UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

"SOLUCIÓN A UN PROBLEMA DE ALMACÉN MEDIANTE MODELOS DE INVENTARIOS Y ALGORITMOS GENÉTICOS"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN ACTUARÍA

PRESENTA

GÓMEZ-EGUIARTE MARTÍNEZ ALEXEI

ASESORA: M. EN C. EDITH MIREYA VARGAS GARCÍA

SEPTIEMBRE 2006

Agradezco y dedico el siguiente trabajo a nuestra querida institución, noble y ciertamente universal en sus valores humanos:

La Universidad Nacional Autónoma de México

Porque en ella palpitan el corazón y la esperanza de México.

A mis padres:

***Martha y José Manuel**, gracias, porque me dieron Ser y Libertad y porque aún ofrecen pródigamente amor, apoyo y comprensión a sus hijos y nietos.*

Por su sonrisa

Por sus palabras

Por la ternura que han brindado a mi vida

Porque son motivo e inspiración

A mis hijos y sobrinos, gracias: ***Ixmetzin, Emmanuel, Jonathan, Víctor y Ander.***

A mi querida esposa ***María del Carmen****, con quién he caminado por varios senderos y espero que así prosigamos, le agradezco su cariño.*

Agradezco a mis hermanos y cuñadas su apoyo incondicional.

Reconozco en mis condiscípulos y maestros su paciencia y bonhomía, juntos hemos transitado por los caminos de la tolerancia y el respeto.

Agradezco en particular a mi asesora ***Edith Mireya*** *por su generosidad y calidez humana.*

A todos y cada uno de mis amigos, les agradezco que permanezcan cerca de mi corazón a pesar del tiempo y la distancia.

INDICE

“Solución a un problema de almacén mediante modelos de inventarios y algoritmos genéticos.”

Introducción

Un actuario es un profesionista que ha recibido una capacitación en diferentes ramas de las matemáticas. Además recibe durante su formación materias como administración, finanzas etc. Generalmente al actuario se le vincula con el área de seguros debido a que en los orígenes de su desempeño profesional el actuario se especializó en esta disciplina. Sin embargo su formación académica le permite acceder a otras áreas de aplicación, por ejemplo la de investigación de operaciones, donde existen técnicas especificas para atender diversos problemas de optimización y donde se han desarrollado principalmente las teorías de inventarios aplicadas a problemas de almacén.

Un sistema es un conjunto de elementos interrelacionados entre sí que funcionan con un propósito común. Los inventarios, vistos como “sistemas”**,** se relacionan con el mantenimiento de cantidades suficientes de bienes que garanticen una operación fluida en un sistema de producción. Un sistema de inventarios representa los materiales y suministros que una organización productiva ó comercial necesita. Los inventarios son la parte inicial de la planeación y suministro de diferentes fases de un proceso productivo. En dichas etapas pueden encontrarse diversos artículos almacenados, desde materias primas para la producción, hasta bienes ya terminados en espera de su comercialización Los inventarios son el soporte inicial y final de varios procesos de producción.

En el presente trabajo se pretende ofrecer diferentes enfoques para encontrar una posible solución a un problema de inventario, que se ha encontrado dentro de la administración pública y que podría ser tratado con técnicas de optimización. Específicamente el problema se encuentra dentro de un área que se dedica al mantenimiento de trenes para transporte público, este mantenimiento tiene enorme relevancia debido a que los trenes dan servicio de transporte a millones de personas cada día.

Debido a ello es necesario tener en inventario las herramientas, refacciones y materiales que permitan a estos vehículos mantenerse al servicio de la población del Valle de México. Así pues se plantea modelar el problema con técnicas clásicas de inventarios y algoritmos genéticos.

Un modelo es una representación de la realidad, un modelo de inventario pretende representar el comportamiento real de un sistema de inventario. La mayoría de los modelos de inventarios existentes se basan en hipótesis de inicio restrictivas que facilitan la simplificación del problema pero que vienen a determinar una limitada aplicación práctica.

En el presente trabajo además de ofrecer enfoques tradicionales para hallar una solución al problema de inventarios se desea suministrar una solución a esta situación de una manera más amplia mediante la utilización de los algoritmos genéticos (AG´s) Los AG´s son parte de la computación evolutiva que a su vez es una rama creciente de la Inteligencia Artificial. Los AG´s constituyen una estrategia de búsqueda de soluciones de propósito general que permiten resolver problemas de naturaleza combinatoria. Mantienen una variedad de posibles soluciones para el problema a considerar y utilizan los principios de la evolución natural (adaptación y supervivencia del más apto) Para formar nuevas generaciones de posibles soluciones, estas soluciones se construyen utilizando algunos operadores reproductivos ancestrales como son la cruza y la mutación.

Como ya lo habíamos mencionado este trabajo se concentrará en el análisis de un almacén real y su solución por medio de modelos de inventarios. Utilizando los modelos que mejor se ajusten a las necesidades de un almacén “x”, podremos comparar modelos tradicionales de inventarios adecuados a las características del almacén “x”, contra un modelo realizado con algoritmos genéticos igualmente adecuado. De esta forma se pretende demostrar la conveniencia de utilizar los algoritmos genéticos en problemas de inventarios.

Para ello el trabajo se estructura de la siguiente manera.

En el capítulo uno se realiza una introducción al problema de almacén mediante la descripción general del almacén “x”.

Describiremos los supuestos y restricciones que se encuentran en el almacén y también las variables de nuestro problema. Nos introducimos al problema desde el punto de vista de las técnicas clásicas de optimización y describiremos brevemente algunas técnicas de optimización de modo que al final del capítulo podamos decir que tipo de técnicas de optimización son las adecuadas para nuestro problema. De esta forma construimos también el marco que permita desarrollar una posible solución a nuestro problema.

En el segundo capítulo se describirán los conceptos y definiciones de los sistemas de inventarios. Describiremos y aplicaremos algunos modelos típicos, determinísticos y probabilísticos para mostrar dos enfoques clásicos en la solución del problema y decidir cual se ajusta mejor al problema previamente planteado. Después se incluye una sección que recoge los costes implicados en esta decisión y cuyos importes se han de disminuir.

En el tercer capítulo describiremos lo que son los algoritmos genéticos y los operadores que los caracterizan: cruza, mutación etc. Haremos una adecuación de un algoritmo genético a nuestro problema de inventarios.

Cuando se desea desarrollar un algoritmo computacional para resolver un problema, es importante tomar en cuenta varios factores. Entre ellos, tal vez el más importante sea proponer el lenguaje de programación que será utilizado. Debido a la gran dificultad que se tiene para programar un algoritmo genético en algún lenguaje de programación de alto nivel se buscó un ambiente amigable al usuario que permita ver el comportamiento de las soluciones, para ello se utilizó el programa MATHLAB® versión 5.0 ó posterior. Las características que favorecieron la elección de MATHLAB® sobre otros paquetes consisten en que este posee una interfase que permite el desarrollo de programas mediante el uso de utilerías ya desarrolladas y además un ambiente amigable para la captura y despliegue de datos.

En la mayoría de los lenguajes utilizados tradicionalmente para codificar este tipo de algoritmos, no se presenta una interfase para la captura de datos ó el

despliegue de resultados, éstos se presentan en archivos de texto que carecen de formato (en nuestro caso, al usar MATHLAB® se desarrollaron interfases amigables)
Los algoritmos genéticos son un enfoque relativamente nuevo que ofrece mayor viabilidad que otros métodos para la solución de problemas de muy diversa índole y que en este caso garantizan la disponibilidad de bienes de consumo.
Con el uso de los AG´s se pretende responder las preguntas fundamentales de *¿cuándo ordenar?* y *¿cuánto ordenar?* de tal manera que se optimicen los recursos materiales dentro del mencionado almacén.
En este tercer capítulo se hace una descripción de los algoritmos genéticos. Se da un ejemplo y se hace una adaptación de un algoritmo genético al caso práctico del almacén ya mencionado.

En el cuarto capítulo se presentarán los resultados así como las conclusiones a fin de poder realizar las recomendaciones pertinentes a la administración del almacén "x".

Hipótesis

Bajo el enfoque de la investigación de operaciones y de la metodología para crear algoritmos genéticos con MATHLAB® en el almacén "x" es posible minimizar el gasto de los capitales públicos y mantener el ahorro dentro de un elemento gubernamental, ya que pese a las limitaciones en la disposición de recursos se necesita una capacidad de respuesta del almacén ante situaciones de emergencia, una respuesta que en la actualidad resulta ser ineficaz para un elemento que no cumple con el objetivo para el que fue creado.

Capítulo 1

En éste capítulo se analizarán las causas reales que provocan el dispendio de recursos para determinar la factibilidad de aplicar técnicas conocidas de almacenes e inventarios haciendo una descripción general del almacén "x".

Sección 1.1. -Preliminares

Descripción del problema

La fuente del problema se encuentra en el Organismo, el cual es un ente del que tenemos muchas referencias y que debido a su carácter público ofrece poca información, fue fundado el 4 de septiembre de 1967 por el entonces presidente Adolfo López Mateos; su función fue, es y será la de responder a las necesidades de transporte público y masivo de la Ciudad de México y de la zona conurbada del Estado de México.

Para responder a estas necesidades de servicio público y dentro de las distintas áreas que conforman al Organismo, se encuentra la Gerencia de Instalaciones Fijas y Mecánicas y dentro de ésta los Talleres de Mantenimiento. La misión de estos, entre otras, consiste en dar servicio y mantenimiento de tipo preventivo y correctivo a las máquinas del Organismo mediante una línea de producción en serie y mantenimiento programado. Para ello cuenta con personal capacitado en diversas áreas de la ingeniería, áreas técnicas y administrativas.

Para llevar a cabo su misión, el personal de los Talleres de Mantenimiento necesita ser proveído de insumos materiales muy diversos, de diferentes precios, calidades y características que requieren diversos tratamientos, técnicas de inventario y condiciones de almacenaje. En particular el almacén "x" tiene el objetivo de suministrar los materiales, maquinaria, refacciones y herramientas necesarias para que el personal de mantenimiento adscrito a los Talleres realice sus labores con oportunidad. Deseamos evitar la pérdida o dispendio de recursos, tanto de tipo financiero, de factor humano y de factores materiales.

Debido a las necesidades cotidianas de mantenimiento y corrección de fallas que se requieren de manera continua en mi área de trabajo y como egresado de la carrera de Actuaría en la FES-Acatlán; hoy se me presenta la oportunidad de sugerir técnicas de la Investigación de Operaciones y de Algoritmos Genéticos para ser aplicadas en el almacén “x”. Se requiere obtener una optimización de los recursos de este almacén.

En mi práctica laboral he encontrado varias deficiencias en el almacén “x”, estas afectan la productividad de los Talleres de Mantenimiento.

En el Organismo existe una sección que se encarga de dar un mantenimiento programado a las máquinas-herramienta de los talleres y que debe atender fallas de emergencia. Puesto que actualmente me desempeño dentro del área de mantenimiento y debido a que pertenezco al grupo de personas que realizan las labores de atención de fallas por déficit de refacciones, entonces, las deficiencias imputables al mencionado almacén son las siguientes:

- Se tienen los casos de bienes consumibles que se encuentran caducos cuándo llegan a las manos del personal de mantenimiento ó que suelen encontrarse en condiciones de merma de sus propiedades físicas y químicas, lo que hace imposible su aplicación y utilidad.
- En otras ocasiones las maquinas-herramienta y las refacciones se encuentran en un desfase total con respecto a las garantías otorgadas por el fabricante. Esto significa perdidas importantes de capital por concepto de reparaciones ó por concepto de gastos de re-abastecimiento. La peor parte viene del hecho normal de que se desconoce el momento en que se van a requerir dichas herramientas y refacciones.
- En forma general se dan situaciones de déficit de refacciones en el almacén justo cuando ocurren situaciones de falla total en los equipos destinados a mantener la línea de producción de trenes en los Talleres del Organismo.

Cuando se presenta el problema por déficit ó imposibilidad del almacén para atender una demanda, se decide sacar de operación a los equipos que están a cargo de la sección de mantenimiento. En este caso se realizan costosas inversiones de capital ó recursos materiales y de factor humano para solucionar problemas de emergencia.

Es el problema de fallas el más importante por resolver puesto que se mantiene una línea de producción de trenes en los Talleres del Organismo, que no puede interrumpirse. Estos problemas son una fuente cotidiana de costosas consecuencias financieras, por lo tanto, está justificado proponer técnicas tradicionales de inventarios en principio para dar una respuesta real y eficaz a problemas de déficit y requerimiento de refacciones. La principal característica del problema por déficit de refacciones, es que la demanda de éstos no es predecible. Para ello se plantearán diferentes enfoques que sean adecuados a las características del almacén "x".

Sección 1.2. -Características Generales

El objeto de estudio es el almacén "x", su organización, propiedades y capacidad para satisfacer la demanda requerida, con el fin de presentar varios modelos clásicos que se ajusten a sus necesidades

Este almacén no se encuentra aislado dentro del Organismo, se relaciona con varias áreas del mismo y los recursos provienen del gobierno de la Ciudad de México. Estos recursos están regulados por personas que no se mantienen en la administración y que por lo tanto nunca llegan a terminar los programas que implementan. Debe señalarse que en las designaciones para ocupar la administración del Organismo interviene la política.

Las características del almacén son de diversa índole, en este capítulo serán señaladas en forma general y poco a poco se realizará una adecuación a las restricciones y limitaciones del problema.

Valor ó costo:

Dentro del almacén se encuentran los insumos normalmente utilizados en el mantenimiento y corrección de averías en los trenes. Hay diversos tipos de refacciones para equipos de uso indispensable como son grúas, calderas, compresores, gatos hidráulicos. Existen artículos de consumo ordinario como son: materiales inflamables (solventes, pinturas, pegamentos, etc.) Estos insumos representan un costo, dicho costo puede ser: el costo unitario de los artículos, el costo de inventario ó almacenamiento de éstos lo que significa un gasto para mantener un espacio para alojar los artículos. Se tiene el costo por déficit de artículos en momentos de demanda, este viene a ser él más oneroso y difícil de calcular, representa el gasto generado por un paro en la producción de trenes y pago de horas extras a los empleados. Finalmente se tiene el costo por reabastecimiento que representa el gasto constante de preparar órdenes de embarque, manejar envíos etc. La suma de estos costos es el costo total y representa la función objetivo de nuestro problema, es la función que se desea optimizar. Las principales variables que tiene nuestra función objetivo son: la *cantidad* de artículos que deben adquirirse (*¿Cuánto ordenar?*) y los periodos de tiempo necesarios para realizar tales adquisiciones, (*¿Cuándo ordenar?*)

Tipos de Recursos con los que cuenta el almacén "x"

Físicos

Se cuenta con un espacio físico que posee las dimensiones suficientes para funcionar como almacén, dicho lugar se encuentra aislado térmicamente y su temperatura se puede considerar media constante (18-20 grados Celsius), cuenta con anaqueles y herramientas de carga adecuadas: grúas, montacargas y vehículos de trasporte.

Factor Humano

En cuanto al factor humano se cuenta con personal sindicalizado, el cuál tiene horario y salario designado, por lo que realmente solo se puede proponer capacitación por vía sindical o dentro de la práctica diaria de sus labores.

Administrativos

El personal que mantiene la administración está sujeto a la decisión política para permanecer a cargo de ésta, pero existen categorías intermedias que permanecen dentro del esquema organizativo y de supervisión del personal sindicalizado, es este tipo de personal el que podría ser de mayor utilidad dadas sus características laborales, de permanencia y de capacitación.

Financieros

La administración del organismo es responsable de los bienes que se encuentran en el almacén y de las entradas y salidas de estos, realmente los recursos ya se encuentran asignados por medio de partidas presupuéstales.

De esta manera el margen de acción para la toma de decisiones se encuentra en la requisición periódica de materiales, también se encuentra una alternativa de acción con una “caja chica”, que aunque limitada corresponde el único recurso en caso de un desabasto ó déficit por emergencia.

Se cuenta con un sistema de inventario de revisión continua. Es decir, los insumos y materiales son clasificados, almacenados y reordenados constantemente de manera que se puede conocer la cantidad de bienes en mano en cualquier intervalo de tiempo razonable. También se tienen requisiciones periódicas mensuales, semestrales y anuales, donde varía la cantidad de artículos demandados. [1]

Como en cualquier sistema de inventario se tienen demandas que no son predecibles, pero este problema tiene diferentes tratamientos incluyendo las soluciones que proporcionan los algoritmos genéticos.

Sección 1.3. -Optimización

La optimización es el proceso de ajustar los datos de un problema a las características de un esquema, proceso matemático ó experimento para encontrar la cantidad máxima ó mínima de un resultado. La optimización consiste en obtener variaciones de un concepto inicial y entonces utilizar la información obtenida de éste primer concepto para mejorar la idea. Los datos utilizados se forman con parámetros, el proceso ó función también es conocido como función de costo, función objetivo ó función por ajustar; la salida que arroja el proceso es conocida como solución ó función ajustada; cuándo el proceso es un experimento, entonces los parámetros son datos físicos inherentes al experimento. [2]

En nuestro problema la optimización que buscamos es la minimización de la suma de los costos descritos anteriormente. Esta optimización esta ligada con las cantidades de artículos solicitados y con los intervalos de tiempo en que deben solicitarse. Una vez definido lo que deseamos obtener de la optimización buscamos el punto mínimo de nuestra función de costo, para ello contamos con el auxilio de la computadora. Siendo ésta la herramienta idónea.

En esta sección haremos una breve recopilación de métodos de búsqueda mínima y veremos cual de ellos se adapta a nuestro problema, esto se hará con el fin de proponer otras herramientas que sirvan al propósito de obtener un óptimo ó “mejor” solución. [1]

El término “mejor” solución implica que hay más de una solución a un problema y que estas soluciones no son todas iguales. La definición de mejor es relativa a cada problema, al método de solución utilizado y a las tolerancias que cada problema pueda otorgar. De esta manera la solución óptima depende de la persona que formula el problema y de las personas que pretenden resolverlo también. Algunos problemas tienen respuestas exactas ó raíces, en cuyo caso podemos hablar de mejor solución.

Otros problemas tienen varias soluciones, soluciones máximas y mínimas mejor conocidas como puntos óptimos ó extremos donde “mejor” puede ser solamente una definición relativa.

Dado que el costo tiene que ser minimizado, entonces el proceso de optimización que se persigue en el presente trabajo será la minimización. [1]

A continuación describiremos seis tipos de optimización que nos permitan ubicar el problema del almacén “x” en alguno de ellos y poder iniciar el tratamiento y solución a nuestro problema

1.3.1. - Tipos de optimización

Los algoritmos de optimización pueden separarse en seis categorías, ninguna de las cuales es necesariamente mutuamente exclusiva de las otras, [2] por ejemplo un problema de optimización estática pudiera ser restringido ó no, sus parámetros pudieran ser continuos ó discretos, etc. Las diferentes categorías de la optimización son:

1. Optimización por prueba y error, la cuál se refiere a manipular los parámetros de un proceso, ajustándolos hasta conseguir un resultado y sin tener un gran conocimiento de los procedimientos que producen estos resultados. Muchos grandes descubrimientos han sido obtenidos de ésta forma, por ejemplo el refinamiento de la penicilina como antibiótico. Este acercamiento no puede aplicarse a la optimización matemática porque en este último tipo de aproximación a la solución de un problema se tiene por premisa que es posible describir un proceso por medio de una formula matemática. En el caso de no conocerse ésta solución, entonces no se descarta la posibilidad de aplicar varias formulas para encontrar alguna respuesta al problema. En nuestro caso ésta ha sido la manera habitual de obtener refacciones en el almacén “x”, mediante la experiencia de quienes hasta ahora han operado dicho almacén.
2. Optimización de un solo parámetro ó de varios parámetros; si existe solamente un parámetro la optimización se vuelve unidimensional; un problema que requiere más de un parámetro requiere optimización multidimensional, en estos casos la optimización se dificulta a medida que se incrementa el número de parámetros. Varios de los algoritmos de optimización multidimensional tratan de reducir el problema a uno de optimización unidimensional. Nuestro problema es de inicio un problema de dos parámetros, puesto que deseamos determinar *¿cuanto y cuando?* En la solución del problema que nos ocupa, utilizaremos funciones que dependen preferentemente de un solo parámetro, esto se logra, por ejemplo cuándo alguno ó algunos parámetros se consideran constantes. [3]
3. Optimización estática y dinámica; la optimización estática significa que los resultados son independientes del tiempo, mientras que la optimización dinámica implica que el resultado estará variando en función del tiempo Resolver el problema estático puede ser una labor difícil, pero un problema dinámico requiere agregar la dimensión del tiempo, lo cuál incrementa sumamente la complejidad del problema, para nuestros fines

usaremos principalmente el método estático en función del modelo utilizado en la solución de nuestro problema. [1]

4. Otra categoría de la optimización la constituye la forma de los parámetros, estos pueden ser continuos ó discretos; los parámetros discretos sólo pueden tomar un número finito de posibles valores, mientras que los parámetros continuos tienen un número infinito de valores. La optimización de parámetros discretos también es conocida como optimización combinatoria, debido a que la mejor solución u óptimo consiste de una cierta combinación de parámetros seleccionados de un subconjunto del espacio solución, entonces se tienen una limitación para utilizar todos los valores posibles. En el caso del almacén "x", utilizaremos la optimización de parámetros continuos y después aplicamos el mismo modelo adecuado a parámetros discretos, puesto que ése tipo de solución es la que nos interesa. [2]
5. Los parámetros frecuentemente tienen límites ó restricciones, la optimización de parámetros con restricciones incorpora desigualdades e igualdades en la función costo; la optimización no restringida permite que los parámetros tomen cualquier valor. Una optimización restringida frecuentemente puede convertirse en una optimización no restringida mediante una transformación de las variables. Cuándo la optimización restringida es expresada en sus parámetros en términos de ecuaciones lineales y de restricciones lineales es llamada programación lineal. Cuándo las ecuaciones de costo ó restricciones son no-lineales, el problema se convierte en uno de programación no lineal; la mayoría de las rutinas de optimización trabajan mejor con parámetros no restringidos.
6. Algunos algoritmos tratan de minimizar la función costo iniciando la búsqueda desde un conjunto inicial de datos. Estos buscadores de mínimos se atascan fácilmente en mínimos locales pero tienen la ventaja de que convergen rápidamente a puntos extremos locales. Para el caso que nos ocupa partimos de parámetros iniciales obtenidos empíricamente, decidimos "arrancar" con un modelo que nos proporciona una solución

inicial, modelo de Wilson (ver capitulo 2) y esa solución se utiliza para la implementación del algoritmo genético.

Estos son los algoritmos tradicionales de optimización y generalmente están fundamentados en métodos de cálculo diferencial; moviéndose de un conjunto de parámetros a otro, su búsqueda del mínimo está determinada por una serie de pasos secuenciales. Por otra parte existen métodos aleatorios que utilizan algunos cálculos probabilísticos para hallar conjuntos de parámetros iniciales, estos métodos tienden a ser más lentos pero tienen mayor éxito para encontrar el mínimo global, como son los algoritmos genéticos. [1]

Capitulo 2

INVENTARIOS

Introducción

Los inventarios representan materiales y suministros que una organización posee. Los inventarios son la parte básica de la planeación y suministro de diferentes fases de un proceso productivo, en dichas fases pueden encontrarse artículos almacenados desde materias primas para la producción, hasta los bienes ya terminados en espera de su comercialización. Los inventarios son el soporte inicial y final de algunos procesos de producción. En un sistema de producción se mantiene un inventario con el fin de enlazar la oferta con la demanda. Los inventarios sirven como paso intermedio entre suministro y demanda estos constituyen el requerimiento para iniciar una operación y la salida hacia la operación siguiente.

La razón fundamental para mantener inventarios es que es económicamente difícil obtener artículos que puedan allegarse a un sistema de producción cualquiera justo en el momento en que la demanda de estos se presenta. La gestión de inventarios como problema de optimización pretende suministrar el nivel de existencias suficiente –*óptimo*- que permita minimizar los costos implicados en los procesos de producción.

Sin la ayuda de los inventarios los consumidores deberán esperar hasta que se generen las ordenes desde el origen del sistema hasta su consumo final, en general los consumidores no pueden permitirse tales demoras de tiempo; por ello llevar un inventario se ha convertido en necesidad para las organizaciones que ofrecen productos y servicios a sus clientes. [5]

Sección 2.1. -Terminología

Un sistema es un conjunto de elementos interrelacionados entre sí, que funcionan con un propósito común.

Un sistema de inventario es un sistema en el cuál únicamente los siguientes tres tipos de costos son “significativos” y sujetos a control; mas adelante diremos a que nos referimos con eso:

1. El costo de llevar el inventario, (C_i) ó “costo por acarreo de inventario”, es el costo de invertir en el inventario, ó costo de manejar los bienes en almacén e incluye el costo de seguros e impuestos a los inventarios. El costo por déficit también es el costo de mantener los registros del inventario, alquiler de bodegas etc.
2. El costo de incurrir en déficit, ó costo de déficit, (C_d) Este incluye el pago de esfuerzos y tiempo extra, puede ser el costo de mantener una máquina fuera de servicio por falta de refacciones, significa pérdida de reputación. El costo por déficit dependerá de la longitud de tiempo por el cuál las unidades permanecen detenidas a falta de refacciones, incluye el sobrepago de esfuerzos administrativos, por ejemplo llamadas telefónicas, faxes, memorando, cartas etc.; implica gastos especiales de manipulación y embarque.
3. El costo de re-abastecimiento (C_r), es un costo que en ocasiones incluye el costo de compra, éste es el costo de ajustar máquinas para corridas de producción. Incluye el costo de compra por unidad lo que involucra el costo de preparar ordenes, de manejar embarques y transportes etc.

La suma de estos tres costos será referida como costo total, el término “costo” se utilizará en un sentido más amplio y general que el referido solamente a pesos y centavos, *costo será la medida de desempeño utilizada para el sistema bajo estudio*. [6]

Un sistema de producción es uno en el que se tienen los tres costos arriba mencionados y además, estos están sujetos a control. [5]

Diremos que los costos están sujetos a control cuando sucede alguna de estas situaciones: Si alguno de los tres costos anteriores se incrementa entonces, uno de los otros dos ó inclusive ambos disminuye. Solamente de esta forma podrá decirse que los costos son controlables.

Asumimos que el costo de inventario, el costo por déficit y el costo de re-abastecimiento pueden ser medidos con alguna unidad común, de modo que puedan realizarse comparaciones significativas entre ellos.

