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \sigma_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \sigma_{yx} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \sigma_{yy} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) & \sigma_{yz} &= \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \sigma_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \sigma_{zy} &= \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \sigma_{zz} &= \mu \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)\end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}d\bar{F}_{\text{viscosa}} &= \left( \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \right. \\ &\quad \left. \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\ &\quad \left. \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) dV\end{aligned} \quad (31)$$

$$d\bar{F}_{\text{viscosa}} = \mu \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \bar{u} + \frac{\partial}{\partial y} \nabla \cdot \bar{u} + \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \bar{u} \right) + \nabla^2 \bar{u} \right] dV \quad (32)$$

y para un fluido incompresible  $\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad \therefore d\bar{F}_{\text{viscosa}} = \mu \nabla^2 \bar{u} dV \quad (33)$

integrando  $\bar{F}_{\text{vis}} = \int \mu \nabla^2 \bar{u} dV \quad (34)$

## 2.4. Teorema de Transporte de Reynolds

“Las leyes de la mecánica y la termodinámica están referidas usualmente a un elemento de masa. Sin embargo, la descripción euleriana requiere de la aplicación de estas leyes a un elemento de volumen. El paso de una a otra se hace por medio de un resultado conocido como *Teorema de Transporte de Reynolds*.”(Ruiz, 1988)

Para ello se considera una propiedad extensiva cualquiera del fluido, denotándola como  $L$  y una propiedad intensiva  $l$  que se relaciona con la primera de la siguiente manera

$$L = \int_V l(\bar{x}, t) dv \quad (35),$$

derivándola respecto al tiempo, obtenemos

$$\frac{dL}{dt} = \int_V \frac{\partial l}{\partial t} dv + \oint_S l \bar{u} \cdot \hat{n} dS, \quad (36)$$

la primera integral significa la variación de esa propiedad en el interior del volumen de control y la segunda nos da el flujo total de la propiedad a través de la superficie de control; aplicando el teorema de la divergencia o de Gauss a la ecuación anterior quedará ya en términos de integrales de volumen

como:  $\frac{dL}{dt} = \int_v \left[ \frac{\partial l}{\partial t} + \text{div}(l\bar{u}) \right] dv$  (37) esta es la representación del Teorema de Transporte de Reynolds.

Haciendo  $L = M$  y  $l = \rho$ ; donde  $M$  representa la masa del fluido y  $\rho$  la densidad del mismo, aplicando lo anterior obtenemos  $\frac{dM}{dt} = \int_v \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\bar{u}) \right] dv = 0$  (38), la única forma de que se cumpla la ecuación es que el integrando sea cero, por lo tanto,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\bar{u}) = 0$  (39), que es la ecuación de continuidad.

Ahora hagamos  $L = \bar{P}$  y  $l = \rho\bar{u}$ ; donde  $\bar{P}$  representa la cantidad de movimiento y  $\rho\bar{u}$  es la densidad de momento, aplicando el Teorema de Transporte de Reynolds

$\frac{d\bar{P}}{dt} = \int_v \left[ \frac{\partial(\rho\bar{u})}{\partial t} + \text{div}(\rho\bar{u}\bar{u}) \right] dv$  (40) esta ecuación es la representación euleriana de la segunda Ley de

Newton, el momento esta expresado como momento por unidad de volumen ( $\rho\bar{u}$ ). Cuando  $F$  esta restringida a fuerzas de presión  $-\nabla P$  y fuerzas de gravedad  $\rho g$ , además de involucrar a la viscosidad

$\mu$ , obtenemos  $\int_v \left[ \frac{\partial(\rho\bar{u})}{\partial t} + \text{div}(\rho\bar{u}\bar{u}) \right] dv = \int \rho g - \nabla P + \mu \nabla^2 \bar{u} dV = 0$  por (38) basado en que el volumen

fue escogido arbitrariamente se desprende que el integrando es cero. A partir de esta última ecuación se puede deducir la ecuación de Navier-Stokes, que es  $\rho g - \nabla P + \mu \nabla^2 \bar{u}$  (41)

## 2.5. Teorema de Kelvin

Tomemos un elemento de longitud  $d\bar{l}$  de una curva cerrada, es decir, una trayectoria que siempre está formada por las mismas partículas, en un fluido en movimiento y  $\bar{u}$  la velocidad del fluido en movimiento, entonces se define la circulación  $\Gamma$  como la integral del producto  $\bar{u} \cdot d\bar{l}$  alrededor de la curva cerrada.  $\Gamma = \int \bar{u} \cdot d\bar{l}$  (42)

El siguiente paso consiste en ver cómo cambia la circulación con el tiempo, al desplazarse las

partículas de fluido:  $\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \int \bar{u} \cdot d\bar{l} = \int \frac{d\bar{u}}{dt} \cdot d\bar{l} + \int \bar{u} \cdot \frac{d(d\bar{l})}{dt}$  (43)

para que la circulación  $\Gamma$  sea constante, es decir,  $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$  (44), se deben satisfacer las siguientes

condiciones: Que la viscosidad sea cero, es decir,  $\eta = 0$

- Las fuerzas externas se derivan de una función potencial  $\varphi$ ,  $\varphi : f = -\nabla \varphi$
- Que la densidad  $\rho$  del fluido sea constante

entonces, para evaluar la primera integral de la (43) se usa la ecuación de Navier-Stokes.

$$\int \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} \cdot \delta \mathbf{l} = \oint \frac{-\nabla p}{\rho} \cdot \delta \mathbf{l} + \oint \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{l} + \oint \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{l} \quad (45)$$

la primera y segunda integral después del signo de igualdad son cero, porque la integral de un gradiente en una curva cerrada es cero, la tercera integral se hace cero puesto que  $\eta = 0$ , es decir, no hay viscosidad

Para el tratamiento de la segunda integral de la (43) utilizamos la siguiente ecuación:

$$\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{r}} + \delta \bar{\mathbf{l}}) - \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} \delta \bar{l}_x + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial y} \delta \bar{l}_y + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial z} \delta \bar{l}_z \quad (46) \text{ para obtener:}$$

$$\int \bar{\mathbf{u}} \cdot \frac{d(\delta \bar{\mathbf{l}})}{dt} = \int \bar{\mathbf{v}} \cdot \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} \delta \bar{l}_x + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial y} \delta \bar{l}_y + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial z} \delta \bar{l}_z \right] \quad (47)$$

$$= \int \left[ \bar{v} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} \delta \bar{l}_x + \bar{v} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial y} \delta \bar{l}_y + \bar{v} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial z} \delta \bar{l}_z \right] \quad (48);$$

$$\text{tenemos que } \bar{v} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}})}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} \bar{v} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} \right] = \bar{v} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} \quad (49)$$

$$= \int \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \delta \bar{l}_x + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \delta \bar{l}_y + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \delta \bar{l}_z \right] = \int \nabla \left( \frac{\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}}}{2} \right) \cdot \delta \bar{\mathbf{l}} = 0 \quad (50)$$

Usando el teorema de Stokes, el Teorema de Kelvin se puede escribir como:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \bar{\mathbf{u}} \cdot d\bar{\mathbf{l}} = \frac{d}{dt} \left( \iint_s \nabla \times \bar{\mathbf{v}} \delta S \right) = \frac{d}{dt} \left( \iint_s \boldsymbol{\omega} \cdot \delta S \right) = 0 \quad (51)$$

### 3.- VORTICIDAD.

Hemos hablado de los vórtices en este trabajo pero, ¿qué son?, ahora lo definimos: “Un vórtice es una masa de fluido cuyos elementos están en movimiento cerca de trayectorias circulares alrededor de un eje en común” (Vanyo, 1993).

