



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**ESTUDIO DE LA INTERACCIÓN ENTRE
UN MEDIO ELÁSTICO Y UN FLUIDO
NEWTONIANO Y SU APLICACIÓN A LA
SISMOLOGÍA VOLCÁNICA**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

**PRESENTA:
PEDRO CORONA ROMERO**

**DIRECTORA DE TESIS:
DRA. ALEJANDRA ARCINIEGA CEBALLOS**

2006





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Corona

Romero

Pedro

56 75 66 72

Universidad Nacional Autónoma de México

Física

096290466

Datos del tutor

Dra

Arciniega

Ceballos

Alejandra

Datos del sinodal 1

Dra

Soler

Arechalde

Ana María

Datos del sinodal 2

Dr

Valenzuela

Wong

Raúl

Datos del sinodal 3

Dr

Hernández

Quintero

Juan Esteban

M. C.

Hernández

Zapata

Sergio

Datos del trabajo escrito

Estudio de la Interacción entre un Medio

Elástico y un Fluido Newtoniano y su

Aplicación a la Sismología Volcánica

118 p

2006

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mis Padres.
Pues sin su apoyo,
nada de lo que soy sería.

Agradecimientos

El presente trabajo recibió apoyo por parte de la DGAPA-PAPIT Proyecto IN-113405

Antes que nada, he de agradecer a la UNAM y a la fac. de Ciencias el haberme educado. Así como agradezco al Inst. de Geofísica las facilidades y apoyos brindados para realizar este trabajo.

Debo de agradecer a todos mis maestr@s de la carrera, sin excepción. Pues siempre me dieron la oportunidad de enriquecerme académica y personalmente.

Agradezco a Alejandra Arciniega la paciencia y libertad que me brindó y experiencia que me donó en la elaboración de esta tesis.

Agradezco a los sinodales por sus pertinentes consejos para el perfeccionamiento de este trabajo.

Deseo agradecer profundamente a Darío Moreno por enseñarme a "ser" Físico y compartir su amistad y experiencia con migo.

Mi más profundo agradecimiento a mis amig@s, a mis primos y a mi novia Areli, mi segunda familia, por haberme acompañado, querido y apoyado por tantos años.
Sin importar dónde estén, muchas gracias.

Mil gracias a mi padre y a mi madre por darme la oportunidad de hacer lo que hago y apoyarme en ello.

Nunca tendré manera de agradecerle a mi madre, por ser la persona que, en todo momento, me ha apoyado incondicionalmente con inagotable cariño.

Agradecimientos

Disculpa, ¡ho! Madre,
por reducir tu mística poesía,
a imágenes de la razón.

Pedro Corona R.

—Antes de embarcarte a cualquier camino tienes que hacer la pregunta: ¿tiene corazón este camino?...

—Pero ¿cómo sé de seguro si un camino tiene corazón o no?...

—Te he dicho que para escoger un camino debes estar libre de miedo y ambición...

Argüí que se necesitaba ambición para emprender cualquier camino... Una persona debe tener ambición para poder aprender.

—El deseo de aprender no es ambición —dijo—. El deseo de saber es nuestro destino como hombres, pero... solicitar poder... es ambición. ...luego, el camino sin corazón se vuelve contra los hombres y los destruye. No se necesita gran cosa para morir, y buscar la muerte es no buscar nada.¹

¹ Castaneda Carlos. *Las enseñanzas de Don Juan*, Edit. FCE. México, D.F., 2000. pp. 319, p. 209.

ÍNDICE

I PLANTEAMIENTO Y ELEMENTOS FÍSICO-MATEMÁTICOS	
Introducción.....	1
I.1 Planteamiento del Problema.....	2
I.1.i El Sistema Físico.	2
I.1.ii Proceso de Solución.	3
I.2 Medios Deformables.....	3
I.2.i Momentum lineal en un medio deformable.	3
I.2.ii Flujo Newtoniano a través de un Canal Cilíndrico.	5
I.2.iii Deformación de una Cavidad Cilíndrica.	7
I.2.iv Ecuación Diferencial de Continuidad para una Geometría Cilíndrica que varía en el tiempo.	9
I.2.v Ondas en un Medio Elástico.	13
I.3 Tratamiento Matemático.....	14
I.3.i Propositiones Matemáticas.	15
I.3.ii Método Matemático.	18
II CONSTRUCCIÓN DEL MODELO	
Introducción.....	19
El modelo.	19
Caracterización del Modelo.	20
Suposiciones.	20
II.1 Campo de Velocidades del Fluido.....	24
II.1.i Ecuación de la Velocidad Radial.	22
II.1.ii Ecuación de la Velocidad Vertical.	25
II.2 Esfuerzos del Fluido.....	25
II.2.i Ecuación de Esfuerzos Verticales.	26
II.2.ii Ecuación de Esfuerzos Radiales.	28
II.2.iii Ecuación Diferencial de la Velocidad Vertical.	29
II.2.iv Ecuación de la Presión.	34
II.3 Esfuerzos de la Cavidad.....	36
II.3.i Ecuación Diferencial del Radio de la Cavidad.	36
III ANÁLISIS DEL MODELO	
Introducción.....	37

III.1	Análisis del Sistema Diferencial.....	38
III.1.i	Puntos de Equilibrio.	39
III.1.ii	Análisis Perturbativo y Estabilidad.	40
III.1.iii	Estabilidad de la Solución.	41
III.2	Acoplamiento de dos cavidades.....	45
III.2.i	Solución del sistema A.	45
III.2.ii	Solución del sistema B.	46
III.3	Campo de radiación.....	47
III.3.i	Campo Cercano.	47
III.3.ii	Campo Lejano.	58
III.4	Límites del sistema.....	50
III.4.i	Límites para un Fluido Newtoniano.	50
III.4.ii	Límites para un Medio Elástico.	52
IV APLICACIÓN AL VOLCANISMO		
	Introducción.....	55
IV.1	Volcanismo.....	57
IV.1.i	Propiedades Físicas y Tipos de Magmas.	57
IV.1.ii	Volcanes: Estructura y Tipos.	60
IV.1.iii	Señales Sísmicas Volcánicas.	62
IV.2	Aplicación del Modelo.....	64
IV.2.i	El Modelo Teórico.	65
IV.2.ii	Rangos de los Valores a usar.	69
IV.2.iii	Procedimiento.	73
IV.3	Ejemplos.....	74
IV.3.i	Basalto Seco Superficial.	74
IV.3.ii	Andesita Húmeda Profunda.	83
IV.4	Discusión.....	92
IV.4.i	Acerca de las Frecuencias.	92
IV.3.ii	Flujos.	94
V CONCLUSIONES		
V.1	El Modelo Teórico.....	95
V.2	Volcanismo.....	98
V.3	Valores Promedio.....	99
V.4	Extensión de la Ecuación de Continuidad.....	100
V.5	Final.....	101
APÉNDICES		
A	Notación Tensorial.....	103
B	Elementos Geológicos.....	107

REFERENCIAS

1 Libros.....	109
2 Artículos.....	113

RESUMEN

En el presente trabajo se modela la interacción que se da entre un medio elástico y un fluido newtoniano, cuando este último fluye a través de un canal cilíndrico que se encuentra en el medio elástico. Posteriormente el modelo de la interacción es utilizado para estudiar propiedades sísmicas de conductos volcánicos.

Haciendo uso de la física de medios elásticos y de fluidos newtonianos se construyeron las ecuaciones que resuelven para todo momento el sistema físico compuesto por el fluido y la cavidad que lo contiene. La esencia de la solución se encuentra en dos ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden no lineales. Una de ellas resuelve el valor de la velocidad vertical del fluido mientras que la otra lo hace con el valor del radio del canal cilíndrico.

Para aplicar el modelo a la sismología volcánica se utilizaron los valores físicos de roca y de magma para el medio elástico y el fluido newtoniano respectivamente. A partir del conocimiento de las variaciones de la geometría de la cavidad, se calculó el campo de desplazamientos y el campo de velocidades en el medio elástico (roca). Lo cual en los estudios sísmico-volcánicos se les conoce como señales sintéticas o sismos sintéticos.

Las características físicas de las señales sintéticas fueron analizadas; en particular las frecuencias. Encontrándose que los procesos de flujo de magma por conductos volcánicos es un factible generador de señales sísmicas atribuidas a la actividad volcánica.

INTRODUCCIÓN

Los fenómenos naturales de alto riesgo e impacto ambiental son de gran importancia para la sociedad y en los últimos tiempos ha cobrado mayor ímpetu su estudio y comprensión. Sin lugar a dudas uno de los fenómenos naturales que puede llegar a tener gran repercusión en el ambiente local y global es el volcanismo, razón por la cual esta tesis dirige sus estudios a dicho tema intentando colaborar al mejor entendimiento de este impresionante fenómeno.

El volcanismo está asociado con una amplia gama de señales de actividad, ejemplos de ello son: deformaciones del terreno, variación de la temperatura de los suelos, cambios químicos en los acuíferos, eyecciones de una gran variedad de materiales y fenómenos sísmicos, por mencionar algunos. En particular la sismicidad volcánica ha cobrado gran importancia dado que algunas erupciones volcánicas han sido previstas por medio de ella (McNutt, 2001 [28]) además de poder ser monitoreada en tiempo real.

Existe una gran variedad de señales sísmico-volcánicas. Estas tienen su origen principalmente en procesos de sistemas hidrotermales, flujos de magma y/o volátiles y ruptura de materiales rocosos. Por esto, es de vital importancia investigar los mecanismos que generan dichas señales de actividad para conocer la evolución temporal de un sistema volcánico y mejorar la capacidad de prevenir desastres.

Diversos mecanismos se han propuesto para explicar la generación de las señales sísmico-volcánicas. Desde procesos de fractura del material rocoso (Ferrick et al., 1982; Tuffen et al., 2003), hasta mecanismos de resonancia de fluidos en contenedores rocosos. Este último caso ha sido intensamente estudiado considerando distintas geometrías: cilindros (Chouet, 1985; Nishimura et al., 2003), esferas (Crosson et al., 1985) y polígonos rectangulares (cracks) (Spence et al., 1985; Chouet, 1985), por citar algunos ejemplos. Siendo los resonadores de fluidos, en particular el propuesto por Chouet en 1985, los modelos más exitosos. En este tipo de modelo se tiene un medio fluido en una cavidad rocosa, el cual es excitado. Dicha excitación da origen a la señal sísmica.

Otra alternativa que se ha considerado para dar origen a las características de cierto tipo de señales sísmico volcánicas son los procesos no lineales que se dan en la interacción de flujos a través de materiales rocosos. Pero tal fenómeno

no está tan explorado como el caso de los resonadores. Uno de los primeros trabajos en este sentido fue realizado por Bruce Julian en 1994. El cual proponía que los procesos no lineales, debidos a la interacción de un medio fluido y uno elástico, desencadenaban una señal sísmica que podría llegar a ser caótica. El modelo de Julian consiste en una abertura cuya profundidad es constante y su largo es infinito en un medio deformable. El estudio anterior es bidimensional y está determinado por dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, acopladas y no lineales. Tales ecuaciones resolvían la velocidad del fluido y el valor del ancho de la abertura para todo tiempo. Por medio de la manipulación de los parámetros, Julian pretendió adjudicar características como doblamiento de periodos y comportamientos caóticos a las variables de su modelo.

El trabajo de Julian da lugar a una serie de objeciones. Puesto que la construcción física de su modelo se podría pensar carente de rigurosidad debido a una sobre simplificación del sistema físico. Y parte de sus resultados están fuera de lo que podría ser aceptado de acuerdo con las observaciones, pues obtiene velocidades de 50 m/s equivalente a 180 Km/Hr para los flujos de magma cuando se esperarían velocidades menores a cm/s (Jaupart, 2000). Además de que el rango de valores de los parámetros que empleó en la solución de sus ecuaciones no son los comunes. Pero la idea de que los procesos de flujo magmático a través de un medio rocoso puedan dar origen a sismos volcánicos es, a todas luces, atrayente.

En un principio el presente trabajo pretendió extender, para el caso de una geometría cilíndrica, los estudios de Julian (1994) para explicar un cierto tipo de señales sísmico-volcánicas. Esto se convirtió en una tarea ardua e interesante que se convirtió, de raíz, en un problema individual con importantes y profundas discrepancias respecto del elaborado por Julian.

Las diferencias entre el trabajo realizado por Julian y el presentado aquí son profundas. Por principio, mientras Julian trabaja en una geometría rectangular, el modelo expuesto en este trabajo posee una geometría cilíndrica. También ocurre que en esta tesis el sistema es finito y tridimensional, lo que hace al problema más cercano a la realidad física; no así el de Julian, que es bidimensional para el medio elástico y unidimensional para el fluido. La dinámica del medio elástico (roca) es trabajada utilizando la mecánica de medios elásticos deformables mientras que Julian supone a la roca como un simple resorte. Finalmente, para obtener la perturbación en el medio elástico (señal sísmica) en este trabajo se encuentra el comportamiento de un medio elástico dada una perturbación; mientras que Julian omite esto y supone que la señal sísmica es equivalente a la deformación de su cavidad, lo cual podría no ser cierto, pues el

campo de deformaciones (sismo) no necesariamente ha de ser igual a la deformación de la fuente.

Este trabajo de tesis inicia exponiendo, en el Capítulo I, las herramientas de Física necesarias, además de ser obtenidos dos importantes resultados: El primero consiste en la relación de cómo cambia el valor promedio de una variable cuando su dominio es no constante. La cual tiene origen en una extrapolación de ideas propias de la Mecánica Cuántica. Este resultado da pauta para construir un método que permite el trabajo de ecuaciones diferenciales utilizando los valores promedio con una mínima pérdida de información. Tal método, por supuesto, será utilizado para el desarrollo del presente trabajo. La segunda aportación del Capítulo I demuestra que la ecuación diferencial de continuidad para geometrías finitas que varían en el tiempo no puede ser: “la diferencia entre la divergencia de la densidad del momentum lineal y la derivada parcial temporal de la densidad es idénticamente cero”. Además de deducirse la forma adecuada de la ecuación diferencial de continuidad para el caso particular de una geometría cilíndrica que varíe en el tiempo.

En los Capítulos II y III se construye y analiza el modelo físico que describe la interacción de un fluido newtoniano contenido en un canal cilíndrico localizado en un medio elástico. He de mencionar que para las ecuaciones dinámicas del fluido no se tuvieron que omitir términos¹, lo cual resulta importante pues el contenido de información física es máximo.

Finalmente en el Capítulo IV, después de haber dotado al lector del vocabulario básico de la sismología volcánica, se aplica el modelo físico a condiciones volcánicas. Para probar que dicho proceso puede originar algunas señales sintéticas² similares a las asociadas al volcanismo activo. Y, que además, tales señales son generadas por las variaciones de la geometría del recipiente.

En resumen, el presente trabajo ofrece desarrollos puramente teóricos así como sus aplicaciones a circunstancias naturales de gran importancia. Espero que le sea ameno y enriquecedor.

Pedro Corona R.

¹ Muchos autores desprecian los términos convectivos además de suponer al esfuerzo viscoso proporcional a la velocidad promedio, que en un caso general no es correcto.

² En el vocabulario del sismólogo un “sintético” o “señal sintética” es un sismo generado por medio del cómputo.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y ELEMENTOS FÍSICO-MATEMÁTICOS

INTRODUCCIÓN

La mayoría de los objetos que rodean al humano se describen suficientemente bien por medio de la mecánica de medios deformables, la cual incluye la Mecánica de Medios Elásticos y Fluidos. Sin embargo la complejidad matemática propia de estas dos áreas hace difícil encontrar resultados válidos para casos generales y al mismo tiempo con aplicación práctica. Ahora, si se toman en cuenta procesos combinados de estas dos ramas de la Física, la dificultad crece aún más.

En éste primer capítulo se presentará un caso de este tipo de problemas, también se expondrán las herramientas para su análisis y solución. Se expondrán las leyes básicas que gobiernen el comportamiento físico de un fluido newtoniano y de un medio elástico. Se continuará construyendo modelos extremadamente simples a los que se tiene que reducir el sistema en el límite.

Se describirá un procedimiento de manejo de variaciones de valores promedio de variables continuas; el cual está inspirado en el tratamiento que en la Mecánica Cuántica se les da a las variaciones del valor esperado en el tiempo de algún operador. Cabe mencionar que este procedimiento es inédito, cuando menos, en las referencias citadas y, además, matemáticamente correcto.

I.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Muchos procesos naturales y no naturales caen en el rubro de interacción entre medios elásticos y fluidos. Ejemplos de esto son: el fluir de la sangre por las venas y arterias, el tránsito del agua por los conductos de alguna presa, sistemas de bombeo de agua potable o de drenaje, la extracción de petróleo del subsuelo o los procesos volcánicos e hidrotermales.

Por la amplia gama de aparición en procesos naturales y artificiales se estudiará la interacción entre un medio elástico y un fluido debida a procesos de flujo o de perturbaciones en la presión (Figura 1.1).

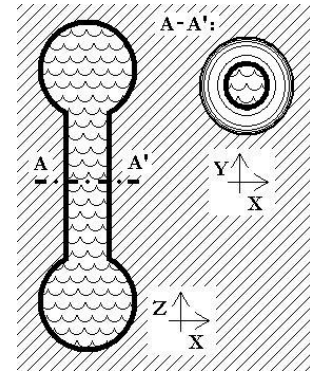


Figura 1.1 Cortes vertical y horizontal del sistema.

I.1.i El Sistema Físico

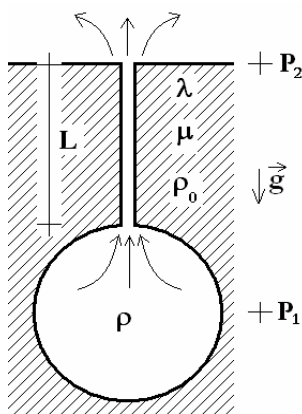


Figura 1.2. Posible forma del sistema.

El sistema que será analizado consistirá en un canal cilíndrico que se encuentra en un material elástico homogéneo e isótropo lleno de un fluido newtoniano incompresible. Las fuentes-sumideros de fluido estarán localizadas en los extremos del canal o cavidad cilíndrica. Estas fuentes-sumideros son ideales en el sentido de que de ellas sale o entra cualquier cantidad de fluido sin restricción.

El objetivo de todo este trabajo es estudiar la interacción que se da entre ambos medios. La Figura 1.2 muestra una posible forma del sistema a estudiar: el fluido, de densidad ρ y viscosidad η , inmerso en un canal cilíndrico, de longitud L y radio R , que se encuentra en un medio elástico (con constantes de Lamé μ y λ) cuya densidad es ρ_0 . Sobre el sistema actuará un campo gravitatorio \mathbf{g} constante y homogéneo y los extremos de la cavidad estarán sometidos a un gradiente de presión conocido P_1 y P_2 .

I.1.ii Proceso de Solución

El procedimiento que se seguirá para la solución del problema es el siguiente: Primero se expondrán las herramientas indispensables de la mecánica de los medios deformables. Por medio de estas se analizarán casos sencillos a los que se debe de reducir el problema propuesto cuando las variaciones o perturbaciones sean despreciables. En particular se resolverán el campo de velocidad vertical para un flujo viscoso en un canal cilíndrico rígido y el esfuerzo de restitución de un canal cilíndrico en un medio elástico dada una deformación radial. Para que a partir de estos desarrollos se construyan posteriormente las ecuaciones que modelen al sistema físico planteado.

Por la complejidad de las matemáticas relacionadas se trabajará con los valores promedio de las velocidades. Pero no se perderá información física pues, en el Capítulo II, se construirá un método para recobrar la información perdida al colapsar la función velocidad a su valor promedio radial. Pero para ello se necesitarán los desarrollos de este capítulo referentes a la velocidad de un fluido en un canal cilíndrico.

I.2 MEDIOS DEFORMABLES

En esta parte se presentan las leyes básicas de la mecánica de los medios deformables (sólidos elásticos y fluidos newtonianos) bajo la acción de esfuerzos y fuerzas de cuerpo. El caso particular de sólidos elásticos, isotrópicos y homogéneos así como los fluidos newtonianos incompresibles serán especialmente estudiados, pues el trabajo posterior se basará en el comportamiento de estos sistemas físicos.

I.2.i Momentum Lineal en un Medio Deformable

La variación en el tiempo de la densidad de momentum lineal para los medios deformables (Landau, 1969; Heinbockel) es:

$$\frac{d}{dt}(\rho \dot{u}^i) = \nabla_k \tau^{ik} + f^i \quad (2.1)$$

con u^i el desplazamiento, ρ la densidad del medio, τ^{ik} el tensor de esfuerzos y f^i las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen.

Para el caso de un fluido, la velocidad de la deformación se reduce a la velocidad instantánea $\dot{u}^i = v^i$ y el operador diferencial de derivación total respecto del tiempo es $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \nabla_i$ (Landau, 1987; Basar, 2000; Heinbockel)¹.

Aplicando lo anterior en (2.1) se obtiene la ecuación para un fluido:

$$\dot{\rho} v^i + \rho \dot{v}^i + v^i v^j \rho_{,j} + \rho v^j v^i_{,j} + \rho v^j \Gamma_{nj}^i v^n = \tau^{ij}_{,j} + \Gamma_{nj}^i \tau^{nj} + \Gamma_{nj}^j \tau^{in} + f^i \quad (2.2)$$

Dado que el sistema a estudiar tendrá una geometría cilíndrica con simetría radial resulta de central importancia el desarrollo bajo tales características geométricas. Se considerará a la densidad constante. Por ello y con base en (A.5), relacionado con los símbolos Christoffel, se tendrá que la ecuación (2.2) se reduce a:

$$\rho \dot{v}^i + \rho (v^z v^i_{,z} + v^r v^i_{,r}) = \tau^{ir}_{,r} + \tau^{iz}_{,z} + \frac{\tau^{ir}}{r} + f^i \quad (2.3)$$

Pensando que el sistema se encuentra en un estado de equilibrio térmico, el tensor de esfuerzos de un fluido newtoniano (Landau, 1987) se expresa como:

$$\tau^{ij} = - \left(P + \left(\frac{2}{3} \eta - \xi \right) \nabla_k v^k \right) g^{ij} + \eta (\nabla^j v^i + \nabla^i v^j) \quad (2.4)$$

donde P es la presión, η la primera viscosidad dinámica y ξ la segunda viscosidad.

Para el caso de un medio elástico, homogéneo e isótropo el tensor de esfuerzos adquiere la siguiente forma (Landau, 1969; Basar, 2000; Heinbockel):

¹ Para un fluido, el tensor $\eta (\nabla^k v^i + \nabla^i v^k)$ se le conoce como σ^{ik} .

$$\tau^{ij} = \lambda e_m^m g^{ij} + 2\mu e^{ij} \quad (2.5)$$

siendo λ y μ las constantes de Lamé y e^{ij} el tensor de deformaciones cuya forma es:

$$e^{ij} = \frac{1}{2} (\nabla^j u^i + \nabla^i u^j) \quad (2.6)$$

I.2.ii Flujo Newtoniano a través de un Canal Cilíndrico

a) Esfuerzos en el Fluido

La fuerza de viscosidad se define como (Joos, 1958):

$$\mathbf{F}_V = \eta S \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{v} \quad (2.7)$$

Con η el coeficiente de viscosidad, S la superficie de contacto paralela a la velocidad y x una dirección ortogonal a la superficie S .

Asumiendo un flujo a estudiar es laminar y por medio de la definición de fuerza de viscosidad, ecuación (2.7), se expresan las diferenciales de las fuerzas de viscosidad interna y externa sobre cada lámina del fluido como:

$$\begin{aligned} dF_i^z &= -2\pi\eta\Delta\ell r v^z{}_{,r} \\ dF_e^z &= 2\pi\eta\Delta\ell(r+dr)(v^z{}_{,r} + v^z{}_{,r}{}_{,r} dr) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sabiendo que la diferencial de volumen es:

$$dV = 2\pi r \Delta\ell dr \quad (2.9)$$

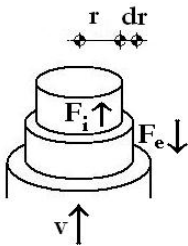


Figura 1.3.
Flujo laminar.

De todo lo anterior se sigue que la diferencial total de la fuerza por unidad de volumen total es la suma de las fuerzas interna y externa, ecuaciones (2.8), dividida por la diferencial de volumen, ecuación (2.9):

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2\pi r \Delta\ell} \frac{dF_V^z}{dr} &= \frac{2\pi\eta\Delta\ell}{2\pi r \Delta\ell dr} (v^z{}_{,r} + r v^z{}_{,r}{}_{,r} + v^z{}_{,r} dr) dr \\ &= \frac{\eta}{r} ((r v^z{}_{,r})_{,r} + v^z{}_{,r} dr) \end{aligned}$$

Dado que ocurre $v_r dr \xrightarrow{dr \rightarrow 0} 0$, se tendrá que la fuerza de viscosidad por unidad de volumen, equivalente a la derivada respecto de la coordenada radial del tensor de esfuerzos cortantes, es:

$$\nabla_r \tau^{rz} = \frac{\eta}{r} (rv_{,r})_{,r} \quad (2.10)$$

b) Velocidad del Fluido

Al tratarse de un fluido laminar en una geometría cilíndrica, existe simetría radial, por lo cual no hay dependencia de ninguna de las funciones a la variable angular. Por ser un estado estacionario e incompresible ocurrirá que $\partial_t (\rho v^i) = 0$. Como la geometría del sistema es constante y completamente determinada por el radio R del cilindro se tendrá que, necesariamente, la componente radial de la velocidad será nula, por esto $v^r \equiv 0$. Finalmente, dado que el sistema no depende de la altura del cilindro, la velocidad no podrá depender directamente de dicha variable así que $\nabla_z v^z = 0$. Con todo lo anterior y por medio de la ecuación (2.10), se tiene que:

$$\nabla_r \tau^{rz} + \nabla_\theta \tau^{z\theta} = -\tau^{zz}_{,z} - \rho g^i \Leftrightarrow (rv_{,r})_{,r} = -\frac{(P_{,z} + \rho g)}{\eta} r$$

Que al integrar dos veces respecto a la variable radial se llega a:

$$v^z = v_0^z - \frac{\Delta P + \rho g \Delta \ell}{4\eta \Delta \ell} r^2 + C \ln(r) + C^* \quad (2.11)$$

Con C y C^* constantes de integración. Siendo las condiciones a la frontera:

$$v^z(R) = 0 \quad \wedge \quad |v^z(0)| < \infty \quad (2.12)$$

Aplicando las condiciones (2.12) a la ecuación (2.11) se obtiene²:

$$v^z = \frac{\Delta P + \rho g \Delta \ell}{4\eta \Delta \ell} (R^2 - r^2) \quad (2.13)$$

En lo sucesivo se trabajará con los valores promedios de las variables; esto para disminuir la complejidad de las ecuaciones a resolver. Así se tendrá que el valor promedio de la velocidad vertical dada por la ecuación (2.13) es:

² El campo de velocidades, en un caso estrictamente real, no es de esta forma. Existe una zona en la que se comporta como la ecuación obtenida y otra zona en la que no. Esto dependerá de la velocidad del fluido y la longitud de la trayectoria dentro del canal cilíndrico. El lector puede corroborar esto en (FOX, 2002).

$$\begin{aligned}\langle v^z \rangle_r &= \frac{(\Delta P - \rho g \Delta \ell)}{4\eta \Delta \ell} (\mathbf{R}^2 - \langle r^2 \rangle_r) = \left(\frac{2}{3}\right) \frac{(\Delta P - \rho g \Delta \ell)}{4\eta \Delta \ell} \mathbf{R}^2 \\ \therefore \langle v^z \rangle_r &= \frac{2}{3} v^z(0)\end{aligned}\quad (2.14)$$

Por otra parte, se puede realizar lo inverso y conocer por medio del valor promedio de la velocidad, la velocidad misma. Lo anterior se llevará a cabo por medio del teorema de Taylor (Spivak, 1999) realizando la serie del mismo nombre de la ecuación (2.13) con origen en $r = 0$:

$$\begin{aligned}v^z_{,r} &= -2 \frac{(\Delta P + \rho g \Delta \ell)}{4\eta \Delta \ell} r \quad \wedge \quad v^z_{,rr} = -\frac{3}{\mathbf{R}^2} \langle v^z \rangle_r \\ \Rightarrow v^z(r) &= v^z(0) - \frac{1}{2} \frac{3r^2}{\mathbf{R}^2} \langle v^z \rangle_r + E(r^3)\end{aligned}$$

con $E(r^3)$ el error de orden 3. Como se trata de un polinomio de orden dos, la serie de Taylor a segundo orden será exacta. Así que por medio de la ecuación (2.14) se llega finalmente a que:

$$v^z(r) = \frac{3}{2\mathbf{R}^2} (\mathbf{R}^2 - r^2) \langle v^z \rangle_r \quad (2.15)$$

También es de interés conocer la relación que existe entre el valor promedio del cuadrado de la velocidad respecto del valor esperado de la velocidad. Lo anterior proviene de la importancia que adquieren los términos cuadráticos de la velocidad para la energía cinética. Tomando a

$K = \frac{(\Delta P - \rho g \Delta \ell)}{2\eta \Delta \ell}$ y de la ecuación (2.13) se tiene:

$$\begin{aligned}(v^z)^2 &= K^2 (\mathbf{R}^2 - r^2)^2 = K^2 (\mathbf{R}^4 - 2r^2 \mathbf{R}^2 + r^4) \\ \Rightarrow \langle (v^z)^2 \rangle_r &= K^2 (\mathbf{R}^4 - 2 \langle r^2 \rangle_r \mathbf{R}^2 + \langle r^4 \rangle_r) \\ \Rightarrow \langle (v^z)^2 \rangle_r &= K^2 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) \mathbf{R}^4 = \frac{8}{15} K^2 \mathbf{R}^4 = \frac{8}{15} \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{3} K \mathbf{R}^2\right)^2 \\ \therefore \langle (v^z)^2 \rangle_r &= \frac{6}{5} \langle v^z \rangle_r^2\end{aligned}\quad (2.16)$$

I.2.iii Deformación de una Cavity Cilíndrica

Se supondrá que el medio elástico es homogéneo e isótropo, que las tensiones principales que actúan sobre la superficie de la cavidad son radiales y que los desplazamientos angulares, así como los verticales y los cambios producidos sobre la densidad del medio son despreciables. Se tendrá entonces que $u^r \neq 0$ y para otro caso $u^i = 0$. Por las propiedades del material las ecuaciones dinámicas estarán dadas por las ecuaciones (2.5) y (2.6):

$$\tau^{ij} = 2\mu e^{ij} + \lambda e_k^k g^{ij} \quad (2.17)$$

El sistema (2.17), son seis ecuaciones lineales (puesto que $\tau^{ij} = \tau^{ji}$). Por las características del problema a estudiar, el desarrollo se concentrará en el esfuerzo radial que, debido a las condiciones mencionadas en el párrafo anterior, adquiere la siguiente forma:

$$\tau^{rr} = (2\mu + \lambda)e^{rr} + \lambda(e_\theta^\theta + e_z^z)g^{rr} \quad (2.18)$$

Si R_0 es el radio inicial de la cavidad y R es un pequeño desplazamiento radial, por definición la deformación radial es:

$$e^{rr} = \frac{\Delta R}{R_0} = \frac{R - R_0}{R_0}$$

y de la ecuación (2.6) se tiene que:

$$e_\theta^\theta = \nabla_\theta u^\theta = u^\theta_{,\theta} + \Gamma_{\theta r}^\theta u^r = \frac{u_r}{r} = \frac{r_1 - r_0}{r_0} \quad \text{y} \quad e_z^z = \nabla_z u^z = 0$$

al evaluar e_θ^θ en la frontera de la cavidad ($r = R$), resultan equivalentes e^{rr} y e_θ^θ . Que al ser sustituidos en la relación (2.18) se llega a que el esfuerzo de restitución de la cavidad tiene la forma:

$$\tau^{rr} = -2(\mu + \lambda) \left(\frac{R - R_0}{R_0} \right) \quad (2.19)$$

Se debe recordar que el esfuerzo total es la suma de los esfuerzos:

$$\tau_{ij}^T = \sum \tau^{ij} \quad (2.20)$$

Si la cavidad está sometida solamente a un esfuerzo radial τ^{rr} , por medio de las ecuaciones (2.20) y (2.19) el esfuerzo total sobre la cavidad es:

$$\tau_{ij}^T = \tau^{rr} - 2(\mu + \lambda) \left(\frac{R - R_0}{R_0} \right) \wedge \tau_{ij}^T = 0, \quad i \neq r \neq j \quad (2.21)$$

Dado que la densidad del medio es constante, la ecuación (2.1) se reduce a:

$$\rho_0 \dot{u}^i = \nabla_k \tau^{ik} + f^i \quad (2.22)$$

que al desarrollarse para la dirección radial asume la siguiente forma:

$$\rho_0 \ddot{u}^r = \frac{1}{r} \tau^{rr} + \tau^{rr}_{,r} \quad (2.23)$$

Los procesos elásticos, por lo general, no son cuasi-estáticos ni adiabáticos, por ello disiparán energía (Callen, 1985). Bajo esta óptica, se busca introducir tal disipación causada por las deformaciones. En general este fenómeno suele ser proporcional a la rapidez de la deformación. Por ello, a la ecuación anterior se le añadirá un término disipativo de la forma: $\rho_0 A \dot{u}^i$. Con A constante de disipación. En la práctica el coeficiente A es función de la rapidez del desplazamiento \dot{u} , pero por simplicidad se tomará constante.

Uno de los objetivos es encontrar el comportamiento de la cavidad. Para ello, lo importante es conocer la variación del radio R de la cavidad en el tiempo. Al evaluar la ecuación (2.21) en $r = R$ y ser utilizada en la relación (2.23) se tiene finalmente:

$$\ddot{R} = \frac{\tau^{rr}}{\rho_0 R} - 2(\mu + \lambda) \left(\frac{R - R_0}{\rho_0 R R_0} \right) + \frac{1}{\rho_0} \tau^{rr}_{,r} - A \dot{R} \quad (2.24)$$

1.2.iv Ecuación Diferencial de Continuidad para una Geometría Cilíndrica que varía en el tiempo.

Muchas ramas de la física tienen como herramienta una ecuación de continuidad. Dicha ecuación hace patente la relación que existe entre los flujos de momentum lineal o algún otro invariante a través del espacio y del tiempo (Shutz, 1998).

Para fundamentar la necesidad de una extensión de la ecuación diferencial de continuidad se hará un experimento pensado. Para iniciarlo recuérdese la ecuación de continuidad en su forma diferencial es:

$$\nabla \circ (\rho \mathbf{v}) = -\dot{\rho} \quad (2.25)$$

Ahora supóngase un fluido incompresible dentro de un cilindro circular finito de radio R sin tapas. Dado que el fluido es incompresible, se esperaría que el flujo fuera nulo ($\nabla \circ \mathbf{v} = 0$), pero si el radio fuese función del tiempo, esto no

sería cierto. Pues al disminuir el radio, esto forzaría al fluido a salir eyectado por los extremos del cilindro originando un flujo efectivo ($\nabla \circ \mathbf{v} \neq 0$).

Se podría pensar que hay alguna trampa en el anterior ejercicio mental, pues la validez de la ecuación (2.25) ha sido sustentada por décadas de uso experimental y teórico. Pero donde radica el problema es en la deducción de la ecuación de continuidad, pues supone una geometría constante respecto al tiempo.

La ecuación (2.25) se deduce del caso particular dónde el volumen (forma y magnitud) del fluido no varía en el tiempo. Si el volumen fuese función del tiempo, la ecuación de continuidad (2.25) que resulta familiar sería errónea. A continuación se probará tal afirmación y se encontrará la forma adecuada para el caso de una geometría cilíndrica.

La ecuación de continuidad o de conservación de masa en su forma integral (Landau, 1987) es:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho dV = - \iint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \circ d\mathbf{a} \quad (2.26)$$

Con ρ la densidad, \mathbf{v} la velocidad, $d\mathbf{a}$ el vector diferencial de área, dV la diferencial de volumen, Ω el volumen a integrar y $\partial\Omega$ la frontera (superficie) del volumen a integrar.

Del lado derecho de la ecuación (2.26) resulta claro que si Ω es función del tiempo, el operador de derivada temporal no podrá conmutar por el operador de integral triple lo cual invalida el proceso de obtención de la ecuación habitual de continuidad. Esto es la base y necesidad para una forma distinta de tal ecuación.

La siguiente proposición mostrará la forma conveniente de la ecuación diferencial de continuidad para el caso particular de una geometría cilíndrica que varían en el tiempo.

PROPOSICIÓN I.1: *Ecuación de Continuidad para una Geometría Cilíndrica.*

Sea ρ la densidad, \mathbf{v} la velocidad. Si se tiene un volumen cilíndrico cuyo radio es función del tiempo y de la posición vertical $R = R(t, z)$ cuya altura es L , tal que $\rho, \mathbf{v}, R \in C^1$. La ecuación de continuidad válida resulta ser:

$$\nabla \circ (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial_t (\rho R)}{R} \quad (2.27)$$

Demostración:

La ecuación (2.26) por el teorema de la divergencia (Spivak 1987) se transforma en:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho dV = - \iiint_{\Omega} \nabla \circ (\rho \mathbf{v}) dV \quad (2.28)$$

Dado que se trata con una geometría cilíndrica la diferencial de volumen resulta ser:

$$dV = dz \circ da = r d\theta dr dz \quad (2.29)$$

Siendo los límites de integración: $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}$ y $0 \leq r \leq R$.

