Tránsferes en homología y cohomología para aplicaciones cubrientes ramificadas.

Mariano Zerón-Medina Laris

Julio 2006

1. Datos del alumno
   Zerón-Medina
   Laris
   Mariano
   52 91 88 87
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   400085991

2. Datos del tutor
   Dr
   Carlos
   Prieto
   de Castro

3. Datos del sinodal 1
   Dr
   Marcelo Alberto
   Aguilar
   González de la Vega

4. Datos del sinodal 2
   Dr
   Enrique Javier
   Elizondo
   Huerta

5. Datos del sinodal 3
   Dr

José Luis

Cisneros

Molina

6. Datos del sinodal 4

Dr

Ricardo

Gómez

Aíza

7. Datos del trabajo escrito

Tránsferes en homología y cohomología para aplicaciones cubrientes ramificadas

102 p

2006

Agradecimientos

Agradezco a todos aquellos que de manera directa o indirecta permitieron que se llevara a cabo esta tesis. Tanto amigos, profesores, como familiares, han sido parte fundamental de mi desarrollo; no sólo en estos últimos años, sino en toda mi vida.

De igual forma quiero expresar la satisfacción que representa el formar parte del extraordinario proyecto educativo que es la Universidad Nacional Autónoma de México.

Índice general

Introducción

El propósito de esta tesis es dar los detalles de algunos resultados que aparecen en el artículo [**AP**] escrito por M. Aguilar y C. Prieto.

Una aplicación cubriente ramificada de grado n es un mapeo $p : E \longrightarrow X$ de fibras finitas discretas, con una función de multiplicidad definida sobre el espacio total $\mu : E \longrightarrow \mathbb{N}$, tal que la suma de las multiplicidades de cada fibra da n, y un mapeo $\varphi_p : X \longrightarrow SP^n E$ que a cada $x \in X$ le asigna su fibra repitiendo cada elemento de ésta, tantas veces como lo indique la función multiplicidad. Un tránsfer para tales mapeos es un homomorfismo entre los grupos de homología (o de cohomología) del espacio total y el espacio base, de dirección contraria al homomorfismo que el mapeo p induce bajo homología (o cohomología), de tal modo que tiene una serie de propiedades útiles. La composición del tránsfer con el homomorfismo inducido por p debe tener una descripción sencilla; en nuestro caso será multiplicación por el grado de la aplicación cubriente ramificada en la homología (o cohomología, dependiendo del caso) del espacio base. De igual forma conserva la conmutatividad de los diagramas de pullback y cumple cierta invariancia homotópica; éstas y otras propiedades serán expuestas en los capítulos 4 y 5.

El primero en trabajar con las aplicaciones cubrientes ramificadas aquí utilizadas fue L. Smith, quien construyó un tránsfer para ellas en homología singular con coeficientes enteros [**LS**]. Más tarde, A. Dold da una definición alternativa de estas aplicaciones y define un tránsfer para ellas [**AD**]. Ambos tránsferes son de naturaleza algebraica y un tanto abstractos. La definición que M. Aguilar y C. Prieto dan del tránsfer en [**AP**] rescata el carácter topológico de la aplicación cubriente ramificada. Definen un homomorfismo continuo llamado pretránsfer, entre ciertos grupos topológicos asociados al espacio base y al espacio total. La construcción de estos grupos topológicos se debe a McCord, y tienen la propiedad de definir una teoría de homología al calcular sus grupos de homotopía. El tránsfer resulta entonces, el homomorfismo que el funtor homotopía induce a partir del pretránsfer. Más aún, los grupos topológicos de McCord asociados a las esferas resultan espacios de Eilenberg-MacLane, lo cual permite utilizarlos para definir una teoría de cohomología. Precisamente este modelo de espacios Eilenberg-MacLane es el que se utiliza par definir el tránsfer en cohomología.

La construcción de los grupos topológicos $F(X,G)$ que da McCord, resulta fundamental en la definición del pretránsfer. Sin embargo, está llena de sutilezas técnicas las cuales obligan a restringir la categoría de objetos con los que se puede trabajar. El primer capítulo de esta tesis está dedicado a detallar la categoría adecuada de la cual tomaremos los objetos. Su carácter es técnico y un tanto tedioso, sin embargo su importancia es capital para verificar que los grupos topológicos $F(X,G)$ cumplen con las propiedades que necesitamos.

En el capítulo 2 se construyen los grupos topológicos $F(X,G)$, se prueban sus propiedades básicas, y se definen las teorías de homología y cohomología que utilizaremos en los capítulos subsecuentes. También se construyen productos entre las teorías. De particular importancia resulta el producto de Kronecker el cual será la herramienta indispensable para probar la dualidad entre el tránsfer para homología y el tránsfer para cohomología.

El capítulo 3 introduce las aplicaciones cubrientes ramificadas. En este capítulo se presentan, además de ejemplos interesantes y propiedades importantes, un par de caracterizaciones. La primera debida a L. Smith, quien clasifica las aplicaiones cubrientes ramificadas a través de diagramas de pullback. La segunda debida a A. Dold, que utiliza una definición alternativa de las aplicaciones cubrientes ramificadas, verifica que todas son esencialmente idénticas a mapeos entre espacios de órbitas dados por la acción de un grupo finito y un subgrupo.

Los capítulos 4 y 5 definen los tránsferes para homología y cohomología respectivamente. En el 4 se define el pretránsfer y sobre este homomorfismo es que se verifican todas las propiedades que el tránsfer debe cumplir. El tránsfer, a su vez, cumple tales propiedades debido a la funtorialidad de la homotopía. Al final del capítulo 5 se utilizan las propiedades del tránsfer en cohomología para probar un resultado de Conner sobre mapeos orbitales entre espacios de órbitas de un grupo finito y un subgrupo.

En el capítulo 6 se prueba la dualidad entre los tránsferes para homología y cohomología.

