



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO  
EN INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

Caracterización de la rotura en modelo elíptico  
disipativo de transformación del oleaje

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Maestro en Ingeniería Civil  
(Hidráulica)

Presenta

NOE FABRICIO TOLEDANO VEGA

DIRECTOR DE TESIS

DR. RODOLFO SILVA CASARÍN



MÉXICO, DF

JULIO 2006



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A esas personas que no voy a nombrar  
pero que siempre han estado ahí  
en las diferentes etapas  
de mi vida.

Noe Toledano agradece el apoyo incondicional de la familia Toledano Vega, y a ti que no llevas esos apellidos.

Gracias a la gente que me transmitió un poco de sus muchos conocimientos en el grupo de Ingeniería de Costas y Puertos del Instituto de Ingeniería, especialmente a Quiñones, Erick y el buen Edgar.

A la gente que permitió mi acercamiento al Instituto de Ingeniería, maestro Franco y Rodolfo, gracias, quienes además me soportaron con infinita paciencia.

A CONACYT, gracias por el apoyo económico brindado.

## INDICE

INDICE.....	I
LISTA DE FIGURAS .....	III
LISTA DE TABLAS .....	VII
LISTA DE SÍMBOLOS .....	IX
INTRODUCCIÓN	1
Objetivos	3
Metodología	3
Organización del trabajo	4
1. PROPAGACIÓN DEL OLEAJE	9
1.1. ANTECEDENTES	9
1.2. ECUACIONES DE GOBIERNO Y CONDICIONES DE FRONTERA	12
1.3. TEORÍAS PARA FONDO HORIZONTAL	13
1.4. TEORÍAS PARA FONDO VARIABLE	15
2. ECUACIÓN DE LA PENDIENTE SUAVE	25
2.1. ANTECEDENTES	25
2.2. DESARROLLO DE LA ECUACIÓN DE LA PENDIENTE SUAVE	26
2.3. CONDICIONES DE FRONTERA	37
2.4. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA	40
3. DISIPACIÓN DE ENERGÍA EN LA ROTURA DEL OLEAJE	45
3.1. TIPOS DE ROTURA EN EL OELAJE	45
3.2. CRITERIOS DE ROTURA	48
3.3. MODELOS DE DISIPACIÓN DE ENERGÍA	51
3.4. MODELO BASADO EN EL CRITERIO DE ALTURA DE OLA ESTABLE	53
4. TRABAJOS EN LABORATORIO	61
4.1. CANAL DE OLAS	61
4.2. EQUIPO DE MEDICIÓN	63
4.3. DESARROLLO DE EXPERIMENTOS	65
5. RESULTADOS Y VALIDACIÓN	69
6. DISCUSIÓN	85
CONCLUSIONES	93

## II

REFERENCIAS

97

ANEXO 1. TEORIA LINEAL

105

## LISTA DE FIGURAS

Fig. 1.1. Clasificación de las ondas referidas a la frecuencia – energía.	10
Fig 1.2 . Clasificación de modelos de propagación de oleaje en 1D, 2D, y 3D.	11
Fig 1.3. Comparación de la superficie libre entre Teoría Lineal y Stokes 2º Orden	14
Fig 1.4. Teoría cnoidal.	14
Fig 1.5. Onda solitaria.	15
Fig. 1.6. Modelos basados en la ecuación de la pendiente suave.	17
Fig 1.7. Ejemplo de propagación con el programa OLUCA.	18
Fig 1.8. Corrientes generadas por marea obtenidas con el Módulo de ecuaciones de aguas someras del Mike 21	20
Fig 1.9. Ejemplo de propagación con el programa SimWav.	21
Fig 2.1. Dominio de estudio.	27
Fig 3.1. Tipo de rotura del oleaje (SPM, 1984)	47
Fig 3.2. Variables de interés del modelo de disipación.	54
Fig. 4.1. Canal de oleaje.	61
Fig. 4.2. Rampa empleada para simular la playa.	62
Fig. 4.3. Simulación de la playa con fondo impermeable y del medio poroso.	62
Fig. 4.4. Turbulencia en zona de rotura.	63
Fig. 4.5. Sensores de nivel.	64
Fig. 4.6. Posición de sensores para el talud 1:3.	64
Fig. 4.7. Sensores de presión.	64
Fig. 4.8. Zona de rotura.	66

---

Fig. 5.1. Límites de altura de ola que se emplean en la solución analítica del modelo de disipación.	70
Fig. 5.2. Solución analítica del modelo de disipación.	71
Fig. 5.3. Comparación entre alturas de ola calculadas con el modelo analítico y los valores obtenidos en laboratorio. La línea continua representa la estimación empleando datos de laboratorio en el modelo de disipación, la aproximación con valores en el modelo de disipación de acuerdo a Dally et al (1985) con línea punteada, y los datos medidos en laboratorio representados con los puntos. El oleaje incide en la playa de izquierda a derecha.	72
Fig. 5.4. Resultados obtenidos para los límites del modelo analítico en los diversos escenarios reproducidos con la playa de talud 1/3.	73
Fig. 5.5. Comparación del modelo analítico de disipación con los resultados obtenidos en laboratorio.	74
Fig. 5.6. Comparación de alturas de ola obtenidas de forma numérica y experimental, para el caso de fondo impermeable.	75
Fig. 5.7. Comparación de resultados obtenidos de forma numérica y experimental, para el caso de fondo no permeable con espesor de 0.0508m	76
Fig. 5.8. Comparación de resultados obtenidos de forma numérica y experimental, para el caso de fondo no permeable con espesor de 0.1524 m.	77
Fig. 5.9. Resultados obtenidos para los diversos escenarios reproducidos con la playa de talud 1/5.	78
Fig. 5.10 Comparación del modelo analítico de disipación con los resultados obtenidos en laboratorio. Talud 1:5.	79
Fig. 5.11 Comparación de resultados obtenidos de forma numérica y experimental, para el caso de fondo impermeable con talud 1/5.	80
Fig. 5.12. Comparación de resultados obtenidos de forma numérica y experimental, para el caso de fondo no permeable con espesor de 0.0508m. Talud 1:5	81
Fig. 6.1. Aproximación realizada con $K$ y $\Gamma$ de acuerdo a Dally et al (1985) en modelo de disipación. Talud 1:3 con 0.05cm de material poroso en el fondo.	85
Fig. 6.2. Aproximación realizada con $K$ y $\Gamma$ después de calibrar el modelo de disipación en laboratorio. Talud 1:3 con 0.05cm de material poroso en el fondo.	85



---

Fig. 6.3. Comparación de alturas de ola de laboratorio con los resultados calculados con el modelo de propagación de oleaje usando los valores de  $K$  obtenidos en laboratorio. Talud 1:5 con 0.05cm de material poroso en el fondo. 86

Fig. 6.4. Comparación de alturas de ola de laboratorio con los resultados calculados con el modelo de propagación de oleaje usando los valores de acuerdo a Dally et al (1985). Talud 1:5 con 0.05cm de material poroso en el fondo. 86

Fig. 6.5. Comparación de resultados obtenidos de forma numérica y experimental, para el caso de fondo no permeable con espesor de 0.1524m y talud 1:5. 87

Fig. 6.6. Estimaciones de altura de ola aplicando el criterio de rotura según McKowan (1891). 87

Fig. 6.7. Estimaciones de altura de ola aplicando el criterio de rotura según Watanabe, Hara y Horikawa (1983). 87

Fig. 6.8. Estimaciones de altura de ola aplicando el criterio de rotura según Weggel (1972). 87

Fig. 6.9. Comparación de alturas de ola calculadas con mediciones de Tomé (1977). 88



## **LISTA DE TABLAS**

Tabla 3.1 Rango de valores del número de Iribarren para los diferentes tipos de rotura	46
Tabla 4.1. Resumen de experimentos	65
Tabla 5.1. Valores encontrados después de ensayos de laboratorio con talud 1:3	74
Tabla 5.2. Valores encontrados después de ensayos de laboratorio con talud 1:5	79



## LISTA DE SÍMBOLOS

$K$	coeficiente de decaimiento
$h$	profundidad del agua
$h_b$	profundidad total
$h(x,y,z)$	representación del fondo variable
$a$	espesor del medio poroso
$div$	divergencia
$rot$	rotacional
$grad$	gradiente
$E$	energía de la onda por unidad de superficie
$E_c$	energía cinética
$E_p$	energía potencial
$f_B$	función de disipación por fricción de fondo
$f_r$	función de disipación por rotura
$f_w$	coeficiente de fricción
$F$	vector de fuerzas
$F(x,y,z)$	representación de una superficie cualquiera
$F_x, F_y, F_z$	componentes del vector de fuerzas
$g$	aceleración debida a la fuerza de gravedad
$H$	altura de ola
$H_0$	altura de ola en aguas profundas
$H_i$	altura de ola incidente
$H_s$	altura de ola estable
$H_B$	altura de ola de rotura
$h_b$	profundidad de rotura
$a$	amplitud de ola
$A_0$	amplitud incidente
$C$	celeridad
$C_g$	celeridad de grupo
$i$	unidad compleja
$k$	número de onda
$L$	longitud de onda
$L_0$	longitud de onda en aguas profundas
$M(z)$	función de profundidad
$P(z)$	función de profundidad
$s$	coeficiente de inercia
$\varepsilon$	porosidad
$f$	coeficiente de fricción linearizado
$m$	pendiente
$n$	vector unitario normal a una superficie
$p$	presión
$R$	coeficiente de reflexión
$t$	variable tiempo
$T$	periodo

$u$	componente del vector velocidad
$v$	componente del vector velocidad
$w$	componente del vector velocidad
$I_{R0}$	parámetro Irribarren en aguas profundas
$I_R$	parámetro Irribarren
$V$	vector velocidad
$x$	coordenada horizontal
$y$	coordenada horizontal
$z$	coordenada vertical
$\mathbf{x}(x,y)$	vector horizontal
$X$	eje coordenado
$Y$	eje coordenado
$Z$	eje coordenado
$\overline{X}$	vector de fuerzas
$\Psi$	potencial de velocidades
$\beta$	ángulo entre la dirección del oleaje y la normal a la frontera
$\delta(x)$	tasa de disipación de energía por unidad de superficie
$\phi$	potencial de velocidades plano
$\Phi$	potencial de velocidades
$\Gamma$	coeficiente de altura de ola estable
$\eta(x,y,z)$	representación del desplazamiento de la superficie libre
$\varphi$	amplitud compleja
$\mu$	viscosidad dinámica del agua
$\theta$	ángulo de incidencia del oleaje
$\rho$	densidad del fluido
$\sigma$	frecuencia angular
$\tau$	esfuerzo cortante
$\gamma$	radio de rotura
$\omega$	frecuencia angular

## INTRODUCCIÓN

Las costas del mundo juegan un papel importante en la sociedad ya que representan una gran fuente de recursos, razón por la cual se han desarrollado diversos esfuerzos buscando estimar el comportamiento del oleaje cuando el entorno sufre alteraciones de origen natural o de tipo antropomórfico.

El oleaje generado por el viento en mar abierto está formado por componentes que abarcan un amplio rango de frecuencias. Las componentes con más altas frecuencias se propagan con una menor celeridad que aquellas correspondientes a las bajas frecuencias. A medida que éstas se desplazan a lo largo de la plataforma continental hacia la costa, los componentes de onda larga lideran el grupo de ondas, viajando a continuación las ondas de corto período. En la zona de generación del oleaje el fondo no afecta el comportamiento del oleaje, pero a partir de que las ondas comienzan a propagarse en aguas más someras, éste empieza a refractarse por efecto de la configuración del fondo o de las corrientes y parte de la energía es transformada. A medida que la propagación continúa en dirección hacia la costa, las ondas pierden parte de su energía por efecto de la fricción en el fondo y otra parte eventualmente es disipada por la interacción que el oleaje tiene con medios permeables. A pesar de ello, la amplitud de la onda aumenta y la longitud de onda se va reduciendo, dando lugar a un vuelco de la cresta de la onda conocido como rotura.

Cuando la ola rompe se convierte en uno de los principales mecanismos generadores de corrientes y, en consecuencia, de transporte de sedimentos, debido a la transformación de energía que se presenta en la zona. Por ello la rotura puede ser un factor limitante al determinar la altura de ola en estudios de estructuras naturales o artificiales, conformados por elementos que físicamente en su conjunto constituyen un medio permeable. Este es otro aspecto de interés ya que, antes de la rotura del oleaje, la disipación debida a la fricción en el fondo y la fricción inducida dentro de medios porosos de estructuras como arrecifes o rompeolas exentos o sumergidos son los procesos más significativos de atenuación energética.

En consecuencia, la correcta caracterización de la transformación del oleaje es fundamental para muchos aspectos, siendo la ingeniería civil especializada en costas y puertos una de las profesiones que se ha enfrentado al problema de la predicción del régimen del oleaje, ya sea desarrollando infraestructura o protegiendo la ya existente. Es común encontrarse con estudios en los que generalmente no existen registros o mediciones de las variables de interés en los sitios de estudio, por lo que estas deben inferirse a partir de las condiciones de un sitio lejano en el que sí las haya o puedan ser estimadas, inclusive en sitios donde sí existan mediciones éstas son puntuales, y es necesario distribuir las geográficamente en el área de estudio. La elevación de la superficie libre del agua  $\eta$ , el campo de presiones  $p$ , y el campo de velocidades  $\vec{u}=(u,v,w)$  son las variables de interés en la ingeniería.

Por ello se han desarrollado modelos numéricos para estimar la transformación del oleaje ante condiciones de interés ingenieril, siendo principalmente escenarios con cambios

repentinos en la configuración topográfica de la región de estudio, o bien, buscando la representación de los efectos del medio poroso.

Dentro de la literatura se pueden encontrar modelos de propagación que asumen como válida la suposición de que el fondo varía lentamente, derivando soluciones de tipo analítico para modelar la transformación del oleaje al propagarse sobre un fondo permeable o bien para realizar estudios sobre la cinemática y dinámica de la interacción del oleaje con rompeolas permeables como se muestra en el capítulo de propagación del oleaje de este trabajo. La desventaja de dichas soluciones es que desprecian en su desarrollo los términos no lineales y tienen el inconveniente de ser válidas sólo para cuando la variación del fondo es menor a 1:3, lo cual es una limitación importante ya que normalmente los diques sumergidos se construyen con taludes que van de 1:3 a 1:1.5.

Además, existen diversos modelos para reproducir la disipación de energía, proceso que físicamente origina que el oleaje sufra los procesos de difracción o atenuación. En las últimas décadas se han desarrollado diferentes esfuerzos por desarrollar modelos que describan la transformación del oleaje en la zona de “*surf*”, basándose en mediciones en campo y trabajo de laboratorio, sin que hasta el momento alguno, sea lo suficientemente claro debido a la turbulencia inducida por la rotura asociada a la rotura del oleaje. Sin embargo, los resultados obtenidos al emplear cada uno de los diferentes modelos de disipación, o incluso el mismo con distintos parámetros pueden ser muy distintos, dando lugar a predicciones muy diversas de la altura de ola en la zona de rotura. La consecuencia inmediata es que las corrientes, el transporte de sedimentos y la evolución morfodinámica determinados a continuación, pueden diferir sensiblemente y dar lugar a estimaciones erróneas. Más aún, todos los modelos se han desarrollado bajo la hipótesis de ondas propagándose sobre fondo impermeable, además de ser con taludes con pendientes suaves, de ahí el interés de caracterizar mejor el comportamiento de este modelo en condiciones de utilidad práctica para la ingeniería.

En este estudio se emplea un modelo numérico para conocer la evolución del oleaje que considera los efectos de un fondo permeable basado en la ecuación modificada de la pendiente suave de acuerdo a Silva et al (2005), que incorporan los términos no lineales y demuestran que dicha solución es válida inclusive para taludes muy grandes, además de que el modelo incluye un factor de disipación de energía asociada a la rotura del oleaje según Dally et al (1985).

Gran parte de los modelos hasta ahora comentados fueron validados con modelación física, y como las expresiones comentadas en el párrafo anterior han sido estudiadas en condiciones en las que el fondo cuenta con pendientes menores que 1:8, surge el interés en este trabajo por observar el comportamiento de estos modelos en condiciones con fondos de pendientes 1:3 y 1:5, buscando calibrar con experimentos de laboratorio la expresión de disipación de energía debido a la rotura de oleaje para así validar los resultados ofrecidos por el modelo de propagación.

La modelación física de los fenómenos que se presentan en la naturaleza ha sido una herramienta común de la ingeniería en la búsqueda del complemento al trabajo desarrollado con el estudio de expresiones analíticas empleadas en las metodologías de diseño. La razón



---

---

principal de este tipo de trabajos es la validación de estas técnicas usadas en la práctica profesional, basándose en mediciones de laboratorio, en las que es posible ensayar diversos escenarios teniendo la ventaja de analizar determinados fenómenos ante condiciones plenamente controladas.

Con la adecuada interpretación de lo observado en estos estudios los ingenieros se encuentran en la posibilidad de proponer soluciones confiables y económicas a los problemas a los que se enfrenta ofreciendo estimaciones aceptables de los fenómenos que intenta reproducir.

## **OBJETIVOS**

El objetivo principal de este trabajo consiste en la calibración de un modelo de disipación de energía debido a la rotura del oleaje el cual es empleado en un modelo numérico de propagación de oleaje. Para ello se plantean los siguientes objetivos particulares:

- Desarrollo de experimentos en canal de olas generando oleaje regular sobre una playa con pendiente de fondo constante
- Calibración de un modelo de disipación con base a datos obtenidos en laboratorio
- Comparación de resultados obtenidos de forma numérica con los registros experimentales
- Validación de los modelos empleados para las condiciones en las que se desarrollaron los ensayos

## **METODOLOGIA**

Para cubrir los objetivos planteados en la sección anterior se retoma un modelo de disipación de energía que plantea el flujo de energía entre la sección en la que se presenta la rotura y aquella zona en la que se alcanza la altura de ola estable. Para entender el principio en el que se basa esta filosofía es importante mencionar que después de que una ola rompe, continúa viajando en dirección hacia la costa y se regenera hasta alcanzar la altura de ola estable. Este modelo que estima la transformación de la energía en la zona de rotura es incluido en un modelo de propagación de oleaje basado en la ecuación de la pendiente suave.

Para validar la aplicación de los modelos comentados en el párrafo anterior, se desarrolló una serie de experimentos en el canal de oleaje del laboratorio del Grupo de Costas y Puertos del Instituto de Ingeniería, UNAM. En estos ensayos se genera oleaje regular que se propaga sobre una playa de pendiente constante, simulando diversas condiciones de

oleaje con diferentes pendientes en la playa, además de modelar playas de fondo permeable así como playas con fondo impermeable. La profundidad variará de acuerdo al talud empleado y a las limitaciones del canal. La adquisición de datos se realizará con sensores de nivel colocados a lo largo de la playa, buscando cubrir la zona de interés, midiendo la altura de ola en rotura inminente y en secciones posteriores a la rotura.

## **ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO**

Con la finalidad de exponer el presente trabajo, los temas de este estudio se repartieron de la siguiente forma:

En el capítulo uno, se presenta una breve descripción de los modelos que han sido desarrollados y que son empleados para calcular el campo de oleaje en zonas de interés, clasificándolos en base a sus aplicaciones, comentando sus limitaciones y las hipótesis bajo las que son planteados.

El modelo de propagación de este trabajo se basa en la ecuación de la pendiente suave, demostrando en el segundo capítulo de esta tesis el desarrollo matemático con el que se obtiene dicha expresión presentando las suposiciones que se realizan. La forma en la que se plantean las condiciones de frontera y la discretización de las ecuaciones basado en el método de diferencias finitas se encuentran al final de este mismo capítulo.

Los modelos propuestos por diversos autores con los que se busca describir el radio de rotura, así como aquellas expresiones que permiten hacer una estimación de la transformación de la energía del oleaje en la zona de rotura, son descritos en el capítulo tres. Aquí se resalta el modelo de altura de ola estable que se retoma como hipótesis en los trabajos de esta tesis.

Los trabajos de laboratorio realizados para la calibración del modelo son desarrollados en una canal de oleaje, y se resumen en el capítulo cuatro, en el que también se describe la configuración del modelo físico en el que se desarrollan los experimentos así como una breve explicación del equipo de medición y su funcionamiento.

En el capítulo cinco se presenta el comportamiento del modelo de disipación para los experimentos desarrollados, objetivo principal de este trabajo. Una vez calibrado el modelo de disipación, este se incluye en el modelo de propagación de oleaje buscando validar lo observado en laboratorio con una comparación de las aproximaciones estimadas de forma numérica con los resultados experimentales.

Finalmente, con la interpretación matemática desarrollada en los primeros capítulos junto con la modelación física del fenómeno de rotura del oleaje en laboratorio, se presentan las conclusiones que se obtienen de este trabajo

# 1. PROPAGACIÓN DEL OLEAJE

## 1.1. ANTECEDENTES

En la ingeniería de costas y puertos se desarrollan estudios, tales como el diseño de una estructura marítima o el diseño para la regeneración de una playa, requiriendo del conocimiento de las condiciones hidrodinámicas en el área de interés. En general, las condiciones de oleaje son conocidas en mar abierto por lo cual es necesario transferir la información disponible, alturas de ola, periodos y direcciones, a la zona de estudio a través del modelado numérico. Una vez conocido el campo de oleaje en la región de interés es posible alimentar otros modelos con esta información para estimar, entre otros fenómenos, el transporte de sedimentos o la circulación en la zona de rompientes.

El oleaje en su propagación se ve afectado por innumerables procesos físicos, pero la refracción, difracción, someramiento, reflexión y rotura pueden ser considerados dentro de los más importantes para fines ingenieriles. El oleaje en el mar puede representarse como una suma lineal de componentes sinusoidales, lo cual implica la existencia de interacciones entre cada una de dichas componentes. Cuando se desea conocer los efectos directos de la hidrodinámica del oleaje en alguna playa o estructura es importante representar fenómenos tales como la rotura y el ascenso máximo en un talud de la playa o estructura en estudio.

Por lo anterior, el esfuerzo constante de los investigadores se concentra principalmente en dos aspectos: el desarrollo de herramientas matemáticas que permitan representar cualitativa y cuantitativamente los fenómenos de propagación del oleaje; y la modelación física, ambos con sus respectivas limitaciones pero al final permitiendo que los estudios de ingeniería puedan realizarse con mayor certidumbre. En sus orígenes, estos modelos se basaron en métodos semi-gráficos, pero actualmente, gracias al acelerado desarrollo de las herramientas de cálculo, se avanza rápidamente en el grado de precisión cuantitativa de las predicciones realizadas.

Los factores naturales que intervienen tanto en la generación como en la restauración de las ondas son diversos y de ellos dependen características tales como la frecuencia y la cantidad de energía que transporten como se puede observar en la Fig. 1.1. Además las propiedades del medio en que se propaga el oleaje pueden variar significativamente y con ello los procesos físicos que dominan su comportamiento, presentándose una interacción permanente.

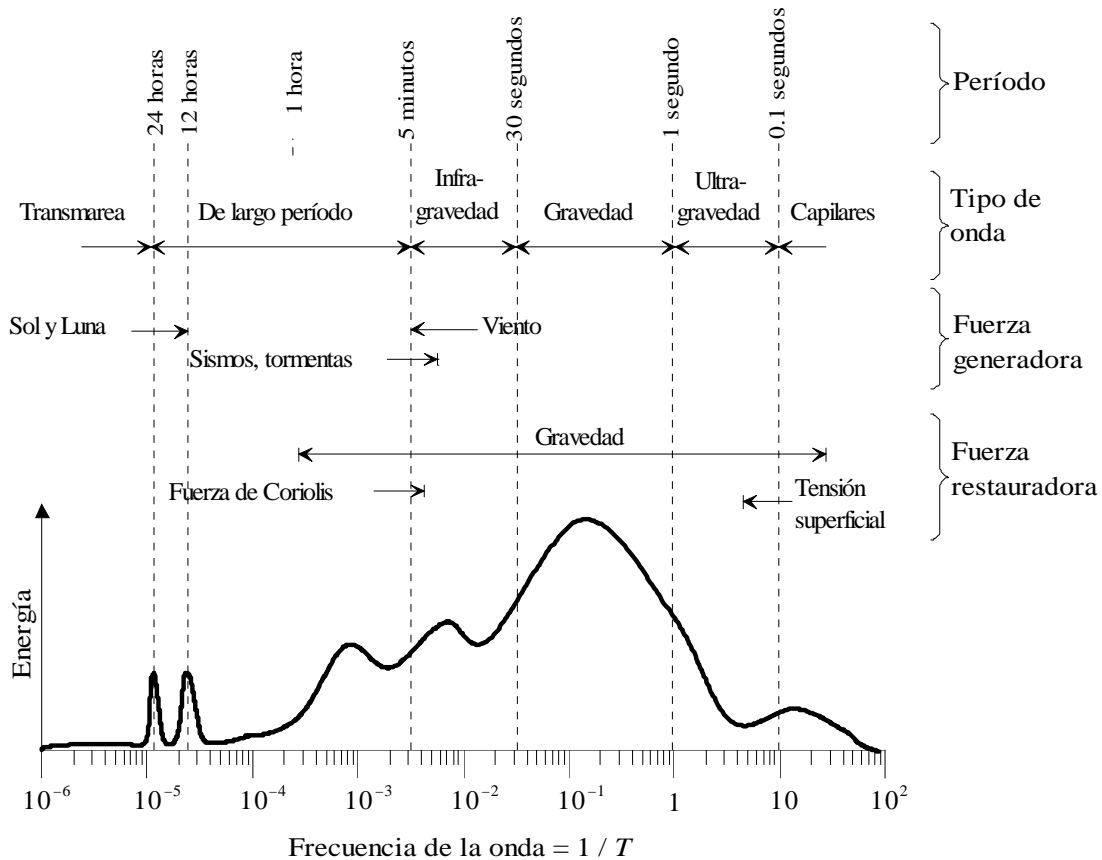
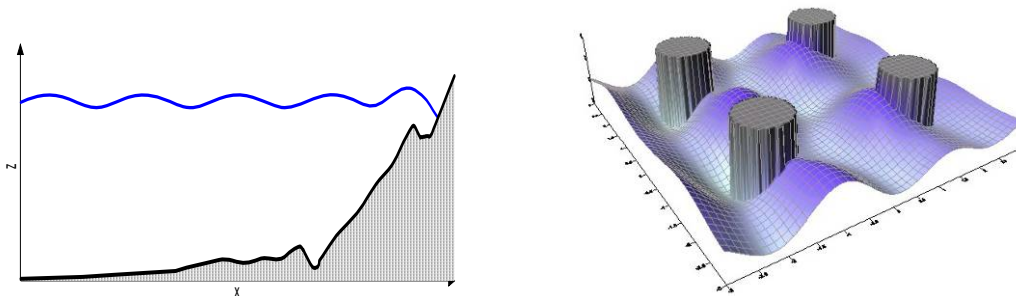


Fig. 1.1. Clasificación de las ondas referidas a la frecuencia – energía.

El resolver de forma íntegra las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos que en principio contemplan todos los fenómenos que se presentan en la naturaleza, resulta propiamente inabordable hoy en día, a pesar de los desarrollos tecnológicos que han sido muy importantes hasta la fecha. Desde la época de Newton, se han venido realizando un sinnúmero de esfuerzos por desarrollar modelos matemáticos y numéricos que representen los fenómenos físicos más relevantes que se presentan en la naturaleza y es tarea del ingeniero seleccionar aquel o aquellos que mejor representan los escenarios que pretende estudiar.

Existen varias formulaciones para estudiar la hidrodinámica y propagación del oleaje, cada una desarrollada bajo distintos conjuntos de necesidades y herramientas de cálculo disponibles, de ahí que sus limitantes se deban tanto a la cantidad de fenómenos descritos, como a los recursos y conocimientos necesarios para implementarlas. Una forma de clasificar a las distintas formulaciones existentes para estudiar la propagación del oleaje, es separar a los modelos en los que resuelven la fase y los que no lo hacen. Los modelos que resuelven la fase son aquellos que obtienen la amplitud máxima del oleaje separando a la variable tiempo, es decir, dan una solución armónica, mientras que los modelos que no resuelven la fase son los que describen el movimiento de la superficie libre del agua como un fenómeno transitorio; es decir, son los que normalmente empiezan con la suposición del agua en reposo y siguen paso a paso en el tiempo la variación del nivel del agua a partir de una señal de entrada en al menos una frontera.

En la física, la propagación del oleaje es estrictamente un fenómeno tridimensional. Los modelos que consideran las tres variables espaciales son conocidos como modelos 3D, y dentro de la ingeniería este tipo de modelos son aplicados generalmente en estudios de regiones puntuales, es decir, dominios con áreas de estudio pequeñas debido a la capacidad de computo con las que se cuenta actualmente y que es el limitante principal en este tipo de trabajos. Es por ello que en términos matemáticos se puede decir que esta física puede ser separada en una propagación espacial y una a través del espacio, suponiendo que, la propagación de las olas ocurre sobre la superficie dirigiéndose horizontalmente ya que en la dirección vertical no hay propagación, se puede decir que se presenta un proceso a través del espacio dando paso a un tipo de modelos llamados 2D, dejando como propagación en el espacio los modelos 3D ya comentados. En aguas poco profundas la interacción entre los fenómenos horizontales y verticales suele ser significativamente no lineal, por lo que un modelo 2D es menos estricto que uno 3D. En ocasiones los modelos 2D por el hecho de arrojar resultados en la vertical son mal llamados 3D. También existen los modelos 1D, estos describen la propagación del oleaje considerando que los frentes de onda son rectas paralelas.



**Fig 1.2 . Clasificación de modelos de propagación de oleaje en 1D, 2D, y 3D.**

La profundidad es un parámetro que ofrece una manera de clasificar al medio en que se propaga el oleaje: aguas profundas, aguas de transición o aguas someras. Aguas profundas es el medio donde el oleaje no se ve influenciado por la batimetría, es decir, que el rango en que se desarrolla el movimiento armónico de las partículas no se modifica por efectos del fondo, y sucede cuando la altura de ola y la longitud de onda son muy pequeñas en comparación con la profundidad. Se ha encontrado que cuando  $kh > \pi$  se trata de aguas profundas, donde  $kh$  es la profundidad relativa,  $k = 2\pi/L$  es el número de onda,  $L$  es la longitud de onda y  $h$  es la profundidad. Se entiende por aguas someras aquellas profundidades en que el comportamiento del oleaje está regido en forma determinante por la forma del fondo, es decir, cuando la interacción entre el oleaje y el fondo es intensa, y suele delimitarse por  $kh < \pi/10$ .

---

## 1.2. ECUACIONES DE GOBIERNO Y CONDICIONES DE FRONTERA

La modelación del oleaje así como gran parte de los problemas que se presentan en la mecánica de fluidos, se resuelven a través de una ecuación diferencial derivada a partir de eventos físicos que sucedan dentro de un dominio de análisis. Como dicha ecuación rige el comportamiento del agua dentro del dominio en la que se define, es llamada ecuación de gobierno, y para resolverse deben conocerse las características del flujo en los límites del dominio, también llamadas condiciones de frontera. La solución de una ecuación de gobierno puede ser analítica, cuando los conceptos y artificios matemáticos lo permitan, o numérica, utilizando esquemas de diferencias finitas, elemento finito o volumen finito, entre otros, cuando la solución matemática así lo requiera.

La ecuación de la continuidad o de conservación de masa, y la de conservación del movimiento o impulso y cantidad de movimiento derivada de la segunda ley de Newton son las dos ecuaciones básicas que rigen el movimiento de los fluidos en todos los problemas de hidráulica; la segunda tiene diversas formas de expresarse, sin embargo la más general es a través de las llamadas ecuaciones de Navier-Stokes, que a pesar de estar basadas para un flujo laminar y de que la mayoría de los flujos a superficie libre de interés para la ingeniería son turbulentos, puede hacerse válida en flujo turbulento haciendo uso del concepto de viscosidad turbulenta. Las ecuaciones de Navier-Stokes incluyen satisfactoriamente la mayoría de los factores que intervienen en el comportamiento del agua; sin embargo, hasta el momento no existe alguna forma práctica de solucionarlas completamente, por lo que debe hacerse uso de simplificaciones derivadas de asumir diversas hipótesis. La diferencia fundamental entre cada uno de los modelos de oleaje radica principalmente en las hipótesis utilizadas para simplificar las ecuaciones de Navier-Stokes, es decir, en la forma en que se obtuvieron tanto las ecuaciones de gobierno como las condiciones de frontera.