Sin embargo, para saber cual es su magnitud, hay que saber cuales son las propiedades que los caracterizan, las cuales son: vorticidad, circulación, y velocidad. La vorticidad se ha definido en (9) es una cantidad que nos permite caracterizar la rotación local dentro de un fluido. La circulación, ya la hemos mencionado en (42), es la suma de las componentes de la velocidad a lo largo de una línea cerrada. Y la velocidad es el cambio de posición respecto al tiempo.

Existe una analogía de estas propiedades con las del campo magnético: velocidad  $\bar{u}$  corresponde con campo magnético  $\bar{B}$ , vorticidad  $\bar{\omega}$  corresponde con densidad de corriente  $\bar{J}$ , circulación  $\Gamma$  corresponde con corriente  $\bar{I}$ , para que la equivalencia sea completa, se requiere que también se tengan las mismas condiciones de frontera. Esto se debe a que las ecuaciones que satisfacen  $\bar{B}$  y  $\bar{u}$  son semejantes. En un flujo incompresible  $\nabla \cdot \bar{u} = 0$  y  $\nabla \times \bar{u} = \bar{\omega}$ , mientras que para el campo magnético  $\nabla \cdot \bar{B} = 0$  y  $\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J}$

*Vórtice recto:* Utilizando la Ley circuital de Ampère, sabemos que el campo magnético producido en un alambre conductor largo y recto, que conduce una corriente de intensidad I es:  $\bar{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  al exterior de la distribución de corriente, donde r es la distancia del campo al alambre (Reitz, et al., 1972), mientras que en el interior de la distribución de corriente es  $\bar{B} = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} I$  con R, radio del alambre. De manera equivalente la velocidad al exterior de un tubo de vorticidad recto es  $u = \frac{\bar{\omega} R^2}{r}$  y en el interior  $u = \omega r$ . Si la vorticidad esta concentrada en una línea o núcleo, sería comparable con el alambre conductor. El hecho de que a velocidades pequeñas en comparación con la velocidad del sonido, un flujo es incompresible, y de la ecuación (9) la ecuación de continuidad toma ahora la forma  $\nabla \cdot \bar{u} = 0$ , se encuentra la semejanza con la magnetostática, cuyas ecuaciones básicas son:  $\text{div } B = 0$  y

$\text{rot } B = \mu_0 J$ , donde  $\mu_0$  es una constante cuyo valor es de  $1,26 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{c}^2$  en el vacío, obtendríamos que en un flujo incompresible hay dos ecuaciones que satisfacen el campo de velocidad y de vorticidad  $\text{rot}(u) = \omega$  y  $\text{div}(u) = 0$ , por lo que podemos obtener  $\bar{u} = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} \Gamma = \bar{\omega} \times \bar{r}$ , (46) donde  $\bar{u}$  es el campo de velocidad del tubo de vorticidad.

*Anillos de Vorticidad:* Un anillo de vorticidad es un tubo de vorticidad unido en sus extremos, formando una dona, como lo muestra la figura 4. Su producción se debe a los efectos de la viscosidad, íntimamente relacionado al fenómeno de la separación de la capa límite (Crowe, 2002) a la aplicación de fuerzas no conservativas

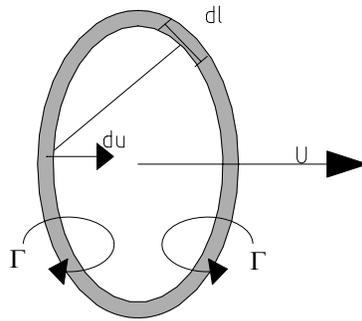


Fig. 4 Diagrama esquemático de un anillo de vorticidad de circulación  $\Gamma$  moviéndose con velocidad uniforme

La analogía, en este caso, se da cuando empleamos la ley de Biot-Savart, que define el campo magnético de una espira circular sobre el eje de simetría  $z$ , cuya ecuación es:  $\bar{B}_z = \frac{\mu_0 a^2 I}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$ , (Reit,

1972) y el fluido en donde la vorticidad se concentra en un círculo o anillo (núcleo del vórtice), entonces, empleando las mismas consideraciones que el caso anterior, el campo de velocidades se puede deducir de la distribución de vorticidad por medio de esa Ley (Guyon, 2001) y para el campo de

velocidades del anillo tendríamos 
$$u_z = \frac{\Gamma}{2a \left( \frac{z^2}{a^2} + 1 \right)^{3/2}} \quad (47)$$

#### **4.-ANEMOMETRÍA DE HILO CALIENTE.**

Para determinar el campo de velocidad y la vorticidad en un fluido, se emplean diferentes técnicas experimentales como pueden ser Velocimetría Láser Doppler, Velocimetría por Imágenes de Partículas, Interacción de Vorticidad-Ultrasonido, Anemometría de Hilo Caliente, entre otras. En nuestro caso, aplicamos la Técnica de Anemometría de Hilo Caliente. Este recurso se usa para estudiar los flujos de fluidos y se basa en la transferencia de calor convectivo de un hilo o de película en un flujo.

Las sondas de hilo caliente con uno o mas sensores permiten medir una, dos o tres componentes del vector velocidad en puntos especificados en el campo de flujo. Los materiales de construcción son tungsteno, platino y platino-iridio (80% Pt y 20% Ir), materiales que se utilizan por sus propiedades físicas: resistencia a la tensión extrema y conductividad térmica. El principio físico de estas sondas consiste en el efecto refrigerante que produce el paso de una corriente alrededor de la sonda. En los experimentos que se hicieron se utilizó una sonda de tungsteno de longitud de 1.25 mm, y diámetro 5 $\mu$ m mientras que la resistencia a temperatura ambiente es aproximadamente de 4 $\Omega$ . Teniendo un tiempo de respuesta de alrededor de 0.6 ms (Bruun ,1996).

El anemómetro convierte la velocidad que registra la sonda en un voltaje. Una relación aproximada entre ambas cantidades es  $E^2 = A + Bv^{1/2}$  (Ruiz,1995) Debe tenerse en cuenta que el anemómetro solo mide valores absolutos de velocidad

Los valores de estas constantes A y B son diferentes para cada sonda, (durante el experimento se rompió una sonda y se calibro una nueva, dando efectivamente valores diferentes para cada una de ellas a pesar de que eran del mismo modelo). Para determinar estas constantes se miden los voltajes que produce el anemómetro a diferentes velocidades.