Se supondrá una total simetría respecto de la dirección radial, por lo que $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, r, z)$, $R = R(t, z)$, $\rho = \rho(t, z)$ y, además, que la velocidad en la dirección θ es nula, i.e., $v^\theta \equiv 0$. Así se tiene que:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho r d\theta dr dz = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^R \int_0^{2\pi} \nabla \circ (\rho \mathbf{v}) r d\theta dr dz \quad (2.30)$$

Sea $k \in (0, 1]$, con esto $0 < kR \leq R$. Utilizando esto en la ecuación (2.30) se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{kR} \int_0^{2\pi} \rho r d\theta dr dz = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{kR} \int_0^{2\pi} \nabla \circ (\rho \mathbf{v}) r d\theta dr dz \quad (2.31)$$

Por lo cual, el lado izquierdo de la ecuación anterior, tomando en cuenta que $k \neq 0$, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{kR} \int_0^{2\pi} \rho r d\theta dr dz &= 2\pi \frac{d}{dt} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{kR} \rho r dr dz = 2\pi \frac{d}{dt} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \rho \frac{(kR)^2}{2} dz \\ &= \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho k^2 R^2) dz \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{kR} \int_0^{2\pi} \rho r d\theta dr dz &= \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\dot{\rho} (kR)^2 + 2\rho k^2 R \dot{R}) dz \end{aligned} \quad (2.32)$$

De igual forma, manipulando el lado derecho de (2.30):

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{kR} \int_0^{2\pi} \nabla \circ (\rho \mathbf{v}) r d\theta dr dz = 2\pi \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{kR} \nabla \circ (\rho \mathbf{v}) r dr dz \quad (2.33)$$

Por medio de (2.32) y (2.33), la relación (2.28) asume la forma:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\dot{\rho}(kR)^2 + 2\rho k^2 R \dot{R} \right) dz = -2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{kR} \nabla \circ (\rho \mathbf{v}) r dr dz$$

La ecuación anterior ha de permanecer para cualquier valor de L , por lo cual se debe de cumplir que:

$$\dot{\rho}(kR)^2 + 2\rho(kR)(k\dot{R}) = -2 \int_0^{kR} \nabla \circ (\rho \mathbf{v}) r dr$$

Utilizando el teorema fundamental del Cálculo (Spivak, 1999):

$$\begin{aligned} \partial_{(kR)} \left(\dot{\rho}(kR)^2 + 2\rho(kR)(k\dot{R}) \right) &= -2 \partial_{(kR)} \int_0^{kR} \nabla \circ (\rho \mathbf{v}) r dr \\ \Rightarrow 2k(\dot{\rho}R + \rho\dot{R}) &= 2k\partial_t(\rho R) = -2 \nabla \circ (\rho \mathbf{v}) \Big|_{(z,kR,t)} kR \\ \therefore \frac{\partial_t(\rho R)}{R} &= -\nabla \circ (\rho \mathbf{v}) \Big|_{(z,kR,t)} \end{aligned} \quad (2.34)$$

La ecuación anterior ha de ser válida para todo valor de k . El único valor que se desconoce es en el origen, i.e. $k \rightarrow 0$. Se desea conocer:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \nabla \circ (\rho \mathbf{v}) \Big|_{(z,kR,t)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\partial_t(\rho R)}{R} = \frac{\partial_t(\rho R)}{R}$$

Dado que las funciones trabajadas son de clase C^1 el límite existirá. Y dado que el extremo derecho de la ecuación anterior no es afectado por el límite, se concluye que la ecuación (2.34) se ha de mantener para todo valor de la coordenada radial.

$$\therefore \nabla \circ (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial_t(\rho R)}{R}$$

I.2.v Ondas en un Medio Elástico

En el interior de un medio elástico, homogéneo e isótropo se pueden dar dos diferentes tipos de ondas³: longitudinales y transversales⁴. Esto resulta de combinar las ecuaciones (2.5), (2.6) y (2.22) obteniendo:

$$\rho_0 \ddot{u}^i = \mu \nabla^2 u^i + (\mu + \lambda) \nabla^i \nabla_k u^k$$

Con base e el teorema de Helmholtz (Sommerfeld, 1949) se propone, para la ecuación anterior, una solución de la forma $u^k = \nabla^k \phi + \nabla^2 \psi^k$, $\nabla_k \psi^k \equiv 0$, que al ser sustituida se sigue que:

$$\begin{aligned} \rho_0 (\nabla^i \ddot{\phi} + \nabla^2 \ddot{\psi}^i) &= \mu \nabla^2 (\nabla^i \phi + \nabla^2 \psi^i) + (\mu + \lambda) \nabla^i \nabla_k (\nabla^k \phi + \nabla^2 \psi^k) \\ \Rightarrow \rho_0 (\nabla^i \ddot{\phi} + \nabla^2 \ddot{\psi}^i) &= \mu \nabla^i \nabla^2 \phi + \mu \nabla^2 \nabla^2 \psi^i + (\mu + \lambda) \nabla^i \nabla^2 \phi \end{aligned}$$

Así finalmente se llega a que:

$$\nabla_i \left(\ddot{\psi}^i - \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \psi^i \right) = \left(\ddot{\phi} - \frac{2\mu + \lambda}{\rho_0} \nabla^2 \phi \right) = 0 \quad (2.35)$$

Dónde el campo ψ^i son los desplazamientos transversales cuya velocidad en el medio es $\sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$ y el campo $\nabla^i \phi$ es el campo de desplazamientos longitudinales

que tendrá una velocidad de $\sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho_0}}$. Al ser μ y λ estrictamente positivas (Landau, 1969), la velocidad de las ondas longitudinales en un medio elástico será siempre mayor que la de las transversales.

³ Por estar dentro del medio elástico las ondas de superficie (Love y Rayleigh) no se están tomando en cuenta.

⁴ En el vocabulario del sismólogo las ondas longitudinales reciben el nombre de ondas "P" mientras que las transversales son llamadas ondas "S".

I.3 TRATAMIENTO MATEMÁTICO

A continuación se expondrá el método empleado en este trabajo para reducir la complejidad matemática del problema disminuyendo lo posible el error que tal simplificación genere. La técnica utilizada consiste en una extrapolación de ideas empleadas en la Mecánica Cuántica. Específicamente en la forma de la variación total respecto al tiempo de un operador⁵:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle - \frac{i}{\hbar} [\hat{A}, \hat{H}]$$

En esta expresión la variación total temporal del valor esperado de un operador no necesariamente es nula a pesar de que el valor esperado de la variación sí lo sea. En lo anterior resulta fundamental el valor del conmutador entre el Hamiltoniano del sistema cuántico y el operador de la variable física a medir.

Las circunstancias en las que se trabajará, por su complejidad, exigen el uso de valores promedio. Y al igual que en el caso de la Mecánica Cuántica la variación del valor promedio no necesariamente es equivalente al valor promedio de la variación. Lo que significa que en el caso general se tiene:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \langle \cdot \rangle_y \right] \neq 0$$

La Proposición I.2, de esta sección, demuestra la veracidad y forma de la afirmación anterior. Además de ser una adaptación de ideas cuánticas, dicha ecuación resulta indispensable para desarrollar una metodología para resolver ecuaciones diferenciales utilizando valores promedio. Además de que tal relación se empleará en el Capítulo II para la solución del problema físico propuesto con anterioridad.

El método para el tratamiento de ecuaciones diferenciales se basa en la regla de conmutación que se encontrará por medio de la Proposición 1. Recuérdese que una de las herramientas más utilizadas para la simplificación de las ecuaciones físicas es el trabajar con los valores promedio de las incógnitas. Lo cual, en muchos casos, no necesariamente resulta correcto, pues al hacer esto se puede extinguir información física de las ecuaciones del sistema alejando todavía más al modelo teórico de la realidad física.

⁵ de la PEÑA, Luis. *Introducción a la mecánica cuántica*. Edit. FCE. Segunda edición, México, 1991. pp. 830.

Para ilustrar lo anterior se tomará la ecuación dinámica más sencilla:

$$\mathbf{F} = m \frac{d}{dt} \mathbf{v}$$

ahora obténgase el promedio de la ecuación anterior respecto de alguna variable. Así se tendrá que:

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \left\langle m \frac{d}{dt} \mathbf{v} \right\rangle$$

Supóngase que la masa m es constante y por ello sale del valor promedio, no así el operador diferencial del tiempo:

$$\langle \mathbf{F} \rangle = m \left\langle \frac{d}{dt} \mathbf{v} \right\rangle$$

Debe de resultar claro, recordando la relación cuántica de la variación en el tiempo de un operador, que no necesariamente se cumplirá que:

$$\left\langle \frac{d}{dt} \mathbf{v} \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{v} \rangle \quad (3.1)$$

A pesar de esto, la mayoría de los textos y artículos revisados emplean la relación como válida.

La ecuación (3.1) da origen al desarrollo de esta sección, iniciando con la definición de valor promedio.

Definición: Sea $f : \mathbb{R}^{n-1} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable y $[a, b] \in \mathbb{R}$. El Valor Promedio de f respecto de la variable x^j en $[a, b]$ es una función $\langle f \rangle_j : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$\langle f \rangle_j = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x^1, \dots, x^j, \dots, x^n) dx^j \quad (3.2)$$

I.3.i Proposiciones Matemáticas

PROPOSICIÓN I.2: Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables y $[0, \gamma] \subset \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^p} \langle f(\dots, x^j, \dots, x^p, \dots) \rangle_j &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x^p} f(\dots, x^j, \dots, x^p, \dots) \right\rangle_j + \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x^p} \left(\langle f(\dots, x^j, \dots, x^p, \dots) \rangle_j - f(\dots, \gamma, \dots, x^p, \dots) \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Demostración:

Se llamará a $x^j = y$ y a $x^p = x$. Por definición se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle f(x, y) \rangle_y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle f(x+h, y) \rangle_y - \langle f(x, y) \rangle_y}{h}$$

Dado que f y γ son diferenciables y h es pequeño ocurre que $f(x+h) = f + hf_{,x}$ y $\gamma(x+h) = \gamma + h\gamma_{,x}$. Sustituyendo esto en la definición:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle f(x+h, y) \rangle_y &= \frac{1}{\gamma + h\gamma_{,x}} \int_0^{\gamma + h\gamma_{,x}} (f + hf_{,x}) dy \\ \Leftrightarrow \langle f(x+h, y) \rangle_y &= \frac{1}{\gamma + h\gamma_{,x}} \left(\int_0^{\gamma} (f + hf_{,x}) dy + \int_{\gamma}^{\gamma + h\gamma_{,x}} (f + hf_{,x}) dy \right) \end{aligned}$$

Dado que $\Delta \langle f \rangle_y = \langle f(x+h, y) \rangle_y - \langle f(x) \rangle_y$, entonces:

$$\begin{aligned} \Delta \langle f \rangle_y &= \frac{1}{\gamma + h\gamma_{,x}} \left(\int_0^{\gamma} (f + hf_{,x}) dy + \int_{\gamma}^{\gamma + h\gamma_{,x}} (f + hf_{,x}) dy \right) - \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma} f dy \\ \Rightarrow \Delta \langle f \rangle_y &= \frac{\gamma}{\gamma(\gamma + h\gamma_{,x})} \left(\int_0^{\gamma} (f + hf_{,x}) dy + \int_{\gamma}^{\gamma + h\gamma_{,x}} (f + hf_{,x}) dy \right) - \frac{\gamma + h\gamma_{,x}}{\gamma(\gamma + h\gamma_{,x})} \int_0^{\gamma} f dy \\ \Rightarrow \Delta \langle f \rangle_y &= \frac{\gamma}{\gamma(\gamma + h\gamma_{,x})} \left(\int_0^{\gamma} hf_{,x} dy + \int_{\gamma}^{\gamma + h\gamma_{,x}} (f + hf_{,x}) dy \right) - \frac{h\gamma_{,x}}{(\gamma + h\gamma_{,x})} \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma} f dy \\ \Rightarrow \Delta \langle f \rangle_y &= \frac{\gamma}{\gamma(\gamma + h\gamma_{,x})} \left(\int_0^{\gamma} hf_{,x} dy + \int_{\gamma}^{\gamma + h\gamma_{,x}} (f + hf_{,x}) dy \right) - \frac{h\gamma_{,x}}{\gamma + h\gamma_{,x}} \langle f \rangle_y \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del valor medio para la integral (Rudin, 1953):

$$\exists y^* \in [\gamma, \gamma + h\gamma_{,x}] \rightarrow \int_{\gamma}^{\gamma + h\gamma_{,x}} (f + hf_{,x}) dy = h\gamma_{,x} (f^* + hf^*_{,x}); \quad f^* = f(x, y^*). \quad \text{Se}$$

debe de observar que $\lim_{h \rightarrow 0} f^* = \lim_{h \rightarrow 0} f(x, y^*) = f(x, y)$. Al sustituir y dividir entre h se llega a:

$$\Rightarrow \frac{\Delta \langle f \rangle_y}{h} = \frac{1}{\gamma + h\gamma_{,x}} \left(\int_0^\gamma f_{,x} dy + \gamma_{,x} (f^* + hf_{,x}^*) \right) - \frac{\gamma_{,x}}{\gamma + h\gamma_{,x}} \langle f \rangle_y$$

Aplicando el límite:

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta \langle f \rangle_y}{h} = \frac{1}{\gamma} \left(\int_0^\gamma f_{,x} dy + \gamma_{,x} f \right) - \frac{\gamma_{,x}}{\gamma} \langle f \rangle_y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \langle f \rangle_y}{\partial x} = \frac{1}{\gamma} \int_0^\gamma f_{,x} dy - \frac{\gamma_{,x}}{\gamma} (\langle f \rangle_y - f)$$

$$\therefore \frac{\partial \langle f(x, y) \rangle_y}{\partial x} = \langle f_{,x}(x, y) \rangle_y - \frac{\gamma(x)_{,x}}{\gamma(x)} (\langle f(x, y) \rangle_y - f(x, \gamma))$$

PROPOSICIÓN I.3: Sean $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ derivables y $\gamma: [b, a] \rightarrow \mathbb{R}$ el dominio para el valor esperado. Se tiene que:

$$\langle gf_{,y} \rangle_y = \frac{(gf)|_\gamma}{|\gamma|} - \langle fg_{,y} \rangle_y \quad (3.4)$$

Demostración:

$$\langle gf_{,y} \rangle_y = \frac{1}{|\gamma|} \int_\gamma gf_{,y} dy = \frac{1}{|\gamma|} \left((gf)|_\gamma - \int_\gamma fg_{,y} dy \right) = \frac{(gf)|_\gamma}{|\gamma|} - \langle fg_{,y} \rangle_y$$

$$\therefore \langle gf_{,y} \rangle_y = \frac{(gf)|_\gamma}{|\gamma|} - \langle fg_{,y} \rangle_y$$

I.3.ii Método Matemático

La relación (3.3) da la pauta para resolver ecuaciones diferenciales utilizando los valores promedio de las incógnitas. Además de ser matemáticamente cierta, la ecuación citada conserva información física que de otra manera se perdería irremediablemente.

Los pasos a seguir para trabajar matemáticamente las ecuaciones físicas con los valores promedios son:

1. Plantear la ecuación a trabajar con valores promedio.
2. Aplicar el operador de valor promedio a toda la ecuación.
3. Utilizar la ecuación (3.3) para encontrar las relaciones adecuadas entre los operadores diferenciales y los valores promedios.

Para ejemplificar lo anterior se retomará lo visto en la introducción de la sección. Obtenido el valor promedio respecto de la variable y , en el dominio $Y(t)$. Se debe de recordar que:

$$1.- \quad \mathbf{F} = m \frac{d}{dt} \mathbf{v}$$

$$2.- \quad \langle \mathbf{F} \rangle_y = \left\langle m \frac{d}{dt} \mathbf{v} \right\rangle_y = m \left\langle \frac{d}{dt} \mathbf{v} \right\rangle_y$$

$$3.- \quad \langle \mathbf{F} \rangle_y = m \partial_t \langle \mathbf{v} \rangle_y + m \frac{\dot{Y}}{Y} \left(\langle \mathbf{v} \rangle_y - \mathbf{v}(Y) \right)$$

En el inciso anterior (3) se puede resolver la ecuación en términos de los valores promedio de las incógnitas siendo matemáticamente correcta y sin “perder tanta” información física.

CAPÍTULO II

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este capítulo es la construcción de un modelo teórico que describa el comportamiento en el tiempo de las variables físicas que caracterizan el sistema cavidad-fluido descrito en el Capítulo I y que se representa gráficamente en la Figura 2.1.

El Modelo

El sistema que se estudiará (Figura 2.1) se trata de un medio elástico, homogéneo, isótropo e infinito. En algún lugar del medio se encuentra una cavidad cilíndrica circular recta¹, de radio R y de altura L , que comunica dos reservorios sometidos a las presiones P_1 y P_2 . A través de la cavidad se desplaza un fluido que responde al gradiente de presiones existente entre los reservorios.

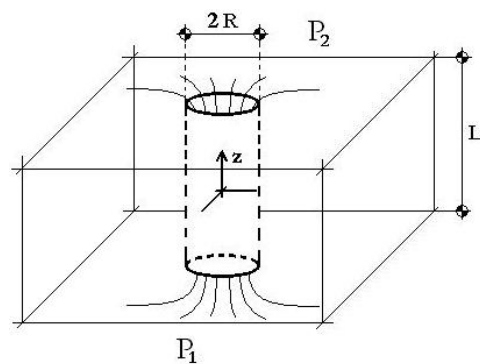


Figura 2.1 Esquema del sistema a estudiar

Dado que el medio es elástico, las deformaciones de la cavidad son provocadas por las tensiones que se dan en ella; ya sea por el gradiente de presión existente o por los esfuerzos que genera el fluido. Como respuesta a estos esfuerzos, el medio perturbará el estado del fluido inmerso en la cavidad, generándose el proceso que es el objeto de estudio de este capítulo.

¹ Quizás el lector pueda pensar que resulta redundante la descripción de la cavidad, pero es adecuada. Los cilindros no necesariamente son circulares y mucho menos su dirección de altura es perpendicular a la base (Preston 1971).

Caracterización del Modelo

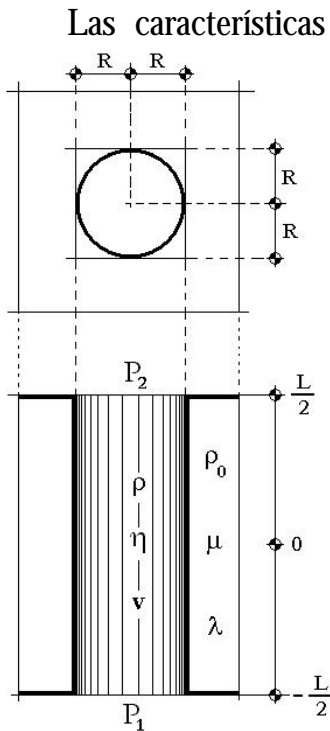


Figura 2.2 Cortes horizontal y vertical del sistema

Las características esenciales del sistema físico son: las densidades del medio elástico y del fluido, la viscosidad del fluido, las constantes de Lamé en el caso del medio elástico, la velocidad del fluido, la geometría de la cavidad, la presión dentro de ella y las condiciones en la frontera del sistema.

Si se conocen en todo momento y lugar las propiedades físicas descritas anteriormente, el campo de esfuerzos, de desplazamientos, los flujos y demás variables físicas quedarán determinadas. Lo cual lleva a una caracterización física completa del sistema.

En la Figura 2.2 se muestran las características físicas mencionadas anteriormente. A partir de este punto en adelante a la densidad y viscosidad del fluido se les nombrará ρ y η respectivamente, la densidad del medio será ρ_0 , los índices de Lamé serán λ y μ , la velocidad del flujo será \mathbf{v} , para la presión dentro de la cavidad se utilizará P , el radio de la cavidad se denotará R y la longitud L .

Suposiciones

Dado que el interés se centra en conocer el desarrollo del sistema en el tiempo, se necesita saber qué permanece constante en él. Por ello se supondrá que las densidades, la viscosidad y las propiedades elásticas del medio, i.e. los índices de Lamé, son constantes al igual que la longitud de la cavidad.

La velocidad del fluido dentro de la cavidad se conformará de tres componentes: $\mathbf{v} = v^r \hat{e}_r + v^\theta \hat{e}_\theta + v^z \hat{e}_z$, con \hat{e}_r , \hat{e}_θ y \hat{e}_z los vectores ortogonales que generan a \mathbb{R}^3 en coordenadas cilíndricas. Se supondrá simetría angular, lo

que significa que nuestras ecuaciones serán independientes de la variable angular: θ . En particular se tendrá que la velocidad angular $v^\theta \equiv 0$.

Se asumirá que el medio dónde se encuentra la cavidad es elástico, lo que significa que bajo la influencia de esfuerzos sufre deformaciones que son linealmente proporcionales a las tensiones ejercidas. En otras palabras, el radio de la cavidad será función del tiempo pero se supondrá que no de la posición vertical. También se espera que, cuando las deformaciones radiales se anulen, la ecuación de la velocidad vertical se reduzca a la Ecuación I (2.13), el caso del flujo estacionario a través de un cilindro rígido:

$$v^z = \frac{\Delta P + \rho g \Delta \ell}{4\eta \Delta \ell} (R^2 - r^2)$$

Ecuación I (2.13). Velocidad vertical de fluido estacionario.

El marco referencial será colocado en el centro de la cavidad, en la Figura 2.1 y la Figura 2.2 se ilustra esto. Habrá tres variables esenciales e independientes entre sí: r que es la distancia del centro del origen sobre el plano $z = \text{cte.}$, z que es la distancia (altura) respecto del eje vertical y t la variable temporal. Por lo anterior las funciones buscadas han de depender de (t, r, z) .

A lo largo este capítulo se construirán las soluciones de las siguientes incógnitas: $\mathbf{v} = v^r(t, r, z)\hat{e}_r + v^z(t, r, z)\hat{e}_z$, $P = P(t, r, z)$ y $R = R(t)$. Para tener caracterizado al sistema físico en todo tiempo y todo lugar.

II.1 CAMPO DE VELOCIDADES DEL FLUIDO

El campo de velocidades del fluido en la cavidad es una de las incógnitas esenciales que se requiere resolver para caracterizar al sistema. Por ello, una de las primeras tareas que se desarrollan en este capítulo es encontrar las formas para las velocidades radial y vertical.

El proceso iniciará con la ecuación de continuidad y de ella se obtendrá la velocidad radial. Conocida la velocidad radial y en conjunto con la ecuación de continuidad se construirá parcialmente la velocidad vertical, la cual quedará completamente resuelta en la Sección 2 de este capítulo.

La ecuación de continuidad para una geometría cilíndrica que varía con el tiempo, de acuerdo con la **Proposición I.1**, está dada por la Ecuación I (2.27).

$$\nabla \circ (\rho \mathbf{v}) = - \left(\dot{\rho} + \frac{\dot{R}}{R} \rho \right)$$

Ecuación I (2.27). Ecuación diferencial de continuidad para una geometría cilíndrica.

Finalmente, al considerar la densidad del medio fluido constante, se tiene que la ecuación de continuidad adecuada resulta ser:

$$v^z{}_{,z} + v^r{}_{,r} + \frac{v^r}{r} = - \frac{\dot{R}}{R} \tag{1.1}$$

II.1.i Ecuación de la Velocidad Radial

Para encontrar la función $v^r(t, r, z)$, primero se buscarán las condiciones a la frontera que ha de cumplir. En el centro de la cavidad, puesto que no hay fuentes ni sumideros, la velocidad radial del flujo será nula. Por otra parte, en el límite de la cavidad, si la frontera se mueve con una velocidad \dot{R} y dado que el fluido es incompresible, el fluido en contacto con la cavidad poseerá la misma velocidad que la cavidad. Lo anterior fija dos condiciones de frontera que la velocidad radial del fluido debe de cumplir:

$$v^r(t, 0, z) = 0 \tag{1.2}$$

$$v^r(t, R, z) = \dot{R} \tag{1.3}$$

Por tratarse de un medio continuo, el campo de velocidades será analítico (Landau, 1987). Por ello, al emplear el teorema de Taylor (Spivak, 1999), se tendrá que la expansión de v^r sobre r es:

$$v^r(t, r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_r^{(n)} v^r(t, 0, z)}{n!} r^n \tag{1.4}$$

El término $\frac{\partial_r^{(n)} v^r(t, 0, z)}{n!}$ es una función decreciente respecto de n , debido a la convergencia de la serie (Spivak, 1999). Al emplear la relación (1.2) en la ecuación anterior se tendrá:

. 1]

Campo de Velocidades

$$v^r(t, 0, z) = v^r(t, 0, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial_r^{(n)} v^r(t, 0, z)}{n!} (0)^n = 0 \Rightarrow n \geq 1$$

$$\therefore v^r(t, r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial_r^{(n)} v^r(t, 0, z)}{n!} r^n$$

al utilizar la condición de frontera (1.3) en lo anterior se tiene:

$$v^r(t, R, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial_r^{(n)} v^r(t, 0, z)}{n!} R^n = \dot{R}$$

Sea ζ_n una serie definida como:

$$\zeta_n(t, z) = \frac{\partial_r^{(n)} v^r(t, 0, z) R^n}{n! \dot{R}}$$

Que al ser sustituida en la forma de la ecuación de la velocidad radial se llega a:

$$v^r(t, R, z) = \dot{R} \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(t, z) = \dot{R} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n = 1$$

Dado que el radio de la cavidad no depende de la posición vertical, la velocidad radial no variará en toda la longitud del canal. Por ello se tendrá que $v^r = v^r(t, r)$, lo que se traduce a que $\zeta_n = \zeta_n(t)$. De lo anterior se sigue que la forma de la velocidad radial v^r resulta ser:

$$v^r(t, r) = \dot{R} \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(t) \left(\frac{r}{R} \right)^n \quad (1.5)$$

Se justificará, ahora, que $v^r \propto r^3$; pero antes se examinará la forma de la velocidad vertical. Para ello, se supondrá que el término más pequeño de la expansión (1.5) es m por lo que se escribirá, por el momento,

$v^r(t, r) = \dot{R} \zeta_m(t) \left(\frac{r}{R} \right)^m$. Al sustituir esto en la ecuación de continuidad (1.1), se tendrá:

$$v^z, z = -\frac{\dot{R}}{R} - m \frac{\dot{R}}{R} \left(\frac{r}{R} \right)^{m-1} \zeta_m(t) - \dot{R} \zeta_m(t) \frac{r^{m-1}}{R^m}$$

Al integrar la ecuación anterior, tomando a $w^z(t, r)$ como la constante de integración, se tiene que la forma más general, a primer orden, de la velocidad vertical es:

$$v^z = w^z(t, r) - \frac{\dot{R}}{R} z - (m-1) \frac{\dot{R}}{R} \left(\frac{r}{R} \right)^{m-1} \zeta_m(t) z \quad (1.6)$$

Por medio de las ecuaciones Ecuación I (2.4) y (1.6) se sigue que el tensor de esfuerzos cortantes para el fluido tiene la forma:

$$\begin{aligned}\tau^{rz} &= \eta(\nabla^r v^z + \nabla^z v^r) \\ &= \eta\left(w^z{}_{,r}(t,r) - (m-1)^2 \frac{\dot{R}}{R^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{m-2} \zeta_m(t)z\right)\end{aligned}$$

La divergencia del tensor de esfuerzos cortantes $\nabla_i \tau^{zi}, i \neq z$, al utilizarse en la ecuación anterior, está dada por:

$$\begin{aligned}\nabla_r \tau^{rz} &= \eta\left(w^z{}_{,rr}(t,r) - (m-1)^2(m-2) \frac{\dot{R}}{R^3} \left(\frac{r}{R}\right)^{m-3} \zeta_m(t)z\right) + \\ &+ \frac{w^z{}_{,r}(t,r)}{r} - (m-1)^2 \frac{\dot{R}}{R^3} \left(\frac{r}{R}\right)^{m-3} \zeta_m(t)z\end{aligned}$$

De la ecuación anterior aparecen dos términos $\left(\frac{r}{R}\right)^{m-3}$. Los esfuerzos tienen que estar físicamente bien definidos en todo el dominio del sistema, en particular en $r=0$. Por esto se debe de tener, necesariamente, que $m \geq 3$ o lo que es equivalente $n < 3 \Rightarrow \zeta_n(t) = 0$. Por ello se tiene que la ecuación (1.5) se reduce a:

$$v^r(t,r) = \dot{R} \sum_{n=3}^{\infty} \zeta_n(t) \left(\frac{r}{R}\right)^n \quad (1.7)$$

Se debe de examinar un poco más la forma de la ecuación (1.7). Por medio de la técnica de análisis dimensional (Menzel, 1947) se concluye que el contenido físico de la ecuación está en el término \dot{R} , pues los términos restantes son adimensionales. Esto significa que los términos de la serie son sólo factores de escala. De esto se tienen dos casos, el primero es que el factor ζ_n sólo será una constante que multiplica a toda la función. Esto no puede ser posible pues si $\zeta_n(t) = \text{cte} \neq 0$ se tendría que:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \zeta_n(t) \rightarrow \infty$$

lo que es una contradicción pues ζ_n convergía.

El segundo caso es que la función ζ_n será una serie finita de ceros y unos normalizados alternados. Por simplicidad, se realizará una primera aproximación

pensando que $\zeta_3 = 1$ y $\zeta_m = 0, m \neq 3$, pues en general los primeros términos en una expansión son los más significativos. Por lo tanto se tendrá que la velocidad radial finalmente asume la siguiente forma:

$$v^r(t,r) = \dot{R} \left(\frac{r}{R} \right)^3 \quad (1.8)$$

II.1.ii Ecuación de la Velocidad Vertical

Al sustituir la ecuación (1.8) en (1.1) e integrando respecto a z se sigue:

$$v^z(t,r,z) = w^z(t,r) - \left(1 + 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{\dot{R}}{R} z \quad (1.9)$$

con $w^z(t,r)$ la constante de integración.

Si de alguna manera se conoce $\langle w^z(t) \rangle_r$ se podría aproximar el valor de (1.9); pues cuando la variación radial se anule, por hipótesis, el sistema ha de reducirse al ejemplo resuelto en la sección I.2.ii. Con base en esto, se propondrá que $w^z(r,t)$ se debe de reducir a la Ecuación I (2.13) del caso estacionario.

$$v^z = \frac{\Delta P + \rho g \Delta \ell}{4\eta \Delta \ell} (R^2 - r^2)$$

De acuerdo con esto y usando la relación I.2.14 se debe de tener que $\langle w^z(t,r) \rangle_r = \frac{2}{3} w^z(t,0)$ y que $w(t,R) \equiv 0$. Empleando la ecuación I.2.15, se puede aproximar w^z por medio $\langle w^z \rangle_r$ de la siguiente manera:

$$w^z(r,t) = \frac{3}{2R^2} (R^2 - r^2) \langle w^z(t) \rangle_r \quad (1.10)$$

Finalmente sustituyendo (1.10) en la ecuación (1.9) se llega a que:

$$v^z(r,z,t) = \frac{3}{2R^2} (R^2 - r^2) \langle w^z(t) \rangle_r - \left(1 + 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{\dot{R}}{R} z \quad (1.11)$$

Las ecuaciones (1.11) y (1.8) definen el campo de velocidades en todo punto de la cavidad. Quedando sólo como incógnitas \dot{R} y $\langle w^z(t) \rangle_r$; que en secciones posteriores se encontrarán las ecuaciones que las resuelvan.

II.2 CAMPO DE ESFUERZOS DEL FLUIDO

A continuación se construirá la función presión $P(t,r,z)$ del fluido dentro de la cavidad. Es importante señalar que en esta sección también se encontrará la ecuación diferencial que ha de resolver la velocidad vertical $\langle w^z(t) \rangle_r$.

La variación temporal de la densidad de momentum lineal en un medio continuo, tomando en cuenta una geometría cilíndrica con independencia a la variable angular, está dada por la ecuación 1.2.3, que al serle aplicadas las condiciones de densidad constante y de estar bajo un campo gravitatorio constante y homogéneo se llega a que:

$$\rho(\dot{v}^i + v^r v^i{}_{,r} + v^z v^i{}_{,z}) = \tau^{ir}{}_{,r} + \tau^{iz}{}_{,z} + \frac{\tau^{ir}}{r} + \rho g^i \quad (2.1)$$

II.2.i Ecuación de Esfuerzos Verticales

Al derivar parcialmente respecto del tiempo la velocidad vertical, ecuación (1.9), se obtiene:

$$\dot{v}^z = \dot{w}^z + \left(\left(12 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - 4 \frac{\ddot{R}}{R} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{\ddot{R}}{R} \right) z \quad (2.2)$$

Al llevar la ecuación (2.1) a la dirección z , sustituyendo en ella las ecuaciones (1.8), (1.9) y (2.2) y después de reordenar los términos se llega a

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau^{zz}{}_{,z} = & \rho \left(\dot{w}^z + \dot{R} \left(\frac{r}{R} \right)^3 w^z{}_{,r} - \frac{\dot{R}}{R} w^z - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \frac{\dot{R}}{R} w^z \right) + \\ & + \rho \left(\left(20 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 2 + 8 \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{\ddot{R}}{R} \left(4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 1 \right) \right) z + \\ & - \tau^{zr}{}_{,r} - \frac{\tau^{zr}}{r} - \rho g^z \end{aligned}$$

Que al integrar respecto de z se obtiene:

$$\begin{aligned} \tau^{zz} = & \rho \left(w^z + \dot{R} \left(\frac{r}{R} \right)^3 w^z,_{,r} - \frac{\dot{R}}{R} w^z - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \frac{\dot{R}}{R} w^z \right) z + \\ & + \rho \left(\left(20 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 2 + 8 \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{\ddot{R}}{R} \left(4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 1 \right) \right) \frac{z^2}{2} + \quad (2.3) \\ & - \int \tau^{zr},_{,r} dz - \int \frac{\tau^{zr}}{r} dz - \rho g^z z + P(t, r) \end{aligned}$$

dónde $P(t, r)$ es la constante de integración que es la parte de la presión independiente de la altura.

La forma del tensor de esfuerzos para un fluido newtoniano viene dada por la Ecuación I (2.4). Por lo anterior y por medio de las ecuaciones (1.1) y (1.9) se llega a que:

$$\tau^{ij} = - \left(P + \left(\frac{2}{3} \eta - \xi \right) \nabla_k v^k \right) \delta^{ij} + \eta (\nabla^j v^i + \nabla^i v^j)$$

Ecuación I (2.4). Tensor de esfuerzos de un fluido newtoniano.

$$\tau^{zz} = -P - 4\eta \left(\frac{1}{3} + 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{\dot{R}}{R} + \xi \frac{\dot{R}}{R}$$

se despreciará el valor de la segunda viscosidad ξ pues el fluido incompresible (Landau, 1987). Con ello el tensor de esfuerzos verticales será:

$$\tau^{zz} = -P - 4\eta \left(\frac{1}{3} + 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{\dot{R}}{R}$$

Al sustituir el resultado anterior en la ecuación (2.3) se obtiene:

$$\begin{aligned} P(t, r, z) = & -\rho \left(w^z + \dot{R} \left(\frac{r}{R} \right)^3 w^z,_{,r} - \frac{\dot{R}}{R} w^z - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \frac{\dot{R}}{R} w^z \right) z + \\ & - \rho \left(\left(20 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 2 + 8 \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{\ddot{R}}{R} \left(4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 1 \right) \right) \frac{z^2}{2} + \quad (2.4) \\ & + \int \tau^{zr},_{,r} dz + \int \frac{\tau^{zr}}{r} dz + \rho g^z z - 4\eta \left(\frac{1}{3} + 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{\dot{R}}{R} + P(t, r) \end{aligned}$$

II.2.ii Ecuación de Esfuerzos Radiales

Al derivar la velocidad radial, ecuación (1.8), respecto del tiempo se obtiene:

$$\dot{v}^r(t,r) = \left(\frac{\ddot{R}}{R} - 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \right) \left(\frac{r}{R} \right)^2 r \quad (2.5)$$

Como ocurrió anteriormente, el tensor de esfuerzos cortantes para un fluido newtoniano está dado por la Ecuación I (2.4) y de ella se sigue que:

$$\tau^{rz} = \eta \nabla^r \left(1 + 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{\dot{R}}{R} z = 8\eta \frac{\dot{R}r}{R^3} z$$

Al ser llevada la ecuación (2.1) a la dirección radial y sustituir en ella la ecuación anterior y las ecuaciones (1.8) y (2.5) se obtiene:

$$r\tau^{r,r} = \rho \left(\frac{r^4}{R^3} \ddot{R} - 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \frac{r^4}{R^2} - 8 \frac{\eta}{\rho} \frac{\dot{R}}{R^3} r^2 + 3\dot{R}^2 \left(\frac{r}{R} \right)^6 \right) - \tau^{rr}$$

Al integrar respecto a r la expresión anterior y reordenar términos resulta:

$$\tau^{rr} = \rho \left(\frac{r^5}{5R^3} \ddot{R} - 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \frac{r^4}{5R^2} - \frac{8\eta}{3\rho} \frac{\dot{R}}{R^3} r^2 + \frac{3}{7} \dot{R}^2 \left(\frac{r}{R} \right)^6 \right) \quad (2.6)$$

De nuevo, con base en la Ecuación I (2.4), el tensor de esfuerzos en la dirección radial, al despreciar la segunda viscosidad, es:

$$\tau^{rr} = -P + \frac{\eta}{3} \left(18 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 2 \right) \frac{\dot{R}}{R} \quad (2.7)$$

Por medio de las ecuaciones (2.6) y (2.7) se llega a que:

$$P(t,r) = \rho \left(\frac{26\eta}{3\rho} \frac{\dot{R}}{R^3} r^2 + 3 \frac{\dot{R}^2}{5R^4} r^4 - \frac{\ddot{R}}{5R^3} r^4 - \frac{3}{7} \frac{\dot{R}^2}{R^6} r^6 + 2 \frac{\eta}{3\rho} \frac{\dot{R}}{R} \right) \quad (2.8)$$

II.2.iii Ecuación Diferencial de la Velocidad Vertical

Al sumar las ecuaciones (2.4) y (2.8) y reagrupando términos se obtiene:

$$\begin{aligned}
P(t,r,z) = & -\rho \left(\dot{w}^z + \dot{R} \left(\frac{r}{R} \right)^3 w^z_{,r} - \frac{\dot{R}}{R} w^z - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \frac{\dot{R}}{R} w^z \right) z + \\
& -\rho \left(\left(20 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 2 + 8 \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{\ddot{R}}{R} \left(4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 1 \right) \right) \frac{z^2}{2} + \\
& -\rho \left(-\frac{26\eta}{3\rho} \frac{\dot{R}}{R^3} r^2 - 3 \frac{\dot{R}^2}{5R^4} r^4 + \frac{\ddot{R}}{5R^3} r^4 + \frac{3\dot{R}^2}{7R^6} r^6 - \left(\frac{2}{3} + 8 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{\eta}{\rho} \frac{\dot{R}}{R} \right) + \\
& + \int \tau^{zr}_{,r} dz + \int \frac{\tau^{zr}}{r} dz + \rho g^z z + P(t)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Al obtener el valor promedio respecto de r de (2.9) se sigue:

$$\begin{aligned}
\langle P(t,z) \rangle_r = & -\rho \left(\langle \dot{w}^z \rangle_r + \frac{\dot{R}}{R^3} \langle r^3 w^z_{,r} \rangle_r - \frac{\dot{R}}{R} \langle w^z \rangle_r - 4 \frac{\dot{R}}{R^3} \langle r^2 w^z \rangle_r \right) z + \\
& -\rho \left(\left(\frac{20}{R^2} \langle r^2 \rangle_r + 2 + \frac{8}{R^4} \langle r^4 \rangle_r \right) \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{\ddot{R}}{R} \left(\frac{4}{R^2} \langle r^2 \rangle_r + 1 \right) \right) \frac{z^2}{2} + \\
& -\rho \left(-\frac{26\eta}{3\rho} \frac{\dot{R}}{R^3} \langle r^2 \rangle_r - 3 \frac{\dot{R}^2}{5R^4} \langle r^4 \rangle_r + \frac{\ddot{R}}{5R^3} \langle r^4 \rangle_r \right) + \\
& -\rho \left(\frac{3\dot{R}^2}{7R^6} \langle r^6 \rangle_r - \left(\frac{2}{3} + \left(\frac{8}{R^2} \right) \langle r^2 \rangle_r \right) \frac{\eta}{\rho} \frac{\dot{R}}{R} \right) + \\
& + \left\langle \int \tau^{zr}_{,r} dz \right\rangle_r + \left\langle \int \frac{\tau^{zr}}{r} dz \right\rangle_r + \rho g^z z + P(t)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

El cambio del valor promedio respecto de alguna variable está descrito **por la Proposición I.2** por medio de la Ecuación I (3.3), que para este caso sería:

$$\frac{\partial \langle f(t,r,z) \rangle_r}{\partial t} = \langle f_{,t}(t,r,z) \rangle_r - \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \left(\langle f(t,r,z) \rangle_r - f(t,R,z) \right)$$

Ecuación I (3.3). Variación del valor promedio respecto de un parámetro independiente(t).