El siguiente ejemplo provee una ilustración de cómo los tres tipos de costo pueden ser controlados. Se tienen los registros de un almacén durante un período de un año. En los días primero de cada trimestre se coloca en el almacén un depósito de 60 kilogramos de un químico especial para suavizar el agua de una caldera y la cantidad es agregada al inventario. La demanda del depósito ocurre en períodos mensuales al inicio de cada mes; si la cantidad de inventario es insuficiente entonces nuevas cantidades del químico suavizante son requeridas para satisfacer la demanda. Las cantidades de inventario en mano se presentan en la siguiente tabla:

TABLA 1

Fecha	Cantidad Depositada	Cantidad en demanda	Inventario en Mano
Ene.1	60 Kg.	10 Kg.	50 Kg.
Feb.1		20	30
Mar.1		20	10
Abr.1	60	30	40
May.1		20	20
Jun.1		30	-10
Jul.1	60	0	50
Ago.1		0	50
Sep.1		40	10
Oct.1	60	30	40
Nov.1		20	20
Dic.1		20	0

La cantidad promedio del inventario en mano es:

(50+30+10+40+... +40+20+0)/12 =26.66 Kg. /año.

Se tiene un déficit de 10 Kg. únicamente en el mes de Junio, por lo que se tiene un déficit promedio de ***(10/12) ~ 0.83 Kg./año***.

Se realizan cuatro reabastecimientos en el año de igual magnitud, 60Kg. Supóngase un costo de inventario de $0.20 por 1 Kg. de sustancia química para caldera por mes y también un costo por déficit en inventario de $5.00 por mes por 1 Kg. faltante; además se tiene un costo de re-abastecimiento de $10.00 por lote abastecido i.e. por cada 60 Kg. depositados al almacén.

Anualizando las cantidades se tienen los siguientes costos:

Costo de inventario = (26.66 Kg.) ($0.20) (1/Kg.)*12(meses) = $64.00 por año

Costo por déficit = (10/12 Kg.) * ($5.00) * 12 (meses) = 50.00 por año

Costo por re-abastecer = (4 depósitos) *($10.00) = 40.00 por año

Se tiene un costo total anual de: $154.00 anual

Ahora hacemos que las órdenes de reabastecimiento sean colocadas con mayor frecuencia, a intervalos de 2 meses y con menor magnitud, así, se depositan 40 Kg. en lugar de 60 Kg., lo cuál mantiene la cantidad depositada anual en 240 Kg. de químico para caldera; los registros se presentan en la tabla número dos:

TABLA 2

Fecha	Cantidad Depositada	Cantidad en demanda	Inventario en Mano
Ene.1	40 Kg.	10 Kg.	30 Kg.
Feb.1		20	10
Mar.1	40	20	30
Abr.1		30	0
May.1	40	20	20
Jun.1		30	-10
Jul.1	40	0	30
Ago.1		0	30
Sep.1	40	40	30
Oct.1		30	0
Nov.1	40	20	20
Dic.1		20	0

Cantidad promedio en mano:

(30+10+30+0+…+0+20+0/12) = 16.66kg.

Los costos anualizados de este inventario son:

Costo de inventario = (16.66) Kg. *($0.20) *12 meses =$ 40.00 anual

Costo por déficit = (.83) Kg. * ($5.00) * 12 meses = 50.00

Costo por re-abastecimiento = (6 depósitos) *($10.00)= 60.00

Costo total anual $150.00

Nótese que cambiando la frecuencia de los depósitos el costo de inventario disminuye, pero obsérvese que el costo por reabastecimiento se incrementa mientras que el costo por déficit se mantiene, sin embargo el costo total disminuye de $154.00 a $150.00 por año.

Consideremos ahora un tercer caso donde además de variar la frecuencia de los depósitos se adiciona una cantidad de 10 Kg. de sustancia química para calderas al principio del año, la siguiente tabla muestra las cantidades de inventario en mano y las demandas:

TABLA 3

Fecha	Cantidad Depositada	Cantidad en demanda	Inventario en Mano
Ene.1	40 Kg.	10 Kg.	40 Kg.
Feb.1		20	20
Mar.1	40	20	40
Abr.1		30	10
May.1	40	20	30
Jun.1		30	0
Jul.1	40	0	40
Ago.1		0	40
Sep.1	40	40	40
Oct.1		30	10
Nov.1	40	20	30
Dic.1		20	10

Cuyos costos son:

Costo de inventario = (25.83) Kg. *($0.20) *12 meses =$ 62.00 anual

Costo por déficit = (.00) Kg. * ($5.00) * 12 meses = 00.00

Costo por reabastecimiento = (6 depósitos) *($10.00) = 60.00

Costo total anual $122.00

Nótese que en éste caso disminuye el costo total.

Comparando los tres casos se tiene que al cambiar las políticas del sistema los costos por inventario, déficit y re-abastecimiento varían, pues al incrementarse alguno de ellos disminuye alguno de los otros dos ó inclusive ambos. De esta manera se produce una disminución en el "costo total", que en nuestro caso también será llamado "*función objetivo*". [6]

Así, del ejemplo anteriormente expuesto puede comprenderse mejor la noción de control.

2.1.1. – Terminología de Tipos de Inventario

Como se vio en el ejemplo anterior los costos asociados a un sistema de inventario juegan un rol principal en la determinación de la política que será adecuada para llevar el sistema. Ahora hacemos distinción entre algunos, no todos, los tipos de sistema de inventario a los cuales nos referiremos durante el presente trabajo:

1. Un sistema de inventario tipo (C_i, C_d) es aquel donde el costo de inventario y el costo por déficit están sujetos a control.
2. En un sistema de inventario (C_i, Cr) el costo de inventario y el costo de reabastecimiento son controlables, los sistemas en los cuales el costo por déficit no es controlable son sistemas en los que el costo por déficit se considera cero, es decir, cuándo la administración considera que no ocurre un déficit.
3. Similarmente en un sistema de inventario del tipo (C_d, C_r) únicamente los costos por déficit y por reabastecimiento están sujetos a control y el costo

por acarreo de inventario no está controlado, tales sistemas rara vez son encontrados en aplicaciones prácticas.

4. Un sistema *(C_i, C_d, C_r)* es un sistema en el cuál los tres costos son controlables.

Un problema de inventario es un problema que consiste en obtener decisiones óptimas con respecto a un sistema de inventario, es decir, puede considerarse como un problema donde deben balancearse los tres costos de manera que la suma total entre ellos sea mínima. [6]

Las decisiones que se realicen con respecto al sistema de inventario siempre afectan los costos, pero tales decisiones raramente pueden obtenerse de manera directa en términos de éstos. En general las decisiones se toman en función de tiempo y cantidad, por lo que deben ser contestadas dos cuestiones fundamentales, *¿cuándo debe abastecerse el inventario?* – intervalos de tiempo- y *¿cuánto debe ser agregado al inventario?* –cantidades. Así pues, nuestro problema por resolver es el de responder a estas dos preguntas encontrando los valores específicos de las variables tiempo y cantidad que minimicen el costo total. Por lo tanto el elemento tiempo y el elemento cantidad serán las variables que están sujetas a control ó variables controlables de nuestro problema. Cuándo la variable controlable es el número de partes en una corrida de producción ó unidades compradas, el sistema es llamado *sistema de tamaño fijo* y denominamos (q) la cantidad requerida de insumos. Cuándo la variable controlable es el número de veces que se solicita abastecer un sistema, éste será llamado *sistema de intervalo fijo.* Llamamos a **(**t**)** período de cedulamiento, **(**t**)** es el intervalo de tiempo entre dos decisiones consecutivas con respecto al re-abastecimiento. [11]

2.1.2 - Políticas de decisión de inventarios.

Cuándo hablamos de la solución de un sistema de inventario, hablamos de un conjunto de valores específicos que pueden tomar las variables controlables y que minimizan el costo total del sistema.

En algunos casos no pueden obtenerse dichos valores específicos debido a la naturaleza general del sistema bajo estudio ó porque no es posible encontrar reglas de decisión adecuadas. Cuándo se obtienen reglas que especifican los valores exactos de las variables controlables, decimos que hemos hallado reglas de decisión optimas. La palabra “óptimo” en este caso nos recuerda que el problema de inventario y su solución se relacionan con los procesos de optimización mencionados en el capítulo uno. Dado que las decisiones referentes al problema de inventario están relacionadas con las cuestiones de cuándo y cuanto ordenar, la cuestión de “cuándo” usualmente se responde de dos formas: [2]

- El inventario debe abastecerse cada (t) unidades de tiempo.
- El inventario debe ser abastecido cuándo la cantidad de artículos dentro del inventario es igual ó menor a (p_r) cantidad de unidades, donde (p_r) es la cantidad de objetos en el inventario que permiten no caer en déficit, (p_r) es el punto de reorden.

La cuestión de cuanto ordenar se resuelve de dos posibles formas:

- La cantidad que debe ser ordenada es (q) cantidad de unidades.
- Una cantidad debe ser ordenada de modo que la cantidad en inventario sea traída a un nivel (S), nivel de orden del inventario, en cantidad de unidades.

De lo anterior se obtiene la siguiente nomenclatura, las cantidades: p_r, t q y S serán conocidas como: ***t*** *(período de cedulamiento),* ***q*** *(cantidad de insumos requerida),* ***S*** *(nivel de orden),* $\boldsymbol{p_r}$ *(punto de reorden).*

Un sistema de inventario en el cual se intentan obtener los valores de (p_r= punto de reorden) y (q=cantidad ó tamaño del lote), por ejemplo, será llamado inventario con política de decisión tipo $[p_r,\ q]$ de igual manera encontraremos inventarios con políticas $[t\ ,\ S]$, $[p_r, S\ ]$ y $[t\ , q]$, etc.

En ciertos sistemas de inventario una de las dos variables en la política de decisión puede ser prescrita de alguna manera, es decir, que su valor es constante ó que no es cuantificable. El objetivo de utilizar una variable prescrita obedece a que es preferible hacer un modelo que utilice una sola variable de control y así la función costo dependa únicamente del tiempo ó cantidad por ordenar ó alguna otra para facilitar la solución del problema. Para indicar que alguna de las variables es prescrita ó que es constante ó no es importante cuantificarla utilizaremos el sufijo "p".

Sección 2.2.-Modelos de Sistemas de Inventarios

Un modelo es una representación de un sistema. Un modelo matemático es uno en el cuál el sistema se representa por símbolos que son manejables utilizando relaciones matemáticas. [6]

Puesto que la política ó regla de decisión primordial es minimizar el costo total por medio de la manipulación de los costos por inventario (C_i), por déficit (C_d) y costo por re-abastecimiento (C_r), entonces debemos buscar una representación de un sistema a través de símbolos que sean manipulables en un modelo matemático. Este deberá incluir una fusión de las variables controlables (p_r, t, q y S) que involucren estos costos y algunos de los parámetros del sistema, por ejemplo: "n"-cantidad de piezas, costos monetarios etc.

Los problemas de inventarios existen debido a que hay una demanda de artículos y estos deben mantenerse en inventario para poder satisfacer los requerimientos que su demanda ocasiona.

Aunque existen varias formas de clasificar a los sistemas de inventarios, se justifica el hecho de que podamos dividir los modelos que resuelven un problema de inventarios en dos ramas principales en función del tipo de demanda que presentan. Decimos que hay modelos de inventarios determinísticos y probabilísticos.

Un modelo de inventario es determinístico cuándo la demanda de artículos es conocida, en estos casos la demanda podrá ser estática ó dinámica dependiendo si ésta permanece constante en el tiempo, ó bien, que siendo conocida se incrementa a una tasa constante con el paso del tiempo. Los modelos de inventarios probabilísticos se caracterizan por tener una demanda que puede describirse utilizando una distribución de probabilidad. Cuándo únicamente la demanda es probabilística los llamaremos modelos probabilísticos estáticos. Los modelos probabilísticos pueden complicarse cuándo los tiempos de envío de artículos para reabastecimiento y de adición de los artículos al almacén también siguen una distribución de probabilidad, en cuyo caso hablamos de modelos de inventarios probabilísticos dinámicos. [11]

Sección 2.3. - Modelos de Inventario Aplicados a la Solución del almacén "x".

Empezamos esta sección describiendo nuestro problema mediante un modelo de inventario determinístico, inicialmente trataremos de adaptar modelos determinísticos al problema del almacén "x" descrito en el capítulo uno. Conforme vayamos avanzando en el capítulo buscaremos algún otro tipo de modelo para adecuarlo a nuestro problema buscando siempre mejorar la solución obtenida inicialmente. Hemos mencionado que el almacén "x" es un sistema de revisión continua donde se realizan labores de ordenamiento, supervisión y almacenamiento de bienes en forma constante. Por razones de mantenimiento, en el almacén "x" se efectúan pedidos de reabastecimiento de forma regular y debido a esto, primeramente clasificamos a este almacén dentro de la categoría de almacenes asociados a un sistema de inventarios cuyo pedido es de *tamaño fijo*. En los sistemas de inventarios de tamaño fijo se solicitan cantidades fijas de insumos a intervalos de tiempo variables, la bibliografía existente denomina a este sistema como sistema tipo **"Q"**

En contrapartida a los sistemas de tamaño fijo existen los sistemas de inventarios de *intervalo fijo ó sistemas tipo* **P***,* donde se solicitan cantidades variables de insumos a intervalos de tiempo determinados.

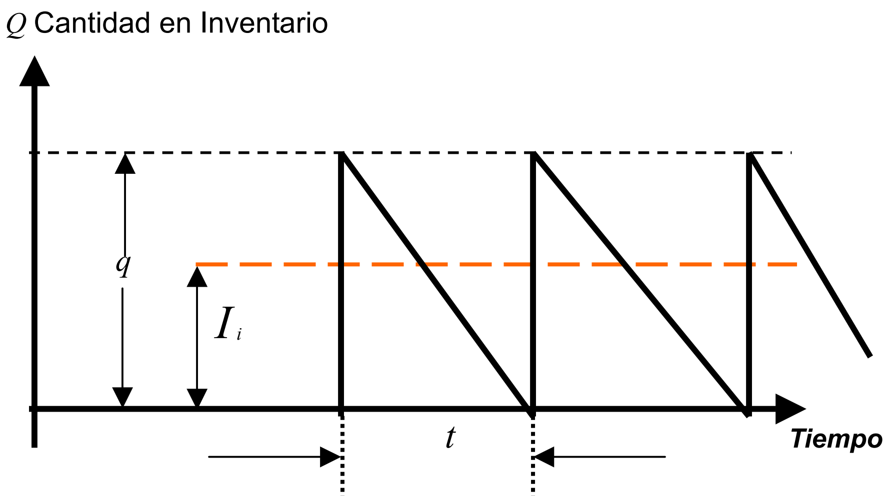
*Para nuestro propósito es necesario aclarar que ambos sistemas son equivalentes cuándo la demanda de objetos es conocida y el sistema de inventarios es determinístico***.** [11]

De acuerdo a la terminología que hemos propuesto el sistema asociado a nuestro problema pertenece al tipo (C_i, C_r), donde los costos de inventario y re-abastecimiento estarán sujetos a control. También hablamos de un sistema con políticas de decisión tipo $[t, q]$ donde deberá determinarse la cantidad requerida de objetos óptima, ***"q"*** para un solo período, arbitrario. Se tiene *un intervalo de tiempo entre decisiones consecutivas de reabastecimiento que pudiera no ser constante*. A éste intervalo de tiempo lo llamamos *período de cedulamiento*. De esta forma el primer modelo propuesto para aplicarse al almacén "x" será un sistema determinístico que también entra en la categoría de sistemas de tamaño *fijo*, tipo **"Q"**, también llamado sistema "*lote económico*" con las siguientes características:

- Se tiene una demanda de artículos determinística, constante, denotada por "*r*", cantidad de unidades entre unidad de tiempo $[Q]/[T]$
- El tamaño de los reabastecimientos es constante, y el tamaño de estos es denotado por (q)
- Los reabastecimientos se realizan cuándo el inventario alcanza el nivel cero, lo que significa que no se permite déficit.
- El tiempo de envío entre órdenes es cero, es decir, los artículos llegan al almacén casi instantáneamente.
- Se controlan solamente los costos por acarreo de inventario (C_i) constante, con dimensiones $[\$] / [Q]\ [T]$ donde $[\$]$ es unidad monetaria. También se controla el costo unitario por reabastecimiento (C_r) constante, cuya dimensión es $[\$]$.

Las fluctuaciones del sistema de inventario tipo "*lote-económico*" se muestran en el siguiente diagrama, donde (I_i) representa el inventario promedio:

Diagrama Nº 1



Apoyándonos en las propiedades anteriores y en el diagrama, se propone un período de cedulamiento ó lapso de tiempo entre dos decisiones consecutivas sobre reabastecimiento, denotado por $t = q/r$. Con una demanda, "*r*", constante y conocida. En lo sucesivo denotamos al número promedio de reabastecimientos por unidad de tiempo como I_r La cantidad promedio acarreada en inventario por período es $I_i = q/2$. La cantidad I_r representa un reabastecimiento por cada período "*t*", lo que significa que el promedio es $I_r = 1/t = r/q$

Por lo tanto, la ecuación general del costo total será:

$$C(q) = C_i * I_i + C_r * I_r \qquad 1)$$

Sustituyendo I_i e I_r, en la EC. 1) se tiene:

$$C(q) = \frac{C_i * q}{2} + \frac{C_r * r}{q} \qquad 2)$$

Para encontrar el tamaño óptimo de la cantidad "*q*", requerida, derivamos la ecuación 2) con respecto a "*q*", teniendo en cuenta que una condición necesaria para hallar el óptimo es que "*q*" sea continua, la cual se cumple.

$$\frac{d}{dq}C(q) = \frac{C_i}{2} - \frac{C_r * r}{q^2} = 0 \qquad 3)$$

Después de igualar a cero, despejamos a "q" para obtener la solución de la ecuación que proporciona el tamaño óptimo del lote requerido, denotado (q*):

$$q^* = \sqrt{\frac{2rC_r}{C_i}} \qquad 4)$$

Si pensamos en un horizonte de planeación estándar de un solo período, el costo **"**C**"** regular de re-abastecer y mantener el inventario lo obtenemos evaluando **"**C**"** en el óptimo ya encontrado, entonces:

$$C(q^*) = \frac{C_i}{2} * \sqrt{\frac{2rC_r}{C_i}} + \frac{C_r * r}{\sqrt{2rC_r / C_i}} \qquad 5)$$

Evaluando y haciendo operaciones se obtiene el costo mínimo del sistema:

$$C(q^*) = \frac{\sqrt{2rC_rC_i}}{2} + \frac{\sqrt{2rC_rC_i}}{2} = \sqrt{2rC_rC_i} \qquad 6)$$

Este fue el modelo "lote económico", también conocido como formula de Wilson ó formula de Harris para el caso continuo. En nuestro problema se necesita que el tamaño del lote óptimo (q) esté restringido a unidades discretas. Para utilizar el modelo de Wilson en lotes cuyo tamaño es discreto, se puede aplicar el modelo de Wilson continuo y después aproximar este resultado al entero más próximo.*

2.3.1. -Modelo "lote económico", introducción

Los modelos de inventarios propuestos serán aplicados en un almacén que provee refacciones a máquinas-herramienta utilizadas en la producción de trenes. Para ello se tomaron como sujetos de experimentación las grúas de los talleres de producción, pues son estos equipos los que pueden ser monitoreados con mayor facilidad. Estas grúas además, son fundamentales para trasladar piezas y refacciones de los trenes en su camino de desarmado, corrección de averías y armado en una línea de montaje en serie.

Para aplicar el modelo descrito en la sección anterior y las subsecuentes, fue necesario estimar los costos por inventario, déficit y re-abastecimiento. Esto se hizo de acuerdo a la experiencia de quién administra la producción de trenes y el almacén “x”.

Hacemos énfasis en que las cifras reales no fueron sujetas a escrutinio puesto que es política de la administración reservarse información clave, sin embargo los costos unitarios de las refacciones descritas son precios reales hasta Diciembre del año 2005.

- El costo de inventario se calculó sobre la base de una fracción del costo unitario por pieza ó cantidad del artículo utilizado, en cuyo caso es 5% del costo unitario.
- El costo de reabastecimiento se calcula en función de los incrementos del costo unitario durante un período mensual; además de los gastos constantes que se originan por el proceso administrativo que debe seguirse para colocar un pedido y hacer que este llegue finalmente al almacén.
- El costo más difícil de estimar fue el costo por déficit, puesto que se estimó en función de la producción de trenes que se pierde al estar en paro las máquinas-herramienta en cuestión –grúas- Y en función del retraso ocasionado en la línea de producción, considerando el pago de horas extras [6]

El costo por déficit se estimó basándose en el siguiente análisis realizado por personal de supervisión del mantenimiento a las grúas y por personal de supervisión de producción:

- Los datos proporcionados por el personal responsable de la producción de trenes estiman que el costo de producción de un vagón de tren urbano es de $288,000.00 anuales Por esta razón el déficit de refacciones de una grúa pondría en riesgo la reparación de un tren, así que el costo mensual por déficit se calcula como $24,000.00 por grúa. Este cálculo solamente estima pago de horas extras y salario de los operarios. Como dato adicional, hay refacciones que tienen un mayor precio con respecto a otras y una mayor dificultad de ser reparadas o sustituidas. En función de estas características, las refacciones propuestas para ser monitoreadas tienen diferentes costos asignados de acuerdo a la experiencia de quienes aportaron estos datos, se hace notar que el costo por déficit será utilizado después, en otro modelo.

- Los períodos de requerimiento de materiales dentro de la organización son: mensual, semestral y anual. Cómo la mínima unidad es la demanda mensual, (30 días), se tomarán períodos mensuales para realizar los cálculos de la función objetivo.

Para modelar nuestro almacén se tomaron cinco refacciones que son partes de una grúa viajera. Estas refacciones fueron seleccionadas debido a la importancia que tienen dentro de la máquina correspondiente, a la demanda de la que son objeto, al costo unitario de estas y lo más importante, a que se tiene un registro de estos datos. Los costos se ordenan en la tabla número 4. **Las refacciones son requeridas por pieza, el cable de acero se solicita por rollo de 40 metros, que corresponde a una pieza.*

TABLA Nº 4

ARTÍCULO	**C. Unitario-C_u**	**C. Re-Abastecer C_r**	**C. Inventario C_i.**
Gancho	*$ 1400.00*	*$ 126.00*	*$ 70.00*
Balata	*456.00*	*41.00*	*23.00*
Cable Acero*	*2500.00*	*225.00*	*125.00*
Botonera	*4200.00*	*378.00*	*210.00*
Interruptor	*350.00*	*32.00*	*18.00*

2.3.2. - Aplicación de la formula de Wilson, “lote económico" a los artículos del almacén “x”

Se tiene un modelo tipo (C_i, Cr) en cuánto hace al control de los costos y un modelo con variables tipo $[q, t]$ es decir, debe determinarse la cantidad óptima a requerir **(** q^* **)** con un intervalo entre pedidos expresado por (t) Denotamos a la cantidad de inventario inicial *como* (q_i)*, para mantener una simbología adecuada.*

Gancho:

El lote del gancho al inicio del período, es q_i ***= 10*** piezas, se tiene una demanda determinística y *empírica r = 6* piezas por mes para satisfacer los requerimientos mínimos de mantenimiento, los costos están indicados en la **Tabla Nº 4.** Al decir "empírica" nos refererimos a una demanda que se determinó sobre la base de la experiencia laboral.

Así el costo inicial del sistema lo obtenemos aplicando la ecuación *2) de la Sección 2.3* con los datos proporcionados y este es:

$$C(q_i) = \frac{C_i * q_i}{2} + \frac{C_r * r}{q_i} = \frac{(70*10)}{2} + \frac{(126*6)}{10} = \$425.60$$

Como se apuntó en la *Sección 2.3* el período de cedulamiento antes de obtener el óptimo está dado por $t = q_i / r = 10/6 = 1.66$ *periodos*(30) días*, se tienen entonces 50 días.

La cantidad óptima de artículos se obtiene aplicando la formula *4) de la Sección 2.3*; entonces:

$q^* = \sqrt{\frac{2rC_r}{C_i}} = \sqrt{\frac{2*6*126}{70}} = \sqrt{21.6} = 4.64$. La cifra *4.64* puede redondearse a *5* piezas para mantener requerimientos de piezas de tipo discreto.

El mínimo costo mensual por inventario y reabastecimiento se obtiene aplicando la ecuación *6)*, de la sección anterior:

$C(q^*) = \sqrt{2r * C_i * C_r}$ = (2*6*70*126*)½= *$ 325.33*

Donde se observa una leve disminución en el costo total, esto se debe a que la cantidad óptima de artículos por ordenar que satisface una demanda determinística de 6 ganchos por mes es de aproximadamente cinco ganchos y el período de cedulamiento en el óptimo es: $t = \frac{q}{r}$ en el óptimo (q^*) obtenemos:

$t = \frac{q^*}{r} = \frac{4.64}{6} = .7733$ Meses * (30) días = 23 días aproximadamente

En conclusión, se requiere ordenar aproximadamente 5 ganchos cada 23 días.

Balatas:

Se tiene una demanda determinística y *empírica* de r = 12 piezas por mes y una cantidad de inventario inicial q_i *=10* piezas, un período inicial $t = q_i / r = 10/12 = .833$ *meses * 30 días ≈ 25 días*

Análogamente si aplicamos las formulas ya conocidas y los costos de la *Tabla Nº 4*, el costo inicial será:

$$C(q_i) = \frac{C_i * q_i}{2} + \frac{C_r * r}{q_i} = \frac{(23*10)}{2} + \frac{(41*12)}{10} = \$164.20$$

Ahora obtenemos el óptimo:

$$q^* = \sqrt{\frac{2rC_r}{C_i}} = \sqrt{\frac{2*12*41}{23}} = \sqrt{42.7826} = 6.54 \approx 7\,pzs.$$ Cantidad óptima por ordenar.

El período de cedulamiento es: $t = (q^*/ r) = (6.54/12)$ periodos*mes=$.545*(30)$ *días* = 16.35≈ 16 días, y el costo óptimo será:

$C(q^*) = \sqrt{2r * C_i * C_r}$ = (2*12*23*41)$^{1/2}$= ***$ 150.44***

Recordemos que estamos calculando el tamaño óptimo del lote (q^*) que será necesario requerir para evitar el déficit y para satisfacer una demanda determinística (r) Realizando cálculos de manera análoga con las demás refacciones, presentamos el siguiente resumen de los resultados obtenidos en la tabla ***Nº 5.***

TABLA Nº 5

Artículo	C_i	C_r	**Demanda (r)**	q_i	**$C(q_i)$**	q^*	$C(q^*)$	$t = \frac{q^*}{r}$
Gancho	*$ 70.00*	*$126.00*	*6*	*10*	*$ 425.60*	*5*	*$ 325.33*	*23 días*
Balatas	*$ 23.00*	*$ 41.00*	*12*	*10*	*$ 164.20*	*7*	*$ 150.44*	*16 días*
Cable-Acero	*$ 125.00*	*$ 225.00*	*6*	*10*	*$ 760.00*	*5*	*$580.95*	*23 días*
Botonera	*$ 210.00*	*$ 378.00*	*6*	*10*	*$1276.80*	*5*	*$975.99*	*23 días*
Interruptor	*$ 18.00*	*$ 32.00*	*6*	*10*	*$ 109.20*	*5*	*$83.14*	*23 días*

En todos los casos disminuyen los costos en la función objetivo $C\ (q^*)$ y se obtiene un período de cedulamiento de *23* días, lo que significa requerir 5 piezas de cada artículo cada *23* días.