El movimiento de un fluido es descrito por las tres componentes de la velocidad, tres coordenadas espaciales y dos cantidades termodinámicas, la densidad y la presión del fluido. En la mayoría de los modelos de propagación de oleaje se utiliza la teoría del flujo potencial, en la que se asume que el flujo es irrotacional y que existe una función escalar llamada potencial de velocidades,  $\Phi(x,y,z,t)$ , cuyo gradiente representa al campo de velocidades  $\bar{u} = \nabla\Phi$ . Para estos fines el agua puede considerarse incompresible, entonces la ecuación de continuidad del flujo queda representada por medio de la ecuación de Laplace,  $\nabla \cdot \bar{u} = \nabla^2\Phi = 0$ , que es la ecuación de gobierno a resolver. Junto con la ecuación de gobierno, es necesario definir las condiciones de contorno adecuadas y estas pueden ser de varios tipos: condición cinemática del fondo, condición cinemática de superficie libre, condición dinámica de superficie libre y las condiciones laterales de contorno. Gran parte de los modelos coinciden en la aplicación de las tres primeras y aplican la última de diferente forma. Las condiciones cinemáticas, como su nombre lo indica, incorporan únicamente la cinemática del problema, sin embargo, la condición dinámica de superficie libre, que incluye tanto al movimiento como a las fuerzas que lo generan, se deriva de la segunda ley de Newton, que como ya se dijo, en hidráulica se representa por la ecuación de impulso y cantidad de movimiento, cuya forma más general está dada por las ecuaciones de Navier-Stokes. Éstas últimas requieren del conocimiento de los esfuerzos viscosos internos

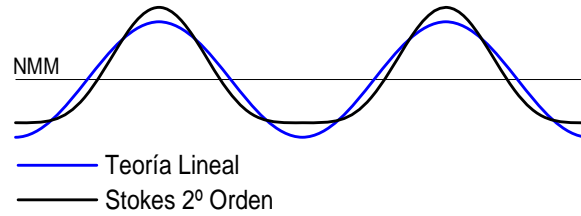
del agua, pero en la práctica dichos esfuerzos son muy pequeños, la viscosidad puede despreciarse, llegándose así a las Ecuaciones de Euler. Si las Ecuaciones de Euler se integran en la vertical se llega a la Ecuación de Bernoulli, que se utiliza como condición dinámica de superficie libre principalmente en los desarrollos de Stokes.

### 1.3. TEORÍAS PARA FONDO HORIZONTAL

Para que en un proyecto de ingeniería marítima se obtengan resultados adecuados, es indispensable hacer un análisis cuidadoso que defina el modelo de oleaje a utilizar, basándose en los datos, conocimientos y recursos computacionales disponibles en combinación con el escenario en estudio. Cuando la profundidad es constante se asume que fenómenos como la rotura, refracción y someramiento no son importantes en la propagación del oleaje, dejando claro que este grupo de teorías en su origen no pretende representarlos; sin embargo, es indispensable conocerlas porque son la base del desarrollo de las teorías de propagación en fondo variable. El desarrollo de estas teorías fue motivado por la necesidad de representar el comportamiento de la superficie libre, o los perfiles de velocidad y presión en una columna de agua, donde se conocen características como el período y la amplitud de onda.

#### APROXIMACIONES DE STOKES

La solución a la ecuación de Laplace, utilizando las condiciones de frontera antes mencionadas, con condición lateral de periodicidad en tiempo y espacio, para oleaje monocromático y fondo horizontal impermeable, deriva en la llamada Teoría de ondas de Stokes, de la cual hay aproximaciones de varios órdenes, dependiendo el grado de exactitud conservado en el desarrollo algebraico, aproximaciones de Stokes de 1º, 2º, 3º, ... orden. La aproximación de primer orden, en la cual se desprecian todos los términos no lineales es conocida como Teoría Lineal, Teoría de Airy, o Teoría de ondas de pequeña amplitud, que llega a una solución analítica y explícita del potencial de velocidades, y a una ecuación analítica implícita que relaciona al período, profundidad y longitud de onda de una ola monocromática propagándose en fondo plano, conocida como ecuación de la dispersión lineal,  $\sigma^2 = kg \tanh kh$ ,  $\sigma = 2\pi/T$ ,  $T$  es el período. Conforme se avanza en el orden de aproximación, los resultados de superficie libre van perdiendo simetría con respecto al nivel de agua en reposo; es decir, el primer orden o Teoría Lineal arroja una variación sinusoidal de la superficie libre del agua, mientras que órdenes superiores generan crestas más acusadas y valles más extendidos, como se muestra en la siguiente figura.



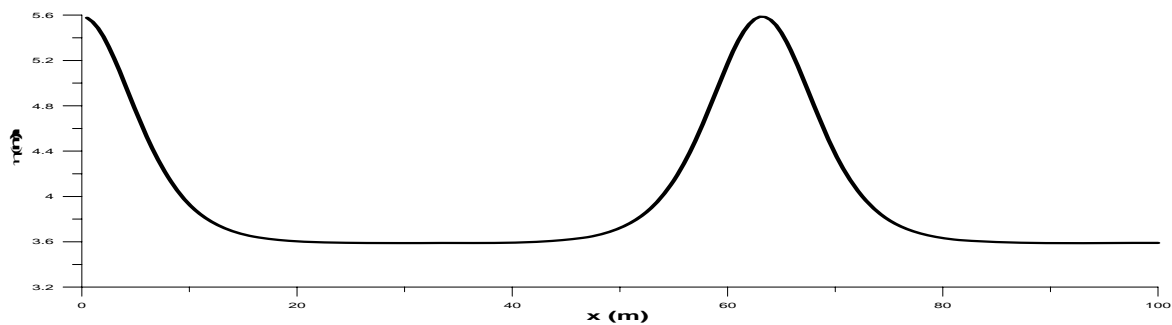
**Fig 1.3. Comparación de la superficie libre entre Teoría Lineal y Stokes 2º Orden**

Este grupo de teorías sólo es válido en aguas profundas e intermedias, ya que durante su desarrollo, en el que la variable  $z$  es separada, se desprecian términos de orden superior, que son producto de la interacción de la propagación horizontal de las ondas con el campo de velocidades verticales. Sin embargo, para fines de ingeniería es la herramienta más utilizada, principalmente, por su sencillez de implementación.

### TEORÍA CNOIDAL

El desarrollo de esta teoría fue motivado por la limitación de las aproximaciones de Stokes, y fue diseñada para describir el campo de velocidades y de presiones de una onda periódica propagándose en fondo plano y somero. Se basa en el trabajo hecho por Korteweg y de Vries en 1895 (KdV). A diferencia de la teoría de Stokes, que resulta en una serie de funciones trigonométricas, la teoría Cnoidal expresa su solución utilizando funciones Jacobianas elípticas, abreviadas como  $cn$ , de ahí el nombre de Cnoidal. Existen aproximaciones de varios órdenes, y la más utilizada es la de primer orden, ya que es suficientemente capaz de describir ondas de amplitud finita en aguas someras. Diversos autores han presentado soluciones analíticas y semi-gráficas, pero todas son muy complicadas o tediosas en su aplicación, al extremo que algunos de esos autores han recomendado como más aplicable en aguas someras a las aproximaciones de Stokes que a la teoría Cnoidal.

El rango de aplicación de ésta teoría comienza cuando acaba el rango de validez de la teoría lineal, y tiene como limite la teoría de la onda solitaria cuando la longitud de onda tiene a infinito, es decir, que la teoría cnoidal converge hacia aguas profundas a la teoría lineal, y hacia aguas someras a la onda solitaria.



**Fig 1.4. Teoría cnoidal.**



## TEORÍA DE LA ONDA SOLIATRIA

Las teorías anteriores se refieren a ondas periódicas, una onda solitaria es transitoria, porque las partículas de agua se mueven únicamente en la dirección de avance de la onda y no regresan a su posición original. Una onda solitaria tiene cresta y no tiene valle, por lo que el desplazamiento de la superficie libre se presenta únicamente sobre el nivel de aguas tranquilas. Es aplicable en fondo plano, para ondas como los tsunamis, que son únicas, y que su largo período, del orden de minutos, se asocia a longitudes de onda tan largas que permiten asumir que casi cualquier fondo es somero.

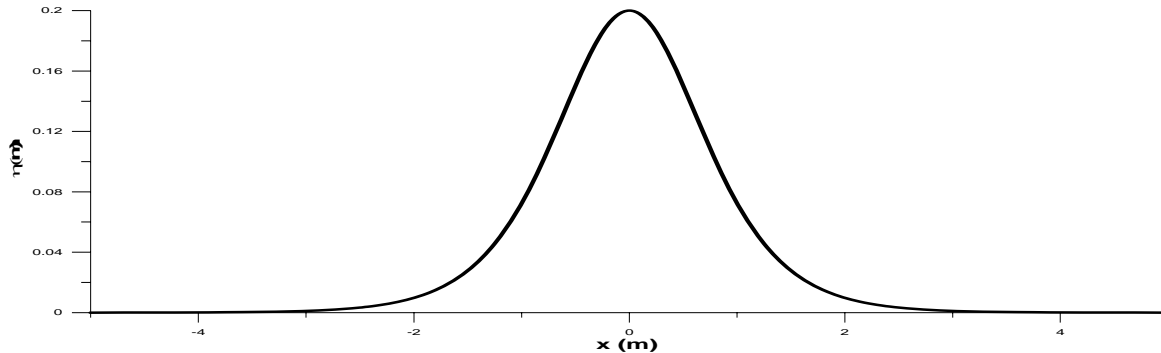


Fig 1.5. Onda solitaria.

## 1.4. TEORÍAS PARA FONDO VARIABLE

### TEORIA DEL RAYO

La teoría del rayo es un método semi-gráfico basado en conceptos óptico-geométricos, principalmente en la ley de Snell de refracción óptica, que fue utilizado ampliamente por los ingenieros en décadas pasadas. Se emplea para calcular únicamente refracción y someramiento de una onda sinusoidal simple propagándose sobre fondo uniforme, es decir, pendiente constante y líneas batimétricas paralelas. Existen versiones modificadas de este método que permiten aproximar la refracción y el someramiento en batimetrías ligeramente irregulares, pero con muchas limitaciones.

Los rayos son líneas que representan las trayectorias de varios puntos equidistantes sobre la cresta de una onda, desde aguas profundas hasta la línea de costa. El espacio comprendido entre dos rayos se llama canal de energía, ya que se considera que la energía contenida en una sección transversal se mantiene constante durante toda la propagación de la recta. Con base en lo anterior y en algunos otros conceptos tomados de la teoría lineal, se calcula la desviación del frente de onda mientras se va refractando (alineando paralelo a la línea de costa), y el someramiento producto de la reducción del ancho de los canales de energía.

Aunque un diagrama de rayos ilustra de manera sencilla la desviación que sufre la dirección del oleaje debido a la refracción, este método ha quedado prácticamente obsoleto, ya que

sus limitaciones son muchas, por ejemplo: no sirve para fondos irregulares (reales) que inducen por ejemplo difracción, considera que no hay transferencia de energía entre los rayos, no puede considerar difracción, etc., además de que su aplicación es sumamente laboriosa. No obstante, tiene el mérito de haber sido, después del método de Iribarren de los planos de oleaje, uno de los primeros esfuerzos por modelar matemáticamente la propagación del oleaje en fondo variable.

## ECUACIÓN DE LA PENDIENTE SUAVE

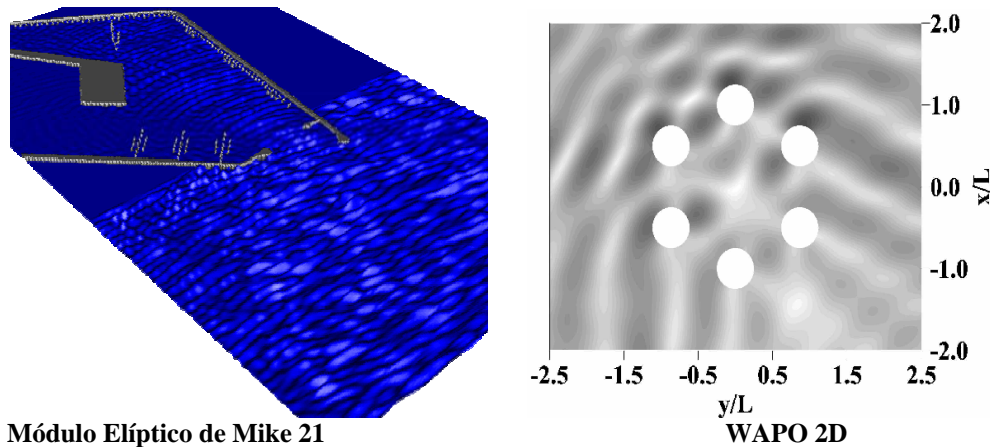
Existen diversas aproximaciones de cómo abordar el problema de la transformación del oleaje en fondo variable, siendo la teoría lineal la que hasta hoy en día ha demostrado ser la más adecuada para estudiar la transformación del oleaje desde aguas profundas hasta la zona donde se presenta la rotura. Con los modelos basados en la ecuación de la pendiente suave se puede estimar de forma combinada los efectos de reflexión, someramiento, transmisión, difracción y disipación, tanto por rotura como por fricción, siendo Eckart (1952) el primero en proponer una forma de esta ecuación, enseguida Berkhoff (1973) usa esta ecuación como un recurso para estimar la transformación de oleaje monocromático lineal sobre un fondo impermeable variando gradualmente, y descrita más concisamente por Smith & Spring (1975). Desde entonces diversos estudios han sido llevados a cabo para estudiar la propagación del oleaje sobre un fondo impermeable con cualquier configuración. La solución clásica de la MSE es sólo válida para pendientes de 1:3 o menores.

Haciendo una expansión alrededor del nivel medio del agua y modificando las condiciones de frontera en el fondo, Kirby (1986) derivó la conocida ecuación como la extensión de la MSE y Massel (1993) presentó una nueva aproximación de la misma, la cual incluye el efecto de los modos evanescentes. Recientemente Chamberlain & Porter (1995) presentaron una versión modificada de la MSE que retiene los términos de segundo orden, mientras que la solución que toma en cuenta los efectos de los modos evanescentes además de una corrección a las condiciones de frontera fue desarrollada por Porter & Staziker (1995). Un problema generalizado en los modelos anteriores es la forma en cómo han sido planteadas las condiciones de frontera, quizás la mejor aproximación sea la presentada por Silva et al. (2003), presentando también una forma diferente de discretizar al área de modelado, la cual utiliza una malla es discretizada utilizando un sistema quadtree.

En la literatura especializada se pueden encontrar numerosas investigaciones sobre modelos de transformación del oleaje inducida por la presencia de estructuras permeables sumergidas y emergidas. Basados en la teoría de Sollit & Cross (1972) y asumiendo válida la suposición de que el fondo varía suavemente, una solución analítica de las ecuaciones básicas para oleaje rompiente y no rompiente viajando sobre un fondo poroso finito de geometría arbitraria fue desarrollado por Rojanakamthorn et al. (1989, 1990), Losada et al. (1996a y 1996b) y Silva et al. (2002). Silva et al. (2002a y 2002b) presentaron el desarrollo de la ecuación de pendiente suave la cual retiene todos los términos de segundo orden y mostraron que el modelo es válido para pendientes del fondo permeable como impermeable muy peraltado, así como también es capaz de describir las propiedades de disipación en fondos con ondulaciones porosas e impermeables; sin embargo, la implementación

numérica sólo fue realizada para problemas unidimensionales y los efectos de rotura parcialmente verificados por la falta de información de campo o laboratorio .

En particular, la solución elíptica de esta ecuación incluye todos los procesos que están involucrados en la transformación y son obtenidos de forma iterativa, la aproximación parabólica puede verse como una simplificación en la que efectos como la reflexión así como la refracción son ignorados.



Módulo Elíptico de Mike 21

Fig. 1.6. Modelos basados en la ecuación de la pendiente suave.

## MODELOS REFRACCIÓN- DIFRACCIÓN

Partiendo de la ecuación de la pendiente suave, suponiendo que los efectos de la difracción son débiles, y despreciando la reflexión, a través de un desarrollo en series de Padé se llega a la aproximación parabólica de la ecuación de la pendiente suave, que es la ecuación de gobierno de los llamados modelos de Refracción-Difracción. Este conjunto de modelos son los más utilizados hoy en día en los proyectos de ingeniería, debido principalmente a que su implementación es mucho más sencilla que la ecuación de la pendiente suave completa. Entre las versiones programadas pueden mencionarse el Red-Dif, de la Universidad de Delaware, y OLUCA, de la Universidad de Cantabria.

Son muy útiles y precisos cuando se analizan problemas en donde domina la refracción y el someramiento, y los efectos de difracción no son muy importantes, como irregularidades del fondo, o líneas batimétricas no paralelas, pero no deben usarse cuando se tengan obstáculos bruscos que provoquen difracción fuerte, como islas, ensenadas, escolleras, etc., ya que las ecuaciones se vuelven inestables y arrojan resultados ilógicos, además que tienen la limitación intrínseca de no considerar los efectos de reflexión, por tanto no son válidos para estudios de resonancia en áreas cerradas.

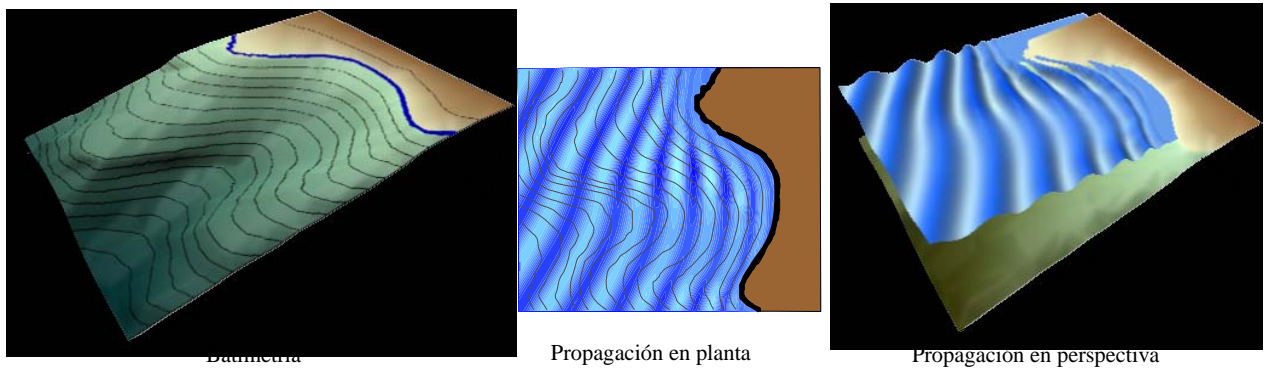


Fig 1.7. Ejemplo de propagación con el programa OLUCA.

## MODELOS DE REFRACCIÓN

Una forma alternativa a la teoría del rayo para estudiar casos donde influyan únicamente refracción y someramiento, es derivar de la ecuación de gobierno de los modelos anteriores, otra ecuación que desprece por completo a la difracción y reflexión, cuya resolución será mucho más fácil, y podrá implementarse de manera relativamente sencilla en cualquier computador personal, lográndose resultados mucho más confiables y mayor rango de aplicación que la teoría del rayo, evitándose el proceso manual que la teoría del rayo conlleva en si misma.

Aunque su aplicabilidad se limita a problemas donde sólo intervengan refracción y someramiento, es útil porque su solución es sencilla y económica en cuanto a requerimientos de cómputo. Como ejemplo de un modelo de este tipo puede mencionarse al Refract, de Robert Dean, Universidad de Florida.

## MODELOS DE DIFRACCIÓN

Una forma de obtener estos modelos consiste en utilizar la ecuación de la pendiente suave, pero ahora despreciendo a las variaciones del fondo, con lo que se omiten los efectos de someramiento y refracción, se llega a los llamados Modelos de difracción, que son útiles cuando se desea analizar únicamente el proceso de difracción totalmente aislado, en fondo plano, y provocado por obstáculos rectos verticales e impermeables. Como solución a esta ecuación de gobierno con sus respectivas condiciones de frontera, puede llegarse a expresiones analíticas explícitas para obtener el coeficiente de difracción, sin embargo, como dicha solución normalmente se expresa en coordenadas cilíndricas y por tanto es necesario el uso de los números de Bessel, en ocasiones es más común utilizar diagramas adimensionalizados para presentar resultados, como los que se presentan en el SPM (1984).

A excepción de aguas relativamente profundas, es obvio que son muy pocos los casos reales en los que intervenga únicamente la difracción, la práctica común ha sido analizar a la difracción aislada mediante un modelo de este tipo y por otro lado a la refracción y someramiento con un modelo de refracción, empalmando posteriormente los resultados, como es el caso de la teoría de una sola línea (One line model). Para los casos cuando se

---

---

presenten fenómenos no lineales, como la interacción de componentes, este tipo de modelos no es válido.

## MODELOS PARA AGUAS SOMERAS

Como ya se comentó, se considera aguas someras cuando la longitud y la amplitud de la onda son comparables en magnitud con la profundidad. Esto se puede presentar en dos casos: el primero, cuando se trata de ondas largas, como las mareas, cuyo período y longitud de onda son tan grandes que casi cualquier fondo es somero; y el segundo, cuando ondas generadas por viento, como las que analizan los modelos anteriores, se encuentren en profundidades muy reducidas.

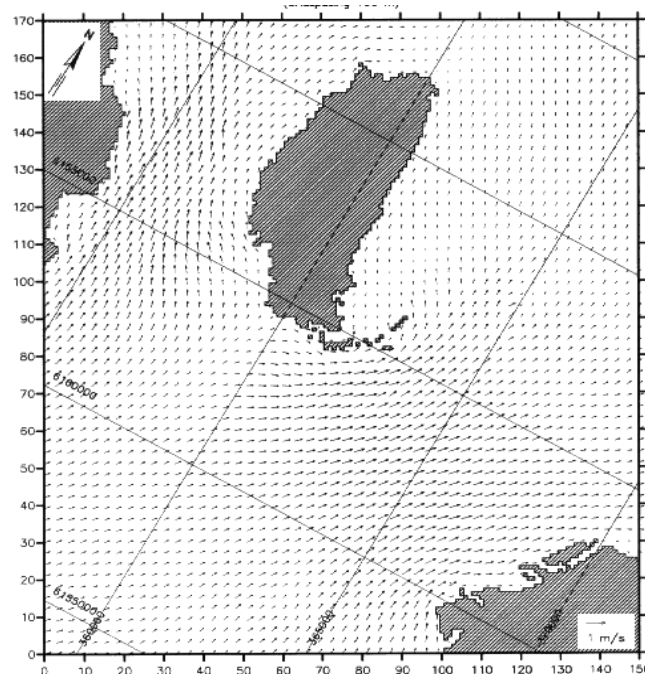
## ECUACIONES PARA AGUAS SOMERAS

Cuando se estudian escenarios en los que la hidrodinámica está dominada por ondas de marea, cuyos períodos son grandes y sus efectos actúan a gran escala, no pueden utilizarse los planteamientos anteriores. Para ello existen las llamadas ecuaciones de aguas someras (shallow water equations), una de continuidad y otra de cantidad de movimiento, formuladas especialmente para estos casos.

Las ecuaciones de aguas someras desprecian aspectos que en los casos anteriores son importantes, e incorporan otros que dada la escala del problema se hacen trascendentes. Pueden obtenerse de muchas formas, la más común es a partir de la integración en la vertical de las ecuaciones de Euler. Dentro de los efectos que incorporan destacan: la fuerza de Coriolis, fuerzas turbulentas mediante el concepto de viscosidad turbulenta, transmisión de energía del viento al agua, y fricción de fondo. Dado que los períodos son muy grandes, pueden despreciarse las componentes verticales de la velocidad y la aceleración.

En la literatura hay gran variedad de versiones de las ecuaciones de aguas someras, que se diferencian por número de fenómenos que consideren, la forma en que son introducidos, y el grado de precisión conservado en la derivación de las ecuaciones. Las hay lineales (*LSWE*, linear shallow water equations), ligeramente no lineales (*WNSWE*, weakly nonlinear shallow water equations) y completamente no lineales (*FNSWE*, fully nonlinear shallow water equations).

Como ejemplos de programas para resolver problemas de hidrodinámica de esta naturaleza pueden mencionarse: Los modelos *RMA*, desarrollados por la empresa Resource Management Associates, y el *H2D* programado en la Universidad de Cantabria.



**Fig 1.8. Corrientes generadas por marea obtenidas con el Módulo de ecuaciones de aguas someras del Mike 21**

## MODELOS TIPO BOUSSINESQ

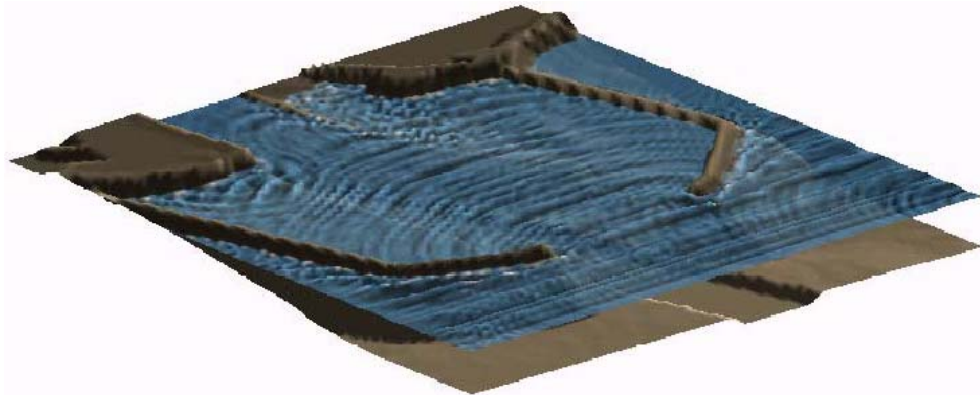
Los modelos tipo Boussinesq sirven para representar el mismo tipo de ondas que la ecuación de la pendiente suave y sus derivaciones representan adecuadamente en aguas profundas, es decir, ondas generadas por viento y restauradas por gravedad; pero esta clase de modelos están diseñados expresamente para profundidades someras, cercanas a la zona de rompiente, o para ondas restituidas después de la rotura. Son sumamente importantes, ya que es justo en esta zona donde se encuentra la inmensa mayoría de las obras de interés de la Ingeniería Marítima, Portuaria y Costera.

Su nombre se debe a que están basadas en ecuaciones tipo Boussinesq, una de continuidad y otra de cantidad de movimiento, cuya primer versión fue presentada por M.J. Boussinesq en 1872 derivada a través de la integración de la ecuación de Laplace, válida para fondo horizontal, y con la velocidad promediada en la vertical como variable dependiente. Sin embargo, como no tenían solución analítica, y para entonces no existían herramientas de cálculo que favorecieran una solución numérica, permanecieron archivadas hasta que Peregrine en 1967 presentara una versión modificada capaz de modelar la propagación del oleaje en aguas someras con fondo variable. Estas dos ecuaciones tenían como principal defecto el ser válidas únicamente en aguas someras, dificultándose su aplicación práctica, sin embargo, posteriormente varios investigadores han presentado versiones modificadas para ampliar su rango de validez hasta aguas de transición: Madsen et al. (1991) agregó un término dispersivo, y Nwogu (1993) las expresó en términos de la velocidad referida a una elevación cualquiera, ambos lograron ampliar su validez y considerar débilmente efectos no lineales de la propagación. Trabajos posteriores como el de Wei et al. (1995) y Gobbi et al. (2000) presentaron ecuaciones capaces de considerar

totalmente a los efectos no lineales, pero incrementando tanto al esfuerzo computacional necesario, como la dificultad de la implementación numérica.

La precisión de estos modelos en aguas someras ha impulsado el modelado el ascenso máximo (run-up) y de la hidrodinámica rotura, lo cuál ha servido para mejorar otros modelos, como los de dinámica de sedimentos en la zona de rompiente y en la zona de lavado.

Los modelos tipo Boussinesq, a pesar de ser mucho más adecuados para casi cualquier problema de ingeniería costera, son muy difíciles de implementar, por lo que hasta ahora su uso se ha restringido a la investigación aplicada, sin embargo en muy pocos años serán llevados su aplicación práctica. Entre otras versiones programadas pueden mencionarse al *Funwave*, de la Univesidad de Delaware, al *Coulwave* de la Universidad de Cornell, y al Módulo de Boussinesq del paquete Mike 21.



**Fig 1.9.** Ejemplo de propagación con el programa SimWav.

## 2 ECUACIÓN DE LA PENDIENTE SUAVE

### 2.1 ANTECEDENTES

El grado de confiabilidad en las predicciones arrojadas por un modelo de oleaje suele ser proporcional al esfuerzo invertido en su aplicación, por lo que es mejor conocer las deficiencias de los resultados a obtener cuando por razones de tiempo o de recursos no se pueda utilizar la formulación más adecuada. En este trabajo se ocupa un modelo de propagación de oleaje basado en la ecuación de la pendiente suave. Aún el modelo más completo puede arrojar datos que no concuerden con la realidad, por lo que es necesario contar con experiencia y criterio para interpretar los resultados.

El primero en proponer una forma de la ecuación de la pendiente suave para fondo constante, fue Eckart (1952), mientras que Berkhoff (1972) rederivó esta ecuación para estimar la transformación de oleaje monocromático lineal sobre un fondo impermeable variando gradualmente. Otra forma de esta ecuación estudiada más concisamente fue propuesta por Smith y Sprinks (1975). Desde entonces diversos estudios han sido llevados a cabo para estudiar la propagación del oleaje sobre un fondo impermeable con cualquier configuración. La solución clásica de la MSE es sólo válida para pendientes de 1:3 o menores, tal y como fue comprobado por Booij (1983). Haciendo una expansión alrededor del nivel medio del agua y modificando las condiciones de frontera en el fondo, Kirby (1986) derivó la conocida ecuación como la extensión de la MSE, además de que Massel (1993) incluye los modos evanescentes. Chamberlain y Porter (1995) mejoraron las condiciones de frontera propuestas por Massel y obviaron el efecto de los modos evanescentes, desarrollando la llamada ecuación modificada de la pendiente suave que conserva los términos de segundo orden que desprecia Berkhoff (1972), y Porter y Staziker (1995) aproximan los términos asociados con los modos evanescentes.

Por otro lado, en la literatura especializada se pueden encontrar numerosas investigaciones sobre modelos de transformación del oleaje inducida por la presencia de estructuras permeables sumergidas y emergidas. Autores como Rojanakamthorn et al (1989), Rojanakamthorn et al (1990), Losada et al (1996a) y Losada et al (1996b), han propuesto una solución analítica de las ecuaciones básicas para oleaje rompiente y no rompiente de geometría arbitraria, considerando los efectos un de un fondo permeable que varía suavemente, basándose esencialmente en la teoría de Sollit y Cross (1972).

El modelo de propagación que se utiliza en este estudio se basa en los trabajos desarrollados por Silva et al. (2002a y 2002b), quienes presentan una derivación de la ecuación de la pendiente suave en la cual se mantienen los términos de segundo orden, mostrando que este modelo es valido para cualquier pendiente, además de incluir un término de disipación de energía para describir los efectos de disipación de rotura y por fricción en fondos con ondulaciones porosas e impermeables, y que sin perder validez y manteniendo la compatibilidad entre la ecuación de gobierno, las condiciones de frontera y el método numérico, replantean la ecuación armónica de la pendiente suave usando el signo menos en la función dependiente del tiempo en lugar del signo más usado previamente por



Sollit y Cross (1972). En la solución los efectos de los modos evanescentes también son considerados. Las fronteras se consideran abiertas, parcialmente reflejantes o totalmente absorbentes a través de una aproximación parabólica de segundo orden de acuerdo a Kirby (1989).