La definición de las teorías de homología y cohomología que utiliza los grupos topológicos de McCord tiene la ventaja de que puede darse con coeficientes en cualquier grupo discreto. Con ello, el tránsfer definido en [**AP**]está dado en estas teorías. Finalmente, en el capítulo 7, se toman coeficientes enteros y se prueba que el tránsfer descrito por M. Aguilar y C. Prieto en [**AP**], coincide con el tránsfer de L. Smith en [**LS**].

Para entender la tesis se necesitan nociones básicas de topología y álgebra. Conceptos que puedan causar confusión llevan referencias a libros en donde se tratan breve y claramente. Por último, cabe aclarar que algunos de los teoremas del capítulo 2, y otros del capítulo 7, no son probados debido al cúmulo de resultados de teoría que ello implicaría. No obstante, la utilidad de tales teoremas exige enunciarlos. Referencias de artículos o libros en donde se encuentran las demostraciones se harán de manera pertinente.

Capítulo 1

La categoría KDH

Cuando se trabaja en la construcción de un espacio topológico, es conveniente elegir la categoría adecuada. No debe ser ni muy grande, ni muy chica. Suficientemente grande para incluir espacios de interés y que las operaciones con las que se trabaja, permanezcan cerradas, como por ejemplo tomar subespacios, productos, espacios de funciones, etcétera. No muy grande de tal forma que ciertas proposiciones acerca de las operaciones sean ciertas. Por ejemplo, que el orden en que se efectúan dos operaciones conmute.

A continuación definiremos la categoría con la cual se trabajará en buena parte de la tesis, y daremos algunas de sus propiedades importantes.

Definición 1.1. Sea $\phi : K \longrightarrow X$ un mapeo donde K es compacto Hausdorff y X un espacio topológico. Un subconjunto A de X es *compactamente cerrado* si $\phi^{-1}(A)$ es cerrado en K para todo espacio K y todo mapeo ϕ. Decimos que X es un *k-espacio* si cada subconjunto compactamente cerrado de X es cerrado en X. Si X es un espacio topológico, $k(X)$ consta del mismo conjunto subyacente con la topología determinada por los subconjuntos compactamente cerrados. Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo entre espacios topológicos, $k(f) : k(X) \longrightarrow k(Y)$ denota la misma función entre los respectivos k-espacios.

Definición 1.2. Un espacio X es *débilmente Hausdorff*, si para cada mapeo $\phi\colon K \longrightarrow$

X, donde K es compacto y Hausdorff, $\phi(K)$ es cerrado en X.

Observación 1.1. La propiedad de ser débilmente de Hausdorff está entre ser T_1 y T_2. Si un espacio X es T_2 cada subconjunto compacto es cerrado, por lo que $\phi(K)$ es cerrado ya que ϕ es continua y K compacto. Ahora consideremos las inclusiones $i : \{x\} \hookrightarrow X$. Como los espacios singulares $\{x\}$, $x \in X$, son Hausdorff y compactos, si X es débilmente Hausdorff, entonces las inclusiones son cerradas, por lo que cada punto resulta cerrado, y con ello, el espacio T_1. ■

En el caso particular que nos atañe, la categoría conveniente es la de k-espacios débilmente Hausdorff, propuesta por McCord en [**MCM**], que denotamos por KDH. Esta categoría es un tanto mas grande que la categoría de k-espacios Hausdorff, cuya utilidad expone Steenrod en [**NES**].

A pesar de que la categoría que propone Steenrod resulta de gran utilidad, no se puede asegurar la cerradura bajo espacios de adjunción y unión de sucesiones de espacios. Condiciones mas fuertes se pueden pedir a los espacios involucrados para asegurar que tales construcciones permanezcan en la categoría, sin embargo, según menciona McCord en [**MCM**], son condiciones difíciles de verificar en la mayoría de los casos.

Según fue sugerido a McCord por J.C. Moore, agrandar la categoría propuesta por Steenrod corrige los problemas antes mencionados, mientras conserva las propiedades técnicas expuestas en [**NES**].

A continuación, se darán algunos resultados sobre la categoría KDH, varios de los cuales serán indispensables en el siguiente capítulo.

Lema 1.1. *Sea X débilmente Hausdorff y $\varphi : K \longrightarrow X$ continua con K compacto y Hausdorff. Entonces la imagen $\varphi(K)$ es compacta y Hausdorff.*

Demostración. Como K es compacto y ϕ es continua, $\phi(K)$ es compacto. Para demostrar que $\phi(K)$ es Hausdorff, sean $x_1, x_2 \in \varphi(K) \subseteq X$. Como X es T_1 por ser débilmente Hausdorff, entonces x_1 y x_2 son cerrados. Por lo tanto $\varphi^{-1}(x_1)$, y $\varphi^{-1}(x_2)$, son cerrados en K.

Como K es compacto y Hausdorff, K es normal. Por lo tanto, existen U_1, U_2, vecindades abiertas disjuntas de $\varphi^{-1}(x_1)$ y $\varphi^{-1}(x_2)$, respectivamente.

Como U_1 es abierto, $K \setminus U_1$ es cerrado en K, y al ser cerrado, resulta compacto. Por lo tanto $\varphi(K \setminus U_1)$ es cerrado en X ya que X es débilmente Hausdorff y cerrado en $\varphi(K)$ ya que $\varphi(K)$ tiene la topología relativa, por lo tanto $\varphi(K) \setminus \varphi(K \setminus U_1)$ es abierto en $\varphi(K)$. Como U_2 también es abierto, siguiendo el mismo argumento obtenemos que $\varphi(K) \setminus \varphi(K \setminus U_2)$ es abierto en $\varphi(K)$.

Como $\varphi^{-1}(x_1) \subseteq U_1$, $x_1 \notin \varphi(K \setminus U_1)$, por lo tanto $x_1 \in \varphi(K) \setminus \varphi(K \setminus U_1)$. De igual forma $x_2 \in \varphi(K) \setminus \varphi(K \setminus U_2)$. Entonces, basta probar que $(\varphi(K) \setminus \varphi(K \setminus U_1)) \cap (\varphi(K) \setminus \varphi(K \setminus U_2)) = \emptyset$.