##### **4.1. Calibración**

La calibración de la sonda fue realizada utilizando un túnel de viento, que se encuentra en el taller de fluidos del edificio Tlahuizcalpan de la Facultad de Ciencias, UNAM. La sonda esta conectada al anemómetro y es fijada dentro del túnel corriente abajo de un cilindro, el cual se utiliza para generar la estela de vórtices de Von Kármán. El aire se mueve por dos ventiladores que están conectados a un variac. La velocidad del aire se controla por medio de este variac, de esta manera es posible utilizar como principio de calibración la relación entre la frecuencia de emisión de vortices en la calle de Von Karman y la velocidad lejos del cilindro.



Fig. 5. calle de Von Kármán © ONERA  
(número de Reynolds = 138).

*Primera etapa:* En una computadora conectada al anemómetro se captura el voltaje producido en el anemómetro cuando la sonda detecta el paso de los vórtices (calle de Von Karman). La frecuencia de emisión de éstos se relaciona con la velocidad de la siguiente manera  $f = (0.212Re - 4.5) \frac{v}{d^2}$  (Pinton, 1992), donde Re es el número de Reynolds (Este número adimensional representa el cociente entre los términos de aceleración de la ecuación de Navier-Stokes y la fuerza viscosa),  $\nu$  es la viscosidad y  $d$  es el diámetro del cilindro. La frecuencia se calcula aplicando la transformada rápida de Fourier sobre los datos.

*Segunda etapa:* Se quita el cilindro y entonces queda solo un flujo uniforme, para registrar el voltaje producido en el anemómetro durante 16 segundos y de estos valores se obtiene un promedio. Esto se hizo para diferentes velocidades. Encontrándose que de la ecuación  $E^2 = A + Bv^{1/2}$  los coeficientes A y B son A=1.7968 y B=0.7559 entonces se grafica  $E^2$  contra  $v^{1/2}$ .

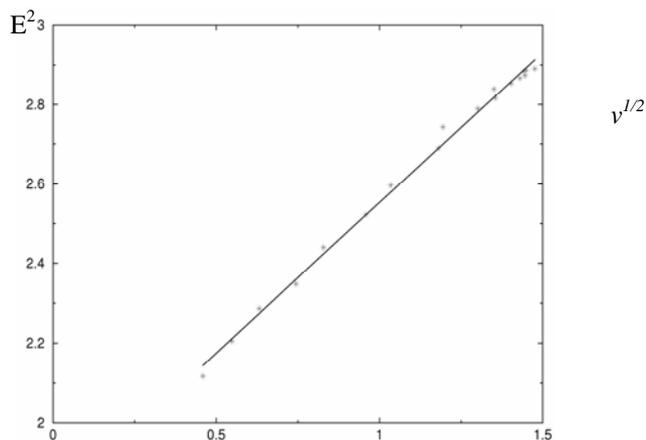


FIG. 6 .CURVA DE CALIBRACIÓN DE LA SONDA QUE SE UTILIZO PARA ESTE TRABAJO

## **5.- DESCRIPCIÓN DEL DISPOSITIVO EXPERIMENTAL.**

### **5.1. Sistema de Traslación**

Se diseñó y realizó un sistema de traslación automatizado en dos ejes coordenados X-Y que consiste de un mecanismo que se utilizó para controlar la posición de la sonda. El sistema de traslación ésta conformado de una placa cuadrada de 60 x 60 cm de aluminio para darle estabilidad al dispositivo, en donde ésta montado un carro deslizante formado por dos placas de acrílico de 10 x 15 cm unidas por una de aluminio de 10 x 51 cm formando una U, este carro se puede deslizar sobre dos varillas y es colocado por un tornillo sinfín, el cual es accionado por un motor a pasos controlado electrónicamente; entre las placas de acrílico están montadas dos varillas de aluminio donde se colocan dos placas de aluminio que pueden deslizarse sobre ellas, las placas están unidas dejando un espacio entre ellas, estas placas pueden deslizarse en las varillas al ser accionadas por otro tornillo sinfín, que es movido por un segundo motor a pasos igualmente controlado electrónicamente. La sonda es fijada entre las placas. Los motores a pasos son controlados por un circuito electrónico controlado por medio de un programa de computo, conectados al puerto paralelo de una computadora y a una fuente de poder que es utilizada para alimentar dichos motores. De esta manera en el eje coordenado X, las placas permiten mover la sonda hacia la derecha o izquierda, mientras que, en el eje coordenado Y, el carro hace que la sonda avance hacia adelante o hacia atrás.

-Los desplazamientos en cada eje son diferentes, debido a que los tornillos sinfín tienen avances distintos. Los motores dan una vuelta en 96 pasos, estos valores los ocupamos para programar el avance de la sonda.

La construcción de las piezas del dispositivo mecánico, así como su ensamble y prueba de funcionamiento se llevo a cabo en el Laboratorio de Acústica y en el Taller Mecánico de la Facultad de Ciencias, UNAM, en donde se realizaron varios intentos hasta que se obtuvo el dispositivo final que satisfizo las necesidades de desplazamiento, a la par también se desarrollo el sistema electrónico de control de los motores. El sincronizar el avance de los motores con el sistema de toma de datos y generación de los anillos, junto con la construcción del dispositivo nos llevó un tiempo considerable del proyecto.

La siguiente imagen muestra el sistema de traslación, donde se aprecian las partes que lo componen.