La excepción del caso son las Balatas, estas necesitan un período de cedulamiento menor (*16 días)* debido a que su demanda es mucho mayor, $r = 12$ piezas mensuales, obteniéndose un lote óptimo de $q^*=6.54\approx7$ piezas aproximadamente. Lo anterior nos lleva a concluir que reduciendo el tamaño de los requerimientos de refacciones y aumentando la frecuencia de éstos se controlan los costos por inventario y reabastecimiento y en consecuencia se logra reducir el costo total. Lo que constituye nuestro objetivo primordial. El modelo de Wilson tiene como ventaja que puede indicar los períodos de requisición de refacciones –longitud del ciclo- y el tamaño óptimo del lote por requerir, sin embargo se necesita colocar pedidos continuamente lo que podría provocar un superávit de refacciones.

2.3.3. - Modelo determinístico alternativo, el "Order-level".

Este modelo tiene una demanda determinística (r) y una política de decisión de tipo $[t_p,\ S]$ donde mostraremos que el período de tiempo entre dos decisiones consecutivas de reabastecimiento es prescrito, es decir, los períodos de cedulamiento son iguales. Los costos por reabastecimiento no están sujetos a control y por lo tanto éste tipo de modelos se concentra en balancear los costos de inventario (C_i) contra los costos por déficit, (C_d) El modelo "Order-level" determinístico general es uno donde existe una cantidad específica de artículos en inventario $(S > 0)$ llamada nivel de orden del inventario.

Este sistema es muy similar al modelo ya presentado de Wilson, la diferencia entre ambos estriba en que el sistema "Order-level" sí permite déficit y tiene las siguientes propiedades: [6]

- *Se tiene una demanda determinística a una tasa constante de **(r)** cantidad de unidades por unidad de tiempo.*

- *Los reabastecimientos se realizan a principios de cada período de cedulamiento. El período de cedulamiento ó longitud de tiempo entre dos decisiones consecutivas de reabastecimiento es constante.*
- *El tamaño de los reabastecimientos debe ser capaz de "levantar" el nivel de inventario hasta un nivel de orden **(** S **),** suficiente para satisfacer la demanda y algún posible déficit, el nivel de orden óptimo **(** S_o **)** deberá determinarse.*
- *El período que transcurre entre el pedido de artículos para reabastecimiento y su adhesión física al inventario es insignificante ó cero, lo cual es una idealización del modelo y en consecuencia se tiene una tasa de reabastecimiento infinita es decir un reabastecimiento instantáneo.*

De lo anterior se tiene que el numero promedio de reabastecimientos por unidad de tiempo es I_r **=** $(1/t_p)$ que en éste caso es constante, por lo que no afectan la decisión sobre el nivel óptimo de orden denotado **(** S_o **).**

Habíamos visto en el modelo de Wilson que la tasa de demanda era determinada por ($r = q / t$). Para sistemas donde el tiempo de cedulamiento es constante y con una demanda (*r*) constante el tamaño de los reabastecimientos es una variable prescrita denotada:

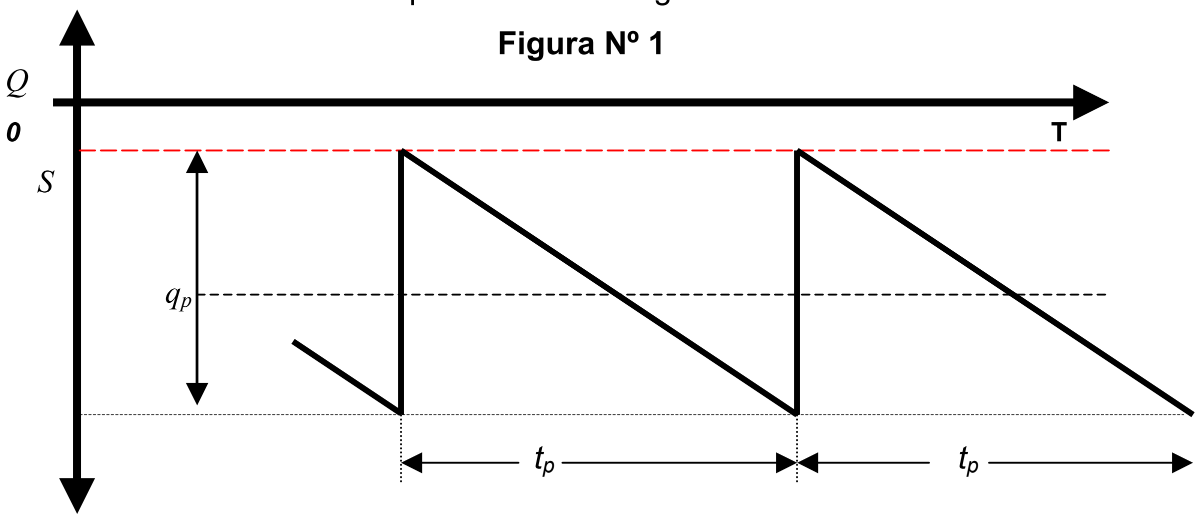
$$q_p = r\, t_p$$

Las fluctuaciones del inventario dependerán de los valores de "S" y "q_p"

Sean I_i e I_d las cantidades promedio de inventario y déficit promedio, respectivamente. A partir del análisis de los siguientes casos que presentaremos gráficamente se verá la forma en que se deducen las ecuaciones del sistema "Order-level" para obtener un nivel de inventario óptimo **(** S_o **).**

Caso 1) Cuando S **£** ***0*** En este caso solamente existe déficit. Las fluctuaciones del sistema en este caso se presentan en la figura **Nº 1**:

Figura Nº 1

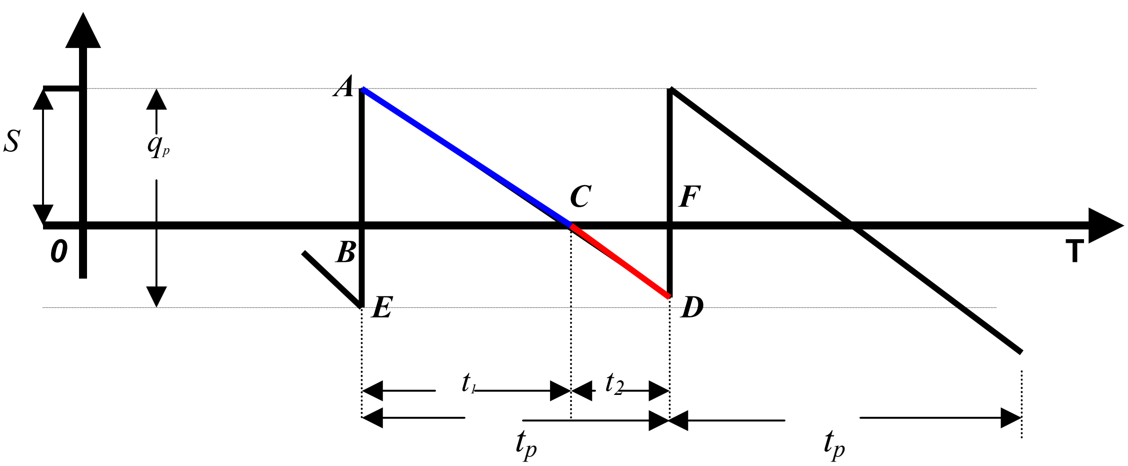


En este caso, el inventario promedio, I_i **= 0** Puesto que solamente se acarrea un déficit. Este déficit representará un costo, C_d, el déficit promedio será la cantidad promedio en inventario, menos el nivel de orden (S)

Así entonces se tiene: I_i **=** ***0*** e I_d **=** $\frac{q_p}{2} - S$

Caso 2) En el caso dos, cuándo $\boldsymbol{0 \leq S \leq q_p}$ el nivel de orden (S) está dentro del intervalo ***[****0, q_p****]***, esto indica que se acarrea un inventario promedio **(** $\boldsymbol{I_i}$ **)** y un déficit promedio **(** $\boldsymbol{I_d}$ **)** las fluctuaciones del sistema en éste caso se presentan en la figura Nº 2.

Figura Nº 2



La cantidad de inventario promedio será:

$$I_i(S) = S^2/2q_p \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} 2)$$

Explicamos de donde se obtiene la relación 2) anterior; considere el **Caso 2)** Durante un período de cedulamiento (t_p), en la figura se observa que: $t_p = t_1 + t_2$.

Observando la figura se tienen las siguientes relaciones:

$$BC/ED = AC/AD \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} 3)$$

Durante el período (t_2), la cantidad de inventario acarreado es cero, que corresponde al segmento ***CD*** por lo tanto el inventario promedio durante el período $t_2 / t_p = 0$

El segmento ***AC*** es el inventario acarreado durante el período (t_1) La cantidad en inventario *promedio* acarreado $I_i(S)$ es ($S/2$) que corresponde, *en promedio*, a la mitad del segmento ***AD***.

Luego, de la ecuación 3 se tiene que: $AC = (BC/ED) * AD = (t_1/t_p)(\frac{S-0}{2})$

Así el inventario obtenido mediante las relaciones de triángulos semejantes es:

$$I_i(S) = \frac{t_1}{t_p} * \frac{S}{2} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} 4)$$

Igualmente, aprovechando las propiedades de los triángulos semejantes, se tienen las siguientes relaciones:

$$t_1/t_p = S/q_p \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} 5)$$

Sustituyendo 4) en la ecuación 3) obtenemos el resultado de la ecuación 2)

El déficit promedio se obtiene de la siguiente manera, durante el período t_2, el déficit será el segmento ***CD***, y por la relación entre triángulos semejantes el déficit promedio es:

$$I_d(S) = [q_p - S/2][t_2/t_p] \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} 6)$$

Y puesto que buscamos déficit, entonces análogamente al inventario promedio, hallamos la relación que existe entre (t_2/t_p), observando la figura Nº 2 y nuevamente por triángulos semejantes se tiene que:

$$\frac{t_2}{t_p} = \frac{q_p - S}{q_p} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} 7)$$

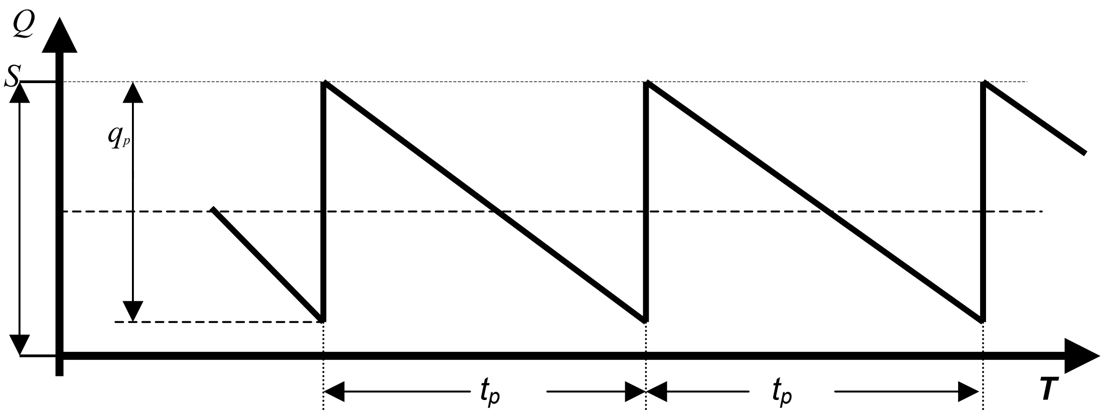
Sustituyendo 7) en 6) se obtiene la cantidad en déficit promedio del caso 2):

$$I_d(S) = {(q_p - S)^2}/{2q_p} \qquad \text{8)}$$

En el caso siguiente no ocurre déficit, lo que corresponde a la figura Nº 3

Caso 3) $S \geq q_p$

Figura Nº 3



Puesto que no existe déficit tendremos que, $I_d(S)$ **= 0** mientras que el inventario promedio será:

$$I_i(S) = S - \frac{q_p}{2} \qquad \text{9)}$$

Una vez revisados los tres casos posibles, pueden obtenerse las relaciones existentes para describir el inventario promedio, I_i y el déficit promedio I_d **:**

$$I_i(S) = \begin{cases} 0, \ \textbf{Sí } S \leq 0; \\ {S^2}/{2q_p} \ ; \ \textbf{Sí } 0 \leq S \leq q_p \\ S - \frac{q_p}{2} \ ; \ \textbf{Sí } S \geq q_p \end{cases} \qquad I_d(S) = \begin{cases} \frac{q_p}{2} - S \ ; \ \textbf{Sí } S \leq 0; \\ {(q_p - S)^2}/{2q_p} \ ; \ \textbf{Sí } 0 \leq S \leq q_p \\ 0; \ \textbf{Sí } S \geq q_p \end{cases}$$

Puesto que:

$$C\,(S) = Ci * I_i + Cd * I_d$$

Obtenemos la función costo *C(S),* que describe el modelo Order-level:

$$C\,(S) = \begin{cases} C_d * (\frac{q_p}{2} - S); \quad \textbf{\textit{Sí}} \; S \S 0 \\ \\ Ci * \frac{S^2}{2q_p} + C_d * \frac{(q_p - S^2)}{2q_p}, \; \textbf{\textit{Sí}} \; 0 \leq S \leq q_p \\ \\ Ci * (S - \frac{q_p}{2}); \quad \textbf{\textit{Sí}} \; S \geq q_p \end{cases} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_10)}$$

La función *C(S)* es lineal cuándo **(**$S \leq 0$**)** y cuándo ($S \geq q_p$) Cuándo ($0 \leq S \leq q_p$), la función *C(S)* es cuadrática, deberá mostrarse que el mínimo de *C(S)* está en el intervalo ($0 \leq S \leq q_p$) y no en alguno de los otros dos. Recordemos que *(*$S > 0$*)* Para descartar los intervalos *(*$S \leq 0$*)* y *(* $S \geq q_p$*)* entonces, se analizan dos casos.

Caso 1) Sustituimos un ($S' < 0$) cualquiera en la función costo: $C\,(S) = C_d * (\frac{q_p}{2} - S)$

Sea $S' = S < 0$ y al sustituirlo en la función indicada se obtiene:

$$C(S') = C_d * (\frac{q_p}{2} - S') = C_d [\frac{q_p}{2} - (-S)] = C_d (\frac{q_p}{2} + S)$$

Si evaluamos la función en el extremo derecho del intervalo $S \S 0 =$ **(** $-\infty, 0$**]** se tiene:

$$C(\,0\,) = C_d * (\frac{q_p}{2} - 0) = C_d (\frac{q_p}{2})$$

Por lo tanto, el mínimo costo de la función *C(S)* se obtendría cuándo ($S = 0$*)*

Obsérvese que $C(S = 0) < C(S')$ lo cual es contradictorio si suponemos $S' < 0.$ Sabemos que *(* $S = 0$*)* es el extremo superior del intervalo y su costo debe ser mayor que el de todos los demás. Entonces, él mínimo global de la función no está en $S \S 0$

Similarmente, debe mostrarse que el mínimo de la función *C(S)* no se encuentra en el intervalo donde ($S \geq q_p$*)*

Analizando la función se tiene el siguiente:

Caso 2) Sea *($S = S'' \geq q_p$)*, sustituyendo éste valor en la ecuación 9), obtenemos:

$C(S'') = C_i\,(S'' - \frac{q_p}{2}) > 0$, siendo C_i una cantidad positiva y $S'' \geq q_p > 0$ *(figura 3)*

Si evaluamos la función en $S = q_p / 2$ obtendríamos cero, que es menor que $C(S'')$

Análogamente al caso uno podemos concluir que el mínimo de la función $C(S)$ tampoco se encuentra en el intervalo $S \geq q_p$

Efectivamente él mínimo de la función $C(S)$ está en el intervalo $0 \leq S \leq q_p$.

Por lo tanto, la ecuación de costo se reduce a la siguiente:

$$C(S) = (C_i)\,\frac{S^2}{2q_p} + (C_d)\,\frac{(q_p - S)^2}{2q_p} \quad \textbf{\textit{Si}}\ 0 \leq S \leq q_p$$

Para obtener el mínimo tomamos la primera derivada de la función $C(S)$ con respecto a "S" en 10) e igualamos a cero.

$$\frac{d}{dS}\,C(S) = C_i\,\frac{S}{q_p} - C_d\,\frac{(q_p - S)}{q_p} = 0 \qquad\text{11)}$$

Resolviendo para **"** S **"** la ecuación 11) se obtiene el óptimo:

$$S_0 = q_p\,\frac{C_d}{C_i + C_d} \qquad\text{12)}$$

Si diferenciamos la ecuación 10) por segunda vez comprobamos que se obtuvo el mínimo absoluto:

$$\frac{d^2}{dS^2}\,C(S) = \frac{C_i}{q_p} + \frac{C_d}{q_p} > 0 \qquad\text{13)}$$

Por lo tanto, concluimos que S_o representa el nivel óptimo de inventario que minimiza el costo total $C(S)$ Para obtener una relación explícita del costo mínimo, sustituimos el valor de (S_o) obtenido de 12) en la ecuación de costo total 10) y evaluamos para obtener:

$$C(S_0) = \frac{q_p}{2} * \frac{C_i C_d}{C_i + C_d} \qquad\text{14)}$$

Modelo Order-level, caso discreto.

Cuándo el sistema de inventarios Order-level está limitado a utilizar unidades discretas ***u =... -2u, -u, 0, u, 2u,...*** para (***u***) número entero, entonces se calcula el nivel óptimo de inventario continuo y el resultado se aproxima al valor entero más próximo.

2.3.4. - Modelo "Order-level" discreto aplicado en el almacén "x"

Presentamos los costos de las refacciones en la siguiente tabla y les aplicamos el Order-level discreto:

TABLA Nº 6

ARTÍCULO	C. Unitario-C_u	C. Déficit C_d.	C. Re-Abastecer C_r	C. Inventario C_i.
Gancho	$ 1400.00	**$ 24000.00**	$ 126.00	**$ 70.00**
Balata	456.00	**12000.00**	41.00	**23.00**
Cable Acero	2500.00	**24000.00**	225.00	**125.00**
Botonera	4200.00	**24000.00**	378.00	**210.00**
Interruptor	350.00	**6000.00**	32.00	**18.00**

Gancho:

Se tiene un nivel de inventario inicial de $S=10$ piezas y utilizaremos una demanda empíricamente conocida ($r=6$) la cual es utilizada en el modelo de Wilson para cada refacción. Se tiene un tiempo prescrito (t_p) de un mes entre dos decisiones consecutivas de abastecimiento y se utiliza un lote

$q_p = r * t_p = (6 * 1) = 6$ piezas recordando que $q_p = 6$ piezas representan la cantidad de artículos necesarios para "levantar" el inventario hasta un nivel optimo, S_0

Para calcular el costo inicial utilizamos los costos de la tabla Nº 6 y las ecuaciones número 9) y numero 13) anteriores cuándo $S = 10$ *piezas.*

Aplicando las ecuaciones obtenidas en la sección anterior, cuando $(0 \leq S \leq q_p)$:

$$C(S) = C_i \frac{S^2}{2q_p} + C_d \frac{(q_p - S)^2}{2q_p} = \frac{70(10)^2}{2(6)} + (24000)\frac{(6-10)^2}{2(6)} = \$32,583.33 \text{ costo inicial}$$

Luego se obtiene el nivel optimo:

$$S_0 = q_p \frac{C_d}{C_i + C_d} = \frac{6 * (24000)}{(70 + 24000)} = 5.9825 \approx 6 \textit{ piezas.}$$

$$C\ (S_0) = \tfrac{1}{2} q_p \frac{C_i C_d}{C_i + C_d} = 5.98/2 * \frac{(24000 * 70)}{(70 + 24000)} = \$208.77$$ *, es el costo óptimo y se observa que disminuye el costo inicial.*

Análogamente, aplicamos el modelo "Order-level" discreto con demanda empírica *a las demás refacciones. En cada caso se tiene un nivel inicial de inventario de $S = 10$ piezas y un período de cedulamiento constante de un mes, presentamos los resultados obtenidos en la siguiente tabla:*

Tabla Order-level

Artículo	Demanda (r)	Costo inicial	$\frac{C_d}{(C_d + C_i)}$	q_p	Nivel Optimo	Costo Óptimo.	Nivel Optimo Discreto
Gancho	*6*	*$ 32583.33*	*.9970*	*6*	*5.98*	***$ 208.77***	***6***
Balatas	*12*	*$ 2095.83*	*0.9980*	*12*	*11.97*	***$ 137.48***	***12***
Cable	*6*	*$33041.66*	*0.9948*	*6*	*5.96*	***$ 371.12***	***6***
Botonera	*6*	*$33750.00*	*0.9913*	*6*	*5.94*	***$ 619.11***	***6***
Interruptor	*6*	*$ 8150.00*	*0.9970*	*6*	*12.96*	***$ 53.67***	***13***

Este modelo controla adecuadamente el costo total igualando el nivel óptimo de inventario a la demanda de artículos lo que minimiza el costo por déficit y por acarreo de inventario.

2.3.5. - Modelos Probabilísticos

2.3.5.1. - Modelo densidad uniforme

En general los modelos probabilísticos utilizan una demanda instantánea.
En éste modelo particular, se supone que la demanda total se satisface al inicio del período, la demanda de artículos se obtuvo utilizando la tabla de frecuencias del apéndice "A", dicha tabla representa el número de fallas ocurridas a un conjunto de grúas en un lapso de 24 meses. A esta demanda la llamaremos *demanda máxima*. Dependiendo de la cantidad demandada (r) la posición del inventario puede ser positiva (excedente), ó negativa (déficit), un sistema de este tipo tiene las siguientes propiedades: [6]

- La distribución de la demanda "r" es independiente del tiempo en el que esta ocurre y puede describirse con una función de densidad de probabilidad.
- No se permite más de un solo pedido de refacciones por período, en este caso hablamos de un pedido cada mes. Suponemos que el reabastecimiento es instantáneo
- El nivel de inventario óptimo "S_0" se deduce de la minimización de los costos esperados totales, lo cuál incluye el costo por reabastecimiento (C_r), el costo de inventario (C_i) y costo por déficit (C_d)

El nivel óptimo discreto S_0 se obtiene calculando él óptimo continuo y después aproximando al entero más próximo. Se aplicó el modelo únicamente al cable de acero, botonera e interruptor debido a que las otras refacciones no proporcionan datos suficientes como para que se pueda ajustar alguna función de densidad bajo el programa "Stat Graphics®", versión 6. Ante la carencia de datos la función de densidad propuesta por "Stat Graphics®" es la densidad uniforme continua. Ésta se obtuvo de datos reales en el organismo durante los años 1998 y 1999 con respecto a las fallas ó demanda de refacciones de las grúas.

Este modelo es un sistema tipo *(C_i, C_d, C_r)*, donde se tiene una cantidad en inventario antes de colocar un pedido, a esta cantidad inicial le llamamos *inventario en mano "**q**".*

Con este modelo se pretende obtener el nivel de inventario óptimo "S_0", por lo tanto se tiene un sistema cuyas variables de decisión son *[S, q]*

Se tienen los costos tomados de la Tabla 1 asociados al sistema en la siguiente tabla:

Articulo	C_u	C_d	C_r	C_i
Cable Acero	*\$ 2500.00*	*\$ 24000.00*	*\$ 225.00*	*\$ 125.00*
Botonera	*\$ 4200.00*	*\$ 24000.00*	*\$ 378.00*	*\$ 210.00*
Interruptor	*\$ 350.00*	*\$ 6000.00*	*\$ 32.00*	*\$ 18.00*

En los modelos con demanda instantánea se supone que ésta se satisface al inicio del período, entonces, dependiendo de la cantidad demandada *"r"*, la posición del inventario será de excedente ó déficit según las siguientes fluctuaciones mostradas en las figuras **Nº 5** y **Nº 6**.