Afirmación 1. *Sea* $A = \{\varphi(x) \mid x \in U_1 \text{ y } \nexists x_2 \in K \setminus U_1 \text{ tal que } \varphi(x_2) = \varphi(x)\}$. *Entonces* $A = \varphi(K) \setminus \varphi(K \setminus U_1)$.

Demostración. $\subseteq$) Sea $\varphi(x) \in A$. Como no existe $x_2 \in K \setminus U_1$ tal que $\varphi(x_2) = \varphi(x)$, $\varphi(x) \notin \varphi(K \setminus U_1)$. Ya que $x \in K$, $\varphi(x) \subseteq \varphi(K)$, entonces $\varphi(x) \in \varphi(K) \setminus \varphi(K \setminus U_1)$

$\supseteq$) Sea $\varphi(x) \in \varphi(K) \setminus \varphi(K \setminus U_1)$. Como $\varphi(x) \notin \varphi(K \setminus U_1)$, entonces $x \notin K \setminus U_1$. Además $x \in K$, por lo tanto $x \in U_1$. Si existiera $x_2 \in K \setminus U_1$ tal que $\varphi(x_2) = \varphi(x)$, entonces $\varphi(x) \in \varphi(K \setminus U_1)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\varphi(x) \in A$. ■

De igual modo, si $B = \{\varphi(x) \mid x \in U_2 \text{ y } \nexists\, x_1 \in K \setminus U_2 \text{ tal que } \varphi(x_1) = \varphi(x)\}$, entonces $B = \varphi(K) \setminus \varphi(K \setminus U_2)$.

Según la definición de A y B, y ya que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, es claro que $A \cap B = \emptyset$. Tenemos pues, que $\varphi(K) \setminus \varphi(K \setminus U_1)$ y $\varphi(K) \setminus \varphi(K \setminus U_2)$ son vecindades abiertas ajenas de x_1 y x_2, respectivamente. ■

Este resultado permite dar la siguiente definición.

Definición 1.3. Si X es un espacio débilmente Hausdorff, el *k-espacio* asociado $k(X)$ es el conjunto con topología definida de la siguiente manera: un subconjunto cerrado de $k(X)$ es un subconjunto cuya intersección con cada subconjunto compacto y Hausdorff de X resulta cerrada.

Lema 1.2. *Sea X es un objeto de la categoría KDH, Y un espacio débilmente Hausdorff, y $f : X \longrightarrow Y$ continua en cada subconjunto compacto Hausdorff de X. Entonces f es continua.*

Demostración. Sea A subconjunto cerrado de Y, y C subconjunto compacto y Hausdorff de X. Como $f_{|C} : C \longrightarrow f(C)$ es continua, $A \cap f(C)$ cerrado en $F(C)$, y $(f_{|C})^{-1}(A \cap f(C)) = f^{-1}(A) \cap C$, éste último es cerrado en C. Para concluir la continuidad de f, resta recordar que los cerrados en X son aquellos que al intersectarse con cualquier compacto y Hausdorff resultan cerrados. ■

Teorema 1.1. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(i) La identidad $k(X) \longrightarrow X$ es continua.

(ii) Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua, entonces $k(f) : k(X) \longrightarrow k(Y)$ también lo es.

Si además X y Y son débilmente Hausdorff:

(iii) $k(X)$ sigue siendo débilmente Hausdorff.

(iv) $k(X)$ y X tienen los mismos subconjuntos compactos Hausdorff.

(v) $k(X)$ pertenece a KDH.

(vi) Si $X \in KDH$, entonces $k(X) = X$.

(vii) Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua al restringirse a subconjuntos compactos Hausdorff, entonces $k(f)$ es continua.

Demostración. Sea A subconjunto cerrado de X. Sea $\varphi : K \longrightarrow X$ continua con K compacto y Hausdorff. Resulta inmediato que la imagen inversa $\varphi^{-1}(A)$ es cerrada en K, por lo que A es compactamente cerrado probando (i).

Sea $f : X \longrightarrow Y$ continua, $A \subseteq Y$ compactamente cerrado y $\varphi : K \longrightarrow X$ continua con K compacto Hausdorff. La composición $f \circ \varphi : K \longrightarrow X \longrightarrow Y$ resulta continua, por lo que $(f \circ \varphi)^{-1}(A) = \varphi^{-1}(f^{-1}(A))$ es cerrado. Por lo tanto $f^{-1}(A)$ es compactamente cerrado de donde se concluye la continuidad de $k(f) : k(X) \longrightarrow k(Y)$.

Sea $\varphi : K \longrightarrow k(X)$ continua con K compacto Hausdorff. Por (i) $Id \circ \varphi : K \longrightarrow k(X) \longrightarrow X$ resulta continua, y como X es débilmente Hausdorff, $Id \circ \varphi(K)$ es cerrada en X. Sin embargo $Id^{-1}(Id \circ \varphi(K)) = \varphi(K)$, por lo que $\varphi(K)$ es cerrado concluyendo (iii).

Sea A subconjunto compacto Hausdorff de $k(X)$. Por (i) y Lema 1.1, A también es compacto y Hausdorff en X. Supongamos ahora que C es un subconjunto compacto Hausdorff de X. Denotemos por C' al conjunto C con la topología relativa obtenida en $k(X)$. Por (i), el mapeo identidad $C' \longrightarrow C$ es continuo. Falta probar la continuidad de su inversa. Sea B un subconjunto cerrado de C'. Por definición, B intersecta cada subconjunto compacto Hausdorff de X en un subconjunto cerrado, por lo tanto $B \cap C = B$ es cerrado en C, y $C \longrightarrow C'$ resulta continua. Esto muestra que C' es compacto Hausdorff probando (iv).

Si un subconjunto A intersecta a cada subconjunto compacto Hausdorff en un subconjunto cerrado de $k(X)$, entonces, por (iv), intersecta cada subconjunto compacto Hausdorff de X en un subconjunto compacto Hausdorff, que resulta cerrado ya que X es débilmente Hausdorff. Por lo tanto, A es cerrado en $k(X)$ probando (v).