Al aplicar lo anterior a $w^z(t,r)$ y a la variable temporal, teniendo en cuenta que $w^z(R,t) = 0$, se concluye que:

$$\langle w^z \rangle_r = \partial_t \langle w^z \rangle_r + \frac{\dot{R}}{R} \langle w^z \rangle_r \quad (2.11)$$

Será utilizada la Ecuación I (3.4) para tratar los términos de la forma $\langle r^n w^z \rangle_r$. Que al ser aplicada al caso específico de r^n adquiere la siguiente forma:

$$\langle r^n w^z \rangle_r = \frac{1}{R} (r^n w^z) \Big|_0^R - n \langle r^{n-1} w^z \rangle_r = -n \langle r^{n-1} w^z \rangle_r \quad \text{Ecuación I (3.4)}$$

que para r^3 es:

$$\langle r^3 w^z \rangle_r = -3 \langle r^2 w^z \rangle_r \quad (2.12)$$

Por medio de la ecuación (1.10), se tenderá que:

$$\begin{aligned} \langle r^2 w^z \rangle_r &= \frac{3}{2R^2} (R^2 \langle r^2 \rangle_r - \langle r^4 \rangle_r) \langle w^z(t) \rangle_r = \frac{3R^4}{2R^2} \left(\frac{5}{15} - \frac{3}{15} \right) \langle w^z(t) \rangle_r \\ &\Rightarrow \langle r^2 w^z \rangle_r = \frac{R^2}{5} \langle w^z(t) \rangle_r \end{aligned} \quad (2.13)$$

que al ser sustituido en la ecuación (2.12) se obtiene que:

$$\langle r^3 w^z \rangle_r = -\frac{3}{5} R^2 \langle w^z(t) \rangle_r \quad (2.14)$$

Para conocer el valor de $\langle r^n \rangle_r$ sólo es necesario escribir la definición de valor promedio:

$$\begin{aligned} \langle r^n \rangle_r &= \frac{1}{R} \int_0^R r^n dr = \frac{r^{n+1} \Big|_0^R}{(n+1)R} = \frac{R^{n+1}}{(n+1)R} = \frac{R^n}{(n+1)} \\ \therefore \langle r^n \rangle_r &= \frac{R^n}{(n+1)} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Para tener en términos conocidos la ecuación de la presión (ecuación (2.10)) sólo resta saber la forma de:

$$\left\langle \int \tau^{zr} \right\rangle_r \text{ y } \left\langle \int \frac{\tau^{zr}}{r} dz \right\rangle_r.$$

Para el primer caso se tendrá que:

$$\tau^{zr},_r = \eta v^{z},_{,r} = -\frac{\eta}{R^2} \left(3 \langle w^z(t) \rangle_r + 8 \frac{\dot{R}}{R} z \right)$$

con $T^z_1(t,r)$ una constante de integración.

$$\therefore \left\langle \int \tau^{zr},_r dz \right\rangle_r = -\frac{\eta}{R^2} \left(3 \langle w^z(t) \rangle_r z + 8 \frac{\dot{R}}{R} z^2 \right) + \langle T^z_1(t) \rangle_r \quad (2.16)$$

La situación del otro término del tensor de esfuerzos cortantes es similar:

$$\frac{\tau^{zr}}{r} = \frac{\eta}{r} v^{z},_{,r} = -\eta \left(\frac{3}{R^2} \langle w^z(t) \rangle_r + 8 \frac{\dot{R}}{R^3} z \right)$$

siendo $T^z_2(t,r)$ una constante de integración.

$$\therefore \left\langle \int \frac{\tau^{zr}}{r} dz \right\rangle_r = -\frac{\eta}{R^2} \left(3 \langle w^z(t) \rangle_r z + 8 \frac{\dot{R}}{R} z^2 \right) + \langle T^z_2(t) \rangle_r \quad (2.17)$$

Al utilizar las ecuaciones (2.11), (2.13), (2.14), (2.15), (2.16) y (2.17) haciendo las adecuadas sustituciones sobre la relación (2.10) y después de realizar las operaciones algebraicas y aritméticas necesarias se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle P(t,z) \rangle_r = & -\rho \left(\partial_t \langle w^z \rangle_r + \left(\frac{6\eta}{\rho R^2} - \frac{8}{5} \frac{\dot{R}}{R} \right) \langle w^z(t) \rangle_r - g^z \right) z + \\ & -\rho \left(\frac{154}{15} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{7}{3} \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{16\eta}{\rho R^2} \frac{\dot{R}}{R} \right) \frac{z^2}{2} + \\ & -\rho \left(\frac{\ddot{R}R}{25} - \frac{56\eta}{9\rho} \frac{\dot{R}}{R} - \frac{222}{1225} \dot{R}^2 \right) + \\ & + \langle T^z_1(t) \rangle_r + \langle T^z_2(t) \rangle_r + P(t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Se hará uso del principio de conservación de densidad de energía (Landau, 1987), (Callen, 1985) para fijar las condiciones de frontera.

$$\frac{\rho}{2} v^2(t,r,z) + P(t,r,z) = \text{cte.}$$

Serán despreciados los términos de viscosidad ya que se supone que el fluido no se encuentra en contacto con los extremos de la cavidad.

En la parte inferior del sistema, el fluido se encuentra sometido a una presión propia de la posición P_1 (tomando en cuenta en ella el peso gravitatorio)

y junto con la velocidad en ese punto, se tiene la primer condición de frontera (2.19) y al otro extremo de la cavidad el potencial gravitatorio se anula y restan sólo el término de la presión P_2 y de la velocidad para la segunda condición de frontera (2.20):

$$\langle P(-\frac{L}{2}, t) \rangle_r = P_1 - \frac{\rho}{2} \langle v^z(-\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r - \frac{\rho}{2} \langle v^r(-\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r \quad (2.19)$$

$$\langle P(\frac{L}{2}, t) \rangle_r = P_2 - \frac{\rho}{2} \langle v^z(\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r - \frac{\rho}{2} \langle v^r(\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r \quad (2.20)$$

Al aplicar la condición (2.19) a la ecuación (2.18) se llega a la siguiente solución:

$$\begin{aligned} \langle P(t, z) \rangle_r = & -\rho \left(\partial_t \langle w^z \rangle_r + \left(\frac{6\eta}{\rho R^2} - \frac{8\dot{R}}{5R} \right) \langle w^z(t) \rangle_r - g^z \right) \left(z + \frac{L}{2} \right) + \\ & -\rho \left(\frac{77}{15} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{7\ddot{R}}{6R} + \frac{8\eta}{\rho R^2} \frac{\dot{R}}{R} \right) \left(z^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right) + \\ & + P_1 - \frac{\rho}{2} \langle v^z(-\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r - \frac{\rho}{2} \langle v^r(-\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r \end{aligned} \quad (2.21)$$

Al aplicar la segunda condición de frontera a la ecuación (2.21) se llega a:

$$\begin{aligned} \langle P(t, \frac{L}{2}) \rangle_r = & -\rho \left(\partial_t \langle w^z \rangle_r + \left(\frac{6\eta}{\rho R^2} - \frac{8\dot{R}}{5R} \right) \langle w^z \rangle_r - g^z \right) L + \\ & + P_1 - \frac{\rho}{2} \langle v^z(t, -\frac{L}{2})^2 \rangle_r - \frac{\rho}{2} \langle v^r(t)^2 \rangle_r \\ = & P_2 - \frac{\rho}{2} \langle v^z(t, \frac{L}{2})^2 \rangle_r - \frac{\rho}{2} \langle v^r(t)^2 \rangle_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -L\rho\partial_t \langle w^z \rangle_r - \rho L \left(\frac{6\eta}{\rho R^2} - \frac{8\dot{R}}{5R} \right) \langle w^z \rangle_r + P_1 - P_2 + \rho g^z L \\ & = \frac{\rho}{2} \left(\langle v^z(-\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r + \langle v^r(-\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r - \langle v^z(\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r - \langle v^r(\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

El término $\langle v^z(t, -\frac{L}{2}) \rangle_r - \langle v^z(t, \frac{L}{2}) \rangle_r$ será calculado a continuación:

$$\begin{aligned}\langle v^2(t,z) \rangle_r &= \langle v^z v_z \rangle_r + \langle v^r v_r \rangle_r \\ &= (w^z)^2 - 2 \left(1 + 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{\dot{R}}{R} w^z z + \left(1 + 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)^2 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 z^2 + \dot{R}^2 \left(\frac{r}{R} \right)^6\end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que la diferencia $\langle v^2(t, -L/2) \rangle_r - \langle v^2(t, L/2) \rangle_r$ resulta ser:

$$\begin{aligned}v^2(t, -L/2) - v^2(t, L/2) &= \\ &= L \left(1 + 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{\dot{R}}{R} w^z + L \left(1 + 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{\dot{R}}{R} w^z = 2L \left(w^z + 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 w^z \right) \frac{\dot{R}}{R} \\ \therefore \langle v^2(t, -L/2) \rangle_r - \langle v^2(t, L/2) \rangle_r &= 2L \left(\langle w^z \rangle_r + 4 \frac{\langle r^2 w^z \rangle_r}{R^2} \right) \frac{\dot{R}}{R}\end{aligned}$$

Al aplicar esto en la ecuación (2.22) se obtiene:

$$L\rho\partial_t \langle w^z \rangle_r + \rho L \left(\frac{6\eta}{\rho R^2} - \frac{8}{5} \frac{\dot{R}}{R} \right) \langle w^z \rangle_r = -\rho L \left(\langle w^z \rangle_r + 4 \frac{\langle r^2 w^z \rangle_r}{R^2} \right) \frac{\dot{R}}{R} + P_1 - P_2 + \rho g^z L$$

Empleando el resultado de la relación (2.13) en lo anterior se llega a la primera ecuación diferencial del sistema cavidad-fluido:

$$\partial_t \langle w^z \rangle_r = \frac{P_1 - P_2 + \rho g^z L}{\rho L} - \left(\frac{6\eta}{\rho R^2} + \frac{1}{5} \frac{\dot{R}}{R} \right) \langle w^z \rangle_r \quad (2.23)$$

El lector debe de poner atención a la ecuación (2.23). Pues cuando la variación temporal de la velocidad esperada se anula se reduce a la Ecuación I

(2.13. Para verificar la afirmación se ha de recordar que $\langle w^z(t) \rangle_r = \frac{2}{3} w^z(t, 0)$. Si

$\partial_t \langle w^z \rangle_r = 0$ y $\dot{R} = \ddot{R} = 0$ de la ecuación (2.23) se sigue que:

$$\begin{aligned}\frac{6\eta}{\rho R^2} \langle w^z(t) \rangle_r &= \frac{6\eta}{\rho R^2} \frac{2}{3} w^z(t, 0) = \frac{4\eta}{\rho R^2} w^z(t, 0) = \frac{P_1 - P_2 + \rho L g^z}{\rho L} \\ \Rightarrow w^z(t, 0) &= \frac{P_1 - P_2 + \rho L g^z}{4\eta L} R^2\end{aligned}$$

Que es equivalente a la Ecuación I (2.13). Este hecho da indicio de que el desarrollo va por buen camino.

II.2.iv Ecuación de la Presión

Al sustituir (2.23) en (2.21) resulta:

$$\begin{aligned} \langle P(t,z) \rangle_r = & \rho \left(\frac{9 \dot{R}}{5 R} \langle w^z(t) \rangle_r - \frac{P_1 - P_2}{\rho L} \right) \left(z + \frac{L}{2} \right) + \\ & - \rho \left(\frac{77}{15} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{7 \ddot{R}}{6 R} + \frac{8 \eta \dot{R}}{\rho R^2} \frac{\dot{R}}{R} \right) \left(z^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right) + \\ & + P_1 - \frac{\rho}{2} \langle v^z(-\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r - \frac{\rho}{2} \langle v^r(-\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r \end{aligned} \quad (2.24)$$

Obteniendo el valor promedio respecto de z para (2.24) y reagrupando términos se llega a:

$$\begin{aligned} P(t) = & \rho \left(\frac{9 \dot{R}}{5 R} \langle w^z(t) \rangle_r + \frac{P_1 + P_2}{\rho L} \right) \frac{L}{2} + \frac{\rho}{6} \left(\frac{77}{15} \dot{R}^2 - \frac{7}{6} R \ddot{R} + \frac{8 \eta \dot{R}}{\rho R} \right) \left(\frac{L}{R} \right)^2 + \\ & - \frac{\rho}{2} \left(\langle v^z(-\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r + \langle v^r(-\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Anteriormente se encontró que:

$$v^z v_z + v^r v_r = (w^z)^2 - 2 \left(1 + 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{\dot{R}}{R} w^z z + \left(1 + 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 z^2 + R^2 \left(\frac{r}{R} \right)^6$$

por lo cual se tiene:

$$\begin{aligned} \langle v^z(-\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r + \langle v^r(-\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r = \\ = \langle (w^z)^2 \rangle_r - 2 \left(\langle w^z \rangle_r + 4 \frac{\langle r^2 w^z \rangle_r}{R^2} \right) \frac{\dot{R}}{R} z + \left(1 + 8 \frac{\langle r^2 \rangle_r}{R^2} + 16 \frac{\langle r^4 \rangle_r}{R^4} \right) \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 z^2 + \frac{\dot{R}^2}{R^6} \langle r^6 \rangle_r \end{aligned}$$

que por medio de la **relación I (2.16)**: $\langle (v^z)^2 \rangle_r = \frac{6}{5} \langle v^z \rangle_r^2$, y las ecuaciones (2.13) y

(2.15) se llega al siguiente resultado:

$$\langle v^z(-\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r + \langle v^r(-\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r = \frac{6}{5} \langle w^z \rangle_r^2 + \frac{9}{5} \langle w^z(t) \rangle_r \frac{\dot{R}}{R} L + \left(\frac{103}{60} \left(\frac{L}{R} \right)^2 + \frac{1}{6} \right) \dot{R}^2$$

Al aplicar esto en la ecuación (2.25) y después de reordenar y realizar las operaciones aritméticas adecuadas se obtiene finalmente, la ecuación del valor promedio de la presión dentro de la cavidad:

$$P(t) = -\frac{3}{5}\rho \langle w^z \rangle_r^2 - \frac{\rho}{4} \left(\frac{1}{30} \left(\frac{L}{R} \right)^2 + 1 \right) \dot{R}^2 + \left(\frac{4\eta}{3} \frac{\dot{R}}{R} - \rho \frac{7}{36} R\ddot{R} \right) \left(\frac{L}{R} \right)^2 + \frac{P_1 + P_2}{2} \quad (2.26)$$

Al igual que en el apartado anterior, el lector debe de atender adecuadamente la última ecuación. Pues en ella resulta fácil verificar que si las variaciones radiales se anulan. La ecuación (2.26) toma la forma de la ecuación de conservación de energía para un fluido o también llamada ecuación de Bernoulli (Landau, 1987). Claro que todo se toma en valores promedios:

$$P(t) + \frac{3}{5}\rho \langle w^z \rangle_r^2 = \langle P(t) \rangle_{rz} + \frac{\rho}{2} \frac{6}{5} \langle w^z \rangle_{rz}^2 = \langle P(t) \rangle_{rz} + \frac{\rho}{2} \langle (w^z)^2 \rangle_{rz} = \frac{P_1 + P_2}{2} = \text{cte.}$$

De nuevo esto corrobora la validez del desarrollo hasta ahora realizado.

II.3 ESFUERZOS DE LA CAVIDAD

Hasta este momento se conoce la forma del campo de velocidades del fluido y de la presión dentro de la cavidad; además se sabe cómo varía la velocidad del fluido en el tiempo. Todo lo anterior queda bien definido para un valor particular del radio de la cavidad y su velocidad.

En esta sección, se construirá la ecuación que gobierna la variación del radio de la cavidad en el tiempo.

II.3.i Ecuación Diferencial del Radio de la Cavidad

Es sabido, por lo visto anteriormente, que el esfuerzo radial que actúa sobre la superficie de la cavidad, i.e. la frontera del fluido, está dado por la Ecuación I (2.4) llevada a la dirección radial:

$$\tau^r = -P + \eta \frac{2}{3} \left(9 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 1 \right) \frac{\dot{R}}{R} + \xi \frac{\dot{R}}{R}$$

cuyo valor promedio respecto del radio es:

$$\langle \tau^r \rangle_r = -P + \eta \frac{4 \dot{R}}{3 R} + \xi \frac{\dot{R}}{R}$$

y como se realizó con anterioridad, será despreciada la segunda viscosidad ξ . Por ello se tiene finalmente que la forma del valor promedio del tensor de esfuerzos radiales es:

$$\langle \tau^r \rangle_r = -P + \eta \frac{4 \dot{R}}{3 R} \quad (3.1)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones I (2.24) y (3.1) y partiendo de que R_0 es la apertura radial de equilibrio y ρ_0 la densidad del medio elástico se llega a que la aceleración del radio de la cavidad estará dada por la siguiente ecuación:

$$\rho_0 R \ddot{R} = \left(P - \eta \frac{4 \dot{R}}{3 R} \right) - 2(\mu + \lambda) \left(\frac{R - R_0}{R_0} \right) - \rho_0 R A \dot{R} \quad (3.2)$$

Que después de sustituir la función presión (ecuación (2.26)) y manipular algebraicamente se llega a que la aceleración radial queda definida por:

$$\begin{aligned} \ddot{R} = & -\frac{12}{(36\rho_0 R^2 + 7\rho L^2)} \left(4 \left(1 - \left(\frac{L}{R} \right)^2 \right) \eta + \frac{\rho}{4} \left(\frac{1}{30} \frac{L^2}{R} + R \right) \dot{R} + 3\rho_0 R^2 A \right) \dot{R} + \\ & -\frac{18}{(36\rho_0 R^2 + 7\rho L^2)} \left(\frac{6}{5} \rho \langle w^z \rangle_r^2 - P_1 - P_2 + \frac{4(\mu + \lambda)}{R_0} (R - R_0) \right) R \end{aligned} \quad (3.3)$$

Lo que completa la solución del sistema.

CAPÍTULO III

ANÁLISIS DEL MODELO

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se analizará el sistema de ecuaciones diferenciales obtenido anteriormente que modela el comportamiento del sistema físico cavidad-fluido ilustrado en la Figura 3.1.

La primera parte del análisis consistirá en encontrar los puntos de equilibrio y su clase: inestables o estables. A partir de esto se buscarán las alternativas de comportamiento en cada punto. Se tratará de hacer aproximaciones adecuadas para poder predecir, bajo ciertas condiciones, el posible comportamiento del sistema cavidad-fluido en el tiempo.

El siguiente paso será construir el método para acoplar más de un sistema. Esto para enriquecer su comportamiento físico, además de facilitar su adaptación a los fenómenos y situaciones que se deseen modelar por medio de él.

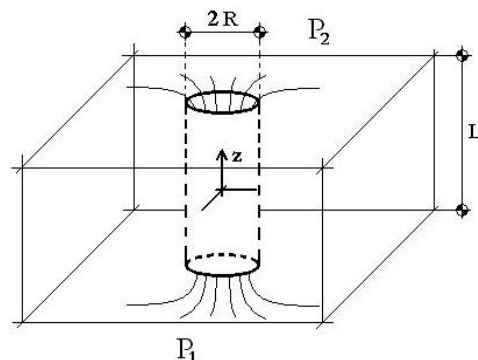


Figura 3.1 Esquema del sistema físico.

Se continuará con la investigación del campo de desplazamientos, velocidades y aceleraciones originados por las deformaciones de la cavidad. Para poder predecir, sabiendo el comportamiento del sistema cavidad-fluido, las perturbaciones que se generan en el medio donde se encuentra la cavidad.

Para finalizar el capítulo se estudiarán las restricciones para la aplicación del sistema para modelar sucesos experimentales y se acotarán los comportamientos del mismo dado un caso particular de la realidad física.

III.1 ANÁLISIS DEL SISTEMA DIFERENCIAL

Esta parte del desarrollo se concentrará en examinar el comportamiento del sistema diferencial cerca de los puntos de equilibrio. Dado que se trata con un sistema altamente no lineal, su análisis resulta mucho más complejo que un caso lineal; pero al mismo tiempo, esto añade gran cantidad de riqueza en los posibles comportamientos de dicho sistema. Se utilizará análisis cualitativo (Braun, 1990; Jordan, 1986) para ecuaciones diferenciales no lineales.

Se iniciará a partir de la Ecuación II (2.23) y la Ecuación II (3.3) que modelan al sistema. Estas forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, acopladas y no lineales:

$$\partial_t \langle w^z \rangle_r = \frac{P_1 - P_2 + \rho g^z L}{\rho L} - \left(\frac{6\eta}{\rho R^2} + \frac{1}{5} \frac{\dot{R}}{R} \right) \langle w^z \rangle_r$$

Ecuación II (2.23). Ecuación diferencial de la velocidad vertical.

$$\begin{aligned} \ddot{R} = & \frac{12}{(36\rho_0 R^2 + 7\rho L^2)} \left(4 \left(1 - \left(\frac{L}{R} \right)^2 \right) \eta + \frac{\rho}{4} \left(\frac{1}{30} \frac{L^2}{R} + R \right) \dot{R} + 3\rho_0 A R^2 \right) \dot{R} + \\ & - \frac{18}{(36\rho_0 R^2 + 7\rho L^2)} \left(\rho \frac{6}{5} \langle w^z \rangle_r^2 - P_1 - P_2 + \frac{4(\mu + \lambda)}{R_0} (R - R_0) \right) R \end{aligned}$$

Ecuación II (3.3). Ecuación diferencial del radio de la cavidad.

Omitiendo el subíndice r del valor promedio y utilizando las siguientes sustituciones: $p = P_1 - P_2 + \rho L g^z$ y $\dot{R} = S$; el sistema se transforma a:

$$\partial_t \langle w^z \rangle = \frac{p}{\rho L} - \left(\frac{6\eta}{\rho R^2} + \frac{1}{5} \frac{S}{R} \right) \langle w^z \rangle \quad (1.1)$$

$$\dot{R} = S \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{S} = & \frac{12}{(36\rho_0 R^2 + 7\rho L^2)} \left(4 \left(1 - \left(\frac{L}{R} \right)^2 \right) \eta + \frac{\rho}{4} \left(\frac{1}{30} \frac{L^2}{R} + R \right) S + 3\rho_0 A R^2 \right) S + \\ & - \frac{18}{(36\rho_0 R^2 + 7\rho L^2)} \left(\rho \frac{6}{5} \langle w^z \rangle^2 - P_1 - P_2 + \frac{4(\mu + \lambda)}{R_0} (R - R_0) \right) R \end{aligned} \quad (1.3)$$

A pesar de que el sistema diferencial ha crecido en número de ecuaciones, el orden disminuyó en uno. Lo anterior permite un análisis cualitativo y numérico más sencillo.

III.1.i Puntos de Equilibrio

Por definición, los puntos de equilibrio del sistema son aquellos para los cuales ocurre que su derivada temporal se anula. Dichos puntos son:

$$\langle w^z \rangle = \frac{pR^2}{6\eta L} \quad (1.4)$$

$$S = 0 \quad (1.5)$$

$$\rho \frac{6}{5} \left(\frac{p}{6\eta L} \right)^2 R^4 + \frac{4(\mu + \lambda)}{R_0} R - (P_1 + P_2 + 4(\mu + \lambda)) = 0 \quad (1.6)$$

Para el caso de que $p = 0$ se tiene que la solución de la ecuación (1.6) resulta trivial:

$$R_E = \left(1 + \frac{P_1 + P_2}{4(\mu + \lambda)} \right) R_0 \quad (1.7)$$

Si $p \neq 0$, la ecuación (1.6) se puede ver, haciendo las siguientes sustituciones $q_0 = \frac{5}{6} \left(\frac{6\eta L}{p} \right)^2 (P_1 + P_2 + 4(\mu + \lambda))$ y $q_1 = \frac{5}{3} 2(\mu + \lambda) \left(\frac{6\eta L}{p} \right)^2$, como:

$$f(R) = R^4 + q_1 R - q_0 \quad (1.8)$$

Por otra parte, al utilizar $f(-R)$, resulta claro que (1.8) se transforma a:

$$f(-R) = R^4 - q_1 R - q_0 = 0 \quad (1.9)$$

De las ecuaciones (1.8), (1.9) y bajo la óptica de la teoría de las ecuaciones (Hall, 1982) por medio del teorema de Descartes (Hall, 1982) se puede concluir que, dado que en las ecuaciones anteriores el cambio de signo es uno para cada una, existirán, a lo más, una raíz positiva y otra negativa. Esto obliga a que las otras dos soluciones sean complejas conjugadas (teorema fundamental del álgebra (Marsden, 1996)).

Lo anterior aunado con el resultado (1.7) prueba que existirá una y sólo una solución, físicamente aceptable ($R > 0$), para punto de equilibrio. Con ello, se ha probado que existe uno y sólo un punto de equilibrio y dicho punto se denotará como¹:

$$\mathbf{x}_E = \begin{pmatrix} w_E \\ R_E \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Dónde $w_E = \frac{\rho R_E^2}{6\eta L}$ y R_E es el resultado de la ecuación (1.7) o bien la raíz positiva de la relación (1.6) dependiendo del caso

III.1.ii Análisis Perturbativo

Es de suma importancia el comportamiento del sistema cerca del punto de equilibrio a través del tiempo, pues la mayoría de las dinámicas de los sistemas físicos parten de dichos puntos. Por ello se escribirá:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \langle w \rangle \\ R \\ S \end{pmatrix}, \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \partial_t \langle w \rangle \\ \dot{R} \\ \dot{S} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \quad (1.11)$$

El vector $\dot{\mathbf{x}}$ asume el papel de las ecuaciones (1.1)-(1.3). Es evidente que el vector $\dot{\mathbf{x}}$ es no lineal. Linealizando se obtiene:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \nabla \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} \quad (1.12)$$

Como el punto de interés es el de equilibrio, se desarrollará a (1.11) desde tal punto; al combinar (1.12) y (1.11) se llega a:

$$\mathbf{x}(t + \Delta t, \mathbf{x}_E + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{x}_E + \Delta t \nabla \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_E) \Delta \mathbf{x} \quad (1.13)$$

Una manera de conocer el desarrollo del sistema en las vecindades de \mathbf{x}_E es sabiendo los valores y vectores propios de la matriz $\nabla \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_E)$ (Braun, 1990). Por definición los valores propios de $\nabla \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_E)$ cumplirán:

$$|\nabla \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_E) - \mathbf{1}\lambda| = 0$$

¹ Se utilizan vectores columna para evitar confusiones con la notación funcional.

Lo anterior se traduce en un polinomio real de tercer grado². Suponiendo que λ_i es el i -ésimo valor propio de $\nabla \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_E)$, el i -ésimo vector propio \mathbf{v}_i cumple:

$$(\nabla \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{1}\lambda_i)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Resulta claro, sin la necesidad de hacerlo, que la complejidad del polinomio para encontrar los valores propios es considerable; por ello sólo se realizará un análisis de las posibilidades que presenta el problema.

Al tratarse de un polinomio cuyos coeficientes se encuentran en los reales, hay dos casos para los valores de sus raíces: todas sus raíces son reales o una raíz es real y las otras dos son complejas conjugadas, esto se sigue del teorema fundamental del álgebra (Marsden, 1996). Se encontrará equilibrio estable cuando todas las raíces reales sean negativas o cuando la parte real de la raíz compleja tenga un valor estrictamente menor a cero. En cualquier otro caso, la solución tendrá un comportamiento inestable (Braun, 1990).

III.1.iii Estabilidad de la Solución

Piénsese que el sistema se encuentra por un momento suficientemente cerca del punto \mathbf{x}_E , de tal manera que el radio pueda escribir como

$R = R_E + \varepsilon \rightarrow \left| \frac{\varepsilon}{R_E} \right| \ll 1$, $|\dot{R}| = |\dot{\varepsilon}| = |S| \ll 1$ y que $\partial_t \langle w^z \rangle_r \approx 0$, que es equivalente

$$a \langle w^z \rangle_E \approx \frac{\rho R_E^2}{6\eta L}.$$

En las ecuaciones del sistema el factor R^2 resulta importante. Así que se calculará a continuación cerca del punto de equilibrio:

$$\Rightarrow \left(\frac{R}{R_E} \right)^2 = 1 + \left(2 + \frac{\varepsilon}{R_E} \right) \frac{\varepsilon}{R_E} \quad \therefore R^2 \approx R_E^2 + 2\varepsilon R_E$$

Aplicando lo anterior al sistema diferencial se tiene que:

$$\partial_t \langle w^z \rangle_r \approx \frac{\rho}{\rho L} - \left(\frac{6\eta}{\rho R_E^2} \right) \langle w^z \rangle_r \Rightarrow \langle w^z(t) \rangle_r \approx \langle w^z \rangle_{r0} e^{-\left(\frac{6\eta}{\rho R_E^2} \right) t} + \frac{\rho R_E^2}{6\eta L}$$

² Es de conocimiento común, en nuestro medio, que existe la fórmula general para resolver cualquier ecuación de tercer grado. Por lo que para todo caso particular, la solución de los valores propios es, siempre, conocida.

por lo cual:

$$\langle w^z(t) \rangle_r \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\rho R_E^2}{6\eta L}$$

Para la ecuación diferencial de la aceleración del radio de la cavidad se realizará lo siguiente: Primero serán eliminados los términos cuadráticos de ε y de $\dot{\varepsilon}$ y bajo la suposición de que $R_E/L \ll 1$ se llega a que:

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon} = & -\frac{12}{(36\rho_0 R_E^2 + 7\rho L^2)} \left(4 \left(1 - \frac{L^2}{R_E^2} \right) \eta + 3\rho_0 R_E^2 A \right) \dot{\varepsilon} + \\ & -\frac{18}{(36\rho_0 R_E^2 + 7\rho L^2)} \left(\frac{6}{5} \rho \langle w^z \rangle_r^2 - P_1 - P_2 + \frac{4(\mu + \lambda)}{R_0} (R_E - R_0) \right) \varepsilon + \\ & -\frac{18}{(36\rho_0 R_E^2 + 7\rho L^2)} \left(\frac{6}{5} \rho \langle w^z \rangle_r^2 - P_1 - P_2 + \frac{4(\mu + \lambda)}{R_0} (R_E - R_0) \right) R_E \end{aligned}$$

Al realizar las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned} b &= \frac{12}{(36\rho_0 R_E^2 + 7\rho L^2)} \left(4 \left(1 - \frac{L^2}{R_E^2} \right) \eta + 3\rho_0 R_E^2 A \right), \\ c &= \frac{18}{(36\rho_0 R_E^2 + 7\rho L^2)} \left(\frac{6}{5} \rho \langle w^z \rangle_r^2 - P_1 - P_2 + \frac{4(\mu + \lambda)}{R_0} (R_E - R_0) \right) y \\ d &= \frac{18}{(36\rho_0 R_E^2 + 7\rho L^2)} \left(\frac{6}{5} \rho \langle w^z \rangle_r^2 - P_1 - P_2 + \frac{4(\mu + \lambda)}{R_0} (R_E - R_0) \right) R_E \end{aligned}$$

y realizando el cambio de variable $\varepsilon = y - \frac{d}{c}$ en la ecuación anterior se llega a:

$$y + by + cy = 0$$

Por lo anterior se tiene que las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3) toman la forma:

$$\langle w^z \rangle_E \approx \frac{\rho R_E^2}{6\eta L} \quad (1.14)$$

$$-1 \ll y \ll 1 \quad (1.15)$$

$$y + by + cy = 0 \quad (1.16)$$

El sistema diferencial se ha convertido en un sistema lineal de una ecuación de segundo orden. Además, las soluciones de la ecuación diferencial (1.16) están dadas por:

$$y = y_0 \left(A e^{\lambda_+ t} + B e^{\lambda_- t} \right) \quad \text{con} \quad \lambda_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad (1.17)$$

con A y B constantes que se ajustan con la segunda condición inicial $\dot{\varepsilon}_0 = \dot{y}_0$.

Dado que $\varepsilon = y - \frac{d}{c}$, se tendrá que $y_0 = \varepsilon_0 + \frac{d}{c}$. Por ello, al sustituir, se llega a:

$$\varepsilon = \left(\varepsilon_0 + \frac{d}{c} \right) \left(e^{\lambda_+ t} + e^{\lambda_- t} \right) - \frac{d}{c} \quad (1.18)$$

En el caso más general $\lambda \in \mathbb{C}$. Por esto y para que la solución sea físicamente aceptable, como ya se mencionó, se necesitará que $\text{Re}(\lambda) < 0$. Existen dos casos a seguir: $c > 0$ y $c < 0$.

Piénsese que $c < 0$, por lo tanto $b^2 - 4c > b^2$ y de esto se sigue que $\sqrt{b^2 - 4c} > \sqrt{b^2}$. Así se tendrá que, al menos, $\lambda_+ > 0$, lo que asegura una solución inestable. Por lo tanto no puede ocurrir que $c < 0$ y se deberá de cumplir que $c \geq 0$, lo que significa que:

$$\mu + \lambda \geq \frac{R_0}{2(R_E - R_0)} \left(\frac{P_1 + P_2}{2} - \frac{3}{5} \rho \langle w^z \rangle_r^2 \right) \quad (1.19)$$

Se sabe que necesariamente $c \geq 0$, ahora para asegurar que ε sea físicamente aceptable, i.e. que no diverja, se debe de cumplir que $b \geq 0$.

$$\therefore A \geq \frac{4}{3R_E^2} \left(\left(\frac{L}{R_E} \right)^2 - 1 \right) \frac{\eta}{\rho_0} \quad (1.20)$$

Las ecuaciones (1.19) y (1.20) dan condiciones esenciales que el sistema físico debe de cubrir para que los puntos de equilibrio sean estables.

Cuando ocurra que $c \geq 0$, existirán dos casos para el valor de λ : $\text{Im}(\lambda) = 0$ y $\text{Im}(\lambda) \neq 0$. En el primer caso se tendrá un decaimiento exponencial. Para el segundo existirán oscilaciones, pues la solución de acuerdo con la ecuación (1.18) será de la forma:

$$\varepsilon(t) = \left(\varepsilon_0 + \frac{d}{c} \right) e^{-\frac{b}{2}t} \left(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \right) - \frac{d}{c}$$

Se puede definir un “tiempo medio de oscilación” ($\bar{\tau}$), similar al concepto de vida media de un material radiactivo de la siguiente manera: $\varepsilon(\bar{\tau}) = \frac{1}{2}\varepsilon(t_0)$.

$$\bar{\tau} = \frac{2}{b} \ln(2) \quad (1.21)$$

De la ecuación anterior define el tiempo en el que la amplitud de una oscilación dada se reducirá a la mitad.

Resulta sencillo saber el valor de la velocidad angular (ω) y de la frecuencia (ν), esta es:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2i} \quad (1.22)$$

La ecuación anterior resalta que la dependencia de la frecuencia propia del sistema a: las magnitudes espaciales, las densidades del medio y del fluido, las propiedades elásticas del medio y la viscosidad del fluido.