Es conveniente mencionar que en dichos estudios los efectos de rotura son parcialmente verificados por la falta de información de campo y laboratorio. Para mejorar los resultados obtenidos con este modelo, es esencial emplear modelos que permitan conocer los procesos disipativos debidos a la fricción de fondo y disipación debida a rotura. En este trabajo se utiliza una expresión que representa la disipación de energía, siendo el fenómeno de rotura la principal orientación de este estudio.

La aproximación en la predicción y los requerimientos computacionales dependen del método numérico empleado y de la calidad de la malla en la que las ecuaciones de gobierno y de frontera son discretizadas. Para la solución numérica de esta ecuación, recientemente, Panchang y Pearce (1991), Li y Anastasiou (1992), y Zhao y Anastasiou (1996), propusieron el uso de un modelo basado en la técnica del gradiente conjugado. Este modelo es bastante eficiente para resolver con un método de diferencias finitas sobre una malla regular la forma elíptica de la MSE, la cual conserva las características físicas inherentes de dicha ecuación. Borthwick et al. (1997) basados en la metodología de Panchang y Pearce (1991), presentaron una forma diferente de discretizar al área de modelado, la cual utiliza volúmenes finitos, pero ahora la malla es discretizada utilizando un sistema quadtree. Un problema generalizado en los modelos anteriores es la forma en cómo han sido planteadas las condiciones de frontera. En este trabajo se emplea el método de diferencias finitas centradas para discretizar las ecuaciones del modelo estudiado. El sistema de ecuaciones que se genera, se resuelven por eliminación Gaussiana con pivoteo parcial que reduce los requerimientos de memoria en forma similar a Maa et al (2001) y Silva et al (2005), dejando el método directo y computacionalmente económico.

## **2.2 DESARROLLO DE LA ECUACIÓN DE LA PENDIENTE SUAVE**

El movimiento de un fluido es descrito por las tres componentes del vector velocidad, tres coordenadas espaciales y dos cantidades termodinámicas, la densidad y la presión del fluido. En esta deducción se utiliza la teoría de flujo potencial, que asume que el flujo es irrotacional y que existe una función escalar, llamada potencial de velocidades,  $\Phi(x,y,z,t)$ , cuyo gradiente representa al campo de velocidades  $\bar{u} = \nabla\Phi$ . Por lo tanto, las ecuaciones para describir el oleaje obtenidas con teoría lineal (que se muestran en el anexo 1) para un fluido incompresible e irrotacional sobre un fondo variable y permeable de profundidad  $h_p(x)$  y profundidad total  $h(x)$  (ver fig. 2.1), con presión cero en la libre del agua, sientan las bases para el desarrollo de la ecuación de la pendiente suave. Vale la pena mencionar que  $h \geq h_p$  y a  $x$  que define el sentido de propagación. La velocidad del agua dentro del medio es linealmente proporcional a la diferencia de presión a través de la estructura porosa. La

coordenada vertical  $z$ , es medida positiva hacia arriba con  $z=0$ , en la superficie libre del agua.

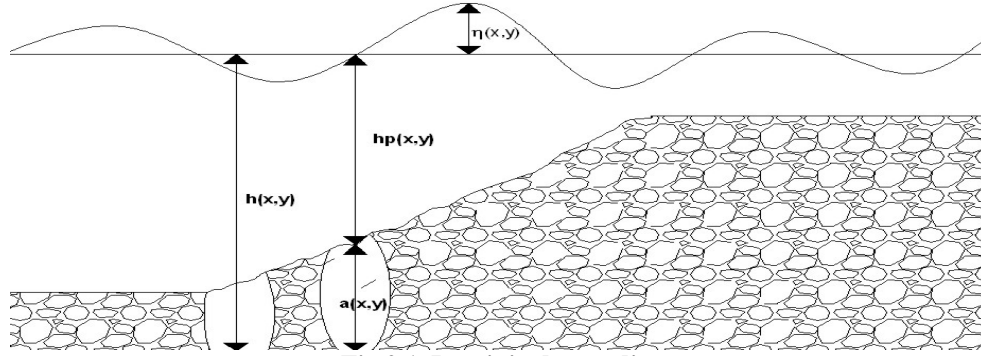


Fig 2.1. Dominio de estudio.

Entonces, como para este fin el agua puede considerarse incompresible, la ecuación de continuidad del flujo puede representarse por medio de la ecuación de Laplace,  $\nabla \cdot \bar{u} = \nabla^2 \Phi = 0$ , que es la ecuación de gobierno a resolver y es derivada de la ecuación de continuidad como se muestra a continuación:

$$\nabla_h^2 \Phi_w + \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial z^2} = 0 \quad -h_p(x, y) \leq z \leq 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla_h^2 \Phi_p + \frac{\partial^2 \Phi_p}{\partial z^2} = 0 \quad -h(x, y) \leq z \leq -h_p(x, y) \quad (2.2)$$

donde  $\nabla_h = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  es el operador gradiente horizontal y  $\Phi_w$  y  $\Phi_p$  son los potenciales de velocidad en agua y el de velocidad de descarga en el medio poroso respectivamente, expresiones analíticas para el oleaje en cada región del flujo que se obtienen considerando teoría de flujo potencial. La presión dentro y fuera del medio poroso,  $p_w$  y  $p_p$ , respectivamente, son dadas por la ecuación linealizada de Bernoulli como:

$$p_w = -\rho \left( \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} + gz \right) \quad -h_p \leq z \leq 0 \quad (2.3)$$

$$p_p = -\rho \left( \frac{s}{\varepsilon} \frac{\partial \Phi_p}{\partial t} + gz + \frac{f}{\varepsilon} \sigma \Phi_p \right) \quad -h(x, y) \leq z \leq -h_p(x, y) \quad (2.4)$$

donde  $t$  es el tiempo,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $p_p$  es la presión,  $\rho$  la densidad del agua,  $\varepsilon$  la porosidad del material permeable,  $s$  un coeficiente de inercia, y  $f$  un coeficiente de fricción linealizado.

Las velocidades fuera y dentro del medio poroso, definidas como  $w_w$  y  $w_p$  respectivamente, en la frontera  $z = -h_p$  se pueden escribir como:

$$w_w = \frac{\partial \Phi_w}{\partial z} + \nabla_h h_p \cdot \nabla_h \Phi_w \quad z = -h_p(x, y) \quad (2.5)$$

$$w_p = \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} + \nabla_h h_p \cdot \nabla_h \Phi_p \quad z = -h_p(x, y) \quad (2.6)$$

Las condiciones de frontera dinámica y cinemática de superficie libre, derivadas con teoría lineal, para profundidad variable quedan como:

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \quad z = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad z = 0 \quad (2.8)$$

Y la presión en el fondo,  $z = -h$ , es:

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial z} + \nabla_h h \cdot \nabla_h \Phi_p = 0 \quad z = -h(x, y) \quad (2.9)$$

A lo largo de la frontera agua-medio poroso, la continuidad de masa en el flujo ( $w_w = w_p$ ) y la presión ( $p_w = p_p$ ) se satisfacen. Para resolver este problema, una solución analítica es obtenida para una onda progresiva empleando la técnica de separación de variables, apropiada para resolver un problema de valores en la frontera. Los potenciales de velocidad armónicos fuera y dentro del medio poroso,  $\Phi_w$  y  $\Phi_p$ , respectivamente, son expresados como:

$$\Phi_w(x, y, z, t) = \Re \left\{ \phi(x, y) M(z) e^{\pm i \sigma t} \right\} \quad (2.10)$$

$$\Phi_p(x, y, z, t) = \Re \left\{ \phi(x, y) P(z) e^{\pm i \sigma t} \right\} \quad (2.11)$$

Donde  $\Re$  es la parte real del argumento,  $\phi$  es la amplitud compleja del agua,  $\sigma$  es la frecuencia angular ( $\sigma = 2\pi/T$ ) y  $T$  es el periodo de ola. Es importante mencionar que la ecuación de la pendiente suave esta formulada para la propagación del oleaje a través del espacio, definiendo la estructura vertical en el medio basándose en teoría lineal con fondo horizontal, con las funciones de profundidad  $M(z)$  y  $P(z)$  que aparecen en las expresiones anteriores y son descritas con las expresiones siguientes:

$$M = \frac{\cosh K(h+z) - F \sinh K(h+z)}{\cosh Kh - F \sinh Kh} \quad (2.12)$$

$$P = \delta \frac{(1 - F \tanh Ka) \cosh K(h+z)}{\cosh Kh - F \sinh Kh} \quad (2.13)$$

Donde:

$$F = \frac{(1 - \delta) \tanh Ka}{1 - \delta \tanh^2 Ka} \quad (2.14)$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{s + if} \quad (2.15)$$

y  $a$  como el espesor del medio poroso.

El numero de onda complejo  $K$  puede ser determinado con la ecuación siguiente (Losada et al., 1996).

$$\frac{\sigma^2}{g} = Kh \frac{[\tanh Kh - F]}{[1 - F \tanh Kh]} \quad (2.16)$$

Con  $\sigma$  como frecuencia angular definida en los párrafos anteriores.

De acuerdo a Silva et al (2002), aplicando la segunda identidad de Green para las funciones  $M(z)$  y  $\Phi_w$ , se tiene que:

$$\int_{-h_p}^0 M(z) \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial z^2} dz - \int_{-h_p}^0 \Phi_w \frac{\partial^2 M(z)}{\partial z^2} dz = \left[ M(z) \frac{\partial \Phi_w}{\partial z} - \Phi_w \frac{\partial M(z)}{\partial z} \right]_{-h_p}^0 \quad (2.17)$$

Trabajando con el primer término de la ecuación anterior

$$\int_{-h_p}^0 M(z) \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial z^2} dz$$

Sustituyendo ecs. (2.1) y (2.10)

$$-\int_{-h_p}^0 M(z) \nabla_h^2 \Phi dz = -\int_{-h_p}^0 M(z) \nabla_h^2 (\rho M(z)) = -\int_{-h_p}^0 M(z) \nabla \cdot \nabla (\rho M(z))$$

y operando

$$\begin{aligned}
& -\int_{-h_p}^0 M(z) \nabla \cdot \nabla (\rho M(z)) dz = -\int_{-h_p}^0 M(z) \nabla \cdot [\rho \nabla M(z) + M(z) \nabla \rho] dz = \\
& = -\int_{-h_p}^0 M(z) \nabla \cdot \rho \nabla M(z) dz - \int_{-h_p}^0 M(z) \nabla \cdot M(z) \nabla \rho dz = \\
& = -\int_{-h_p}^0 M(z) \rho \nabla_h^2 M(z) dz - \int_{-h_p}^0 \nabla_h (M^2(z) \nabla \rho) dz
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Ahora sustituyendo y derivando la ec. (2.12) en el segundo término de ec. (2.17)

$$-\int_{-h_p}^0 \Phi_w \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial M(z)}{\partial z} dz = -\int_{-h_p}^0 \Phi_w \frac{\partial}{\partial z} \frac{K \operatorname{senh} K(h+z) - KF \cosh K(h+z)}{\cosh Kh - F \operatorname{senh} Kh} dz$$

y derivando de nuevo obtenemos la siguiente expresión:

$$-\int_{-h_p}^0 \Phi_w \frac{\partial^2 M(z)}{\partial z^2} dz = -\int_{-h_p}^0 \Phi_w \frac{K^2 \cosh K(h+z) - K^2 F \operatorname{senh} K(h+z)}{\cosh Kh - F \operatorname{senh} Kh} dz = -\int_{-h_p}^0 \Phi_w K^2 M(z) dz \tag{2.19}$$

Por último, con la ec. (2.5) en el término de lado derecho de ec. (2.17) para  $z=-h_p$  y combinando ecs. (2.7) y (2.8) en  $z=0$ , se obtiene:

Cuando  $z=-h_p$ :

$$\left[ M(z) \frac{\partial \Phi_w}{\partial z} - \Phi_w \frac{\partial M(z)}{\partial z} \right]_{z=-h_p}, \text{ de ec. 1.5 tenemos } \frac{\partial \Phi_w}{\partial z} = w_w - \nabla_h h_p \cdot \nabla_h \Phi_w$$

sustituyendo

$$\left[ M(z) (w_w - \nabla_h h_p \cdot \nabla_h \Phi_w) - \Phi_w \frac{\partial M(z)}{\partial z} \right]_{z=-h_p}^0$$

En turno para  $z=0$  haciendo uso de ecs. (2.7) y (2.8)

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \quad \frac{\partial \Phi_w}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

tal que

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial t^2}$$

para que al sustituir en el miembro derecho de ec. (2.17):

$$\left[ -\frac{1}{g} M(z) \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial t^2} - \Phi_w \frac{\partial M(z)}{\partial z} dz \right]_{z=0_p} \quad (2.20)$$

Reacomodando ecs. (2.18), (2.19) y (2.20), la ec. (2.17) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & -\int_{-h_p}^0 M(z) \rho \nabla_h^2 M(z) dz - \int_{-h_p}^0 \nabla_h (M^2(z) \nabla \rho) dz - \int_{-h_p}^0 K^2 M(z) \Phi_w dz = \\ & = \left[ \frac{1}{g} M(z) \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial t^2} + \Phi_w \frac{\partial M(z)}{\partial z} dz \right]_{z=0_p} + \left[ M(z) (w_w - \nabla_h h_p \cdot \nabla_h \Phi_w) + \Phi_w \frac{\partial M(z)}{\partial z} dz \right]_{z=-h_p} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Enseguida, aplicando el teorema de derivación bajo el signo integral, regla de Leibniz, la expresión anterior queda como:

$$\begin{aligned} & \int_{-h_p}^0 M(z) \rho \nabla_h^2 M(z) dz + \nabla_h \cdot \int_{-h_p}^0 (M^2(z) \nabla \rho) dz + \int_{-h_p}^0 K^2 M^2(z) \rho dz = \\ & = \left[ \frac{1}{g} M(z) \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial t^2} + \Phi_w \frac{\partial M(z)}{\partial z} dz \right]_{z=0_p} - \left[ M(z) (w_w - \nabla_h h_p \cdot \nabla_h \Phi_w) + \Phi_w \frac{\partial M(z)}{\partial z} dz \right]_{z=-h_p} \end{aligned} \quad (2.22)$$

En la ecuación anterior aparece el operador Laplaciano cuadrado de  $M(z)$ , que al ser desarrollado queda de la forma:

$$\begin{aligned} \nabla_h^2 M(z) &= \frac{\partial M(z)}{\partial h} \nabla_h^2 h + \frac{\partial M(z)}{\partial h_p} \nabla_h^2 h_p + \frac{\partial^2 M(z)}{\partial h^2} (\nabla_h^2 h)^2 + \frac{\partial^2 M(z)}{\partial h_p^2} (\nabla_h^2 h_p)^2 + \\ &+ \left( \frac{\partial^2 M(z)}{\partial h \partial h_p} + \frac{\partial^2 M(z)}{\partial h_p \partial h} \right) \nabla_h h \cdot \nabla_h h_p \end{aligned} \quad (2.23)$$

multiplicando la última ecuación por ec. (2.12)

$$\begin{aligned} M(z) \nabla_h^2 M(z) &= M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial h} \nabla_h^2 h + M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial h_p} \nabla_h^2 h_p \\ &+ \frac{\partial}{\partial h} \left( M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial h} \right) (\nabla_h^2 h)^2 - \left( \frac{\partial M(z)}{\partial h} \right)^2 (\nabla_h^2 h)^2 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial h_p} \left( M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial h_p} \right) (\nabla_h^2 h_p)^2 - \left( \frac{\partial M(z)}{\partial h_p} \right)^2 (\nabla_h^2 h_p)^2 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial h} \left( M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial h_p} \right) \nabla_h h \cdot \nabla_h h_p - 2 \frac{\partial M(z)}{\partial h} \frac{\partial M(z)}{\partial h_p} \nabla_h h \cdot \nabla_h h_p + \\ &+ \frac{\partial}{\partial h_p} \left( M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial h} \right) \nabla_h h \cdot \nabla_h h_p \end{aligned} \quad (2.24)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en el primer miembro de ec. (2.22) y aplicando la regla de Leibniz decimos que:

$$\begin{aligned}
\int_{-h_p}^0 \rho M(z) \nabla_h^2 M(z) dz &= \int_{-h_p}^0 \rho \left( M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial h} \nabla_h^2 h + M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial h_p} \nabla_h^2 h_p + \right. \\
&+ \frac{\partial}{\partial h} \left( M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial h} \right) (\nabla_h^2 h)^2 - \left( \frac{\partial M(z)}{\partial h} \right)^2 (\nabla_h^2 h)^2 + \frac{\partial}{\partial h_p} \left( M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial h_p} \right) (\nabla_h^2 h_p)^2 - \\
&- \left( \frac{\partial M(z)}{\partial h_p} \right)^2 (\nabla_h^2 h_p)^2 + \frac{\partial}{\partial h} \left( M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial h_p} \right) \nabla_h h \cdot \nabla_h h_p - \\
&- \left. 2 \frac{\partial M(z)}{\partial h} \frac{\partial M(z)}{\partial h_p} \nabla_h h \cdot \nabla_h h_p + \frac{\partial}{\partial h_p} \left( M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial h} \right) \nabla_h h \cdot \nabla_h h_p \right) \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Ahora reinsertando este término en ec. (2.22), y aplicando regla de Leibniz en los términos que así lo permiten, se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\rho \int_{-h_p}^0 \left( M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial h} \nabla_h^2 h + M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial h_p} \nabla_h^2 h_p \right) dz - \\
&- \rho \int_{-h_p}^0 \left( \left( \frac{\partial M(z)}{\partial h} \right)^2 (\nabla_h^2 h)^2 + \left( \frac{\partial M(z)}{\partial h_p} \right)^2 (\nabla_h^2 h_p)^2 \right) dz - \\
&- 2 \rho \int_{-h_p}^0 \left( \frac{\partial M(z)}{\partial h} \frac{\partial M(z)}{\partial h_p} \nabla_h h \cdot \nabla_h h_p \right) dz + \\
&\rho \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h_p}^0 \left( \left( M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial h} \right) (\nabla_h^2 h)^2 \right) dz + \\
&+ \rho \frac{\partial}{\partial h_p} \int_{-h_p}^0 \left( \left( M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial h_p} \right) (\nabla_h^2 h_p)^2 \right) dz + \\
&+ \rho \left( \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h_p}^0 M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial h_p} dz + \frac{\partial}{\partial h_p} \int_{-h_p}^0 M(z) \frac{\partial M(z)}{\partial h} dz \right) x \\
&x \nabla_h h \cdot \nabla_h h_p + \nabla_h \cdot \int_{-h_p}^0 (M^2(z) \nabla \rho) dz + \\
&+ \int_{-h_p}^0 K^2 M^2(z) \rho dz = \left[ \frac{1}{g} M(z) \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial t^2} + \Phi_w \frac{\partial M(z)}{\partial z} dz \right]_{z=0_p} - \\
&- \left[ M(z) w_w - M(z) \rho \frac{\partial M(z)}{\partial z} dz \right]_{z=-h_p} \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Repitiendo el procedimiento para las expresiones que involucran el medio poroso, esto es, aplicando segunda identidad de Green y manipulación matemática para  $P(z)$  y  $\Phi_p$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \rho \int_{-h}^{-h_p} \left( P(z) \frac{\partial P(z)}{\partial h} \nabla_h^2 h + P(z) \frac{\partial P(z)}{\partial h_p} \nabla_h^2 h_p \right) dz - \\
 & - \rho \int_{-h}^{-h_p} \left( \left( \frac{\partial P(z)}{\partial h} \right)^2 (\nabla_h^2 h)^2 + \left( \frac{\partial P(z)}{\partial h_p} \right)^2 (\nabla_h^2 h_p)^2 \right) dz - \\
 & - 2\rho \int_{-h}^{-h_p} \left( \frac{\partial P(z)}{\partial h} \frac{\partial P(z)}{\partial h_p} \nabla_h h \cdot \nabla_h h_p \right) dz + \\
 & \rho \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h}^{-h_p} \left( P(z) \frac{\partial P(z)}{\partial h} \right) (\nabla_h^2 h)^2 dz + \\
 & + \rho \frac{\partial}{\partial h_p} \int_{-h}^{-h_p} \left( P(z) \frac{\partial P(z)}{\partial h_p} \right) (\nabla_h^2 h_p)^2 dz + \\
 & + \rho \left( \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h}^{-h_p} P(z) \frac{\partial P(z)}{\partial h_p} dz + \frac{\partial}{\partial h_p} \int_{-h}^{-h_p} P(z) \frac{\partial P(z)}{\partial h} dz \right) x \\
 & x \nabla_h h \cdot \nabla_h h_p + \nabla_h \cdot \int_{-h}^{h_p} (P^2(z) \nabla \rho) dz + \\
 & + \int_{-h_p}^0 K^2 P^2(z) \rho dz = - \\
 & - \left[ P(z) w_p - P \rho \frac{\partial P(z)}{\partial z} dz \right]_{z=-h_p}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Por último, manipulando las ecs. (2.26) y (2.27), satisfaciendo las condiciones de continuidad de flujo de masa a lo largo de la interfase  $w_w = w_p$ , y de presiones  $p_w = p_p$ , es posible obtener una extensión de la ecuación modificada de la pendiente suave dependiente del tiempo.

$$\nabla_h (I_1 \nabla \rho) + K^2 \rho I_1 + \rho r(h, h_p) = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \rho \frac{\sigma^2}{g} \tag{2.28}$$

donde.



$$\begin{aligned}
r(h, h_p) = & I_{21} \nabla_h^2 h + I_{22} \nabla_h^2 h_p + (\nabla_h h)^2 \left( \frac{\partial I_{21}}{\partial h} - I_{31} \right) + (\nabla_h h_p)^2 \left( \frac{\partial I_{22}}{\partial h} - I_{32} \right) \\
& + \nabla_h h_p \cdot \nabla_h h \left( \frac{\partial I_{22}}{\partial h} + \frac{\partial I_{21}}{\partial h_p} - 2I_{33} \right)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

además

$$I_1 = \int_{-h_p}^0 M^2 dz + \frac{1}{\delta} \int_{-h}^{-h_p} P^2 dz \tag{2.30}$$

$$I_{21} = \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h} dz + \frac{1}{\delta} \int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial P}{\partial h} dz \tag{2.31}$$

$$I_{22} = \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h_p} dz + \frac{1}{\delta} \int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial P}{\partial h_p} dz \tag{2.32}$$

$$I_{31} = \int_{-h_p}^0 \left( \frac{\partial M}{\partial h} \right)^2 dz + \frac{1}{\delta} \int_{-h}^{-h_p} \left( \frac{\partial P}{\partial h} \right)^2 dz \tag{2.33}$$

$$I_{32} = \int_{-h_p}^0 \left( \frac{\partial M}{\partial h_p} \right)^2 dz + \frac{1}{\delta} \int_{-h}^{-h_p} \left( \frac{\partial P}{\partial h_p} \right)^2 dz \tag{2.34}$$

$$I_{33} = \int_{-h_p}^0 \frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial M}{\partial h_p} dz + \frac{1}{\delta} \int_{-h}^{-h_p} \frac{\partial P}{\partial h} \frac{\partial P}{\partial h_p} dz \tag{2.35}$$

Para obtener la extensión independiente del tiempo de la ecuación modificada de la pendiente suave, se considera la dependencia del tiempo como:

$$\rho = \phi(x, y) e^{-i\sigma t} \tag{2.36}$$

Término que al ser sustituido en la ec. (2.28) nos conduce a la ecuación modificada de la pendiente suave, tal como se muestra a continuación:

$$\nabla_h (I_1 \nabla \phi) + K^2 \phi I_1 + \phi r(h, h_p) = 0 \tag{2.37}$$

Para mejorar las aproximaciones de alturas de ola en zonas costeras, es necesario formular un coeficiente de disipación adecuado que estará en función de las características del fenómeno a modelar. Por ello será necesario considerar los efectos de disipación de energía involucrados y que se pueden presentar en diversas formas como se presenta en la sección 3.3 de este trabajo. El término  $f_D$  que se incluye en la siguiente ecuación representa la suma de la disipación de energía debida a fricción de fondo y a rotura.

$$\nabla_h (I_1 \nabla \phi) + \left[ (K^2 - i\sigma f_D) I_1 + r(h, h_p) \right] \phi = 0 \quad (2.38)$$

En este trabajo se emplea para el caso de disipación de la energía debida a fricción de fondo la expresión desarrollada por Kirby y Dalrymple (1994), término de disipación que puede escribirse como:

$$f_B = \frac{4}{3\pi} \frac{C_f a \sigma^2}{ng \sinh^3 kh} \quad (2.39)$$

donde  $a$  es la amplitud de onda ( $H/2$ ),  $\sigma$  es la frecuencia angular y  $n$  se calcula como:

$$n = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (2.40)$$

En el caso de disipación debida a rotura, se emplea el modelo propuesto originalmente por Dally et al (1984) y que es retomado para su calibración con datos de laboratorio siendo el objetivo principal de este trabajo, y del cual se presenta una amplia discusión en los capítulos siguientes.

$$f_r = \frac{0.15K}{\sigma h} \left[ 1 - \left( \frac{0.4h}{H_B} \right)^2 \right] \quad (2.41)$$

Para la fricción dentro del medio poroso, se emplea la formulación generada por Sollit y Cross (1972), la ecuación de Lorentz

$$f = \frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{\int_0^T \int_0^V \left( \frac{\nu}{K_p} |q|^2 + \frac{C_f}{\sqrt{K_p}} |q|^3 \right) dt dV}{\int_0^T \int_0^V (|q|^2) dt dV} \quad (2.42)$$

Por ultimo, siguiendo a Silva et al (2005), la ec. (2.38), ecuación modificada de la pendiente suave, buscando simplificar la notación, puede ser reducida a la forma de Helmholtz y puede ser escrita como se muestra en la ec. (2.44). El procedimiento se ilustra en los renglones siguientes.

Definiendo el factor normalizado

$$\Psi = \sqrt{I_1} \phi \Rightarrow \phi = \frac{\Psi}{\sqrt{I_1}} \quad (2.43)$$

y sustituyendo en ec. (2.38):

$$\nabla^2 \Psi + K_c^2 \Psi = 0 \quad (2.44)$$

donde

$$K_c^2 = (K^2 + i\sigma_D) + \frac{r(h, h_p)}{I_1} - \frac{\nabla^2 \sqrt{I_1}}{\sqrt{I_1}} \quad (2.45)$$

Multiplicando la ec. (2.44) por la raíz de  $I_1$ :

$$I^{1/2} \nabla^2 \Psi + I^{1/2} K_c^2 \Psi = 0 \quad (2.46)$$

Trabajando con el primer miembro de la ec. (2.46), en el que se sustituye la ec. (2.43)

$$\begin{aligned} I^{1/2} \nabla^2 \Psi &= I^{1/2} \nabla \left( \nabla \left( I^{1/2} \phi \right) \right) = I^{1/2} \nabla \left( I^{1/2} \nabla \phi + \phi \nabla I^{1/2} \right) = \\ &= I^{1/2} \left( \nabla I^{1/2} \nabla \phi + \nabla \phi \nabla I^{1/2} + \phi \nabla^2 I^{1/2} + I^{1/2} \nabla^2 \phi \right) = \\ &= I^{1/2} \nabla I^{1/2} \nabla \phi + I^{1/2} \nabla \phi \nabla I^{1/2} + I^{1/2} \phi \nabla^2 I^{1/2} + I \nabla^2 \phi \end{aligned} \quad (2.47)$$

Sustituyendo ecs. (2.43) y (2.45) en el segundo miembro de ec. (2.46), y desarrollando

$$\begin{aligned} I^{1/2} K_c^2 \Psi &= I^{1/2} \left( (K^2 + i\sigma_D) + \frac{r(h, h_p)}{I_1} - \frac{\nabla^2 \sqrt{I_1}}{\sqrt{I_1}} \right) I^{1/2} \phi = \\ &= (K^2 + i\sigma_D) I \phi + r(h, h_p) \phi - I^{1/2} \phi \nabla^2 \sqrt{I_1} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Reagrupando las ecs. (2.47) y (2.48), la ec. (2.46) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} I^{1/2} \nabla^2 \Psi + I^{1/2} K_c^2 \Psi &= I^{1/2} \nabla I^{1/2} \nabla \phi + I^{1/2} \nabla \phi \nabla I^{1/2} + I^{1/2} \phi \nabla^2 I^{1/2} + I \nabla^2 \phi + \\ &(K^2 + i\sigma_D) I \phi + r(h, h_p) \phi - I^{1/2} \phi \nabla^2 \sqrt{I_1} = \\ &= I^{1/2} \nabla I^{1/2} \nabla \phi + I^{1/2} \nabla \phi \nabla I^{1/2} + I \nabla^2 \phi + (K^2 + i\sigma_D) I \phi + r(h, h_p) \phi = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

tal que:

$$I^{1/2} \nabla I^{1/2} \nabla \phi + I^{1/2} \nabla \phi \nabla I^{1/2} + I \nabla^2 \phi + [(K^2 + i\sigma_D) I + r(h, h_p)] \phi = 0 \quad (2.50)$$

Y como:

$$I^{1/2} \nabla I^{1/2} \nabla \phi + I^{1/2} \nabla \phi \nabla I^{1/2} = 2I^{1/2} \nabla \phi \nabla I^{1/2} = \nabla \phi \nabla I$$

$$\Rightarrow$$

$$\nabla \phi \nabla I + I \nabla^2 \phi = \nabla (I \nabla \phi) \tag{2.51}$$

Se obtiene la ec. (2.38)

$$\nabla_h (I_1 \nabla \phi) + \left[ (K^2 - i \sigma_D) I_1 + r(h, h_p) \right] \phi = 0 \tag{2.52}$$

Quedando demostrado de esta forma.

### 2.3 CONDICIONES DE FRONTERA

Hasta el momento son muy diversas las aproximaciones que se han presentado en la literatura especializada para representar las condiciones de frontera; sin embargo, todavía es mucho lo que queda por realizar al respecto. En particular, para la implementación numérica armónica del modelo modificado de la ecuación de la pendiente suave se presentan dificultades considerables al representar fronteras abiertas, donde el dominio computacional intercepta con agua de mar que se encuentra fuera de la malla de estudio. Normalmente, estas fronteras además de incluir al oleaje incidente, contienen la simulación de un conjunto de ondas perturbadas originadas por efectos batimétricos o la presencia de otras fronteras. El oleaje perturbado no es conocido al inicio, por lo que la finalidad es, precisamente, su cálculo de estas zonas. En un buen número de modelos comerciales, la frontera abierta normalmente se coloca lo suficientemente lejos del área de interés, intentando que las imprecisiones en las condiciones de frontera no afecten los resultados. Sin embargo, esta práctica resulta en un aumento del trabajo computacional y en la mayoría de los casos no logra su objetivo.

Para la correcta solución y buena aproximación en los cálculos realizados con la ecuación de la pendiente suave, es necesario definir las condiciones de frontera adecuadas. Las condiciones de frontera pueden ser de varios tipos, y destacan por su importancia:

- Condición cinemática del fondo, que en el caso de fondo impermeable indica que no hay flujo de agua a través del fondo, o bien, en otros casos, describe el flujo a través de él.
- Condición cinemática de superficie libre, que describe el movimiento de las partículas de agua que a lo largo del tiempo permanecen en la superficie libre.
- Condición dinámica de superficie libre, indica que la presión sobre la superficie libre del agua es igual a la presión atmosférica.
- Condiciones laterales de contorno, definen el comportamiento del flujo en los límites laterales del dominio, por ejemplo la línea de costa o estructuras artificiales;

o bien describen el comportamiento periódico de las ondas progresivas. Pueden ser absorbentes, reflejantes, parcialmente reflejantes o de radiación.

En la mayoría de los modelos se coincide en la aplicación de las tres primeras y aplican la última en forma diferente. A continuación se demuestra la forma de las condiciones laterales de contorno empleadas en este trabajo.