De esta manera puede determinarse que $I_i(S)$ representa el inventario promedio en mano, e $I_d(S)$ representa el déficit promedio para una demanda "r" continua y nivel de inventario *(S)*

Figura Nº 5

Cuando $r < S$, inventario en mano

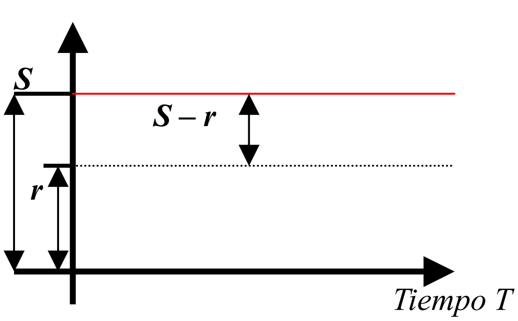
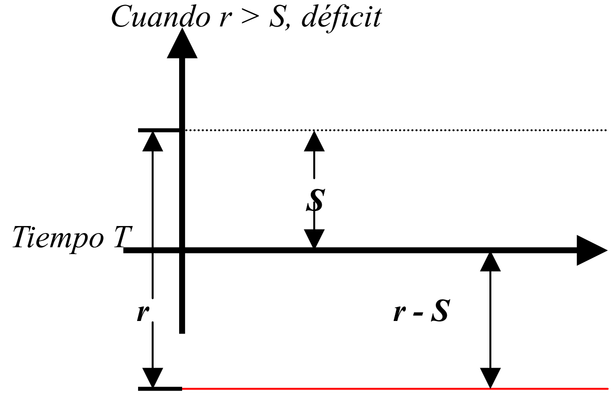


Figura Nº 6

Cuando $r > S$, déficit



De las figuras cinco y seis se deducen el inventario y déficit promedio

$$I_i(S) = \begin{cases} (S - r); \text{ Sí } r < S \\ 0; \text{ Sí } r \geq S \end{cases} \qquad I_d(S) = \begin{cases} 0; \text{ Sí } r < S \\ (r - S); \text{ Sí } r \geq S \end{cases}$$

Definimos a $f(r)$ como la función de densidad de la demanda. Así el costo esperado por período se deduce de la siguiente manera:

E [C (S)] = costo de reordenar + E (costo de mantener) + E (costo por déficit)

$E[C(S)] = C_r(S - q) + C_i\, \mathbf{I}_i(S) + C_d\, \mathbf{I}_d(S)$

$E[C(S)] = Cr(S - q) + Ci\,(\int_0^S (S - r) f(r)dr + C_d \int_S^\infty (r - S) f(r)dr)$

El valor óptimo (S_0) se obtiene igualando la derivada parcial de $E[C(S)]$ con respecto al nivel de inventario (S) e igualando a cero, utilizando el siguiente resultado [12]:

Sea $F(t) = \int_{A(t)}^{B(t)} G(t,x)dx$ entonces

$\frac{d}{dt}F(t) = \int_{A(t)}^{B(t)} \frac{\partial}{\partial t} G(t,x)dx + G[t, B(t)]\frac{d}{dt}B(t) - G[t, A(t)]\frac{d}{dt}A(t)$ Aplicando esto:

$\frac{d}{dS}\, E[C(S)] = C_r + C_i \int_0^S f(r)dr - C_d \int_S^\infty f(r)dr = 0$

Donde: $\int_S^\infty f(r)dr = 1 - \int_0^S f(r)dr$ entonces:

$\frac{d}{dS}\, E[C(S)] = C_r + C_i \int_0^S f(r)dr - C_d[1 - \int_0^S f(r)dr] = 0$

Realizando operaciones, se tiene:

$\int_0^S f(r)dr = \frac{Cd - Cr}{Cd + Ci}$

Donde S_0, el nivel óptimo existe siempre que $C_d \geq C_i$

El valor de S_0, nivel óptimo de inventario se obtiene cuándo la probabilidad de $r \leq S_0$ sea igual a algún número "k" tal que:

$$Pr\ (r < S_0) = \int_0^{S_0} f(r)dr = k = \frac{Cd - Cr}{Cd + Ci}$$

Donde C_d debe ser mayor ó igual que C_r y esta es la respuesta a *¿Cuánto pedir?* Surge la cuestión: *¿Cuándo pedir?*, esto se hace de acuerdo a los tiempos prescritos, es decir cada mes. La política óptima de ordenamiento, dado una cantidad de inventario en mano ***q***, antes de colocar alguna orden será:

- ***Si*** *$S_0 > \boldsymbol{q}$, entonces requerir una cantidad ($S_0 - \boldsymbol{q}$)*
- ***Si*** *$S_0 \leq \boldsymbol{q}$, entonces No pedir.*

Aplicamos éste modelo al almacén "x", donde se depositan las refacciones de una grúa viajera y se obtienen los siguientes resultados.

Cable de Acero:

Se tiene un nivel de inventario en mano de ***q* = 6** piezas que representa las requisiciones habituales por mantenimiento, y una demanda máxima de ***r*** = *4* piezas, ocurrida en Marzo de 1998, ver apéndice "A"

La densidad propuesta es

$$f(r) = \begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} 1/4 \quad \text{sí } 0 \leq r \leq 4 \\ \text{Cero, sí } r > 4 \end{array}} \end{cases}$$

Por lo tanto: $k = \dfrac{Cd - Cr}{Cd + Ci}$ = $= \dfrac{24000 - 225}{24000 + 125} = .9854$

PR. (r ≤ S_0) = $\int_0^{S_0} f(r)dr = \dfrac{1}{4}\int_0^{S_0} dr = \dfrac{S_0}{4}$

El valor de S_0 se selecciona de la siguiente forma:

$PR\ (r \leq S_0) = \dfrac{S_0}{4} = .985492$, entonces: S_0= *(4) (.9854) =3.9419~4 piezas, tomando el entero más próximo.*

La política de ordenamiento se fundamenta en la siguiente regla de decisión:

- Sí $S_0 > q$, entonces debe requerirse una cantidad (S_0 - q), donde S_0**~4**
- Sí $S_0 = 4 \leq q = 6$, $S_0 \leq q$ lo que significa entonces *No pedir*

No se calcula el costo esperado de mantener un nivel óptimo $S_0=4$, porque de hecho, la decisión es No pedir, por lo tanto no hay un costo esperado cuando hay superávit de refacciones

Botonera: Se tiene un inventario en mano de $q = 6$ piezas; y una demanda máxima de *r* **= 3,** ocurrida en los meses de Febrero 1998 y Abril 1999. Apéndice "A"

La densidad propuesta es:

$$f(\,r\,)= \begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} 1/3 \quad Sí\ 0 \leq r \leq 3 \\ \\ Cero,\ Sí\ r > 3 \end{array}} \end{cases}$$

Calculamos el cociente: $k = \dfrac{Cd - Cr}{Cd + Ci} = \dfrac{24000 - 378}{24000 + 210} = .9757$

$$PR.\ (r \leq S_0) = \int_0^S f(r)dr = \frac{1}{3}\int_0^S dr = \frac{S_0}{3}$$

$PR.\ (r \leq S_0) = k$ sí y solo sí $S/3 = .9757$

Por lo tanto $S_0 = 2.9271 \sim 3$, si se aproxima el resultado al entero más cercano, puesto que $S_0 \leq q$ no debe hacerse requerimiento de piezas, y no tenemos costo esperado para este nivel de inventario, ya que existe una mayor cantidad de artículos en el inventario.

Interruptor: Se tiene un inventario en mano de q **= 8** piezas, y una demanda máxima de trece interruptores ocurrida en Diciembre del año 1999 apéndice "A". Donde $S = 10$

La densidad propuesta es:

$$f(\,r\,)= \begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} 1/13 \quad Sí\ 0 \leq r \leq 13 \\ \\ Cero,\ Sí\ r > 13 \end{array}} \end{cases}$$

Por lo tanto: $k = \frac{Cd - Cr}{Cd + Ci} = \frac{6000 - 32}{6000 + 18} = .9916$

Entonces:

$PR.\ (r \leq S_0) = \frac{1}{13}\int_0^S dr = \frac{S_0}{13}$

El valor de S_0 se selecciona de manera que:

$PR.\ (r \leq S_0) = k = \frac{Cd - Cu}{Cd + Cu}$ = $.9916$, entonces $\frac{S_0}{13} = .9916$

Por lo tanto: S_0**=** $(13)(.9916) = 12.8919 \sim 13$ unidades requeridas.

Aplicando la política de ordenamiento, se tiene:

Si $S_0 > q$, entonces requerir una cantidad (S_0 - q) = $13 - 8 = 5$ interruptores por mes, entonces, deben solicitarse aproximadamente cinco interruptores cada treinta días, teniendo un inventario en mano de ***q* = *8.***

El costo asociado se obtiene al evaluar:

$E\ [C\ (S_0)] = Cr\ (S_0 - q) + Ci\ *([\int_0^{S_0}(S_0 - r)f(r)dr + Cd\int_{S_0}^{\infty}(r - S_0)f(r)dr$

Sustituyendo y evaluando se obtiene: $E[C(13)] = (\$32.0)\ (13 - 5) = \$\ 256.00 + 0 + 0$

Observación: En el segundo término de la ecuación, $r \geq S_0$ *por lo tanto según las relaciones que se utilizaron al definir el modelo, el segundo término es cero y como la demanda iguala el nivel de inventario óptimo, entonces el tercer miembro de la ecuación también es cero. Así se obtiene solamente el costo por requerir cinco artículos. Concluyendo, similarmente al modelo Order-level determinístico, este modelo controla los costos igualando el nivel de inventario optimo a la demanda, pero con la diferencia de que la decisión de requerir o no recae en la cantidad de inventario inicial.*

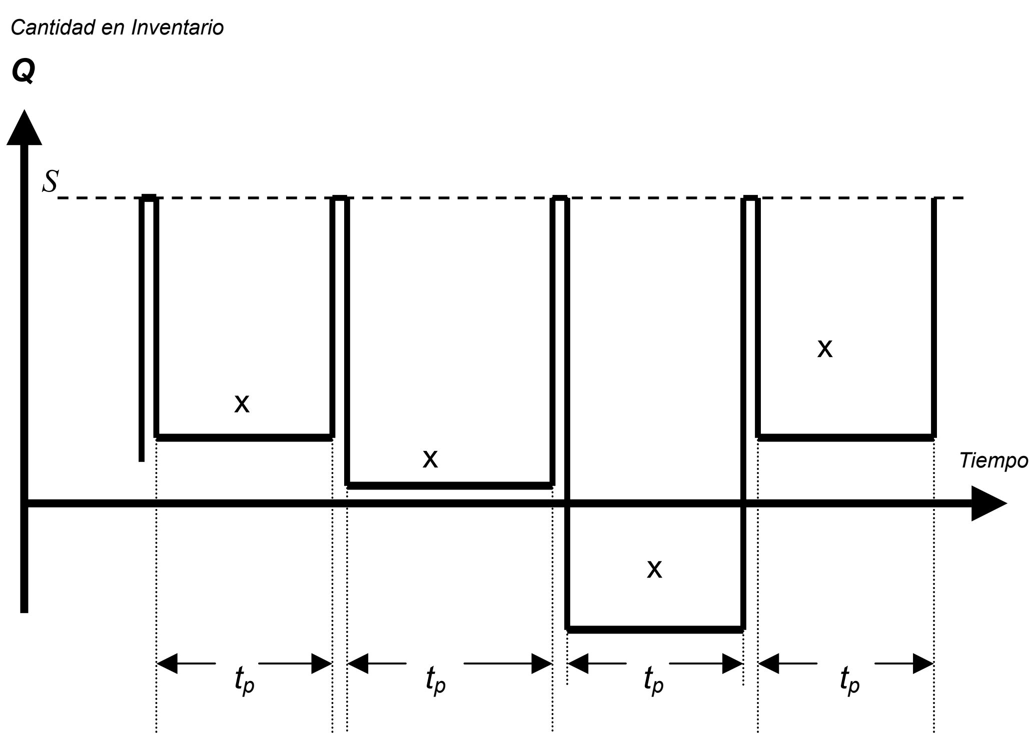
2.3.6. – Modelo Order-level probabilístico con demanda instantánea

Dentro de las condiciones de operación del almacén "x' se tienen demandas de artículos que ocurren de manera repentina e instantánea y debido a que el modelo probabilístico de densidad uniforme no se aplicó a todos los artículos seleccionados, se propone el modelo "Order-level" probabilístico con demanda instantánea para aplicarlo en el almacén "x". En la figura Nº 4 se muestran las fluctuaciones de este caso particular.

Se conserva un tiempo de envío de artículos al almacén que es igual a cero y un periodo de tiempo (t_p) que permanece constante entre dos decisiones consecutivas con respecto al reabastecimiento. El modelo Order-level probabilístico con demanda instantánea corresponde al modelo tipo (C_i, C_d), en el cuál se tiene un período de cedulamiento prescrito (t_p) de un mes y en el cual deberá determinarse el nivel óptimo de inventario S_0.

Sea $f(x)$ la densidad de probabilidad de la demanda "x" durante un período (t_p); se propone que ésta demanda ocurre al inicio de cada período de cedulamiento y se asume que esta demanda no ocurre con un patrón uniforme, sino que las refacciones son retiradas de manera instantánea, éste es un sistema con política de decisión tipo $[S, t_p]$

Figura Nº 4



De las fluctuaciones mostradas en la figura Nº 4 pueden determinarse las cantidades de inventario promedio $I_i(x)$ e $I_d(x)$ cantidad en déficit promedio, para cualquier demanda "x" continua.

Entonces se tienen las siguientes relaciones:

$$I_i(x) = \begin{cases} S\text{-}x\textbf{; Sí } x \leq S \\ \textbf{CERO; Sí } S \geq x \end{cases} \qquad I_d(x) = \begin{cases} \textbf{CERO; Sí } x \leq S \\ x - S\textbf{; Sí } x \geq S \end{cases}$$

Sea *f(x)* la función de densidad de probabilidad en el caso continuo, entonces integrando sobre los límites que se proponen en las relaciones $I_i(x)$ e $I_d(x)$ y multiplicando por la densidad *f(x)* en ambos casos, obtenemos el inventario y el déficit esperados.

$$I_i(x) = \int_0^S (S-x) f(x) dx \qquad 1)$$

$$I_d(x) = \int_S^\infty (x-S) f(x) dx \qquad 2)$$

Tenemos que:

$C(S) = C_i I_i + C_d I_d$

Entonces multiplicando las ecuaciones 1) y 2) por su respectivo costo, se obtiene la ecuación de costo total en función del nivel de inventario "*S*".

$$C(S) = C_i \int_0^S (S-x) f(x) dx + C_d \int_S^\infty (x-S) f(x) dx \qquad 3)$$

Para obtener el óptimo diferenciamos la ecuación 3) utilizando el siguiente resultado [12]:

$$Sea\ F(t) = \int_{A(t)}^{B(t)} G(t,x) dx$$

Entonces:

$$\frac{d}{dt} F(t) = \int_{A(t)}^{B(t)} \frac{\partial}{\partial t} G(t,x) dx + G[t, B(t)] \frac{d}{dt} B(t) - G[t, A(t)] \frac{d}{dt} A(t)$$

Aplicando este resultado a la ecuación 3), obtenemos:

$$\frac{d}{dS}C(S) = C_i\int_0^S \frac{\partial}{\partial S}(S-x)f(x)dx + C_d\int_S^\infty \frac{\partial}{\partial S}(x-S)f(x)dx + (S-x)f(x) - (x-S)f(x)$$

Sabemos que:

$\int_0^S f(x)dx + \int_S^\infty f(x)dx = 1$; puesto que *f(x)* es una función de densidad, entonces:

$$\frac{d}{dS}C(S) = C_i\int_0^S f(x)dx - C_d[1 - \int_0^S f(x)dx]$$

$$\frac{d}{dS}C(S) = (C_i + C_d)[\int_0^S f(x)dx] - C_d = 0 \quad \text{4)}$$

Entonces: $\int_0^S f(x)dx = \frac{C_d}{C_i + C_d}$

De esta forma el nivel óptimo **(** S_0 **)** tiene la forma:

$$\int_0^{S_0} f(x)dx = \frac{C_d}{C_i + C_d}; \quad \text{5)}$$

Puesto que la función *f(x)* representa una densidad de probabilidad, la derivada de la ecuación 5) estaría conformada únicamente por términos positivos, lo cual garantizará que “S_0” es un mínimo *global*. Debe aclararse que en ocasiones no es posible encontrar una relación explícita para (S_0) puesto que existen limitaciones para hallar la función primitiva de algunas funciones que son densidad de probabilidad *f(x)*

2.3.6.1. - Caso Discreto, modelo Order-level probabilístico

En caso de tener una demanda “**x**” y un nivel de inventario “*S*” restringidos a unidades de tipo discreto, 0, u, 2u,... etc. donde “**u**” es un número entero positivo. Entonces utilizamos una distribución de probabilidad *P(x)* que describe la demanda de refacciones “**x**”; de esta forma, las integrales de las ecuaciones 1) y 2) anteriores deberán transformarse en sumas respetando los límites correspondientes, por lo que la ecuación del costo total, en función del nivel de inventario "*S*", será: [6]

$$C\,(S) = C_i \sum_{x=0}^{S}(S-x)P(x) + C_d \sum_{x=S+u}^{\infty}(x-S)P(x) \qquad \text{6)}$$

La ecuación 6) es una igualdad en donde es posible calcular el nivel óptimo de inventario (S_0), siempre y cuándo se cumplan las siguientes condiciones:

$$C(S_0) \leq C(S_0+u) \quad \text{y} \quad C(S_0) \leq C(S_0-u) \qquad \text{7)}$$

Para hallar las condiciones necesarias de nuestro sistema debemos evaluar, primero, la diferencia: *C(S + u)-C(S)* y las operaciones necesarias para obtener el resultado se encuentran en el apéndice B

Se tiene que:

$$C(S+u) = C_i \sum_{x=0}^{S+u}(S+u-x)P(x) + C_d \sum_{x=S+2u}^{\infty}[x-(S+u)]P(x)$$

Efectuando la diferencia *C(S + u)-C(S)* se obtiene:

$$C(S+u)-C(S) = C_i \sum_{x=0}^{S+u}(S+u-x)P(x) + C_d \sum_{x=S+2u}^{\infty}(x-S-u)P(x) - C_i \sum_{x=0}^{S}(S-x)P(x) - C_d \sum_{x=S+u}^{\infty}(x-S)P(x)$$

Se desarrollan las sumas y eliminamos los términos semejantes:

$$= C_i \sum_{x=0}^{S}(S-x)P(x) + C_i(S-S-u)P(S+u) + C_i \sum_{x=0}^{S+u}uP(x) + C_d \sum_{x=S+2u}^{\infty}(x-S)P(x) + \ldots$$

$$\ldots + C_d \sum_{x=S+2u}^{\infty}(-u)P(x) - C_i \sum_{x=0}^{S}(S-x)P(x) - C_d(S+u-S)P(S+u) - C_d \sum_{x=S+2u}^{\infty}(x-S)P(x)$$

$$\ldots - C_i \sum_{x=0}^{S}(S-x)P(x) - C_d(S+u-S)P(S+u) - C_d \sum_{x=S+2u}^{\infty}(x-S)P(x)$$

$$= C_i \sum_{x=0}^{S}uP(x) + C_d(-u) \sum_{x=S+2u}^{\infty}P(x) - C_i(u)P(S+u) + C_i(u)P(S+u)$$

Sabemos que:

$$\sum_{x=0}^{S+2u}P(x) + \sum_{x=S+2u}^{\infty}P(x) = 1$$

Puesto que $P(x)$ es una función de distribución de probabilidad, y aplicando este resultado se tiene:

$$C(S+u)-C(S) = C_i \sum_{x=0}^{S} uP(x) - C_d(u)[1-\sum_{x=0}^{S+u} P(x)] - C_d(u)P(S+u)$$

$$C(S+u)-C(S) = C_i \sum_{x=0}^{S} uP(x) + uC_d \sum_{x=0}^{S} P(x) - uC_d + uC_d \sum_{x=0}^{S} P(x) + P(S+u)$$

Las operaciones faltantes para llegar al resultado 8) serán presentadas en el apéndice B:

$$C(S+u)-C(S) = u[(C_i + C_d) * F(S) - C_d] \qquad \text{8)}$$

Donde: $F(S) = \sum_{x=0}^{S} F(x)$ es la función de distribución acumulativa de la demanda, de manera que la condición necesaria y suficiente para obtener el nivel de inventario óptimo (S_0) será entonces:

$$F(S_0 - u) \leq \left(\frac{C_d}{C_d + C_i}\right) \leq F(S_0) \qquad \text{9)}$$

2.3.6.2. - Consideraciones del modelo “Order-level” probabilístico

Para poder aplicar éste modelo de inventario fue preciso obtener datos que indicaran el número de fallas ó averías en las grúas en un intervalo de tiempo; los datos obtenidos abarcan un período de 24 meses, entre Enero de 1998 y Diciembre de 1999, dichos datos se presentan en el Apéndice “A”, en forma de una tabla de frecuencias. Debido a la naturaleza aleatoria de los eventos *“falla en la grúa tal, por avería de la refacción tal”*, se decidió buscar una distribución de probabilidad de tipo discreto que pudiera describir el comportamiento de la demanda. Es decir, se necesitó una variable aleatoria cuyos valores fueran enteros no negativos. La bibliografía consultada sugirió utilizar un modelo Poisson para describir el número de ocurrencias de un evento aleatorio en el tiempo. Este modelo puede describir adecuadamente las fallas que sufren ciertas máquinas en un intervalo de tiempo arbitrario [13]

La distribución de Poisson provee un modelo realista que permite contar fenómenos aleatorios que ocurren en intervalos de tiempo.

Habremos de verificar mediante una prueba de hipótesis, si los datos siguen un comportamiento que pueda ser descrito por un modelo de probabilidad de tipo Poisson. Para verificar esto último primero será necesario realizar el cálculo del estimador del parámetro ***(lamda)*** de la distribución Poisson y después hacer una prueba de bondad de ajuste a los datos obtenidos. Una vez obtenido el estimador y si la prueba de bondad de ajuste resulta satisfactoria, entonces se podrá aplicar el modelo Order-level probabilístico con demanda instantánea, donde la demanda de refacciones sigue una distribución Poisson.

En general podemos decir que si una variable aleatoria (VA) tiene un comportamiento de tipo Poisson, entonces la VA obedece las siguientes propiedades: [16]

- Independencia: El número de veces que un evento (**x**) ocurre en cualquier intervalo de tiempo ***[0, h]***, es independiente del número de ocurrencias de (**x**) en cualquier otro intervalo de tiempo disjunto
- Carencia de agrupamiento: La probabilidad de que dos o más eventos sucedan simultáneamente puede asumirse como cero.
- Promedio: El número promedio de ocurrencia de los eventos por unidad de tiempo es una constante, denotada por lamda ***(λ)***, y esta no cambia con el tiempo

Nota: Ya que deseamos adaptar un modelo probabilístico a nuestro problema de inventario y bajo las propiedades anteriores, entonces se propone considerar la demanda de cierta refacción en algún intervalo de tiempo cualquiera ***[0, h]*** como una variable aleatoria **X**

Donde ***(h)*** es un número entero positivo que representa alguna cantidad de tiempo arbitrariamente pequeña. Así pues, las propiedades anteriores nos inducen a proponer que la ley de distribución de Poisson (EC.1) puede describir adecuadamente la probabilidad de que la VA (**X**) tome el valor de k= 0, 1, 2,3…fallas

Entonces:

$$P\,[X = \boldsymbol{k}] = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^{K}}{k!}$$ Donde k = 0, 1, 2,3…____________________________1)

La letra griega lambda ***(λ),*** mide la intensidad con la que ocurren las fallas en el transcurso del tiempo, representa el valor esperado del número de fallas que suceden en un intervalo de tiempo de longitud ***[0, h]*** [13]

Puesto que las fallas que ocurren en las grúas son un conjunto de observaciones registradas en 24 meses, entonces, habrá que estimar el parámetro *"λ"* de la distribución Poisson, para ello se recomienda obtener el estimador de máxima verosimilitud, la manera de obtener el estimador se describe en el apéndice "C".

2.3.7. - Prueba de bondad de ajuste

En el apéndice "C" se propone como estimador de máxima verosimilitud del parámetro (λ) de la distribución Poisson sea igual a la media muestral:

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

A continuación realizaremos la prueba ji-cuadrado de Pearson de bondad de ajuste a los datos que se obtuvieron del Organismo sobre las fallas ocurridas en las grúas durante los años 1998 y 1999. *Esta prueba nos permitirá concluir si la demanda de refacciones se comporta como un modelo de probabilidad Poisson.*

Frecuentemente la información muestral recolectada en una investigación, presenta una estructura de datos categorizados. En nuestro caso se obtuvieron conteos de frecuencia para cada categoría o número de fallas ocurridas en las grúas. Cada categoría está definida por alguna característica cualitativa pero dicha información también puede definirse arbitrariamente especificando rangos de valores para una escala de medición numérica.

Desarrollando estas ideas, una distribución de frecuencias agrupa mediciones para diferentes intervalos de clase que pueden ser vistos como datos divididos en categorías o celdas. Cuando se tiene un conjunto de datos que constituye una realización de frecuencias para datos agrupados en categorías, es posible probar bajo hipótesis que tal conjunto se ajusta al tipo de comportamiento que sigue una estructura de probabilidad conocida.

Para comprobar esta hipótesis, utilizamos la prueba de bondad de ajuste de Pearson. Es decir, primero hay que estimar los parámetros desconocidos desde una tabla de frecuencias observadas y entonces usar los valores estimados como si estos fuesen los valores correctos para determinar las probabilidades de las celdas.

Una vez que las probabilidades observadas de las celdas son especificadas, las frecuencias esperadas pueden ser obtenidas multiplicando estas probabilidades por el tamaño de la muestra ***(n)*** Una prueba de bondad de ajuste intenta determinar si existe una discrepancia entre las frecuencias observadas en las celdas y aquellas frecuencias esperadas bajo la hipótesis nula H_0. Las frecuencias esperadas son comparadas con un estadístico de prueba, llamado Ji-cuadrada, χ^2, éste se utiliza para comprobar la discrepancia entre los valores observados y los valores esperados en la distribución de probabilidad.

Para el caso que nos interesa la hipótesis nula que específica completamente las probabilidades de las celdas es del tipo:

$$H_0: p_1 = p_{1,0} = p_{2,0} \ldots = p_{k,0}$$

Donde $p_{1,0}; p_{2,0} \ldots p_{k,0}$, son valores numéricos dados que satisfacen la condición de que: $p_{1,0} + p_{2,0} + \ldots + p_{k,0} = 1$

Una útil medida de discrepancia entre frecuencias está dada por:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{np_{i,0}} (n_i - np_{i,0})^2 = \sum_{celdas} \frac{(O-E)^2}{E} \qquad 2)$$

Donde ***"O"*** y ***"E"***, simbolizan las frecuencias observadas y esperadas respectivamente. La discrepancia entre cada celda se calcula como el cuadrado de la diferencia entre las frecuencias observadas menos las esperadas.

Esta diferencia es dividida por la frecuencia esperada. La medida del estadístico (χ^2) ji-cuadrado es la suma de estas cantidades para todas las celdas.

Debe recordarse que la prueba de bondad de ajuste de Pearson y su estadístico ji-cuadrado representan una prueba aproximada que es válida para tamaños de muestras grandes ***(n)*** Debido a que un gran valor del estadístico ji-cuadrado representa una discordancia entre la distribución de los datos observados y la de los esperados, es que la cola superior de la distribución ji-cuadrada constituye la región de rechazo para la hipótesis nula, de manera que $\chi^2 \geq \chi^2_\alpha$, donde χ^2_α es el punto superior de la distribución χ^2 con tantos grados de libertad (***g.l***):

g.l.= (Nº de celdas)- 1

El tamaño de la muestra ***(n)*** debe ser lo suficientemente grande como para garantizar que la frecuencia esperada de cada celda sea de al menos cinco. *Algunos autores sugieren que la prueba puede relajarse hasta un valor aproximado de uno en la última celda de alguna distribución que solo posea un parámetro.* [14]

Antes de computar el estadístico ji-cuadrado, deberá examinarse la tabla de frecuencias con la intención de ver si alguna de las frecuencias esperadas es muy pequeña, esto se debe a que la eficacia de la prueba de bondad de ajuste aumenta cuando la frecuencia esperada de las celdas es mayor ó igual a cinco.

En previsión de este inconveniente se permite unir celdas de datos adyacentes hasta obtener una frecuencia esperada con un valor de al menos cinco; por esta razón, cuando no se tiene un conocimiento especifico de los parámetros de la distribución teórica, decrece el número de grados de libertad (***g.l***) para el estadístico χ^2, y está dado por: [14]

g.l.= (Nº de celdas)-(Nº de parámetros estimados)-1

Puesto que el estimador del parámetro de la distribución Poisson (**x**, ***l***) es la media muestral ($\bar{x}$) ésta nos indica que hemos de dividir el número de eventos ocurridos o fallas entre el total de la muestra o eventos observados

Utilizaremos este resultado para realizar una prueba de bondad de ajuste a cada una de nuestras refacciones, y deberá probarse que la demanda de ellos se ajusta a una distribución Poisson.