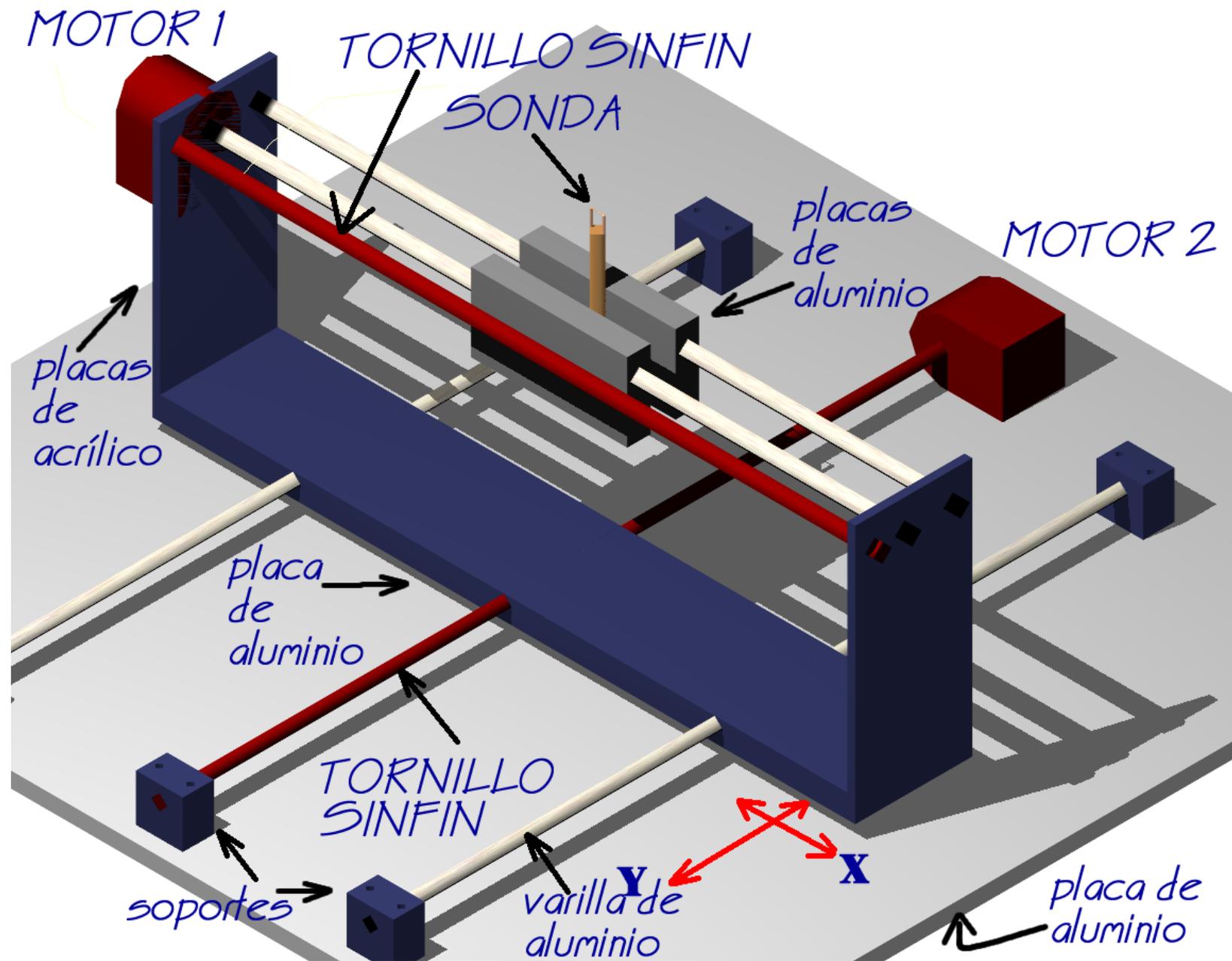


Fig. 7: Sistema de traslación de dos dimensiones.

## 5.2. Montaje y Funcionamiento del Dispositivo Experimental

Para generar los anillos de vorticidad utilizamos una bocina de 16 cm de diámetro a la cual se le unió una caja de resonancia cilíndrica cerrada con una pared circular que tiene un orificio circular en el centro de 1.5 cm de diámetro. La bocina es conectada a un generador de funciones, marca Stanford Research System, modelo DS345, que manda una señal eléctrica de manera intermitente (pulso eléctrico de 5 V) a la bocina, la cual la transforma en una perturbación en el aire, generando así anillos de vorticidad que son expulsados por el orificio de la bocina, los cuales tienen características similares. La sonda de hilo caliente que se utilizó, mide una componente de la velocidad, perpendicular a la dirección de la orientación del hilo caliente, ésta fue colocada sobre el sistema de traslación automatizado, de forma tal que el hilo quedara paralelo a la bocina, la sonda es conectada a un anemómetro marca DANTEC StreamLine, 90N10 y el software que la controla es Streamware., el anemómetro está controlado por una computadora y la señal de voltaje que produce se envía a una tarjeta de adquisición de datos marca National Instruments, modelo NI USB 6009, con una resolución de 14 bits, se usa una tasa de muestreo de 1000 datos / segundo. La tarjeta de adquisición de datos, el generador de funciones y el circuito de control de los motores están conectados a una segunda computadora. La primera computadora funciona con el sistema operativo Windows, mientras que la segunda ocupa el sistema operativo Linux. El circuito de control de motores se conecta al puerto paralelo de la segunda computadora, la tarjeta de adquisición de datos se conecta a la misma computadora pero al puerto USB y son controlados por medio de programas de computo desarrollados en lenguaje C (los programas se pueden consultar en los anexos), el anemómetro y el generador de funciones funcionan y son controlables con software proporcionado por el fabricante.

Para el estudio del impacto de los anillos de vorticidad se utilizó una pared de acrílico, lisa, rectangular de 20 cm. de alto por 40 cm. de ancho, que se coloca de frente a la bocina, la sonda queda dispuesta entre la pared y la bocina. Para obtener el impacto asimétrico la bocina se colocó a 30 grados con respecto de la pared y se tomaron datos a lo largo de la pared por una distancia de 80 mm en el eje “Y” y en el eje “X” 60 mm, teniendo 1200 puntos de lectura y también se realizó un impacto ligeramente asimétrico colocando la pared casi paralela a la bocina en donde la distancia recorrida fue de 60 mm en los dos ejes, teniendo 900 puntos de lectura.

Para evitar alteraciones o perturbaciones externas en la generación de los anillos, el sistema de traslación con la sonda, la bocina y la pared son alojados dentro de una caja cerrada de acrílico de 60.5 cm de ancho por 71.5 cm de profundidad y 103 cm de largo, debido a que cualquier movimiento en la habitación donde se realiza el experimento podría alterar las mediciones.

La adquisición de los datos se sincroniza con la emisión del anillo y el movimiento de la sonda, midiendo en cada punto de observación (cada 2 mm) la velocidad de 5 anillos sucesivos. El programa posteriormente genera un promedio de las lecturas, éste es el que analizamos para determinar la velocidad, vorticidad y diámetro del anillo. El registro de la velocidad en cada punto se realizó durante 5 segundos siguientes a la emisión del anillo, con una tasa de muestreo de 1000 datos por segundo, es decir, obteniéndose 5000 datos. Cabe aclarar que los datos se guardan en archivos de texto, un archivo para cada punto de medida, de esta manera tuvimos 900 archivos para un caso (equivalente a 4,500,000 datos), y 1200 para el otro (equivalente a 6,000,000 datos).