#### CONDICIÓN DE FRONTERA DE LADO DE MAR

Existen diversas formas mediante las cuáles se pueden obtener estas condiciones de frontera, en este caso la formulación de estas condiciones, se hará suponiendo que la frontera de mar adentro se encuentra en una parte en la que el fondo es plano sin pendiente. Así, se hace la consideración de que el potencial fuera del dominio queda representado como la suma de un potencial incidente y uno reflejado, quedando definido como:

$$\Psi_1 = \sqrt{I_1} f(z)(Ae^{ikx} + Re^{-ikx}) \quad (2.53)$$

El potencial dentro del dominio entonces será

$$\Psi_2 = f(z)\psi \quad (2.54)$$

En la dirección  $x$ , se debe cumplir con diversas condiciones, la primera, continuidad de flujo de masa,

$$\Psi_1 = \Psi_2 \quad (2.55)$$

y continuidad de presiones

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \quad (2.56)$$

Sustituyendo ecs. (2.53) y (2.54) en (2.55):

$$\sqrt{I_1} f(z)(Ae^{ikx} + Re^{-ikx}) = f(z)\psi \quad (2.57)$$

Valuando en  $x=0$

$$\sqrt{I_1} f(z)(A + R) = f(z)\psi \quad (2.58)$$

Por ultimo, trabajando la ecuación anterior para despejar  $R$ :

$$R = \frac{\psi}{\sqrt{I_1}} - A \quad (2.59)$$

Por otro lado, sustituyendo y operando ecs. (2.53) y (2.54) en (2.56):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{I_1} f(z) [Ae^{ikx} + Re^{-ikx}] \right) = \left( \sqrt{I_1} f(z) [ikAe^{ikx} - ikRe^{-ikx}] \right) = \\ &= ik\sqrt{I_1} f(z) [Ae^{ikx} - Re^{-ikx}]\end{aligned}\quad (2.60)$$

Valuando en  $x = 0$

$$\left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right|_{x=0} = ik\sqrt{I_1} f(z) [A - R] \quad (2.61)$$

Ahora para ec. (2.54)

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (f(z)\psi) = \psi \frac{\partial f(z)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.62)$$

Así que:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \quad (2.63)$$

$$ik\sqrt{I_1} f(z) [Ae^{ikx} - Re^{-ikx}] = \psi \frac{\partial f(z)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.64)$$

Valuando en  $x = 0$ , ortogonalizando e integrando de 0 a  $-h$

$$ik\sqrt{I_1} I_1 [A - R] = \psi I_2 + I_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.65)$$

$\Rightarrow$

$$ik\sqrt{I_1} [A - R] = \psi \frac{I_2}{I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Sustituyendo R obtenida en ec. (2.59), tenemos que:

$$ik\sqrt{I_1}\left[A - \left(\frac{\psi}{\sqrt{I_1}} - A\right)\right] = \psi \frac{I_2}{I_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \tag{2.66}$$

$$2ik\sqrt{I_1}A - ik\psi = \psi \frac{I_2}{I_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

∴

$$2ik\sqrt{I_1}A - \left(ik + \frac{I_2}{I_1}\right)\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \tag{2.67}$$

La ecuación anterior, define la condición de frontera para el lado del mar.

#### CONDICIÓN DE FRONTERA DE LADO DE COSTA

Como se hizo con la condición de lado de mar es necesario definir un potencial de velocidades que se propaga al infinito, justo fuera del dominio. Para este caso éste quedará representado por un potencial que se transmite y otro que se refleja. De tal forma que:

$$\Psi_3 = \psi f(z)(e^{ikx} + K_R e^{-ikx}) \tag{2.68}$$

De lo anterior, podemos decir que la velocidad de onda en el contorno será:

$$\frac{\partial\Psi_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\psi f(z)[e^{ikx} + K_R e^{-ikx}]) = ik\psi f(z)[e^{ikx} - K_R e^{-ikx}] \tag{2.69}$$

Si se multiplica la ecuación anterior por  $\Psi_3$ , y se divide por la expresión para  $\Psi_3$

$$\frac{\partial\Psi_3}{\partial x} = \frac{ik\psi f(z)[e^{ikx} - K_R e^{-ikx}]}{\psi f(z)[e^{ikx} + K_R e^{-ikx}]} \Psi_3 = ik \frac{[e^{ikx} - K_R e^{-ikx}]}{[e^{ikx} + K_R e^{-ikx}]} \Psi_3 \tag{2.70}$$

Definiendo  $\gamma$  como:

$$\gamma = \frac{[1 - K_R]}{[1 + K_R]} \tag{2.71}$$

La ec. (2.70) puede ser escrita como:

$$\frac{\partial\Psi_3}{\partial x} = ik\gamma\Psi_3 \tag{2.72}$$

La cual representa la condición de frontera de lado de la costa.

## 2.4 IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

La discretización de las ecuaciones derivadas en las secciones anteriores, se basa en un método de diferencias finitas centrales, el cual será truncado en el cuarto orden de acuerdo a un desarrollo en series de Taylor.

Se tiene especial cuidado en los primeros nodos del dominio por el lado de mar, por aquellas celdas que, de acuerdo a la discretización quedan fuera del dominio de cálculo. Por esta razón se discretiza la ec. (2.67), ecuación de condición de frontera de mar abierto

$$-3\Psi_{0,1} + (12\Delta x C_{1,1} - 10)\psi_{1,1} + 18\psi_{2,1} - 6\psi_{3,1} + \psi_{4,1} = 120\Delta x C_{2,1} \quad (2.73)$$

junto con la ecuación de gobierno ec. (2.44):

$$10\Psi_{0,1} + (12\Delta x^2 K_c^2 - 15)\psi_{1,1} - 4\psi_{2,1} + 14\psi_{3,1} - 6\psi_{4,1} + \psi_{5,1} = 12\Delta x^2 C_3 \quad (2.74)$$

para así, entre ambas ecuaciones eliminar el término de la celda ficticia generando para la condición de mar abierto se obtiene la siguiente expresión:

$$(120\Delta x C_1 + 36\Delta x^2 K_c^2 - 145)\psi_{1,1} + 168\psi_{2,1} - 18\psi_{3,1} - 8\psi_{4,1} + 3\psi_{5,1} = 120\Delta x C_2 + 36\Delta x^2 C_3 \quad (2.75)$$

Como la discretización de las ecuaciones es de cuarto orden, es necesario realizar la discretización especial para los nodos  $i=2$  e  $i=n-1$ , quedando para  $i=2$

$$10\psi_{1,1} + (12\Delta x^2 - 15)\psi_{2,1} - 4\psi_{3,1} + 14\psi_{4,1} - 6\psi_{5,1} + \psi_{6,1} = 0 \quad (2.76)$$

Y para el resto del dominio

$$-\psi_{i-2,1} + 16\psi_{i-1,1} + (12\Delta x^2 B - 30)\psi_{i,1} + 16\psi_{i+1,1} - \psi_{i+2,1} = 0 \quad (2.77)$$

para  $i=n-1$

$$\psi_{i-4,1} - 6\psi_{i-3,1} + 14\psi_{i-2,1} - 4\psi_{i-1,1} + (12\Delta x^2 - 15)\psi_{i,1} + 10\psi_{i+1,1} = 0 \quad (2.78)$$

Para ala condición hacia la costa, trabajando en la misma forma que para la condición de mar, se tiene las ecs. (2.72) y (2.44):



$$-\psi_{i-3,1} + 6\psi_{i-2,1} - 18\psi_{i-1,1} + (12\Delta x D_1 + 10)\psi_{i,1} + 3\psi_{i+1,1} = 0 \quad (2.79)$$

$$\psi_{i-4,1} - 6\psi_{i-3,1} + 14\psi_{i-2,1} - 4\psi_{i-1,1} + (120\Delta x^2 B - 15)\psi_{i,1} + 10\psi_{i+1,1} = 0 \quad (2.80)$$

Ahora, eliminando  $\psi_{i+1}$  de las ecuaciones anteriores

$$-3\psi_{i-4,1} + 8\psi_{i-3,1} + 18\psi_{i-2,1} - 168\psi_{i-1,1} + (120\Delta x D_1 - 36\Delta x^2 B + 145)\psi_{i,1} = 0 \quad (2.81)$$

Con la forma de las ecuaciones anteriores, se genera un sistema de ecuaciones que se resuelve con el método de eliminación Gaussiana con pivoteo parcial en un ambiente de programación Fortran.

### 3 DISIPACIÓN DE ENERGÍA EN LA ROTURA DEL OLEAJE

#### 3.1 TIPOS DE ROTURA EN EL OLEAJE

La rotura del oleaje se puede presentar tanto en aguas profundas como en aguas someras, siendo bastante distinto el proceso en ambos casos. En aguas profundas el viento generalmente es el agente que produce su rotura por la excesiva cantidad de energía que éste le proporciona. Para aguas someras son principalmente dos los factores que pueden producir la rotura de oleaje, por un lado, la rotura ocurre sobre una pendiente debido a limitaciones en la profundidad, dado que, la celeridad de la onda es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad, el frente de la onda se desplaza a una velocidad menor que la cresta de la onda dando lugar a un vuelco de la cresta conocido rotura de la onda rotura que se produce en la llamada zona de rompientes o *surf*, o bien, la presencia de una pendiente muy pronunciada que obliga al oleaje a liberar energía. Esta rotura produce usualmente un chorro de agua que se inyecta cerca de la base de la onda dando lugar a una gran salpicadura.

Cuando la ola rompe, la turbulencia asociada a la rotura es un fenómeno de gran importancia, ya que además de disipar la energía de las olas, es uno de los principales mecanismos generadores de corrientes y, en consecuencia, de transporte de sedimentos. Además, en zonas de aguas someras, la rotura puede ser un factor limitante a la hora de determinar la altura de ola de diseño de estructuras marítimas.

En los modelos de propagación es importante realizar un adecuado análisis de la rotura, empleando aquellos que permitan describir tanto la rotura como la eventual recomposición de las ondas. Esto es, una vez que una ola ha roto puede tener la suficiente energía como para volver a iniciar el movimiento oscilatorio e inclusive volver a romper.

Este trabajo se enfoca en el estudio de los efectos que la rotura origina al modificar la forma, el movimiento y la disipación de energía de una ola que viaja sobre una playa con pendiente uniforme, y no tanto en los detalles del proceso de rotura en si mismo. Físicamente se pueden distinguir diversos tipos de rompiente y una de las formas en las que se puede clasificar, es de acuerdo al número de Iribarren o número de similaridad de surf  $I_r$ , el cual se define como:

$$I_{R_0} = \frac{m}{\sqrt{H_0/L_0}} \tag{3.1}$$

para aguas profundas, donde  $m$  es la pendiente de la playa,  $H_0$  la altura de ola en aguas profundas y  $L_0$  la longitud de onda en aguas profundas. Otra opción consiste en usar los valores locales de los parámetros que intervienen en la formulación de Iribarren, quedando como:

$$I_R = \frac{m}{\sqrt{H/L}} \quad (3.2)$$

A continuación se muestra una tabla en la que se presentan los rangos en los que se puede clasificar el tipo de rompiente de acuerdo al número de Iribarren.

**Tabla 3.1 Rango de valores del número de Iribarren para los diferentes tipos de rotura**

TIPO DE ROTURA	NÚMERO DE IRIBARREN
DESCRESTAMIENTO (SPILLING)	$I_r < 1.0$
VOLUTA (PLUNGING)	$1.0 < I_r < 2.6$
COLAPSO (COLAPSING)	$2.6 < I_r < 3.1$
OSCILACIÓN (SURGING)	$3.1 < I_r < 4.0$
NO EXISTE ROTURA	$I_r > 4.0$

Las distintas formas de rotura que se definen en la tabla anterior quedan ilustradas en las imágenes que se muestran en la Fig 3.1.

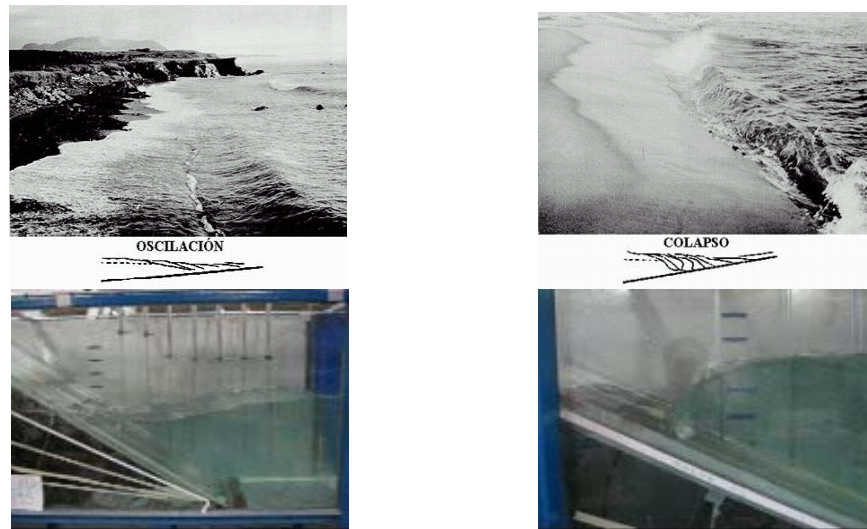


DESCRESTAMIENTO



VOLUTA





**Fig 3.1. Tipo de rotura del oleaje (SPM, 1984)**

El tipo de rotura en descrestamiento se observa cuando olas con gran peralte inciden en playas con pendientes bastante gentiles. En este caso el agua cerca de la cresta vuelca mientras que la cresta de la ola toma una forma afilada con el decremento de la profundidad, y mantiene una forma casi simétrica de una ola permanente. La rotura tipo descrestamiento y voluta siguen el mismo proceso, pero difieren en la magnitud del vuelco.

La rotura voluta tiene la característica de presentarse en playas con pendientes relativamente empinadas. Las olas toman una forma afilada en la cresta, después la ola vuelca, y la cresta volcada se hunde en el agua. Este tipo de rotura produce una deformación de la ola antes de romper es más rápida que la que se presenta cuando la ola rompe con el tipo descrestamiento. El movimiento de la partícula en el tipo voluta es más violento, y es típico que aparezcan nubes de burbujas en el punto donde la ola vuelca y se incrusta sobre el agua.

El tipo de rotura en oscilación se presenta cuando olas de pequeño peralte se propagan sobre una playa con una pendiente pronunciada. En la oscilación también se exhibe una asimetría vertical similar a la de la voluta. Las olas rompen como se viajaran sobre el flujo de retorno de la ola predecesora.

El tipo colapso es un tipo de rotura que se clasifica entre voluta y oscilación y fue propuesto por Galvin en el año de 1972.

La forma en la que se clasifican los tipos de rotura es bastante subjetiva, encontrando diversas formas para su clasificación además de las comentadas en los párrafos anteriores.

### 3.2 CRITERIOS DE ROTURA

Una de las razones por las cuales una ola rompe, es cuando su altura alcanza un cierto valor límite relativo a su longitud o a la profundidad. Éste es un punto de interés en la ingeniería por las razones ya comentadas y en principio han sido propuestos distintos modelos para predecir el lugar donde se presenta la rotura, llamados criterios de rotura, expresiones con las que se busca estimar de alguna forma la altura de ola en rotura inminente y la profundidad en la que se presenta. Algunos son expresados en términos de las condiciones locales, tomando en cuenta parámetros como la altura y el periodo de la ola y la profundidad en la rompiente, otros dan relaciones entre las condiciones en aguas profundas y en el punto de rompiente.

El primero de los criterios de rotura que se describe, se basa en estudios de ondas solitarias generadas en profundidad constante, mostrando que la ola rompe cuando la altura excede aproximadamente el 0.78 de la profundidad del agua, lo cual nos conduce directamente a la asunción de una función lineal para la profundidad local y se plantea la fórmula mas común y simple que se usa propuesta por McKowan (1891):

$$H_B = \gamma h_B \quad (3.3)$$

Miche (1951) basándose en análisis teóricos obtiene el modelo que se muestra a continuación.

$$\frac{H_B}{L_B} = 0.142 \tanh\left(2 \pi \frac{h_B}{L_B}\right) \quad (3.4)$$

donde:  $h_B$ : Profundidad de rompiente  
 $L_B$ : Longitud de onda en el punto de rompiente  
 $H_B$ : Altura de ola rompiente.

Por otro lado, Weggel (1972) propone la siguiente expresión para estimar el valor de  $\gamma$ .

$$\gamma_B = b - a = \frac{H_B}{gT^2} \quad (3.5)$$

Con  $a = 43.8(1 - e^{-19 \tan \beta})$  y  $b = 1.56/(1 + e^{-19 \tan \beta})$

Posteriormente, experimentos con ondas periódicas muestran la influencia de la pendiente del fondo, siendo Goda (1975) quien desarrolla la siguiente expresión:

$$\frac{H_B}{L_0} = A \left[ 1 - e^{\left\{ -1.5 \pi \frac{h_B}{L_0} (1 + 15 \tan^{4/3} \beta) \right\}} \right] \quad (3.6)$$

donde  $A$  es una constante empírica igual a 0.17 y  $\beta$  la pendiente de la playa. Ostendorf y Madsen (1979) proponen una ecuación de la forma

$$\frac{H_B}{L_B} = 0.14 \tanh \left[ (0.8 + 5 \tan \beta) 2\pi \frac{h_B}{L_B} \right] \quad \tan \beta < 0.1 \quad (3.7)$$

$$\frac{H_B}{L_B} = 0.14 \tanh \left[ 1.3(2\pi) \frac{h_B}{L_B} \right] \quad \tan \beta > 0.1 \quad (3.8)$$

donde:  $L_B$  es la longitud de onda en el punto de rompiente y se calcula con la relación de dispersión de la teoría lineal usando el período de la onda y la profundidad de rompiente.

Continuando con la revisión de los trabajos desarrollados, Sunamura (1983) propone un criterio empírico para la rotura tomando en cuenta resultados obtenidos en laboratorio trabajando con canales largos, descrito con la siguiente ecuación.

$$\frac{H_B}{h_B} = 1.09 (\tan \beta)^{0.19} \left( \frac{h_B}{L_0} \right)^{-0.1} \quad (3.9)$$

Los modelos descritos en los párrafos anteriores se basan en parámetros medidos justo en la zona de rotura, sin embargo, es muy común encontrarse con el problema de estimar la altura de ola rompiente dada una condición de ola en aguas profundas. Para ello, Komar y Gaughan (1973) obtienen la siguiente relación empleando teoría lineal:

$$\frac{H_B}{H_o} = \frac{0.563}{\left( \frac{H_o}{L_0} \right)^{1/5}} \quad (3.10)$$

donde el coeficiente 0.563 fue empleado para ajustar los datos experimentales y como se puede observar, esta relación no toma en cuenta la pendiente de la playa.

Por su parte, Goda (1970) obtiene resultados experimentales y para ello utiliza la altura de ola en aguas profundas corregida, la cual esta dada por la siguiente ecuación

$$H'_0 = K_r K_d K_f H_0 \quad (3.11)$$

donde:  $H_o$  : Altura de ola en aguas profundas  
 $K_r$  y  $K_d$  coeficientes de refracción y de difracción respectivamente  
 $K_f$  es el promedio de la disipación en altura de ola debido a la fricción

En otros trabajos similares, Le Méhauté y Koh (1967) proponen

$$\frac{H_B}{H_0} = 0.76(\tan \beta)^{1/7} \left( \frac{H_0}{L_0} \right)^{-1/4} \quad (3.12)$$

El cálculo de la profundidad de rompiente,  $h_B$ , es directo del criterio de rompiente que se discutió en las expresiones de las ecs. 3.3 a la 3.9 si la altura de rompiente,  $H_B$ , se evalúa de los resultados obtenidos en las ecs. 3.10 a 3.12.

Es evidente que se debe desarrollar un criterio de rompiente para olas irregulares, ya que las olas en el océano son irregulares. Las olas rompientes son, en definitiva, no lineales, por esto el método del análisis espectral, que es la descomposición de Fourier en el dominio de la frecuencia, no se puede aplicar. Como una alternativa, es razonable definir una ola individual aplicando el método de pasos ascendentes (o descendentes) por cero y considerar y considerar la condición de rompiente de la ola.

Goda (1975) introdujo un concepto probabilística al coeficiente A de su criterio de rompiente, como una variable de 0.12 a 0.18.

Kimura e Iwagaki (1978); Isobe, Nichimura y Isuka (1980); y Sawaragi y Iwata (1981) estudiaron a condición de rompiente para las olas irregulares de manera experimental. Todos estos autores concluyen que las olas irregulares tienden a romper con peraltes de ola más pequeños que las olas regulares.

Por otro lado, Watanabe, Hara y Horikawa (1983) estudiaron un criterio de rompiente para un campo de olas compuesto, es decir, donde se pudiera presentar la superposición de ondas debido a la refracción, reflexión y difracción. Ellos retomaron los datos recolectados por Goda (1970a), usando una relación de la magnitud de la velocidad horizontal  $u_{B0}$  de la partícula de agua para la celeridad de la onda. Para un tren de oleaje unidireccional simple, la relación en la profundidad de rompiente,  $h_B$ , esta dada por:

$$\frac{u_{B0}}{c_B} = \pi k_s \left( \frac{H_0}{L_0} \right) \left( \frac{\cosh(k_B h_B)}{\sinh(k_B h_B)} \right)^2 \quad (3.13)$$

Para estimar la energía de la ola se puede aplicar el concepto de conservación del flujo de energía, buscando definir una expresión del criterio de rompiente en términos de la energía de la ola, Izumiya y Horikawa (1983) propusieron la siguiente relación para este propósito. Primero se evalúa la altura de ola rompiente con la expresión propuesta por Goda (1975), después la altura de ola nos proporciona la energía de la ola con

$$\frac{E_B}{\rho g h^2} = \frac{1}{1 + a \left( \frac{H_B}{h} \right)} \left( \frac{H_B}{h} \right)^2 (U_{SB})^{-1/2} \left\{ 1 - \frac{2}{1 + a \left( \frac{H_B}{h} \right)} (U_{SB})^{-1/2} \right\} \quad (3.14)$$

donde:  $U_{SB} = g H_B \frac{T^2}{h^2}$  es el parámetro de Ursell para aguas someras y  $a$  es una constante empírica igual a 0.33.

Cuando las olas exceden la energía dada por esta ecuación se asume que rompen. Esta ecuación se dedujo considerando teoría lineal y asumiendo que la energía total es dos veces el potencial de energía.

### 3.3 MODELOS DE DISIPACIÓN DE ENERGÍA

Cuando en algún punto de la zona de estudio, ya sea en el fondo o a lo largo de la columna de agua, se presenta disipación, ésta origina que el oleaje sufra los procesos de difracción o atenuación. La inclusión de un término de pérdida de energía en un modelo de propagación fue realizado por primera vez por Booij (1981) y extendido por Dalrymple (1984). En función de las características del fenómeno a modelar será necesario considerar los efectos de la disipación de energía que se puede manifestar de diversas formas, desde amortiguamiento del oleaje por presencia de capas laminares viscosas de fondo o de superficie, pérdida de energía por la presencia de capa límite turbulenta en el fondo, disipación por fricción de fondo y disipación de energía debida a la rotura del oleaje. En este trabajo el termino  $f_d$  de la ec. (2.38) sólo se considera el efecto de los dos últimos, siendo la transformación de la energía por rotura el fenómeno a estudiar en esta tesis, debido a la influencia en el cálculo de la altura de ola.

En las últimas décadas se han desarrollado diferentes esfuerzos por desarrollar modelos que describan la transformación del oleaje en la zona de surf, basándose en mediciones en campo y trabajo de laboratorio, sin que hasta el momento alguno, sea lo suficientemente claro debido a la turbulencia inducida por la rotura.

Autores como Keller et al (1960), Ho et al (1962) y Shen et al(1963) aplicaron las ecuaciones para calcular las características de la ola en la zona de rompiente descritas en la sección anterior, asumiendo que la condición de remolino se satisface en el frente de las olas rompientes. Para estimar las alturas de ola después de la línea de rotura, es conveniente plantear la ecuación de conservación del flujo de energía de una ola, logrando una expresión de balance de energía para olas que viajan hacia la costa en dirección normal, asumiendo que se presenta un remolino vertical justo frente de una ola después de romper, y que es escrita como:

$$\frac{d}{dx}(EC_g) = -\delta(x) \quad (3.15)$$

Donde  $(EC_g)$  es el flujo de energía en la zona de estudio (Anexo 1) y  $\delta$  un coeficiente de disipación de energía. De esta relación parten los diversos estudios para desarrollar una expresión valida que describa el fenómeno.



Le Mehaute (1962) encontró una aproximación para la rompiente de ola aceptando la formación de remolinos verticales justo después de donde la ola rompe, haciendo un trabajo análogo a un salto hidráulico, en el cual  $\delta$  esta dado por:

$$\delta = \frac{\rho g}{4} \frac{(BH)^3}{h^2} Q \quad (3.16)$$

Con  $\rho$  como la densidad del agua,  $g$  la gravedad,  $H$  la altura de ola,  $h$  la profundidad y  $Q$  el transporte de masa a través del remolino.  $B$  es un parámetro que representa la fracción de altura de ola debida al a rotura. Esta misma ecuación ha sido empleada de diferentes formas aplicadas a ondas periódicas generadas en laboratorio.

Otras aproximaciones se han basado en representar la disipación de energía interna en términos de las fluctuaciones de velocidad turbulenta, que son asumidos decrecientes en forma exponencial a partir del punto de rotura, Isumiya y Horikawa (1984) dieron la siguiente ecuación asumiendo una ley de similitud para la estructura de la turbulencia inducida en la rompiente.

$$\delta = \beta_0 (M_*^2 - M_{*s}^2)^{1/2} \frac{E^{3/2}}{\rho^{1/2}} D^{3/2} \left( \frac{2c_g}{c} - 1 \right)^{1/2} \quad (3.17)$$

$$M_*^2 = \frac{E c_g}{c \rho g D^2} \quad (3.18)$$

donde  $\beta_0$  es una constante y  $M_{*s}$  es el valor del flujo de energía adimensional en la zona de reformación de la ola y se toma de 0.009 basado en datos de laboratorio.

En otras aproximaciones, Mizuguchi (1980) trabaja una expresión para  $\delta$  que satisface los dos requerimientos para una altura de ola estable en una profundidad de agua uniforme y para relaciones aproximadamente constantes de altura de ola con la profundidad de agua en playas con pendiente uniforme:

$$\delta = \left( \frac{\rho g H^2}{8} \right) 4k^2 v_{eB} \left\{ \frac{\left( \frac{H}{D} - \gamma_R \right)}{\gamma_R} \right\}^{1/2} \quad (3.19)$$

$$v_{eB} = \frac{5g \tan \beta_B}{\left[ 8k_B \sigma \left( 1 - \frac{\gamma_R}{\gamma_B} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{3\gamma_B^2}{2} \right) \right]} \quad (3.20)$$

donde  $\nu_{eB}$  es la viscosidad cinemática del remolino y los subíndices  $B$  y  $R$  denotan valores valuados en el punto de rompiente y en la zona de reformación de la ola respectivamente. Los parámetros a determinar para usar este método son los dos coeficientes  $\gamma_R$  y  $\gamma_B$ . Sin embargo,  $\gamma_R$  normalmente esta dado por el criterio de rompiente.

Battjes y Janssen (1978), estiman una función para oleaje regular escrita de la forma:

$$\delta = \frac{\alpha}{4} \rho g f H^2 \quad (3.21)$$

Donde  $f$  es la frecuencia y  $\alpha$  adquiere generalmente el valor de 1. Además trabajan con oleaje irregular, introduciendo una función de distribución de probabilidad como la de la ec. 2.22 después de estudios de laboratorio con olas no periódicas sobre playas con pendiente constante y con barras.

$$P\left(\frac{H}{H_{1/3}^*}\right) = 2 a^2 \left(\frac{H}{H_{1/3}^*}\right) e^{-a^2 \left(\frac{H}{H_{1/3}^*}\right)^2} \quad (3.22)$$

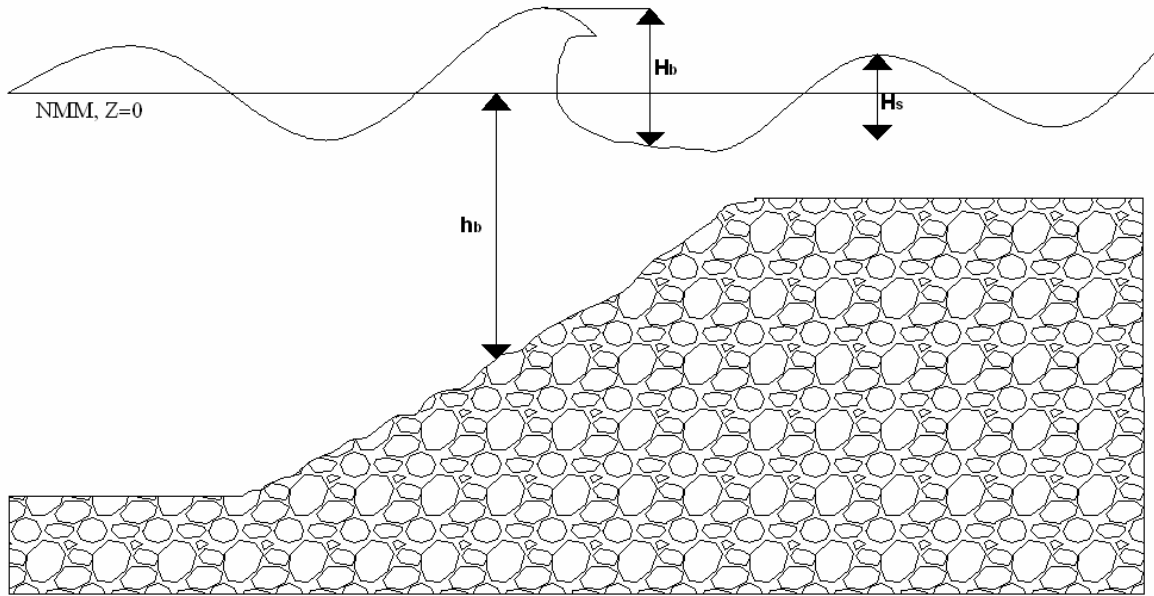
Enseguida, diversos autores se han dedicado a modificar la forma de la función de distribución de probabilidad, sin que alguno de ellos tenga la capacidad de representar la transformación del oleaje en la zona de surf.

Otros estudios con oleaje regular suponen que la ola después de romper, alcanza una altura estabilizada, con un esquema de laboratorio con fondo horizontal después de donde inicia la rotura. Horikawa y Kuo (1966) también proponen un modelo para este efecto, basándose en el movimiento de un salto hidráulico.

### 3.4 MODELO BASADO EN EL CRITERIO DE ALTURA DE OLA ESTABLE

Recientemente Dally, Dean y Dalrymple (1984) presentaron un modelo que toma en cuenta la reformación de la ola. Ellos asumen que la disipación es simplemente proporcional a la diferencia entre el flujo de energía local y aquel en la zona de reformación, dividido entre la profundidad de agua local, obteniendo buen ajuste entre los valores predichos y los valores medidos de la transformación de la altura de ola. El modelo incluye dos parámetros obtenidos empíricamente, y que representan el foco de atención en esta tesis.

El principio se basa considerando una ola que se propaga sobre un fondo con pendiente constante hasta el punto en el que la ola rompe, lugar donde el fondo se vuelve horizontal. La rotura no para instantáneamente porque el fondo es constante, ésta continua formando remolinos verticales una y otra vez, hasta que la ola se regenera y alcanza la altura de ola estable, como se muestra en la siguiente figura.