Gancho: Vamos a comparar los valores esperados de la distribución Poisson contra la distribución empírica de los valores observados en los datos.

Considerando que se tienen $n= 24$ observaciones (meses), sobre la base de los datos recolectados se tiene:

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{\sum(valorobservado * frecuencia)}{n = muestra} = \frac{\# fallas * frecuencia}{observaciones} =$$

$$= (1/24)\ [(0*14)+ (1*7)+ (2*1)+ (3*1)+ (4*0)+ (5*0)+ (6*0)+ (7*1)]$$

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = 19/24 = .7916$$

Utilizaremos el valor estimado del parámetro lambda para calcular la probabilidad de una variable aleatoria que se distribuye con una ley de probabilidad Poisson ***(x; l=.7916),*** procedemos a calcular los valores esperados utilizando la distribución:

$$P\,[X = \mathbf{k}] = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^{K}}{k!}$$

Los resultados obtenidos son los siguientes:

k = Nº de fallas	***Cero***	***Una***	***Dos o más***	***Total***
O = Frecuencia Observada	*14*	*7*	*3*	*24*
Probabilidad Poisson(l=.7916)	*.45309*	*.35869*	*.18818*	*1*
E = Frecuencia Esperada (Poisson * n)	*10.8742*	*8.6085*	*4.5163*	*24*
$\chi^2 = (O-E)^2/E$	*.89864*	*.30060*	*.50908*	$\chi^2 = 1.70832$

El estadístico χ^2 será la suma en todas las celdas del valor ***(O-E)²/E***, luego entonces procedemos a calcular él numero de grados de libertad que tiene la distribución χ^2

El estadístico ji-cuadrado tiene el valor: χ^2 **=*1.70832*** y calculamos los grados de libertad:

g.l.= (Nº de celdas)-(Nº de parámetros estimados)-1=3-1-1=1.

Ahora utilizamos como hipótesis nula:

$$H_0: p_0 = .45309; \; p_1 = .35869; \; p_2 = .18818$$

Donde:

$$p_0 = .45309 + p_1 = .35869 + p_2 = .18818 = 1$$

Para verificar si los datos provienen de una distribución Poi(**x**, λ=.7916) utilizamos como contraste a la distribución ji-cuadrado, con un nivel de significancia $\alpha = .05$, y la región de rechazo de H_o será la cola superior de la distribución χ^2. Rechazamos la hipótesis nula H_o sí, $\chi^2 \geq \chi^2_\alpha$, donde χ^2_α es el punto α superior de la distribución χ^2 con un grado de libertad.

Si buscamos los valores en tablas para esta distribución se tiene que:

$$\chi^2_{\alpha=.05,1} = 3.84146 > \chi^2 = \mathbf{1.70832}$$

*Por lo tanto No se rechaza la hipótesis nula con un nivel de confianza de **(1-α)**=95%; los datos parecen provenir de una distribución Poi(**x; l=.7916**)*

Análogamente realizamos la misma prueba de bondad de ajuste para las demás refacciones

Balatas: El estimador del parámetro lamda es $\hat{\lambda} = \bar{x}$ = **(16/24) =.6667** y se obtiene lo siguiente:

K = Nº Fallas	**Cero**	**Una**	**Dos ó Más**	**Total**
O = Observadas	*13.000*	*6.000*	*5.00*	*24*
Prob. Poisson	*.51340*	*.34228*	*.14367*	*.99936*
E = Frec. Esperada	*12.3216*	*8.21470*	*3.4482*	*23.99*
$\chi^2 = (O-E)^2/E$	*.037351*	*.597097*	*.698306*	$\chi^2 = \mathbf{1.32275}$

g.l.= (Nº de celdas)-(Nº de parámetros estimados)-1=3-1-1=1

Buscamos los valores en tablas de la distribución χ^2 con un grado de libertad y un nivel de confianza del 95%: $\chi^2_{\alpha=.o5,1}$ =3.84146 > χ^2 **=*1.332754***

De esta manera, no se rechaza la hipótesis nula con un nivel de confianza de (**1-α**)=95%; los datos parecen provenir de una distribución Poi(***x, l=.66667***)

Cable de Acero: El estimador del parámetro lamda es, $\hat{\lambda}$ **=** $\bar{x}$ = **(27/24) =1.125**

K = Nº Fallas	**Cero**	**Una**	**Dos o tres**	**Cuatro ó más**	**Total**
O = Observadas	*9*	*9*	*4*	*2*	*24*
Prob. Poisson	*.324652*	*.365234*	*.282485*	*.027629*	*1*
E=Frec.Esperada	*7.791648*	*8.765616*	*6.779640*	*.663096*	*24*
χ^2= *(O-E)²/ E*	*.1873948*	*.00626719*	*1.139647*	*2.695400*	χ^2 =***4.0287***

Entonces se tiene un número de grados de libertad de:

g.l.= (Nº de celdas)-(Nº de parámetros estimados)-1=4-1-1=2

Buscamos los valores en tablas de la distribución χ^2 con dos grados de libertad y un nivel de confianza del 95%

$\chi^2_{\alpha=.o5,1}$ =5.99147 > χ^2 **=*4.028709***

De esta manera, no se rechaza la hipótesis nula con un nivel de confianza de **(1-α)**=95%; los datos parecen provenir de una distribución Poi(***x***; ***l= 1.125***)

Botonera: El estimador del parámetro lamda es, $\hat{\lambda}$ **=** $\bar{x}$ = **(23/24) =.95833**

K =Nº de fallas	**Cero**	**Una**	**Dos**	**Tres ó más**	**Total**
O =Observadas	*9*	*9*	*4*	*2*	*24*
Prob. Poisson	*.38353*	*.367551*	*.176118*	*.0723217*	*1*
E=Frec.Esperada	*9.20478*	*8.821224*	*Adjuntando*	*Celdas=5.963*	*24*
χ^2= *(O-E)²/ E*	*.00456*	*.00362*	*Adjuntando*	*Celdas=.000235*	χ^2 =***.00842***

Calculamos los grados de libertad:

g.l.= (Nº de celdas)-(Nº de parámetros estimados)-1=3-1-1=1

Buscando el valor en tablas correspondiente:

$\chi^2_{\alpha=.o5,1}$ =3.84146 > χ^2 ***=.008412*** *Por lo tanto, no se rechaza la hipótesis nula con un nivel de confianza de* ***(1-α)****=95%; los datos parecen provenir de una distribución Poi(****x****;* ***l****= .95833)*

Interruptor: El estimador del parámetro lamda es, $\hat{\lambda}$ **=** $\bar{x}$ = **(108/24) = 4.5** La prueba arroja los siguientes resultados:

K= Nº de fallas	**Cero a Tres**	**Cuatro ó Cinco**	**Seis ó Más**	**Total**
O = observadas	*10*	*5*	*9*	*24*
Prob. Poisson	*.342295*	*.3606345*	*.29681789*	*1.00*
E=Frec.Esperada	*8.2150990*	*8.65523*	*7.123629*	*24*
$\chi^2 = (O - E)^2 / E$	*.38781*	*1.54365*	*.49424*	χ^2 ***=2.4257***

El número de grados de libertad es:

g.l.= (Nº de celdas)-(Nº de parámetros estimados)-1=3-1-1=1

Buscando en tablas el valor correspondiente:

$\chi^2_{\alpha=.o5,1}$ =3.84146 > χ^2 ***=2.4257***

Por lo tanto, no se rechaza la hipótesis nula con un nivel de confianza de

(1-α)=95%; los datos parecen provenir de una distribución Poi(***x; l= 4.5***)

De esta manera, una vez que hemos realizado una prueba bondad de ajuste a cada una de las refacciones que nos interesan; podemos concluir que estas siguen una demanda que tiene un comportamiento que sigue una distribución Poisson.

2.3.8. - Modelo Order-level probabilístico aplicado al almacén "x"

Puesto que hemos comprobado, mediante la prueba Pearson de bondad de ajuste, que la demanda de nuestras refacciones tienen un comportamiento de tipo Poisson, ahora procedemos a aplicar el modelo Order-level probabilístico, con demanda instantánea a nuestro problema en el almacén "x"

En la sección 2.3.6.1 vimos que una condición necesaria y suficiente para obtener el nivel de inventario óptimo (S_0) es:

$$\frac{C_d}{(C_d + C_i)} \leq F(S_0)$$

Donde $F\,(S_0)$ representa la función cumulativa de distribución de la demanda.

Utilizaremos lo valores de la distribución Poisson acumulativa basándose en el valor estimado empíricamente del parámetro lamda (sección anterior), vamos a utilizar la distribución ya conocida:

$f\,(x;\ \lambda) = P[\,\mathbf{X} = \mathbf{k}] = \dfrac{e^{-\lambda} * \lambda^{K}}{k!}$; para ***k = 0,1,2,....,***

Donde por conveniencia denotamos a $f(x; \lambda)$ como $P(x)$, y a la función de distribución acumulativa como $F(S)$ Presentamos los cálculos en una tabla, incluyendo el resultado, esto nos permitirá observar la forma de obtener el nivel óptimo de inventario, **(**S_0**)**

Para realizar nuestros cálculos vamos a requerir de un nivel inicial en el almacén, a quien denotamos por (S) Se tienen demandas de tipo discreto, *u=1, 2,3,…,* deberá calcularse el costo que implica mantener él nivel optimo, en relación a los costos por déficit (C_d) y por acarreo de inventario (C_i), para cada una de las refacciones ya reportadas.

Gancho, se tienen los siguientes costos: C_i **=** ***$70.00 y*** C_d **=** ***$24,000.00***

Entonces: $\dfrac{C_d}{(C_d + C_i)} = .99709$

En la tabla se tiene:

Probabilidad Poisson (x; λ=.7916)	*Probabilidad Acumulada; F(S_0)*
P (0) =. 45309	*F (0) = .45309*
P (1) = .35869	*F (1) =. 81178*
P (2)= .14198	*F (2) =. 95376*
P (3) = .03746	*F (3) = .99122*
P (4) = .00741	*F (4) = .99863*
P (5) = .00117	*F (5) = .99980*
P (6) = .00015	*F (6) = .99995*
P (7) = .00001	*F (7) = .99996~1*

De acuerdo al criterio adoptado, la desigualdad:

$\frac{C_d}{(C_d + C_i)} \leq F(S_0)$ se cumple solamente cuándo $S_0 = 4$, en cuyo caso:

$.99709 \leq F\ (S_0 = 4) = .99863.$

Por lo tanto el nivel óptimo de almacén es de 4 de ganchos, con reabastecimiento mensual. De esta manera y de acuerdo a la ecuación 3) de la sección 2.3.3; el costo por mantener el inventario y por déficit es de:

$$C\ (4) = C_i \sum_{x=0}^{4} (S - x)P(x) + C_d \sum_{x=4+1}^{\infty} (x - S)P(x)$$

Realizando las operaciones necesarias se tiene un costo de:

C (4) = $224.70 + $360.00 = $584.70

Donde se observa un control en el costo por déficit, aunque este costo no puede eliminarse por completo debido a que el modelo sí considera incurrir en déficit de refacciones. No obstante el modelo Order-level probabilístico con demanda instantánea minimiza la probabilidad de que suceda el evento déficit y mantiene períodos constantes de *cedulamiento* ó requisición de materiales, (t_p), de un mes.

La siguiente tabla es un resumen de los resultados obtenidos análogamente al gancho, aplicando el modelo Order-level probabilístico con demanda instantánea a las refacciones del almacén "x"

ARTICULO	C_i	C_d	u	*l*	$\frac{C_d}{C_d + C_i}$	F(x, *l*)	S*	C(S*)
Gancho	*$ 70.00*	*$ 24000.00*	*1*	*.7916*	*.99709*	*.99863*	*4*	*$584.70*
Balatas	*$ 23.00*	*$12000.00*	*2*	*.6667*	*.99809*	*.99940*	*4*	*$ 78.40*
Cable-acero	*$125.00*	*$24000.00*	*1*	*1.125*	*.99482*	*.99891*	*5*	*$513.56*
Botonera	*$210.00*	*$24000.00*	*1*	*.9583*	*.99133*	*.99694*	*4*	*$687.22*
Interruptor	*$ 18.00*	*$6000.00*	*1*	*4.5*	*.99701*	*.99759*	*11*	*$176.08*

Los resultados de la tabla muestran un adecuado control de los costos por déficit de refacciones en general, esto se obtiene minimizando la probabilidad de que ocurra algún déficit, por lo tanto, los costos asociados al sistema solamente son los relativos al costo por acarreo de inventario (C_i *) Los periodos de cedulamiento son prescritos o constantes de un mes, 30 días.*

Como se ha visto en el presente capítulo, se hizo un análisis del almacén "x" mediante la aplicación de modelos de inventarios tanto determinísticos como probabilísticos. La aplicación de modelos determinísticos tiene la desventaja de volverse inoperante a condiciones cambiantes en la demanda de artículos. Los modelos probabilísticos muestran un comportamiento similar al comportamiento de la demanda de refacciones en el almacén "x". En particular el modelo Order-level con densidad Poisson resulta ser el más adecuado, puesto que la demanda de artículos se ajusta apropiadamente a una distribución de probabilidad conocida. La desventaja de éste modelo sería la dificultad de ajustar una función de probabilidad a cada artículo del almacén, lo cuál significa realizar estudios y cálculos exhaustivos. Cómo alternativa a los métodos tradicionales de inventarios, en el siguiente capítulo se presenta la metodología de algoritmos genéticos, la cuál pudiera ser una mejor solución que las encontradas hasta ahora. En el cuarto capítulo se realizará una comparación entre los métodos bajo estudio y se hará una recomendación a la administración del Organismo.

Capítulo 3

Algoritmos Genéticos

Introducción

La computación evolutiva es un paradigma nuevo y de rápido crecimiento en la rama de la inteligencia artificial. Está fundamentada en los principios de la evolución natural de las especies, es decir en la supervivencia del más apto. [18]

Imitando procesos naturales, la computación evolutiva pretende dar solución a problemas que resultan difíciles de resolver por métodos tradicionales de optimización como son: los algoritmos de búsqueda exhaustiva, la optimización basada en la minimización lineal, etc. Los métodos mencionados tienen el mismo principio para comenzar la búsqueda de una solución, ellos parten de un punto inicial y después necesitan realizar un gran número de evaluaciones de la función objetivo para encontrar un óptimo, difieren entre sí en cuanto a la decisión sobre en que dirección moverse y que tan lejos moverse dentro de un espacio solución. Innovaciones sucesivas a lo largo del tiempo han aumentado la velocidad en el desempeño de estos algoritmos pero no han contribuido a mejorar su capacidad para distinguir entre un mínimo global y uno local. [19]

Han surgido diferentes ramas de investigación dentro de la computación evolutiva y cada una pretende explotar aspectos diferentes de este mimetismo con los procesos naturales:

- *Algoritmos genéticos.*-Estos manipulan cadenas binarias de longitud fija y son algoritmos de propósito general.
- *Programación genética*.- Se trabaja sobre lenguajes de programación que puedan ser expresados mediante estructuras de “árboles de análisis”; su objetivo principal es la producción automática de programas de cómputo.
- *Estrategias Evolutivas*.- En estas se consideran estructuras de datos variadas, cómo cadenas de longitud variable, máquinas de estados ó variables de tipo real.

Los algoritmos genéticos fueron desarrollados por John Holland (1975), en el transcurso de los años 60’s y los 70’s, pero fueron divulgados por un discípulo de Holland, David Goldberg, quién fue capaz de resolver un problema de transmisión de gas a lo largo de una tubería con el uso de estos para su tesis doctoral en 1989.

Los algoritmos genéticos forman parte de los algoritmos evolutivos que modelan procesos biológicos para optimizar funciones de costo altamente complejas. Un algoritmo genético permite que una población compuesta por muchos individuos evolucione mediante reglas de selección específicas que establecen quienes son los individuos más capaces al momento de evaluar su desempeño. [18]

Las ventajas principales de los algoritmos genéticos sobre otros métodos de búsqueda exhaustiva son:

- Permiten la optimización con parámetros discretos y continuos
- Los algoritmos genéticos no requieren información de la derivada
- Tratan con un gran número de parámetros
- Son muy adaptables a la computación en paralelo
- Optimizan parámetros con superficies de costo extremadamente complicadas, pueden saltar de un mínimo local a uno global
- Proveen una lista de parámetros óptimos en lugar de solamente una solución simple
- Pueden codificar las variables de manera que la optimización sea realizada con los parámetros codificados
- Permiten trabajar con datos generados numéricamente, datos experimentales ó funciones analíticas

Para poder entender la terminología utilizada en el desarrollo de los algoritmos genéticos será necesario realizar una breve introducción al campo de la biología y la teoría de la evolución.

3.1. - Fundamentación Biológica: Selección Natural

El estudio de la evolución tiene gran importancia desde el punto de vista biológico puesto que todas las especies actuales se derivan de relaciones e interacciones ocurridas en el pasado.

En la naturaleza el objetivo primario de todo organismo es su propia supervivencia y la preservación de su material genético. Todos los organismos están constituidos de células y la diferencia entre ellas genera la diversidad de organismos ahora existentes. Dentro de cada célula existe la mínima unidad de información genética llamada *gene*, los genes de un organismo son acarreados en uno de un par de *cromosomas* y estos se constituyen en cadenas para formar el ácido desoxirribonucleico ó DNA, el cual es el portador de la secuencia con la cual los genes forman a un ser vivo.

En un ambiente natural el material genético es preservado mediante la reproducción; la evolución vista desde un punto de vista Darwiniano requiere de un mecanismo que actúe sobre los individuos el cuál es conocido como "selección natural". Este mecanismo consiste en la proliferación de los individuos más aptos para la supervivencia ó los que poseen características que les permiten obtener ventajas sobre sus competidores. En consecuencia aumentan sus probabilidades de sobrevivir y de transmitir el material genético a sus descendientes. Darwin refinó estas ideas en general durante su viaje como naturalista en el barco "Beagle" y en forma particular mientras visitaba las Islas Galápagos. [17]

La teoría de la evolución de las especies de Darwin se fundamentó en cuatro premisas:

1. En un proceso de reproducción, las características de los progenitores se conservan, esto quiere decir que las poblaciones son estables.
2. Hay variaciones en las características de los individuos, las cuales pueden ser heredadas de una generación a la otra.
3. La tercera premisa establece que únicamente un pequeño porcentaje de los individuos que son resultado de la reproducción sobrevive hasta la edad adulta.
4. La aptitud de supervivencia depende de las característica heredadas

Estas premisas se combinan para producir la teoría de la selección natural; en la teoría evolutiva moderna, el conocimiento de la genética trae consigo un mayor entendimiento de las etapas de la selección natural.

Un grupo de individuos que interactúa entre sí es llamado “población”; bajo condiciones “estáticas” las características de la población están definidas por la ley de “Hardy-Weinberg”, la cuál establece que la frecuencia en la ocurrencia de las características de un individuo permanecerá sin cambios dentro de una misma población siempre y cuando no haya variaciones en el medio, de ahí que se utilice el término estático; lo anterior significa que aunque los individuos muestren una gran variedad, las estadísticas de la población permanecen sin cambio. De cualquier forma, se sabe que muy pocas poblaciones permanecen estáticas por períodos prolongados. Cuándo las poblaciones dejan de ser estáticas, la proporción de frecuencia en las características individuales deja de permanecer constante entre las diferentes generaciones de individuos y por lo tanto la evolución ocurre dentro de un proceso que cambia con el transcurso del tiempo. [17]

Este proceso dinámico requiere de fuerzas que actúen desde el exterior, las fuerzas exteriores pueden ser agrupadas en tres tipos específicos:

- Selección natural: ésta opera al elegir a los organismos más aptos permitiéndoles reproducir sus características. En este proceso ciertas peculiaridades pueden producir un individuo que está más preparado para tratar con su ambiente, de esta manera ciertas características son “seleccionadas” dentro de las posibilidades existentes para mejorar la aptitud del individuo.
- Flujo Genético o Recombinación: éste puede resultar de la introducción de nuevos organismos en la población
- Mutación: esto significa un cambio aleatorio en las características de un gene, el cual representa la mínima unidad de información hereditaria, este cambio puede pasar a la siguiente generación mediante algún proceso de reproducción. Las mutaciones pueden ser espontáneas ó pueden deberse a factores externos, tales como la exposición al medio ambiente.

El principal interés de la teoría evolutiva moderna ha sido ver como los genes se combinan y se cruzan para producir nuevos individuos con diversas mezclas de características.

También ha sido observar como la dinámica de una gran población interactúa para seleccionar ciertas propiedades de aptitud. Esta dinámica puede definir el puesto que ocupa una especie dentro de un mapa de supervivencia, de manera que el individuo puede estar en un valle ó en un pico; si se va demasiado profundo dentro del valle el individuo podría no sobrevivir puesto que solo los de mayor adaptación lo hacen, por conveniencia ubicamos a estos organismos más aptos en los picos del mapa.

Después de un período de tiempo relativamente grande, la muestra de organismos se encuentra bien adaptada a su medio ambiente pero de cualquier forma, el medio ambiente es dinámico.

Los predadores y las presas así como los diferentes factores como son el clima y aún las catástrofes naturales también están cambiando con respecto al tiempo, estos cambios actúan para evaluar la ecuación de optimización o desempeño del individuo y es el resultado de esta evaluación lo que determina la supervivencia ó fracaso de una especie; en nuestro caso buscamos obtener individuos no solamente capaces de sobrevivir, sino que éstos sean los mejores.

3.2. - Algoritmos Genéticos: Descripción

La sección previa fue una introducción al lenguaje utilizado en la implementación de los algoritmos genéticos, en la presente sección mostramos la analogía existente entre evolución y algoritmos genéticos y de esta forma se mostraran los operadores que son propios de un algoritmo genético.

Cuando se tienen problemas con espacios de solución de gran tamaño, donde no es posible realizar un análisis exhaustivo de las posibles soluciones, entonces es necesario obtener formas alternativas de búsqueda para obtener tal solución. Aunque esta no sea necesariamente la mejor.

A este tipo de métodos de búsqueda se les denomina heurísticos y dentro de esta categoría podemos encontrar a los algoritmos genéticos, (AG´s). Basados en la teoría de la selección natural, los AG’s son un método de búsqueda (heurística), donde a partir de un conjunto de soluciones, se van eliminando las que son más pobres para ser sustituidas por nuevas, mientras que las mejores soluciones permanecen y se combinan entre si para mejorarse y obtener una solución final.

Los algoritmos genéticos se encuentran clasificados en dos grandes ramas, los algoritmos genéticos de código binario y los de parámetros continuos. Ambos algoritmos siguen un mismo modelo de recombinación genética y selección natural, la diferencia entre ellos consiste en que el primero representa los parámetros del problema mediante la codificación en cadenas binarias y el segundo trabaja con parámetros continuos para minimizar la función objetivo. En sus orígenes los algoritmos genéticos se constituyeron mediante codificación binaria. Los algoritmos genéticos como procedimiento de búsqueda heurística se fundamentan en los principios de selección natural y la teoría de la evolución, procuran combinar las características de lo individuos más aptos con el azar en el intercambio de información genética. [22]

En cada generación se tiene un conjunto de pobladores que transmiten el material genético de la generación anterior, en un problema el material genético representa la información que proporcionan los parámetros. Ocasionalmente se producen mutaciones en estos genes –parámetros- como una medida adicional para obtener diversidad y como una forma de explorar todo el espacio solución existente. La principal robustez de los algoritmos genéticos consiste en combinar con eficacia la aptitud de supervivencia de los individuos bajo condiciones que cambian con el tiempo.

Así pues a grandes rasgos, un algoritmo genético realiza las siguientes operaciones: genera una población inicial de soluciones, calcula el rendimiento de la población, selecciona las mejores soluciones y las utiliza como progenitores, reproduce soluciones utilizando información de los progenitores y repite estos procesos hasta que se cumpla alguna condición de paro previamente establecida.

En general un algoritmo genético tiene la siguiente estructura:

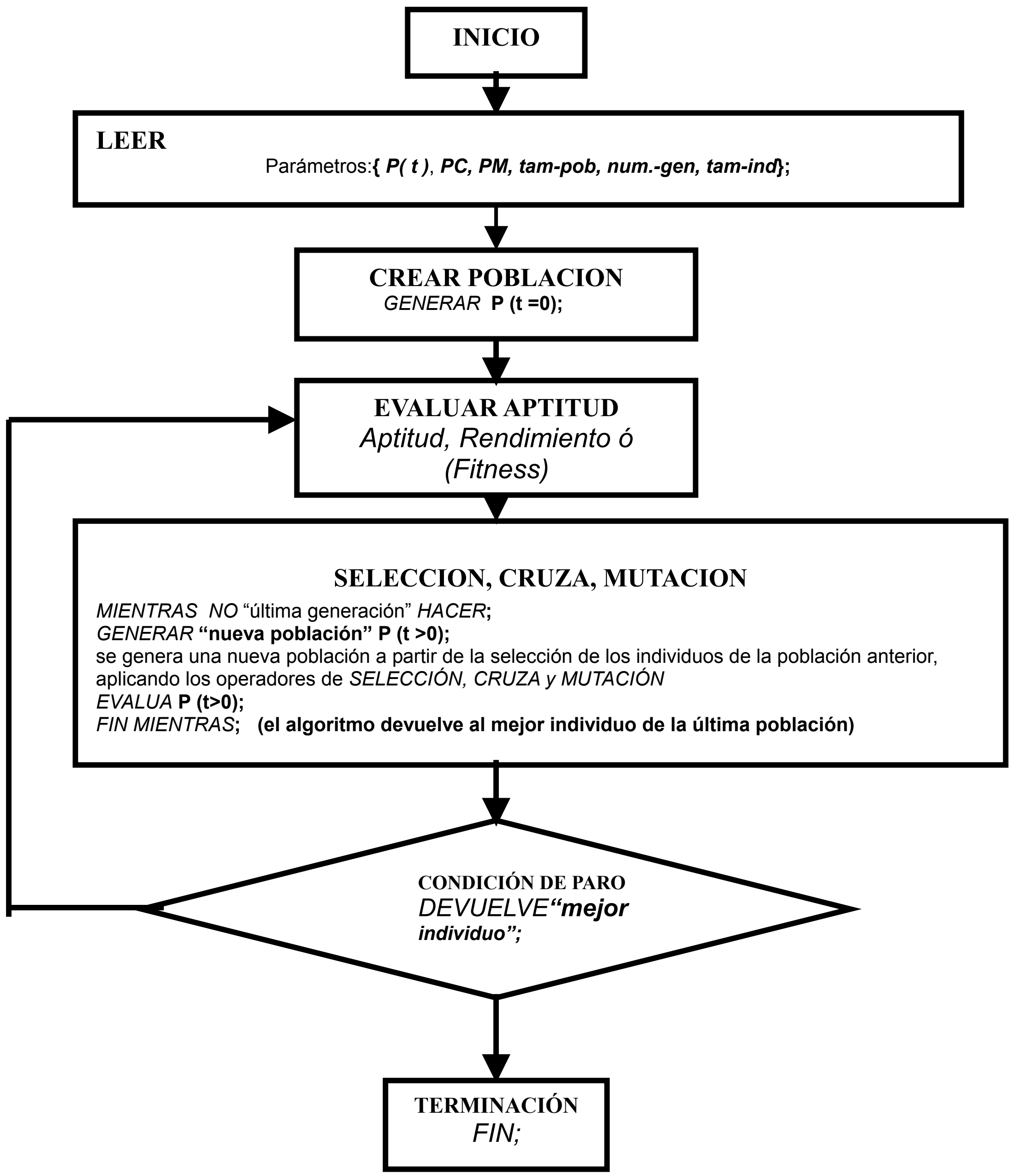
- ***Generación de la población inicial:*** Esto se hace generalmente en forma aleatoria para garantizar que se tenga un espacio de búsqueda uniforme, también es válido incorporar datos y conocimientos previos para acotar el espacio solución.