El inciso (vi) se sigue inmediatamente del (v).

Para probar (vii) basta, por el Lema 1.2, probar que $k(f)$ es continua en cada subconjunto compacto Hausdorff de $k(X)$. Sea C' un subconjunto compacto Hausdorff de $k(X)$. Llamemos C al mismo subconjunto con la topología de X. Por (iv) C resulta compacto en X y la identidad $C' \longrightarrow C$ un homeomorfismo. Como $f_{|C}$ es continua y Y débilmente Hausdorff, $f(C)$ es compacto Hausdorff, y por (iv), también $f(C')$ con su topología en $k(Y)$. Por lo tanto la función $k(f)_{|C'} : C' \longrightarrow f(C')$ se factoriza en la composición de $f_{|C}$ y dos mapeos identidad $C' \longrightarrow C \longrightarrow f(C) \longrightarrow f(C')$. De aquí que $k(f) \mid_{C'}$ es continua, probando (vii). ■

Corolario 1.1. *La asignación k resulta ser un funtor de la categoría de espacios topológicos en la categoría de k-espacios que denotamos como K. Más aún, por el inciso (v) del Teorema 1.1, el funtor puede restringirse a la categoría de espacios débilmente Hausdorff, asignándole a cada objeto en esta categoría, un objeto en KDH.*

Ésta es una de las razones por las cuales la categoría KDH resulta tan útil. Si una construcción que involucra espacios de KDH resulta débilmente Hausdorff, basta aplicar el funtor k para obtener nuevamente un espacio en KDH.

La categoría KDH no es cerrada bajo subespacios, un ejemplo se puede ver en 2,3 de [**NES**]. Sin embargo, algunos subespacios permanecen en KDH.

Proposición 1.1. *Si X está en KDH, cada subconjunto cerrado de X también está en KDH.*

Demostración. Claramente, si A es un subconjunto cerrado de X que es débilmente Hausdorff, entonces A es débilmente Hausdorff.

Supongamos que A es cerrado en X y que $B \subseteq A$ intersecta a cada subconjunto compacto Hausdorff de A en un conjunto cerrado. Sea C un subconjunto compacto Hausdorff de X. Entonces $A \cap C$ es un subconjunto compacto Hausdorff de A, por lo tanto $B \cap (A \cap C) = B \cap C$ es cerrado en X, y como por hipótesis, X pertenece a KDH, obtenemos que B es cerrado en X, y con ello en A. Por lo tanto, A está en KDH. ■

La categoría KDH presenta el problema de que no es cerrada bajo el producto cartesiano[1]. Para corregir este problema, Steenrod define un producto adecuado en [**NES**].

Definición 1.4. Si X y Y pertenecen a la categoría de k-espacios, su producto $X \times_k Y$ es $k(X \times Y)$, donde $\times$ denota el producto topológico usual.

[1]Un ejemplo se puede encontrar en [**CHD**].

Teorema 1.2. *El producto recién definido satisface los axiomas del producto en la categoría K.*

Demostración. Por el Teorema 1.1, la función identidad $X \times_k Y \longrightarrow X \times Y$ es continua. Más aún, las proyecciones de $X \times Y$ a X como a Y, son continuas, por lo tanto, sus composiciones con la identidad también lo son, por lo que pertenecen a K.

Sea $W \in K$, y sean f y g mapeos $W \longrightarrow X$ y $W \longrightarrow Y$ en K. Los morfismos f y g definen un mapeo único $(f,g) : W \longrightarrow X \times Y$. Al aplicar k obtenemos $k(f,g) : W \longrightarrow X \times_k Y$, que al componer con las proyecciones, da f y g. ■

Corolario 1.2. *El producto $\times_k$ es un producto en la categoría KDH.*

Demostración. Basta demostrar que si X y Y son débilmente Hausdorff, entonces $X \times Y$ también lo es.

Sea $\varphi : K \longrightarrow X \times Y$ continua con K compacto y Hausdorff. Consideremos las proyecciones $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ y $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$, y sus respectivas composiciones con φ. Llamemos $\psi_1 = p_1 \circ \varphi$ y $\psi_2 = p_2 \circ \varphi$. Ambas ψ_1 y ψ_2 son continuas de un compacto Hausdorff en un débilmente Hausdorff, por lo que sus imágenes $\psi_1(K) \subseteq X$ y $\psi_2(K) \subseteq Y$, son Hausdorff, por lo que $\psi_1(K) \times \psi_2(K)$ también. La imagen $\varphi(K)$ está contenida en $\psi_1(K) \times \psi_2(K)$, y como la primera es compacta, al estar contenida Hausdorff, resulta cerrada. ■

De lo anterior se sigue que el producto $\times_k$ en KDH satisface las propiedades usuales de conmutatividad y asociatividad. Más aún, aplicando el funtor k al producto usual, extendemos la construcción a cualquier número de factores.

Cabe observar el efecto que modificar el concepto de espacio producto tiene sobre conceptos basados en productos, tales como el grupo topológico ($G \times G \longrightarrow G$), grupo de transformaciones G en X ($G \times X \longrightarrow X$), y la homotopía ($X \times I \longrightarrow X$). Si nos restringimos a G y X en KDH, cualquier multiplicación $G \times G \longrightarrow G$ o acción

$G \times X \longrightarrow X$, que sea continua en la categoría de espacios topológicos, permanece continua bajo k. Por lo tanto, la nueva definición permite un mayor número de grupos topológicos y acciones. El siguiente resultado afirma que en muchos casos no hay ningún cambio; en particular, el concepto de homotopía no se altera.

Lema 1.3. *Si X es localmente compacto, débilmente Hausdorff, y $Y \in KDH$, entonces $X \times Y$ está en KDH. i.e. $X \times_k Y = X \times Y$.*

Demostración. Sea $A \subseteq X \times Y$, tal que para todo compacto Hausdorff $K \subseteq X \times Y$, $A \cap K$ es cerrado y sea $(x, y) \in X \times Y - A$. Por ser X localmente compacto, x tiene una vecindad V, tal que su cerradura $\overline{V}$ es compacta. Ya que $\overline{V} \times \{y\}$ es compacto, $A \cap (\overline{V} \times \{y\})$ debe ser cerrado; así, x tiene una vecindad U más pequeña que V, tal que $\overline{U} \times \{y\}$ no intersecta a A.