III.2 ACOPLAMIENTO DE DOS CAVIDADES

El objetivo de esta sección es acoplar dos sistemas cavidad-fluido. La Figura 3.2 ilustra el sistema que se desea describir. Se utilizarán las ecuaciones II.2.23 y II.3.3 para encontrar la solución del sistema planteado.

La clave se encuentra en salvar adecuadamente las condiciones a la frontera. Para este caso, significa poder ajustar adecuadamente las velocidades y las presiones entre los sistema a acoplar.

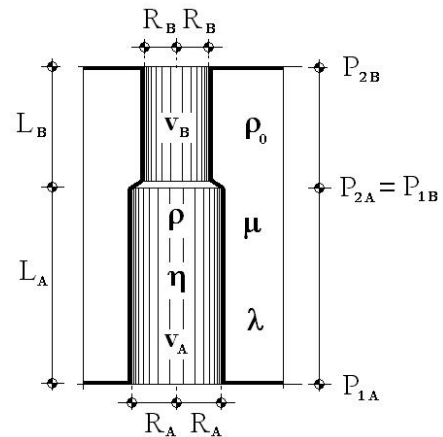


Figura 3.2. Esquema del acoplamiento de dos sistemas cavidad-fluido.

Se llamará al sistema cavidad-fluido inferior sistema A mientras que el superior será denotado por la letra B. Así cada variable con el subíndice correspondiente a las letras A y B quedarán asociados a uno u otro sistema.

III.2.i Solución del Sistema A

Supóngase un estado de reposo. En él, la presión P_{2A} será³:

$$P_{2A} = P_{2B} - \rho_0 g^z L_B \quad (2.1)$$

siendo g^z la aceleración gravitatoria.

Sustituyendo lo anterior en la Ecuación II (2.23) y en la Ecuación II (3.3) se resuelven las ecuaciones del sistema A bajo las condiciones dadas de acoplamiento.

III.2.ii Solución del Sistema B

Como se trata de un flujo laminar, se pensará que el cambio sistema es suave y despreciable para el análisis. Por ello, existirá una zona de transición de cavidades y de velocidades que se considerarán pequeñas en comparación de los sistemas y por ello serán ignoradas.

El tratamiento se basará en la conservación de flujo o de densidad de momentum lineal y de energía (Landau, 1987). Dado que la densidad de momentum lineal ha de conservarse se debe tener para este caso que:

$$R_B^2 \langle w_B^z \rangle_r = R_A^2 \langle w_A^z \rangle_r \quad (2.2)$$

Sabiendo la relación que existe entre las velocidades de cada sistema se puede utilizar el principio de conservación de energía para fluidos o ecuación de Bernoulli (Landau, 1987).

$$\frac{\rho}{2} v_B^2(t, r, z) + P(t, r, z) = \text{cte.} \quad (2.3)$$

Cuando el sistema se encuentra estático, resulta que la constante en la base del sistema B tendrá que ser la presión superior más el peso del fluido. En otras palabras, cuando $v_B^2 = 0$ se tendrá:

$$P(t, r, z) = P_{2A}$$

pero $P_{2A} = P_{1A} + \rho g^z L_A$, por lo cual se tiene:

$$P(t, r, z) = P_{1A} + \rho g^z L_A$$

³ El lector debe recordar que $g^z < 0$ y esa es la razón del signo negativo en las relaciones de presión.

Obteniendo el valor esperado respecto del radio, despreciando los términos asociados con v_B^r y aplicando lo anterior a la ecuación (2.3) se obtiene:

$$\langle P(t,z) \rangle_r = P_{1A} + \rho g^z L_A - \frac{\rho}{2} \langle v_B^{z^2}(t,z) \rangle_r \quad (2.4)$$

La forma de $\langle v_B^z \rangle_r$, al recordar que $\langle w^2 \rangle_r = \frac{5}{6} \langle w^z \rangle_r^2$, está dada por la ecuación II.1.11, que al ser manipulada adecuadamente resulta:

$$\langle v_B^{z^2}(t,z) \rangle_r = \frac{6}{5} \langle w_B^z \rangle_r^2 - \frac{9}{5} \frac{\dot{R}_B}{R_B} L_B \langle w_B^z \rangle_r + \frac{103}{60} L_B^2 \left(\frac{\dot{R}_B}{R_B} \right)^2 \quad (2.5)$$

que al aplicar la relación (2.2) en el resultado anterior se obtiene:

$$\langle v_B^{z^2}(t,z) \rangle_r = \frac{6}{5} \frac{R_A^4}{R_B^4} \langle w_A^z \rangle_r^2 - \frac{9}{5} \frac{\dot{R}_B R_A^2}{R_B R_B^2} L_B \langle w_A^z \rangle_r + \frac{103}{60} L_B^2 \left(\frac{\dot{R}_B}{R_B} \right)^2 \quad (2.6)$$

Finalmente al sustituir la ecuación (2.6) en la (2.4) se llega a la condición de frontera adecuada:

$$\langle P(t,z) \rangle_r = P_{1A} + \rho g^z L_A - \frac{\rho}{2} \left(\frac{6}{5} \frac{R_A^4}{R_B^4} \langle w_A^z \rangle_r^2 - \frac{9}{5} \frac{\dot{R}_B R_A^2}{R_B R_B^2} L_B \langle w_A^z \rangle_r + \frac{103}{60} L_B^2 \left(\frac{\dot{R}_B}{R_B} \right)^2 \right) \quad (2.7)$$

Para obtener las ecuaciones que modelen al sistema B sólo se debe sustituir la ecuación (2.7) en la Ecuación II (2.23) y en la Ecuación II (3.3). Con lo resuelto en este apartado es posible acoplar cuantos sistemas cavidad-fluido se desee.

III.3 CAMPO DE RADIACIÓN

Al tener determinado el desarrollo en el tiempo del radio de la cavidad, sus variaciones perturbarán el medio en dónde se encuentre. Por ello, para conocer las repercusiones de la dinámica del sistema cavidad-fluido se debe de saber cómo responde el medio cuando es perturbado.

En esta sección se examinará el comportamiento del medio dada una perturbación en él, con la hipótesis de que se trata de un medio elástico,

homogéneo e isótropo bajo una geometría cilíndrica. Se comenzará con el estudio de las vecindades del sistema para proseguir con distancias mucho mayores comparadas con la magnitud característica del sistema.

III.3.ii Campo Cercano

Supóngase que se está en un punto suficientemente cercano al sistema cavidad-fluido como para considerarlo suficientemente grande en altura. Se sabe que el radio de la cavidad cilíndrica es R y que sobre sus paredes actúa un esfuerzo que en este apartado se le llamará $-\tau_0$. Ha de recordarse que el medio elástico es infinito, homogéneo e isótropo.

Bajo las hipótesis anteriores se tendrá que los desplazamientos $u^\theta = u^z = 0$, mientras que $u^r \neq 0$. Además, los flujos de esfuerzos se conservarán, por lo cual se debe de cumplir que:

$$\nabla_k \tau^{kr} = 0 \Rightarrow (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} (ru^r)_{,r} = 0 \quad (3.1)$$

La solución para la ecuación anterior está dada por: $u^r = Ar + Br^{-1}$; pero como, por condición de frontera, es necesario que $u^r(\infty) = 0$, se debe de tener que $A = 0$. Lo cual restringe la solución de la ecuación (3.1) a:

$$u^r = Br^{-1} \quad (3.2)$$

Al sustituir la ecuación (3.2) en el tensor de esfuerzos radiales (ecuaciones I.2.5 y I.2.6) y evaluar en el radio de la cavidad ($r = R$ y $u^r = R - R_0$) se sigue que:

$$\tau^{rr}(R) = -(2\mu + \lambda) \frac{B}{R^2} + \lambda \frac{B}{R^2} = -2\mu \frac{B}{R^2} = -\tau_0 \Rightarrow B = \frac{\tau_0}{2\mu} R^2$$

Al sustituir el resultado anterior en la ecuación (3.2) se tendrá que el campo de desplazamientos tiene la forma:

$$u^r = \frac{\tau_0 R^2}{2\mu r} \quad (3.3)$$

El resultado anterior muestra que el campo de desplazamientos, bajo las condiciones dadas, decae inversamente proporcional con la distancia. Y lo mismo ocurrirá con la velocidad y con las aceleraciones, pues se tendrá que:

$$\dot{u}^r = r^{-1} \partial_t \left(\frac{\tau_0 R^2}{2\mu} \right) \wedge \ddot{u}^r = r^{-1} \partial_t^2 \left(\frac{\tau_0 R^2}{2\mu} \right) \quad (3.4)$$

Por medio de las ecuaciones (3.3) y (3.4) el campo cercano de radiación queda completamente resuelto.

III.3.ii Campo Lejano

Se sabe que las soluciones de la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas, después de realizar la separación de variables, resultan ser los polinomios de Bessel para la coordenada radial (Arfken, 2001; Jorge M. Sommerfeld, 1949.).

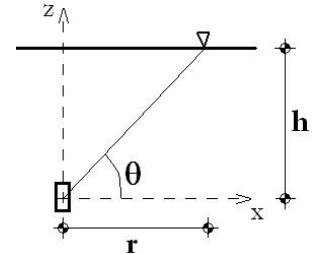


Figura 3.3. Esquema del campo lejano.

Para grandes valores de la coordenada radial r se tendrá que las funciones de onda tienden asintóticamente a:

$$\psi(r) \approx \frac{A}{\sqrt{r}} e^{ik(r \mp vt)}$$

con A la amplitud de la onda, r^n la coordenada n , v^m la velocidad y k^n el vector de onda. La parte real de la ecuación anterior es:

$$\psi^m(r) \approx \frac{A}{\sqrt{r}} \cos(g_{mn} k^m (r^n \mp v^n t)) \tag{3.5}$$

De la ecuación anterior resulta evidente que el decaimiento de la amplitud será proporcional a la raíz de la distancia. Pero influirá también la dirección respecto de la fuente a la que se esté. Para t y r^n fijos, la amplitud estará determinada también por $\cos(g_{mn} k^n r^m)$.

Por los argumentos anteriores el campo de desplazamientos, en el campo lejano, decaerá como $r^{-1/2} \cos(\theta)$, donde r es la distancia de la fuente al punto y θ el ángulo director del vector de onda (Figura 3.3). Por lo tanto si u_0^n es el desplazamiento en la fuente, se tendrá que el campo de desplazamientos estará dado por:

$$u^n(r) = \frac{u_0^n}{\sqrt{r}} \cos(\theta) \tag{3.6}$$

Las proyecciones verticales y horizontales de la deformación serán entonces:

$$u^x(r) = \frac{u_0^r}{\sqrt{r}} \cos^2(\theta) \quad \wedge \quad u^z(r) = \frac{u_0^r}{\sqrt{r}} \cos(\theta) \sin(\theta)$$

Por claridad en la Figura 3.3 se ilustra el hecho de que $\cos(\theta) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}}$ y que $\sin(\theta) = \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$. Al ser sustituido lo anterior en las ecuaciones previas se llega a que:

$$\mathbf{u}^x(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{u}_0^r}{\sqrt{r}} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2} \right) \wedge \mathbf{u}^z(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{u}_0^r}{\sqrt{r}} \left(\frac{\left(\frac{h}{r}\right)}{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2} \right) \quad (3.7)$$

Las ecuaciones (3.7) dan la solución para el campo lejano de desplazamientos. Y al igual que en el caso anterior, las velocidades y las aceleraciones se comportarán de una manera igual pues el operador diferencial del tiempo actuará solamente sobre \mathbf{u}_0^r . Por ello se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}^x(\mathbf{r}) &= \frac{\dot{\mathbf{u}}_0^r}{\sqrt{r}} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2} \right) \wedge \ddot{\mathbf{u}}^x(\mathbf{r}) = \frac{\ddot{\mathbf{u}}_0^r}{\sqrt{r}} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2} \right) \\ \dot{\mathbf{u}}^z(\mathbf{r}) &= \frac{\dot{\mathbf{u}}_0^r}{\sqrt{r}} \left(\frac{\left(\frac{h}{r}\right)}{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2} \right) \wedge \ddot{\mathbf{u}}^z(\mathbf{r}) = \frac{\ddot{\mathbf{u}}_0^r}{\sqrt{r}} \left(\frac{\left(\frac{h}{r}\right)}{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

III.4 LÍMITES DEL MODELO

En los párrafos posteriores se analizarán los límites del sistema cavidad-fluido desarrollado en el Capítulo II. Principalmente se estudiarán las propiedades físicas de los componentes del sistema para que se cumplan las suposiciones hechas para la elaboración del modelo.

En primer lugar se encontrarán los límites que, bajo las circunstancias trabajadas, conserven las características de un fluido newtoniano. Después se sentarán las fronteras para que se tenga un comportamiento elástico del medio en el que está la cavidad.

III.4.i Límites para un Fluido Newtoniano

Esta sección se iniciará con un proceso de adimensionalización (Fox, 2002) sobre la Ecuación II (2.23 y la Ecuación II (3.3 que modelan al sistema:

$$\partial_t \langle w^z \rangle_r = \frac{P_1 - P_2 + \rho g^z L}{\rho L} - \left(\frac{6\eta}{\rho R^2} + \frac{1}{5} \frac{\dot{R}}{R} \right) \langle w^z \rangle_r$$

$$\ddot{R} = - \frac{12}{(36\rho_0 R^2 + 7\rho L^2)} \left(4 \left(1 - \left(\frac{L}{R} \right)^2 \right) \eta + \frac{\rho}{4} \left(\frac{1}{30} \frac{L^2}{R} + R \right) \dot{R} + 3\rho_0 R^2 A \right) \dot{R} +$$

$$- \frac{18}{(36\rho_0 R^2 + 7\rho L^2)} \left(\frac{6}{5} \rho \langle w^z \rangle_r^2 - P_1 - P_2 + \frac{4(\mu + \lambda)}{R_0} (R - R_0) \right) R$$

Al definir las siguientes variables adimensionales

$$\tilde{t} = \frac{\bar{v}}{L} t, \quad \tilde{w}^z = \frac{\langle w^z \rangle_r}{\bar{v}}, \quad \tilde{R} = \frac{R}{R_0}, \quad \dot{\tilde{R}} = \frac{L \dot{R}}{\bar{v} R_0}, \quad \dot{\tilde{w}}^z = \frac{L}{\bar{v}^2} \partial_t \langle w^z \rangle_r,$$

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \ddot{\tilde{R}} = \frac{L^2 \ddot{R}}{\bar{v}^2 R_0}, \quad \mathcal{R}_\epsilon = \frac{\rho \bar{v} R_0}{\eta} \text{ y } \tilde{L} = \frac{L}{R_0}$$

y ser sustituidas en las ecuaciones que modelan al sistema cavidad-fluido se obtiene:

$$\dot{\tilde{w}}^z = \frac{P_1 - P_2 + \rho g^z L}{\rho \bar{v}^2} - \left(6 \frac{1}{\mathcal{R}_\epsilon} \frac{\tilde{L}}{\tilde{R}^2} + \frac{1}{5} \frac{\dot{\tilde{R}}}{\tilde{R}} \right) \tilde{w}^z \quad (4.1)$$

$$\ddot{\tilde{R}} = - \frac{12\tilde{\rho}}{(36\tilde{R}^2 + 7\tilde{\rho}\tilde{L}^2)} \left(4 \left(1 - \left(\frac{\tilde{L}}{\tilde{R}} \right)^2 \right) \frac{\tilde{L}}{\mathcal{R}_\epsilon} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{30} \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{R}} + \tilde{R} \right) \dot{\tilde{R}} + 3 \frac{LA}{\tilde{\rho}\bar{v}} \tilde{R}^2 \right) \dot{\tilde{R}} +$$

$$- \frac{18\tilde{\rho}\tilde{L}^2}{(36\tilde{R}^2 + 7\tilde{\rho}\tilde{L}^2)} \left(\frac{6}{5} \tilde{w}^{z2} - \frac{P_1 + P_2}{\rho \bar{v}^2} + \frac{4(\mu + \lambda)}{\rho \bar{v}^2} (\tilde{R} - 1) \right) \tilde{R} \quad (4.2)$$

En las ecuaciones (4.1) y (4.2) resulta de gran importancia el factor \mathcal{R}_ϵ que se conoce como el número de Reynolds. Éste parámetro es de vital importancia en la dinámica de un fluido pues indica la transición de estado laminar a turbulento (Fox, 2002). Al valor de dicho punto se le llama número de Reynolds crítico (\mathcal{R}_ϵ^c).

El número de Reynolds mide la relación entre los procesos cinemáticos y viscosos (Fox, 2002). Para mantener un flujo laminar los procesos viscosos deberán de dominar a los cinemáticos, lo que significa que el número de Reynolds deberá ser menor que su valor crítico. Por ello:

$$\frac{\rho \bar{v} R_0}{\eta} = \mathcal{R}_\epsilon \ll \mathcal{R}_\epsilon^c \Leftrightarrow \rho \bar{v} R_0 \ll \mathcal{R}_\epsilon^c \eta \quad (4.3)$$

Se podría suponer que al asegurar un número Reynolds suficientemente pequeño se salvarían los problemas de laminaridad, lo cual es cierto, pero aparecerían problemas de estabilidad del sistema cavidad-fluido. Al observar la ecuación (4.2) resulta claro lo anterior, pues si $\mathcal{R}_\epsilon \rightarrow 0$, la ecuación se transformaría en:

$$\ddot{\tilde{R}} = \frac{12\tilde{\rho}}{(36\tilde{R}^2 + 7\tilde{\rho}\tilde{L}^2)} \left(4 \left(\left(\frac{\tilde{L}}{\tilde{R}} \right)^2 - 1 \right) \frac{\tilde{L}}{\mathcal{R}_\epsilon} \right) \dot{\tilde{R}} \quad (4.4)$$

cuya solución crece exponencialmente, lo que es físicamente inaceptable. Por ello la viscosidad del fluido deberá de estar acotada superiormente de tal manera que al suponer una simetría cilíndrica y de acuerdo a ecuación [I.2.13](#) se tendrá que:

$$\bar{v} = \left(\frac{2}{3} \right) \frac{(\Delta P - \rho g \Delta \ell)}{4\eta \Delta \ell} R_0^2 \Rightarrow \mathcal{R}_\epsilon = \frac{\rho \bar{v} R_0}{\eta} > 1 \Leftrightarrow \frac{\rho P_{,z}}{6} R_0^3 > \eta^2$$

$$\therefore \eta^2 < \frac{\rho P_{,z}}{6} R_0^3 \quad (4.5)$$

Por otra parte, el número de Reynolds debe de estar acotado superiormente por su valor crítico; lo anterior para mantener un fase laminar en el flujo del fluido. Por ello, al desarrollar como en el caso anterior la ecuación (4.3) se tiene:

$$\eta^2 \gg \frac{\rho P_{,z}}{6 \mathcal{R}_\epsilon^c} R_0^3 \quad (4.6)$$

De las desigualdades (4.5) y (4.6) se concluye fácilmente que:

$$\frac{\rho P_{,z}}{6 \mathcal{R}_\epsilon^c} R_0^3 \ll \eta^2 < \frac{\rho P_{,z}}{6} R_0^3 \quad (4.7)$$

La relación (4.7) acota con precisión las propiedades físicas del fluido y geométricas de la cavidad para que se mantengan las hipótesis con las que se construyó el modelo. Que era la finalidad de este apartado.

Resulta importante hacer notar que la viscosidad también se encuentra acotada superiormente, lo cual parecería ir en contra del sentido común. Lo anterior se basa en la idea de que entre más viscoso sea el fluido, podrá guardar mejor la laminaridad. Sin embargo, al aumentar la viscosidad, comienza a darse

una transición de fase en el comportamiento del fluido acercándose a un fluido maxwelliano (Ladau, 1969) o vidrio. El comportamiento dinámico de los vidrios se encuentra en un punto intermedio entre los fluidos y los sólidos elásticos. Por ende, el tensor de esfuerzos para estos materiales resulta distinto al de los fluidos newtonianos. Es por ello que la viscosidad del fluido debe de estar acotada superiormente.

III.4.ii Límites para un Medio Elástico

Cuando se dice que un material es elástico significa que las deformaciones sobre dicho material son linealmente proporcionales a los esfuerzos que actúan sobre él (Heinbockel). Esto es que existe una transformación c^{kl}_{ij} tal que:

$$e^{kl} = c^{kl}_{ij} \tau^{ij} \quad (4.8)$$

Dicha transformación siempre tiene inversa s^{ij}_{kl} (Heinbockel), lo que significa que:

$$\tau^{ij} = s^{ij}_{kl} e^{kl} \quad (4.9)$$

La zona elástica tiene un rango de validez (Heinbockel), tal y como se ve en la Figura 3.4. El punto límite de la región elástica depende de cada material. Muchos de los materiales sufren transición plástica dentro del rango de 5% a 10% de deformación. Por lo cual, si las deformaciones son suficientemente grandes, el material no conservará sus propiedades elásticas y posiblemente sufra de fracturas.

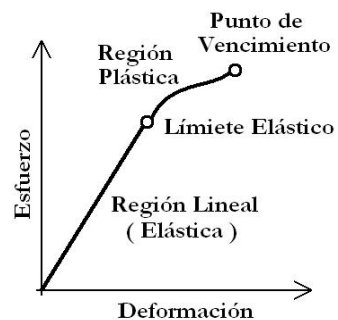


Figura 3.4. Relación entre deformación y esfuerzo.

Por ello es indispensable que las deformaciones que se den en el sistema cavidad-fluido sean pequeñas. El criterio para caracterizar lo “pequeño” dependerá del material del que sea el medio que contenga a la cavidad.

De acuerdo al desarrollo de la teoría de la elasticidad el tensor de deformaciones e^{ij} se define como (Landau, 1969):

$$e^{ij} = \frac{1}{2} (\nabla^i u^j + \nabla^j u^i + \nabla^i u^k \nabla^j u_k) \quad (4.10)$$

siendo u^m el desplazamiento en la dirección m -ésima.

La ecuación (4.10) se reduce a la utilizada en el Capítulo I cuando se suponen a los gradientes de desplazamientos suficientemente pequeños como para despreciar términos cuadráticos de estos:

$$|\nabla^j u_k| \ll 1 \quad (4.11)$$

Obteniéndose por medio de lo anterior:

$$e^{ij} = \frac{1}{2}(\nabla^i u^j + \nabla^j u^i) \quad (4.12)$$

Dado que el procedimiento que se seguirá en el presente trabajo para la solución del sistema de ecuaciones será la integración numérica. Para que se cumpla la condición $\nabla^i u^k \nabla^j u_k \approx 0$ en toda dirección se deberán de tener u^i suficientemente pequeñas. Para asegurar lo anterior, los pasos o incrementos de la integración numérica (Δt) deberán de ser suficientemente “pequeños”. El criterio para discernir lo pequeño de lo no pequeño dependerá de las características propias del sistema.

CAPÍTULO IV

APLICACIÓN AL VOLCANISMO

*“Era un monstruo grandioso, lleno de ojos y bocas en todas sus coyunturas. En cada articulación de sus miembros tenía una boca y con sus bocas sin número mordía, cual muerden las bestias... Cuando la vieron los dioses, uno a otro se dijeron: Es necesario dar a la Tierra su forma...”*¹

INTRODUCCIÓN

Los tres capítulos anteriores han desarrollado el modelo teórico que describe el comportamiento físico del sistema cavidad-fluido. Este capítulo tiene como objetivo aplicar tal modelo a las condiciones físicas propias de ambientes volcánicos.

El presente capítulo constará de dos secciones: en la primera se exploran los conceptos y términos básicos de la volcanología. Y en la segunda se exponen ejemplos de la aplicación del modelo (Capítulo II) en la generación de señales sísmicas volcánicas sintéticas.

El objetivo de esta sección es mostrar al lector que la interacción de fluidos con los medios que los contienen puede generar señales sísmico-volcánicas.

¹ GARIBAY, K. Ángel Ma.. *Épica Náhuatl*. Edit. Dirección Gral. de Publicaciones, UNAM. México, 1993, cuarta edición. pp. 99, p. 1.

IV.1 VOLCANISMO

Nuestro planeta, la Tierra, es un sistema físico fuera de equilibrio termodinámico. Más específicamente, es un cuerpo que lleva casi cinco mil millones de años enfriándose para alcanzar el equilibrio térmico con sus alrededores. Esto ha sido y es motor de muchos fenómenos y quizás uno de los más bellos e impresionantes es el volcanismo.

El volcanismo es un proceso muy complejo cuyas etapas finales se dan en las regiones superficiales de la Corteza Terrestre. Este consiste en el transporte de materia líquida, sólida o gaseosa de zonas profundas de la corteza hacia la superficie. La materia líquida, en su mayoría roca en fase líquida, recibe el nombre de magma cuando se encuentra bajo la superficie terrestre y lava al situarse ya en ella. La materia sólida consiste en roca en fase sólida y/o detritus; mientras que los materiales gaseosos tienen un espectro ampliamente variado.

IV.1.i Propiedades Físicas y Tipos de Magmas

El magma se puede definir como una mezcla multifase de sólidos, líquidos y vapores a temperaturas superiores de 900 K (Spera, 2000). La fracción de materiales sólidos (cristales y vidrios) está formada, en su mayoría, por óxidos de Si (silicio) y su abundancia en el magma depende fuertemente de la temperatura. Los materiales líquidos son silicatos de O, Al, Ca, Mg, Fe, K y Na. Usualmente pequeños porcentajes (0.5%-5%) de la masa de los magmas son de H_2O y CO_2 . El contenido de volátiles (gases disueltos) es altamente dependiente de la presión a la que se encuentra el magma, Figura 4.1.

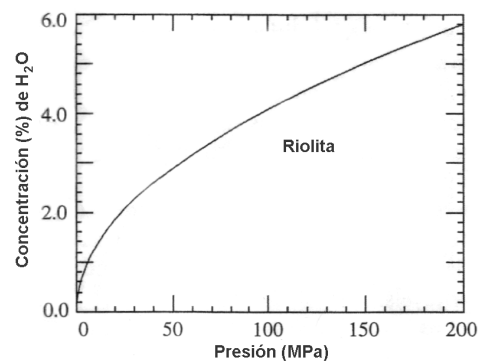


Figura 4.1. Solubilidad del agua en un magma riolítico. Adaptado de (Jaupart, 2000).

a) Propiedades Generales

El cambio de fase en magma es un proceso paulatino, pues los distintos constituyentes del magma cambian de fase en distintas condiciones termodinámicas. Por ello se consideran dos puntos en un cambio de fase: el inicio y el final de tal proceso. Para el caso de transición de líquido a sólido los puntos reciben el nombre de: “sólidus” y “líquidus”. Los cuales dependen principalmente del contenido de Si, el porcentaje de H_2O , la presión y, por supuesto, de la temperatura.

Para conocer el comportamiento dinámico de los magmas, dentro de un buen rango de temperaturas, sólo se requiere su densidad y viscosidad (Araña, 1993; Jaupart, 2000). Por ello mucho esfuerzo se ha encaminado a conocer tales propiedades. Experimentalmente se sabe que la viscosidad de los magmas es proporcional a su contenido de Si; esto es debido a las estructuras moleculares que forma el SiO_2 al cristalizar (Tarbuck, 2003). De igual manera, la viscosidad decrece con la temperatura y el contenido de volátiles, en particular el porcentaje de H_2O es un factor preponderante para el valor de la viscosidad. (ver Figura 4.2)

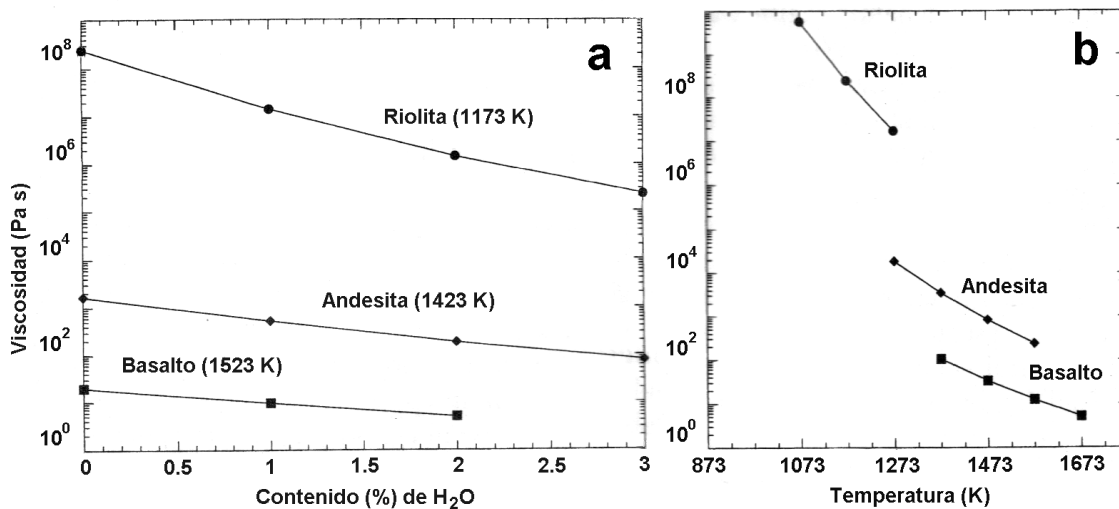


Figura 4.2. Viscosidades de magmas en función a) del contenido de agua y b) de la temperatura típica del material libre de volátiles. Las mediciones son a 0.1 MPa. Adaptados de (Spera, 2000).

Para el caso de la densidad, la temperatura y la presión no juegan un papel preponderante pues los coeficientes de dilatación volumétrica y compresibilidad están alrededor de $5 \times 10^{-5} K^{-1}$ y $5 \times 10^{-11} Pa^{-1}$ respectivamente. Los procesos de difusión térmica pueden ser omitidos pues los magmas, al igual que las rocas, son excelentes aislantes térmicos (Spera, 2000). La composición del magma es lo que decide, primordialmente, el valor de la densidad, Figura 4.3.

Los cambios en la densidad provocados por variaciones en la composición del fundido son, por lo menos, un orden de magnitud mayores que los procesos térmicos (Araña, 1993), ver Figura 4.4. Por ello, para la mayoría de estudios incluyendo éste, los procesos de difusión y dilatación térmica así como los de compresión son despreciados.

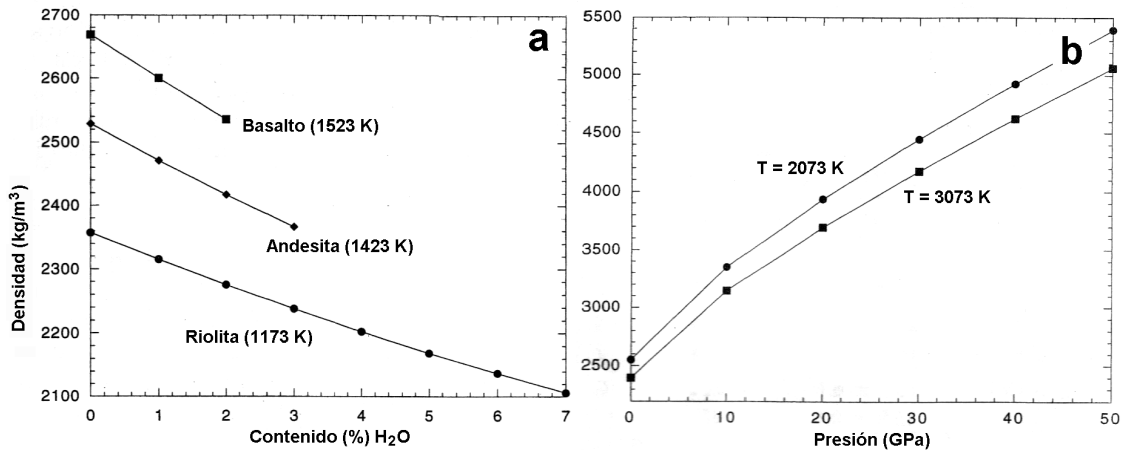


Figura 4.3. Comportamiento de la densidad para diferentes magmas. a) Densidades a temperaturas características de erupción, a 0.1 MPa. b) Curvas de densidad para basalto a 0.1 MPa. Adaptadas de (Spera, 2000).

b) Tipos de Magmas

La clasificación más común de los magmas y lavas se basa en su contenido de silicio. Por medio de esto se separan en tres grandes grupos: basáltica, andesítica y riolítica. La fuente primordial del magma es la astenósfera (ver Apéndice B); el magma proveniente de este sitio es pobre en Si y rico en Fe (basalto), en su mayoría formado por olivino y piroxeno (ver Apéndice B). En estudios experimentales se ha comprobado que conforme se enfría un magma basáltico los compuestos químicos que lo constituyen cristalizan a distintas temperaturas, lo que determina un orden de solidificación. Los primeros en realizar la transición a fase sólida serán los compuestos que contengan Fe, Mg y Ca. Al disminuir la proporción de estos elementos en el magma crecerá la de los restantes, en particular la de Si.

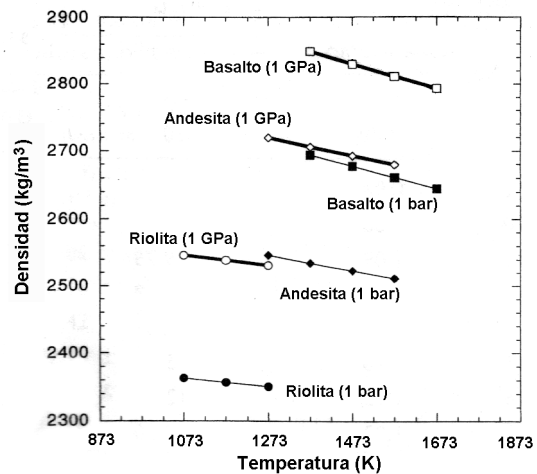


Figura 4.4. Densidades de magmas en función de la temperatura. Adaptada de (Spera, 2000).

Originando de esta manera las diferentes variedades de magma. El camino que siguen los cambios de composición de un magma al enfriarse se le conoce como Serie de Bowen (ver Apéndice B).

Basalto: El contenido de silicio está alrededor del cincuenta por ciento. Mientras que el contenido de metales como el Fe, Mg y Ca puede llegar hasta un 14% para cada uno. Son los magmas más fluidos cubriendo un rango de viscosidad de $0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ a $10^3 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, dependiendo del contenido de Si, la fracción de volátiles y de la temperatura del fundido. La densidad de un magma basáltico a presión atmosférica es, en promedio, de 2700 kg/m^3 , pero puede alcanzar los 3000 kg/m^3 . A presión atmosférica el líquidus del basalto ronda los 1400 K y las temperaturas que se han registrado en la superficie para estos magmas oscila entre los 1750-1300 K. Habitualmente se halla en el volcanismo marino y en divergencias de placas tectónicas, un ejemplo es el archipiélago de Hawaii; este tipo de magma/lava da origen al volcanismo efusivo.

Andesita: El porcentaje de Si para este magma es de alrededor del sesenta por ciento. Disminuyendo el contenido en metales. Su viscosidad es intermedia cubriendo el intervalo de $10^3 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ a $10^6 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, dependiendo fuertemente de la cantidad de volátiles disueltos y de la temperatura. La densidad característica para las andesitas es de 2500 kg/m^3 bajo una presión de 0.1MPa. La temperatura de líquidus en la superficie terrestre está alrededor de los 1200 K y se han medido temperaturas de magmas andesíticos que cubren el rango de 1100-1400 K. Se encuentra principalmente en volcanismo continental y en volcanismo de islas, los Andes son un ejemplo.

Riolita: Éste magma es el que alcanza el contenido mayor de silicio, llegando a constituir un setenta por ciento o más de su peso. Por ello su viscosidad resulta ser la mayor, siendo aproximadamente $10^6 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ para fundidos altamente hidratados y alcanzando $10^{12} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ para magmas secos. En general el comportamiento dinámico de un magma riolítico es el de un fluido maxwelliano a diferencia de los dos casos anteriores que presentan un comportamiento newtoniano. Al tener un alto contenido de Si, elementos más pesados tienen una importancia secundaria, por ello la densidad es baja en comparación de los otros magmas teniendo un valor promedio de 2200 kg/m^3 o incluso menor, esto para una presión de 10^5 Pa . Su temperatura de líquidus es la más baja, estando alrededor de 1000 K, se han registrado riolitas en la superficie en un rango de

950-1100 K. Con frecuencia los magmas riolíticos se hallan en procesos de volcanismo continental, dónde el magma original ha sido enriquecido por la corteza continental abundante en silicio (ver Apéndice B). Favorece la formación de domos y da lugar al volcanismo explosivo.

IV.1.ii Volcanes: Estructura y Tipos

Muchos de los autores de la literatura especializada concuerdan con Bullard (1976) y Macdonald (1972) en definir a un volcán como una abertura o chimenea que conecta un reservorio de magma que se encuentra en las profundidades de la corteza terrestre con la superficie de la Tierra.

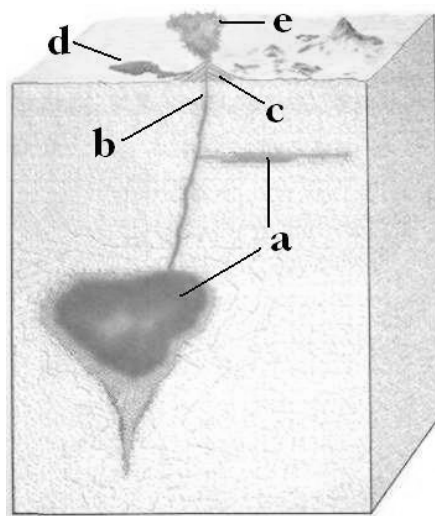


Figura 4.5. Estructura de un sistema volcánico. a) intrusiones magmáticas; b) conducto volcánico; c) edificio volcánico; d) erupción de lava; e) expulsión de gases y cenizas. Adaptado de (Tarbuk, 2003).