- ***Evaluación de la aptitud:*** Se aplica la función costo –función objetivo- a los pobladores para observar su capacidad y decidir cuales son los individuos más aptos.
- ***Selección:*** Se eligen los pobladores más aptos y estos serán los candidatos con mayor probabilidad de heredar su información a las siguientes generaciones.
- ***Cruza:*** Se eligen los pobladores más aptos (progenitores) y mediante algún procedimiento pre-establecido se generan nuevos pobladores (descendientes ó prole) haciendo un intercambio de información entre los progenitores.
- ***Mutación:*** Se inducen ligeros cambios en la información que portan los individuos para generar diversidad de cromosomas y explorar la totalidad del espacio solución. Un cromosoma es una cadena de parámetros codificados
- ***Verificación de la condición de paro:*** La condición de paro del algoritmo genético puede ser: realizar un número máximo de iteraciones ó verificar que la dispersión de las capacidades de aptitud alcance un cierto valor, generar cierto número de poblaciones, etc.

En caso de cumplirse la condición de paro el proceso termina y de no ser así, se reemplaza la última población con una nueva y se repite cada uno de los procesos ó de las componentes del algoritmo genético.

Cada uno de los pasos del un algoritmo genético será descrito en las secciones subsecuentes. Antes de analizar la forma de resolver el problema de inventario en el almacén “x” será conveniente conocer el esquema general de los algoritmos genéticos. Un algoritmo genético puede representarse en seudo código general de la siguiente forma:

:



Cuando se resuelve un problema mediante algoritmos genéticos, se busca la mejor solución entre un conjunto de posibles soluciones. Al conjunto de todas las posibles soluciones se le llama espacio de búsqueda, cada punto del espacio representa una posible solución y a cada posible solución se le puede asignar un ***fitness ó valor de desempeño****, éste nos indicará que tan buena es ésa solución al problema.*

Un algoritmo genético opera sobre un número potencial de soluciones llamadas *población,* ésta consiste de un conjunto de parámetros ó datos codificados simultáneamente. Una vez decidida la representación de los parámetros en algún código, el primer paso es crear una población inicial; ésta podría generarse, por ejemplo, mediante un generador de números aleatorios que permita la distribución uniforme de números dentro del rango deseado por el experimentador. [18]

En el diagrama de flujo anterior se utilizaron las siguientes variables y parámetros:

P (t = 0).- *Población Inicial*, se genera una población inicial, al tiempo cero; el algoritmo genético inicia con una población de individuos que serán utilizados para generar un espacio de búsqueda.

(PC).- *Probabilidad de Cruza*, este es el operador básico para producir nuevas poblaciones, indica la frecuencia con la que se cruzan los individuos; si ésta es cero, entonces el total de la prole será idéntica a los progenitores y sus características solo podrán alterarse mediante la mutación. Si por el contrario se tiene que **(PC = 1.0)** entonces todos los individuos de la nueva población serán creados mediante la cruza de los progenitores de la generación previa. Para mantener un espacio con las características del espacio de búsqueda inicial es recomendable que algunos individuos pasen sin modificaciones a la siguiente generación.

(PM).- *Probabilidad de Mutación,* establece la probabilidad con la cual los individuos serán mutados. Si ésta es cero, entonces los individuos generados después de aplicarse el operador de cruza no sufrirán cambio alguno en sus características; por el contrario, si la probabilidad de cruza es del 100%, entonces, todos los pobladores sufrirán cambios en su estructura, la mutación trata de impedir que el AG se atasque en mínimos locales, por esta razón conviene que ocurra de vez en cuando, la mutación es un operador que sirve para explorar todo el espacio de búsqueda.

(tam-pob).- Establece cuantos individuos habrá en cada una de las generaciones.

Si el tamaño de la población es muy pequeño, el AG tiene pocas posibilidades de mejorar la población mediante los operadores de cruza y la prole heredará las características de sus progenitores. Esto retarda la evolución, tampoco es recomendable tener poblaciones demasiado grandes, porque se llega a un punto en el cuál los resultados dejan de mejorar, es decir, las características de la población difícilmente mejoran.

(num-gen).- Conforme el número de generaciones va aumentando, la población del genético evoluciona obteniéndose mejores individuos y por lo tanto, el AG se aproxima a los puntos extremos de la función objetivo, mínimo ó máximo global.

(tam-ind).- El tamaño de los individuos depende del número de elementos que constituyen la solución; el tamaño del individuo varía con el problema.

3.3. - Operadores Genéticos

Hemos dicho que los algoritmos genéticos (AG's) constituyen un método de búsqueda estocástica global que imita la metamorfosis que sufren los individuos durante la evolución natural.

Los AG's operan sobre una población inicial de posibles soluciones aplicando el principio evolutivo de supervivencia del más apto. Así se obtienen individuos (soluciones) cada vez mejores, es decir más aproximados a una solución global, ahora presentamos los operadores de un algoritmo genético.

En cada nueva generación, un conjunto actualizado de soluciones es creado mediante la selección de individuos de acuerdo a su nivel de desempeño como soluciones dentro del dominio del problema. Mediante los operadores normalmente utilizados por la evolución natural se permite la evolución de las poblaciones mejor adaptadas a su medio ambiente de lo que lo estuvieron sus progenitores.

Población

Los individuos de nuestra población serán las soluciones aproximadas codificadas en cadenas llamadas cromosomas -*un cromosoma es una cadena de genes ó parámetros*- éstos pueden codificarse mediante varios tipos de alfabetos.

Así los genotipos *(cromosomas valuados por la función objetivo)* están mapeados dentro del dominio de las variables de decisión *(fenotipo)*

El alfabeto utilizado más comúnmente dentro de los AG's es el binario, ***{0,1}*** aunque existen otros medios de codificación; un ejemplo de codificación binaria sería un problema donde se tienen dos variables ***X1*** y ***X2***, la representación binaria de estas variables puede mapearse en la estructura de un cromosoma del siguiente modo:

X1 = 1011010011 y ***X2 = 010111010100101***

En éste caso ***X1*** es un cromosoma que está codificado con "10 bits" mientras que ***X2*** está codificado con quince bits. Examinando las cadenas de cromosomas aisladamente puede verse que no necesariamente contienen información referente al problema que se está solucionando. En realidad únicamente con la decodificación del cromosoma en sus valores fenotípicos *-ó dicho de otro modo, en los valores que pertenecen al dominio de las variables de decisión-* es que puede obtenerse algún significado de la representación binaria. Lo anterior se debe a que el proceso de búsqueda solamente opera sobre la codificación de las variables en lugar de hacerlo sobre las variables en sí mismas, excepto cuándo los cromosomas de variable real son utilizados.

Selección

Durante la fase de reproducción, a cada individuo se le asigna un valor que califica su aptitud mediante su evaluación en una función objetivo y éste valor es utilizado en la selección. Así, aquellos individuos que estén mejor calificados tendrán una mayor oportunidad de ser elegidos, mientras que los individuos con menor desempeño de aptitudes tendrán una baja probabilidad de ser seleccionados.

En general, una vez que la representación cromosómica ha sido decodificada dentro del dominio de la variable de decisión, entonces es posible asignar un valor de desempeño ó *fitness* a los miembros individuales de la población.

Esto se hace mediante una *función objetivo* que caracteriza el desempeño de un individuo en el dominio del problema, en el mundo natural éste *fitness* sería la habilidad de un individuo para sobrevivir en su medio ambiente. En el caso de nuestro problema, la aplicación del AG otorga el mejor *fitness* a los individuos que ofrecen el costo mínimo de la función objetivo. De ésta manera la función objetivo establece las bases para la selección por dúos de individuos que serán apareados durante la reproducción, en nuestro caso se utiliza el método de selección por la regla de la ruleta. El método de selección por ruleta consiste en ordenar a los individuos de manera descendente de acuerdo al fitness asociado por la función objetivo, después, se construye una gráfica de tipo "*pastel*", donde cada una de las rebanadas representa el valor obtenido por el individuo. La porción de pastel que le corresponde a cada uno es proporcional al desempeño obtenido; así los individuos con mejor fitness se llevan porciones mayores del pastel y lo contrario sucederá con los peores. De manera similar al juego de la ruleta se lanza una canica, aleatoriamente, el área donde se detiene la canica será el lugar ocupado por un cromosoma, por tal motivo los individuos con mayor fitness serán elegidos con mayor frecuencia.

Cruza

Una vez que a los individuos se les ha asignado un valor de aptitud, ellos pueden ser elegidos entre la población con una probabilidad que es proporcional a su fitness relativo, éstos serán recombinados para producir la siguiente generación. Los operadores genéticos manipulan los caracteres ó genes directamente asumiendo que ciertos códigos individuales producen mejores individuos. El operador de recombinación que utilizaremos para intercambiar la información genética entre parejas, o grupos mayores de individuos, es el operador de recombinación más simple: el de cruza en un punto, la cruza en un punto consiste en lo siguiente: considere dos cadenas binarias de progenitores.
Sean:

$$P_1 = \mathbf{10010}\underline{110} \qquad y \qquad P_2 = \mathbf{10111}\underline{000}$$

Si una posición entera **(i)** se selecciona uniformemente al azar entre la posición **1** de la cadena de caracteres y su longitud, que denotamos **“long”**, menos uno, se tiene el intervalo **[1, long-1].** Después se intercambia la información genética de los individuos alrededor de éste punto, entonces dos nuevas cadenas de descendientes son producidas.

Aplicamos este criterio a las cadenas ***P1*** y ***P2***, cuándo el punto de cruza en un punto **i = 5** es utilizado, entonces se obtienen las cadenas ***O1*** y ***O2***:

O_1 = *10010* 000 **O_2 = *10111*** 110

La operación de cruza en un punto no se lleva a cabo en todas las cadenas de la población, en lugar de eso, puede aplicarse a un porcentaje determinado por una probabilidad ***PC*** a las parejas que son seleccionadas para la reproducción.

Mutación

Sin embargo, aún existe otro operador genético llamado *mutación*, éste es entonces aplicado a las nuevas generaciones de cromosomas, ésta vez con probabilidad ***PM.*** La mutación causa que la representación genética del individuo sea transformada de acuerdo a una decisión probabilística. En el caso de la codificación binaria, la mutación causará que únicamente un bit de la cadena cambie su estado, si ***(0 fi 1), ó si (1 fi 0)***, si mutamos el cuarto bit de la cadena **O1**, obtenemos la nueva cadena **O3:**

Sí **O_1= 100 *1* 0110 *fi* O_3 = 100 *0* 0000**

La relevancia que tiene el operador de mutación consiste en que permite que la probabilidad de búsqueda en un subconjunto cualquiera del espacio solución nunca sea cero, esto tiene un efecto inhibidor en la posibilidad de que el AG converja en un mínimo local, en lugar de hacerlo en un mínimo global. [24]

Reinserción ó Etapa Final

Después de las operaciones de cruza y mutación, las cadenas individuales son decodificadas en caso necesario, e independientemente a su decodificación, las cadenas son ahora evaluadas por la función objetivo.

Es entonces cuándo a cada cadena se le asigna un valor de desempeño y solo en función a la aptitud otorgada por la función objetivo es que se forman las parejas de individuos que generan la siguiente población y así el proceso continúa para generaciones subsecuentes. De esta forma, se espera que el desempeño promedio de los individuos (*soluciones*) de una población se incremente, puesto que se preservan las características de los individuos más aptos mientras que los individuos que presentan un desempeño más pobre se van extinguiendo.

El algoritmo genético (AG) se termina cuándo se alcanza algún criterio de paro, este puede ser un número preestablecido de generaciones, en nuestro caso la condición de paro corresponde a un número máximo de generaciones.

3.3.1. - Ejemplo del Funcionamiento de un AG.

Buscamos un ejemplo de AG que permita entender su funcionamiento, en principio los cromosomas codifican un grupo de características deseables para un cierto individuo, digamos un ***BASILOSAURUS***, el *basilosaurus* fue un prototipo de ballena que existió hace 45 millones de años. Los genes –parámetros ó datos de entrada- serán los responsables de promover ó desalentar cierto comportamiento ó aptitud en los individuos. [24]

Examinamos las características globales y deseables de cuatro individuos de la especie basilosaurus, tomando en cuenta que los cromosomas codifican la longitud de sus miembros anteriores y que la longitud de la "pata" y la longitud de los "dedos" del basilosaurus están contenidos en cuatro genes. Los primeros dos codifican la longitud de la "pata" y los dos restantes codifican la longitud de los "dedos".

En nuestro modelo de representación hereditaria ó genoma, un círculo indica la activación de alguna característica y un tache indica la inhibición de cierta característica; de ésta manera el genoma ideal (patas cortas y dedos largos) será del tipo: **XXOO.**

El espacio solución de la población se encuentra como sigue:

SUJETO	***GENOMA***
A	***OXXX***
B	***XOXX***
C	***XOXO***
D	***XXOX***

Puede observarse que los sujetos ***A*** y ***B*** son, de acuerdo a las características deseables, los individuos que menos se acercan al óptimo puesto que ambos tienen patas largas y dedos cortos. También podemos ver que el sujeto ***D*** se acerca a nuestro ideal, patas cortas y dedos largos, así que solo es necesario alentar un poco el alargamiento de sus dedos. (**O** en lugar de **X** en el segundo par de genes) El desempeño es fácil de calcular: una función objetivo sencilla de evaluar será otorgar un punto a cada gene que corresponda con el genotipo ideal, el genotipo perfecto obtendrá entonces cuatro puntos. Así, la probabilidad de reproducción de un sujeto en particular dependerá en forma directamente proporcional al puntaje obtenido por ésta simple regla de decisión (función objetivo). Puesto que la probabilidad de reproducción del individuo dependerá directamente del valor asignado por la función objetivo, en éste caso, se tienen los siguientes resultados:

SUJETO	**DESEMPEÑO**	**PROBABILIDAD DE REPRODUCCIÓN**
A	1	1/7 = .143
B	1	1/7 = .143
C	2	2/7 = .286
D	3	3/7 = .429
TOTAL	7	7/7 = 1.0

Considere un ciclo de reproducción, es decir, si se tienen cuatro apareamientos, se necesitarán ocho individuos, **D** será seleccionado cuatro veces y engendrará cuatro descendientes, **C** será seleccionado dos veces y por ello tendrá dos hijos, finalmente de **A** y **B** sólo podemos esperar un descendiente por cada uno.

Se tiene el siguiente patrón de reproducción:

SUJETO	GENES RECIBIDOS	GENOMA	DESEMPEÑO	PROBABILIDAD DE REPRODUCCIÓN
A'	A: OX D: OX	OXOX	2	2/10 = .2
B'	B : XO D: OX	XOOX	2	2/10 = .2
C'	D: XX C: XO	XXX0	3	3/10 = .3
D'	C: XX D:OX	XXOX	3	3/10 = .3
TOTAL			10	10/10 = 1

Durante la reproducción, la cruza ocurrió en un lugar aleatorio, centro del genoma para **A'**, **B'** y **C'**, solo antes del primer gene para **D'**; la liga que existe entre el grado de adaptación y la probabilidad de reproducción nos lleva a superar el desempeño promedio de la población inicial, pasando de una aptitud de **7** en la primera generación hasta un total de **10** para la primera descendencia. En el siguiente ciclo de reproducción, **C'** y **D'** tienen un descendiente común:

D': XXO + C': O = XXOO

Este nuevo sujeto ha heredado las características deseables del genoma: sus patas son cortas y tiene dedos largos. Podemos ver que los principios que se aplican a los algoritmos genéticos son simples: [21]

1. Codificación del problema en una cadena binaria
2. Generación aleatoria de una población, esto incluye la representación de un espacio solución (alberca genética) que representa un subconjunto de soluciones posibles
3. Evaluación de los individuos mediante una función objetivo, el valor obtenido de la evaluación dependerá directamente de su distancia al óptimo.

4. Selección de los individuos que serán progenitores en función de la calificación que les otorga la función objetivo, comparando el desempeño de todos los individuos de la población global
5. Los genomas se cruzan y mutan
6. Se reinicia el proceso a partir del punto 3

El funcionamiento de un AG también puede describirse en función del genotipo [20]

- Se seleccionan parejas de genotipos de acuerdo al desempeño del fenotipo
- Se aplican los operadores genéticos (cruza, mutación...) para crear un nuevo genotipo
- Se desarrollan genotipos hasta obtener el fenotipo de una nueva generación, y se reinicia el AG a partir del punto 1

3.4. - Aplicación de los Algoritmos Genéticos a nuestro problema

En esta sección se describe la manera en que se adaptó un algoritmo genético al problema que nos ocupa, obtener una solución optima al problema de inventario descrito en él capitulo uno, para ello se realizo una adaptación de un algoritmo genético del Tool-Box® del programa MATHLAB®. [20]

Para utilizar un algoritmo genético es necesario crear un espacio de búsqueda de soluciones, MATHLAB® utiliza una representación de tipo matricial para describir objetos y funciones. Para ello, MATHLAB® utiliza un descriptor de campo mediante la instrucción ***FielD(*)*** que describe las variables de decisión que son construidas utilizando la función de construcción de matrices ***rep***(*).

Este descriptor utiliza como parámetros los datos, ***aDat(*)*** aportados para los artículos consumidos en el almacén (gancho, balatas, cable-acero, botonera, interruptor), además se utiliza otra información relativa a cada articulo, por ejemplo: la demanda del articulo y su costo por acarreo de inventario, costo unitario, costo por reabastecimiento, etc. El descriptor de campo se representa en la forma de una matriz cuyas cotas también forman parte de los parámetros.

El código fuente utilizado fue el siguiente:

```
NIND = 20;          % Es el Numero de individuos por cada sub.-población
MAXGEN = 450;       % Es el Máximo Número de Generaciones
GGAP = .9;          % Es el Intervalo entre generaciones, cuantos nuevos individuos son creados
NVAR = 5;           % Es el Número de variables de decisión a ser utilizadas
PRECI = 50;         % Es la Precisión de la representación binaria
```

Él número de individuos por población está ajustado a 20, ***NIND=20***, y el número de generaciones será de ***MAXGEN=450***, se tienen cinco variables de decisión, ***NVAR=5***, que representan los cinco artículos del almacén “x” que se utilizan para obtener un costo mínimo de la función objetivo; cada una de estas cinco variables utiliza una representación binaria de cincuenta bits, ***PRECI=50***,
Como mencionamos anteriormente el descriptor de campo, ***FieldD(*)*** se construyó utilizando la función de replica de matrices ***rep(*)***, para construir la matriz ***FieldD(*)***, que representa la descripción de los cromosomas y que sirve para su interpretación en el código de MATHLAB®.

Una población inicial es creada mediante la función ***crbp(NIND,NVAR* PRECI)***, lo que da como resultado una matriz de cromosomas (variables de decisión), ***Chrom(*)*** de tamaño ***NIND***, formada por cadenas binarias uniformemente distribuidas de tamaño ***NVAR*PRECI.*** Utilizaremos el siguiente algoritmo genético adaptándolo al problema del almacén “x”:

Inicio: Leer Parámetros

```
%Inicializar población %
Chrom = crtbp(NIND, NVAR*PRECI);% contador de generaciones %
gen = 0; %Evaluación de la población inicial %
ObjV =ejemplo(round(bs2rv(Chrom,FieldD)),aDat,0);
```

Inicio del algoritmo genético

ObjV = ejemplo(round(bs2rv(Chrom,FieldD)),aDat,0); % Esta instrucción localiza al mejor individuo y despliega la convergencia del algoritmo %

Best(gen+1) = min(ObjV); % Se busca obtener el mejor individuo ***min(ObjV)***, y éste valor se le % asigna a la variable ***Best(gen+1)***, que varía en cada generación%

plot(log10(Best),'ro');xlabel('generation'); ylabel('log10(f(x))');

text(0.5,0.95,['Best = ', num2str(Best(gen+1))],'Units','normalized');

drawnow; % Los tres renglones anteriores despliegan la convergencia del algoritmo %

while gen < MAXGEN, % Ciclo generacional %

FitnV = ranking(ObjV); %Asignando un valor de desempeño (fitness) a la población entera %

SelCh = select('rws', Chrom, FitnV, GGAP); % Selección de individuos para procrear, mediante regla de la ruleta %

SelCh = recombin('xovsp',SelCh,0.75); % Recombinación de los individuos seleccionados, cruza en un punto con probabilidad del 75%

SelCh = mut(SelCh,0.7); % Realización de la cruza en un punto con probabilidad del 70% en la población actual %

ObjVSel = ejemplo(round(bs2rv(SelCh,FieldD)),aDat,0); % Evaluación de la "prole" y "llamado" a la función objetivo" %

[Chrom ObjV]=reins(Chrom,SelCh,1,1,ObjV,ObjVSel); % Reinserción de la nueva generación en la población actual %

gen = gen+1; % Incremento en el contador generacional %

Best(gen+1) = min(ObjV);

plot(log10(Best),'ro'); xlabel('generation'); ylabel('log10(f(x))');

text(0.5,0.95,['Best = ', num2str(Best(gen+1))],'Units','normalized');

drawnow; % Registro del mejor individuo actual y actualización del despliegue de resultados %

end

bs = find(ObjV==min(ObjV));

length(bs)

bs = bs(1);

round(bs2rv(Chrom(bs,:),FieldD)) % Despliegue de resultados %

Fin de AG

En el siguiente capítulo presentaremos las conclusiones y resultados obtenidos al aplicar diversas soluciones al problema planteado a lo largo de la tesis

Capítulo 4

Resultados y Conclusiones

El presente capítulo tiene como propósito presentar los resultados que se obtuvieron luego de aplicar diferentes modelos de inventario en el almacén “x” y también se presentan los resultados obtenidos al resolver el problema del mismo almacén mediante algoritmos genéticos En este capitulo además de presentar los resultados obtenidos, se harán comparaciones entre métodos que comparten características similares que nos permitan observar el comportamiento de la función objetivo y tomar una decisión que pueda aplicarse a nuestro almacén, siempre con la finalidad de minimizar el costo total del sistema de inventario.

De esa manera podremos contestar las preguntas que se plantearon al principio de esta tesis y que fueron:

¿Cuándo deberá reabastecerse el almacén? y ¿cuánto se deberá agregar en cada reabastecimiento?

Procederemos a examinar modelos de inventarios que son similares. En primer lugar, vamos a realizar una comparación entre dos modelos que tienen una demanda de artículos determinística. Para llevar a cabo ésta, será necesario que ambos modelos tengan características similares, estas son:

- Ambos modelos tienen una demanda de artículos determinística
- Los cálculos para obtener el mínimo de la función objetivo se realizaron sobre los mismos artículos y con los mismos costos
- En este caso la demanda de artículos se obtuvo utilizando la tabla de frecuencias del apéndice A, dicha tabla representa el número de fallas ocurridas a un conjunto de grúas en un lapso de 24 meses. A esta demanda la llamaremos *demanda máxima*.

De manera análoga realizaremos una comparación entre los siguientes modelos con demanda probabilística utilizando la tabla de frecuencias ya referida:

- Order-level probabilístico con demanda instantánea vs. Modelo probabilístico con densidad uniforme y demanda instantánea

Finalmente, vamos a realizar una comparación entre estos modelos tradicionales de inventarios contra el algoritmo genético, mencionando sus ventajas y desventajas

4.1. -Modelo de Wilson vs. Modelo Order-level determinístico

Dadas las características observadas del modelo de Wilson en el Cáp. 2, éste tiene como ventaja que puede indicar los períodos de requisición de refacciones, es decir, la longitud de los periodos de cedulamiento que no son necesariamente iguales. Este modelo también permite controlar las cantidades que deben requerirse, lo cual ayuda a obtener un lote de tamaño suficiente para evitar caer en déficit. En la siguiente tabla se presentan los costos asociados a cada refacción.

TABLA DE COSTOS

ARTÍCULO	***Costo Unitario*** C_u	***Costo de Reabastecer*** C_r	***Costo de Inventario*** C_i	***Costo por déficit*** C_d
Gancho	**$ 1400.00**	**$ 126.00**	**$ 70.00**	**$ 24000.00**
Balata	**456.00**	**41.00**	**23.00**	**12000.00**
CableAcero	**2500.00**	**225.00**	**125.00**	**24000.00**
Botonera	**4200.00**	**378.00**	**210.00**	**24000.00**
Interruptor	**350.00**	**32.00**	**18.00**	**6000.00**

Aplicación de la formula de Wilson, a los artículos del almacén "x":

Recordamos que este es un modelo del tipo $(C_i\ ,\ Cr)$, que mantiene un control del costo por acarreo de inventario y costo por reabastecimiento, con variables de decisión tipo $[q,\ t]$ es decir, debe determinarse la cantidad óptima a requerir **(**q^***)** el período de cedulamiento está dado por $t=q/r$, donde $(\ r\ )$ representa la demanda determinística de artículos. Se realizaron nuevos cálculos del modelo de Wilson con las nuevas demandas (ver apéndice A). Sólo se ejemplificará un artículo y los demás resultados se presentarán en la tabla número uno.

Gancho: En la sección 2.3 obtuvimos un acercamiento a la variable cantidad por ordenar, es decir una cantidad inicial sobre cuanto pedir (q_i)

Esta cantidad fue un acercamiento inicial debido a que la demanda que se considero en esa sección fue la demanda conocida por el personal de mantenimiento de dicho almacén denotada *demanda empírica*.