**Fig 3.2. Variables de interés del modelo de disipación.**

La turbulencia es intensa después de que la ola rompe y decrece hasta llegar al lugar donde la ola se vuelve estable. Esa tasa de disipación de energía usada en la ec. (3.15), se asume proporcional a la diferencia entre el flujo de energía en el punto de rotura y el flujo de energía en la zona de altura estable, escribiéndolo como:

$$\frac{d}{dx}(EC_g) = -\frac{K}{h} [(EC_g) - (EC_g)_s] \quad (3.23)$$

Donde  $K$  es un coeficiente de decaimiento adimensional,  $h$  la profundidad del agua. Este coeficiente  $K$  es uno de los parámetros de atención en este trabajo, y que será calibrado en función de lo observado en laboratorio.  $EC_g$  es el flujo de energía integrado en la profundidad y promediado en el tiempo de acuerdo con teoría lineal para la zona de rotura y  $EC_g_s$  es el flujo de energía asociado a la altura de ola estable. Con la celeridad de grupo  $C_g$  tomada como  $(gh)^{1/2}$ , entonces el flujo de energía puede ser escrito como:

$$EC_g = \left( \frac{1}{8} \rho g H^2 \right) \sqrt{gh} \quad (3.24)$$

La altura de ola estable  $H_s$  es definida como:

$$H_s = \Gamma h \quad (3.25)$$

Donde  $\Gamma$  es un coeficiente adimensional que también será calibrado a pesar de no ser medido directamente debido a la configuración de laboratorio empleada en este trabajo, que es distinta a la simulada en los ensayos de laboratorio realizados por Horikawa y Kuo

(1966), quienes emplearon una configuración como la que se observa en la Fig 3.2, mostrando que las alturas de ola quedan bien representadas por este criterio de ola estable, pareciendo razonable esta suposición, logrando escribir la ec. (3.23) de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( H^2 h^{1/2} \right) = -\frac{K}{h} \left[ \left( H^2 h^{1/2} \right) - \left( \Gamma^2 h^{5/2} \right) \right] \quad (3.26)$$

Buscando solución para esta expresión, la ecuación anterior puede ser escrita como

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{K}{h} G = K \Gamma^2 h^{3/2} \quad (3.27)$$

donde

$$G = H^2 (h)^{1/2} \quad (3.28)$$

La cual representa una ecuación diferencial de forma conocida y con solución general dada por:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + P(x)G = Q(x) \quad (3.29)$$

dada por

$$G \exp\left(\int P dx\right) = \int Q \exp\left(\int P dx\right) dx + C \quad (3.30)$$

Que para este caso

$$P(x) = Kh^{-1} \quad (3.31)$$

y

$$Q(x) = K \Gamma^2 h^{3/2} \quad (3.32)$$

Además, como

$$\int P dx = K \int h^{-1} dx \quad (3.33)$$

$$\int Q \exp \int P dx = K \Gamma^2 \int h^{3/2} \exp\left(K \int h^{-1} dx\right) dx \quad (3.34)$$

La ecuación (3.27) es resuelta por Dally et al (1984) para el caso de fondo horizontal, fondo con pendiente constante y también con un perfil de equilibrio (perfil Dean). En este trabajo solo se aborda el caso con fondo de pendiente constante, en el que  $h$  se define como se muestra a continuación

$$h(x) = h_b - mx \quad (3.35)$$

Donde  $m$  es la pendiente de la playa. Sustituyendo  $h$  en la ec. (3.33), se obtiene:

$$-\frac{K}{m} \ln(h_b - mx) \quad (3.36)$$

Ahora evaluando para el caso la ec. (3.34),

$$-\frac{K}{m} \frac{\Gamma^2}{\left(\frac{5}{2} - \frac{K}{m}\right)} (h_b - mx)^{\left(\frac{5}{2} - \frac{K}{m}\right)} \quad (3.37)$$

Insertando estas dos ultimas ecuaciones en ec. (3.30), se puede escribir el modelo de disipación de la siguiente forma

$$H^2 h^{\left(\frac{5}{2} - \frac{K}{m}\right)} = -\frac{K}{m} \frac{\Gamma^2}{\left(\frac{5}{2} - \frac{K}{m}\right)} h^{\left(\frac{5}{2} - \frac{K}{m}\right)} + C \quad (3.38)$$

Aplicando condiciones iniciales en  $x=0$  dadas por

$$G = G_b = H_b^2 (h_b)^{\frac{1}{2}} \quad (3.39)$$

se obtiene

$$H^2 h^{\left(\frac{5}{2} - \frac{K}{m}\right)} = -\frac{K}{m} \frac{\Gamma^2}{\left(\frac{5}{2} - \frac{K}{m}\right)} h^{\left(\frac{5}{2} - \frac{K}{m}\right)} + H_b^2 h_b^{\left(\frac{5}{2} - \frac{K}{m}\right)} + \frac{K}{m} \frac{\Gamma^2}{\left(\frac{5}{2} - \frac{K}{m}\right)} h_b^{\left(\frac{5}{2} - \frac{K}{m}\right)} \quad (3.40)$$

Para obtener una forma de la ecuación anterior de forma adimensional, la expresión es manipulada y después de hacer algebra la ecuación anterior se puede escribir como sigue

$$\frac{H}{H_b} = \left[ \left( \frac{h}{h_b} \right)^{\left(\frac{5}{2} - \frac{K}{m}\right)} (1 + \alpha) - \alpha \left( \frac{h}{h_b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.41)$$

con

$$\alpha = \frac{K\Gamma^2}{m\left(\frac{5}{2} - \frac{K}{m}\right)} \left( \frac{h}{H} \right)_b^2 \quad (3.42)$$

En la ultima ecuación, se relacionan las variables de interés altura de ola y profundidad en la que se presenta la rotura ( $H_b, h_b$ ), con alturas de ola y su profundidad después de la línea

de rotura ( $H$ ,  $h$ ), variables que serán medidas directamente en laboratorio para la calibración de los coeficientes  $K$  y  $\Gamma$  que intervienen en este modelo de disipación de energía debida a la rotura del oleaje.

Kirby y Dalrymple (1986) emplean el modelo de la ec. (3.23) para adaptarlo y aplicarlo a la simplificación parabólica de la ecuación modificada de la pendiente suave empleando el término de disipación,  $f_{Dr}$ , desarrollado por Dalrymple (1984), para ello definieron la ecuación de balance de energía como

$$\frac{\partial EC_g}{\partial x} = -f_r E \quad (3.43)$$

donde

$$f_r = \frac{KC_g}{h} \left( 1 - \frac{E_e}{E} \right) \quad (3.44)$$

Sustituyendo la ecs. (3.24)  
y (3.25) en la (3.44) se tiene

$$f_r = \frac{KC_g}{h} \left( 1 - \frac{H_e^2}{H_B^2} \right) = \frac{KC_g}{h} \left( 1 - \frac{(\Gamma h)^2}{H_B^2} \right) = \frac{KC_g}{h} \left[ 1 - \left( \frac{\Gamma h}{2A} \right)^2 \right] \quad (3.45)$$

donde  $A$  es la amplitud máxima local,  $H_B$  corresponde a la altura de ola de rotura.

Con el fin de aplicar el mismo modelo de disipación en la ecuación modificada de la pendiente suave, ec. (2.38), Silva et al. (2003) modificaron  $f_r$  para incluirlo dentro del término multiplicado por la función  $I_l$ . Así, dividiendo por  $CC_g$  (celeridad y celeridad de grupo) se llega a:

$$f_r = \frac{Kk}{\sigma h} \left[ 1 - \left( \frac{\Gamma h}{H_B} \right)^2 \right] \quad (3.46)$$

## 4 TRABAJOS EN LABORATORIO

### 4.1 CANAL DE OLAS

La calibración del modelo de disipación de energía, objetivo principal de este trabajo, se realiza con base a la observación directa del fenómeno de la rotura del oleaje en los trabajos experimentales desarrollados para la presente tesis. Esta herramienta permite reproducir diversos ambientes y medir las variables que intervienen en ellos.

La instalación en la que se desarrollan estos ensayos fue el canal de olas del laboratorio de costas y puertos del Instituto de Ingeniería de la UNAM. Este canal mide 37 m de largo, 0.80 m de ancho y tiene una profundidad máxima de 1.20 m. El generador de olas es de tipo pistón impulsado con un motor eléctrico controlado desde un computador. Este trabajo se limita al desarrollo de experimentos generando oleaje regular, aunque el generador de este laboratorio es capaz de producir oleaje irregular y ondas solitarias.



Fig. 4.1. Canal de oleaje.

Para modelar el fenómeno a estudiar se consideró el proceso del oleaje en una playa con pendiente uniforme y de fondo impermeable, así como playas con fondo permeable con espesores distintos de material poroso. Para simular la playa se empleó un arreglo que constó de una placa de acrílico sujeta a una armadura de aluminio colocado en el extremo contrario al de la pala de generación del canal. En las fotografías de la Fig. 4.2 se ilustra la rampa con la que se realizaron los experimentos. Esta estructura permitió variar la pendiente de la playa para realizar ensayos con diversos taludes buscando representar aquellos de interés debido a su aplicación ingenieril y de los que no se tienen registros suficientes. De esta forma se configuró el esquema con el que desarrollaron los experimentos con fondo impermeable que serán descritos en las secciones siguientes de este capítulo.



Fig. 4.2. Rampa empleada para simular la playa.

Otro aspecto de interés en el diseño ingenieril es la variación en capacidad de disipar energía cuando se trata de un fondo permeable. Para simular este medio poroso se colocaron sacos de malla plástica rellenos con grava con  $D_{50} = 0.0254$  m (1 pulgada) sobre la rampa (Fig. 4.3a), con espesores de 0.0508m (Fig. 4.3c) y 0.1524 (Fig. 4.3d) . Para obtener el diámetro de la grava, el material se cribó y se utilizó aquel que pasó por la malla de 1.5" y que fue retenido en la malla de 3/4" de apertura. La porosidad se estimó haciendo uso de una probeta graduada y de un recipiente de volumen conocido, el cual fue llenado parcialmente con el material granular y el resto con agua, logrando de esta forma conocer el volumen de grava dentro del recipiente. Conociendo el volumen del recipiente y la porción de este volumen ocupada por la grava, obtuvimos la porosidad del material  $n=0.3941=0.4$ , como la relación del volumen de grava entre el volumen total.

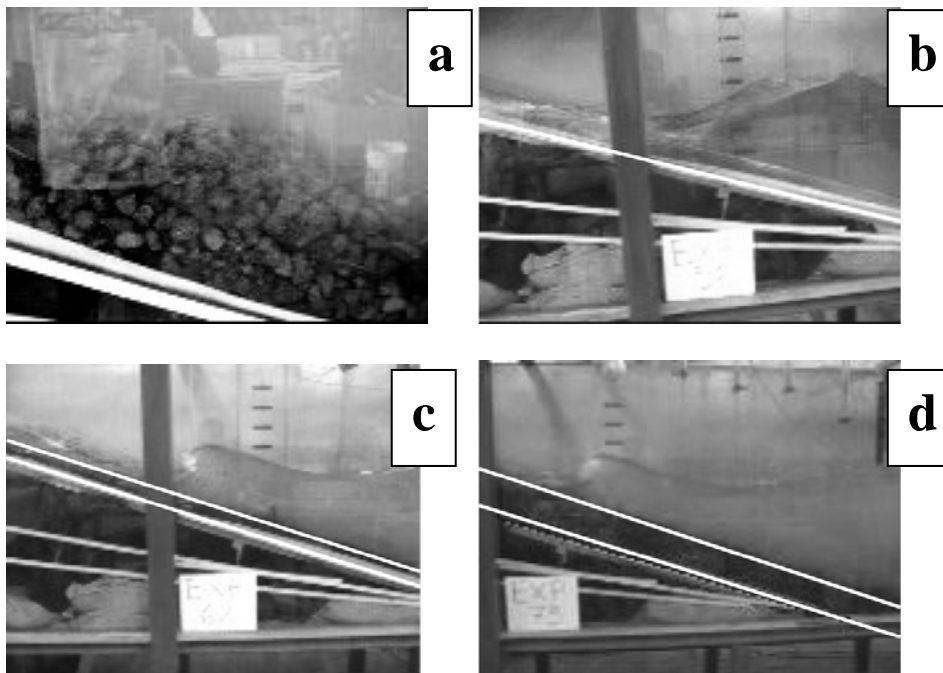


Fig. 4.3. Simulación de la playa con fondo impermeable y del medio poroso.



El parámetro de interés en los experimentos es la altura de ola medida en rotura incipiente y justo después de la línea de rotura, como se muestra en la figura 4.4, por eso, es importante mencionar que así como los pioneros en los trabajos de ingeniería de costas, quienes se han encontrado con muchas dificultades en la modelación física y experimentación en laboratorio, en este trabajo, al buscar observar uno de los problemas físicos más complicados por la turbulencia que se presenta en la zona de rotura, se vuelve difícil la instrumentación del canal para medir los parámetros que varían súbitamente en este proceso en zonas con pequeños tirantes de agua, que dadas las características de los sensores obliga a tener especial cuidado en la calibración de estos.



**Fig. 4.4. Turbulencia en zona de rotura.**

## **4.2 EQUIPO DE MEDICIÓN**

Para conocer las alturas de ola generadas en el canal, variable de interés empleada en la calibración del modelo numérico de este trabajo, es necesario registrar la evolución de las olas que viajan sobre la playa hasta llegar al punto en que rompe y la transformación que aquí se provoca. Para ello se instalaron 11 sensores de nivel distribuidos a lo largo del canal con distancias conocidas, buscando cubrir la rampa con diez sensores, manteniendo uno de ellos del lado de la pala de generación. Este equipo se puede observar en la figura 4.5 y funciona bajo el principio de resistividad eléctrica. El instrumento forma un circuito con las dos varillas de las que esta formado el sensor y la superficie libre del agua. Mientras que en una de las varillas existe un flujo eléctrico conocido y generado desde un computador, la otra varilla regresa la información a la computadora registrando de esta forma las variaciones que se presentan en la superficie libre del agua

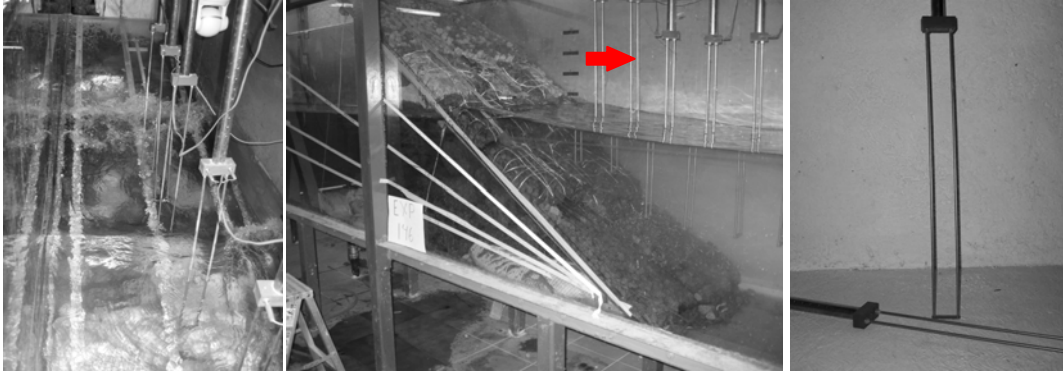


Fig. 4.5. Sensores de nivel.

Para calibrar los sensores de nivel es necesario definir la posición del nivel medio  $z = 0$ , y proporcionar al menos dos puntos considerando valores positivos hacia abajo, lo cual se logra deslizando los sensores en dirección vertical distancias conocidas. Las pequeñas profundidades en las que se presenta la rotura hicieron que la tarea de la calibración dejará de ser sencilla, razón por la cual se realizó con extremo cuidado para poder obtener resultados confiables. En el esquema de la siguiente figura, se puede observar un ejemplo de la disposición de los sensores de nivel para el uno de los experimentos desarrollados en este estudio.

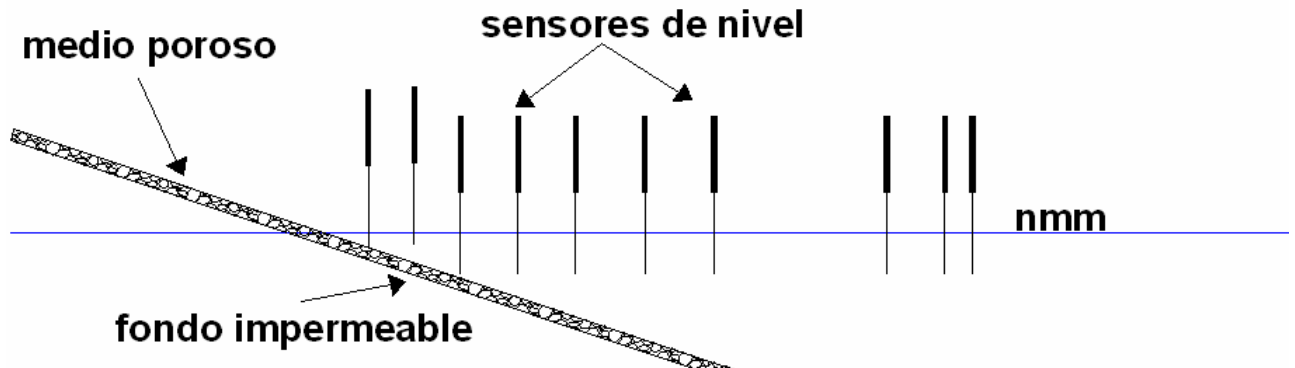


Fig. 4.6. Posición de sensores para el talud 1:3.

Sobre la playa también se instalaron 4 sensores de presión para los casos de fondo impermeable, y 8 sensores cuando se trató del material poroso.

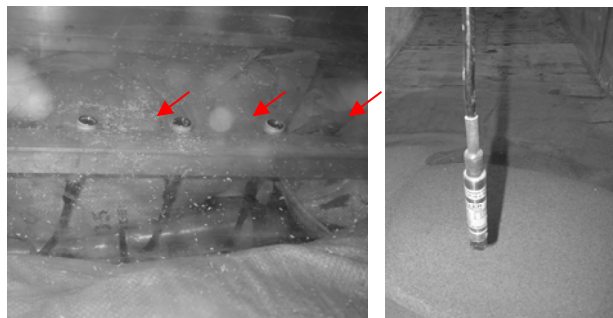


Fig. 4.7. Sensores de presión.

Los experimentos fueron registrados con dos cámaras de video digital. Una de ellas fue colocada sobre el canal y con esta se registro el run-up para todos los experimentos.

### 4.3 DESARROLLO DE EXPERIMENTOS

Para conocer los valores que nos permitan calibrar y validar la solución numérica de este trabajo, se diseñó una serie de experimentos con los que se buscó representar diversas condiciones en las que se puede presentar la rotura del oleaje, basándonos en la clasificación de acuerdo a Iribarren. De esta forma se buscó desarrollar distintos escenarios variando los periodos y la profundidad, y que de acuerdo al objetivo de este trabajo, representar el fenómeno de la rotura en taludes mayores a los registrados en el literatura trabajando con playas con cinco taludes: 1-8, 1:5, 1:3, 1:2, 1:1.5.

No todos los experimentos se realizaron con la misma profundidad  $h$ , los taludes 1:3, 1:2 y 1:1.5 se desarrollaron con una profundidad de agua  $h = 0.60$  m, el talud 1:5  $h = 0.40$  m y el 1:8 con  $h = 0.25$  m de profundidad. Las alturas de ola generadas en el canal tuvieron valores que variaron de 0.05 m a 0.15 m, con periodos desde 0.7s hasta 3s. En la siguiente tabla se resume las características de cada uno de los ensayos realizados.

**Tabla 4.1. Resumen de experimentos**

Talud 1:8			Talud 1:5			Talud 1:3			Talud 1:2			Talud 1:1.5		
T (s)	H (m)	h (m)	T (s)	H (m)	h (m)	T (s)	H (m)	h (m)	T (s)	H (m)	h (m)	T (s)	H (m)	h (m)
0.7	0.05	0.25	1	0.15	0.45	1	0.1	0.6	1.1	0.075	0.6	1.2	0.06	0.6
0.7	0.08	0.25	1.5	0.05	0.45	1	0.14	0.6	1.2	0.14	0.6	1.2	0.08	0.6
1	0.05	0.25	1.5	0.07	0.45	1.2	0.15	0.6	1.7	0.05	0.6	1.5	0.06	0.6
1	0.08	0.25	1.5	0.1	0.45	1.5	0.05	0.6	1.7	0.12	0.6	1.7	0.06	0.6
1.2	0.05	0.25	1.7	0.05	0.45	1.5	0.1	0.6	2	0.05	0.6	2	0.05	0.6
1.5	0.05	0.25	1.7	0.05	0.45	1.7	0.05	0.6	2	0.08	0.6	2	0.07	0.6
2	0.06	0.25	1.7	0.08	0.45	1.7	0.08	0.6	2	0.1	0.6	2	0.1	0.6
						2	0.05	0.6	2	0.12	0.6	3	0.1	0.6
						2	0.08	0.6	3	0.1	0.6	3	0.15	0.6
						2	0.1	0.6	3	0.14	0.6			

El otro aspecto de interés en este trabajo es el de conocer el efecto de la modelación de disipación de energía debida a la rotura en la propagación del oleaje ante un fondo de un material permeable, para ello se desarrollaron experimentos con dos espesores de grava de 0.0508m y 0.1524 m (2 y 6 pulgadas). La serie de experimentos mostrada en la tabla uno se desarrollo para los casos de fondo impermeable y para los dos espesores comentados, teniendo al final un total de 129 ensayos, es decir, 43 experimentos para cada tipo de playa modelada.

Los experimentos consistieron en generar aproximadamente 300 olas para cada uno de las pruebas mostradas en la Tabla 4.1. Sin embargo la toma de lectura se hizo después de haber pasado 100 olas, buscando con ello que el flujo se estabilice. A pesar de que el canal cuenta con un sistema de absorción dinámica, el oleaje incidente es afectado por la parte reflejada, razón por la cual no se miden las primeras cien olas esperando el “equilibrio” de las ondas en el canal. En cada experimento se obtuvieron 5120 datos que registran la posición de la superficie libre del agua, y que fueron medidos con una frecuencia de 20 (H). Además, con las cámaras de video colocadas en posiciones ya comentadas, se grabo el desarrollo de los experimentos.

El proceso que se acaba de describir, fue seguido en cada uno de los experimentos realizados para esta tesis. Con la variedad de lecturas obtenidas de estos ensayos, se obtiene valores de altura de ola necesarias para validar un coeficiente de decaimiento debido a la rotura, cubriendo de esta forma, una de las tareas más interesantes de la ingeniería, el trabajo de laboratorio. En la siguiente imagen, se observa la zona de interés en uno de los experimentos realizados.



**Fig. 4.8. Zona de rotura.**

## 5 RESULTADOS Y VALIDACIÓN

Como resultado de los trabajos de laboratorio se obtiene una señal que representa la variación de la superficie libre del agua en el tiempo. Estos datos deben de ser interpretados ya que, para el desarrollo de este capítulo es necesario conocer los parámetros que definen a una ola: la altura de ola y su periodo asociado. Para ello se realiza un análisis temporal a la muestra de laboratorio, que permite obtener de forma estadística dichos parámetros. En este trabajo se consideró como parámetro de entrada en la modelación la altura de ola significativa denotada con el subíndice 1/3 y que representa la media aritmética del 33% de las alturas de ola más altas registradas en un ensayo, de tal forma que  $H_b = H_{b1/3}$  para la altura de ola medida en el punto en el que se presenta la rotura inminente y  $H = H_{1/3}$  para la altura de ola medida después de la rotura. Estas zonas fueron identificadas de forma visual con ayuda de las grabaciones de video. El conocimiento de estos parámetros permitirá conocer los coeficientes empíricos  $K$  y  $\Gamma$  del modelo de disipación, y de ellos depende la calibración del mismo.

Por lo tanto, una vez procesados los datos de laboratorio, el trabajo se centra en el estudio de un modelo de disipación de energía debido a la rotura del oleaje, con lo que se busca estimar de mejor forma la evolución del oleaje aproximándose a la línea de costa en escenarios no registrados en la literatura. Para ello se retoma el principio de conservación de energía propuesto por Dally et al (1984), descrito por la ec. (3.23), y que es escrito a continuación en su forma adimensional (ec.(3.41)),

$$\frac{H}{H_b} = \left[ \left( \frac{h}{h_b} \right)^{\left( \frac{5}{2} - \frac{K}{m} \right)} (1 + \alpha) - \alpha \left( \frac{h}{h_b} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (5.1)$$

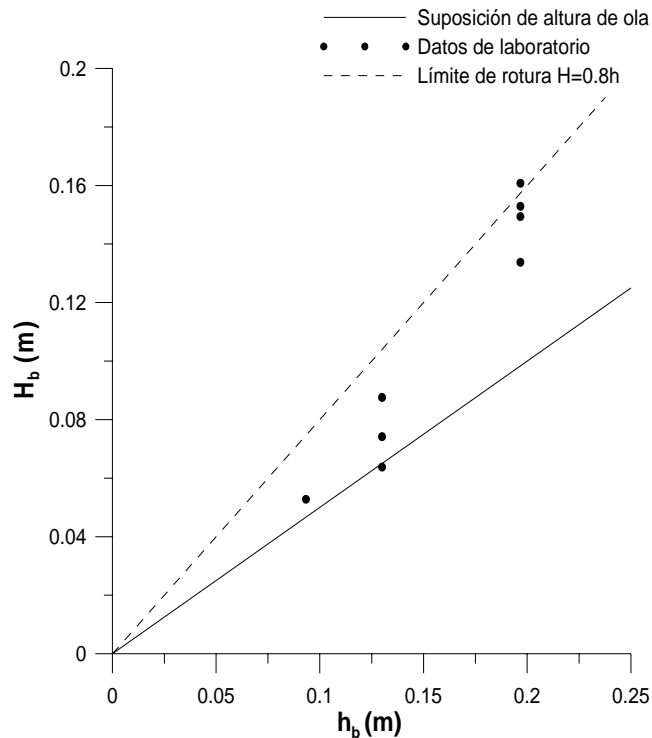
con

$$\alpha = \frac{K\Gamma^2}{m \left( \frac{5}{2} - \frac{K}{m} \right)} \left( \frac{h}{H} \right)_b^2$$

En esta ecuación aparecen los dos factores de interés en este trabajo: el coeficiente de decaimiento  $K$  y el coeficiente que define la altura de ola estable regenerada después de la línea de rotura  $\Gamma$ . En la expresión se relaciona la altura de ola en rotura inminente  $H_b$  y la profundidad  $h_b$  en la que se presenta la rotura, con alturas de ola  $H$  en la profundidad  $h$  en puntos posteriores a la línea de rotura (variables medidas laboratorio). Para ejemplificar la metodología para la calibración del modelo se explicará paso a paso el caso de pendiente con talud 1/3 y fondo permeable con espesor de 0.504m, dejando por entendido que será la misma metodología para el resto de los experimentos.

Para resolver el modelo es necesario conocer las variables que intervienen y para ello, en primer lugar se representarán gráficamente las alturas de ola en rompiente medidas con los sensores en el canal, contra sus respectivas profundidades como se puede observar en la Fig.

5.1. En esta gráfica, que ilustra los resultados experimentales se observa que, los puntos pueden ser envueltos por los límites de: radio de rotura y la línea que marca el criterio de altura de ola estable, en los que se basa el principio de continuidad de energía de este modelo. Debido a la configuración del modelo físico que consideró la transformación del oleaje sobre una playa con pendiente uniforme (distinto a la configuración de fondo empleada por los autores del modelo), en los cálculos se usa el valor para la altura de ola estable de la Fig. 5.1, ya que no fue medida directamente. Esta suposición se basa en los resultados mostrados en Dally et al (1984), en donde muestran que en sus datos de laboratorio el coeficiente  $\Gamma$  queda representado por el límite de altura de ola estable.



**Fig. 5.1. Límites de altura de ola que se emplean en la solución analítica del modelo de disipación.**

Una vez definidos los valores del límite de rotura  $H=0.8h$  junto con el criterio altura de ola estable en el que  $Hs=0.5h$  (que se observan en la gráfica anterior), solo resta conocer el valor del coeficiente de decaimiento  $K$  necesario representar de forma analítica la tendencia de los resultados obtenidos en laboratorio. Para lo cual, se introducen en la ec. (5.1) los valores de los límites de rotura, de ola estable así como la pendiente de la playa. De esta forma se obtiene la curva que se observa en la Fig. 5.2. En ella también se ilustra con puntos, los valores de las variables medidas en los experimentos de laboratorio. La línea continua representa solución analítica arrojada por el modelo de disipación, mientras que los puntos representan los datos experimentales.

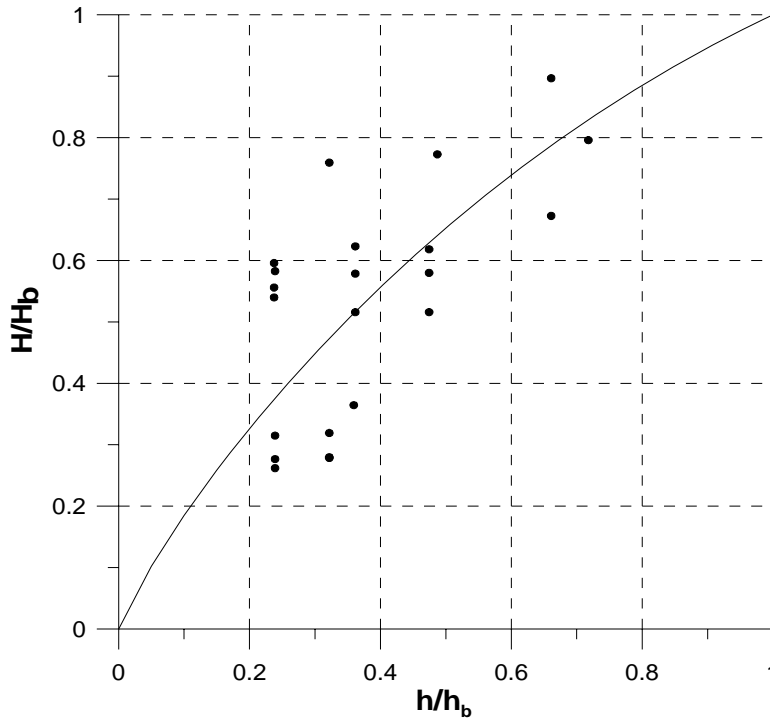


Fig. 5.2. Solución analítica del modelo de disipación.

De la gráfica anterior se puede observar que el modelo de disipación con los valores del coeficiente de decaimiento  $K=0.82$  y  $\Gamma=0.5$ , marcan cierta tendencia de los resultados obtenidos en laboratorio. Para obtener el valor del coeficiente  $K$ , se realizó un promedio de todos los valores obtenidos con cada uno de los datos medidos en laboratorio, mismos que se muestran con puntos en la Fig. 5.2 y que son mayores a los presentados en Dally et al (1985), siendo razonable porque se debe tener en cuenta que los trabajos de laboratorio en los que se basaron se desarrollaron con pendientes menores a las que se abordaron en este estudio.

Una vez que se ha calibrado el modelo de disipación con los nuevos valores de los coeficientes de decaimiento, se aplican en el modelo numérico de propagación de oleaje descrito por la ec. (2.44) y que se escribe de nuevo:

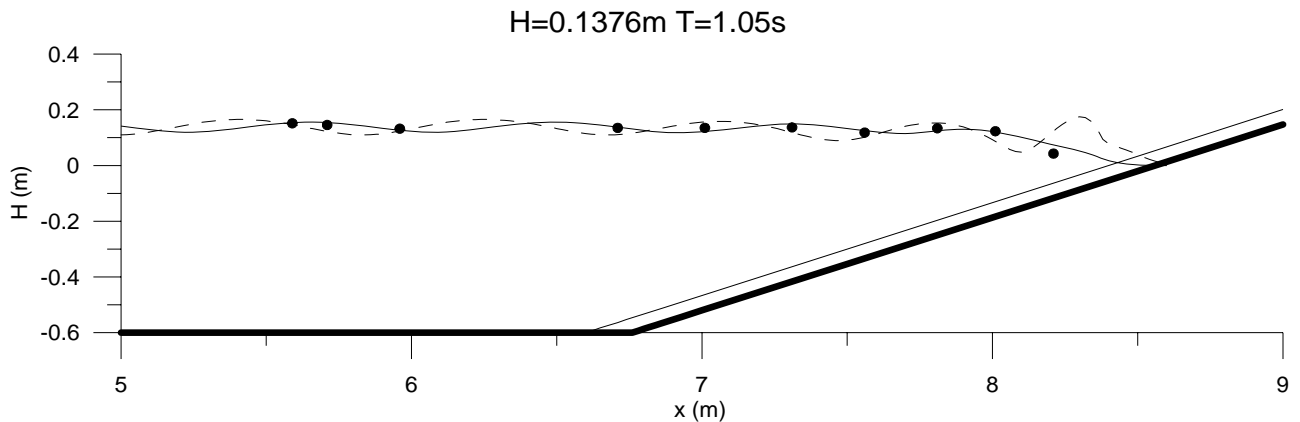
$$\nabla^2 \Psi + K_c^2 \Psi = 0 \tag{5.2}$$

con

$$K_c^2 = (K^2 + i\sigma f_D) + \frac{r(h, h_p)}{I_1} - \frac{\nabla^2 \sqrt{I_1}}{\sqrt{I_1}}$$

Resaltando el término  $f_d$ , el cual representa la suma de la disipación de energía originada por fricción de fondo e involucra la expresión para disipación por rotura calibrada como se demostró. Otro aspecto importante en este modelo es la estimación de la altura de ola en la rotura, para ello se revisó el comportamiento de los criterios de rotura de McKowan (1981), Watanabe, Hara y Horikawa (1983) y Weggel (1972) en el modelo de propagación.