La edificación rocosa que rodea a dichas aberturas se le asigna el nombre de edificio volcánico. El material eyectado consiste en lava, fragmentos de roca parcial o completamente solidificada y grandes cantidades de gases: H_2O , SO_2 y CO_2 entre otros (Jaupart, 2000). (Figura 4.5)

Habitualmente la cámara magmática o la fuente del magma (Figura 4.5 a)) se encuentra a varios kilómetros de profundidad, rara vez superando los 20km (Jaupart, 2000). El radio del conducto volcánico (Figura 4.5 b)) varía en un rango de metros a decenas de metros, por lo general no excede los 50 m (Jaupart, 2000; Gonnermann, 2003; Melnik, 2000) y su longitud estará determinada por la profundidad del reservorio de magma del sistema volcánico, la cual puede ser de centenares de metros a kilómetros.

El tipo de material que eyecta un volcán y el ambiente en el que se encuentra definen su comportamiento y apariencia. En particular la clase de magma que un volcán transporta a la

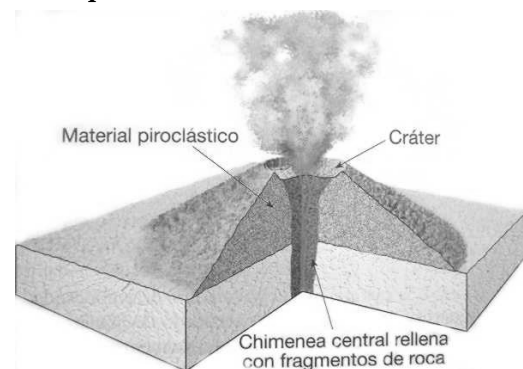


Figura 4.6. Cono de Cenizas. Imagen adaptada de Tarbuk (2003).

superficie, en muchos sentidos, determina su devenir. La mayoría de los volcanes de la Tierra pueden ser incluidos dentro de las siguientes clasificaciones:

Conos de Ceniza: formados por fragmentos de lavas basáltico-andesíticos. Ocasionalmente ocurren en cúmulos de decenas o cientos de volcanes. Poseen una forma semejante a un cono truncado y sus laderas presentan una inclinación que oscila entre 30° y 40° ; por lo general son pequeños y su altura no supera el kilómetro aunque el promedio es de 400 m. Figura 4.6. El Parícutín (México) es un famoso miembro de esta familia de volcanes.

Volcanes de Escudo: Su nombre proviene de la forma que tienen, que asemeja a un escudo de los guerreros de la antigüedad. De pendientes muy pequeñas son los volcanes más grandes que se conocen, llegando a alcanzar los nueve kilómetros de altura y varias veces esta magnitud su base. Se forman de lava basálticas con un alto grado de fluidez (Figura 4.7). El archipiélago de Hawai (E.U.A.) y el Monte Olimpo (planeta Marte) ejemplifican esta variedad.

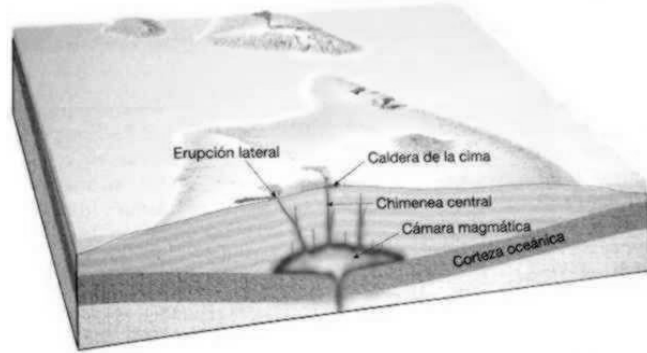


Figura 4.7. Volcán de Escudo. Imagen adaptada de (Tarbuk, 2003)

Volcanes Compuestos (estrato-volcanes): Los edificios volcánicos de estos están formados por capas alternadas de lava y de escombros piroclásticos y cenizas. Logran alcanzar alturas de hasta seis mil metros. Sus pendientes son más pronunciadas que en el caso de un cono de cenizas y de un escudo. Por lo general se forman de lava andesítica, pero no es una regla. Figura 4.4. Ejemplos de este tipo de volcanes son el Popocatepetl (México) y el monte Fuji (Japón).

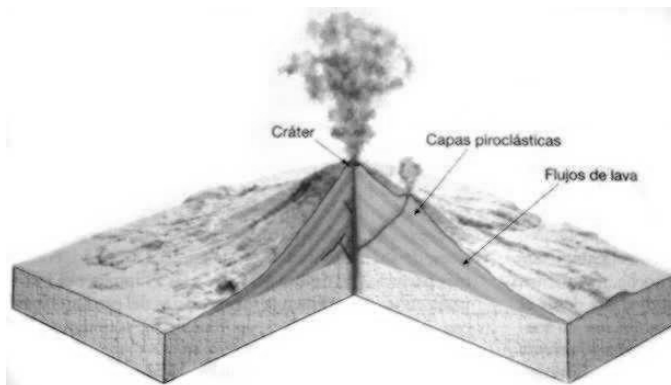


Figura 4.8. Estrato-volcán. Imagen adaptada de (Tarbuk, 2003).

IV.1.iii Señales Sísmicas Volcánicas

Un sistema volcánico genera gran diversidad de alteraciones en el medio circundante mientras se encuentra en actividad: el calentamiento de suelo, manantiales hidrotermales, fumarolas, emisiones de gases por mencionar algunos ejemplos. Sin lugar a discusiones, una fuente de información muy importante de actividad de un sistema volcánico es la sismicidad. Lo anterior debido a que se ha encontrado que las señales sísmicas son fuente primordial de información para entender como funcionan los procesos volcánicos. (Arciniega et. al., 1999, Chouet, 1985, 1986, 1996; Feheler, 1983; Kumagai et. al., 2002; McNutt, 2000; Nishimura et. al., 2003).

La manera más útil de clasificar las señales sísmicas es por medio del proceso físico que las genera; pues con su estudio se puede conocer el estado del sistema volcánico. La clasificación basada en este criterio fue propuesta por Bernard Chouet. (ver Chouet, 1996). De aquí en adelante ésta será utilizada pues es la más aceptada en el medio sísmico-volcánico y utiliza el proceso que genera la señal sísmica para clasificarla.

Desde tal perspectiva existen dos procesos principales que generan una señal sísmica-volcánica: los procesos de variación volumétrica, en donde los fluidos juegan un papel primordial, y los que involucran esfuerzos de corte, en donde las fracturas de materiales es lo trascendente. En los procesos con fuente de variación volumétrica los fluidos y sólidos están acoplados dinámicamente. La radiación elástica o sismo es el resultado de los flujos a través de un sistema de conductos en el sólido. Los procesos de fractura, son aquellos en las cuales los esfuerzos generados por los magmas lesionan al material rocoso originando el sismo. Esto se da en la roca que rodea al cuerpo de magma.

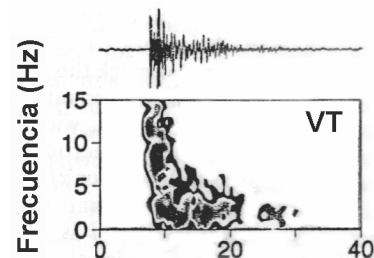


Figura 4.9. Ejemplo de señal VT. Adaptado de Chouet (1996).

a) Tipos de Señales Sísmicas Volcánicas

VT (Volcano Tectonic): Asociados a fracturas de roca sólida. Los mapas de localización de estos sismos proveen información de la distribución de esfuerzos sobre los volúmenes y conductos que contienen y conducen los flujos magmáticos. Son similares a las señales de origen tectónico pues comparten sus

mismas características espectrales. Frecuentemente los arribos de las ondas longitudinales (P) y transversales (S) son distinguibles con facilidad (Figura 4.9).

VLP (Very Long Period): Son los eventos con periodos mayores de 10 s (≤ 0.1 Hz) (Figura 4.10). Estos se originan debajo de los edificios volcánicos a profundidades de alrededor de 1.5 km. Este tipo de señal sísmica está relacionada con erupciones explosivas y degasificación. Aparentemente las fuentes de estas señales son “pequeñas” a pesar de que las longitudes de onda asociadas a la señal son grandes; lo que teóricamente ya tiene explicación (Chouet, 1985) por medio de resonancia sonora de fluidos y sus flujos dentro de cavidades.

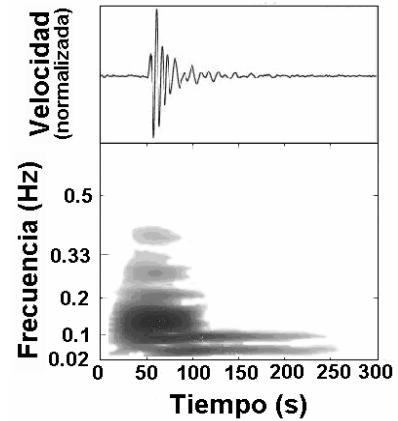


Figura 4.10. Ejemplo de señal VLP. Adaptada de www.ees.nmt.edu/Geop/mevo/seismic/verylong.html

LP (Long Period): Se originan particularmente en zonas dónde existen fuertes perturbaciones en los flujos y presiones del magma. Estas señales inician con un paquete de ondas de alta frecuencia (activación de la fuente) seguido por una onda armónica que puede ser mono o policromática con periodos típicos en el rango de 0.2 s a 2 s (5-0.5 Hz). Se considera que el origen de estas señales sísmicas está relacionado con procesos no destructivos del tránsito de fluidos a través de cavidades en la roca. Al igual que las señales VLP, las señales LP también están íntimamente ligadas a procesos de degasificación (Figura 4.11).

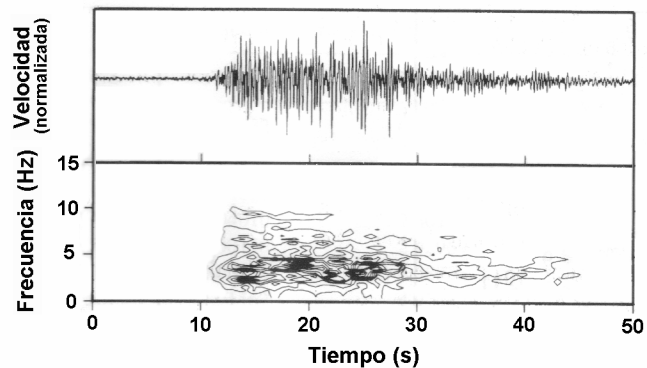


Figura 4.11. Señal sísmico-volcánica de tipo LP. Adaptada de (Arciniega et. al., 2000).

Tremor: Es una señal cuya duración puede ser de unos cuantos segundos o llegar a abarcar, incluso, meses. Las frecuencias típicas oscilan entre 0.5 y 5 Hz (Figura 4.12). Su origen no es claro debido a la cantidad de energía necesaria para mantener un sistema excitado por largos periodos temporales. Lo que es ampliamente aceptado es la relación que guarda con los procesos de conducción de fluidos en el sistema volcánico.

Se ha observado que el tremor y los sismos LP comparten las mismas características espectrales. También ocurre que al darse cambios en la actividad volcánica se dan cambios en el espectro de ambos tipos de señales. La naturaleza y relaciones entre los tremores y las señales LP's apuntan a un mecanismo conformado por una cámara resonante llena de algún fluido. Lo cual convertiría a los tremores y a las señales LP en distintas manifestaciones de un mismo fenómeno: la excitación repetitiva de una fuente estacionaria bajo un proceso no destructivo. Desde esta perspectiva se piensa que los sismos LP son la respuesta del sistema a una rápida variación de la presión mientras que el tremor se origina por medio de una serie de fluctuaciones en la presión del fluido de la fuente (Chouet, 1996).

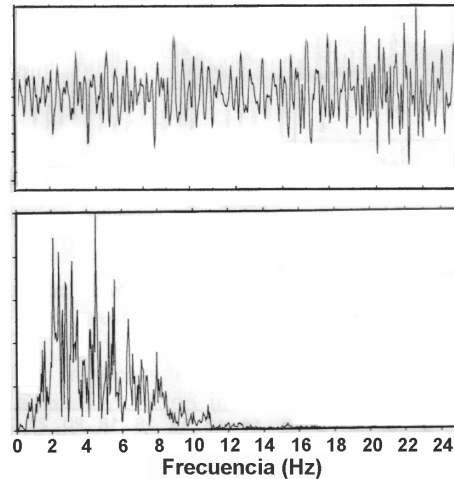


Figura 4.12. Señales de Tremor volcánico. Adaptada de (Konstantinos et. al., 2002).

Muchas erupciones han sido previstas gracias al estudio de la sismicidad previa (McNutt, 2000 [28]). Se considera que la probabilidad de una erupción aumenta cuando se presentan señales de tipo LP y VLP en grupos (McNutt, 2001 [28]). Por ello resulta de vital importancia conocer los mecanismos que generan al tremor y a la señal LP para tener la capacidad de conocer la evolución temporal de un sistema volcánico y poder prevenir eventos eruptivos de gran impacto.

IV.2 APLICACIÓN DEL MODELO

Como se mencionó en la sección anterior, las señales LP y tremores están íntimamente ligados con procesos dinámicos de flujos. Se sabe que una parte fundamental del edificio volcánico es el conducto que comunica la fuente del magma con la parte superficial de la corteza terrestre. En el conducto volcánico (ver Figura 4.5), puede estar la fuente o mecanismo de las señales sísmicas. El sistema desarrollado en el Capítulo II considera describe la interacción física cavidad-fluido, este será utilizado para simular un conducto volcánico como generador de señales sísmico-volcánicas y en particular como fuente de señales de tipo LP.

IV.2.i El Modelo Teórico

Prácticamente los tres capítulos anteriores se han ocupado en plantear, desarrollar y analizar las ecuaciones construidas en el Capítulo II que describen el comportamiento de las variables físicas que definen al sistema cavidad-fluido propuesto en el Capítulo I. (Figura 4.13)

El modelo: un canal cilíndrico de radio R y longitud L se encuentra inmerso en un medio elástico cuya densidad es ρ_0 y de constantes de Lamé λ y μ . Dicho canal conecta dos reservorios, el inferior a una presión P_1 mientras que la del superior es P_2 . De los reservorios ingresa-sale a la cavidad un fluido newtoniano cuya viscosidad es η y su densidad es ρ (Figura 4.13). El medio elástico es infinito y presenta una disipación de energía de la forma $\rho_0 \dot{R} A$, donde A es la constante de proporcionalidad de la disipación y cuya unidad es el Hz.

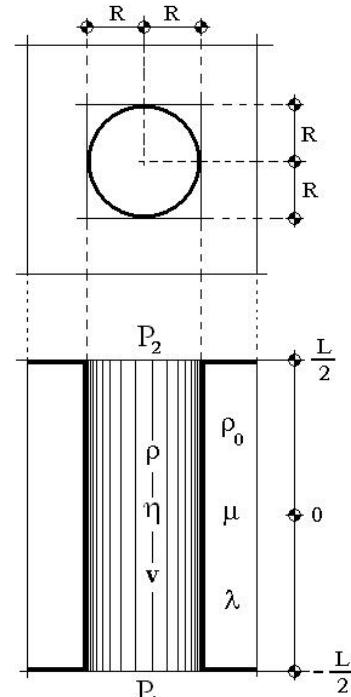


Figura 4.13.1 Modelo cavidad-fluido.

Se necesitan conocer cuatro variables para determinar el comportamiento dinámico del sistema cavidad-fluido: la velocidad radial ($v^r(t,r)$) y vertical ($v^z(t,r,z)$) del fluido, el campo escalar presión ($P(t,z)$) dentro de la cavidad y el radio ($R(t)$) de la cavidad. Para lograr conocer los valores de las variables anteriores se construyeron 5 ecuaciones. Dos de ellas (Ecuación II (2.23) y Ecuación II (3.3)) forman un sistema diferencial acoplado no lineal de segundo orden. Las tres restantes (Ecuaciones II (1.8), II (1.11) y II (2.24)) definen los valores de las variables del sistema cavidad-fluido, una vez resuelto el sistema diferencial.

$$\partial_t \langle w^z \rangle_r = \frac{P_1 - P_2 + \rho g^z L}{\rho L} - \left(\frac{6\eta}{\rho R^2} + \frac{1}{5} \frac{\dot{R}}{R} \right) \langle w^z \rangle_r$$

Ecuación II (2.23). Ecuación diferencial de la velocidad vertical media $\langle w^z \rangle$.

El sistema diferencial resuelve el valor medio (respecto de la variable radial) de la velocidad vertical ($\langle w^z \rangle_r$, Ecuación II (2.23)) y los valores del radio (R), velocidad radial (\dot{R}) y aceleración radial (\ddot{R} , Ecuación II (3.3)) de la pared de la cavidad.

La variación del valor medio de la velocidad vertical (Ecuación II (2.23)) dependerá fuertemente de la diferencia de presiones entre los reservorios. En la Figura 4.14 se muestran posibles formas de la solución de $\langle w^z \rangle_r$, la solución (a) ocurre cuando la diferencia de presiones es constante y estrictamente positiva mientras la (b) resulta cuando la diferencia es positiva pero de duración finita.

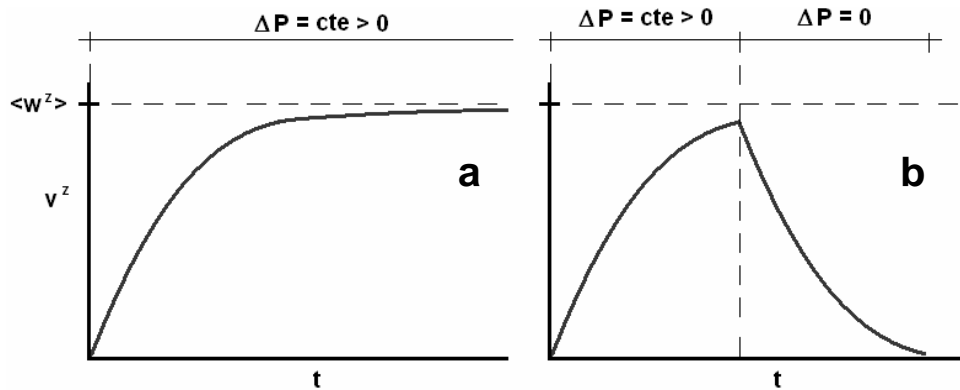


Figura 4.14. Posibles soluciones para el valor medio de la velocidad vertical.

En la gráfica se supone el valor de equilibrio de $\langle w^z \rangle_r = \frac{P_1 - P_2 + \rho g_z L}{6\rho\eta L}$. Existen más posibilidades de las que se exponen en la Figura 4.14; pero explorarlas no es el objetivo de este apartado. Para abordar un caso general se podría decir que la función $\langle w^z \rangle_r$ es especialmente sensible a el valor de $\Delta P = P_1 - P_2 + \rho g_z L$.

$$\ddot{R} = -\frac{12}{(36\rho_0 R^2 + 7\rho L^2)} \left(4 \left(1 - \left(\frac{L}{R} \right)^2 \right) \eta + \frac{\rho}{4} \left(\frac{1}{30} \frac{L^2}{R} + R \right) \dot{R} + 3\rho_0 R^2 A \right) \dot{R} +$$

$$-\frac{18}{(36\rho_0 R^2 + 7\rho L^2)} \left(\frac{6}{5} \rho \langle w^z \rangle_r^2 - P_1 - P_2 + \frac{4(\mu + \lambda)}{R_0} (R - R_0) \right) R$$

Ecuación II (3.3). Ecuación diferencial del radio de la cavidad.

El comportamiento del radio de la cavidad esta determinado por la Ecuación II (3.3). La cual cerca del punto de equilibrio se puede ver como un oscilador armónico amortiguado. Esto se basa en los estudios realizados en el Capítulo III de la mencionada ecuación. Para asegurar la estabilidad del sistema

debe de ocurrir que el material elástico sea capaz de soportar las tensiones generadas por el fluido sobre la cavidad y que el medio elástico pueda disipar la energía transmitida por la interacción con el fluido.

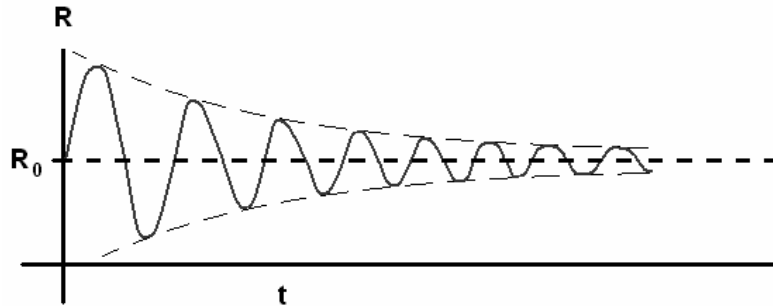


Figura 4.15. Posible forma de la función radio de la cavidad (R).

Al ser resuelto el sistema diferencial, las restantes ecuaciones quedarán determinadas y con ellas las variables que caracterizan al sistema cavidad-fluido.

$$v^r(t, r) = \dot{R} \left(\frac{r}{R} \right)^3$$

Ecuación II (1.8). Ecuación de la velocidad radial.

Una vez conocida la velocidad (\dot{R}) con la que se mueve la pared de la cavidad. Para todo tiempo la velocidad radial quedará definida por la Ecuación II (1.8) y exhibirá una forma similar a la Figura 4.16.

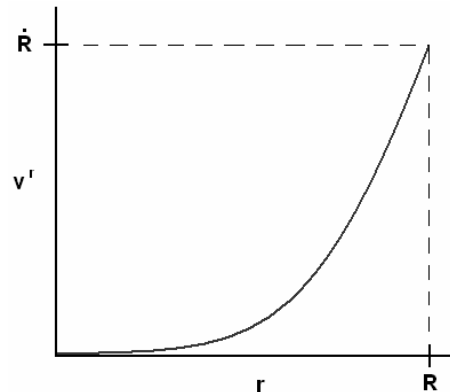


Figura 4.16. Forma de la velocidad radial.

La ecuación para la velocidad vertical del fluido estará definida una vez conocidos los valores de R , \dot{R} y $\langle w^z \rangle_r$. La Ecuación I (1.11) exhibe la forma general de la velocidad vertical.

$$v^z(r, z, t) = \frac{3}{2R^2} (R^2 - r^2) \langle w^z \rangle_r - \left(1 + 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{\dot{R}}{R} z$$

Ecuación I (1.11). Ecuación de la velocidad vertical.

El comportamiento de la velocidad vertical del fluido dependerá de tres factores preponderantes: el valor de la velocidad vertical media ($\langle w^z \rangle_r$), de la posición a lo largo de la cavidad (z) y de la velocidad radial (\dot{R}). De acuerdo a estas tres variables se pueden presentar los siguientes casos (suponiendo que $\langle w^z \rangle_r > 0$) para los frentes de la velocidad vertical del fluido.

La Figura 4.17 muestra posibles formas del frente de la velocidad vertical del fluido para tres distintas posiciones a lo largo de la cavidad. En el inciso (a) de la imagen la cavidad se está abriendo mientras que en la (b) se está cerrando. Se eligió esta forma de la velocidad pues en los experimentos posteriores la presión inferior será mayor que la superior, lo cual generaría frentes de velocidades similares a los ilustrados en la figura.

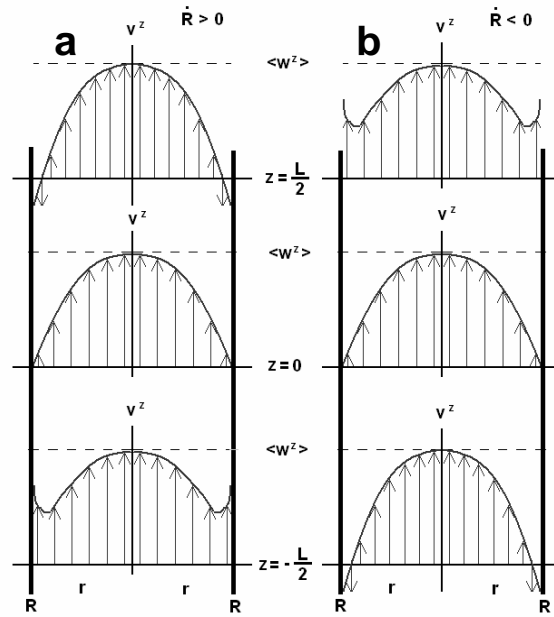


Figura 4.17. Posibles formas de la función velocidad vertical del fluido

$$\begin{aligned} \langle P(t, z) \rangle_r = & \rho \left(\frac{9 \dot{R}}{5 R} \langle w^z(t) \rangle_r - \frac{P_1 - P_2}{\rho L} \right) \left(z + \frac{L}{2} \right) + \\ & - \rho \left(\frac{77}{15} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{7 \ddot{R}}{6 R} + \frac{8 \eta \dot{R}}{\rho R^2} \right) \left(z^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right) + \\ & + P_1 - \frac{\rho}{2} \langle v^z \left(-\frac{L}{2}, t \right) \rangle_r^2 - \frac{\rho}{2} \langle v^r \left(-\frac{L}{2}, t \right) \rangle_r^2 \end{aligned}$$

Ecuación I (2.21). Ecuación de la presión media respecto de la coordenada radial.

La presión a lo largo de la cavidad queda descrita por la Ecuación I (2.21). A grandes rasgos la, Figura 4.18, describe la forma de la función presión para un tiempo dado. De la función presión queda claro que el factor que domina la presión en el fluido es la posición longitudinal a lo largo del conducto.

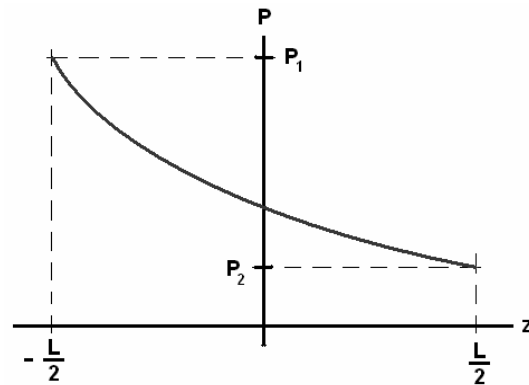


Figura 4.18. Posible forma de la presión para un tiempo dado.

Cuando se obtiene el valor promedio de la ecuación anterior se llega a la Ecuación I (2.26):

$$P(t) = -\frac{3}{5}\rho \langle w^z \rangle_r^2 - \frac{\rho}{4} \left(\frac{1}{30} \left(\frac{L}{R} \right)^2 + 1 \right) \dot{R}^2 + \left(\frac{4\eta}{3} \frac{\dot{R}}{R} - \rho \frac{7}{36} R\ddot{R} \right) \left(\frac{L}{R} \right)^2 + \frac{P_1 + P_2}{2}$$

Ecuación I (2.26). Ecuación del valor medio de la presión.

Lo importante de esta relación es que resulta ser, cuando el sistema se encuentra en equilibrio, el valor promedio de la ecuación de Bernoulli, el cual da veracidad al desarrollo expuesto.

IV.2.ii Rangos de los Valores a usar.

Para aplicar el modelo en la descripción de procesos volcánicos se considera a los magmas (basáltico y andesítico) fluidos newtonianos incompresibles y a las rocas como un medio homogéneo y elástico. De esta manera el desarrollo teórico del Capítulo II es adecuado para modelar un conducto volcánico. Los magmas riolíticos, a diferencia de los magmas andesítico y basáltico, exhiben un comportamiento de fluido maxwelliano (Tuffen et. al., 2003), por lo cual quedan fuera del alcance de este trabajo.

Para la aplicación adecuada del modelo se debe de tener la certeza que se desarrollará dentro de los rangos fenomenológicos que se han observado. Por este motivo a continuación se mostrarán los valores adecuados de la constante disipativa del medio elástico (A), del radio (R) y altura (L) de la cavidad.

a) Constante Disipativa

Para conocer las cotas del valor de la constante disipativa (A) del material elástico se graficó la cota mínima de la desigualdad Ecuación III (1.20) (Figura 4.19) utilizando valores promedio para magmas basáltico y andesítico. El valor utilizado para la roca continental fue $\rho_0 = 3000 \text{ kg/m}^3$.

$$A \geq \frac{4}{3R_E^2} \left(\left(\frac{L}{R_E} \right)^2 - 1 \right) \frac{\eta}{\rho_0}$$

Ecuación III (1.20). Cota para la constante disipativa del material elástico

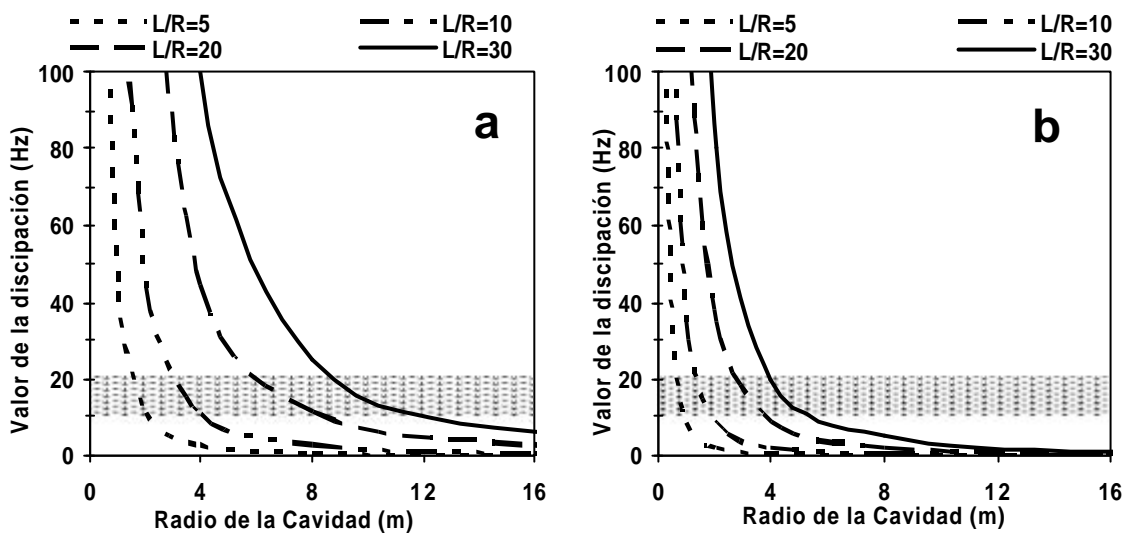


Figura 4.19. Cota inferior para el valor de la disipación (A). Gráfica de la relación III.1.20 para valores promedio de a) un basalto ($\rho=2800 \text{ kg/m}^3$ y $\eta=800 \text{ Pa}\cdot\text{s}$) y b) una andesita ($\rho=2500 \text{ kg/m}^3$ y $\eta=4000 \text{ Pa}\cdot\text{s}$).

En la Figura 4.19 se grafica el valor de la cota inferior para la constante disipativa para distintos valores del radio de la cavidad y diferentes relaciones entre el radio y la longitud de la cavidad (L/R). De la figura resulta evidente que el caso de un magma basáltico requiere una constante mucho menor que el andesítico. Esto debido a las diferencias entre las respectivas viscosidades. Como la constante de disipación es una característica física de la roca continental y no de lo que fluye a través de ella, se tomará un único valor (el más general) para los experimentos ya sean con magma de tipo basáltico o andesítico. En ambos casos el valor de de 10 Hz resulta una cota conveniente pues para $R \geq 6 \text{ m}$ se cubren todos los rangos (zona sombreada) de la relación L/R con excepción de $L/R = 30$ para la andesita. Por esto la cota inferior para la constante disipativa será $A = 10 \text{ Hz}$.

b) Radios y Longitudes

Para poder reproducir señales sintéticas de tipo LP se han de cumplir que las señales sintéticas estén en el rango de frecuencias de 0.5 Hz a 5 Hz. Así que se graficó la Ecuación III (1.22) que aproxima la frecuencia del modelo cavidad-fluido.

$$\nu \approx \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{4\pi i}$$

Ecuación III (1.22).
Valor aproximado de la frecuencia

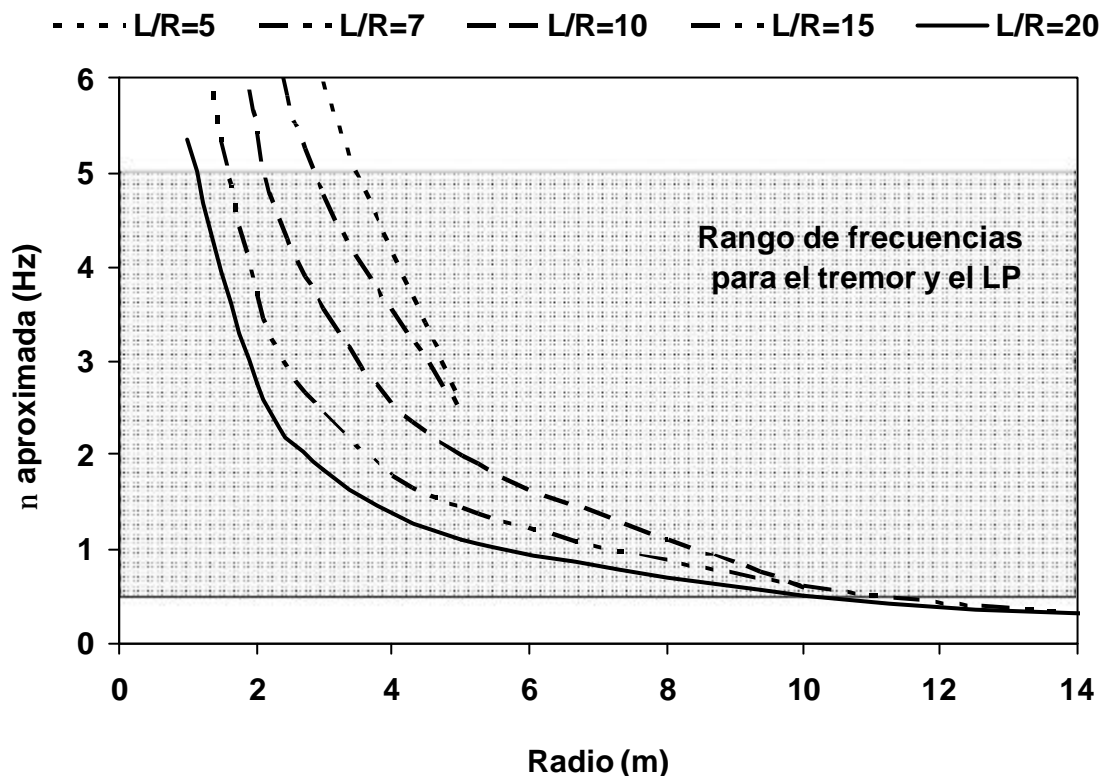


Figura 4.20. Frecuencia (ν) aproximada para distintas relaciones (L/R) en función del radio de la cavidad. Para valores de un magma andesítico ($\rho=2500 \text{ kg/m}^3$ y $\eta=4000 \text{ Pa}\cdot\text{s}$) y roca continental ($\rho=3000 \text{ kg/m}^3$ y $\lambda=\mu=2.5 \times 10^8 \text{ Pa}$) con una disipación $A=10 \text{ Hz}$. Gráfica de la relación III.1.22.

Para encontrar el rango de frecuencias en relación con el radio de la cavidad. La Figura 4.20 muestra la relación anterior para el caso de un magma andesítico para distintos cocientes de la longitud y del radio de la cavidad (L/R); mientras que la Figura 4.21 lo ilustra para un magma basáltico. La superficie sombreada, en ambos casos, es el rango de frecuencias de las señales sísmico volcánicas de tipo LP.

De acuerdo con Jaupart (2000), Gonnermann (2003) y Melnik (2000) los radios de los conductos volcánicos pueden tener valores que van de metros a

decenas de metros sin superar los 50 m. Ahora, de la Ecuación III (1.22) se concluye que el rango admisible para todas las relaciones L/R es $R \in [2, 11]$.

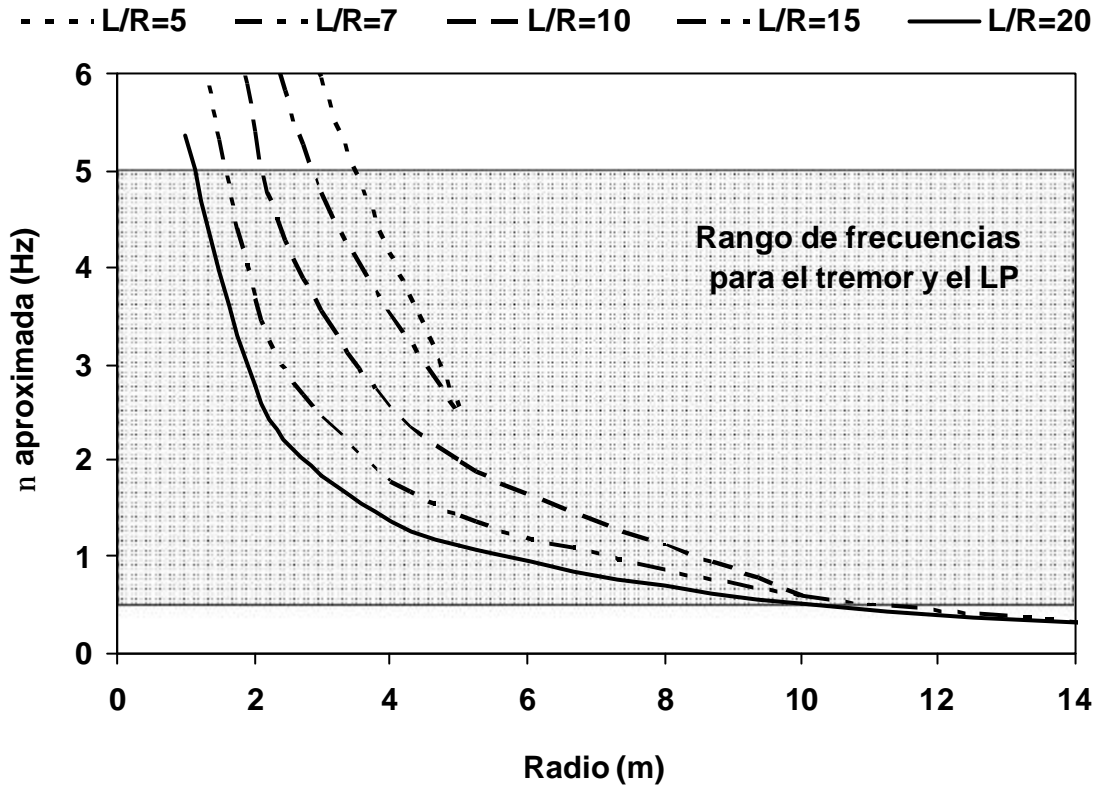


Figura 4.21. Frecuencia (ν) aproximada para distintas relaciones (L/R) en función del radio de cavidad. Para valores de un magma andesítico ($\rho=2800 \text{ kg/m}^3$ y $\eta=800 \text{ Pa}\cdot\text{s}$) y roca continental ($\rho=3000 \text{ kg/m}^3$ y $\lambda=\mu=2.5 \times 10^8 \text{ Pa}$) con una disipación $A=10 \text{ Hz}$. Gráfica de la relación III.1.22.