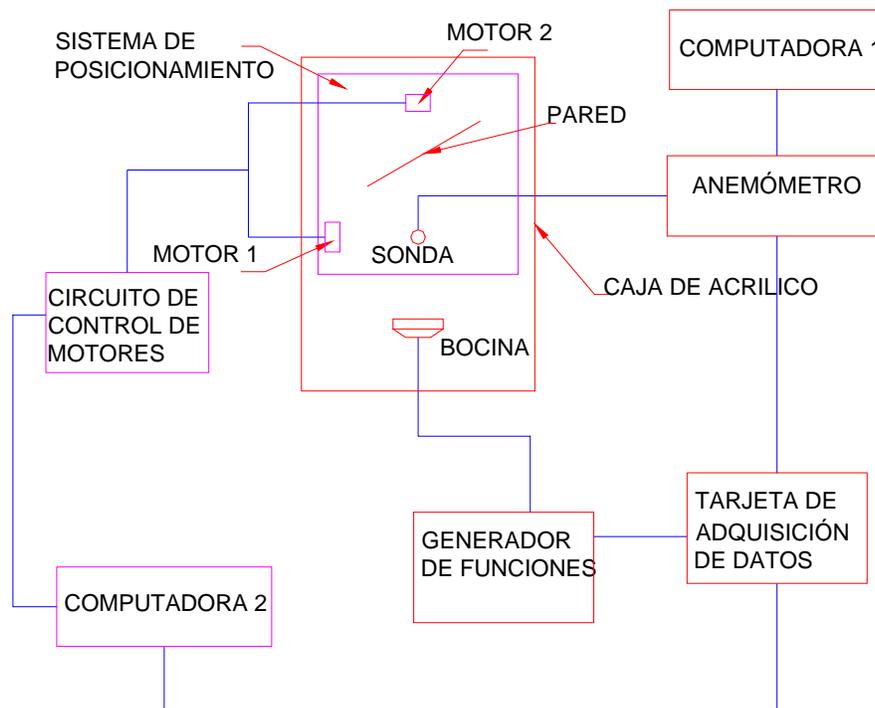


Fig. 8. Diagrama de instalación del dispositivo experimental

## 6.- RESULTADOS.

### 6.1. Impacto Ligeramente Asimétrico

Este se realizó generando anillos de vorticidad y colocando la pared rectangular casi paralela a la bocina. La grafica de la figura 9 muestra una curva de la componente z del campo de velocidad y se compara con la predicción de la ecuación (47) de un vórtice lejano a la pared, que en principio debería aproximarse a un vórtice libre. La curva teórica de la velocidad sobre el eje es simétrica a diferencia los datos experimentales, la parte izquierda de ambas no se empalman, debido a que el anillo al desplazarse en el aire sufre efectos viscosos.

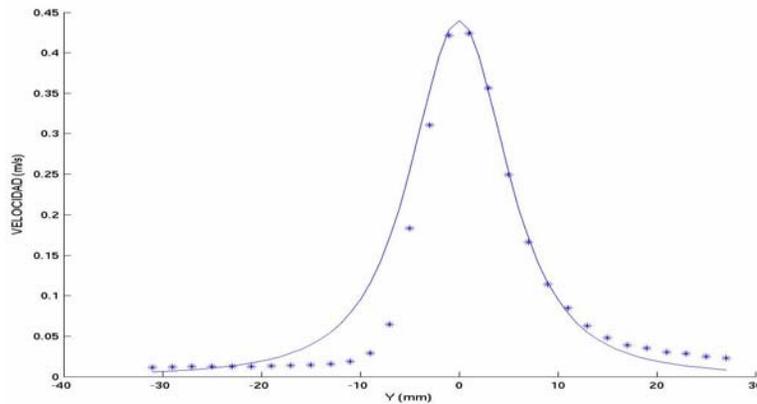


FIG. 9 GRAFICA COMPARATIVA DEL CAMPO DE VELOCIDAD TEÓRICO Y EXPERIMENTAL DEL ANILLO

La grafica de la figura 10 se grafica  $u_z$  en función de  $x$  en el plano que pasa por el centro del anillo y lo corta transversalmente, representa el campo de velocidades promedio obtenido, donde se aprecia que la velocidad en la parte de arriba permanece casi constante; también se puede observa que la velocidad en el núcleo del anillo varia de manera lineal, cumpliéndose con la ecuación  $u = \omega r$ .

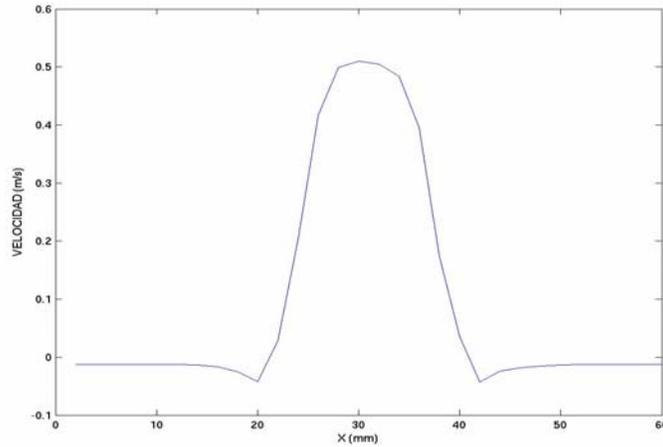
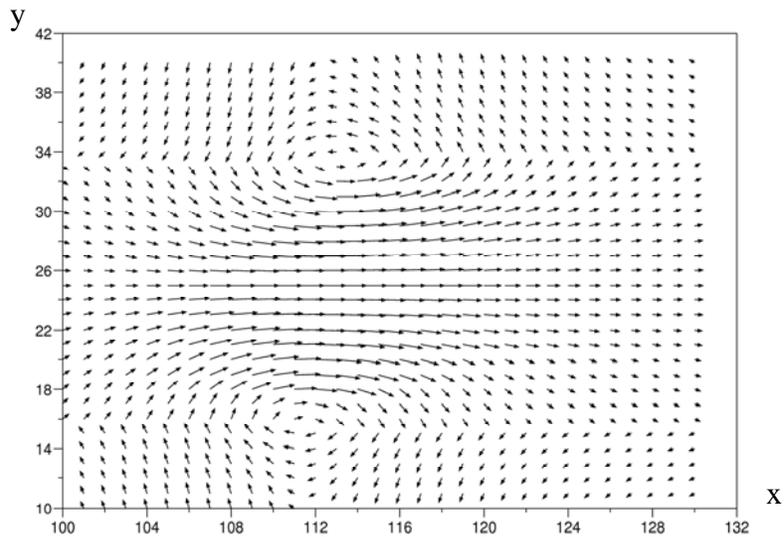


Fig. 10 grafica del campo de velocidad real del anillo de vorticidad.

Con los datos con la sonda de hilo caliente, podemos calcular la componente u de velocidad a partir de la ecuación de continuidad y del hecho que  $u=0$  sobre el eje de simetría del anillo. Para ello aproximamos la ecuación de continuidad con  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v(y + \Delta y) - v(y)}{\Delta y} \approx 0$ , obtenemos

$v(y + \Delta y) = v(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y$ . En la siguiente figura se muestra el campo de velocidades sobre el plano x-



y, en donde se ha sustraído la velocidad de traslación del vórtice.

Fig. 11. representación bidimensional del campo de velocidad del anillo de vorticidad utilizando la ecuación de continuidad. Los datos aquí presentados fueron tomados de un experimento previo (Vázquez 2006)

Las figuras 12, 13, 14 y 15 muestran la generación, la evolución y la destrucción del impacto del anillo con la pared, en cada posición de lectura tanto en el eje X como en el eje Y. Los colores azul y verde indican velocidades bajas y los colores rojo y rosa indican velocidades altas en el anillo.