Finalmente, para validar los resultados obtenidos se comparan las estimaciones de las alturas de ola obtenidas con el modelo numérico con los valores de las alturas de ola registradas con los sensores en los experimentos en el canal de olas. Enseguida se presentan los resultados para el experimento con  $H=0.1376\text{m}$ ,  $T=1.05\text{s}$ , y  $h=0.60\text{m}$ , en la misma figura también se incluye la aproximación del modelo numérico con los valores empleados comúnmente en esta relación.



**Fig. 5.3. Comparación entre alturas de ola calculadas con el modelo analítico y los valores obtenidos en laboratorio. La línea continua representa la estimación empleando datos de laboratorio en el modelo de disipación, la aproximación con valores en el modelo de disipación de acuerdo a Dally et al (1985) con línea punteada, y los datos medidos en laboratorio representados con los puntos. El oleaje incide en la playa de izquierda a derecha.**

En la gráfica se puede observar que al emplear en el modelo de propagación de oleaje los valores obtenidos en laboratorio para el coeficiente de decaimiento de la ec. (5.1), junto con el criterio de rotura de acuerdo a Weggel (1972); se resuelve el problema estimando de manera aceptable el fenómeno en cuestión.

El procedimiento descrito hasta aquí expone la forma en la que se calibró el modelo de disipación el cual fue validado junto con el modelo de propagación al hacer la comparación que se muestra en la Fig. 5.3. A continuación en la Fig. 5.4, siguiendo la misma metodología, se presentan las gráficas en las que se muestran los resultados obtenidos para los límites rotura y de altura de ola estable, para los casos con fondo impermeable y con fondo con espesor de material poroso de 0.15 cm, junto con el caso de 0.504 m de espesor descrito como ejemplo.



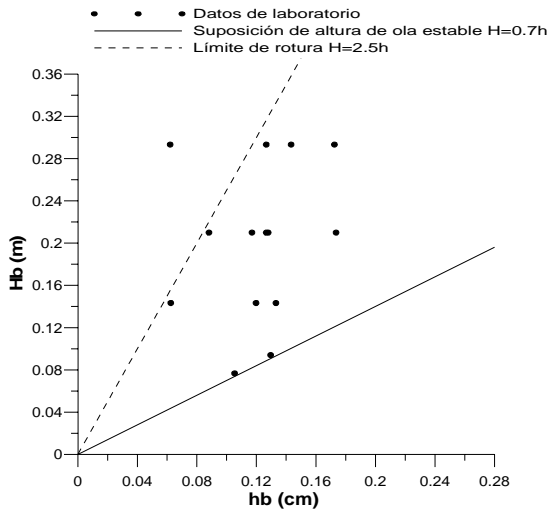


Fig.5.4a. Fondo permeable

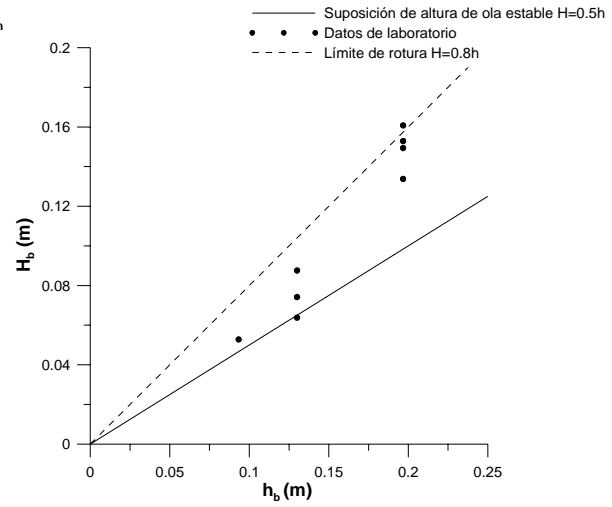


Fig. 5.4b. Espesor de 0.05m

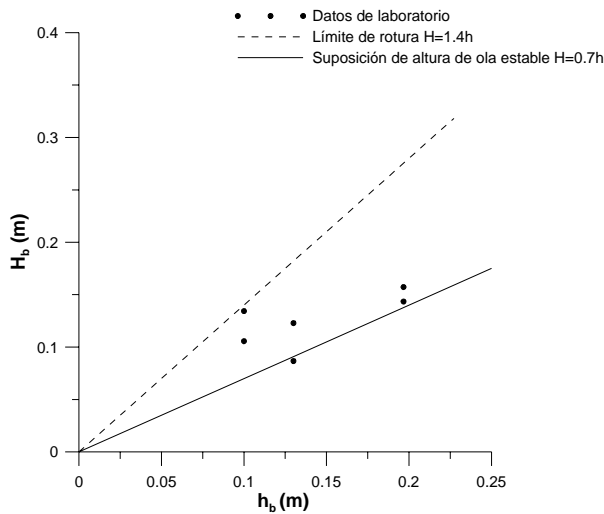


Fig. 5.4c. Espesor de 0.15m

Fig. 5.4. Resultados obtenidos para los límites del modelo analítico en los diversos escenarios reproducidos con la playa de talud 1/3.

Entonces, con los valores límite mostrados en la figura anterior y empleando la ec. (5.1) se obtienen las curvas que se muestran en la siguiente figura para obtener el coeficiente  $K$  para los ensayos con fondo impermeable, fondo con material poroso con dos espesores distintos y playa con pendiente 1:3.

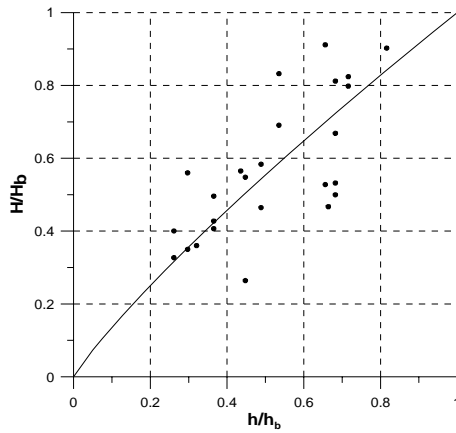


Fig. 5.5a. Fondo impermeable

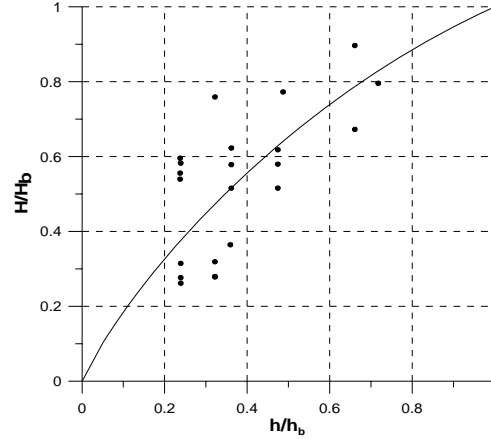


Fig. 5.5b. Espesor de 0.054m

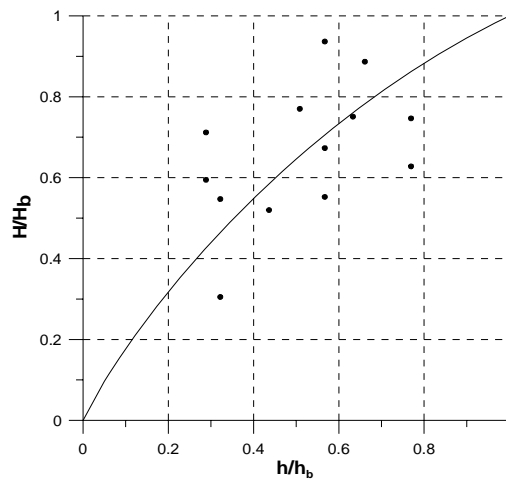


Fig. 5.5c. Espesor de medio poroso de 0.1524m

Fig. 5.5. Comparación del modelo analítico de disipación con los resultados obtenidos en laboratorio.

En estas graficas se muestran los resultados obtenidos con el modelo disipación de energía, representado por la línea continua. Se compara tambien con los datos medidos en laboratorio. En ellas los valores de el coeficiente de decaimiento, como ya se comento, son mayores a los hasta ahora conocidos, manteniendo la relación  $K/m$  dentro del rango de aplicación como se muestra en Dally et al (1985). En la siguiente tabla se resumen los valores encontrados para las tres condiciones que se desarrollaron en laboratorio con talud 1:3.

Tabla 5.1. Valores encontrados después de ensayos de laboratorio con talud 1:3.

e (m)	K	$\Gamma$
0	0.79	0.7
0.05	0.82	0.5
0.15	0.85	0.7

Para validar estos valores, en las siguientes figuras se muestran los resultados obtenidos con el modelo de propagación empleado. En ellas, las líneas continuas representan las alturas de ola calculadas con el modelo numérico y los puntos las lecturas obtenidas con los sensores en laboratorio.

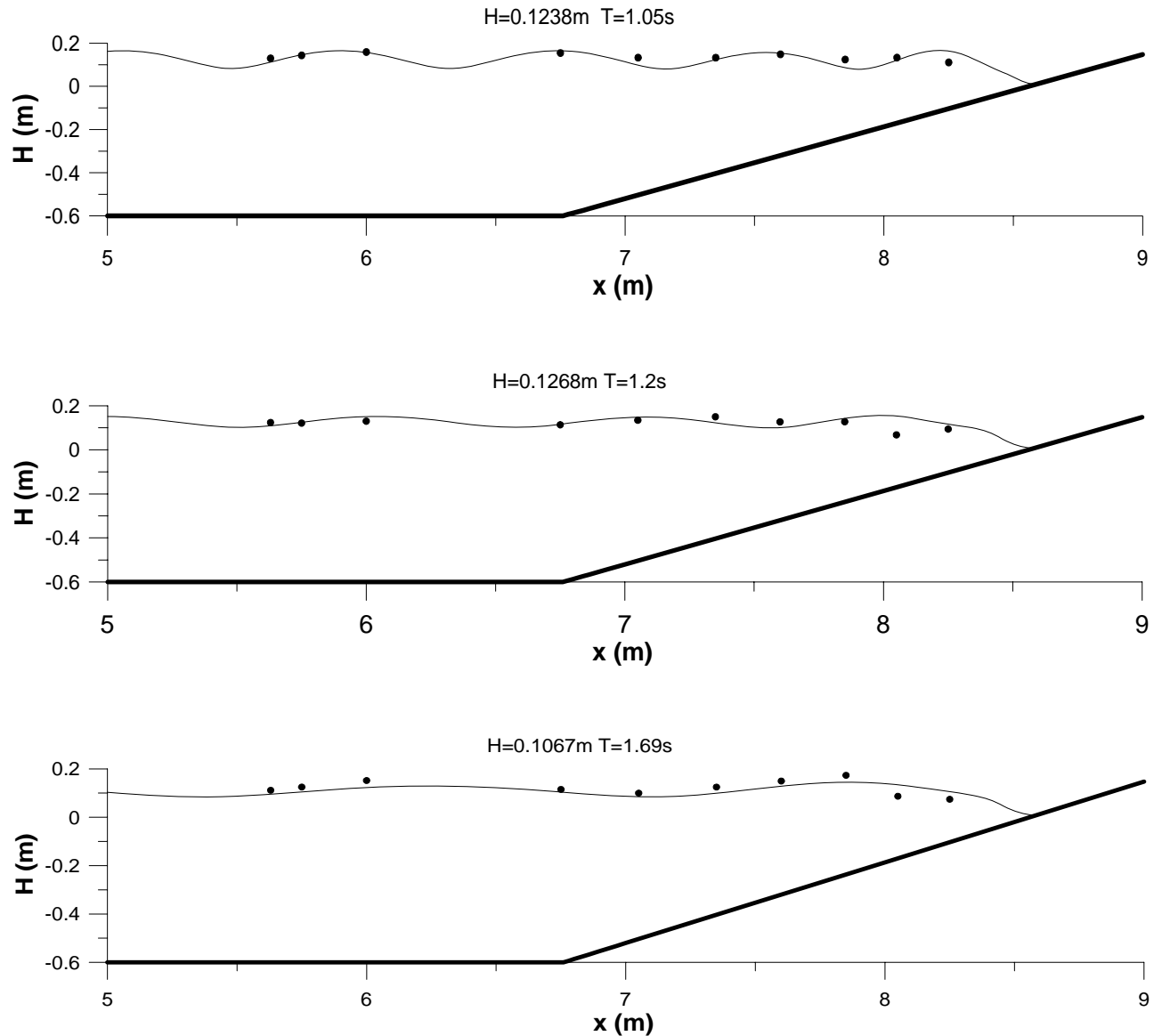
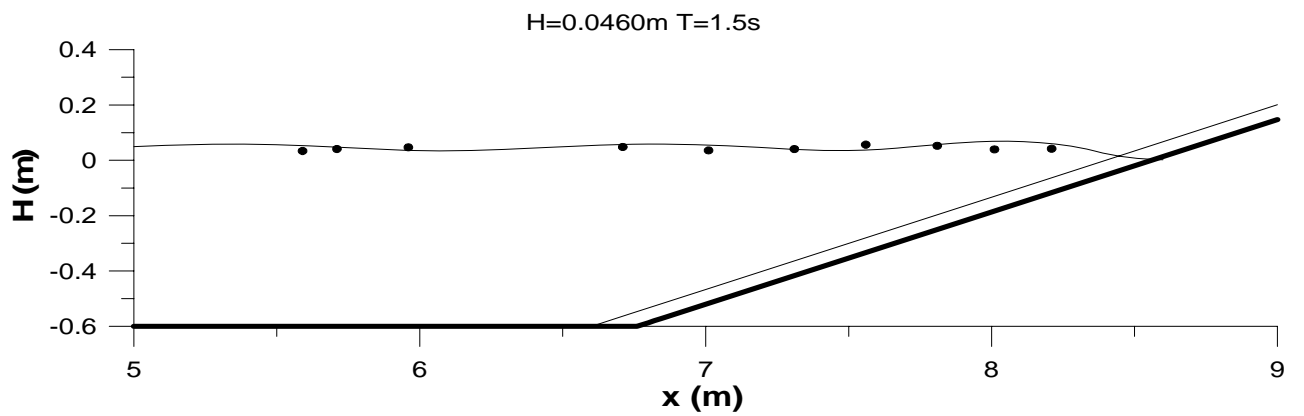
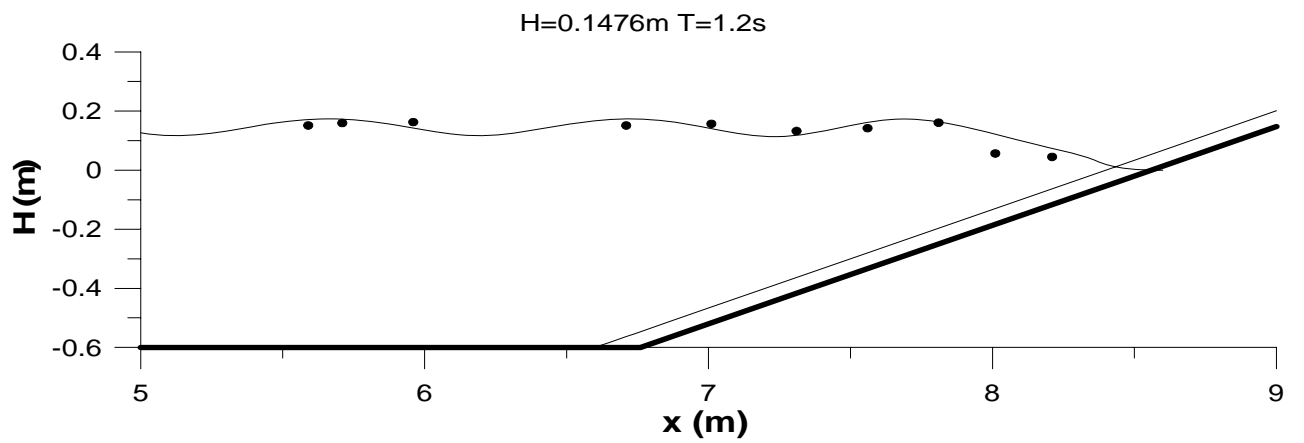
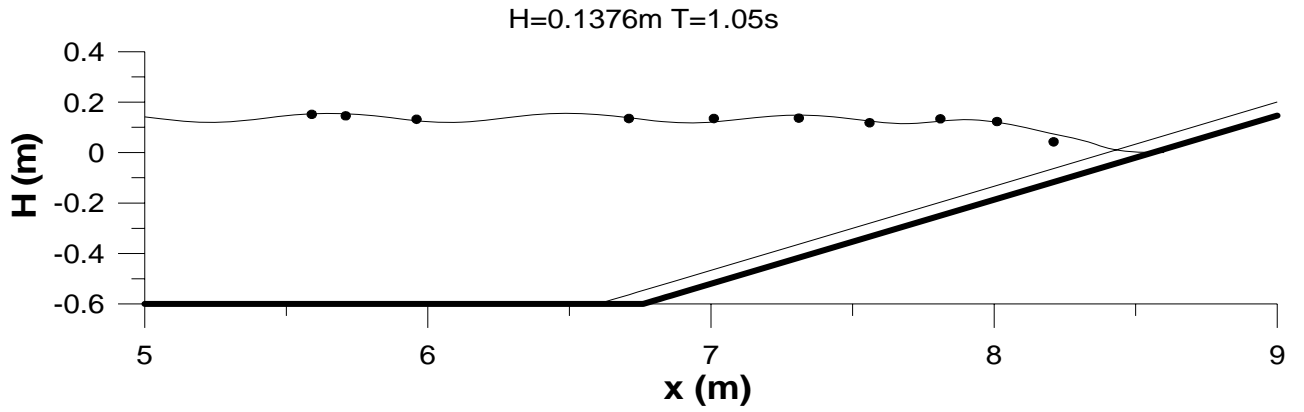


Fig. 5.6. Comparación de alturas de ola obtenidas de forma numérica y experimental, para el caso de fondo impermeable.



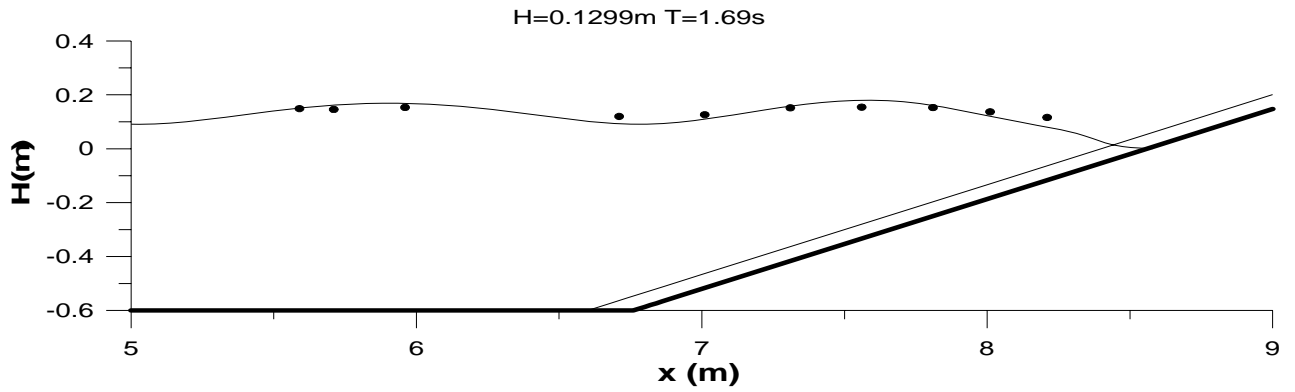
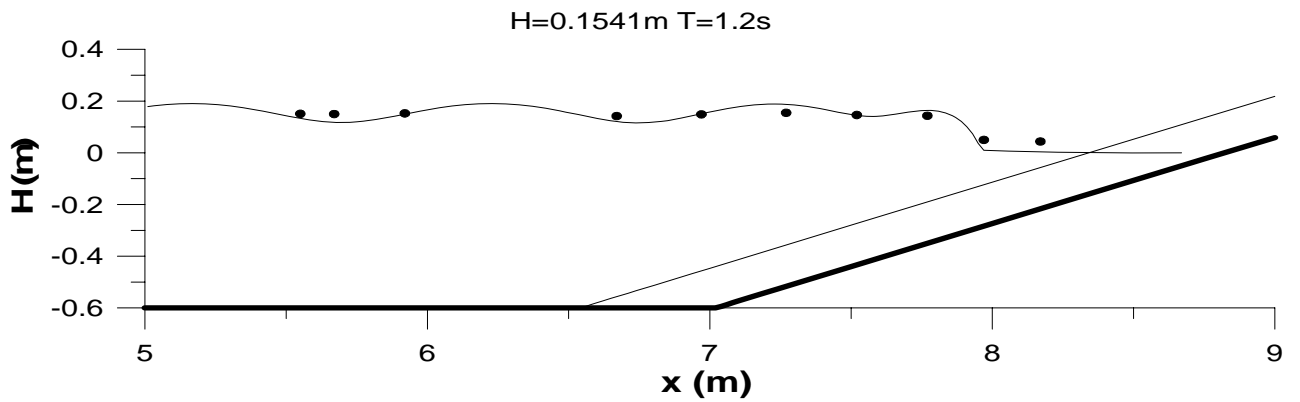
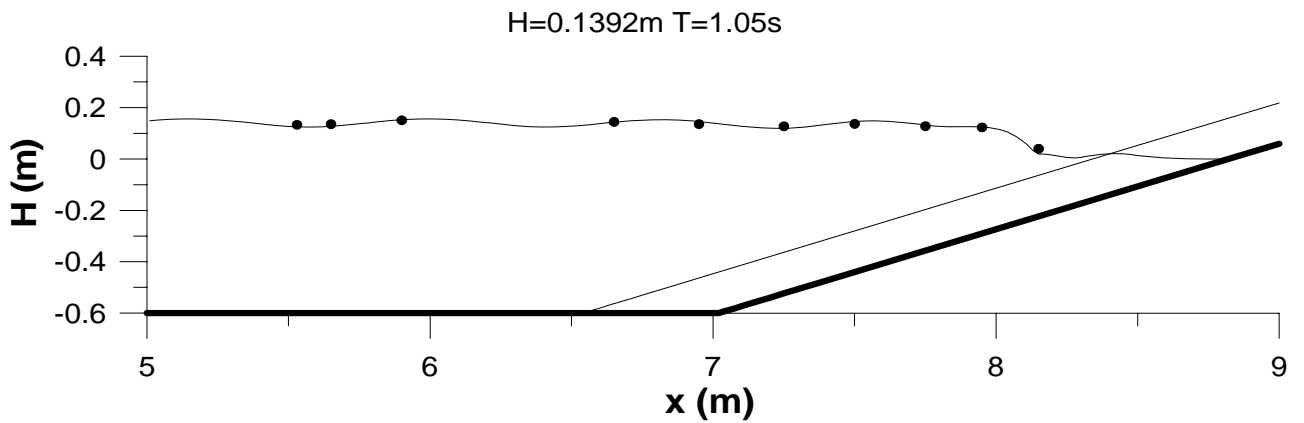
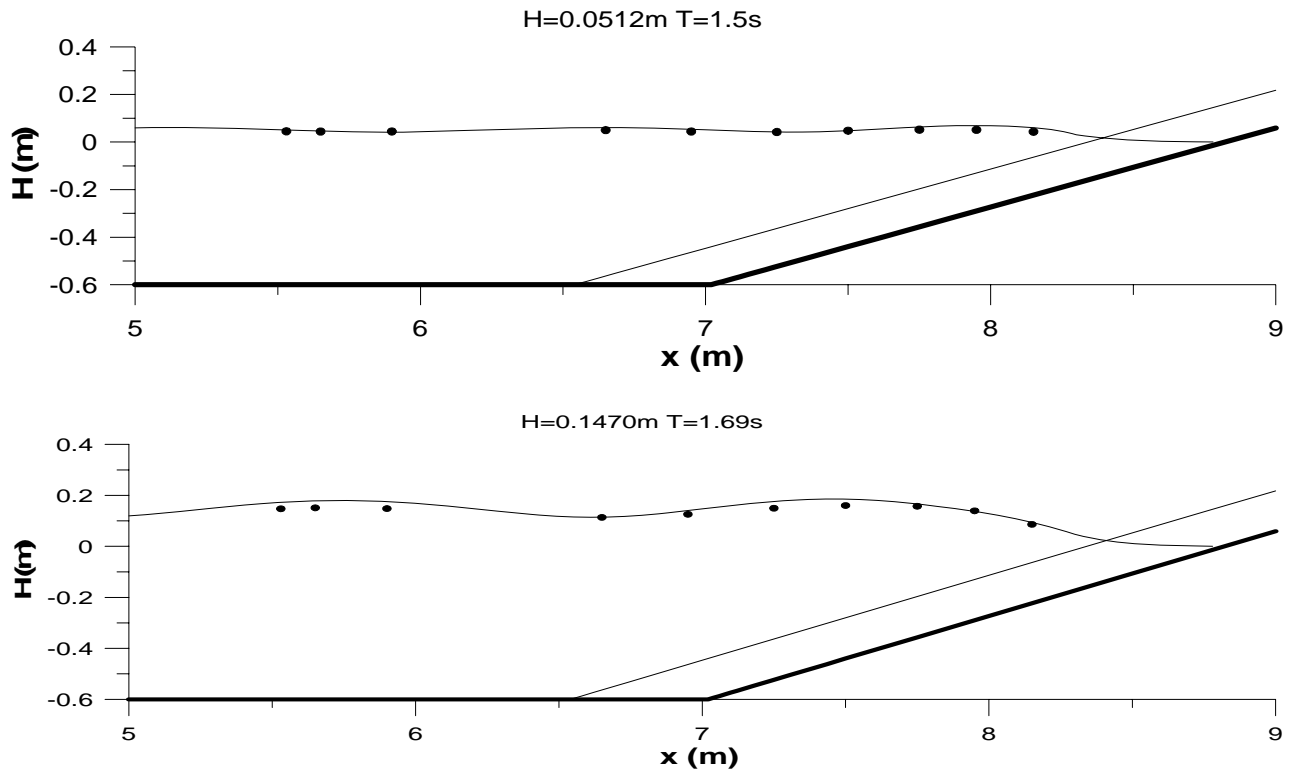


Fig. 5.7. Comparación de resultados obtenidos de forma numérica y experimental, para el caso de fondo no permeable con espesor de 0.0508m





**Fig. 5.8. Comparación de resultados obtenidos de forma numérica y experimental, para el caso de fondo no permeable con espesor de 0.1524 m.**

Después de observar los resultados merece la pena recordar que en todos los casos presentados en las figs. Fig. 5.6, Fig. 5.7 y Fig. 5.8, se emplearon los datos del coeficiente de decaimiento mostrado en la Tabla 4.1. También es importante mencionar que el criterio de rotura difiere en la aplicación cuando se trata del caso con espesor de 6 pulgadas, en el que se tomó el valor máximo mostrado como criterio de rotura el valor mostrado como límite de rotura en la Fig. 5.4., debido a que ofrece una mejor aproximación que al emplear el criterio de Weggel (1972) que fue empleado para los ensayos con fondo impermeable y espesor de material poroso de 0.0504m como se puede observar en las figuras anteriores.

Ahora se exponen los trabajos obtenidos con el talud 1:5. En primer lugar se obtienen las siguientes gráficas en donde se muestran los valores límite que se emplearon en la (5.1) para conocer los valores de  $K$ .

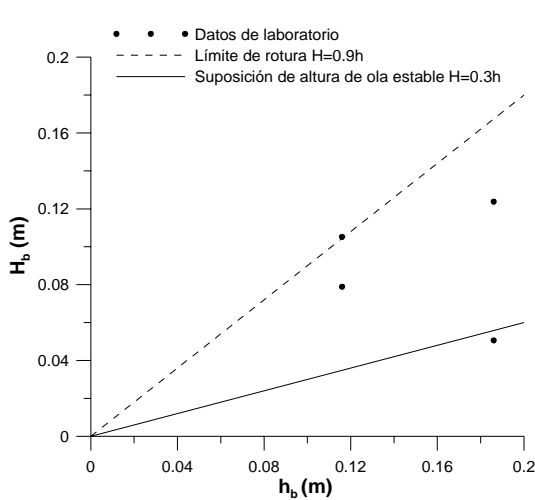


Fig. 5.9a. Fondo impermeable

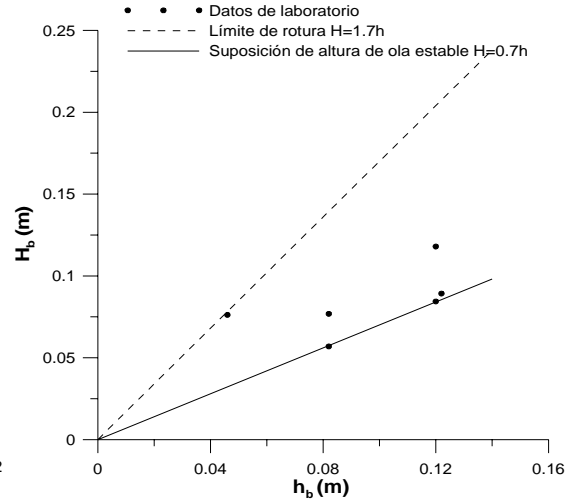


Fig 5.9b. Espesor de 0.05m

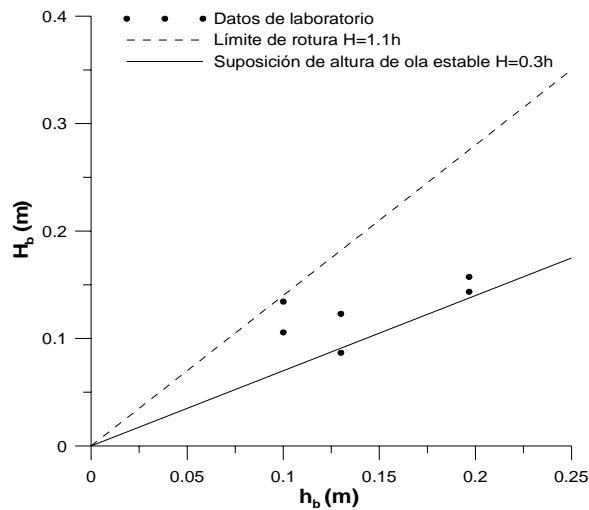


Fig. 5.9c. Espesor de 0.15m

Fig. 5.9. Resultados obtenidos para los diversos escenarios reproducidos con la playa de talud 1/5.

Trabajando de la misma forma con los límites ilustrados en la figura anterior y la ec. (5.1), el modelo analítico de disipación de energía describe las curvas se muestran en la siguiente figura y en la que también se incluyen los datos obtenidos en laboratorio.