Sin embargo, de acuerdo con lo tratado en la Figura 4.19 $R \geq 6 \text{ m}$; si además se piensa que la Ecuación III (1.22) es una aproximación, se tendrá que tomar cierto rango para los valores expuestos en la Figura 4.20 y en la Figura 4.21. Por esto se trabajará en un intervalo radial de 5 a 15 m con cocientes de altura-radio de 10 a 20. Los rangos seleccionados para los valores radiales y de longitudes para la cavidad confirman que la selección de la constante disipativa fue adecuada. (ver Figura 4.19)

IV.2.iii Procedimiento para la obtención de Sintéticos

El procedimiento para la modelación consistió en acoplar cierto número de cavidades dónde las propiedades del medio elástico y del fluido fueron las de la roca continental y del magma dentro del rango de los basaltos y andesitas.

Las ecuaciones diferenciales se resolvieron numéricamente por medio del método de integración Runge y Kutta de cuarto orden (Press, 1992; Vetterling, 1992). El código calcula el punto de equilibrio del sistema y a partir de esa posición el sistema es perturbado por variaciones temporales en la presión. Los resultados son los desplazamientos, velocidades y aceleraciones radiales del medio en la frontera de la cavidad, el valor promedio de la presión dentro de la cavidad y las velocidades promedio radial y vertical del fluido. A profundidad y distancia dada se calculan los desplazamientos, velocidades y aceleraciones radiales y verticales en un punto del espacio, el valor promedio de la presión dentro de cada cavidad y las velocidades promedio radial y vertical del fluido en cada cavidad. Todo esto mediante las ecuaciones desarrolladas en los Capítulos II y III.

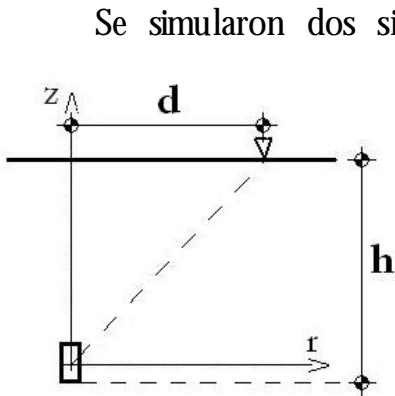


Figura 4.23. Posición de las mediciones.

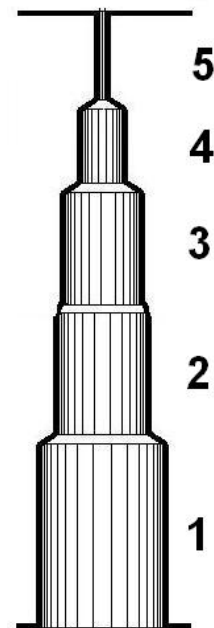


Figura 4.22. Esquema del sistema.

Se simularon dos sistemas de conductos volcánicos acoplando cinco sistemas cavidad-fluido (Figura 4.22), geoméricamente distintos entre sí. En todos los casos los sistemas fueron excitados variando la presión inferior de la cavidad base. Se utilizaron cuatro diferentes funciones de excitación: un pulso de delta de Dirac, un pulso cuadrado, un pulso gaussiano y tres pulsos gaussianos consecutivos. Los datos que se mostrarán adelante serán medidos a una distancia (d) del sistema cuya base se encuentra a una profundidad (h) como lo ilustra la Figura 4.23. La presión en la base de la cavidad más profunda será la litostática.

Para todos los casos el intervalo de integración fue de una centésima de segundo ($dt = 0.01s$) y la duración máxima de las señales no superó los cien segundos. Por ello una cota adecuada para el número de iteraciones es 10^4 . Como el error del método de integración es proporcional a $(dt)^5 = 10^{-10} s$ se concluye que el error será proporcional a 10^{-6} . Dicho error, para todos los resultados, fue menor que la centésima parte de los datos obtenidos por la integración. De esta manera se tiene una excelente certeza en los resultados del proceso numérico.

IV.3 EJEMPLOS CON DISTINTAS EXITACIONES

Se realizaron dos ejemplos. El primero representa un conducto volcánico de roca basáltica, a una profundidad superficial, que contiene un fluido con las características dinámicas de un magma basáltico seco. Mientras que para el segundo, localizado a una profundidad de varios kilómetros, el fluido posee las características de un magma andesítico hidratado.

IV.3.i Basalto Seco Superficial

El primer ejemplo a tratar posee valores que corresponden a un basalto seco, en el caso del fluido; y de una roca basáltica para el caso de la cavidad. Los valores de la densidad y viscosidad del fluido fueron $\rho = 2.8 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$ y $\eta = 10^3 \text{ Pa} \cdot \text{s}$. El medio elástico tuvo

una densidad $\rho_0 = 3 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$, constantes elásticas $\lambda = \mu = 4 \times 10^8 \text{ Pa}$ y el valor de la constante de disipación fue de $A = 15 \text{ Hz}$. La base del sistema se colocó a una profundidad $h = 900 \text{ m}$ bajo de la superficie del medio elástico y las mediciones fueron realizadas a una distancia $d = 3 \text{ Km}$ como lo ilustra la Figura 4.24. La señal sintética obtenida tiene una duración de 90s.

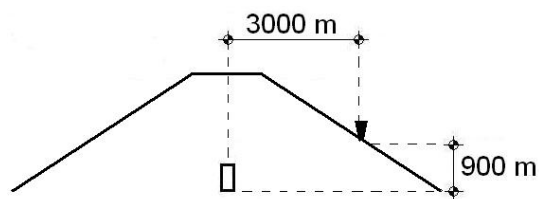


Figura 4.24. Croquis del ejemplo 1.

Los valores geométricos para cada uno de los cinco sistemas acoplados se exponen en la siguiente tabla:

Cavidad	Radio (m)	Longitud (m)	L/R
1	9.20	150	16.29
2	8.16	110	13.47
3	8.67	130	15.01
4	8.10	100	12.29
5	7.08	80	11.26

a) Pulso de Delta

La forma de la presión utilizada en este experimento es una función Delta de Dirac cuya duración fue de una centésima de segundo y su magnitud fue finita. La Figura 4.25 ilustra la presión inferior como función del tiempo.

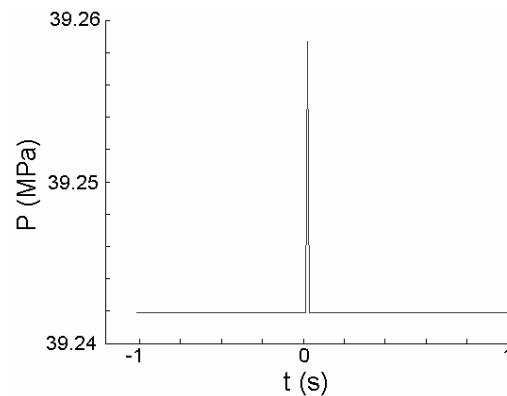


Figura 4.25 Forma de la presión inferior del sistema en función del tiempo.

El valor medio de la velocidad vertical en todo el sistema así como los flujos de materia que ingresaron y salieron del sistema son mostrados en la siguiente figura:

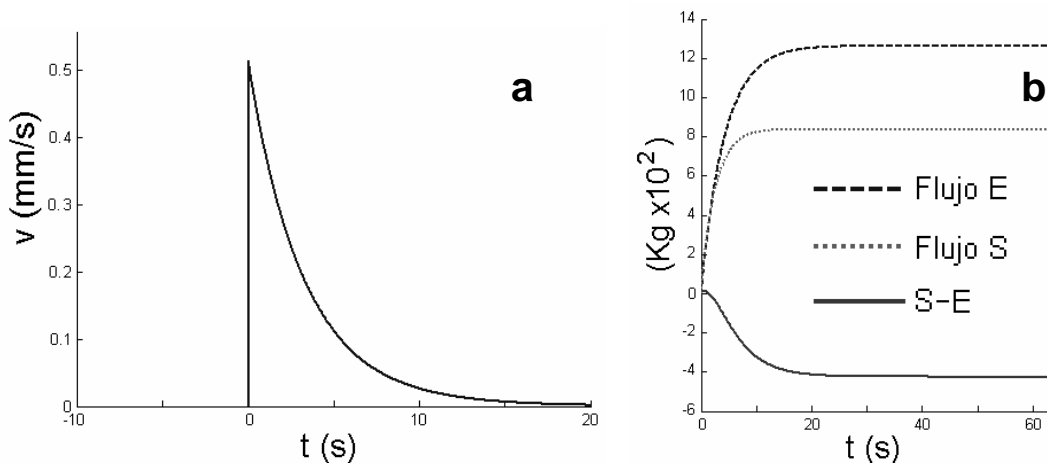


Figura 4.26. a) Velocidad media respecto del tiempo del sistema. b) Flujos de entrada, salida y efectivo (S-E) para el sistema de cavidades acopladas.

El valor del campo de desplazamientos radiales en el sitio de medición (sismograma sintético de desplazamientos) es mostrado en la Figura 4.27.

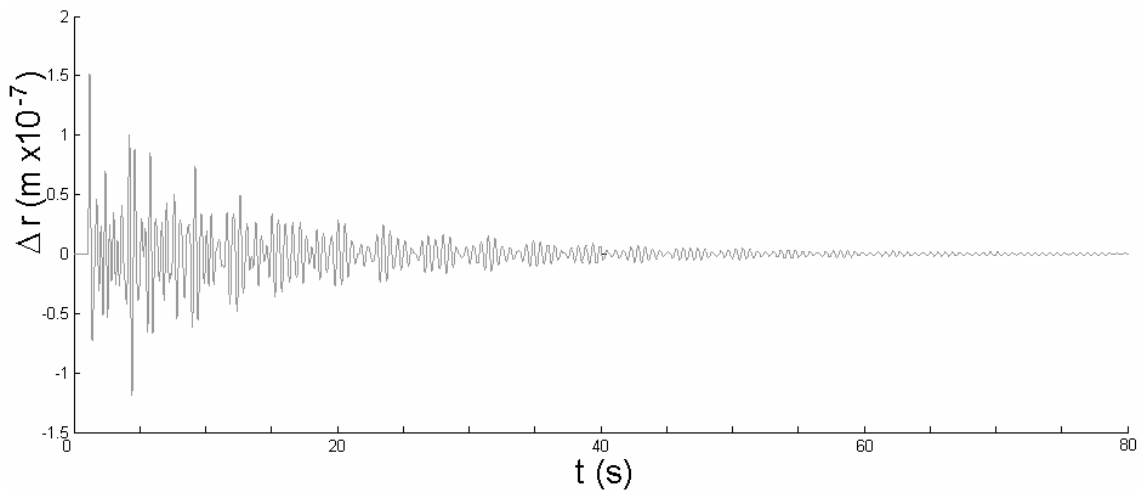


Figura 4.27. Sismograma sintético de desplazamientos. Campo de desplazamientos radiales en el punto de medición.

De igual manera en la Figura 4.28 se ilustra el campo de velocidad radial (sismograma sintético de velocidad radial) y su espectro de frecuencias.

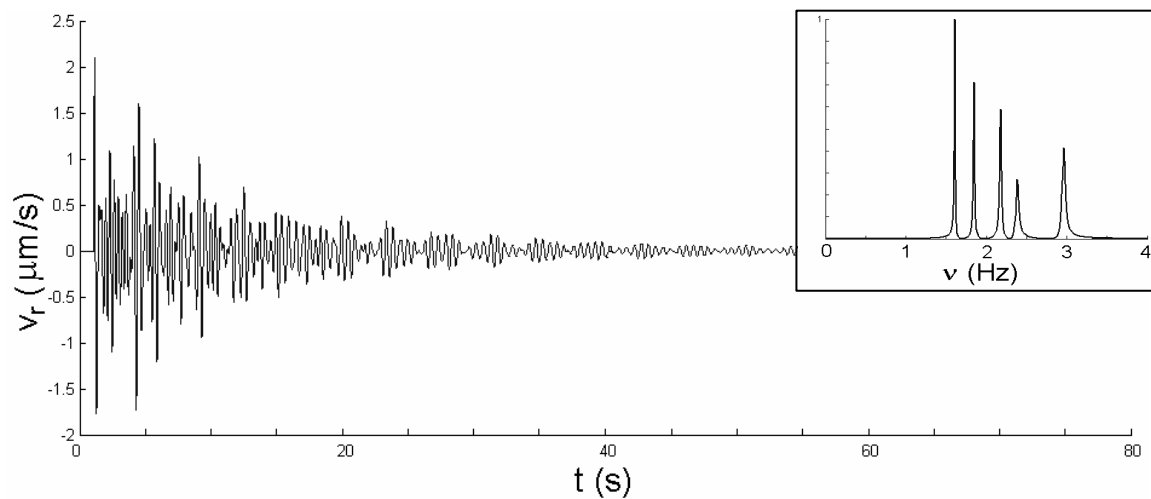


Figura 4.28 Campo de velocidad radial en el punto de medición (sismograma sintético de velocidad radial) y espectro de frecuencias del mismo.

b) Pulso Cuadrado

Para este caso la fluctuación en la presión en la base de la cavidad inferior responde a un pulso cuadrado cuya duración fue de cinco segundos (Figura 4.29), mientras que el valor de la presión superior del sistema permaneció constante.

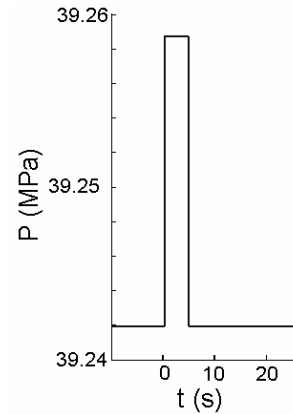


Figura 4.29 Forma de la Presión inferior del sistema en función del tiempo.

Los valores para el valor medio de las velocidades verticales para cada cavidad, así como los flujos de materia que ingresaron y salieron del sistema se ilustran a continuación:

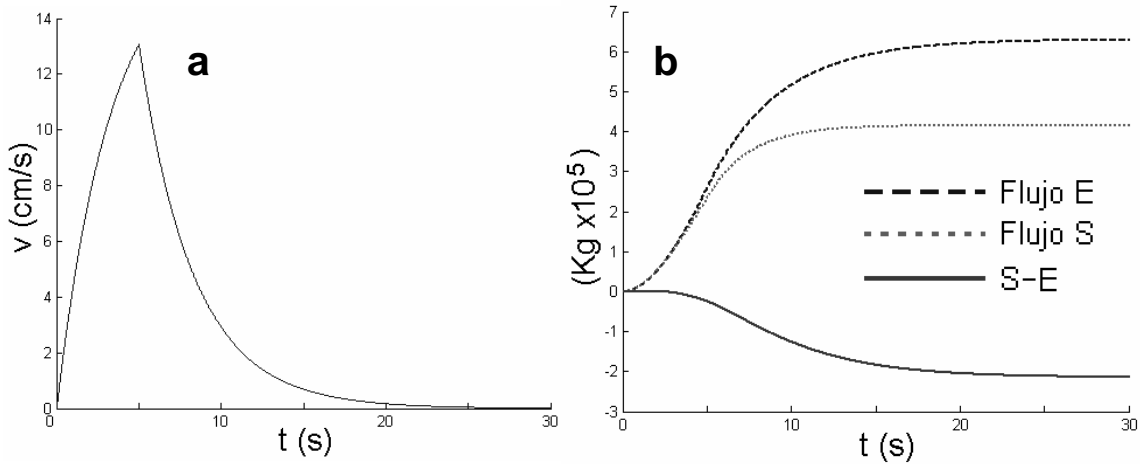


Figura 4.30. a) Velocidad media respecto del tiempo del sistema. b) Flujos de entrada, salida y efectivo (S-E) para el sistema de cavidades acopladas..

El valor del campo de desplazamientos radiales en el sitio de medición (sismograma sintético de desplazamientos) es mostrado en la Figura 4.31.

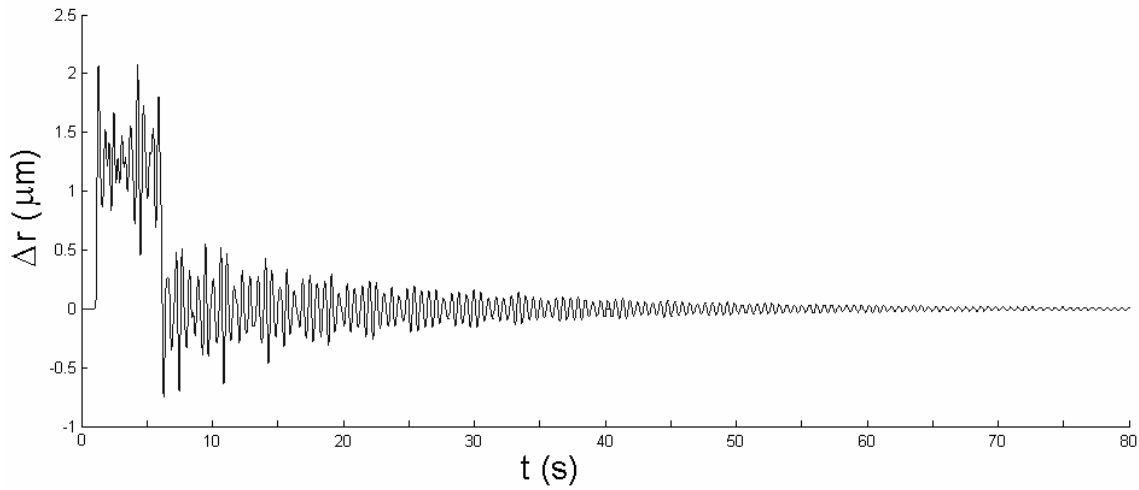


Figura 4.31. Sismograma sintético de desplazamientos. Campo de desplazamientos radiales en el punto de medición.

De igual manera en la Figura 4.32 se ilustra el campo de velocidad radial (sismograma sintético de velocidad radial) y su espectro de frecuencias.

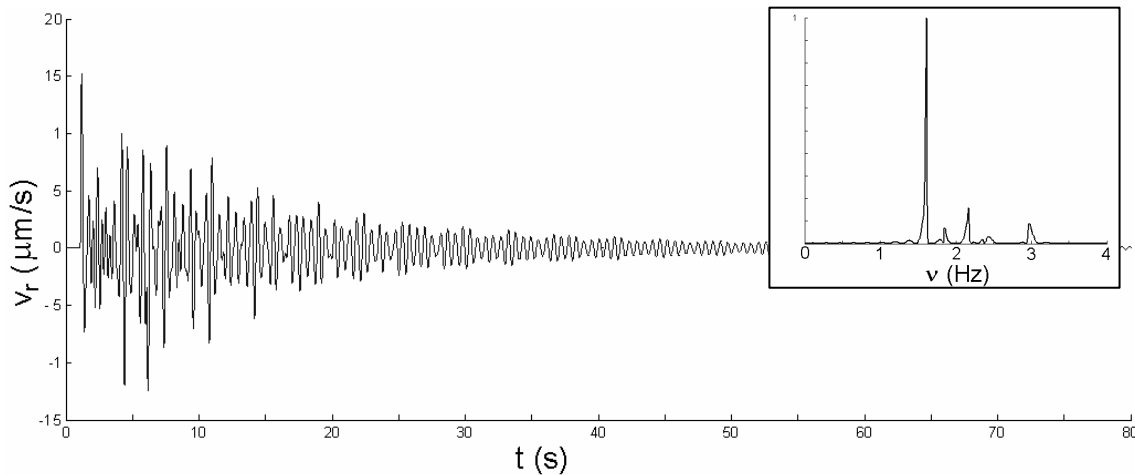


Figura 4.32 Campo de velocidad radial en el punto de medición (sismograma sintético de velocidad radial) y espectro de frecuencias del mismo.

c) Pulso Gaussiano

La perturbación del sistema en la base de la cavidad inferior tiene la forma de una Gaussiana de $\sigma = 0.1$ s. La Figura 4.33 ilustra la excitación del sistema a lo largo del tiempo.

El valor medio de la velocidad vertical del fluido a lo largo de todo el sistema como función del tiempo así como los flujos de materia que ingresaron y salieron del sistema se ilustran en la Figura 4.34:

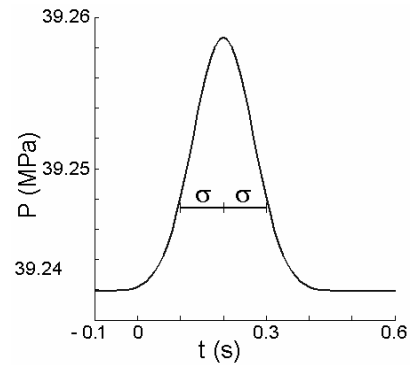


Figura 4.33 Forma de la Presión inferior del sistema en función del tiempo.

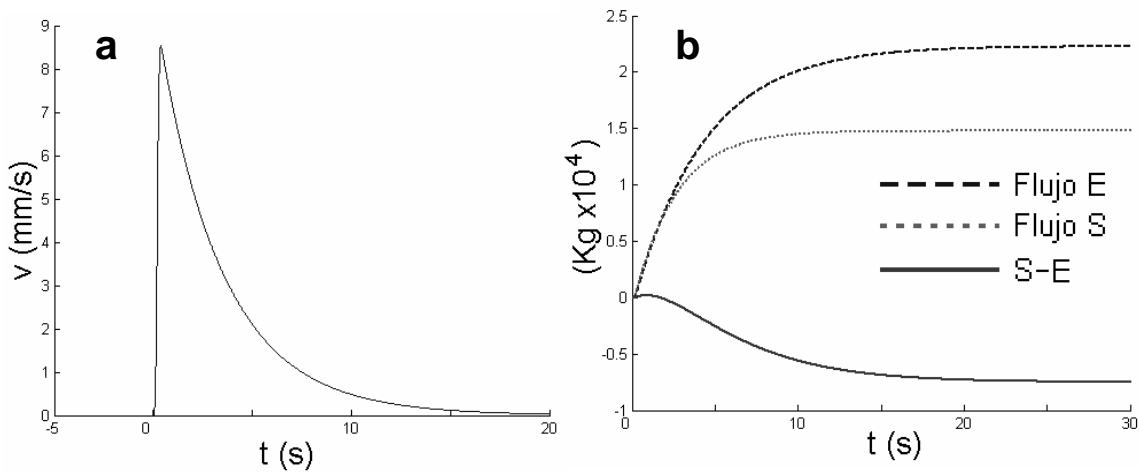


Figura 4.34. a) Velocidad media respecto del tiempo para cada cavidad del sistema. b) Flujos de entrada, salida y efectivo (S-E) para el sistema de cavidades acopladas ..

El valor del campo de desplazamientos radiales en el sitio de medición (sismograma sintético de desplazamientos) es mostrado en la Figura 4.35.

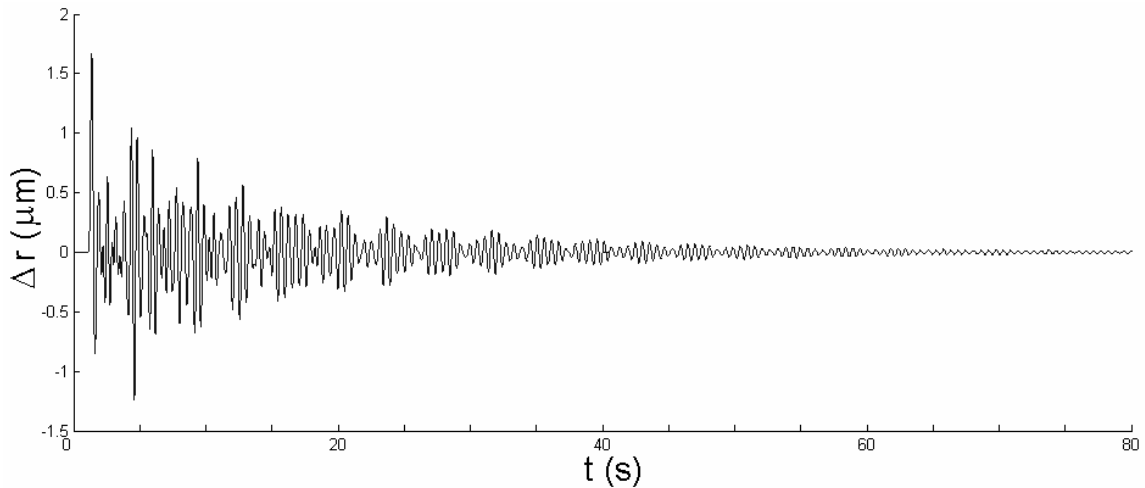


Figura 4.35 Sismograma sintético de desplazamientos. Campo de desplazamientos radiales en el punto de medición.

De igual manera en la Figura 4.36 se ilustra el campo de velocidad radial (sismograma sintético de velocidad radial) y su espectro de frecuencias.

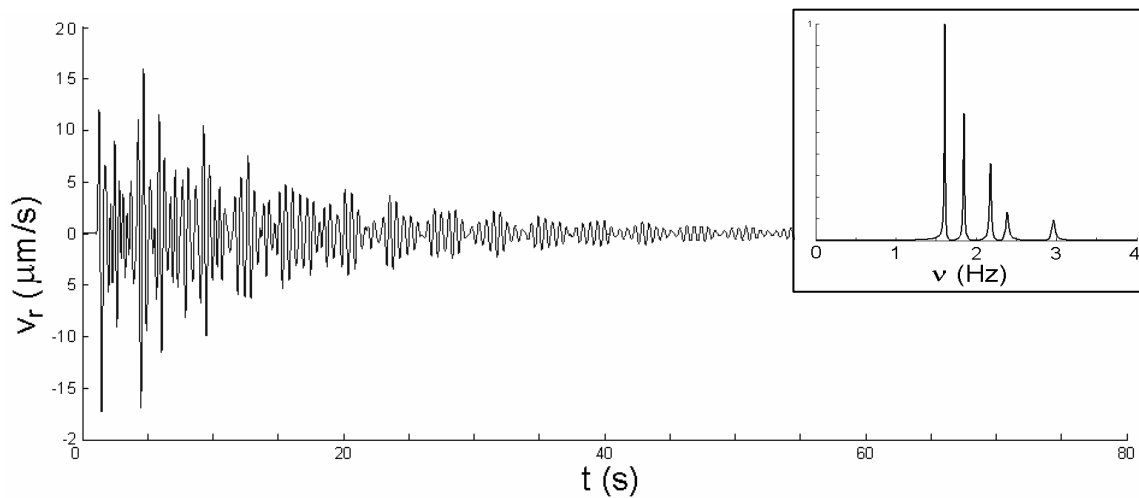


Figura 4.36 Campo de velocidad radial en el punto de medición (sismograma sintético de velocidad radial) y espectro de frecuencias del mismo.

d) Triple Pulso Gaussiano

La forma de la presión en la base de la cavidad inferior del sistema acoplado a lo largo del tiempo es mostrada en la Figura 4.37. Se trata de tres pulsos Gaussianos todos con una $\sigma = 0.1$ s.

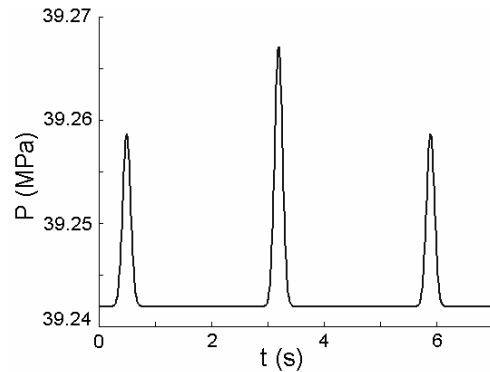


Figura 4.37 Forma de la Presión inferior del sistema en función del tiempo.

El valor de la velocidad vertical promedio del fluido dentro del sistema así como los valores de los flujos como funciones del tiempo son mostrados a continuación:

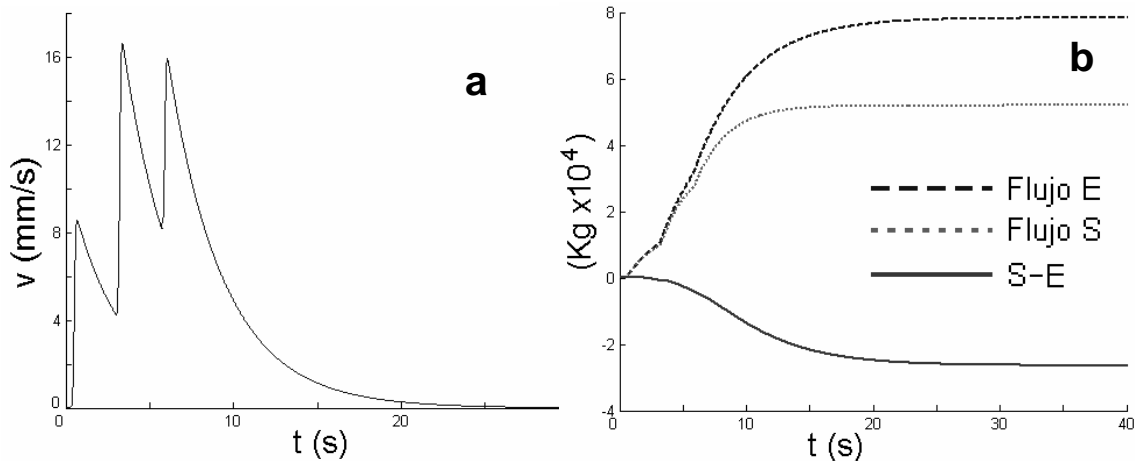


Figura 4.38. a) Velocidad media respecto del tiempo del sistema. b) Flujos de entrada, salida y efectivo (S-E) para el sistema completo.

El valor del campo de desplazamientos radiales en el sitio de medición (sismograma sintético de desplazamientos) es mostrado en la Figura 4.39.

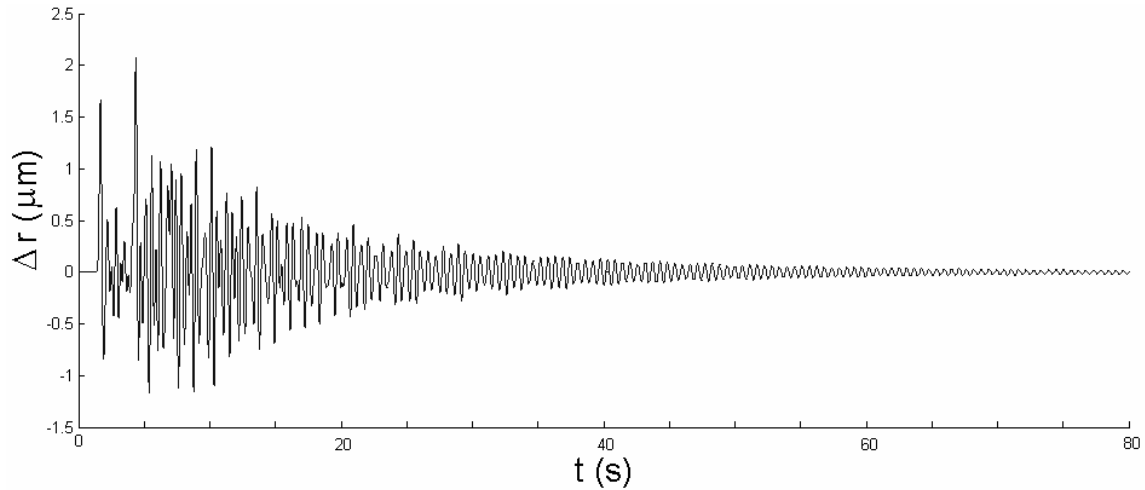


Figura 4.39 Sismograma sintético de desplazamientos. Campo de desplazamientos radiales en el punto de medición.

De igual manera en la Figura 4.40 se ilustra el campo de velocidad radial (sismograma sintético de velocidad radial) y su espectro de frecuencias.

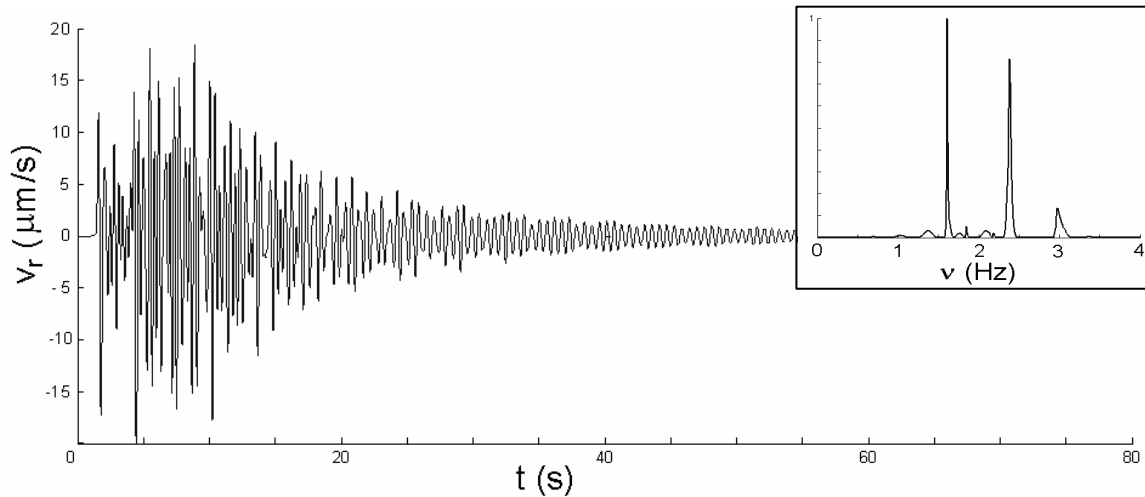


Figura 4.40 Campo de velocidad radial en el punto de medición (sismograma sintético de velocidad radial) y espectro de frecuencias del mismo.

IV.3.ii Andesita Húmeda Profunda

El último ejemplo a tratar posee valores que corresponden a una andesita húmeda, en el caso del fluido; y de una roca andesítica para el caso de la cavidad. Los valores de la densidad y viscosidad del fluido fueron $\rho = 2.4 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$ y $\eta = 10^4 \text{ Pa} \cdot \text{s}$. El medio elástico tuvo una densidad $\rho_0 = 2.7 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$, constantes elásticas $\lambda = \mu = 2 \times 10^8 \text{ Pa}$ y el valor de la constante de disipación fue de $A = 30 \text{ Hz}$. La base del sistema se colocó a una profundidad $h = 4 \text{ Km}$ bajo de la superficie del medio elástico y las mediciones fueron realizadas a una distancia $d = 3 \text{ Km}$ como lo ilustra la Figura 4.41. La señal sintética obtenida tiene una duración de 90 s.

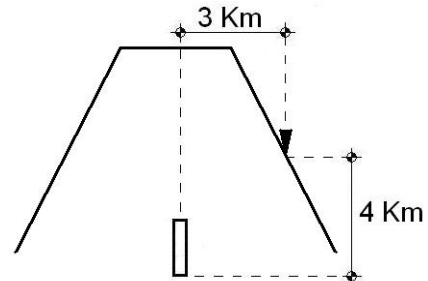


Figura 4.41. Croquis del ejemplo 1.

Los valores geométricos para cada uno de las cinco cavidades acopladas se exponen en la siguiente tabla:

Cavidad	Radio (m)	Longitud (m)	L/R
1	11	350	26.8
2	10	300	25.5
3	9.5	280	25.3
4	9	240	23.0
5	6	120	17.3

a) Pulso de Delta

La forma de la presión utilizada en este experimento es una función Delta de Dirac cuya duración fue de una centésima de segundo y su magnitud fue finita. Esto es ilustrado por la Figura 4.42 mientras que el valor de la presión en el borde superior del sistema permaneció constante.

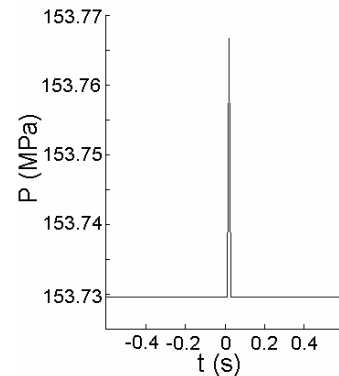


Figura 4.42 Forma de la presión inferior del sistema en función del tiempo.