Se plantea que un mes equivale a 30 días y también se esta utilizando una demanda máxima de $r = 7$ piezas así entonces se tienen los siguientes datos:

C_i = *\$ 70.00;* C_r*= \$ 126.00; r= 7pzas.* mes; qi=4.64 piezas por mes:*

Se calcula el período de cedulamiento inicial: $t=q_i / r$ = *4.64 piezas * mes / 7piezas*

Entonces:

*t= .6628 * (30) días = 19.88 días ≈ 20 días, es el periodo de cedulamiento inicial*

El costo inicial será de:

$$C(q_i) = \frac{C_i * q_i}{2} + \frac{C_r * r}{q_i} = \frac{(70 * 4.64)}{2} + \frac{(126 * 7)}{4.64} = \$352.48$$

La cantidad óptima de artículos se obtiene aplicando la formula *4) de la Sección 2.3* entonces:

$q^* = \sqrt{\frac{2rC_r}{C_i}} = \sqrt{\frac{2*7*126}{70}} = \sqrt{25.2} = 5.01$. Esta cifra puede redondearse a *5* piezas para mantener requerimientos de piezas de tipo discreto.

El mínimo costo mensual por inventario y reabastecimiento se obtiene aplicando la ecuación *6)*, de la sección 2.3

$C(q^*) = \sqrt{2r * C_i * C_r}$ = $(2*7*70*126*)^{1/2}$= \$ 351.39

Se observa una ligera disminución en la función objetivo, costo óptimo total, el período de cedulamiento *después* de obtener el óptimo está dado por *t= q* / r= 5.01 / 7=.7157 meses ≈ 21dias*.

En conclusión, se requieren 5 ganchos cada 21 días.

Análogamente presentamos los resultados obtenidos en los demás artículos en la siguiente tabla *Modelo Wilson, con* ***r*** *= demanda máxima, Tabla N°1*

TABLA Nº 1 [Cáp. 4 Wilson]

Artículo	r	q_i	$t(q_i)$ días	$C(q_i)$	q^*	$t(q^*)$ días	$C(q^*)$
Gancho	7	4.64≈5	20	$ 352.48	5.01≈5	21	$ 351.49
Balatas	2	6.54≈7	98	$ 87.75	2.67≈3	40	$ 61.42
Cable Acero	4	4.64≈5	35	$ 483.96	3.79≈4	28	$ 474.34
Botonera	3	4.64≈5	46	$ 731.59	3.28≈3	33	$ 690.13
Interruptores	13	4.64≈5	11	$ 131.41	6.79≈7	16	$ 122.37

Al inicio del problema en él capitulo 2 se obtuvo la siguiente:

TABLA Nº 2 [Cáp. 2, formula de Wilson]

Artículo	C_i	C_r	**Demanda (r)**	q_i	$C(q_i)$	q^*	$C\ (q^*)$	$t(q^*)$días
Gancho	**$ 70.00**	**$ 126.00**	**6**	**10**	**$ 425.60**	**4.64≈5**	**$ 325.33**	**23 días**
Balatas	**$ 23.00**	**$ 41.00**	**12**	**10**	**$ 164.20**	**6.57≈7**	**$ 150.44**	**16 días**
Cable Acero	**$ 125.00**	**$ 225.00**	**6**	**10**	**$ 760.00**	**4.64≈5**	**$580.95**	**23 días**
Botonera	**$ 210.00**	**$ 378.00**	**6**	**10**	**$1276.80**	**4.64≈5**	**$975.99**	**23 días**
Interruptor	**$ 18.00**	**$ 32.00**	**6**	**10**	**$ 109.20**	**4.64≈5**	**$83.14**	**23 días**

Si se hace una comparación entre las tablas número 1 y 2 se observa una reducción de costos utilizando la demanda máxima y los periodos de cedulamiento varían en función de la demanda. Observando esta variación, en la aplicación del modelo Order-level determinístico sé decidió también utilizar la tabla de frecuencias o demanda máxima proporcionada en el apéndice A.

Aplicación del modelo Order-level Determinístico

A lo largo de la presente tesis hemos visto que el costo por déficit constituye el de mayor impacto financiero en el almacén "x", por ésta razón, decidimos utilizar otro modelo para nuestro almacén. A diferencia del modelo de Wilson, el modelo Order-level determinístico funciona permitiendo déficit, pero controla este costo manteniendo un nivel de inventario, S^*, óptimo con períodos de cedulamiento constantes, (t_p). La principal ventaja que tiene el modelo Order-level determinístico consiste en que proporciona un control adecuado del costo por déficit. Otra ventaja es que se utiliza un período de cedulamiento constante, lo cual ayuda a requerir cantidades variables de refacciones a períodos constantes. La desventaja del modelo consiste en que una vez que varía la demanda de artículos, el costo por déficit puede provocar situaciones de desastre financiero, como consecuencia de las características del modelo. Este es un modelo del tipo (C_i, C_d) lo que significa que se tiene un control sobre los costos de inventario y déficit, respectivamente. De manera análoga al modelo de Wilson se presenta la manera de calcular el costo de este sistema aplicando, primero a una refacción; utilizamos las mismas demandas del Apéndice A para calcular los costos en las demás refacciones, presentaremos los resultados obtenidos en los otros artículos en una tabla de resultados, tabla número tres.

Gancho:

Basándose en la Tabla de Costos (No.1) y utilizando una demanda conocida ***"r"*** igual al número máximo de fallas ocurridas durante los años 1998-1999. Para el caso del gancho, la demanda máxima fue de **(r =7)** piezas, ocurrida en Abril del 98. Se utiliza un tiempo prescrito (t_p) de un mes entre dos decisiones consecutivas de abastecimiento, entonces (q_p)= $r*t_p$ =7 piezas, recordando que (q_p) representa la cantidad de artículos necesarios para "levantar" el inventario a un nivel optimo, S_0.

Las ecuaciones que utilizamos son:

$$S_0 = q_p \frac{C_d}{C_i + C_d}$$ Nivel óptimo de inventario

$$C(S_0) = \tfrac{1}{2} q_p \frac{C_i C_d}{C_i + C_d}$$ Costo óptimo

Aplicando dichas ecuaciones obtenemos:

$$S_0 = q_p \frac{C_d}{C_i + C_d} = \frac{7*(24000)}{(70+24000)} = 6.9970 \approx 7 \text{ piezas}$$

$$C(S_0) = \tfrac{1}{2} q_p \frac{C_i C_d}{C_i + C_d} = \tfrac{1}{2} * \frac{7*(24000*70)}{(70+24000)} = \$244.28$$. Es el costo óptimo

Para obtener el nivel óptimo discreto se aproxima al entero más cercano, el nivel de inventario óptimo discreto será: $S_0 = 7$ piezas. Análogamente aplicamos el modelo "Order-level" discreto con demanda máxima a las demás refacciones y presentamos la tabla número tres de resultados:

TABLA N° 3 [Cap 4 Order-Level]

Tabla Order-level	Demanda Máx (r)	Costo Invent.	Costo por Déficit.	*Cd./ (Cd.+ Ci)*	U	q_p	Nivel Optimo	Costo Optimo	Nivel Optimo Discreto
Gancho	7	$ 70.00	$ 24,000.00	.997	1	7	6.99	$ 244.28	7
Balatas	2	$ 23.00	$ 12,000.00	0.998	2	2	1.99	$ 22.96	2
Cable Acero	4	$ 125.00	$ 24,000.00	0.994	1	4	3.97	$ 248.70	4
Botonera	3	$ 210.00	$ 24,000.00	0.991	1	3	2.97	$ 312.27	3
Interruptor	13	$ 18.00	$ 6,000.00	0.997	1	13	12.96	$ 116.65	13

Al hacer la comparación entre la TABLA Nº 1 con la Nº 3, se observa que el modelo Order-level determinístico es más conveniente para utilizarse en el almacén "x", que el modelo Wilson, esto se debe a que los costos obtenidos son menores, teniendo un mejor desempeño al minimizar la función objetivo, costo total.

Comparativamente podemos concluir que el sistema "Order-level" tiene un costo menor que el modelo de Wilson, esto se debe a que el "Order-level" mantiene el control de los costos por déficit y por inventario, siendo el costo por déficit el de mayor importancia porque significa el mayor de los costos estimados. Sin embargo el modelo "Order-level" no controla el costo por acarreo de inventario ni el costo por reabastecimiento. Por otra parte, puesto que los períodos de cedulamiento son prescritos, pueden ordenarse cantidades de artículos constantes en períodos de tiempo iguales, lo cual viene a cubrir las características que gobiernan la administración del almacén "x".

Desechamos el modelo de Wilson inicialmente porque además de proveer una función objetivo de mayor costo, requiere solicitar artículos a períodos de tiempo variable, lo cual no es factible en la operación del almacén "x" ya que este es un sistema de intervalo fijo.

4.2. -Modelos Probabilísticos, comparación

Se utilizaron dos modelos probabilísticos que comparten características similares, ambos son modelos que permiten déficit de artículos y que contemplan una demanda de tipo instantánea. Estos modelos tienen las mismas variables de decisión, es decir, ambos son modelos del tipo $[S, t_p]$, lo que significa que deberá calcularse el nivel óptimo de inventario S_0. El intervalo de tiempo entre dos decisiones de reabastecimiento (t_p) será en ambos casos de un mes, constante. Los costos que están asociados a estos modelos son: el costo de mantener el inventario, (C_i), el costo por déficit (C_d) y el costo de reabastecer, (C_r) y se encuentran en la tabla de costos

Presentamos primeramente el modelo con demanda instantánea que utiliza la densidad uniforme continua para minimizar la función de costo, realizaremos los cálculos que permitan obtener un nivel de inventario óptimo, (S_0) a partir de un nivel de inventario inicial, al que llamamos inventario en mano, (q_i) Las cantidades iniciales, en éste modelo pudieran parecer arbitrarias, pero su utilidad reside en que al terminar de calcular el nivel de inventario óptimo, éste deberá compararse con el inventario en mano, para que mediante cierto criterio, se pueda decidir la cantidad de artículos a requerir para alcanzar éste nivel óptimo.

En el capítulo dos, utilizamos la función de densidad de probabilidad uniforme continua aplicada solamente al cable de acero, la botonera y los interruptores termo magnéticos. Lo anterior se hizo dada la imposibilidad de obtener una función densidad para las otras refacciones, según se explicó ahí. Con el fin de comparar los modelos densidad uniforme contra Order-level con densidad Poisson, realizamos los cálculos con densidad uniforme a las cinco refacciones, asumiendo que ésta es una aproximación. Al final, el resultado se acercará al entero más inmediato para mantener unidades discretas. Posteriormente realizaremos la presentación de las cantidades obtenidas mediante una tabla de resultados.

En estos modelos vamos a utilizar las mismas cantidades de artículos que se utilizaron en el modelo Order-level determinístico. Con esta decisión se pretende que los modelos determinísticos y probabilísticos sean comparables entre sí, a partir solamente de una demanda máxima.

En los modelos probabilísticos la demanda de artículos debe seguir un comportamiento conocido, por ello, los modelos se harán comparables en cuanto a demanda, nivel de inventario, período de cedulamiento y costos asociados al sistema. Recordemos que se tienen las siguientes siglas asociadas a los parámetros del modelo probabilístico con densidad uniforme:

- Cantidad de inventario inicial ó inventario en mano, q_i
- Cantidad máxima de artículos demandados, r
- Nivel de inventario inicial, S_i
- Nivel de inventario óptimo, S_0
- Costo esperado del modelo, $E\,[C(S_0)]$
- Una función de densidad $f(r) = 1/r$ (densidad uniforme continua)
- Un número real $k = \dfrac{Cd - Cr}{Cd + Ci}$

A continuación se presenta el modelo probabilístico con demanda instantánea y función de densidad uniforme continua, aplicado a una refacción, el gancho.

Análogamente, aplicaremos éste modelo a las demás refacciones y presentaremos los resultados en la tabla número 4.

Gancho: Se tiene una cantidad de inventario en mano de q_i = *5 piezas*, un nivel inicial de inventario $S_i = 6$ piezas y una demanda máxima ***r* = 7** piezas, ocurrida en Marzo de 1998

La densidad propuesta es $f(r) = \begin{cases} 1/7 & \text{sí } 0 \le r \le 7 \\ \text{Cero, sí } r > 7 & \end{cases}$

El costo inicial asociado se obtiene evaluando la ecuación:

$$E[C(S_i)] = Cr(Si - q_i) + Ci *([\int_0^S (S_i - r) f(r)dr + Cd \int_S^\infty (r - S_i) f(r)dr$$

$$E[C(6)] = 126(6\text{-}5) + \ldots$$

$$+(70)[\int_0^6 (6-7)\frac{dr}{7} + (24000)[1 - \int_0^6 (7-6)\frac{dr}{7}]$$

$$E[C(6)] = 126 + (70)(\frac{-1}{7})[6-0] + 24000 - \frac{24000(6)}{7}$$

Haciendo operaciones se tiene: $E[C(6)] = \$126.00 - \$\,60.00 + 24000/7 = \$\,3494.57$

Se tiene el cociente: $k = \frac{Cd - Cr}{Cd + Ci} = \frac{24000 - 126}{24000 + 70} = .9918$

Entonces calculamos el nivel óptimo de inventario:

$$PR.\ (r \le S_0) = \int_0^{S_0} f(r)dr = k \Leftrightarrow \frac{1}{7}\int_0^{S_0} dr = .9918$$

El valor de S_0 se selecciona de manera que la probabilidad de que $r \le S_0$ sea

$$PR.\ (r \le S_0) = \frac{S_0}{7} = .9918$$

Luego: $S_0 = (7)(.9918) = 6.943 \sim 7$ *piezas, redondeado al entero mas próximo, éste es el nivel óptimo*

La política de ordenamiento se fundamenta en la siguiente regla de decisión: Sí $S_0 > \boldsymbol{q}$, entonces debe requerirse una cantidad (S_0- $\boldsymbol{q}$), donde $S_0 =$ **7**

Por lo tanto se requieren S_0- $q = 7 - 5 = 2$ *piezas*

El costo asociado se obtiene evaluando la ecuación:

$$E\ [C\ (S_0)] = Cr\ (S_0 - q) + C_i\ *([\int_0^S (S_0 - r) f(r) dr + Cd \int_S^\infty (r - S_0) f(r) dr$$

$E\ [C\ (7)]\ =(126)\ (7\text{-}5)+(70)(0)\ +(24000)*\ 0$

El segundo término de la ecuación, relacionado con el costo de inventario, se vuelve cero debido a las condiciones iniciales del modelo, es decir, recordemos que si ($r \geq S$) -la demanda de artículos excede al nivel de inventario inicial, entonces el inventario que se mantiene será cero. El tercer término, el costo por déficit, se vuelve cero debido a que la demanda es igual al nivel de inventario óptimo. Presentamos los resultados obtenidos en la siguiente tabla:

TABLA Nº 4 [Densidad Uniforme]

Artículo	q_i	r	S_i	$E[C(S_i)]$	S_0	$E[C(S_0)]$	¿ $S_0 > q_i$?	¿ Requerir $S_0 - q_i$?
Gancho	**5**	**7**	**6**	**$3494.57**	6.94≈7	**$252.00**	Sí	**SÍ, 2**
Balatas	**7**	**2**	**12**	**$1585.00**	1.98≈2	No esperado	No	**No requerir**
Cable	**5**	**4**	**6**	**$ 600.00**	3.88≈4	No esperado	No	**No requerir**
Botonera	**5**	**3**	**6**	**$ 588.00**	2.93≈3	No esperado	No	**No requerir**
Interruptor	**5**	**13**	**13**	**$ 256.00**	12.9≈13	**$256.00**	Sí	**SÍ, 8**

Observando la tabla anterior, podemos inferir que él modelo probabilístico con demanda instantánea permite un adecuado control del costo por déficit al ajustar la cantidad de artículos requeridos al mismo tamaño de la demanda.

Sin embargo la función de densidad uniforme continua utilizada provee una limitada capacidad de pronóstico y describe un comportamiento de la demanda de artículos muy general, lo que viene a proveer una gran incertidumbre en el costo esperado del modelo.

Modelo Order-level probabilístico

Este modelo fue presentado en el Capítulo **2**, por ésa razón, simplemente presentamos los resultados obtenidos ahí anteriormente en la TABLA Nº 5. Estos serán comparados con el modelo anterior, presentado en la tabla número cuatro.

TABLA Nº 5

Artículo	Demanda	Nivel Óptimo *(S_0)*	Costo Optimo *$C(S_0)$*
Gancho	**7**	**4**	**$ 587.70**
Balatas	**2**	**4**	**$ 78.40**
Cable Acero	**4**	**5**	**$ 513.56**
Botonera	**3**	**4**	**$ 687.22**
Interruptor	**13**	**11**	**$ 176.08**

Después de comparar los resultados de las tablas Nº 4 versus la Nº 5, puede verse que el modelo Order-level probabilístico provee mejores niveles de inventario. Sin embargo en el caso del gancho, la función costo del modelo densidad uniforme es menor porque solamente contempla el costo de requerir dos piezas, habiendo una cantidad inicial de 5. Esta aparente viabilidad del modelo con demanda uniforme es engañosa, puesto que el modelo Order-level no necesita partir de un nivel inicial de inventario en mano.

El modelo Order-level controla la cantidad de artículos que deberán hallarse en el almacén no solo satisfaciendo la demanda máxima, sino que controla el nivel óptimo de inventario, minimizando la probabilidad de caer en déficit y maximizando la cantidad de artículos en almacén, con respecto a una demanda también máxima. La causa principal del buen funcionamiento del modelo Order-level probabilístico es que utiliza una función de probabilidad que describe correctamente la demanda de artículos en el almacén. En la tabla Nº 5 puede verse que en todos los casos el número de artículos requeridos en el nivel óptimo es diferente a la cantidad de artículos requeridos por el modelo con función de densidad uniforme continua.

No obstante que el costo del modelo Order-level es mayor, tiene la ventaja de ser confiable y la desventaja de que ocasionalmente no se podrá utilizar una función de probabilidad que pueda describir adecuadamente el comportamiento aleatorio de la demanda de artículos como se obtuvo al utilizar la función de distribución Poisson (λ, **x**)

4.3.- Modelos determinísticos contra modelos probabilísticos

Ahora vamos a comparar los modelos Order-level determinístico y probabilístico ya que ambos controlan los mismos costos y ambos se ajustan a las necesidades de operación del almacén “x”. Mencionamos las propiedades de ambos y solo procedemos a comparar los resultados de las tablas cinco y tres:

TABLA 6 [Modelos Order-level]

Artículo	Costo Determinístico	Costo Probabilístico
Gancho	**$ 244.28**	**$ 587.70**
Balatas	**$ 22.96**	**$ 78.40**
CableAcero	**$ 248.70**	**$ 513.56**
Botonera	**$ 312.27**	**$ 687.22**
Interruptor	**$ 116.65**	**$ 687.08**

Debe subrayarse que el criterio utilizado para seleccionar al Order-level probabilístico no fue el resultado de la función costo total, sino la descripción de la demanda esperada mediante la distribución Poisson. Cuando se recomienda el modelo Order-level probabilístico con demanda instantánea de tipo Poisson, se pretende aprovechar la buena descripción de tal demanda, lo anterior sirve para realizar requisiciones de refacciones a corto y mediano plazo. En caso de que en otros periodos se confirme que la demanda de refacciones sigue el modelo Poisson, entonces se podrá programar el mantenimiento de las maquinas-herramienta de los talleres en función de las fallas (demandas de refacciones)

De esta manera se podría optimizar la utilización del recurso de factor humano y de refacciones, puesto que existe un soporte estadístico que describe adecuadamente el comportamiento de la demanda y que hace posible realizar pronósticos.

La tabla número siete, muestra los resultados finales obtenidos al utilizar modelos tradicionales de inventarios con respecto a la función objetivo, costo total del modelo y nivel óptimo deseable ó cantidad de artículos por requerir:

TABLA Nº 7

	Modelo de Wilson		**Modelo Order-level Determinístico**		**Modelo Order Level, (proba)**		**Modelo D.Uniforme**	
Artículo	q_0	$C(q_0)$	S_0	$C(S_0)$	S_0	$C(S_0)$	S_0	$C(S_0)$
Gancho	**5**	**$ 351.49**	**7**	**$ 244.48**	**4**	**$587.70**	**7**	**$252.00**
Balatas	**3**	**$ 61.42**	**2**	**$ 22.96**	**4**	**$ 78.40**	**2**	*
Cable	**4**	**$ 474.34**	**4**	**$ 248.70**	**5**	**$513.56**	**4**	*
Botonera	**3**	**$ 690.13**	**3**	**$ 312. 27**	**4**	**$687.22**	**3**	*
Interruptor	**7**	**$ 122.37**	**13**	**$ 116.65**	**11**	**$176.08**	**13**	**$256.00**
Total = Σ $	*	**$ 1699.75**	*	**$ 945.06**	*	**$2042.96**	*	***$508.00**

¿Cuándo pedir? Esta pregunta tiene dos respuestas, la primera de ellas es: en el modelo de Wilson, los períodos de cedulamiento son variables y tienen un lapso que comprende 16 días hasta un máximo de cuarenta, en los otros modelos se consigue mantener lapsos constantes de treinta días entre cada decisión de reabastecimiento.

Ahora, observando los modelos probabilísticos, los asteriscos que se encuentran en el modelo con densidad uniforme, indican que no se evaluó la función costo.

Esto se debió a que éste modelo utiliza como variable de decisión la cantidad de artículos que hay en el almacén al momento de realizar la demanda, en cuyo caso en las casillas donde hay asterisco, no fue necesario solicitar artículos porque existía un superávit de ellos, lo que evita calcular el valor de la función costo. *¿Cuándo pedir?* En los otros modelos eso es una constante, cada mes.
¿Cuánto pedir? Esas son cantidades variables que pueden verse en la tabla correspondiente.

4.4. -Resultados del Algoritmo Genético

En él capitulo tres se realizo una adaptación de un algoritmo genético (AG) al problema del almacén 'x', a continuación se describen las características del AG desarrollado en ese capitulo. Posteriormente se procede a realizar una comparación con los modelos de inventarios aplicados al problema con el resultado obtenido mediante el AG.
Se tiene un cromosoma definido como un arreglo de cinco entradas, cada entrada del arreglo es una variable acotada en los reales, el número de variables es cinco, denotadas por q_k para $k = 1, 2, ..., 5$ donde q_k es la respuesta a la pregunta de *¿cuanto ordenar de cada articulo?*
En el genético cada variable representa la cantidad de artículos a ordenar en el almacén:

q_1=*gancho*, q_2=*balatas*, q_3= *cable acero*, q_4= *botonera y* q_5 = *interruptores*

Entonces las cotas asociadas a cada artículo son:

$$[1 \le q_1 \le 7];\ [1 \le q_2 \le 2];\ [1 \le q_3 \le 5];\ [1 \le q_4 \le 4];\ [1 \le q_5 \le 11]$$

Estas cotas representan los intervalos donde se encuentra la demanda máxima de artículos, la gran ventaja que ofrecen los algoritmos genéticos es que estas cotas pueden modificarse arbitrariamente, sin embargo, el algoritmo genético siempre converge al óptimo.
Para un algoritmo genético, este espacio solución es reducido y puede ampliarse el intervalo tanto como se desee, nosotros utilizamos este espacio porque estas son las condiciones de nuestro problema

La población inicial se genero aleatoriamente, esta población esta formada por 20 individuos, pero las pruebas realizadas se efectuaron con diferentes cantidades de individuos y esto no significo una gran variación en la solución, como se vera posteriormente

La función objetivo utilizada en el genético es la función de costo proporcionada por el modelo de Wilson, sección 2.3, pagina 13 ecuación 2)

Nota: Esta función fue programada una vez que observamos que el modelo de Wilson ofrecía el menor costo total. Debe decirse que si fuera necesario, otra función objetivo puede programarse al Algoritmo Genético, los resultados obtenidos por esa posible función son tema de otra tesis.

Las características particulares de nuestro algoritmo genético son:

- La población se almaceno en una matriz de población en la cual cada fila representa un individuo de la población, estos pobladores fueron codificados en código binario por cada uno de los artículos.
- La selección de los individuos se realizo mediante el esquema de ruleta como ya se explico en el Capitulo 3 sección 3.3 y se encontró el óptimo después de varias pruebas moviendo los parámetros de probabilidad de selección, cruza y mutación.
- La condición de paro fue establecida en 450 generaciones.

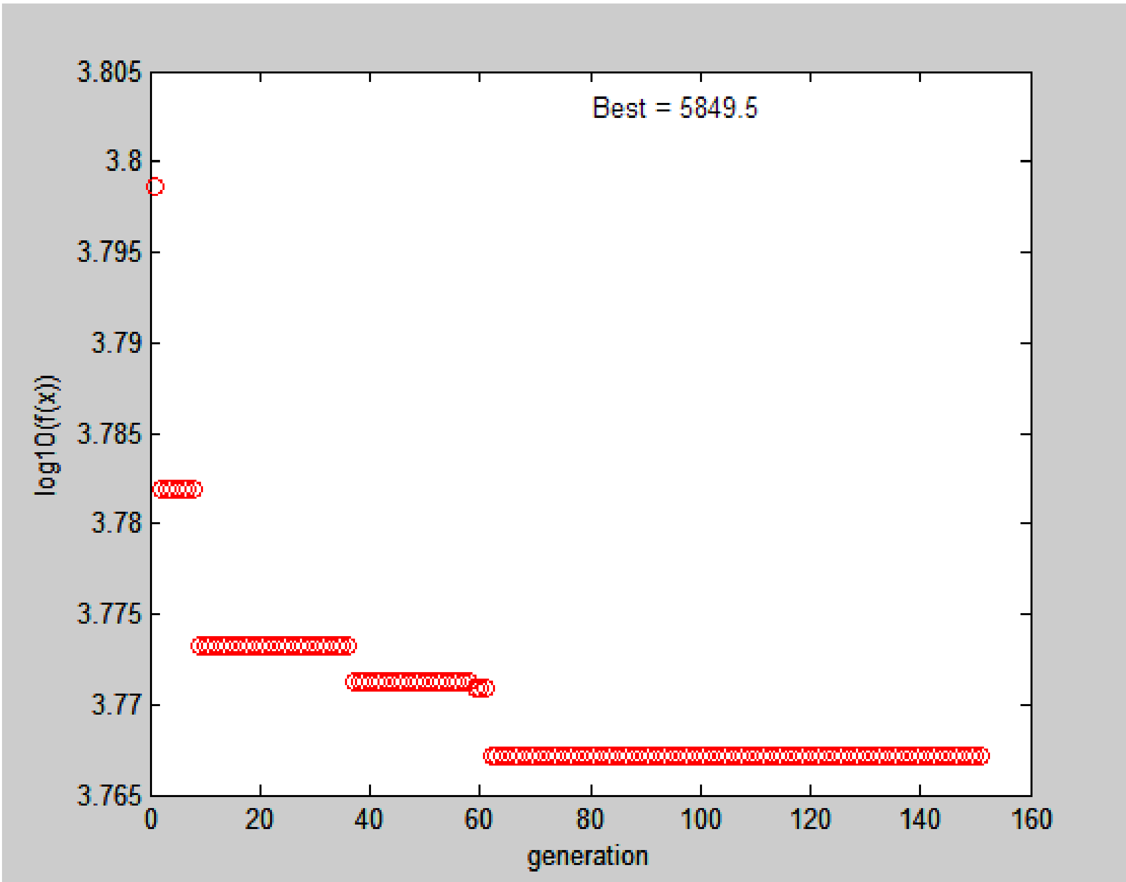
El óptimo fue encontrado mediante los siguientes parámetros en los operadores del algoritmo genético:

- La operación de cruza de los individuos se realizo por el método de cruza en un punto, con una probabilidad de cruza del 75%
- Se aplico un operador de mutación con una probabilidad del 70 %, esto significa que solamente 30% de los individuos cambio sus características y que el resto permaneció sin cambios. La condición de paro del AG se estableció en 150 generaciones

La función objetivo que se utilizo es una adaptación de la formula de Wilson, al decir adaptación, nos referimos a que se acondiciono esta, para que evaluara cada uno de los individuos de mi matriz ya que, MATHLAB funciona con matrices.