Sea ahora B la imagen en Y de $A \cap (\overline{U} \times Y)$ bajo la proyección. Si $C \subseteq Y$ es compacto, entonces $A \cap (\overline{U} \times C)$ es compacto; por lo tanto, $B \cap C$ es cerrado. Ya que $Y \in KDH$, B tiene que ser cerrado en Y. En vista de que y no está en B, resulta que $U \times (B - Y)$ es una vecindad de (x, y) que no intersecta a A. En consecuencia, A es cerrado en $X \times Y$, por lo que este último pertenece a KDH. ■

Teorema 1.3. *Si $f : X \longrightarrow X'$ y $g : Y \longrightarrow Y'$ son identificaciones con X y Y en KDH, entonces $f \times g : X \times_k Y \longrightarrow X' \times_k Y'$ también es una identificación.*

Demostración. Ya que $f \times g$ factoriza como $(f \times Id) \circ (Id \times g)$ y la composición de identificaciones vuelve a ser una identificación, es suficiente probar el caso $Y = Y'$ y $g = Id$.

Sea $A \subseteq X' \times_k Y$, tal que $(f \times Id)^{-1}(A)$ es cerrado en $X \times_k Y$. Sea $C \subseteq X' \times_k Y$ compacto Hausdorff y sean D y E sus proyecciones en X' y Y, respectivamente. Claramente $D \times_k E$ es un subconjunto compacto cerrado de $X' \times_k Y$. Bastará probar que $A \cap (D \times_k E)$ es cerrado, puesto que, entonces, también $A \cap C$ será cerrado y, ya que $X' \times_k Y$ pertenece a KDH, A será cerrado, probando con ello que $f \times Id$ es una identificación.

Ya que $(f \times Id)^{-1}(D \times_k E) = f^{-1}(D) \times_k E$ es cerrado en $X \times_k Y$, tenemos que $(f \times Id)^{-1}(A \cap (D \times_k E))$ es cerrado en $f^{-1}(D) \times_k E$. Sustituyendo X, X' y Y por $p^{-1}(D)$, D y E, respectivamente, hemos reducido la demostración al caso en que X' y Y son compactos. En particular, por el Lema 1.3, $X' \times_k Y = X' \times Y$ y $X \times_k Y = X \times Y$.

Supongamos pues que X' y Y son compactos y sea ahora $W \subseteq X' \times Y$, tal que $(f \times Id)^{-1}(W)$ es abierto en $X \times Y$; tómese $(x'_0, y_0) \in W$. Sea $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x'_0$. Al estar (x_0, y_0) en el abierto $(f \times Id)^{-1}(W)$ y ya que Y es compacto, existe una vecindad V de y_0, tal que $\{x_0\} \times \overline{V} \subseteq (f \times Id)^{-1}(W)$. Sea $U = \{x \in X \mid \{f(x)\} \times \overline{V} \subseteq W\}$. Veamos que U es abierto en X. Si $\{x_1\} \in U$, podemos cubrir $\{x_1\} \times \overline{V}$ por productos de abiertos contenidos en $(f \times Id)^{-1}(W)$ y seleccionar de ellos una subcubierta finita. Entonces la intersección de los factores en X de este número finito de productos es una vecindad N de x_1, tal que $N \times \overline{V} \subseteq (f \times Id)^{-1}(W)$; por lo tanto, U es abierto. Por definición $U = f^{-1}f(U)$, por lo que, al ser f una identificación, $f(U)$ es abierto en X'. Ya que $(x'_0, y_0) \in f(U) \times V$ y que $f(U) \times V$ es abierto y yace en W, W mismo resulta abierto, como queríamos demostrar. ∎

Proposición 1.2. *Sea X k-espacio. Entonces X es débilmente Hausdorff si y sólo si la diagonal Δ_X es cerrada en $X \times_k X$*

Demostración. Para probar la suficiencia tomemos un mapeo arbitrario $\varphi : K \longrightarrow X$ con K compacto y Hausdorff, y verifiquemos que $\varphi(K) \subseteq X$ es cerrado. Como X es un k-espacio, basta ver que $\psi^{-1}(\varphi(K))$ es cerrado en L donde $\psi : L \longrightarrow X$ es un mapeo arbitrario con L compacto y Hausdorff.

Por hipótesis Δ_X es cerrado en $X \times_k X$, por lo que $(\varphi \times \psi)^{-1}(\Delta_X)$ es cerrado en $K \times_k L$ donde φ y ψ son mapeos como los mencionados previamente. Las proyecciones son cerradas, por lo que proyectar $(\varphi \times \psi)^{-1}(\Delta_X)$ sobre L da un subconjunto cerrado de L. Resta demostrar que $proy_L((\varphi \times \psi)^{-1}(\Delta_X)) = \psi^{-1}(\varphi(K))$.

Si $l \in \psi^{-1}(\varphi(K))$ entonces $\psi(l) \in \varphi(K)$, esto es, existe $k \in K$ tal que $\varphi(k) =$

$\psi(l)$ y por lo tanto $(\varphi \times \psi)(k,l) \in \Delta_X$. Pero si $(k,l) \in (\varphi \times \psi)^{-1}(\Delta_X)$ entonces $l \in proy_L((\varphi \times \psi)^{-1}(\Delta_X))$. Para obtener la otra contención basta observar que las implicaciones son en realidad equivalencias.

Para probar la ida hay que verificar que Δ_X es compactamente cerrado en $X \times X$. Para ello tomemos un mapeo arbitrario $\varphi : K \longrightarrow X \times X$ con K compacto y Hausdorff, y demostremos que $\varphi^{-1}(\Delta_X)$ es cerrado en K.