El valor medio de la velocidad vertical del fluido a lo largo de todo el sistema como función del tiempo así como los flujos de materia que ingresaron y salieron del sistema se ilustran en

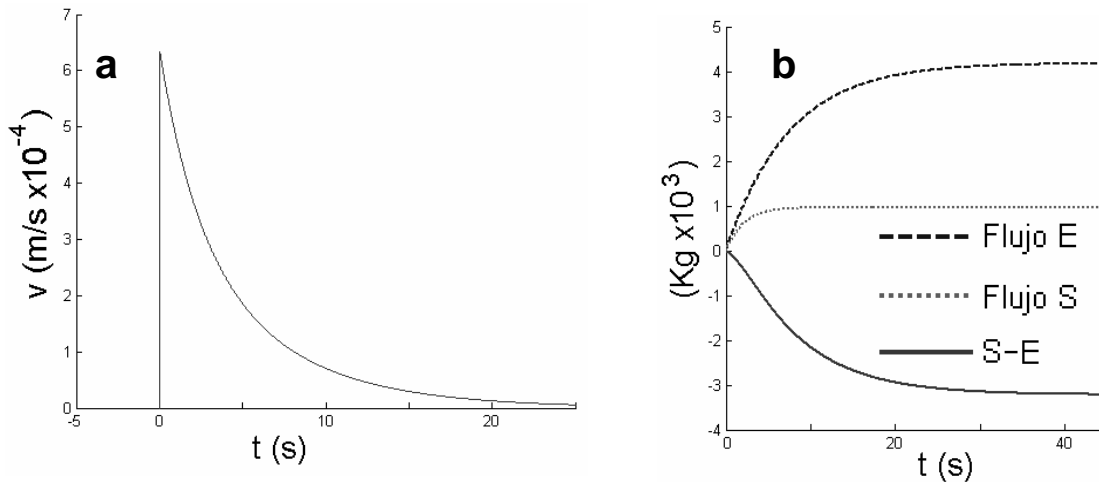


Figura 4.43. a) Velocidad media respecto del tiempo del sistema. b) Flujos de entrada, salida y efectivo (S-E) para el sistema de cavidades acopladas..

la Figura 4.43:

El valor del campo de desplazamientos radiales en el sitio de medición (sismograma sintético de desplazamientos) es mostrado en la Figura 4.44.

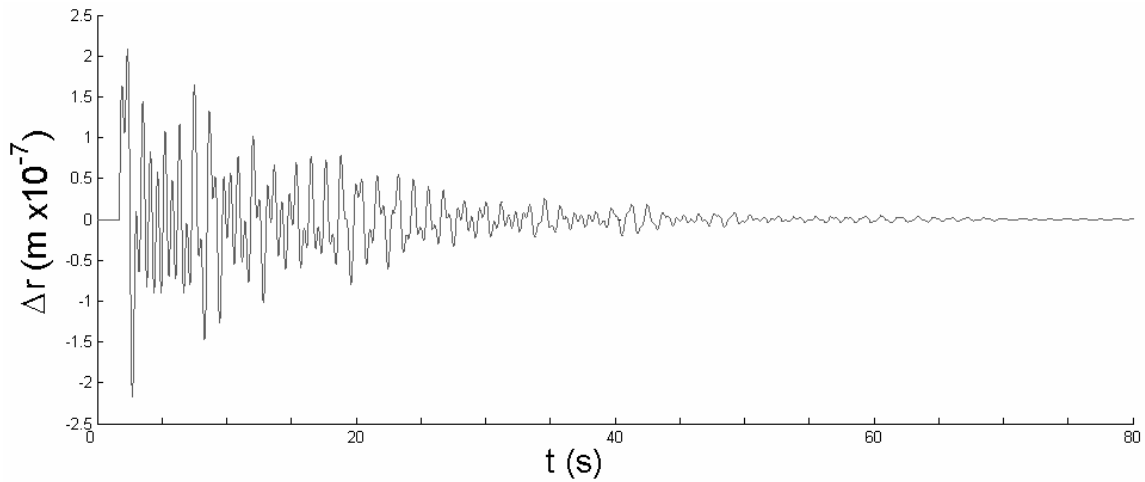


Figura 4.44. Sismograma sintético de desplazamientos. Campo de desplazamientos radiales en el punto de medición.

De igual manera en la Figura 4.45 se ilustra el campo de velocidad radial (sismograma sintético de velocidad radial) y su espectro de frecuencias.

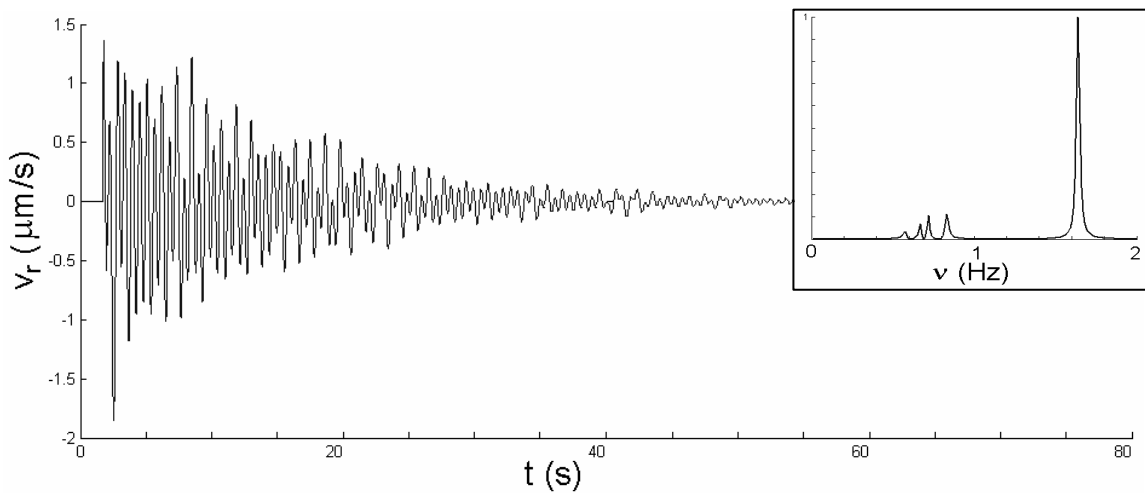


Figura 4.45 Campo de velocidad radial en el punto de medición (sismograma sintético de velocidad radial) y espectro de frecuencias del mismo.

b) Pulso Cuadrado

Para este caso la fluctuación en la presión en la base de la cavidad inferior responde a un pulso cuadrado cuya duración fue de cinco segundos, como se ilustra en la Figura 4.46, mientras que el valor de la presión superior del sistema permaneció constante.

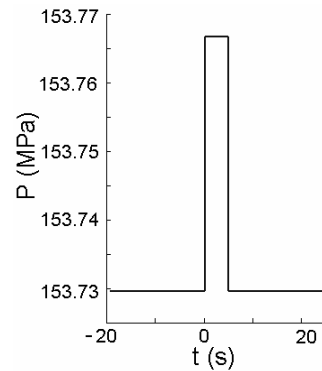


Figura 4.46 Forma de la presión inferior del sistema en función del tiempo.

Los valores para el valor medio de las velocidades verticales para cada cavidad, así como los flujos de materia que ingresaron y salieron del sistema se ilustran en la Figura 4.47.

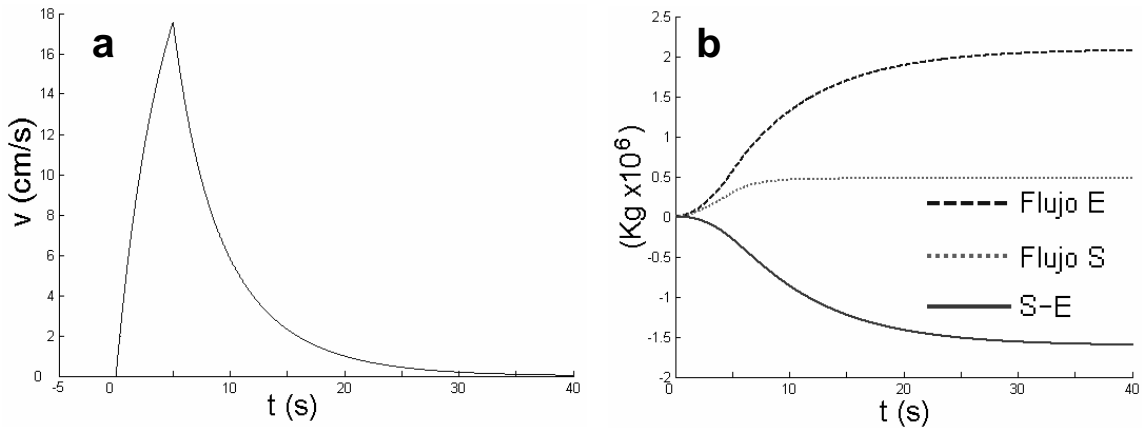


Figura 4.47. a) Velocidad media respecto del tiempo del sistema. b) Flujos de entrada, salida y efectivo (S-E) para el sistema de cavidades acopladas..

El valor del campo de desplazamientos radiales en el sitio de medición (sismograma sintético de desplazamientos) es mostrado en la Figura 4.48.

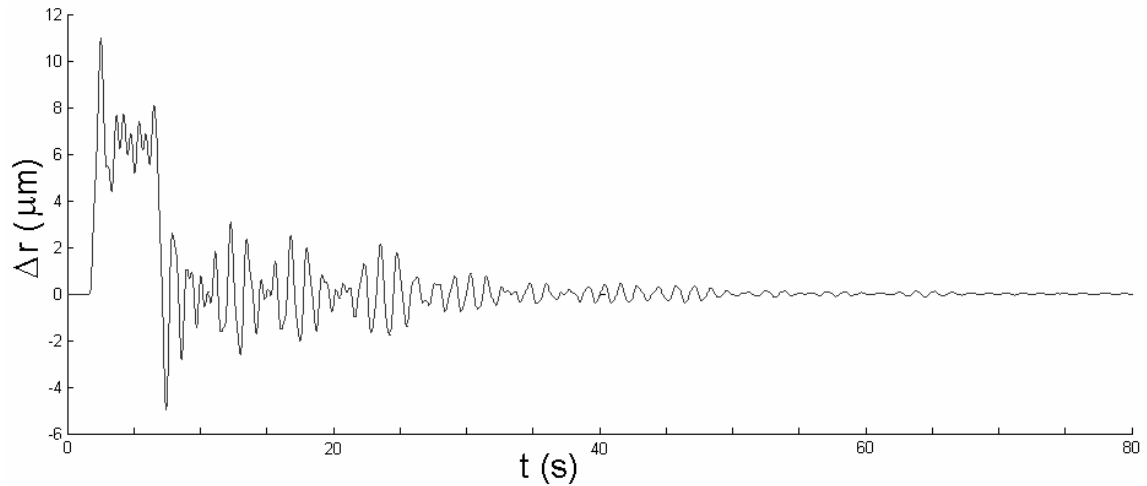


Figura 4.48. Sismograma sintético de desplazamientos. Campo de desplazamientos radiales en el punto de medición.

De igual manera en la Figura 4.49 se ilustra el campo de velocidad radial (sismograma sintético de velocidad radial) y su espectro de frecuencias.

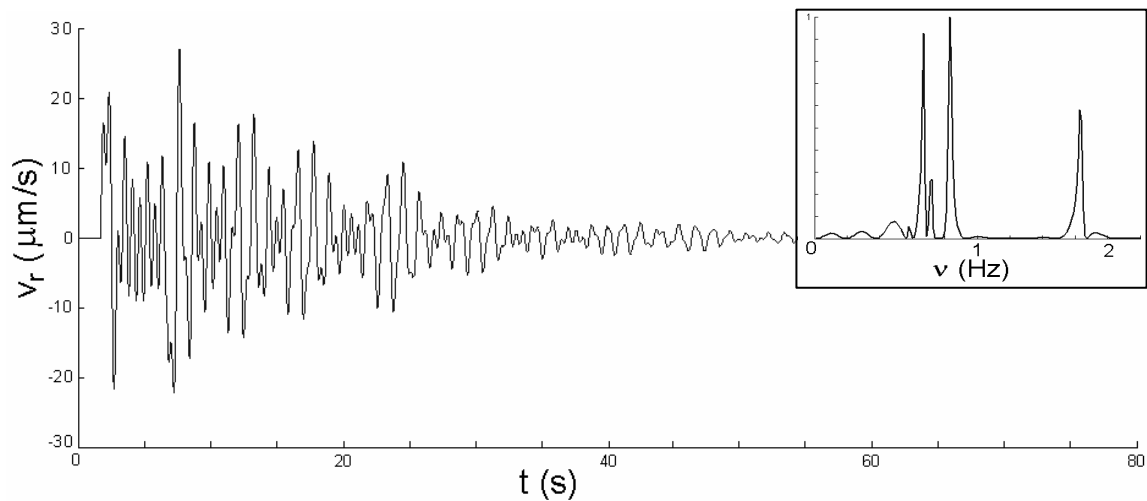


Figura 4.49 Campo de velocidad radial en el punto de medición (sismograma sintético de velocidad radial) y espectro de frecuencias del mismo.

c) Pulso Gaussiano

La perturbación del sistema en la base de la cavidad inferior tiene la forma de una Gaussiana de $\sigma = 0.1$ s. La Figura 4.50 ilustra la excitación del sistema a lo largo del tiempo.

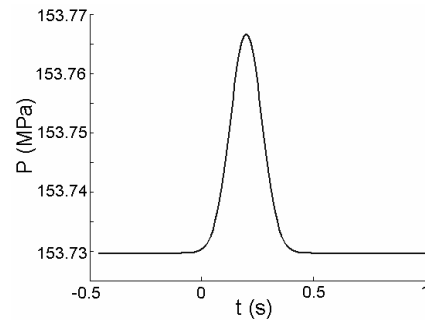


Figura 4.50 Forma de la Presión inferior del sistema en función del tiempo.

El valor medio de la velocidad vertical del fluido a lo largo de todo el sistema como función del tiempo así como los flujos de materia que ingresaron y salieron del sistema se ilustran en la Figura 4.51:

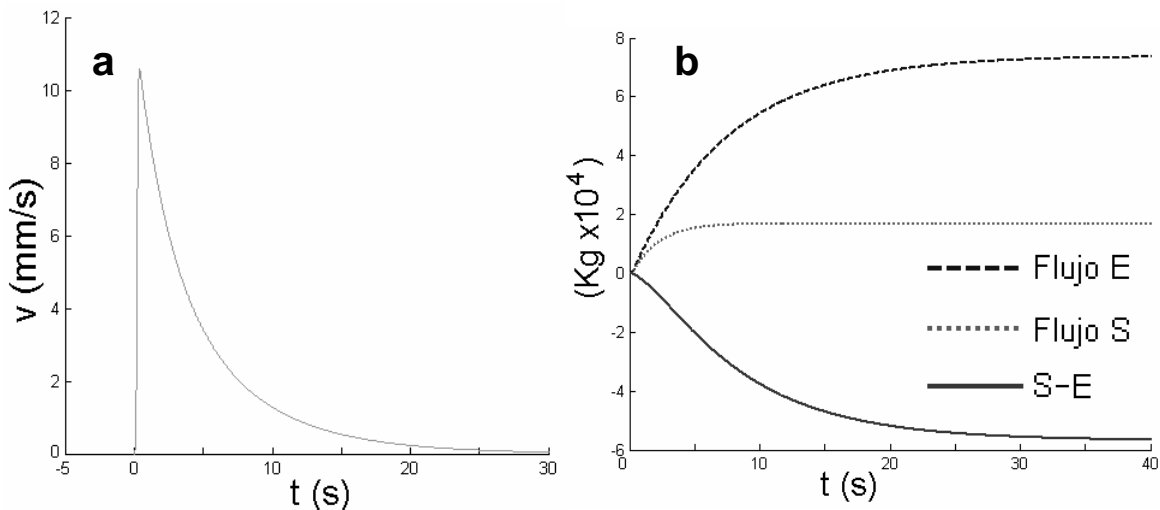


Figura 4.51. a) Velocidad media respecto del tiempo del sistema. b) Flujos de entrada, salida y efectivo (S-E) para el sistema de cavidades acopladas..

El valor del campo de desplazamientos radiales en el sitio de medición (sismograma sintético de desplazamientos) es mostrado en la Figura 4.52.

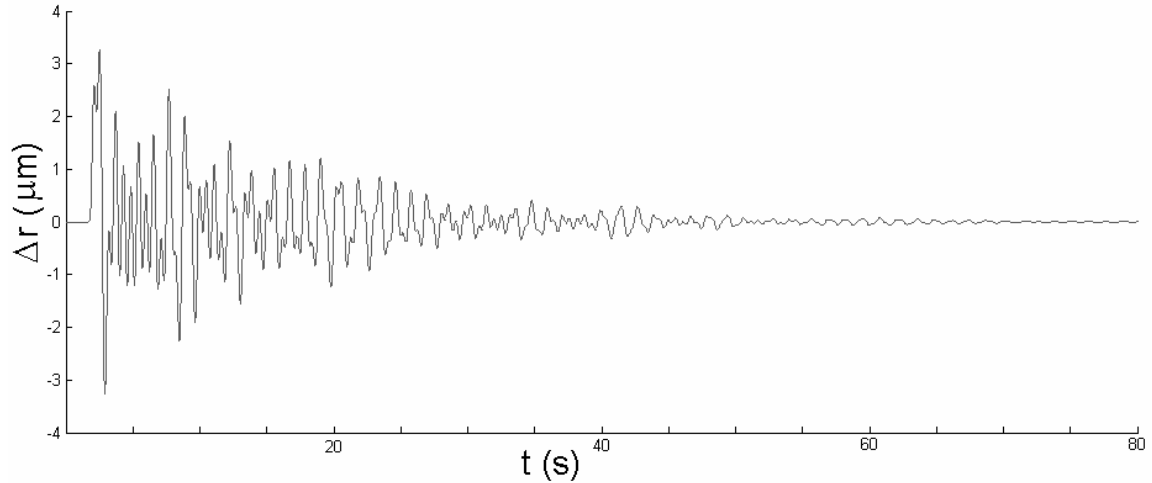


Figura 4.52 Sismograma sintético de desplazamientos. Campo de desplazamientos radiales en el punto de medición.

De igual manera en la se ilustra el campo de velocidad radial (sismograma sintético de velocidad radial) y su espectro de frecuencias.

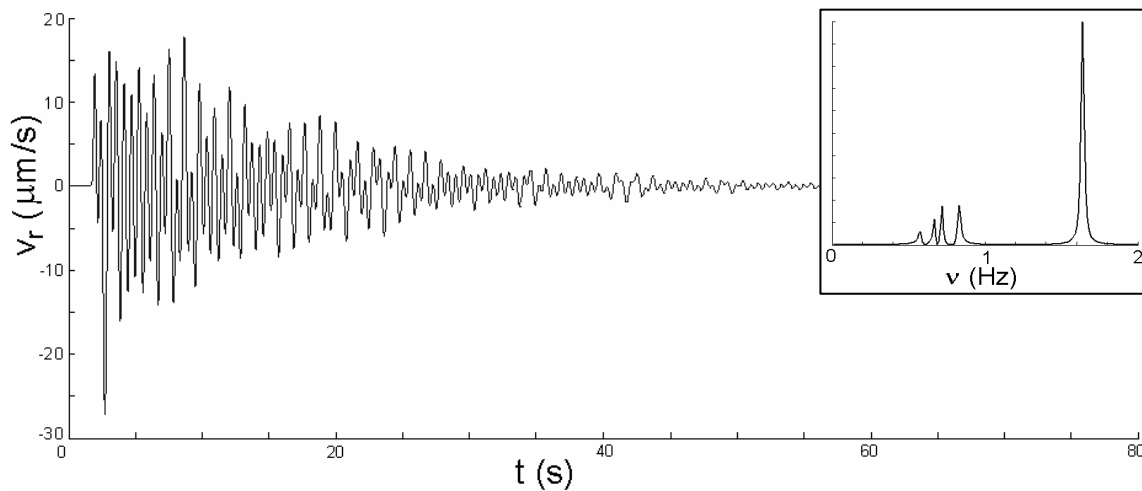


Figura 4.53. Campo de velocidad radial en el punto de medición (sismograma sintético de velocidad radial) y espectro de frecuencias del mismo.

d) Triple Pulso Gaussiano

La forma de la presión en la base de la cavidad inferior del sistema acoplado a lo largo del tiempo es mostrada en la Figura 4.54. Se trata de tres pulsos Gaussianos todos con una $\sigma = 0.1$ s .

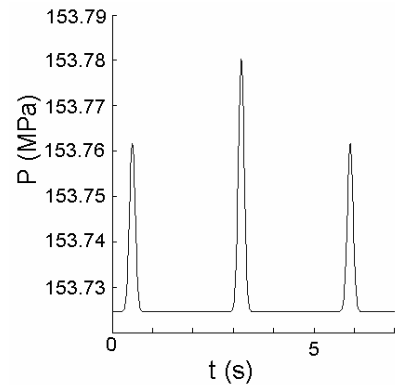


Figura 4.54 Forma de la Presión inferior del sistema en función del tiempo.

El valor de la velocidad vertical promedio del fluido dentro del sistema así como los valores de los flujos como funciones del tiempo son mostrados a continuación:

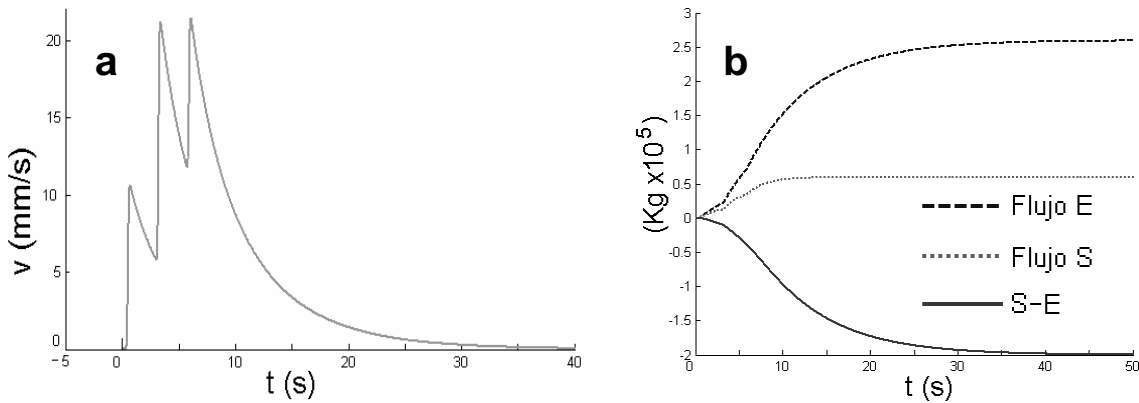


Figura 4.55. a) Velocidad media respecto del tiempo del sistema. b) Flujos de entrada, salida y efectivo (S-E) para el sistema de cavidades acopladas..

El valor del campo de desplazamientos radiales en el sitio de medición (sismograma sintético de desplazamientos) es mostrado en la Figura 4.56.

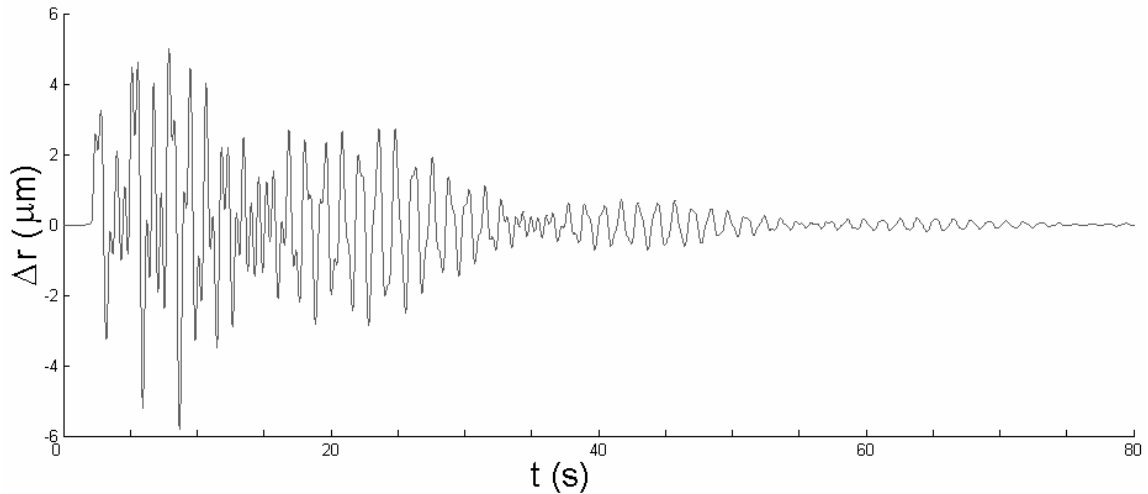


Figura 4.56 Sismograma sintético de desplazamientos. Campo de desplazamientos radiales en el punto de medición.

De igual manera en la Figura 4.57 se ilustra el campo de velocidad radial (sismograma sintético de velocidad radial) y su espectro de frecuencias.

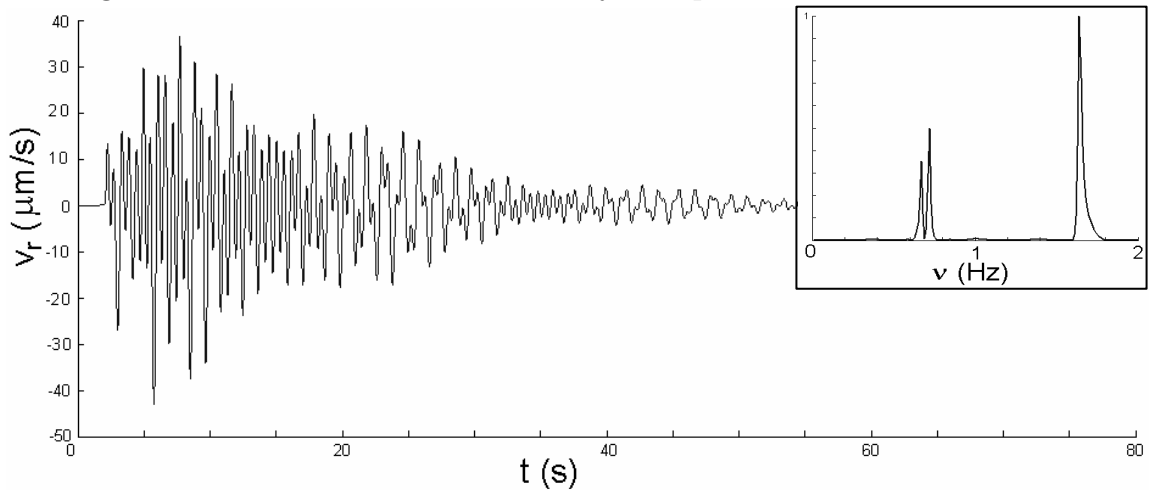


Figura 4.57 Campo de velocidad radial en el punto de medición (sismograma sintético de velocidad radial) y espectro de frecuencias del mismo.

IV.4 DISCUSIÓN

En los ejemplos de la sección anterior se utilizaron distintas formas de la función presión para conocer la respuesta del modelo a dichas perturbaciones. Se decidió variar las excitaciones y no el sistema cavidad-fluido pues, conocidas las propiedades físicas de la roca y del fluido, se pueden acotar las propiedades geométricas del sistema cavidad-fluido que originen respuestas cercanas a las características espectrales deseadas, tal y como se realizó en la sección 2 del presente capítulo.

IV.4.i Acerca de las Frecuencias

Al experimentar con distintas formas de la función presión se obtuvieron diferentes respuestas (sismogramas) para un mismo sistema. Las variaciones principales se registraron en las frecuencias excitadas, para cada caso.

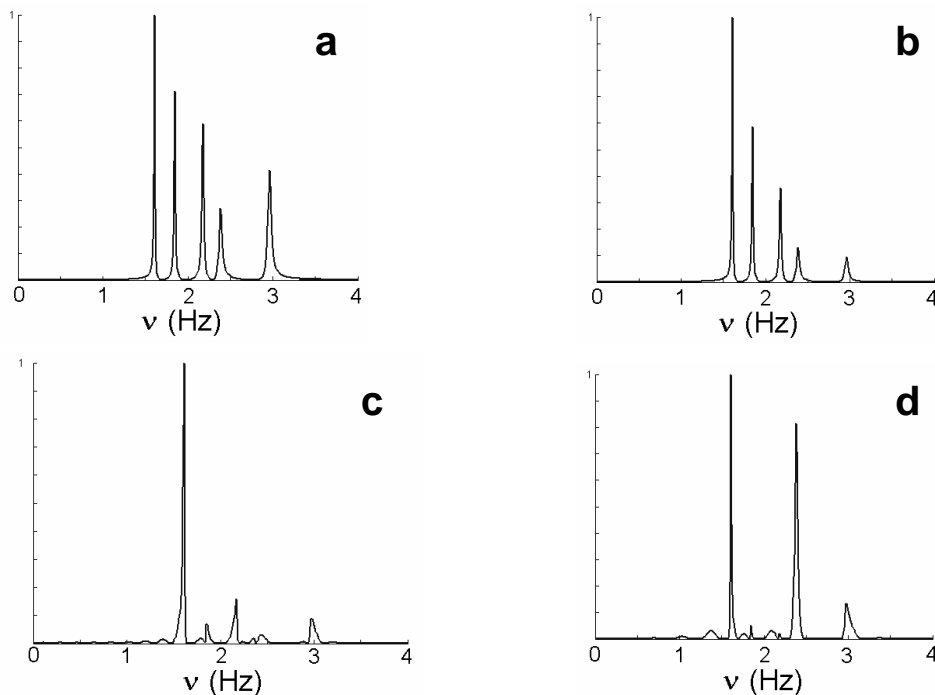


Figura 4.58. Espectros de potencia para un basalto seco. a) Para un pulso de delta. b) Para un pulso gaussiano. c) Para un pulso de cuadrado. d) Para un triple pulso gaussiano.

En las Figura 4.58 y Figura 4.59 se muestran los espectros de potencia de las señales sintéticas expuestas en la sección anterior. En ellas resulta claro el condicionamiento de las frecuencias excitadas al proceso de perturbación. Existiendo las mayores similitudes entre las respuestas obtenidas por medio del pulso de delta y el pulso gaussiano. En el caso del pulso cuadrado y el triple pulso gaussiano se encuentra que comparten similitudes pero no son tan marcadas.

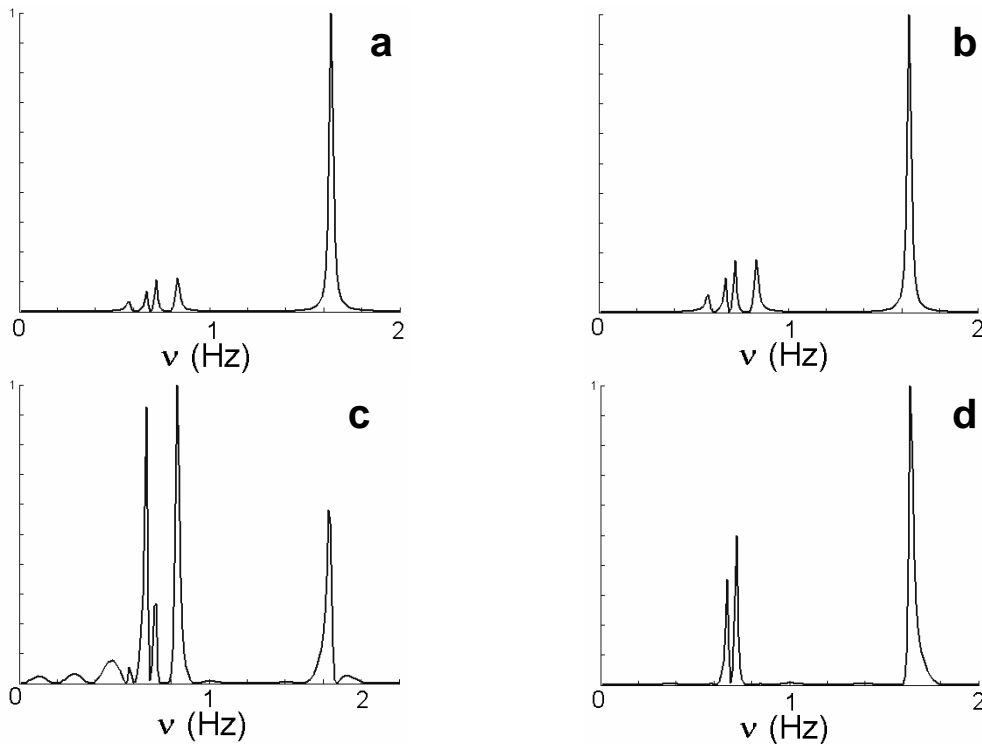


Figura 4.59. Espectros de potencia para una andesita húmeda. a) Para un pulso de delta. b) Para un pulso gaussiano. c) Para un pulso de cuadrado. d) Para un triple pulso gaussiano.

La excitación de distintas frecuencias puede deberse a la respuesta de cada sistema cavidad-fluido a la frecuencia propia de la función excitación. De una manera similar a la que un oscilador forzado resuena o amortigua el actuar de una fuerza, el modelo resulta ser sensible a las características de la función presión que lo perturba. Por lo tanto la respuesta del sistema indirectamente contiene información del proceso de excitación.

De lo anterior se sigue que la forma de la perturbación en la presión de los conductos volcánicos puede condicionar las frecuencias registradas en un sismograma. O también que las señales sísmicas que compartan propiedades espectrales y orígenes espaciales pueden tener un mecanismo de excitación similar. Además que el sismograma puede contener información de las frecuencias del proceso de excitación que le dio origen.

IV.4.ii Flujos

Las perturbaciones en la presión dieron origen a flujos del material contenido en el conducto. La magnitud y duración de dichos flujos estuvieron estrechamente relacionados con las propiedades de la función presión. Siendo proporcionales las magnitudes de los flujos a las de las presiones. (ver Figura 4.26, Figura 4.30, Figura 4.34, Figura 4.38, Figura 4.43, Figura 4.47, Figura 4.51 y Figura 4.55)

Las velocidades verticales promedio para el flujo de magma tuvieron como máximo valor $1.8 \times 10^{-1} \text{ m/s}$ que se registró para el caso de la andesita húmeda sometida a la excitación de un pulso cuadrado y el pulso de delta de Dirac para el mismo caso alcanzó la velocidad mínima de $5 \times 10^{-4} \text{ m/s}$.

A pesar de que las velocidades del flujo de magma resultan pequeñas, estas responden directamente a la duración y magnitud de la perturbación en la presión del conducto. Si el gradiente de presiones se mantiene durante largos periodos tanto tiempo es el que los flujos perdurarán. Lo cual significaría procesos de transporte de volumen proporcional a la duración del fenómeno. De tal manera que al presentarse sismos de larga duración o numerosas señales sísmicas en un corto lapso de tiempo, al ser originadas por perturbaciones de la presión, se podría afirmar que se han llevado a cabo un prolongado proceso o bien múltiples procesos de flujo de material. Lo que significaría acumulación de magma en algún sitio del sistema volcánico.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

V.1 El Modelo Teórico

Haciendo uso de las herramientas desarrolladas en el presente trabajo se construyeron las ecuaciones que modelan el sistema físico cavidad-fluido. Lo cual se realizó sin despreciar ninguno de los términos de las ecuaciones diferenciales que intervienen en el proceso.

Las ecuaciones que resuelven las variables principales del sistema físico componen un sistema diferencial de segundo orden no lineal de dos ecuaciones acopladas:

$$\partial_t \langle w^z \rangle_r = \frac{P_1 - P_2 + \rho g^z L}{\rho L} - \left(\frac{6\eta}{\rho R^2} + \frac{1}{5} \frac{\dot{R}}{R} \right) \langle w^z(t) \rangle_r$$
$$\ddot{R} = - \frac{12}{(36\rho_0 R^2 + 7\rho L^2)} \left(4 \left(1 - \left(\frac{L}{R} \right)^2 \right) \eta + \frac{\rho}{4} \left(\frac{1}{30} \frac{L^2}{R} + R \right) \dot{R} + 3\rho_0 R^2 A \right) \dot{R} +$$
$$- \frac{18}{(36\rho_0 R^2 + 7\rho L^2)} \left(\frac{6}{5} \rho \langle w^z \rangle_r^2 - P_1 - P_2 + \frac{4(\mu + \lambda)}{R_0} (R - R_0) \right) R$$

Dónde $\langle w^z \rangle_r$ representa el valor promedio, respecto de la variable radial, de la velocidad vertical. Siendo R el radio de la cavidad cilíndrica. Por medio de la solución de este sistema diferencial se obtiene la información necesaria para determinar al sistema en todo momento y para toda posición. Puesto que al conocer $\langle w^z \rangle_r$, R , \dot{R} y \ddot{R} , quedan completamente definidas las características físicas esenciales del sistema: velocidad del fluido, presión del fluido y la geometría de la cavidad. Dado que de acuerdo al desarrollo la velocidad radial tiene la forma:

$$v^r(t,r) = \dot{R} \left(\frac{r}{R} \right)^3,$$

mientras que la de la velocidad vertical es:

$$v^z(t,r,z) = \frac{3}{2R^2} (R^2 - r^2) \langle w^z \rangle_r - \left(1 + 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{\dot{R}}{R} z$$

y la del valor promedio de la presión respecto de la variable radial es:

$$\begin{aligned} \langle P(t,z) \rangle_r = & \rho \left(\frac{9 \dot{R}}{5 R} \langle w^z(t) \rangle_r - \frac{P_1 - P_2}{\rho L} \right) \left(z + \frac{L}{2} \right) + \\ & - \rho \left(\frac{77}{15} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{7 \dot{R}}{6 R} + \frac{8 \eta}{\rho R^2} \frac{\dot{R}}{R} \right) \left(z^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right) + \\ & + P_1 - \frac{\rho}{2} \langle v^z(-\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r - \frac{\rho}{2} \langle v^r(-\frac{L}{2}, t)^2 \rangle_r \end{aligned}$$

Es importante resaltar que a pesar de que la mayoría del desarrollo se basa en el uso del valor promedio respecto la variable radial de la velocidad vertical: $\langle w^z \rangle_r$. Se elaboró un método para recobrar la información perdida al colapsar dicha función a su valor promedio. De tal manera que la forma completa de la velocidad vertical $v^z(t,r,z)$ quedó definida.

Las ecuaciones diferenciales que modelan al sistema poseen una serie de propiedades importantes, pues confirman lo esperado en la realidad física.