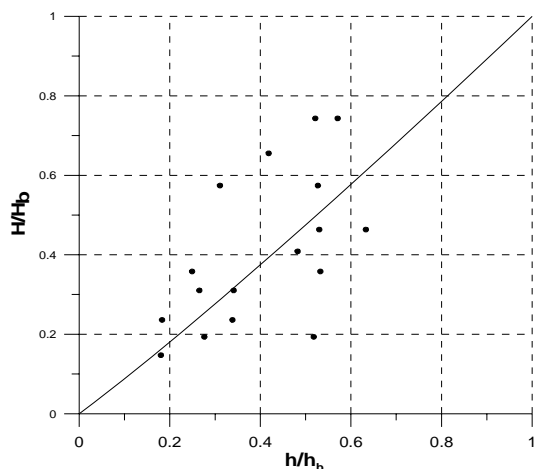


Fig. 5.10a. Fondo impermeable

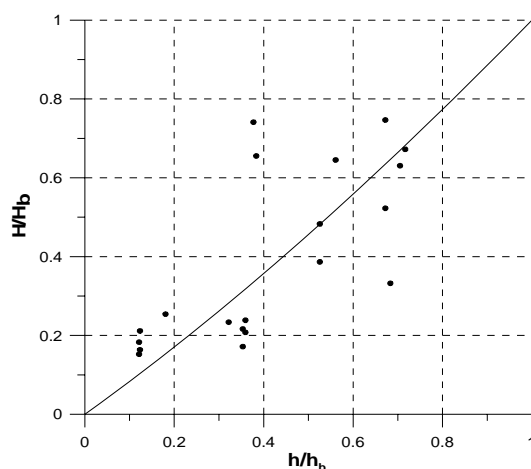


Fig. 5.10b. Espesor de 0.054m

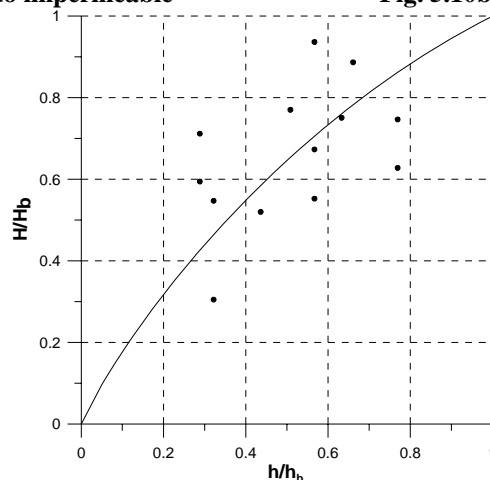


Fig. 5.10c. Espesor de medio poroso de 0.1524m

Fig. 5.10 Comparación del modelo analítico de disipación con los resultados obtenidos en laboratorio. Talud 1:5.

De la misma forma en la que se trabajó con el talud 1/3, se obtienen los valores de el coeficiente de decaimiento, que para este caso, también son mayores a los hasta ahora conocidos, manteniendo la relación  $K/m$  dentro del rango de aplicación de acuerdo a Dally et al (1985). En la siguiente tabla se muestran los valores para las tres condiciones que se desarrollaron con el talud 1/5.

Tabla 5.2. Valores encontrados después de ensayos de laboratorio con talud 1:5.

e (m)	K	$\Gamma$
0	0.6	0.3
0.05	0.68	0.7
0.15	0.52	0.3

Después de estimar las alturas de ola con el modelo numérico, se observa que los resultados que ofrece este modelo mejoran cuando se hace uso de los valores para el coeficiente de decaimiento  $K$  y el límite de altura de ola estable  $\Gamma$  presentados en Dally et al (1985) (ver capítulo seis). Con base a lo anterior, los experimentos correspondientes a la playa con



fondo impermeable y aquellos con fondo de material permeable con espesor de 0.0508m, se realizan con estos valores y a continuación se muestran los resultados.

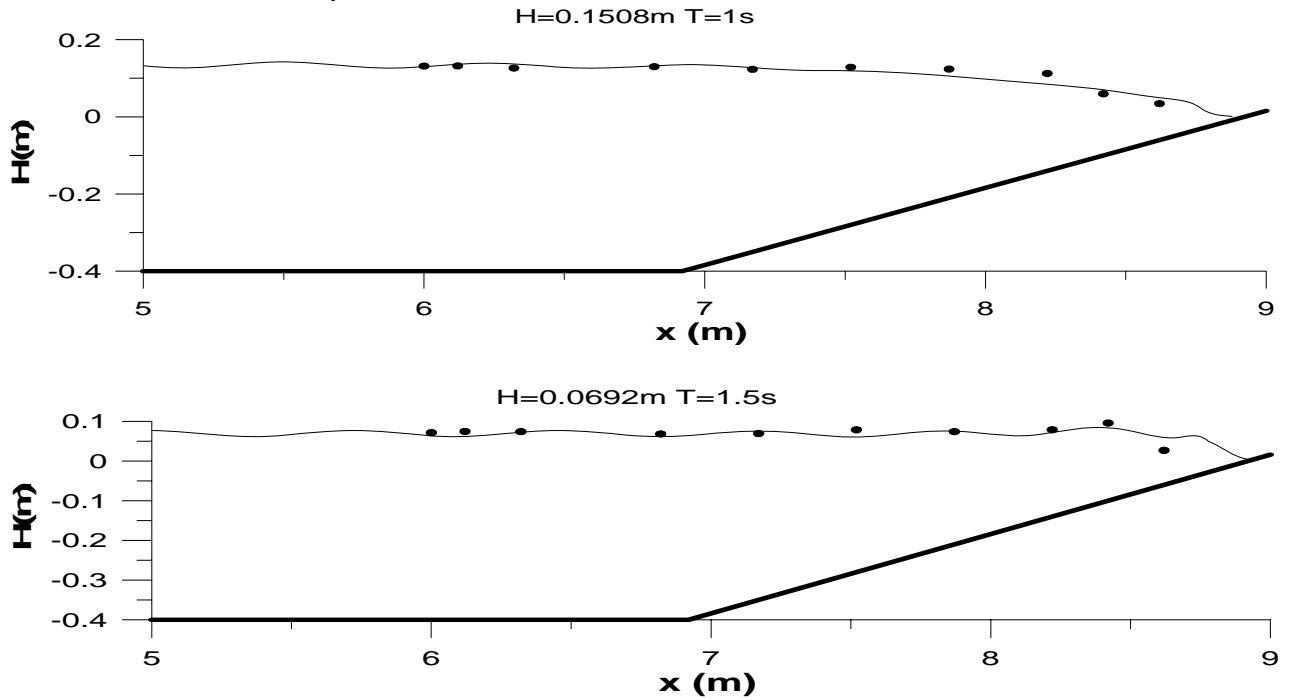
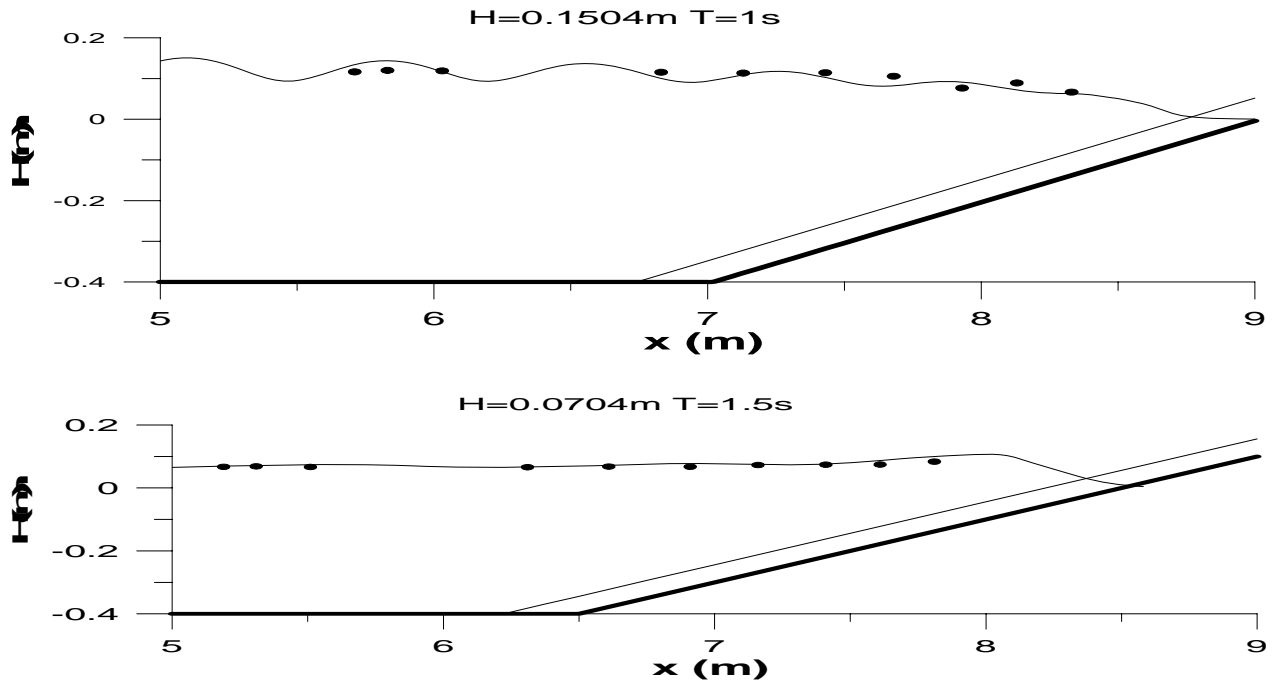
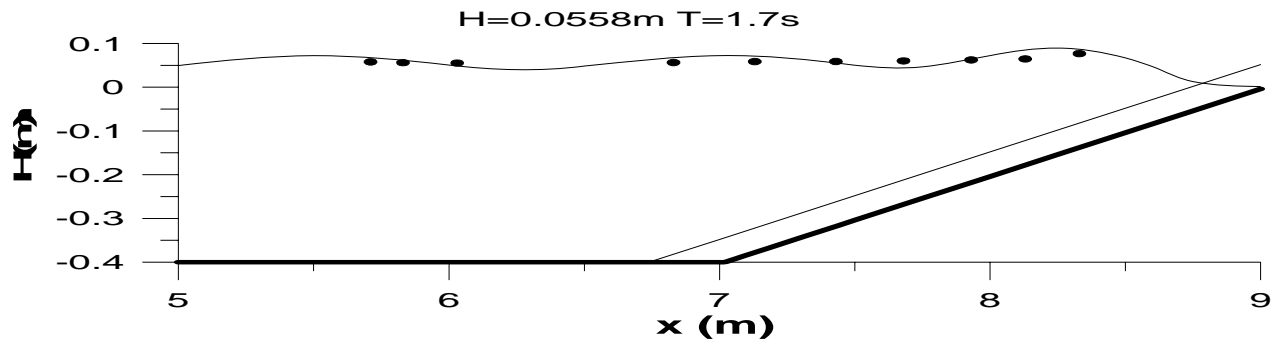


Fig. 5.11 Comparación de resultados obtenidos de forma numérica y experimental, para el caso de fondo impermeable con talud 1/5.





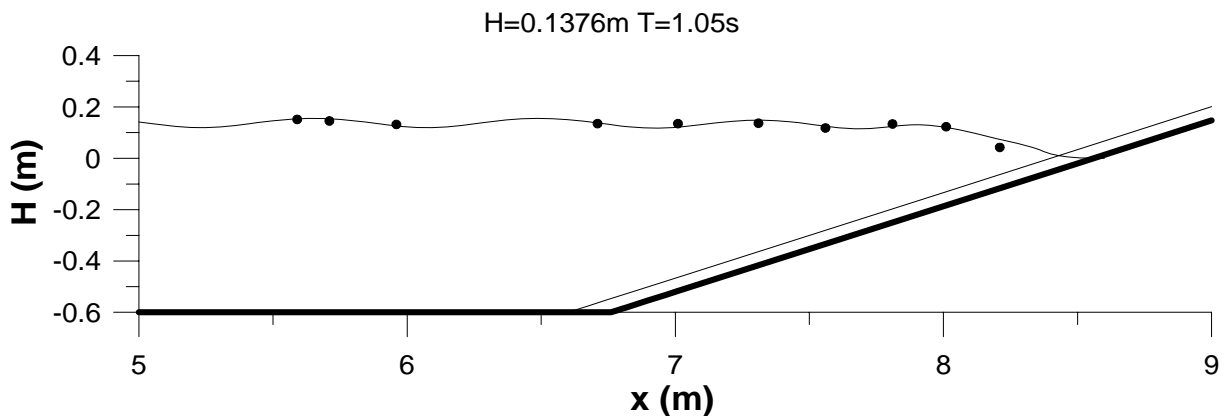
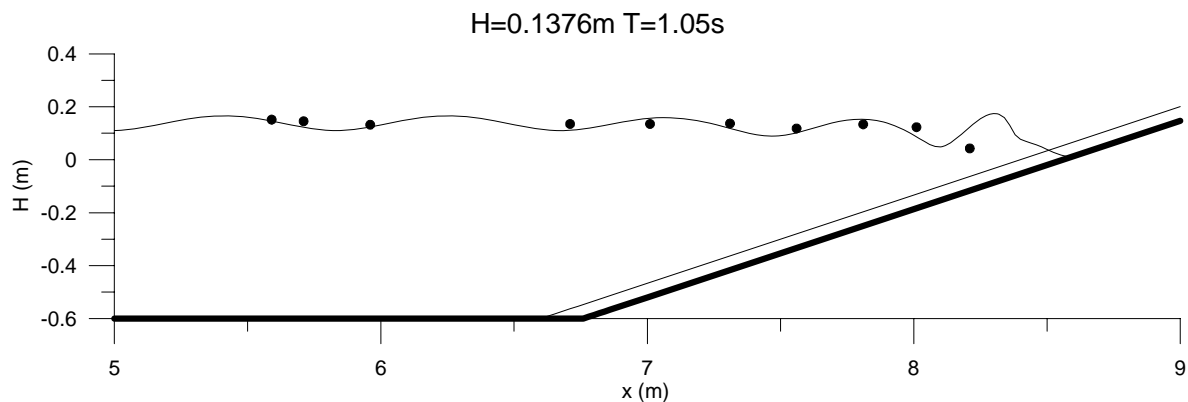
**Fig. 5.12. Comparación de resultados obtenidos de forma numérica y experimental, para el caso de fondo no permeable con espesor de 0.0508m. Talud 1:5**

De acuerdo a las graficas mostradas, se puede observar que para estos casos, el modelo queda validado ofreciendo resultados aceptables cuando se hace uso del criterio de rotura de Weggel (1972) con los coeficientes  $K=0.275$  y  $F=0.3$  de acuerdo a Dally et al (1985).

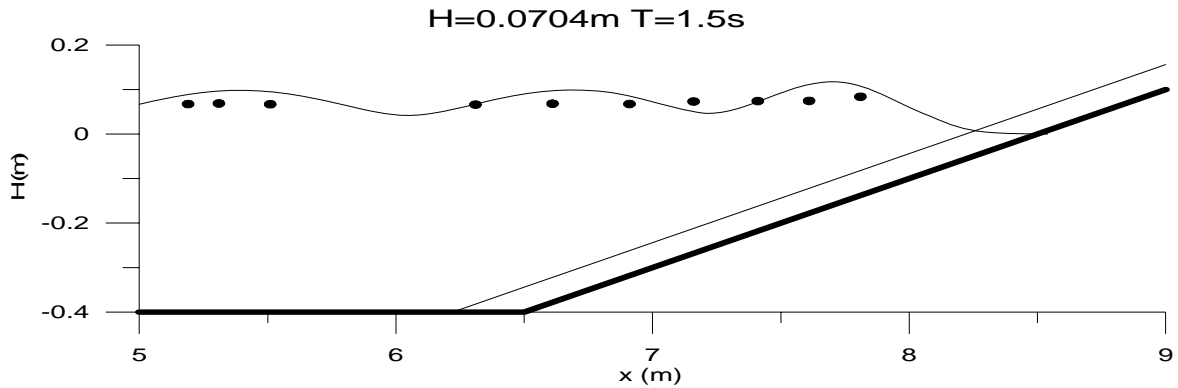
Para la calibración del modelo de disipación solo fueron considerados los datos obtenidos con los fondos con pendiente 1:3 y 1:5, debido a que en el caso con talud de fondo 1:8, el proceso presentaba una excesiva turbulencia en una zona muy reducida, por lo que los datos incluirían demasiados ruido por esa mezcla de aire agua en ese fenómeno, razón por la cual se decidió no ocuparlos. Los taludes 1:2 y 1:1.5 no fueron interpretados debido a que se presentó oscilación como tipo de rotura, manteniéndonos fuera de la hipótesis en las que se basa el modelo de conservación de energía que se retoma en este trabajo.

## 6 DISCUSIÓN

Después de realizar los experimentos, en este trabajo se han presentado los resultados que ofrecen una excelente estimación del fenómeno estudiado, la propagación del oleaje. Pero es importante mostrar los aspectos que podrían invalidar la generalización de los resultados. En primer lugar y con el ánimo de mostrar el avance en la representación de la rotura y sus efectos que se genera con esta investigación, se presenta una comparación de las alturas de ola medidas en laboratorio con las calculadas con el modelo de propagación, modelo en el que para el término de disipación de energía debida a rotura se usan tanto los valores de  $K=0.275$  y  $\Gamma=0.3$  recomendados por Dally et al (1985) (Fig. 6.1), así como los valores obtenidos en laboratorio con los se calibra el modelo y que se presentan en la Tabla 5.1.

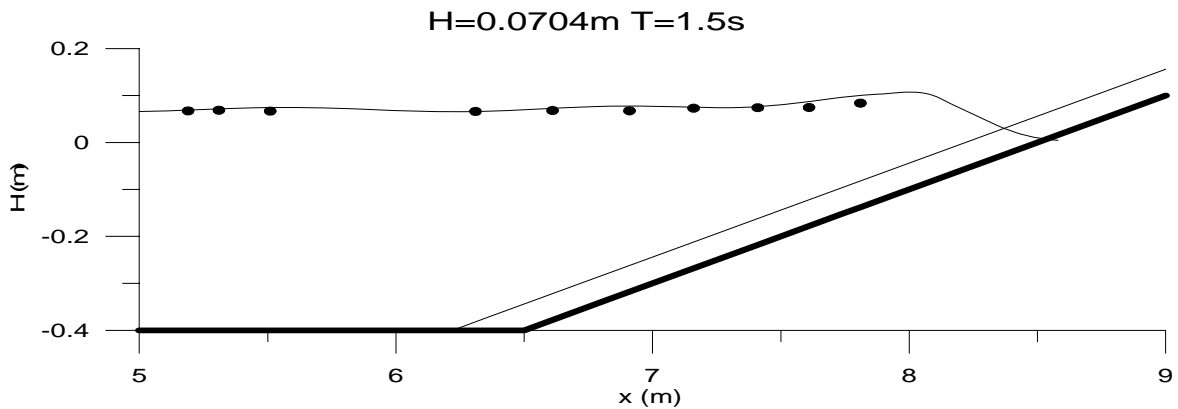


Sin embargo, en la siguiente figura se ejemplifica con uno de los experimentos, la mala representación que se obtiene con el modelo de propagación cuando se emplean los valores de la tabla 5.2 para el caso de fondo con capa permeable de 0.05cm de espesor y talud 1:5.



**Fig. 6.3.** Comparación de alturas de ola de laboratorio con los resultados calculados con el modelo de propagación de oleaje usando los valores de  $K$  obtenidos en laboratorio. Talud 1:5 con 0.05cm de material poroso en el fondo.

En cambio, si se modela la propagación usando los datos registrados en la literatura, donde  $K=0.275$  y  $\Gamma=0.3$ , la estimación mejora como se puede apreciar en la siguiente figura.



**Fig. 6.4.** Comparación de alturas de ola de laboratorio con los resultados calculados con el modelo de propagación de oleaje usando los valores de acuerdo a Dally et al (1985). Talud 1:5 con 0.05cm de material poroso en el fondo.

Con lo expuesto hasta aquí es posible aseverar que cuando se trata de propagación de oleaje sobre un talud mayor que 1:3, los coeficientes obtenidos en laboratorio representan de forma precisa la transformación del oleaje en la zona de rotura.

Por otro lado, al tratarse de los experimentos con talud 1:5 y espesor de material poroso de 0.1524m, se observó que el modelo de disipación de energía resulta con una sobrestimación de la disipación al encontrarse con un medio poroso de espesor considerable. La siguiente figura muestra las estimaciones de alturas de ola calculadas con el modelo de propagación empleando en el término de disipación de energía los valores registrados en la literatura ( $K=0.275$  y  $\Gamma=0.3$  según Dally et al (1985)) con línea continua, mientras que las estimaciones realizadas con los valores de tabla 5.2 son representados con línea punteada.

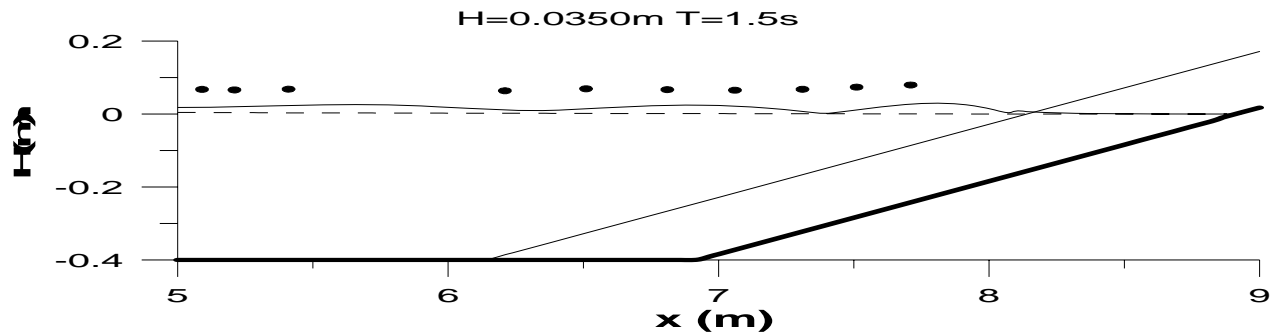


Fig. 6.5. Comparación de resultados obtenidos de forma numérica y experimental, para el caso de fondo no permeable con espesor de 0.1524m y talud 1:5.

Además, es necesario insistir en la adecuada selección del criterio de rotura, ya que a pesar de modelar con las mismas condiciones, los resultados pueden variar si se hace uso de los distintos criterios de rotura. En las siguientes figuras se ilustran estas discrepancias.

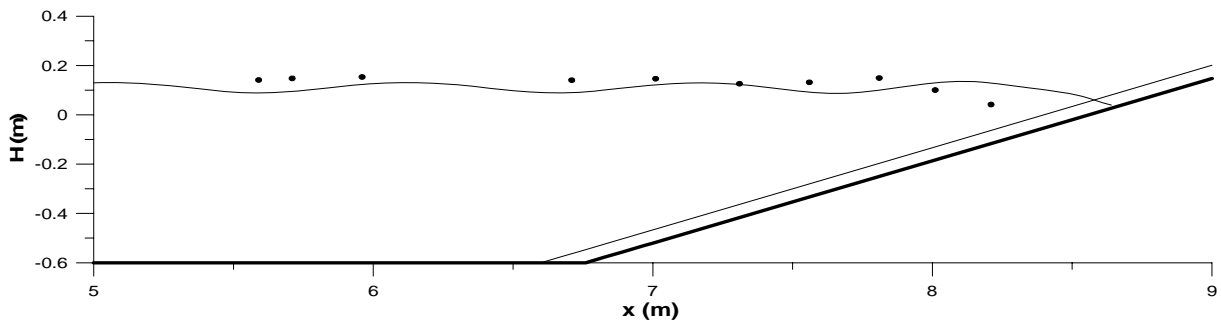


Fig. 6.6. Estimaciones de altura de ola aplicando el criterio de rotura según McKowan (1891).

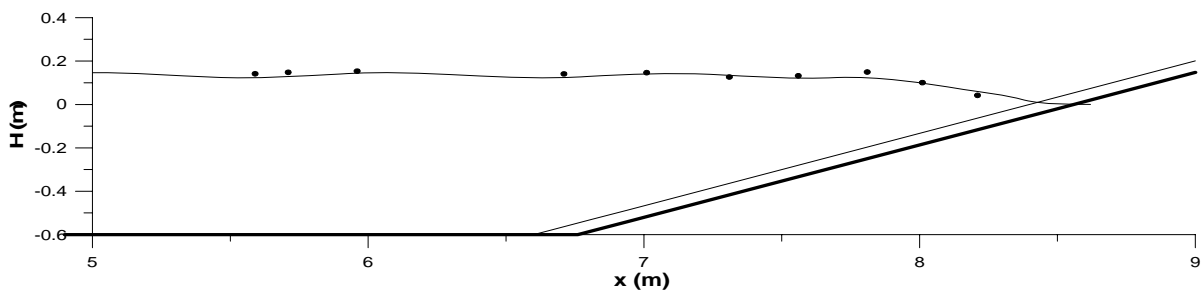


Fig. 6.7. Estimaciones de altura de ola aplicando el criterio de rotura según Watanabe, Hara y Horikawa (1983)..

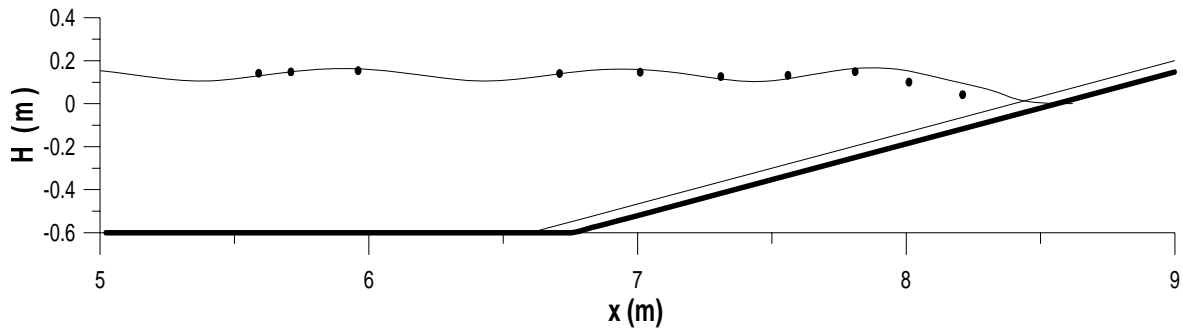
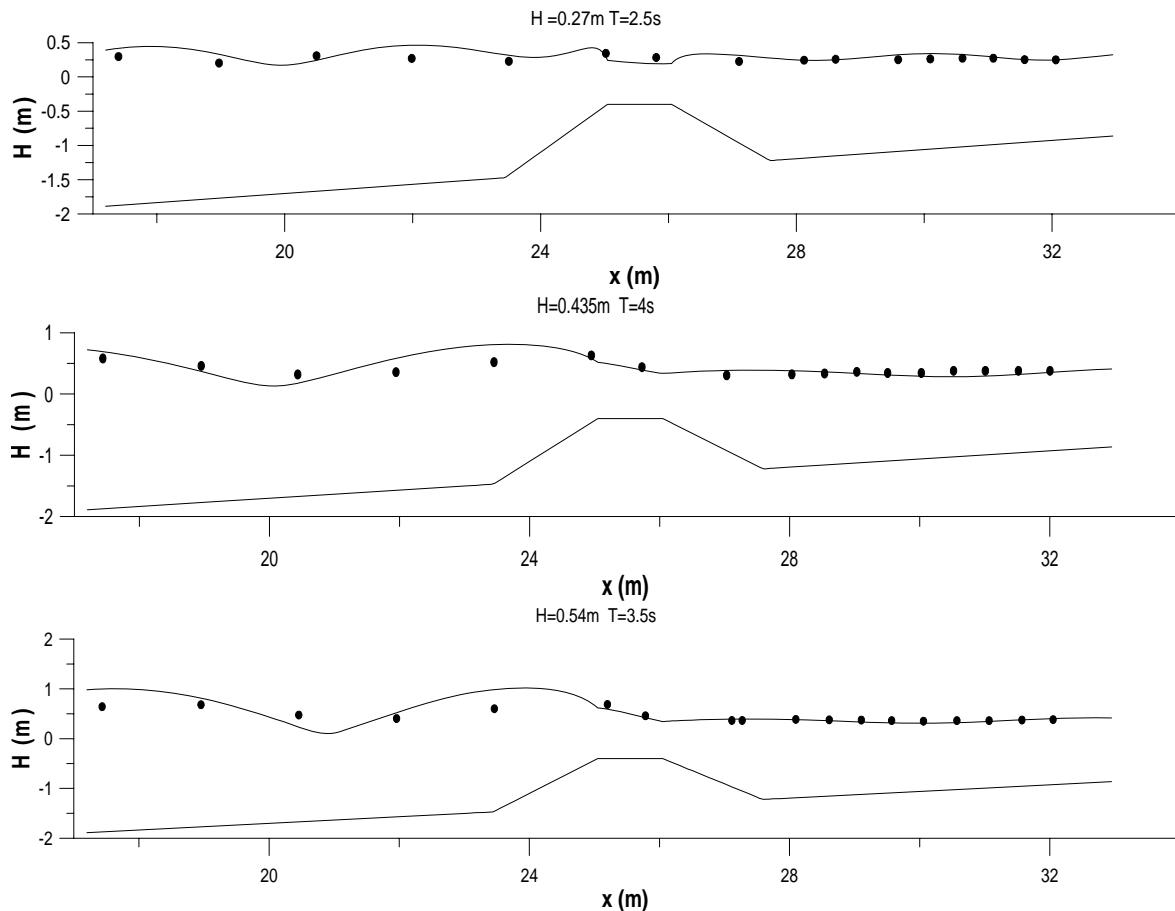


Fig. 6.8. Estimaciones de altura de ola aplicando el criterio de rotura según Weggel (1972).

Finalmente, para ampliar la validez del modelo se comparan las estimaciones proporcionadas por el modelo de propagación de este trabajo con mediciones de laboratorio realizadas por Tomé (1997) en un modelo físico con fondo impermeable con pendiente 1:15 sobre el que se colocó un dique sumergido de material poroso. El talud en ambas caras del dique es 1:1.5 y se construyó a una profundidad de 1.5m, mientras que la profundidad sobre corona es de 0.38m. En estas aproximaciones los cálculos se realizaron con los valores de  $K=0.275$  y  $T=0.3$  según Dally et al (1985), con el criterio de rotura según Weggel (1972). En las siguientes figuras se observa la excelente representación de la transformación del oleaje después de la línea de rotura que ofrece el modelo.



**Fig. 6.9. Comparación de alturas de ola calculadas con mediciones de Tomé (1977).**

En resumen, de acuerdo a lo observado a lo largo de este trabajo es posible recomendar el uso de los coeficientes  $K$  y  $\Gamma$  obtenidos en este estudio cuando se trate de un talud mayor o igual que 1:3 para el caso de la simulación de la propagación del oleaje sobre un fondo impermeable. Cuando se trate de taludes menores, se deben de emplear los valores de estos coeficientes que se muestran en Dally et al (1985). En ambos casos el criterio de rotura a utilizar será el propuesto por Weggel (1972).

Generalmente, en la realidad el fondo es compuesto por material permeable, en estos casos es preferible seguir utilizando el modelo de disipación de energía con los valores de los coeficientes  $K$  y  $\Gamma$  de acuerdo a Dally et al (1985) (ver fig 6.9) ya que a pesar de haber obtenido buenos resultados en la simulación de los experimentos con talud 1:3 y con fondo de material poroso de  $0.05m$  y  $0.15m$ , así como con los ensayos con pendiente 1:5 con espesor granular de  $0.05m$ , es importante tener en cuenta que el modelo de disipación esta planteado bajo las hipótesis de fondo impermeable, por lo que al tratar de simular la propagación del oleaje sobre un medio poroso, se presenta una sobreestimación de la disipación de energía que ocurre en la zona de rotura. En estos casos el criterio de rotura que simula de manera adecuada este proceso es el de Weggel (1972).

## CONCLUSIONES

Al comparar las aproximaciones realizadas por el modelo de propagación con los coeficientes de disipación registrados en la literatura contra los datos obtenidos en laboratorio, se observa que se puede representar razonablemente bien la evolución del oleaje hasta que llega al punto en el que la ola rompe, en donde se presentan diferencias muy marcadas, cuando se modela propagación del oleaje sobre una playa con pendiente 1:3.

En esta investigación, después de la observación directa del fenómeno de la rotura del oleaje en trabajos de laboratorio, se calibra un modelo de disipación de energía debida a la rotura, proponiendo nuevos valores para el coeficiente de decaimiento cuando se trata de un talud muy pronunciado como el talud de pendiente 1:3, caso para el que no existen registros en la literatura especializada.