Presentando los resultados del Algoritmo Genético

Figura 1



Solución propuesta q = [7 2 4 3 8]

Este es el arreglo o solución propuesto por MATHLAB® para una prueba que utiliza una población inicial de 20 individuos, la función objetivo es la del modelo Wilson con demanda determinística de 22 piezas por cada refacción, un nivel de selección de individuos del 90% y una probabilidad de mutación del 70%, en la grafica puede verse como el genético se va acercando al optimo conforme se acerca a la condición de paro, realizar 150 generaciones.

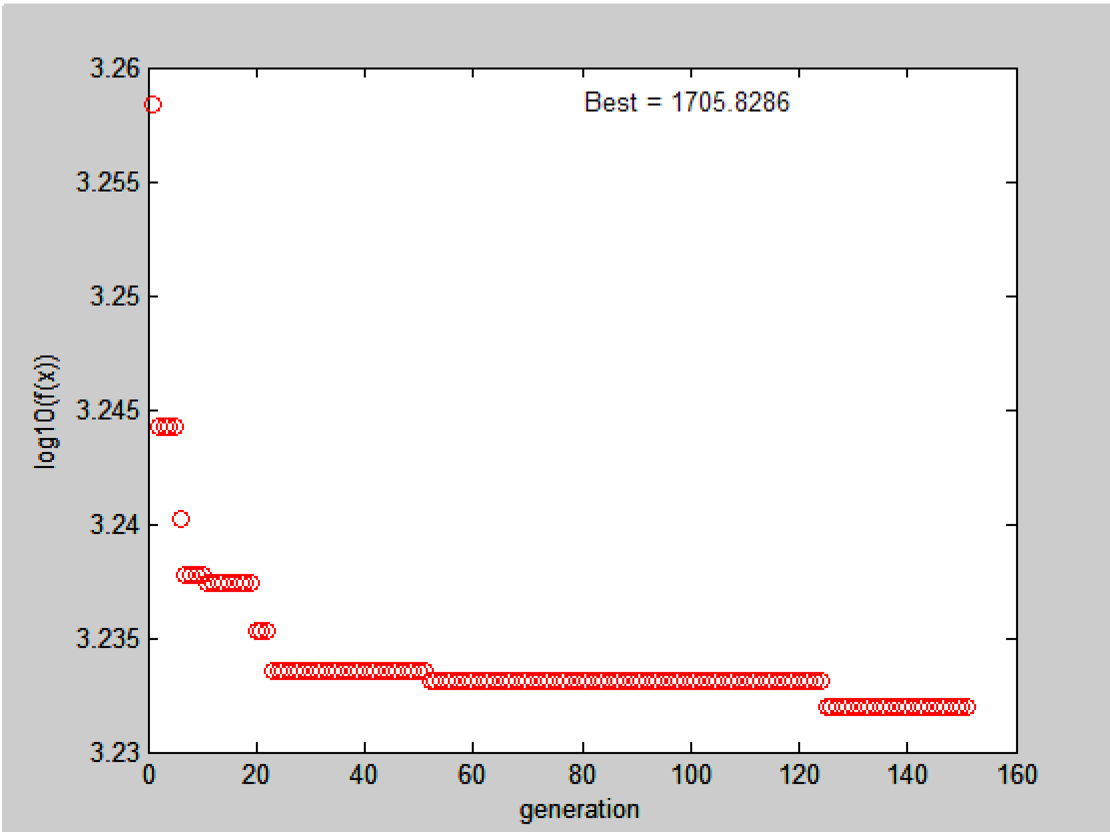
El costo esperado de requerir una cantidad:

q = (gancho, balatas, cable-acero, botonera, interruptor) = (7 2 4 3 8)

Cuyo costo es de $ 5849.50 pesos

Nota: Se realizaron distintas pruebas con MATHLAB® *moviendo los parámetros de probabilidad de selección, cruza y mutación y se obtuvo como mejor solución al arreglo formado por las cinco refacciones bajo estudio.*

Figura 2



La figura muestra la optimización que se realiza conforme avanza el algoritmo genético, el óptimo hallado es:

q = [5 2 4 3 7] Correspondiente a un costo de $1705.82

En esta ocasión se mantuvo la función objetivo, pero las demandas de artículos fueron iguales a las demandas máximas (ver apéndice A) y esta fue la única variación al genético anterior.

Este es el resultado mas aproximado al valor obtenido por los modelos de inventarios tradicionales, en particular por el modelo de Wilson que como ya vimos, ofreció el mínimo costo total.

4.5. - Conclusiones

Mediante la aplicación de los diferentes modelos de inventarios, hemos logrado minimizar el costo total de operación del almacén “x”, ciertamente todos y cada uno de los modelos aplicados logra minimizar el valor de la función objetivo. El control se logra de diferentes maneras, algunas veces el control de los diversos costos asociados al sistema se obtiene variando la frecuencia con la que se solicitan refacciones para el almacén. Otras veces el control se logra simplemente igualando la demanda de refacciones a la cantidad de artículos necesarios para mantener un nivel de inventario óptimo. En otras ocasiones, el control se logra al obtener una descripción adecuada del comportamiento de la demanda de artículos. Estos modelos tradicionales tienen diferentes grados de eficiencia, la cual intentamos medir mediante la comparación del costo total del sistema, éste criterio ha sido el único que nos permite realizar comparaciones, no obstante, también hemos visto que éste criterio no es necesariamente el más adecuado. Por otra parte, hemos utilizado un algoritmo genético (AG), para resolver el mismo problema. El resultado obtenido por el AG es un vector que representa la cantidad de artículos requeridos para mantener un nivel óptimo de almacén sin que se permita llegar al déficit, y ésa es la respuesta a ***¿cuánto pedir?***

El elemento tiempo, ***¿cuándo pedir?*** comprende períodos constantes de un mes (treinta días) puesto que la función objetivo con la que se programó el AG mantiene períodos de cedulamiento invariables para cada elemento del vector solución. Si ha de emitirse una recomendación a la administración del almacén “x” acerca de que tipo de solución utilizar para la optimización de los recursos del mencionado almacén, la respuesta será optar por un algoritmo genético para obtener la mejor solución.

Las ventajas de los AG´s son considerables:

- El AG puede modificarse para utilizar casi cualquier cantidad de parámetros. Es decir, distintas cantidades de productos en el almacén, en función de la capacidad y eficiencia del equipo computacional utilizado.

- La única limitante al utilizar muchos parámetros es la de mantener tiempos de ejecución computacional relativamente cortos y maximizando la memoria disponible del equipo de computo, por lo que el problema será de optimización computacional
- No será necesario ajustar una distribución de probabilidad a cada uno de los artículos requeridos por el almacén, el AG utiliza por sí mismo métodos estocásticos para asignar un valor de desempeño a cada poblador y para seleccionar, combinar y mutar las características de los cromosomas – datos codificados-
- Puede programarse cualquier función objetivo que sea necesaria. La función objetivo que se proporciona al AG solo está restringida por el tipo de problema a resolver.
- El AG se puede programar para utilizar y devolver parámetros discretos ó continuos sin necesidad de hacer modificaciones para pasar de un tipo de resultado al otro.

Estas son las ventajas principales que poseen los AG´s sobre los métodos tradicionales de inventarios, tal vez se han omitido algunas, pero pensamos que lo más substancial ha sido mencionado. Mediante la presente tesis he comprendido el valor que representa utilizar técnicas alternativas a los métodos tradicionales de inventarios. También he visto que no siempre pueden obtenerse datos suficientes como para llevar a cabo técnicas estadísticas de análisis y que aún si estos datos están disponibles no necesariamente son confiables y requieren esfuerzos considerables en su tratamiento para poder ser útiles. Lo anterior refuerza nuestra creencia de que es necesario abordar el problema del almacén “x” con técnicas de algoritmos genéticos y utilizar algunas variantes dentro de los AG´s para mejorar la solución obtenida.

A manera de comentario, puedo decir que una alternativa de carácter secundario para la solución del problema, será utilizar el modelo probabilístico Order-level que se ajusto a la demanda Poisson. Pienso que puede aprovecharse la situación de hallar una función de probabilidad que se adapte a la demanda de artículos en este almacén

Sin embargo esta decisión implica hacer un análisis de datos para los años subsecuentes a 1998 y 1999. Esta es una tarea pendiente y el realizarla pertenece a una labor dentro de talleres del Organismo.

Hasta aquí damos por terminado el presente trabajo, tema de una siguiente investigación será programar otras funciones objetivo en nuestro algoritmo genético y verificar si aún pueden obtenerse valores que mejoren el funcionamiento de dicho almacén, también se podrían utilizar otros métodos para obtener población inicial u otros tipos de selección, combinación, cruza y mutación. Todo esto será motivo de otras investigaciones tal vez dentro del mismo Organismo de transporte de la Ciudad de México ó en algún otro lugar donde los algoritmos genéticos se puedan adaptar a diversos problemas.

Apéndice A, Tablas de frecuencia.

Las siguientes tablas, son un registro de la frecuencia de fallas ocurridas en el año 1998 y 1999, estas fallas representan la avería de alguna de las refacciones aquí reportadas de manera individual. Puesto que la causa de paro en una grúa puede ser aislada, entonces, conviene utilizar este registro como la demanda máxima de artículos necesarios en un almacén que provee refacciones para grúas. La columna que indica “otros”, se refiere a piezas que no tuvieron un costo significativo, ya sea en el valor monetario de la refacción (cambio de un tornillo) o en gasto de otros recursos, por ejemplo, horas hombre.

Año 1998

1998,Falla por Mes	Gancho	Balatas	Cable Acero	Botonera	Interruptor	Otros	Total Σ
Enero	*2*	*1*	*1*	*1*	*5*	*2*	*12*
Febrero	*1*	*2*	*1*	*3*	*2*	*5*	*14*
Marzo	*1*	*1*	*4*	*1*	*7*	*1*	*15*
Abril	*7*	*0*	*0*	*1*	*2*	*4*	*14*
Mayo	*3*	*0*	*2*	*1*	*6*	*0*	*12*
Junio	*1*	*0*	*0*	*2*	*6*	*4*	*13*
Julio	*0*	*1*	*0*	*1*	*5*	*3*	*10*
Agosto	*0*	*0*	*0*	*0*	*5*	*4*	*9*
Septiembre	*0*	*0*	*2*	*0*	*3*	*5*	*10*
Octubre	*1*	*2*	*4*	*1*	*1*	*7*	*16*
Noviembre	*0*	*2*	*1*	*0*	*2*	*2*	*7*
Diciembre	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*4*	*4*
Total Σ	*16*	*9*	*15*	*11*	*44*	*41*	*136*

De manera análoga presentamos el registro de averías o fallas de las grúas del los talleres del Organismo para el año 1999.

1999, Falla por mes	Gancho	Balatas	Cable Acero	Botonera	Interruptor	Otros	Total Σ
Enero	0	1	3	0	4	5	13
Febrero	0	0	3	0	7	4	14
Marzo	0	2	1	2	3	2	10
Abril	0	1	0	3	3	5	12
Mayo	0	1	0	2	9	1	13
Junio	1	2	0	2	5	6	16
Julio	0	0	1	0	1	0	2
Agosto	1	0	1	0	2	5	9
Septiembre	1	0	1	0	0	8	10
Octubre	0	0	1	1	9	6	17
Noviembre	0	0	1	1	8	1	11
Diciembre	0	0	0	1	13	1	15
Total Σ	3	7	12	12	64	44	142

Apéndice B, Caso Discreto del modelo Order-level probabilístico

En caso de tener una demanda "**x**" y un nivel de inventario "*S*" restringidos a unidades de tipo discreto, 0, u, 2u,... etc. donde "**u**" es un número entero positivo, entonces utilizamos una distribución de probabilidad *P(x)* que describe la demanda de refacciones "**x**"; de esta forma, las integrales de las ecuaciones 1) y 2) de la sección 2.3.6 deberán transformarse en sumas respetando los límites correspondientes, por lo que la ecuación del costo total, en función del nivel de inventario "*S*", será: [6]

$$C(S) = C_i \sum_{x=0}^{S}(S-x)P(x) + C_d \sum_{x=S+u}^{\infty}(x-S)P(x)$$

La ecuación 6) es una igualdad en donde es posible calcular el nivel óptimo de inventario (S_0), siempre y cuándo se cumplan las siguientes condiciones:

$$C(S_0) \le C(S_0+u) \quad \mathbf{y} \quad C(S_0) \le C(S_0-u)$$

Para hallar las condiciones necesarias de nuestro sistema debemos evaluar, primero, la diferencia: *C(S + u)-C(S)* y presentamos las operaciones necesarias para obtener el resultado

Se tiene que:

$$C(S+u) = C_i \sum_{x=0}^{S+u}(S+u-x)P(x) + C_d \sum_{x=S+2u}^{\infty}[x-(S+u)]P(x)$$

Efectuando la diferencia *C(S + u)-C(S)* se obtiene:

$$C(S+u) - C(S) = C_i \sum_{x=0}^{S+u}(S+u-x)P(x) + C_d \sum_{x=S+2u}^{\infty}(x-S-u)P(x) - C_i \sum_{x=0}^{S}(S-x)P(x) - C_d \sum_{x=S+u}^{\infty}(x-S)P(x)$$

Se desarrollan las sumas y eliminamos los términos semejantes:

$$= C_i \sum_{x=0}^{S}(S-x)P(x) + C_i(S-S+u)P(S+u) + C_i \sum_{x=0}^{S+u} uP(x) + C_d \sum_{x=S+2u}^{\infty}(x-S)P(x) + \dots$$

$$\dots + C_d \sum_{x=S+2u}^{\infty}(-u)P(x) - C_i \sum_{x=0}^{S}(S-x)P(x) - C_d(S+u-S)P(S+u) - C_d \sum_{x=S+2u}^{\infty}(x-S)P(x) =$$

$$= -Ci(u)P(S+u) + Ci\sum_{x=o}^{S+u} uP(x) + Cd\sum_{x=S+2u}^{\infty}(-u)P(x) - Cd(u)P(S+u) - \ldots$$

$$\ldots - Ci(u)P(S+u) + Ci\sum_{x=0}^{S} uP(x) + Ci(u)P(S+u) + Cd\sum_{x=S+2u}^{\infty}(-u)P(x) =$$

$$= C_i\sum_{x=0}^{S} uP(x) + Cd(-u)\sum_{x=S+2u}^{\infty} P(x)$$

Sabemos que:

$$\sum_{x=0}^{S+2u} P(x) + \sum_{x=S+2u}^{\infty} P(x) = 1$$

$$C(S{+}u)\text{- }C(S) = C_i\sum_{x=0}^{S} uP(x) + C_d(-u)[1 - \sum_{x=0}^{S+2u} P(x) + Cd(u)P(S+u) - Cd(u)P(S+u)$$

$= C_i\sum_{x=0}^{S} uP(x) - C_d(u) + Cd(u)\sum_{x=0}^{S} P(x) + Cd(u)\sum_{x=0}^{S} P(x) + P(S+u)$ Reordenando términos se tiene:

$$= C_i\sum_{x=0}^{S} uP(x) + uC_d\sum_{x=0}^{S} P(x) - uC_d + uC_d\sum_{x=0}^{S} P(x) + P(S+u)$$

Sabemos que $P(x)$ es una función de distribución de probabilidad, y el término $P(S{+}u) = 0$ dadas las condiciones iniciales del problema, aplicando esto se tiene:

$$C(S+u) - C(S) = u[(C_i + C_d) * \sum_{x=0}^{S} P(x) - C_d] = u[(Ci + Cd)F(S) - Cd]$$

Donde: $F(S) = \sum_{x=0}^{S} P(x)$ es la función acumulativa de distribución de la demanda, de manera que la condición necesaria y suficiente para obtener el nivel de inventario óptimo (S_0) será entonces:

$$F(S_0 - u) \le (\frac{C_d}{C_d + C_i}) \le F(S_0)$$

Apéndice C

Presentamos las operaciones relativas al cálculo del estimador de máxima verosimilitud, Sección (2.3.5)

Cálculo del Estimador de Máxima Verosimilitud

El objetivo será encontrar una función que dependa de los valores observados por n-variables aleatorias $\mathbf{X_1, X_2,...X_n}$, de una función de distribución Poisson, donde se desconoce el valor del parámetro **(l)** dicho de otra forma, el fin será encontrar una función que es en si misma una variable aleatoria para ser utilizada como estimador de n-funciones de distribución Poisson, $\mathbf{P_1, P_2, P_3,...P_n}$ de las cuales se desconoce el parámetro $\mathbf{l_1,\ l_2,\ l_3,...,l_n}$. La función de verosimilitud de n-variables aleatorias $\mathbf{X_1,\ X_2,\ X_3,...,\ X_n}$ es definida como la densidad conjunta de n-variables aleatorias:

$f_{X_1,X_2,\cdots X_n}(x_1,x_2\cdots,x_n;\theta)$, la cual se considera una función del parámetro "q", desconocido. En particular si $\mathbf{X_1, X_2,...,X_n}$ es una muestra aleatoria de la función de densidad ***f(x,q)***, entonces la función de verosimilitud es: $f(x_1;\theta), f(x_2;\theta),\dots f(x_n;\theta)$; la verosimilitud da el valor de una función de densidad, y en el caso discreto que nos interesa estamos hablando de una función de probabilidad

Denotamos a la función de verosimilitud como $L(q\ ; x_1,x_2,x_3,...x_n)$ para indicar que es una función que depende del parámetro ***q*** y de un conjunto de observaciones***.***

La función $L(q\ ;\ x_1,x_2,x_3,...x_n)$ da la verosimilitud de que las variables aleatorias $\mathbf{X_1,X_2, ...,X_n}$ asumen un valor observado particular $(x_1,x_2,x_3,...x_n)$

Sea $L(q)= L(q\ ;\ x_1,x_2,x_3,...x_n)$ la función de verosimilitud para las variables aleatorias $\mathbf{X_1,X_2, ...,X_n}$, si existe una función que dependa de las observaciones $(\boldsymbol{x_1,x_2,x_3,...x_n})$ denotada por $L\ (x_1,x_2,x_3,...x_n)$ y esta es la función que maximiza a $\boldsymbol{L(q)}$, entonces llamamos a ésa función el estimador de máxima verosimilitud del parámetro ***q,*** para la muestra $(x_1,x_2,x_3,...x_n)$ [15]

El estimador de máxima verosimilitud será aquel que satisfaga la condición:

$$\frac{d}{d\theta}L(\theta)=0$$

Sean $L(\theta)$ y $\boldsymbol{Ln}$ $L(\theta)$, funciones, donde $\boldsymbol{Ln}$ **(*)** es la función logaritmo natural, ambas tienen su máximo en el mismo valor de θ y algunas veces es más fácil encontrar el máximo de la función de verosimilitud en la función logaritmo natural de $\boldsymbol{Ln}$ $L(\theta)$ [15]

A partir de los conceptos arriba mencionados, obtendremos el estimador de máxima verosimilitud para el parámetro **(λ)** de una función de probabilidad Poisson, que pueda describir el comportamiento de la demanda de refacciones en el almacén “x”.

Sea $f(x;\ \lambda) = P[\ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{k}] = \dfrac{e^{-\lambda} * \lambda^{K}}{k!}$; para ***k* = 0,1,2,....,** la función de probabilidad de una variable aleatoria que se distribuye Poisson(x; λ) sí se tienen n-variables aleatorias $\boldsymbol{X_1, X_2, \ldots, X_n}$ distribuidas Poisson**(x_i ; λ)**, para ***i* = 1,2,...,*n*;** entonces:

$f_{X_1, X_2, \cdots X_n}(x_1, x_2 \cdots, x_n; \lambda) = f(x_1;\lambda), f(x_2;\lambda), \ldots f(x_n;\lambda)$ Por independencia de las variables aleatorias y por definición de función de verosimilitud.

Desarrollando la ecuación se tiene:

$f_{X_1, X_2, \cdots X_n}(x_1, x_2 \cdots, x_n; \lambda) = (\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x_1}}{x_1!})(\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x_2}}{x_2!})\ldots\ldots(\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x_n}}{x_n!})$, sea $L(\lambda)$ la función de verosimilitud, entonces:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda) = \frac{e^{-n\lambda}\prod_{i=1}^{n}\lambda^{x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$$

Aplicando la función logaritmo natural [$\boldsymbol{Ln}$ *(*)*] a la ecuación de verosimilitud $L(\lambda)$ se obtiene:

$\boldsymbol{Ln}\ L(\lambda) = \boldsymbol{Ln}\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\lambda) = Ln(\dfrac{e^{-n\lambda} * \prod_{i=1}^{n}\lambda^{x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!})$ Desarrollando esta ecuación:

$$\boldsymbol{Ln}\ L(\lambda) = Ln(e^{-n\lambda}) + Ln(\lambda^{\sum_{i=1}^{n}xi}) - Ln\sum_{i=1}^{n}x_i! = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n}x_i * Ln(\lambda) - Ln\sum_{i=1}^{n}x_i!$$

Para obtener el máximo de ***Ln*** *L(***l***)* derivamos parcialmente con respecto al parámetro **l**, e igualamos a cero esta derivada.

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} Ln(\lambda) = -n + \frac{1}{\lambda} * \sum_{i=1}^{n} x_i$$, luego, $\frac{\partial}{\partial\lambda} Ln(\lambda) = 0$ si y solo si

$-n + \frac{1}{\lambda} * \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Por lo tanto $n = \frac{1}{\lambda} * \sum_{i=1}^{n} x_i$, despejando al parámetro **(l)**

$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} x_i$ = $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, por lo tanto el estimador de máxima verosimilitud de **(l)** es la media muestral: $\bar{x} = \hat{\lambda}$ =ê (**l**)

Bibliografía:

[1] - “Métodos y Modelos de Investigación de operaciones”, Volúmenes I y II, Juan Prawda Wintenberg, LIMUSA-NORIEGA, 1987.

[2] . - “Algoritmos Genéticos Prácticos”, Sue Ellen Haupt & Randy L. Haupt; Editorial John Wiley & Sons, Inc. 1998.

[3].-Antonio Nieves, Federico C. Domínguez; “Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería”; CECSA. 2000.

[4].-“Análisis Numérico”; Richard L. Burden, J. Douglas Faires; Grupo Editorial Ibero América; 1985.

[5]. -“La Gestión de Inventarios con Algoritmos Genéticos”, E. López Mendaña y MA. Rodríguez; Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial Nº 5, Primavera 1998, (Paper)

[6]. – Eliézer Naddor, “Sistemas de Inventarios”; John Wiley & Sons; 1966.

[7]. – Mari-Carmen González Videgaray, “Modelos y Simulación”; UNAM 1998.

[8]. - Hadley & Within, “Inventories”

[9]. - Hamdy Taha, “Investigación de Operaciones”, Segunda Edición; Alfa-Omega 1991

[10].- Juan Prawda, volúmenes 1 y 2; editorial Limusa-Wiley

[11].-Investigación de Operaciones, Un enfoque fundamental; James E Shamblin; G. T. Stevens Jr; Editorial Mc.Graw- Hill, 1999.

[12].-Marsden & Tromba, “Cálculo Vectorial”; 1987

[13].-Emmanuel Parzen, “Teoría Moderna de la Probabilidad”, LIMUSA, México 1976

[14].-Gouri Bathachiryya; “Métodos y Conceptos Estadísticos”, John Wiley & Sons 1977

[15].- Alexander M. Mood & Richard Graybill, “Introducción a la Teoría de Estadística”, Mc. Graw Hill Co. 1974

[16].-Harold Freeman; “Introducción a la Inferencia Estadística”, Editorial Trillas.1998

Bibliografía y Referencias:

[17]. - Grant V.,”The Evolutionary Process”, New York: Columbia University Press (1985)

[18]. - J.H. Holland. “Adaptation in Natural and Artificial Systems”; Ann Arbor, MIT Press, 1992.

[19]. - [López-González et al, 1995] E. López-González, C. Mendaña-Cuervo y M. A. Rodríguez-Fernández, “A Genetic Algorithms for Inventary Análisis, A Spread –Sheet Aproach”. International Conference of Association for the Advancement of Modelling and Simulation Techniques in Enterprises IV, 1995, (Czech Republic).

[20].- “Genetic Algorithm, TOOLBOX®, for use with MATHLAB ®, Andrew Chipperfield, Peter Fleming, Automatic Control and Systems Engineering; University of Sheffield, 1997.

[21].-“Practical Genetic Algorithms”; Haupt & Haupt; John Wiley & Sons, Inc.1998.

[22].- “Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning”; Addison-Wesley 1989.

[23].- “Cambio de Escala y Dinámica de Grados de Libertad Efectivos en Sistemas Genéticos Artificiales; Tesis, Andrés Aguilar Contreras; UNAM 2003.

[24]. - “Genetic Algorithm Viewer: Demonstration of a Genetic Algorithm”, Jean-Philippe Rennard, Ph.D. May 2000.

[25] “Algoritmo Genético para obtener el Mínimo Global para LJ 98 “; Vargas García Edith Mireya, Tesis para Obtener el Grado de Maestra en Ciencias; UNAM Junio 2004