En primer lugar, a lo que refiere a puntos de equilibrio, se probó que existe un único punto de equilibrio cuyas circunstancias sean físicamente viables; esto es: $v^z, v^r, R \in \mathbb{R}$ con $R > 0$. El punto de equilibrio está determinado por las siguientes ecuaciones:

$$\langle w^z \rangle = \frac{\rho R^2}{6 \eta L} y$$

$$\rho \frac{6}{5} \left(\frac{P_1 - P_2 + \rho L g^z}{6 \eta L} \right)^2 R^4 + \frac{4(\mu + \lambda)}{R_0} R - (P_1 + P_2 + 4(\mu + \lambda)) = 0.$$

La unicidad del punto de equilibrio resulta importante pues significa que si el sistema físico está en un estado de equilibrio, al ser excitado, no pasará a otro estado de equilibrio distinto al inicial. Por lo cual o regresa al estado de equilibrio

o se aleja de él, dependiendo del tipo de equilibrio que se tenga: estable o inestable.

Por lo general los sistemas físicos se estudian cerca de los puntos de equilibrio estable. Por ello se buscaron las condiciones para las cuales el punto de equilibrio del sistema es estable. Se encontraron dos relaciones que aseguran un equilibrio estable. La primera:

$$\mu + \lambda \geq \frac{R_0}{2(R_E - R_0)} \left(\frac{P_1 + P_2}{2} - \frac{3}{5} \rho \langle w^z \rangle_r^2 \right),$$

condiciona las propiedades elásticas y geométricas del medio respecto de las propiedades energéticas del fluido. La cual nos dice que la elasticidad del medio tiene que ser mayor que los esfuerzos del fluido que actúan sobre él. La segunda relación es:

$$A \geq \frac{4}{3R_E^2} \left(\left(\frac{L}{R_E} \right)^2 - 1 \right) \frac{\eta}{\rho_0},$$

que vincula los procesos disipativos y geometría del sistema. Una manera de interpretarla es: que la capacidad de disipar energía del medio elástico tiene que ser superior a la cantidad de energía que el fluido le transmite. Ambas desigualdades concuerdan con lo esperado físicamente pues si el material no es suficientemente elástico y no puede deshacerse del momento y energía transmitidos, en algún momento se vencerá.

Cerca del punto de equilibrio, el radio (R) del sistema físico se comporta como un oscilador amortiguado y forzado. Cuya frecuencia puede ser aproximada a:

$$v \approx \frac{1}{R_E} \left(\frac{2(\mu + \lambda)}{\rho_0 \left(1 + \frac{1}{6} \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{L}{R_E} \right)^2 \right)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R_E}{R_0} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y el tiempo de “vida media” de la perturbación es:

$$\bar{t} = \frac{(36\rho_0 R_E^2 + 7\rho L^2) \ln(2)}{6 \left(4 \left(1 - \frac{L^2}{R_E^2} \right) \eta + 3\rho_0 R_E^2 A \right)}.$$

Para hacer al modelo flexible y aplicable a circunstancias cercanas a la realidad física se encontraron las condiciones a la frontera que deben de cumplir

dos cavidades geoméricamente distintas para que puedan ser consideradas un sólo sistema físico. Dichas condiciones afectan a las presiones en los extremos de las cavidades, en particular a la presión intermedia. Al tener la capacidad de acoplar dos sistemas cavidad-fluido, se pueden acoplar n -sistemas. Haciendo al modelo flexible y adaptable a diversas circunstancias físicas.

También se encuentran aproximaciones del campo de desplazamientos, de velocidades y aceleraciones que la cavidad genera en todo el medio elástico al sufrir deformaciones. Esto resulta especialmente importante pues, en la práctica, este tipo de sistemas son estudiados por medio de estos datos. Esa es la razón por la cual se precisa conocer tal información.

V.2 Volcanismo

El modelo teórico que describe el comportamiento del sistema cavidad-fluido construido en el presente trabajo fue utilizado, en el Capítulo IV, para el estudio de la sismicidad provocada por conductos volcánicos. Llegándose a las siguientes conclusiones:

- Los procesos de deformación geométrica de la roca que contiene a los fluidos volcánicos es un factible generador de señales sísmico-volcánicas de tipo LP.
- El origen de los sismos volcánicos pueden ser las variaciones temporales de la presión en los fluidos magmáticos. Además que la amplitud de la señal sísmica es proporcional, en principio, a las variaciones de la presión.
- Variaciones en el campo de presión del fluido contenido en el conducto generarán flujos. El tamaño y la duración de dichas variaciones, entre otros factores como la densidad y viscosidad del fluido, dominarán la magnitud de los flujos que se den a través de la cavidad.
- Dado que algunos sismos volcánicos pueden ser originados por variaciones en la presión y que dichas variaciones provocan flujos de fluidos geofísicos. Al presentarse episodios sísmicos de larga duración o grupos de señales LP esto significaría variaciones de presión prolongadas.

Lo que se podría interpretar como el proceso de acumulación de material en algún lugar del edificio volcánico.

- La frecuencia del sistema cavidad-fluido está determinada, principalmente, por las propiedades físicas del medio y las magnitudes geométricas de la cavidad. En forma secundaria las propiedades físicas del fluido influyen sobre tal parámetro.
- El proceso de excitación (función presión) condiciona fuertemente las frecuencias dominantes de la señal sintética.
- La señal sísmica contiene información de dos factores: el proceso que perturba al sistema cavidad-fluido y del mismo sistema cavidad-fluido.
- Lo anterior da pauta a concluir que por medio de una señal sísmica se puede conocer, aunque sea parcialmente, algunas características del proceso de excitación de la fuente como el tiempo de la excitación, su magnitud, las frecuencias dominantes y ubicación espacial.

Las conclusiones expuestas concuerdan con el conocimiento que se tiene de la actividad y procesos volcánicos relacionados con la sismicidad volcánica.

V.2 Valores Promedio

Tratamiento Matemático

Con base en ideas de la Mecánica Cuántica, se estudió el proceso de variación de un valor promedio cuando su dominio de integración variaba también. Para estas circunstancias, se demostró que la variación del valor promedio no es equivalente al valor promedio de la variación, i.e., los operadores de diferenciabilidad y de valor promedio no conmutan. La regla de conmutación encontrada fue:

$$\begin{aligned} \left[\partial_x, \langle \rangle_y \right] f(x,y) &= \langle f(x,y) \rangle_y - \langle \partial_x f(x,y) \rangle_y \\ &= -\frac{\gamma_x}{\gamma} \left(\langle f(x,y) \rangle_y - f(x,\gamma) \right) \end{aligned}$$

siendo γ el dominio de integración para el valor promedio. Claramente si el dominio de integración es constante bajo el parámetro x o que se cumpla que $\langle f(x, y) \rangle_y \equiv f(x, \gamma)$, el conmutador se anulará y por lo tanto se dará la conmutación, de otra manera no será posible.

Método

Lo trascendente de esta relación es que brinda la oportunidad de construir un método para el trabajo matemáticamente correcto de ecuaciones diferenciales por medio de los valores promedio sin pérdida de información. Esto permite hacer estudios y desarrollos más cercanos a la realidad física.

El método se basa en la relación de conmutación enunciada. Primero se han de plantear las ecuaciones a usar. Después se aplica el operador de valor promedio a toda la ecuación, recordando que es un operador lineal. Finalmente se utiliza la regla de conmutación para obtener la forma correcta de la ecuación diferencial expresada por valores promedio respecto de alguna coordenada.

V.1 Extensión de la Ecuación de Continuidad

Uno de los resultados más importantes obtenidos en este trabajo es sentar la necesidad de ampliar la ecuación diferencial de continuidad. Esto es de suma importancia pues dicha ecuación es una herramienta fundamental en muchas áreas de la Física.

En este trabajo se demostró que la ecuación diferencial de continuidad, tal y como se conoce, no es adecuada para fenómenos donde se tratan volúmenes finitos que varían en el tiempo. Pues se demostró que la ecuación diferencial de continuidad correcta para una geometría cilíndrica que varía en el tiempo está dada por la ecuación I (2.27):

$$\nabla \circ (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial_t (\rho R)}{R}$$

V.5 Final

Ha de mencionarse que la solución del modelo, al ser solamente la integración de dos ecuaciones diferenciales, resulta ser económica en múltiples aspectos, en particular en tiempo de solución y capacidad de cómputo necesaria para ello. Esto resulta ser una de sus fuertes ventajas pues se puede obtener un resultado aproximado a la realidad física con una rapidez muy grande, a diferencia de otros métodos.

El modelo superó las expectativas iniciales de este trabajo, pues a lo largo de su desarrollo se generaron resultados secundarios que permitieron profundizar en el estudio de los medios deformables y teoría de los valores promedio así como su implementación en el proceso de solución de ecuaciones diferenciales.

Finalmente es importante hacer notar que el modelo puede ser utilizado para estudiar distintos sistemas físicos naturales y no naturales. Ejemplos de estos son los sistemas hidrotermales, termoeléctricos, hidroeléctricos y de extracción petrolera. Pero también se debe de decir que para realizar un estudio más preciso de la actividad volcánica es una mejor alternativa utilizar el método de diferencias finitas. El cual no fue empleado en este trabajo por ser considerado para estudios posteriores.

INTRODUCCIÓN

Esta sección tiene un motivo: dotar al lector del vocabulario y notación usados a lo largo del presente trabajo. Se decidió incluir este apéndice pues no es generalizado el uso de la herramienta tensorial y menor es la manera en que en este trabajo se emplea.

A.1. Notación

Se escribirá a los tensores de rango $\binom{n}{m}$ utilizando la notación de Einstein¹ (indicial). Si $\{\hat{e}_i\}$ es base de un espacio lineal de dimensión finita (n) , se suele escribir cualquier vector de dicho espacio como²:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n a_i \hat{e}_i$$

La idea, en la notación indicial de Einstein, es que si uno conoce la dimensión del espacio, esto es suficiente para llevar a cabo la suma, si los índices se ponen de la manera adecuada. En el ejemplo anterior, resulta claro que la suma es sobre los índices i 's. Sin embargo hay operaciones más complejas, como el producto interior. El producto interior es una transformación bilineal, que tiene un tensor asociado de rango $\binom{0}{2}$. Esto significa que toma dos vectores y arroja un escalar.

En el caso de una geometría euclidiana se tiene que $\hat{e}_i \circ \hat{e}_j = \delta_{ij}$, por ello:

$$\mathbf{v} \circ \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n (v_i w_j) \hat{e}_i \circ \hat{e}_j = \sum_{i=1}^n (v_i w_j) \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n v_i w_i$$

¹ En esta notación la letra del índice es arbitraria pues sólo, cuando un índice se repite en una ecuación cobra importancia significando suma sobre todas las dimensiones en las que se esté trabajando. En particular, si se usan las literales i, j o k no se debe pensar que indican alguna dirección en el espacio euclideo tridimensional.

² Nótese que el tensor \mathbf{v} se escribió en “negritas”.

Apéndice A

Se observa de nuevo que los índices repetidos son sobre los que corre la suma. En esto es en lo que se fundamenta la notación de Einstein. En este trabajo será lo mismo escribir: $\mathbf{v} \circ \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n v_i w_i = v_i w_i$. Sólo que existe un pequeño detalle. En las siguientes secciones, dado que no se trabaja en un espacio euclídeo, existirá una diferencia entre el espacio vectorial y su espacio dual o cotangente. Por ello, el lector verá coeficientes con superíndices y con subíndices. Cada uno miembro de un diferente espacio.

Se tendrá que $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$ son una base para el espacio dónde existe el vector \mathbf{v} . El conjunto de los $\{\omega^k\}$ es una base para el espacio dual (Friedberg, 1984) del espacio generado por los $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$. Generalmente a los tensores con súper índice se les llama vectores o tensores de rango $\binom{1}{0}$ y a los tensores con subíndice se les asigna el nombre de unoformas o tensores de rango $\binom{0}{1}$ ³. Cuando el tensor muestra más de un índice, se le nombra como tensores de rango $\binom{n}{m}$.

A.2 Producto interior y la Métrica

El producto interior es una función $\mathbf{g} \cdot \rightarrow$. $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con ciertas propiedades y explicarlas todas está más allá de la finalidad de este apartado. Sólo se discutirán las importantes para este trabajo.

Se sabe que $\mathbf{v} \circ \mathbf{w} = v^i w^j \hat{\mathbf{e}}_i \circ \hat{\mathbf{e}}_j = v^i w^j \delta_{ij} = v^i w_i$, esto para una base cartesiana. Dado que el producto interior es una forma bilineal (Friedberg, 1984)⁴, tiene una matriz asociada, dicha matriz es un tensor $\binom{0}{2} \cdot \rightarrow$. $\mathbf{g} = g_{ij} \tilde{\omega}^i \tilde{\omega}^j$ cuyo nombre es tensor métrico. Algunas propiedades de la métrica son:

- i) Es una biyección entre el espacio vectorial y su espacio dual. Por lo cual si $\mathbf{v} = v^i \hat{\mathbf{e}}_i \Rightarrow \mathbf{g}\mathbf{v} = (g_{ij} v^i) (\hat{\mathbf{e}}_j \tilde{\omega}^j) \tilde{\omega}^i = w_j g_i^j \tilde{\omega}^i = w_j \tilde{\omega}^j = \mathbf{w}$.
- ii) Es simétrico: $g_{ij} = g_{ji}$ y es la delta de Kroneker del espacio.

³ Desde principios del siglo XX hasta poco después de su primera mitad, a los vectores también se les llamaba tensores contravariantes y a las unoformas se les conocía como tensores covariantes. Esta nomenclatura se encuentra en desuso.

⁴ En la literatura, en el capítulo 7, se hace una discusión bastante clara de los espacios de formas bilineales.

A.3 Derivadas

A lo largo de este trabajo se utilizarán varias notaciones para la derivada parcial, estas formas son las convencionales⁵:

$$\frac{\partial v}{\partial x^j} = \partial_j v = v_{,j}$$

Para referenciar la derivada parcial temporal se utilizarán:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \partial_t v = \dot{v}$$

En un sistema cartesiano, el término $\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j}$ se anula, pero en lo general esto no ocurre. Por ello se recurre a la siguiente definición:

$$\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \hat{e}_k$$

Donde Γ_{ij}^k se le conoce como símbolo Christoffel⁶. Existe una estrecha relación entre los símbolos Christoffel y la Métrica:

$$\Gamma_{\beta\mu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (g_{\gamma\beta, \mu} + g_{\gamma\mu, \beta} - g_{\beta\mu, \gamma}) \quad (\text{A.1})$$

De la ecuación resulta claro que $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$. Con esto se define la Derivada Covariante para vectores⁷:

$$\nabla_k v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i v^j = v^i_{,j} + \Gamma_{jk}^i v^j \quad (\text{A.2})$$

Lo excepcional de esta definición es que la derivada covariante es válida para todo tipo de geometría. Únicamente los símbolos Christoffel han de ser

⁵ Otras notaciones para denotar derivada parcial es la usada en ecuaciones diferenciales parciales siendo $\frac{\partial v}{\partial z} = v_z$.

En este trabajo se utiliza la notación ortodoxa en la física.

⁶ Los símbolos Christoffel no son tensores a pesar de que su apariencia sugiera lo contrario, pues no se transforman como tales.

⁷ En algunas referencias se utiliza para la derivada covariante: $\nabla_\alpha \rightarrow |_\alpha$. En otros casos la notación $\nabla_\alpha \rightarrow ;_\alpha$ es utilizada.

Apéndice A

ajustados en el caso particular. La derivada covariante en el caso de las uno-formas adquiere la siguiente forma⁸:

$$\nabla_k w_j = \frac{\partial w_j}{\partial x^k} - \Gamma_{jk}^i w_i = w_{,j} - \Gamma_{jk}^i w_i \quad (\text{A.3})$$

Una de las importantes propiedades de la derivada covariante es que $\nabla_k g_{ij} = 0$. Además por medio de la derivada covariante los operadores diferenciales del cálculo adquieren la siguiente forma⁹:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &\rightarrow \nabla_k v^i & \nabla \circ \mathbf{v} &\rightarrow g_i^k \nabla_k v^i = \nabla_k v^k \\ \nabla^2 \mathbf{v} &\rightarrow \nabla^j \nabla_j v^k & \nabla \times \mathbf{v} &\rightarrow \varepsilon^{ij}_k \nabla_j v^k \end{aligned}$$

A.4 Geometría Cilíndrica

Para una geometría sencilla, como es el caso de la cilíndrica, la métrica y su inversa resultan sencillas:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Utilizando la ecuación (A.1), los símbolos Christoffel adquieren la siguiente forma:

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r \quad \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{jk}^z = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\Gamma_{rr}^r = \Gamma_{\theta r}^r = \Gamma_{\theta\theta}^\theta = \Gamma_{zz}^r = \Gamma_{zz}^\theta = \Gamma_{\theta z}^\theta = 0$$

y por supuesto de (A.4) se sigue:

$$\delta_j^i = g_j^i = g^{iv} g_{vj} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

⁸ En Shutz, 1998, en el apartado de Prefacio a Curvatura se dan demostraciones bastante económicas y fáciles de comprender de lo enunciado a lo que respecta a la derivada covariante.

⁹ ε^{ijk} conocido como el tensor de Levi-Chivita, se puede encontrar en cualquiera de los libros de elasticidad de las referencias.

Apéndice
B

ELEMENTOS GEOLÓGICOS

Composición química de los componentes más comunes de los magmas (lavas)

Mineral (compuesto)		Composición Química
Olivino		$(\text{Mg,Fe})_2 \text{SiO}_4$
Piroxeno		$(\text{Mg,Fe}) \text{SiO}_3$
Anfibol		$\text{Ca}_2 (\text{Mg,Fe}) \text{Si}_8 \text{O}_{22} (\text{OH})_2$
Mica	Biotita	$\text{K} (\text{Mg,Fe}) \text{AlSi}_3 \text{O}_{10} (\text{OH})_2$
	Moscovita	$\text{KAl}_2 (\text{AlSi}_3 \text{O}_{10}) (\text{OH})_2$
Feldespato	Orosa	$\text{KAlSi}_3 \text{O}_8$
	Plagioclasa	$(\text{Ca,Na}) \text{KAlSi}_3 \text{O}_8$
Cuarzo		SiO_2

Tabla B. 1. Silicatos comunes. Adaptado de (Tarbuck, 1999).

Serie de Bowen

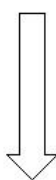
Temperatura (acidez)	Serie discontinua de cristalización	Serie continua de cristalización	Magma (roca)
+ (-)  - (+)	Olivino	Rico en Ca	Komatita (peridotita)
	Piroxeno	Feldespato plagioclasa	Basalto (gabro)
	Anfibol Mica biotita	Rico en Na	Andesita (diorita)
	Feldespato potásico + Mica moscovita + Cuarzo		Riolita (granito)

Tabla B. 2. Serie de Bowen.

Apéndice B

Estructura de la Tierra:

- B) Núcleo Interior (sólido): 1278 km.
- F) Núcleo Exterior (líquido): 2210 km.
- A) Manto (Líquido-Sólido): 2855 km.
- C, E) Corteza (Sólido): 30 km.

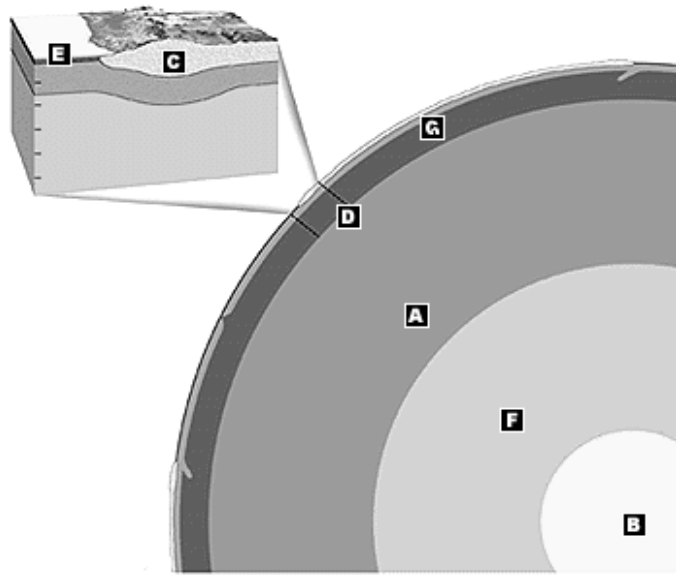


Figura B.1. Estructura de la Tierra, en proporción correcta.

Los datos en la parte superior muestran los espesores de las distintas capas que conforman la Tierra. El criterio de división se fundamenta en las características físicas de cada sección.

Apéndice
C

SÍMBOLOS

1 Símbolos Matemáticos

$A \Rightarrow B$	Si A, entonces B.
$A \Leftrightarrow B$	A sí y sólo si B.
\therefore	Por lo tanto.
$\dot{\rightarrow}$	Tal que.
\forall	Para todo.
\wedge, \vee	“y” y “o” lógicos.
\in, \notin	Elemento de, No es elemento de.
\mathbb{R}, \mathbb{C}	Campo de los Reales, campo de los Complejos.
C^n	Conjunto de todas las funciones cuya n-ésima derivada sea continua.
$\sum_{n=1}^N a_n$	La suma de los números $a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} + a_N$
$\langle f \rangle_x$	Valor esperado de f respecto de la variable x.
$\frac{\partial f}{\partial x^j} = \partial_{x^j} f = \partial_j f = f_{,x^j}$	Derivada parcial de f respecto de la coordenada j-ésima.
\hat{e}_j, \tilde{w}^j	Vector y uno-forma bases unitarios de la dirección j.
g_{ij}, g^{ij}, \circ	Tensor métrico, inverso del tensor métrico, producto interior o punto.
f^i, h_i	La coordenada i-ésima del vector f y de la unoforma h .
$\varepsilon_k^{ij}, \times$	Tensor de Levi-Chivita, producto cruz o exterior.
$\Gamma_{\beta\mu}^\alpha$	Símbolo Christoffel.
$\nabla_k f^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i f^j$	Derivada covariante del vector f^i .
$\partial\Omega$	Frontera del conjunto Ω .
$\text{Re}(\lambda), \text{Im}(\lambda)$	Partes real e imaginaria del número complejo λ .

2 Símbolos Físicos

ρ	Campo escalar densidad.
η, ξ	Campos escalares primer y segunda viscosidad.
v^j	Campo vectorial de velocidades.
u^j	Campo vectorial de desplazamientos.
R, R_0, R_E	Radio de la cavidad cilíndrica, radio inicial y radio en equilibrio de la cavidad.
L	Altura de la cavidad cilíndrica.
g^j	Campo vectorial de aceleraciones gravitacionales.
τ^{ij}	Tensor de esfuerzos.
e^{ij}	Tensor de deformaciones.
λ, μ	Constantes de Lamé.
A	Constante disipativa del material elástico.
t, r, θ, z	Variables independientes: tiempo, distancia radial, desplazamiento angular y altura.
$\dot{f} = \partial_t f = \frac{\partial f}{\partial t} = f_{,t}$	Derivada parcial respecto del tiempo.
$\mathcal{R}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon^c$	Número de Reynolds y número crítico de Reynolds.
α, β	Rapidez de ondas longitudinales y transversales.
m, s, K, kg	Abreviación de metro, segundo, kelvin, kilogramo.
Pa, N, J, W, Hz	Abreviación de pascal, newton, joule, watt, hertz.

REFERENCIAS

1 LIBROS

- [1] AKI, Keitti. *QUANTITATIVE SEISMOLOGY. Theory and Methods. Volume 1.* Edit. W. H. Freeman And Company. U. S. A., 1980. p. 557.
- [2] APOSTOL, M. Tom. *Análisis Matemático.* Edit. Reverté S. A. Segunda Edición, España, 1989. pp. 596.
- [3] APOSTOL, M. Tom. *CALCULUS. Volumen 2.* Edit. Reverté S. A. Segunda Edición, México, 2001. pp. 813.
- [4] ARAÑA, Saavedra Vicente. *VOLCANOLOGÍA.* Edit. Rueda. Primera edición, Madrid, España, 1984. pp. 510.
- [5] ARAÑA, Martí-Vicente Joan. *LA VOLCANOLOGÍA ACTUAL* Edit. C.S.I.C.. Primera edición, Madrid, España, 1993. pp. 578.
- [6] ARFKEN, George. B.. *MATHEMATICAL METHODS FOR PHYSICISTS.* Edit. Academic Press. Quinta edición, U.S.A., 2001. pp. 1112.
- [7] BASAR, Yavuz. ***Nonlinear Continuum Mechanics of Solids. Fundamental Mathematical and Physical Concepts.*** Edit. Springer-Verlag. Primera edición, Alemania, 2000, pp. 193.
- [8] BRAUN, M.. *ECUACIONES DIFERENCIALES y sus Aplicaciones.* Edit. Grupo Editorial Iberoamérica, versión al español, México, D. F., 1990. pp. 543.
- [9] CALLEN, B. Herbert. *THERMODYNAMICS AND AN INTRODUCTION TO THERMOSTATISTICS.* Edit. John Wiley & Sons. Segunda edición, Canadá, 1985. pp. 493.

- [10] DAVIES, F. Geoffrey. *Dynamic Earth. Plates, Plumes and Mantle Convection*. Edit. Cambridge University Press. Reimpresión, Reino Unido, 2000. pp. 458.
- [11] FARLOW, J. Stanley. *PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS for Scientists & Engineers*. Edit. John Wiley & Sons. Primera edición, U.S.A., 1982. pp. 401.
- [12] FISHER, V. Richard. **Volcanoes**. *Crucibles of Change*. Edit. Princeton University Press. Primera edición, U.S.A., 1997. pp. 317.
- [13] FOX, W. Robert. *Introduction to FLUID MECHANICS*. Edit. John Wiley & Sons, Inc. Sexta edición, U.S.A., 2002. pp. 787.
- [14] FRANCIS, Peter. *VOLCANOES*. Edit. Oxford University Press. Segunda Edición, U.S.A., 2004. pp. 521.
- [15] FRIEDBERG, H. Stephen. *Álgebra Lineal*. Edit. Publicaciones Cultural, S. A.. Primera edición, México, 1982. pp. 547.
- [16] BULLARD, M. Fred. *Volcanoes of the Earth*. Edit. University of Texas Press. Primera edición, U.S.A., 1976. pp. 579.
- [17] FURBISH, David Jon. **Fluid Physics in Geology**. *An introduction to Fluid Motions on Earth's Surface and Within its Crust*. Edit. Oxford University Press. Nueva York, U.S.A., 1997. pp. 476.
- [18] GOLDSTEIN, Herbert. *Classical MECHANICS*. Edit. Addison Wesley. Tercera edición, U.S.A., 2002, pp. 637.
- [19] HALL, H. S.. *ÁLGEBRA SUPERIOR*. Edit. Unión Tipográfica Editorial, versión al español, México, 1982. pp. 696.
- [20] HAMBLIN, Kenneth W. *EARTH'S DYNAMIC SYSTEMS*. Edit. Macmillan Publishing Company. Sexta edición, U.S.A., 1992. pp.647.
- [21] HEINBOCKEL, H. J.. *Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics*. <http://www.math.odu.edu/~jhh/johnh.html>, Old Dominion University, Norfolk, Virginia, U.S.A. 1996.

- [22] JOOS, Georg. *THEORETICAL PHYSICS*. Edit. Hafner Publishing Company. Tercera Edición, U.S.A., 1958. pp. 885.
- [23] JORDAN, D. W.. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Edit. Oxford University Press. Reimpresión, Gran Bretaña, 1986. pp. 360.
- [24] JORGE, M. C.; MINZONI A. A.. *Notas del curso de FETI*. <http://uxmym1.iimas.unam.mx/>, IIMAS, UNAM, México.
- [25] LANDAU, L. D. LIFSHITZ E. M. *Fluid Mechanics. Course of Theoretical Physics Volume 6*. Edit. Pergamon Press. Segunda edición, Ney York, U.S.A, 1987. pp. 539.
- [26] LANDAU, L. D. LIFSHITZ E. M. *Teoría de la Elasticidad. Curso de Física Teórica Volumen 7* Edit. Reverté. Segunda edición, Argentina, 1969. pp. 226.
- [27] MACDONALD, A. Gordon. *Volcanoes*. Edit. Prentice Hall. Primera edición, U.S.A., 1972. pp. 510.
- [28] MARSDEN, E. Jerrold. *Análisis básico de VARIABLE COMPLEJA*. Edit. Trillas. Primera edición en español, México, D. F., 1996. pp. 573.
- [29] MENZEL, H. Donald. *MATHEMATICAL PHYSICS* Edit. Dover Publications, Inc. Primera edición, U.S.A., 1947. pp. 412.
- [30] PRESS, H. William. *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing* Edit. Cambridge University Press. Segunda edición, U.S.A., 1992. pp. 994.
- [31] PRESTON, C. Gerald. *Modern Analytic Geometry*. Edit. Harper & Row, Publishers. Primera edición, U.S.A., 1971. pp. 319.
- [32] SHUTZ, F. Bernard. *A first course in general relativity*. Edit. Cambridge University Press. Segunda edición, décima reimpresión, Reino Unido, 1998. pp. 376.
- [33] SIEVER, Raymond. *UNDERSTANDING EARTH*. Edit. W. H. Freeman and Company. Tercera edición. U.S.A. 2001. pp. 573.
- [34] SKINNER, Brian J. *Physical Geology*. Edit. John Wiley & Sons. Primera edición, U.S.A., 1987. pp. 750.

- [35] SOMMERFELD, Arnold. *PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PHYSICS*. Edit. Academic Press. Primera edición, U.S.A., 1949. pp. 335.
- [36] SPIVAK, Michael. *Cálculo en variedades*. Edit. Recerté. Primera edición al español, España, 1987. pp. 128.
- [37] SPIVAK, Michael. *CALCULUS. Cálculo Infinitesimal*. Edit. Recerté. Segunda edición al español, México, 1999. pp. 926.
- [38] TARBUCK, Edward J. *Ciencias de la Tierra. UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOLOGÍA FÍSICA*. Edit. Prentice Hall. Sexta edición, España, 2003. pp. 540.
- [39] TURCOTTE, Donald L.. *Geodynamics*. Edit. Cambridge University Press. Segunda edición, U.S.A., 2002. pp. 456.
- [40] VETTERLING, T. William. *Numerical Recipes. Example Book [C]*. Edit. Cambridge University Press. Segunda edición, U.S.A., 1992. pp. 994.
- [41] WILLIAMS, Howel. *Volcanology*. Edit. Freeman, Cooper & Co.. Primera edición, U.S.A., 1979. pp. 397.

2 ARTÍCULOS

- [1] ARCINIEGA, C. Alejandra; CHUET, B., DAWSON, P.. “Very long period signals associated with vulcanian explotions at Popocatepetl Volcano, Mexico”. *Geophysical Research Letters*, **26**, número 19, 3013-3016, 1999.
- [2] ARCINIEGA, C. Alejandra; VALDÉS, G. C.; Dawson P. “Temporal and spectral characteristics of seismicity observed at Popocatepetl volvano, central Mexico”. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **102**, 207-216, 2000.

- [3] ARCINIEGA, C. Alejandra; CHUET, B., DAWSON, P.. “Long period events and tremor at Popocatepetl volcano (1994-2000) and their broadband characteristics”. *Bull Volcanol*, **65**, 124-135, 2003.
- [4] BALMFOTH, J; CRASTER, V.; RUST, C.. “Instability on flow through elastic conduits and volcanic tremor”. *Journal of Fluid Mechanics*, **527**, 2005.
- [5] BOKHOVE, O.; WOODS, A.W.; BOER de, A.. “Magma Flow through Elastic-Walled Dikes”. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, **19**, 261-286, 2005.
- [6] CHOUET, Bernard. “Excitation of a Buried Magmatic Pipe: A Seismic Source Model for Volcanic Tremor”. *Journal of Geophysical Research*, **90**, No. B2, 1,881-1,893, 1985.
- [7] CHOUET, Bernard. “Free Surface Displacements in the Near Field of a Tensile Crack Expanding in three Dimensions”. *Journal of Geophysical Research*, **87**, No. B5, p. 3868-3872, 1985.
- [8] CHOUET, B.; JULIAN, B.. “Dynamics of an Expanding Fluid-Filled Crack”. *Journal of Geophysical Research*, **90**, No. B13, 11187-11198, 1985.
- [9] CHOUET, Bernard. “Dynamics of a Fluid-Driven Crack in Three Dimensions by the Finite Difference Method”. *Journal of Geophysical Research*, **91**, No. B2, 13,967-19,992, 1986.
- [10] CHOUET, Bernard. “Resonance of a Fluid-Driven Crack: Radiation Properties and implications for the Source of Long-Period Events and Harmonic Tremor”. *Journal of Geophysical Research*, **93**, No. B5, 4375-4400, 1988.
- [11] CHOUET, Bernard. “Long Period volcano seismicity: its source and use in eruption forecasting”. *Nature*, **380**, 309-316, 1996.
- [12] CHUET, B.; DAWSON, P.; ARCINIEGA, C. Alejandra. “Source mechanism of Vulcanian degassing at Popocatépetl Volcano, Mexico, determined from waveform inversion of very long period signals”. *Journal of Geophysical Research*, **110**, No. B7, 2005.

- [13] CROSSON, R. S.; BAME, D. A.. “A Spherical Model for Low Frequency Volcanic Earthquakes”. ”. *Journal of Geophysical Research*, **90**, No. B12, 10237-10247, 1985.
- [14] FEHLER, M.. “Observation of Volcanic Tremor at Mount St. Helens Volcano”. ”. *Journal of Geophysical Research*, **88**, No. B4, 3476-3484, 1983.
- [15] FERRAZZINI, V; AKI, K.. “Show Waves Trapped in a Fluid-Filled Crack: Implications for volcanic Tremor”. *Journal of Geophysical Research*, **92**, No. B9, 9215-9223, 1987.
- [16] FERRICK, M. G.; QAMAR, A.; LAWRENCE, W. F.. “Source Mechanism of Volcanic Tremor”. *Journal of Geophysical Research*, **87**, No. B10, 8675-8683, 1982.
- [17] GARCES, M. A.. “Theory of acoustic propagation in a multiphase stratified liquid within an elastic-walled conduit of varying cross-sectional area”. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **101**, 1-17, 2000.
- [18] GONNERMANN, M. Helge; MANGA, Michael. “Explosive volcanism may not be an inevitable consequence of magma fragmentation”. *Nature*, **426**, 432-435, 2003.
- [19] HELLWEG, M. “Physical models for the Lincar's harmonic tremor”. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **101**, 183-198, 2000.
- [20] JAMES, M. R.; LANE, S. J.; CHOUET, B.; GILBERT J. S.. “Pressure Changes associated with the ascent and bursting of gas slugs in liquid-filled vertical and inclined conduits”. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **129**, 61-82, 2004.
- [21] JAUPART, Claude. “Magma ascent at shallow levels”. *Encyclopedia of Volcanoes*, 1015-1033. Academic Press, 2000.
- [22] JOUSSET, Philippe; NEURBEG, Jürgen; STURTON, Susan. “Modelling the time-dependent frequency content of low-frequency volcanic earthquakes”. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **128**, 201-223, 2003.
- [23] JULIAN, R. Bruce. “Volcanic tremor: Nonlinear excitation by fluid flow”. *Journal of Geophysical Research*, **99**, No. B6, 11,859-11,877, 1994.

- [24] JULIAN, R. Bruce. "Period doubling and other nonlinear phenomena in volcanic earthquakes and tremor". *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **101**, 19-26, 2000.
- [25] KONSTANTINOU, K. I.; SCHLINDWEN, V.. "Nature, wavefield properties and source mechanism of volcanic tremor: a review". *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **119**, 161-187, 2002.
- [26] KUMAGAI, Hiroyuki; CHOUET, Bernard; NAKANO, Masaru. "Temporal evolution of a hidrothermal system in Kusatsu-Shirane Volcano, Japan, inferred from the complex frequencies of long-periods events". *Journal of Geophysical Research*, **107**, No. B10, 2002.
- [27] KUMAGAI, Hiroyuki; CHOUET, Bernard; NAKANO, Masaru. "Waveform inversion of oscillatory signatures in long-period events beneath volcanoes". *Journal of Geophysical Research*, **107**, No. B11, 2002.
- [28] McNUTT, R. Stephen. "Seismic Monitoring". *Encyclopedia of Volcanoes*, 1095-1119. Academic Press, 2000.
- [29] McNUTT, R. Stephen. "Volcanic Seismicity". *Encyclopedia of Volcanoes*, 1015-1033. Academic Press, 2000.
- [30] MELNIK, Oleg. "Dynamics of tow-phase conduit flow of high-viscosity gas-saturated magma: large variations of sustained explosive eruption intensity". *Bull Volcano*, **Vol. 62**, 153-170, 2000.
- [31] NAKANO, M.; KUMAGAI, H.. "Waveform inversion of volcano-seismic signals assuming possible source geometries". *Geophysical Research Letters*, **32**, L12302.
- [32] NISHIMURA, Takeshi; CHOUET, Bernard. "A numerical simulation of magma motion, crustal deformation and seismic radiation associated with volcanic eruptions". *Geophysical Journal Int*, **153**, 699-718, 2003.
- [33] OZEROV, A.; ISPOLATOV, I.; LEES, J.. "Modeling Strombolian eruptions of Karymsky volcano, Kamchatka, Russia". *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **122**, 2003, 265-280.

- [34] SEIDL, Dieter; HELLWEG, Margaret. “Parameterization of multichromatic tornillo signals observed at Galeras Volcano (Colombia)”. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **125**, 171-189, 2003.
- [35] SPENCE, A.; TURCOTTE, L.. “Magma-Driven Propagation of Cracks”. *Journal of Geophysical Research*, **90**, No. B1, 575-580, 1985.
- [36] SPERA, J. Frank. “Physical Properties of Magma”. *Encyclopedia of Volcanoes*, 171-189. Academic Press, 2000.
- [37] TUFFEN, H.; DINGWELL, D.; PINKERTON, H.. “Repeated fracture and healing of silicic magma generates flow banding and earthquakes?”. *Geology*, **31**, 1089-1092, 2003.