Como X es débilmente Hausdorff los mapeos ψ_1 y ψ_2, que se obtienen de componer a φ con las proyecciones, definen por el Lema 1.1, subconjuntos compactos y Hausdorff $\psi_i(K) \subseteq X$, (i=1,2). Sea $A = \psi_1(K) \cup \psi_2(K)$. Al ser la unión de subespacios Hausdorff, A es Hausdorff y con ello $\Delta_A \subseteq A \times A$ cerrado. Como A también es compacto y X débilmente Hausdorff, $A \times A \subseteq X \times X$ es cerrado y en consecuencia $\Delta_A \subseteq X \times X$ también.

Dada la definición de A, es claro que $\varphi(K) \subseteq A \times A$, por lo que $\varphi^{-1}(\Delta_X) = \varphi^{-1}(\Delta_A)$. Como Δ_A es cerrado en $X \times X$, entonces $\varphi^{-1}(\Delta_A)$ es cerrado en K probando la cerradura de $\varphi^{-1}(\Delta_X)$. ■

Lema 1.4. *Todo espacio cociente de un k-espacio X, es un k-espacio.*

Demostración. Consideremos un espacio cociente $X/\sim$, donde $\sim$ es una relación de equivalencia, y la identificación $p : X \longrightarrow X/\sim$ que le da su topología. Como $Y \subseteq X/\sim$ es cerrado si y sólo si $p^{-1}(Y)$ cerrado, y X es un k-espacio, si Y es compactamente cerrado, basta verificar que $p^{-1}(Y)$ es compactamente cerrado para concluir que $Y \subseteq X/\sim$ es cerrado.

Tomemos $\varphi : K \longrightarrow X$ mapeo arbitrario con K compacto y Hausdorff. La composición de φ con p da un mapeo $h : K \longrightarrow X/\sim$ y al ser $Y \subseteq X/\sim$ compactamente cerrado, $h^{-1}(Y) = \varphi^{-1}(p^{-1}(Y))$ es cerrado en K, por lo que $p^{-1}(Y)$ es compactamente cerrado en X. ■

Proposición 1.3. *Sea X un objeto en KDH y $p : X \longrightarrow Y$ una identificación. Entonces Y está en KDH si y sólo si $(p \times p)^{-1}(\Delta_Y)$ es cerrado en $X \times_k X$.*

Demostración. Si Y está en KDH la Proposición 1.2 nos dice que Δ_Y es cerrado en $Y \times_k Y$ y con ello $(p \times p)^{-1}\Delta_Y$ es cerrado en $X \times_k X$.

El Lema 1.4 permite concluir que Y es k-espacio ya que por hipótesis X esta en KDH y p es una identificación. Como además $(p \times p)^{-1}(\Delta_Y)$ es cerrado, y por Teorema 1.3 $p \times p$ es identificación, Δ_Y es cerrado en $Y \times_k Y$, lo cual implica, por Proposición 1.2, que Y es débilmente Hausdorff. ■

Definición 1.5. A un mapeo de parejas $h : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ lo llamamos *homeomorfismo relativo*, si A es cerrado en X, $h : X \longrightarrow Y$ es una identificación, y $h\mid_{X\setminus A}: X \setminus A \longrightarrow Y \setminus B$ resulta biyectiva. De la definición se sigue inmediatamente que B es cerrado en Y, $h\mid_A$ define una identificación de A en B, y la biyección $h\mid_{X\setminus A}: X \setminus A \longrightarrow Y \setminus B$ es un homeomorfismo.

Proposición 1.4. *Si $h : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ es un homeomorfismo relativo con X y B en KDH, entonces Y está en KDH. En particular, si A es cerrado en X, X/A está en KDH.*

Demostración. Como X y B están en KDH, $\Delta_X \subseteq X \times_k X$ y $\Delta_B \subseteq B \times_k B$ son cerrados por lo que $\Delta_X \cup (h \times h)^{-1}(\Delta_B)$ es cerrado en $X \times_k X$. Más aún, $h : X \longrightarrow Y$ es una identificación, por lo que la Proposición 1.3 dice que si $(h \times h)^{-1}(\Delta_Y)$ es cerrado, Y está en KDH. Basta probar entonces, que $(h \times h)^{-1}(\Delta_Y) = \Delta_X \cup (h \times h)^{-1}(\Delta_B)$.

$\subseteq$) Sea $\overline{x} = (x_1, x_2) \in (h \times h)^{-1}\Delta_Y$; esto es $(h(x_1), h(x_2)) \in \Delta_Y$ o equivalentemente $h(x_1) = h(x_2)$. Si $x_1 = x_2$ entonces $(x_1, x_2) \in \Delta_X$, de lo contrario $x_1, x_2 \notin X \setminus A$ ya que $h\mid_{X\setminus A}: X \setminus A \longrightarrow Y \setminus B$ es una biyección. Como h es un homeomorfismo relativo $h(A) = B$, por lo tanto $h(x_1), h(x_2) \in B$ y con ello $(h(x_1), h(x_2)) \in \Delta_B$. Tenemos pues que $(x_1, x_2) \in (h \times h)^{-1}(\Delta_B)$.

$\supseteq$) Sea $\overline{x} \in \Delta_X \cup (h \times h)^{-1}\Delta_B$. Si $\overline{x} \in \Delta_X$, entonces $x_1 = x_2$ lo que implica $h(x_1) = h(x_2)$, y por lo tanto $\overline{x} \in (h \times h)^{-1}\Delta_Y$. Si $\overline{x} \in (h \times h)^{-1}(\Delta_B)$, entonces $(h(x_1, x_2)) \in \Delta_B \subseteq \Delta_Y$, por lo tanto $\overline{x} \in (h \times h)^{-1}(\Delta_Y)$.