En la propagación del oleaje es indispensable hacer un análisis cuidadoso que defina el modelo de oleaje a utilizar, en este trabajo se valida la aplicación de un modelo numérico de propagación de oleaje basado en la ecuación de la pendiente suave al tratarse de un fondo con pendiente 1:3, comparando las alturas de ola medidas en el canal de olas del Instituto de Ingeniería UNAM con las estimaciones calculadas con el modelo numérico, encontrando una excelente reproducción de la transformación del oleaje y los efectos que la rotura y un fondo de material poroso originan.

El criterio de rotura que se ocupó en este trabajo considera dentro de sus términos la pendiente de la playa. Este modelo ofrece resultados aceptables; sin embargo, se encontró que solo es aplicable en determinado rango, ya que este no considera los efectos de un fondo permeable

Para los experimentos con talud 1:5 los valores del coeficiente de decaimiento obtenidos en laboratorio no estiman de manera aceptable la propagación del oleaje, observando cierta subestimación de la disipación de energía. Entonces, cuando se emplean los valores registrados en la literatura y que son menores a los de laboratorio, en el coeficiente de decaimiento del modelo de disipación, se representan de mejor forma el fenómeno, validando así, la aplicación del modelo de propagación para el caso con pendiente de fondo 1:5

Cuando el espesor del material poroso es considerable en la zona de interés en el talud 1:5, el modelo disipa demasiada energía ya que no esta considerando en su planteamiento los efectos de este medio.

Finalmente se define el umbral de validez para los coeficientes que intervienen en el modelo de disipación estudiado, planteando un rango de aplicación para la expresión con la que se calcula la propagación del oleaje.



El principio de “altura de ola estable” llega a estimar de forma correcta las condiciones que se presentan en la zona de interés, pero los resultados se pueden mejorar si se replantea el modelo de forma en que se elimine la dependencia de la altura de ola estable.

A pesar de trabajar con el modelo de propagación más completo, se pueden obtener resultados que no concuerden con la realidad, por lo que es necesario contar con experiencia y criterio para interpretar los resultados.

## REFERENCIAS

Ávila, A., A. Pedrozo, R. Silva y D. Simmonds (2003) Principales teorías para el modelado matemático de la propagación de oleaje. IV Congreso Internacional Puertos y Costas, Realidades y Perspectivas, AMIP. Acapulco, Gro.

Berkhoff, J. (1972) Computation of combined refraction-diffraction. Proc. 13th. Internacional Conference on Coastal Engineering, ASCE. Vancouver, Canada.

Berkhoff, J. (1976) Mathematical models for simple harmonic linear water waves, wave diffraction, and refraction. Ph. D. Dissertation, Publication No. 163. Delf Hydraulics Laboratory.

Berkhoff, J. (1982) Refraction and diffraction of water waves; wave deformation by a shoal, comparison between computations and measurements, report on mathematical investigation. Delft Hydraulics Laboratory, Report W 154 part VIII.

Berkhoff, J., N. Booij y A. Radder (1982) "Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves." Coastal Engineering Vol. 6. pp. 255-279.

Booij, N. (1981) Gravity waves on water with non-uniform depth and current. Tesis Doctoral. Technical University of Delft.

Borthwick, A., K. Yiu y K. Anastasiou (1997) GMRES solution of mild-slope equation on quadtree grids. Proc. XVII IAHR Congress. San Francisco, USA.

Chamberlain, P. y D. Porter (1995) "The modified mild-slope equation" Journal Fluid Mechanics Vol. 29. pp. 393-407.

Chen, H. (1986) "Effects of bottom friction and boundary absorption on water wave scattering." Applied Ocean Research Vol. 8. pp. 99-104.

Copeland, G. (1985) "A practical alternative to the mild-slope wave equation" Coastal Engineering Vol. 9. pp. 125-149.

Dally, W., R. Dean y R. Dalrymple (1985) "Wave height variation across beaches of arbitrary profiles" Journal of Geophysics Research Vol. 90.

Dalrymple, R. (1988) "A model for the refraction of water waves" Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrng. Vol. 114. pp. 423-435.

Dalrymple, R. (1991) REFRACT, A Refraction Program for Water Waves. Center for Applied Coastal Research, Res. Rpt. CACR-91-09.

Dalrymple, R., J. Kirby y P. Hwang (1984) "Wave diffraction due to areas of energy dissipation" *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*. Vol. 110. pp. 67-79.

Dalrymple, R. y P. Martin (1992) Perfect boundary conditions for parabolic water-wave models. *Proc. R. Soc. Lond. A* 437.

Dean, R. y R. Dalrymple (1984) *Water waves mechanics for engineers and scientists*. World Scientific. Singapore

Dean, R. y R. Dalrymple (1984) *Coastal Processes with engineering applications*. Cambridge University.

Dickson, W., T. Herbers y E. Thornton (1995) "Wave reflection from breakwater." *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*. Vol. 121. pp. 262-268.

Dingemans, M. W. (1997) *Water wave propagation over uneven bottoms*. World Scientific. Singapore.

Horikawa, K. y C. Kuo (1966) A study of wave transformation inside surf zone. *Proc. 10th. Conference on Coastal Engineering*. New York, EUA.

Kaihatu, J. (2001) "Improvement of parabolic nonlinear dispersive wave model" *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrng*. Vol. 127. pp. 113-121.

Kirby, J. (1986a) "A general equation for waves over rippled beds" *Journal of Fluid Mechanics* Vol. 162. pp. 171-186.

Kirby, J. (1986b) "Rational approximations in the parabolic equation method for water waves" *Coastal Engineering* Vol. 10. pp. 355-378.

Kirby, J. (1986c) "Higher-order approximations in the parabolic equation method for water waves" *Journal of Geophysics Research* Vol. 91. pp. 933-952.

Kirby, J. (1989) "A note on parabolic radiation boundary conditions for elliptic wave calculations" *Coastal Engineering*. Vol.13. pp. 211-218.

Kirby, J. y R. Dalrymple (1986) "Modelling waves in surfzones and around the islands" *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, ASCE*. Vol. 112.

Li, B. y K. Anastasiou (1992) "Efficient elliptic solvers for the mild-slope equation using the multigrid technique" *Applied Ocean Research* Vol. 13. pp. 245-266

Losada, I., R. Silva y M. Losada (1996a) "3-D non breaking regular wave interaction with submerged breakwaters" *Coastal Engineering* Vol. 28. pp. 229-248.

Losada, I., R. Silva y M. Losada (1996b) "Interaction of non-breaking directional random waves with submerged breakwaters" Coastal Engineering Vol. 28. pp. 249-266.

Lozano, C. y R. Meyer (1976) "Leakage and response of waves trapped by round islands" The Physics of Fluids Vol. 19.

Lynett, P. (2002) A multi-layer approach to modelling generation, propagation and interaction of water waves. Tesis de Doctorado. Cornell University.

Maa, J., T. Hsu y H. Hwung (1997) RDE model: A program for simulating water wave transformation for harbor planning. Hydraulics and Ocean Engineering Dept. National Cheng-Kung University. Tainan, Taiwan, R.O.C., Special Scientific Report, No. 136.

Maa, J., M. Maa, C. Li y Q. He (1997a) Using the Gaussian elimination method for large banded matrix equations. Virginia Institute of Marine Science, Gloucester Point, VA 230662., Special Scientific Report, No. 135.

Madsen, P., R. Murray y O. Sorensen, R., (1991) "A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics" Coastal Engineering Vol. 15. pp. 371-388.

Martin, P., R. Dalrymple y J. Kirby (1997) Parabolic modelling of water waves, in Gravity Waves in Water of Finite Depth Advances in Fluid Mechanics Vol. 10 pp. 169-213.

Mase, H. y K. Takeba (1994) Bragg scattering of gravity waves over porous rippled bed. 24th ICCE. ASCE. Kobe, Japan. pp. 635-649.

Massel, S. (1989) "Hydrodynamics of coastal zones" Elsevier Oceanography Series Vol. 48.

Massel, S. (1993) "Extended refraction-diffraction equation for superface waves" Coastal Engineering Vol. 19. pp. 97-129.

Mei, C. (1983) The applied dynamics of ocean surface waves. A. S. o. O. Engineering. World Scientific. New York

Mc Cowan, J., "On the solitary wave", Philosophical magazine, Journal of science, London, Edinburgh, Dublin, Vol ,32 5(1981)

Panchang , V. y B. Pearce (1991) "Solution of mild-slope wave problem by iteration" Applied Ocean Research Vol. 13. pp. 187-200.

Porter, D. y D. Staziker (1995) "Extensions of the mild-slope equation" Journal of Fluid Mechanics Vol. 300. pp. 367-382.

Pos, J. (1985) "Asymmetrical breakwater gap wave diffraction using finite elements." Coastal Engineering Vol. 9. pp. 101-123

Pos, J., J. Gonsalves y A. Holtzhausen (1989) Short-Wave Penetration of Harbours: A Case Study at Mossel Bay. 9th Annual Conference on Finite Element Method Stellenbosch, South Africa.

Radder, A. (1979) "On the parabolic equation method for water-wave propagation" Journal of Fluid Mechanics Vol. 95. pp. 159-176.

Rojanakamthorn, S., M. Isobe y A. Watanabe (1989) "A mathematical model of wave transformation over submerged breakwaters" Coastal Engineering Vol. 32. pp. 209-234.

Rojanakamthorn, S., M. Isobe y A. Watanabe (1990) Modelling of wave transformation on submerged breakwaters. Proceedings 22nd ICCE, ASCE. New York, USA.

Romate, J. (1992) "Absorbing boundary conditions for free surface waves." Journal Computational Physic Vol. 99. pp. 135-145.

Romate, J. y J. Broeze (1992) "Absorbing boundary conditions for free surface wave simulations with panel method." Journal Computational Physic Vol. 99. pp. 146-158.

Santos, A. y R. Neves (1991) "Radiative artificial boundaries in ocean barotropic models." Computer Modelling in Ocean Engineering Vol. 91. pp. 373-383.

Silva, R., A. Borthwick y E. Taylor (2003) "Numerical implementation of the harmonic modified mild-slope equation." En arbitrage.

Silva, R., P. Salles y G. Govaere (2002a) "Extended solution for waves travelling over a rapidly changing porous bottom" Ocean Engineering Vol. 30. pp. 437-452.

Silva, R., P. Salles y A. Palacio (2002b) "Linear waves propagating over a rapidly varying finite porous bed" Coastal Engineering Vol. 44. pp. 239-260.

Smith, R. y T. Spinks (1975) "Scattering of surface waves by a conical island." Journal Fluid Mechanics Vol. 72. pp. 373-384.

Sollitt, C. y R. Cross (1972) Wave transmission through permeable breakwaters. Proceedings of the 13th International Conference on Coastal Engineering, ASCE. Vancouver, Canada

Tomé, M. "Modelado hidrodinámico de la circulación 2DH inducida por el oleaje en presencia de diques sumergidos". Tesis doctoral. Barcelona: Universidad Politécnica de Cataluña. 1997, 147 pp.

Tsay, T. y P. Liu (1983) "A finite element model for wave refraction and diffraction" Applied Ocean Research Vol. 5. pp. 30-37.

Tsay, T., W. Zhu y P. Liu (1989) "A finite element model for wave refraction, diffraction, reflection and dissipation." Applied Ocean Research Vol. 11.

Weggel J. R., "Maximum breaker height", Journal of the waterways, harbors and coastal engineering division, ASCE (1972)

Xu, B. y V. Panchang (1993) "Outgoing boundary conditions for finite difference elliptic water-wave models." Proceedings, Royal Society of London. Series A 441. pp. 575-588.

Zhao, L., V. Panchang, W. Chen, Z. Demirbilek y N. Chhabbra (2001) "Simulation of wave breaking effects in two-dimensional elliptic harbor wave models" Coastal Engineering Vol. 42. pp. 359-373.

Zhao, Y. y K. Anastasiou (1996) "Modelling of wave propagation in the near shore region using the mild-slope equation with GMRES-based iterative solvers" International Journal for Numerical Methods in Fluids Vol. 23. pp. 397-441.

## ANEXO 1. TEORIA LINEAL

Las bases necesarias para definir la ecuación de gobierno con la cual se busca modelar la propagación del oleaje que se aproxima a la costa, incluyendo los fenómenos que se presentan, se ubican dentro de la teoría lineal o teoría de ondas pequeñas, la cual se desarrollara a continuación

Para resolver cualquier problema es necesario establecer sus ecuaciones de gobierno, así como las condiciones de frontera a la que esta sometida el fluido.

### ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Partiendo de un cubo infinitesimal como el que se muestra en la siguiente figura

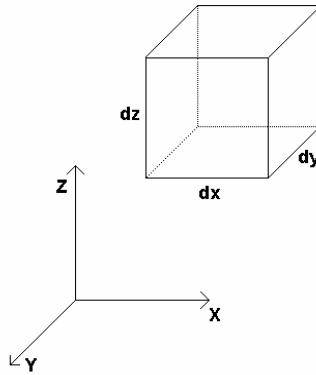


Fig. A. 1 Cubo infinitesimal

En el que la cantidad de masa dentro del cubo, para un instante determinado es

$$\rho \, dx \, dy \, dz \quad (.1)$$

Y después de un intervalo de tiempo

$$\left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dx \, dy \, dz \quad (.2)$$

Por lo que haciendo la diferencia se obtiene el cambio de masa en  $dt$

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dx \, dy \, dz \, dt \quad (.3)$$

Al considerar la entrada y salida de masa en cada una de las caras del cubo, como se puede observar en la fig. 2:

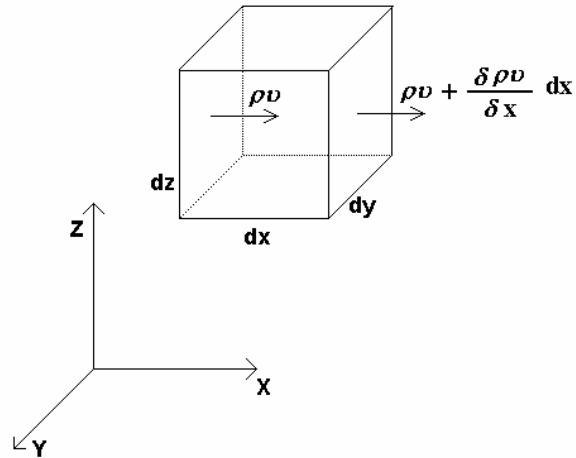


Fig. A. 2. Entrada y salida al cubo infinitesimal

La cantidad de materia que entra por la cara  $dydz$  (A) para un tiempo  $dt$ , es:

$$\rho u \, dy \, dz \, dt \quad (.4)$$

Mientras que la cantidad de masa que sale por la cara  $dydz$  (B), para el mismo tiempo es:

$$\left( \rho u + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} dx \right) dy \, dz \, dt \quad (.5)$$

Por lo que la diferencia de masa en el eje x es:

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} dx \, dy \, dz \, dt \quad (.6)$$

Trabajando de la misma forma, se obtiene el cambio de masa en las direcciones y y z.

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial y} dx \, dy \, dz \, dt \quad (.7)$$

$$\frac{\partial (\rho w)}{\partial z} dx \, dy \, dz \, dt \quad (.8)$$

Por lo que el cambio total de masa queda como:

$$\left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz \, dt \quad (.9)$$

Para un intervalo  $dt$ , ahora igualando ec. (9) con (3)



$$\left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dx dy dz dt = - \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt \quad (.10)$$

Reordenando tenemos que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (.11)$$

Pero, como:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} = u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad (.12)$$

Tenemos que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (.13)$$

Que también se puede escribir como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \bar{V} + \bar{V} \operatorname{grad} \rho = 0 \quad (.14)$$

La expresión (.13) ó (.14) representa la forma más general de la ecuación de continuidad, si el flujo es incompresible,  $\rho = \text{Constante} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  y  $\operatorname{grad} \rho = 0$ , con lo que se tiene:

$$\rho \operatorname{div} \bar{V} = \operatorname{div} \bar{V} = 0 \quad (.15)$$

### CONDICIÓN CINEMÁTICA DE CONTORNO

Una expresión que representa la condición cinemática de contorno, se deriva de la ecuación que describe la superficie que constituye el contorno. Cualquier superficie libre o móvil queda ilustrada como

$$F(x,y,z,t)=0 \quad (.16)$$

Si esta superficie varía con respecto del tiempo, la derivada total con respecto al tiempo es igual a cero.

$$\frac{DF(x,y,z,t)}{Dt} = 0 = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \quad (.17)$$

ó

$$-\frac{\partial F}{\partial t} = \vec{V} \cdot \nabla F = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial F / \partial x \\ \partial F / \partial y \\ \partial F / \partial z \end{bmatrix} = \vec{V} \cdot |nF| \quad (.18)$$

Donde el vector unitario a la superficie es

$$n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{N}{|N|}; N = \nabla F \quad (.19)$$

Reagrupando esta condición cinemática de contorno obtenemos

$$\vec{V} \cdot n = -\frac{\partial F}{\partial t} \frac{1}{|\nabla F|} \quad (.20)$$

Con

$$|\nabla F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \quad (.21)$$

## CONDICIÓN DINÁMICA DE SUPERFICIE LIBRE

Esta condición, ecuación de Bernoulli, se obtiene a partir de la segunda ley de Newton, asumiendo flujo incompresible e irrotacional, trabajando las ecuaciones como se demuestra a continuación.

## ECUACIONES DE NAVIER STOKES

Considerando la segunda ley de Newton en la dirección x.

$$\Sigma F_x = ma_x \quad (.22)$$

como  $a_x = Du/Dt$ , además, como u es función como  $u(x,y,z,t)$ , la derivada total es:

$$\frac{Du(x,y,z,t)}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = a_x \quad (.23)$$

Con la expresión anterior queda representada la aceleración total sobre el eje x. La ecuación esta compuesta por dos tipos de términos:

Aceleración Local:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \quad (.24)$$

Que representa el cambio de  $u$  en un punto dado en el tiempo

Aceleración convectiva:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (.25)$$

La ecuación de movimiento puede ser formulada como:

$$\Sigma F_x = m a_x \quad (.26)$$

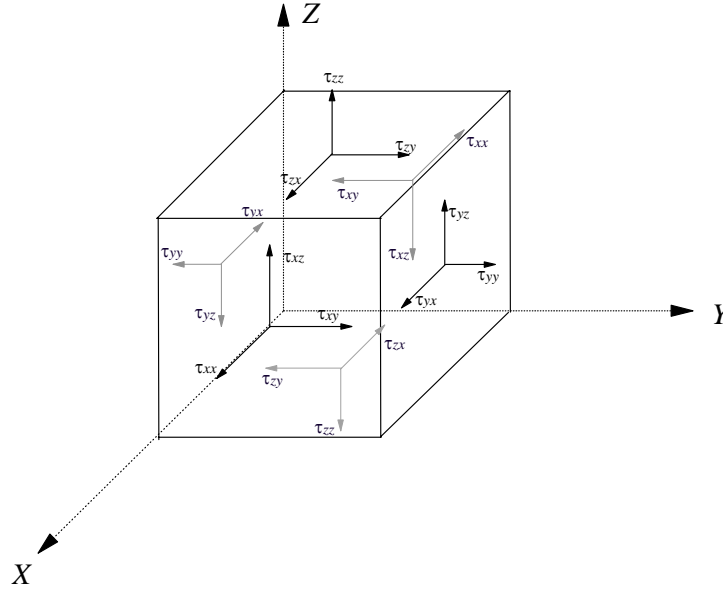


Fig. A. 3. Esfuerzos en un volumen de control

Para un volumen de control como el que se ilustra en la figura anterior, se puede observar que existen tres posibles tensiones en cada una de las caras del cubo, dos tangenciales y una normal. Por lo tanto hay tres tensiones que son ejercidas sobre las caras, y que incluyen a la presión.

$$\sigma_{xx} = -p + \tau_{xx}; \quad \sigma_{yy} = -p + \tau_{yy}; \quad \sigma_{zz} = -p + \tau_{zz} \quad (.27)$$

Continuando con la figura, las fuerzas sobre la superficie se pueden obtener de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z - \left( \sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta z \\ & - \left( \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta z + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y - \left( \tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (A.28)$$

$$+ \rho \Delta x \Delta y \Delta z \mathbf{X} = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{Du}{Dt}$$

Donde  $x$  denota cualquier fuerza actuando en el eje  $x$ . Operando y dividiendo la ecuación anterior por el volumen del cubo

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \mathbf{X} \quad (.28)$$

Con un desarrollo similar se obtienen las ecuaciones para las otras dos direcciones 'y' y 'z'

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \mathbf{Y} \quad (.29)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \mathbf{Z} \quad (.30)$$

Estas ecuaciones están expresadas en función de los esfuerzos, pero en la aplicación a problemas de hidrodinámica es más conveniente expresarlas en términos de las deformaciones. Para ello es necesario establecer la propiedad física que caracteriza a los problemas de fluidos a moverse, conocida como la viscosidad u relacionada en la siguiente expresión:

$$F = \mu \frac{\mathbf{AV}}{y} \quad (.31)$$

Como el esfuerzo ejercido sobre el fluido, es una fuerza que actúa sobre las placas  $F/A$ , y que la velocidad angular  $N/y$ , se puede expresar como  $du/dy$ . Entonces el esfuerzo queda como:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (.32)$$

Para cualquier dirección se cumple que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (.33)$$

Ahora, el esfuerzo cortante sobre la superficie del elemento es:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial v}{\partial x} \quad (.34)$$

Cualquier combinación genera esfuerzos viscosos que son simplemente la suma de las contribuciones independientes

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (.35)$$

y para los planos restantes (x,z) y (y,z):

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (.36)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (.37)$$

y los esfuerzos normales son:

$$\tau_{xx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (.38)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (.39)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (.40)$$

sustituyendo las ecuaciones anteriores en ecs. 44 a 46, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \mathbf{X} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) + \mathbf{X} \end{aligned} \quad (.41)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) + \mathbf{Y} \quad (.42)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \mathbf{Z} \quad (.43)$$

Asumiendo que la viscosidad es constante en todo el dominio, las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mathbf{X} \quad (.44)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mathbf{Y} \quad (.45)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mathbf{Z} \quad (.46)$$

o de forma vectorial:

$$\frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{\mu}{\rho} \nabla (\text{div} \mathbf{V}) + \bar{\mathbf{X}} \quad (.47)$$

Para fluidos Newtonianos, la relación dinámica entre viscosidad y densidad se define como viscosidad cinemática:

$$\nu = \mu / \rho \quad (.48)$$

Haciendo uso de la ecuación anterior y de la ecuación de continuidad de este anexo, las ecs. 60 a 62 se pueden escribir como:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mathbf{X} \quad (.49)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \mathbf{Y}$$

$$(.50) \frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \mathbf{Z} \quad (.51)$$

Conocidas como las ecuaciones de Navier-Stokes. De forma vectorial:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \bar{\mathbf{X}} \quad (.52)$$

## ECUACIÓN DE EULER

Para aplicar la ecuación anterior es necesario conocer el valor de las tensiones en el fluido. La suposición más conveniente, la cual es razonablemente válida para muchos problemas relacionados con la hidráulica, consiste en considerar que las tensiones tangenciales son iguales a cero, es decir asumir que los efectos de fricción son relativamente pequeños y que el flujo es no viscoso, resultando las ecuaciones de Euler. Expresando las fuerzas del volumen de control por unidad de masa como  $-g$  en la dirección  $z$  y cero en las direcciones  $x$  e  $y$ , se obtiene

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (.53)$$

## ECUACIÓN DE BERNOULLI

La ecuación de Bernoulli es un forma integrada de las ecuaciones del movimiento o de Euler y proporciona una relación entre el campo de presiones y de cinemática. Considerando la suposición de fluido incompresible, las ecuaciones de movimiento del fluido (.53), en el plano  $x$ - $z$ , se pueden expresar como

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (.54)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (.55)$$

Considerando la condición de flujo irrotacional en dos dimensiones

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (.56)$$

las ecuaciones (.54) y (.55) pueden ser expresadas, usando (.56), como

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial(w^2/2)}{\partial x} \quad (.57)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(u^2/2)}{\partial z} + \frac{\partial(w^2/2)}{\partial z} \quad (.58)$$

Ahora, existe un potencial de velocidades, expresado como

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (.59)$$

Por lo tanto, sustituyendo la ecuación (.59) en (.57) y (.58), se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} \right] = 0 \quad (.60)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} \right] = -g \quad (.61)$$

donde se ha asumido que la densidad es uniforme a través del fluido. Integrando la ecuación (.60) en  $x$ , se obtiene

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} = C'(z,t) \quad (.62)$$

donde la variable de integración  $C(z,t)$  varia sólo con  $z$  y  $t$ . Integrando la ecuación (.61) en  $z$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} = -gz + C(x,t) \quad (.63)$$

Comparando las ecuaciones (.62) y (.63), las cuales tienen los mismos términos en el lado izquierdo, se obtiene que

$$C'(z,t) = -gz + C(x,t) \quad (.64)$$

Por lo tanto,  $C$  no puede ser una función de  $x$ , como tampoco  $C'$  y  $gz$  dependen de  $x$ , obteniéndose

$$C'(z,t) = -gz + C(t) \quad (.65)$$

Sustituyendo (.65) en (.62), se obtiene

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (.66)$$

conocida como ecuación de Bernoulli.

## FLUJO DE ENERGÍA

Debido a que las trayectorias de las partículas de agua son cerradas, en su propagación, las ondas de pequeña amplitud no transmiten masa a través del fluido, casi siempre, este tipo de ondas lo que transmiten es energía. La proporción de energía que es transferida es llamada flujo de energía,  $F$ , y para teoría lineal es la proporción del trabajo realizado por el fluido sobre un lado de una sección vertical sobre el fluido sobre el otro lado. Para una sección vertical (fig 4-1), la relación instantánea del trabajo realizado por la presión dinámica  $p_D$ , por anchura unitaria en la dirección de propagación del oleaje es:

$$F = \int_{-h}^{\eta} p_D \cdot u dz \quad (A.67)$$



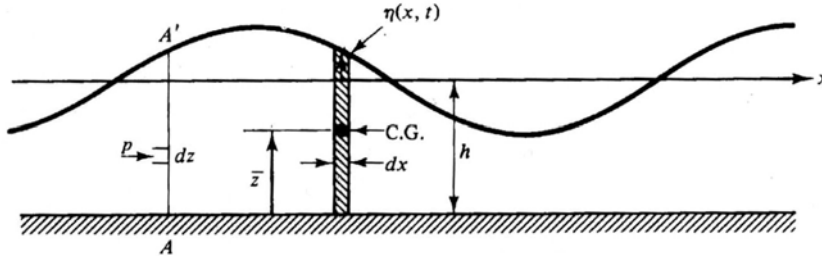


Fig. A. 4. Determinación de la energía potencial como resultado del incremento de masa de agua en el área del valle a él área de la cresta.

El flujo de energía medio es obtenido promediando la ecuación anterior en un periodo de onda

$$\bar{F} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^{\eta} p_D \cdot u dz dt \quad (\text{A.68})$$

Utilizando las ecuaciones para la presión dinámica

$$p_D = p + \rho g z = \rho g a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t) \quad (\text{A.69})$$

y para la velocidad horizontal de las partículas

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{agk}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kh - \sigma t) \quad (\text{A.70})$$

la (A.67)) se puede expresar como:

$$\bar{F} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^{\eta} \left[ \rho g \eta \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \right] \left[ \frac{gHk}{2\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t) \right] dz dt \quad (\text{A.71})$$

Haciendo uso de la definición

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t) \quad (\text{A.72})$$

La ec. (A.71) queda como

$$\bar{F} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^{\eta} \left[ \rho g \eta \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \right] \left[ \sigma \eta \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \right] dz dt \quad (\text{A.73})$$

o

$$\bar{F} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^{\eta} \rho g \sigma \eta^2 \frac{\cosh^2 k(h+z)}{\cosh kh \sinh kh} dz dt \quad (\text{A.74})$$

Integrando esta última ecuación se obtiene

$$\bar{F} = \frac{\rho g \sigma}{4k} \left( \frac{H}{2} \right)^2 \frac{(2kh + \sinh 2kh)}{\sinh kh} \quad (\text{A.75})$$

La cual puede ser expresada como

$$\bar{F} = \frac{\sigma}{k} \left( \frac{1}{8} \rho g H^2 \right)^2 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right] \quad (\text{A.76})$$

o de forma más simple,

$$\bar{F} = ECn \quad (\text{A.77})$$

Donde  $Cn$  es la velocidad con la cual la energía es transmitida; esta velocidad es conocida como celeridad de grupo,  $C_g$ :

$$C_g = nC \quad (\text{A.78})$$

Por tanto  $n$  debe ser igual a:

$$n = \frac{Cg}{C} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (\text{A.79})$$

## CELERIDAD DE GRUPO

Una explicación más descriptiva del término celeridad de grupo puede hallarse tras examinar la propagación de un grupo de ondas. Si se consideran dos trenes de oleaje de la misma altura propagándose en la misma dirección con frecuencias y número de onda ligeramente diferentes, estas pueden ser superpuestas como:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 \quad (\text{A.80})$$

$$n = \frac{H}{2} \cos(k_1 x - \sigma_1 t) + \frac{H}{2} \cos(k_2 x - \sigma_2 t) \quad (\text{A.81})$$

donde,

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma - \frac{\Delta\sigma}{2}, & k_1 &= k - \frac{\Delta k}{2} \\ \sigma_2 &= \sigma - \frac{\Delta\sigma}{2}, & k_2 &= k - \frac{\Delta k}{2}\end{aligned}\quad (\text{A.82})$$

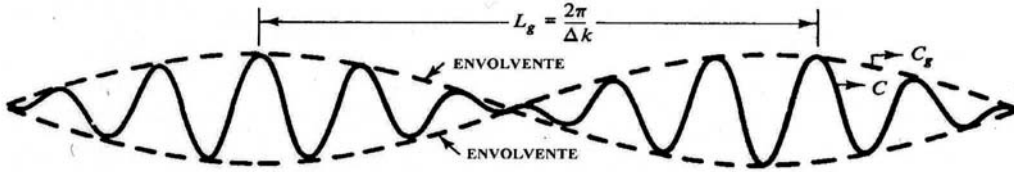


Fig. A. 5. Características de un grupo de olas.

Usando identidades trigonométricas, los perfiles pueden ser combinados de la siguiente manera:

$$\eta = H \cos \left[ \frac{1}{2} (k_1 + k_2)x - (\sigma_1 + \sigma_2)t \right] \cos \left[ \frac{1}{2} (k_1 - k_2)x - (\sigma_1 - \sigma_2)t \right] \quad (\text{A.83})$$

Y simplificando se tiene que:

$$\eta = H \cos(kx - \sigma t) \cos \left[ \frac{1}{2} \left( \Delta k x - \frac{\Delta \sigma}{\Delta k} t \right) \right] \quad (\text{A.84})$$

El resultado es un oleaje moviéndose con una celeridad  $C = \sigma/k$ , modulado por una envoltura que se propaga con una velocidad  $\Delta\sigma/\Delta k$ , la cual es conocida como celeridad de grupo,  $C_g$ . Si se recuerda que la energía del oleaje es proporcional a la altura de ola, es obvio que la energía no puede pasar los nodos dado que la altura de ola ahí es igual a cero. Por lo tanto, la energía debe viajar con la celeridad de grupo. Esta velocidad, de la ecuación anterior es:

$$C_g = \frac{\Delta\sigma}{\Delta k} \quad (\text{A.85})$$

Haciendo tender el límite  $\Delta k \rightarrow 0$ , se obtiene la velocidad de grupo de longitud infinita  $L_g$ , tal que:

$$C_g = \frac{d\sigma}{dk} \quad (\text{A.86})$$

Recordando la ecuación de la dispersión,

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (\text{A.87})$$

Y considerando que:

$$2\sigma \frac{d\sigma}{dk} = g \tanh kh + gkh \sec h^2 kh \quad (\text{A.88})$$

Ahora, sustituyendo la ecuación de la dispersión en la ec. (A.86) y resolviendo se obtiene:

$$C_g = \frac{d\sigma}{dk} = g \frac{(g \tanh kh + gkh \sec h^2 kh) \sigma}{2gk \tanh kh} \quad (\text{A.89})$$

que puede ser expresada como:

$$C_g = \frac{C}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (\text{A.90})$$

Por lo tanto,  $C_g = nC$ , y de nuevo

$$n = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (\text{A.91})$$