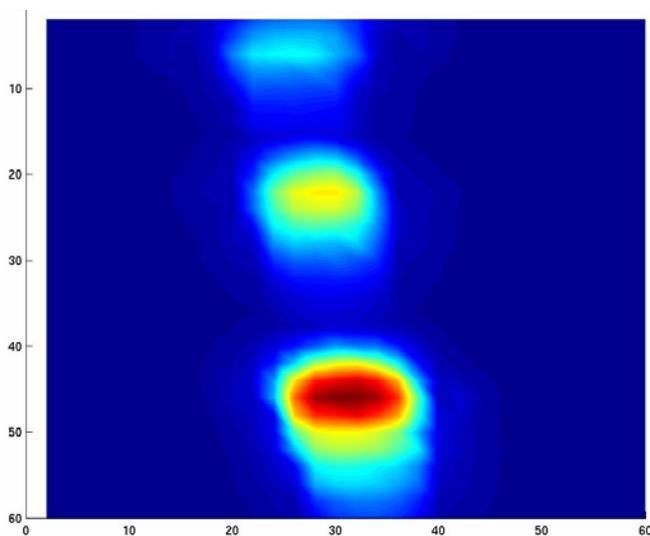


FIG. 12. CAMPO DE VELOCIDADES DEL ANILLO EN EL PLANO X-Y ANTES DE IMPACTAR CON LA PARED. T = 200, 300, 400 (MS)

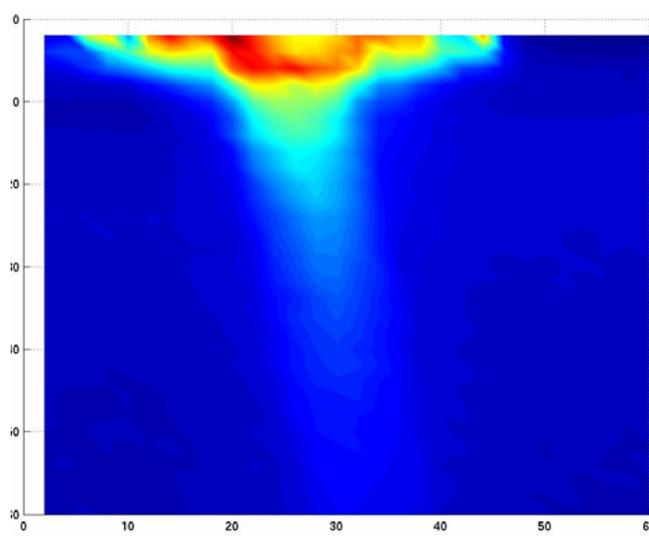


FIG. 13. CAMPO DE VELOCIDADES DEL ANILLO AL INICIAR SU IMPACTO CON LA PARED. T = 450 (MS)

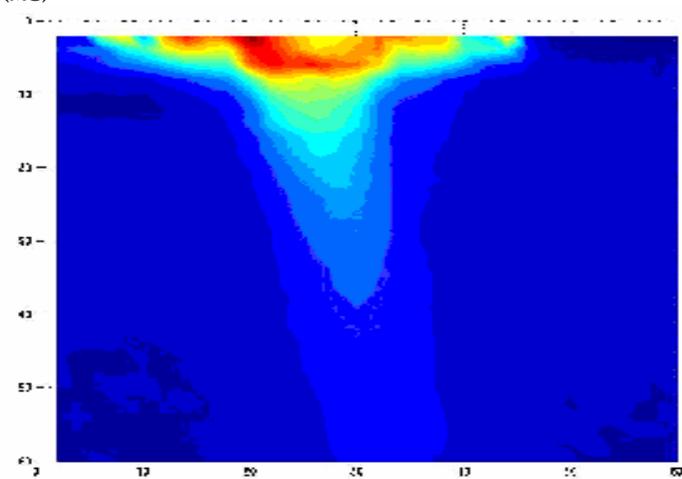


FIG. 14. CAMPO DE VELOCIDADES DEL ANILLO AL IMPACTAR CON LA PARED. T = 500 (MS)

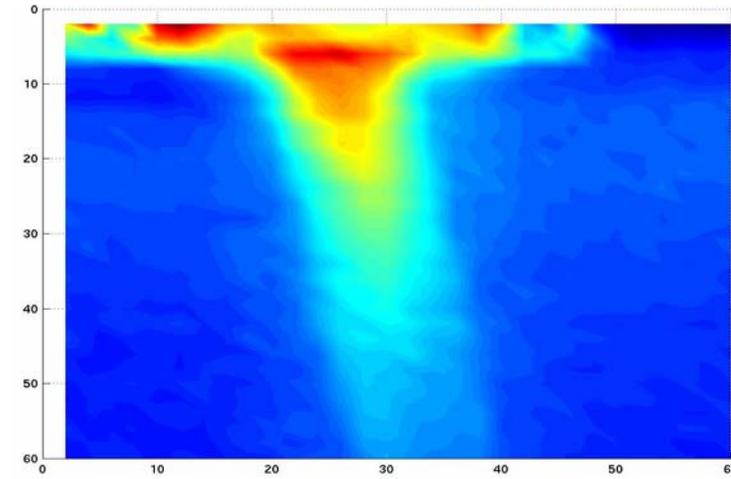


FIG. 15. CAMPO DE VELOCIDADES DEL ANILLO AL IMPACTAR CON LA PARED. T = 600 (MS)

Como se aprecia en la figura 11 el radio del anillo fue aumentando conforma se acercaba a la pared. La explicación física se debe a que el anillo cuando es generado lleva una velocidad constante luego siente la presencia de la pared, entonces se frena el anillo y el anillo se ensancha, y al llegar a la pared termina por destruirse, y se generan anillos secundarios. El anillo al inicio se comporta como un anillo libre antes de sentir la interacción con la pared, en donde se pudo determinar que su velocidad fue de 0.64 m/s, y su diámetro de 0.0255 m. Los anillos secundarios se empiezan a observar cuando el anillo principal se encuentra a una distancia igual o menor a su diámetro ( Walker, 1987)

## 6.2. Impacto Asimétrico.

Para generar el impacto asimétrico se coloco la pared a 30 grados respecto de la bocina como se muestra en la siguiente imagen, donde se realizaron mediciones en un área de 80 x 60 mm.