Sea $A \subseteq X$ cerrado, y consideremos $Y = X/A$, $B = \{*\}$. La función $h : (X, A) \longrightarrow (X/A, *)$ es una identificación de X a X/A, y claramente biyectiva de $X \setminus A$ a $(X/A) \setminus \{*\}$ de donde se sigue el resultado. ■

Proposición 1.5. *Sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, con $X_0 \subset X_1 \subset \dots$ sucesión de subespacios cerrados, y la topología de la unión. Si X_n está en KDH para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces X está en KDH.*

Demostración. Sea $A \subseteq X$ compactamente cerrado. Como X_n es k-espacio, entonces $A \cap X_n$ cerrado en X_n si y sólo si $A \cap X_n$ compactamente cerrado en X_n. Sea $f : K \longrightarrow X_n$ continua con K compacto Hausdorff, y $h = j_n \circ f$ donde $j_n : X_n \hookrightarrow X$ es la inclusión canónica. Como A es compactamente cerrado por hipótesis, $h^{-1}(A)$ es cerrado en K. Sin embargo, por la definición de h, tenemos que $h^{-1}(A) = f^{-1}(j_n^{-1}(A)) = f^{-1}(A \cap X_n)$, por lo tanto $f^{-1}(A \cap X_n)$ es cerrado en K. Concluimos que $A \cap X_n$ es compactamente cerrado, y por lo tanto $A \cap X_n$ cerrado en X_n. Como n es arbitraria y X tiene la topología de la unión, A resulta cerrado en X y con ello X k-espacio.

Para ver que X es débilmente Hausdorff tomemos $f : K \longrightarrow X$ continua con K compacto Hausdorff. Como $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$ tiene la topología de la unión, $f(K) \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $f(K) \cap X_n$ es cerrado en X_n para toda $n \in \mathbb{N}$. Denotemos $K_n = f(K) \cap X_n$. Por hipótesis, X_n es k-espacio por lo que $K_n \subseteq X_n$ es cerrado si y sólo si K_n es compactamente cerrado. Para demostrar esto, tomemos $g : L \longrightarrow X_n$ mapeo arbitrario con L compacto y Hausdorff, y consideremos $g^{-1}(K_n)$. Llamemos $h = f\,|_{f^{-1}(K_n)} : f^{-1}(K_n) \longrightarrow X_n$ y consideremos $g \times h : L \times_k f^{-1}(K_n) \longrightarrow X_n \times_k X_n$. Utilizando los mismos argumentos que en la primera parte de la demostración de la Proposición 1.2, tenemos que $proy_L((g \times h)^{-1}(\Delta_{X_n})) = g^{-1}(K_n)$, y como X_n está en KDH, $\Delta_{X_n} \subseteq X_n \times_k X_n$ es cerrado con lo que se obtiene el resultado. ■

Proposición 1.6. *Consideremos el siguiente diagrama de funciones continuas: $X \xrightarrow{p} X' \xrightarrow{i} Y' \xleftarrow{q} Y$ con p suprayectiva, i inyectiva, y q identificación.*

Supongamos que $q^{-1}(i(X'))$ es la unión de una familia finita $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de subconjuntos cerrados, y que existen mapeos $p_\alpha : Y_\alpha \longrightarrow X$ que hacen conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"] & Y_\alpha \arrow[l, "p_\alpha"'] \arrow[d, "q"] \\ X' \arrow[r, "i"] & Y' \end{tikzcd}$$

Entonces i es encaje cerrado y p identificación.

Demostración. Demostremos que si $p^{-1}(F)$ es cerrado en X, con $F \subseteq X'$, entonces $i(F)$ es cerrado en Y'.

Ya que $q^{-1}\big(i(X')\big) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} Y_\alpha$, tenemos entonces $q^{-1}\big(i(F)\big) = q^{-1}(i(F)) \cap (\bigcup\limits_{\alpha\in I} Y_\alpha)$. Claramente $q^{-1}\big(i(F)\big) \cap (\bigcup\limits_{\alpha\in I} Y_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in I}\big(Y_\alpha \cap q^{-1}(i(F))\big)$. Como $Y_\alpha \cap q^{-1}(i(F)) = q\,|_{Y_\alpha}^{-1}\,(i(F))$, entonces $\bigcup\limits_{\alpha\in I}\big(Y_\alpha \cap q^{-1}(i(F))\big) = \bigcup\limits_{\alpha\in I}\big(q\,|_{Y_\alpha}^{-1}\,(i(F))\big)$. Por hipótesis, sabemos que para toda $\alpha \in I$ el diagrama conmuta, por lo tanto, si $F \subseteq X'$, entonces $p_\alpha^{-1}(p^{-1}(F)) = q\,|_{Y_\alpha}^{-1}\,(i(F))$, con lo que $\bigcup\limits_{\alpha\in I}\big(q\,|_{Y_\alpha}^{-1}\,(i(F))\big) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} p_\alpha^{-1}\big(p^{-1}(F)\big)$, y con ello $q^{-1}(i(F)) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} p_\alpha^{-1}\big(p^{-1}(F)\big)$.

Tanto $p^{-1}(F) \subseteq X$ como $Y_\alpha \subseteq Y$ son cerrados en sus respectivos espacios, por lo que $p_\alpha^{-1}\big(p^{-1}(F)\big)$ es cerrado en Y para toda α. Más aún, $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un conjunto finito con lo que $\bigcup\limits_{\alpha\in I} p_\alpha^{-1}\big(p^{-1}(F)\big) = q^{-1}(i(F))$ es unión finita de cerrados. Como q es una identificación, $i(F)$ es cerrado, y como $i^{-1}(i(F)) = F$ por ser inyectiva, F es cerrado, demostrando que p es una identificación.

Trivialmente, si F es cerrado en X', $p^{-1}(F)$ es cerrado en X, y utilizando el argumento previo vemos que $i(F)$ es cerrado en Y'. Con esto, i resulta un encaje cerrado. ∎

Capítulo 2

Los grupos topológicos F(X,G)

Todos los espacios topológicos considerados en este capítulo, al igual que las construcciones que los involucren, serán tomados, salvo que se especifique lo contrario, en la categoría KDH vista en el capítulo anterior.