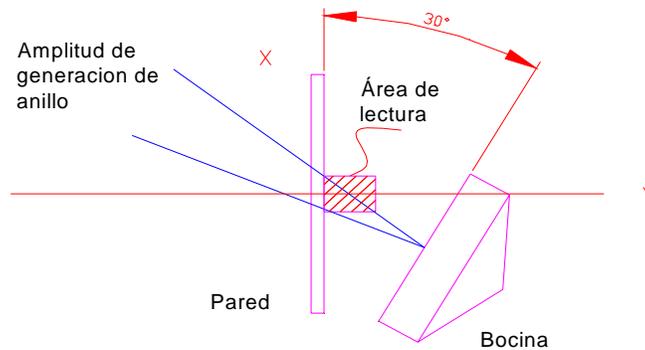


fig. 16. posición de la pared respecto de la bocina

Las figura 17, 18, 19 y 20 muestran la generación evolución y la destrucción del anillo asimétrico al impacto de la pared en cada posición de lectura en los dos ejes X, Y, Los colores azul y verde indican velocidades bajas y los colores rojo y rosa indican velocidades altas en el anillo.

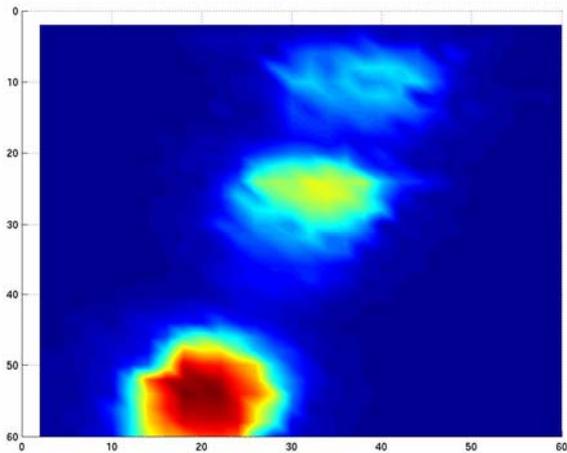


FIG. 17. CAMPO DE VELOCIDADES DEL ANILLO ANTES DE IMPACTAR CON LA PARED. T = 300, 450, 600 (MS)

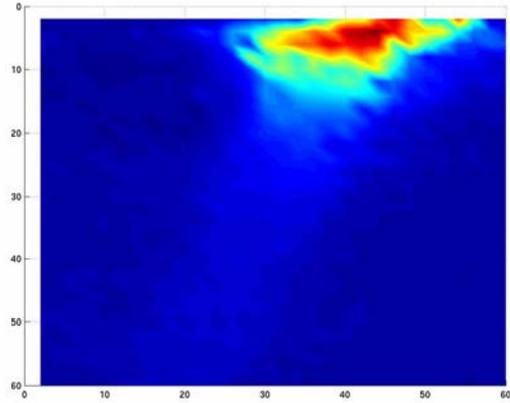


FIG. 18. CAMPO DE VELOCIDADES DEL ANILLO AL INICIAR SU IMPACTO CON LA PARED. T = 700 (MS)

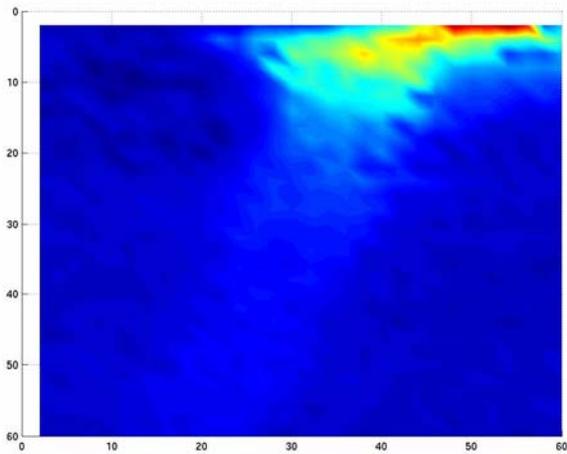


FIG. 19. CAMPO DE VELOCIDADES DEL ANILLO AL IMPACTAR CON LA PARED DONDE SE APRECIA LIGERAMENTE UN VÓRTICE SECUNDARIO T = 800 (MS)

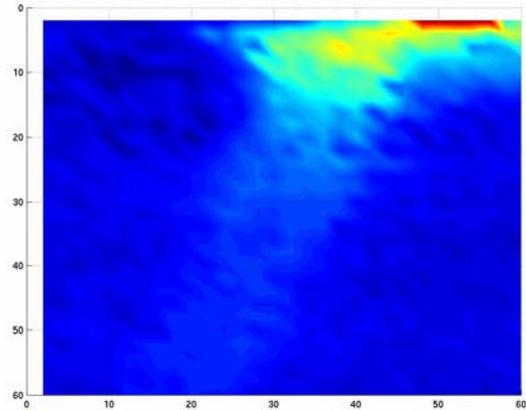


FIG. 20 CAMPO DE VELOCIDADES DEL ANILLO AL IMPACTAR CON LA PARED T = 850 (MS)

En la figura 17 se aprecia, en comparación con la figura 11, que el anillo pierde su simetría al impactar con la pared. La explicación física es: se genera con velocidad constante pero ahora con la característica de que la dirección de movimiento del vórtice no es paralelo al vector normal de la pared (recuérdese que ahora la bocina ésta a 30 grados con respecto de la pared), entonces, debido a esta inclinación, el anillo empieza a frenar en una parte de la pared, la circulación que trae el anillo al sentir el contacto con ésta parte gira y esto provoca que se generen anillos secundarios. El anillo así, continúa avanzando en donde todavía no siente la pared y continúa con velocidad constante hasta que choca completamente y se generan nuevos anillos secundarios. El anillo al inicio se comporta como un anillo libre antes de sentir la

interacción con la pared, en donde se pudo determinar que su velocidad fue de 0.410 m /s, y su diámetro de 0.046 m

Las figuras 21 y 22 muestran los campos de velocidad del anillo de vorticidad en diferentes tiempos y posiciones de ambos experimentos, de donde podemos obtener las siguientes diferencias:

- 1.- Cuando el anillo tiene un choque simétrico el radio aumenta de tamaño de manera gradual u homogénea en comparación con el impacto asimétrico donde el aumento es mayor.
- 2.- En el impacto asimétrico hace que el anillo pierda su simetría, mientras que en el impacto simétrico, la deformación del anillo es simétrica.

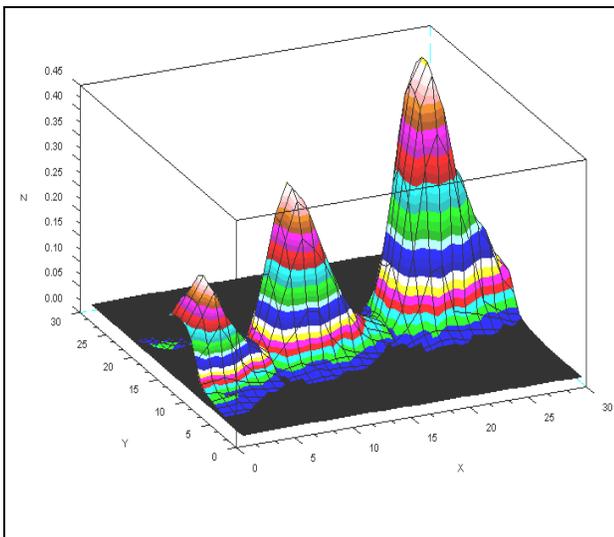


FIG. 21 CAMPOS DE VELOCIDAD DEL ANILLO EN EL IMPACTO LIGERAMENTE ASIMÉTRICO.

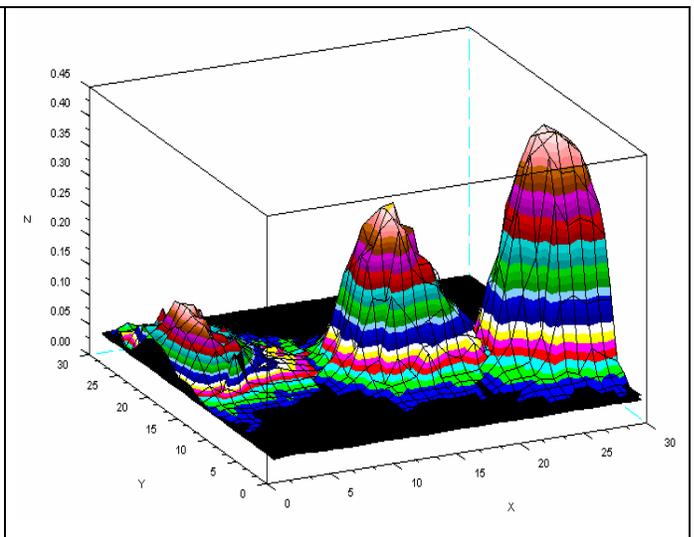


FIG. 22 CAMPOS DE VELOCIDAD DEL ANILLO EN EL IMPACTO ASIMÉTRICO.

Los ejes X y Y muestran la posición y el eje Z la velocidad del anillo.

## CONCLUSIONES

En el caso ligeramente asimétrico un anillo de vorticidad al impactar con la pared produce otros anillos a los que se llaman anillos secundarios, este fenómeno se produce tan pronto el anillo toca la pared.

Con la cantidad de datos adquiridos fue posible desarrollar animaciones las cuales muestran el proceso de impacto del anillo (pueden consultarse en los anexos), las cuales han sido útiles para ver con detalle el fenómeno, ya que muestran la secuencia en milisegundos, en las cuales también se puede ver que se desarrollan asimetrías de los anillos desde que sienten la presencia o empiezan a interactuar con la pared.

La vorticidad se detectó al graficar la velocidad en función de la posición de los núcleos de vorticidad se observó una dependencia lineal (o casi lineal) entre la velocidad y la posición. Además los cambios de velocidad son abruptos.

En el caso asimétrico la dirección de movimiento del anillo cambia, tendiendo a moverse paralelo a la normal a la pared. Por otra parte la vorticidad secundaria se crea preferentemente de un lado (ver película en disco compacto).

Para observar anillos simétricos se debe estar seguro de alinear la sonda al centro de la bocina y esta última debe quedar paralela a la pared.

El sistema de traslación X-Y desarrollado, puede ser utilizado para otros estudios donde se requiera obtener datos o cualquier otra aplicación en dos dimensiones de forma automatizada.

Además puede perfeccionarse agregándole un tercer eje Z para estudios en tres dimensiones.

## ANEXOS

### A.- Disco compacto conteniendo:

1. El programa de cómputo en lenguaje C utilizado para el control simultaneo de los motores y la tarjeta de adquisición de datos. Archivo automatiza1.c
2. Animación del impacto ligeramente asimétrico. Archivo asimetrico01.avi, realizado en MATLAB.
3. Animación del impacto asimétrico, con pared a 30°. Archivo asimetrico02.avi realizado en MATLAB

## BIBLIOGRAFÍA

- 1) Auregan Y., A. Maurel, V. Pagneux y J-Fpinton (editores). Sound-Flow Interactions. Springer, Berlin, 2002.
- 2) Baylli C. Y G. Comte-Bellot. Turbulence. CNRS Editions, Paris, 2003.
- 3) Bruun, H.H. Hot wire anemometry, principles and signal análisis. Oxford University Press, Oxford 1996
- 4) Crowe, Robertson, Elger. Mecánica de Fluidos. CECSA. Primera edición México 2002.
- 5) Guyon E., J.P. Hulin y L.Petit. Hydrodynamique physique. CNRS Editions. Paris, 2001.
- 6) Handbook of fluid dynamics and fluid machinery. Schetz Fuhs Vol.1.
- 7) Majda A.J. y A.L. Bertozzi. Vorticity and Incompressible Flows. Cambridge University Press, Oxford 1996
- 8) Moreno Hernández Gicela. Como investigar. Técnicas documental y de campo. Edere. México. 2003
- 9) Olus Boratov, Alp Eden, Ayse Erzan (Eds.). Turbulence Modeling and Vortex. Proceedings, Istanbul, Turkey 2-6 Sept. 1996 Springer Dynamics Lecture Nites in Physics
- 10) Pankanin L Grzegorz. The vortex Flowmeter: various methods of investigating phenomena. Vol. 16, 31 January 2005
- 11) Pinton J F. Mesure de vorticité par diffusion ultrasonore. Tesis de doctorado, Lyon, Francia, 1992.
- 12) Reitz, John R., Milford, Frederick J. y Blumovicz Perelberg, Susana. Fundamentos de la teoría electromagnética. Addison-wesley, primera reimpression 1972.

- 13) Ruiz Chavarría Gerardo. Estabilidad hidrodinámica de una capa de fluido descendiendo sobre un plano inclinado en rotación. Tesis de Licenciatura en Física, UNAM-FC, México, Septiembre 1988
- 14) Ruiz Chavarría Gerardo. Intermittencia de velocidad y temperatura en turbulencia desarrollada. Tesis de Doctorado en Ciencias Físicas, UNAM-FC, México, Septiembre 1995.
- 15) Smits J Alexander. MECÁNICA DE FLUIDOS Una introducción física. Alfaomega,2003.
- 16) Tamayo y Tamayo, Mario. El proceso de la investigación científica. Limusa. México 2003.
- 17) Vanyo P. James. Rotating Fluids in Engineering and Science. DOVER PUBLICATIONS, INC Mineola, New York, 1993
- 18) Vázquez de Gyves Álvaro Francisco. Impacto simétrico de un anillo de vorticidad con una pared. Tesis de Licenciatura en Física, UNAM-FC, México, 2006.
- 19) Velasco Fuentes Oscar Uriel. ¡Larga vida al vórtice!. Ciencia y Desarrollo, vol. XXIX, núm. 169,23-29 (2003)
- 20) Walker J. D. A, Smith C. R., Cerra A. W., DOLIGALSKI T. L. The impact of a vortex ring on a wall Journal of Fluid Mechanics 1987. vol 181. pp. 99-140.
- 21) <http://champagn.fciencias.unam.mx/en109503>