Construiremos, a partir de un espacio topológico basado y un grupo topológico abeliano, un grupo topológico abeliano en la categoría KDH, con el cual definiremos las teorías de homología y cohomología que usaremos en éste, y capítulos subsecuentes. Los mapeos entre los espacios topológicos mandan el punto base en el punto base.

Definición 2.1. Sea X un espacio topológico basado $* \in X$, y G un grupo abeliano escrito aditivamente. Se define $F(X,G)$ como el conjunto de funciones $u : X \to G$ tales que $u(*) = 0$, y $u(x) = 0$ para casi toda $x \in X$: para todas salvo un número finito. Si estos elementos son $x_1, \ldots, x_n$, y $u(x_i) = g_i$, $i = 1, \ldots, n$, resulta conveniente expresar a u como $\sum_{i=1}^{n} g_i x_i = g_1 x_1 + \ldots + g_n x_n$. En caso de que $x_i = x_j$, $i \neq j$, la suma tiene sentido como la función u que toma el valor $g_i + g_j$ en x, donde $x = x_i = x_j$; la suma se expresa de manera reducida. En particular, si $x \neq *$, gx resulta la función cuyo valor en x es g, y 0 en cualquier otro elemento. El símbolo $g*$ representa a la función cuyo valor en cada $x \in X$ es 0.

Proposición 2.1. *Con la operación* $(u + u')(x) = u(x) + u'(x)$*,* $F(X, G)$ *tiene estructura de grupo abeliano.*

Demostración. Tanto u como u' no se anulan en a lo mucho un número finito de elementos, por lo tanto, su suma, tal y como se definió, también.

Claramente, $g*$ es elemento identidad. Si $u = \sum_{i=1}^{n} g_i x_i$, entonces $-u = \sum_{i=1}^{n} -g_i x_i$ es su inversa.

La asociatividad y la conmutatividad son claras. ■

Proposición 2.2. *Sea* $\psi : X \longrightarrow X'$ *una aplicación continua de espacios topológicos, y* $\varphi : G \longrightarrow G'$ *un morfismo de grupos abelianos. Entonces, existe un único morfismo de grupos abelianos* $F(\psi, \varphi) : F(X, G) \longrightarrow F(X', G')$ *tal que* $F(\psi, \varphi)(g_1 x_1 + \ldots + g_n x_n) = \varphi(g_1)\psi(x_1) + \ldots + \varphi(g_n)\psi(x_n)$

Demostración. Si $g_1 x_1 + \ldots + g_n x_n = u \in F(X, G)$ no es una expresión reducida, los puntos que se repitan, bajo la función ψ, van a dar al mismo punto. Por lo tanto, no importa la expresión que demos de u, la función $F(\psi, \varphi)$ esta bien definida.

Sea $u \in F(X, G)$. Definimos $F(\psi, \varphi) : F(X, G) \longrightarrow F(X', G')$ como

$$F(\psi, \varphi)(u) = F(\psi, \varphi)(g_1 x_1 + \ldots + g_n x_n) = \varphi(g_1)\psi(x_1) + \ldots + \varphi(g_n)\psi(x_n)$$

donde $u = g_1 x_1 + \ldots + g_n x_n$.

Sean $u_1 = \sum_{i=1}^{n} g_i x_i$ y $u_2 = \sum_{j=1}^{m} g'_j x'_j$. Entonces

$$F(\psi, \varphi)(u_1 + u_2) = F(\psi, \varphi)(g_1 x_1 + \ldots + g_n x_n + g'_1 x'_1 + \ldots + g'_m x'_m)$$

$$= \varphi(g_1)\psi(x_1) + \ldots + \varphi(g_n)\psi(x_n) + \varphi(g'_1)\psi(x'_1) + \ldots + \varphi(g'_m)\psi(x'_m)$$

$$= F(\psi, \varphi)(u_1) + F(\psi, \varphi)(u_2)$$

Como ψ es una aplicación basada $F(\psi, \varphi)(g*) = g*'$, y por lo tanto, $F(\psi, \varphi)$ es un morfismo de grupos abelianos.

La unicidad es inmediata de la definición. ■

Por simplicidad, denotaremos a $F(\psi, Id_G)$ y a $F(Id_X, \varphi)$ como ψ_* y φ_* respectivamente.

Considerando una topología para G, compatible con su estructura algebraica, se le dará una topología a $F(X,G)$ con la cual tendrá la propiedad de ser un grupo topológico abeliano en KDH. Esto también se puede hacer para G monoide topológico abeliano [**MCM**], sin embargo, en muchas de las aplicaciones, en cuyo caso se especificará, nos restringiremos a grupos abelianos discretos. La razón será clara más adelante.

Para cada $n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, sea $F_n(X,G)$ el subconjunto de $F(X,G)$ consistente de aquellos elementos que no se anulan en a lo más n puntos. Entonces, $F_0(X,G) = \{0\}$ y para $n \geq 1$, $F_n(X,G)$ consta de elementos de la forma $g_1x_1 + \ldots + g_nx_n \quad g_i \in G,\ x_i \in X$. Por lo tanto, podemos ver a $F(X,G)$, como la unión de la sucesión ascendente de subconjuntos $F_0(X,G) \subset F_1(X,G) \subset \ldots \subset F_n(X,G) \subset \ldots$. Claramente $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n(X,G) = F(X,G)$.

A cada $F_n(X,G)$, $n \geq 1$, se le da la topología del cociente a través de la función suprayectiva

$$\mu_n : (G \times X)^n \longrightarrow F_n(X,G)$$

$$(g_1, x_1, \ldots, g_n, x_n) \longmapsto g_1x_1 + \ldots + g_nx_n$$

Finalmente, a $F(X,G)$ se le da la topología de la unión de la sucesión ascendente de los $F_n(X,G)$. Para esto, falta verificar que $F_{n-1}(X,G)$ es cerrado en $F_n(X,G)$.

Lema 2.1. *Para toda $n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $F_{n-1}(X,G)$ es un subespacio cerrado de $F_n(X,G)$.*

Demostración. Sea

$$j : (G \times X)^{n-1} \hookrightarrow (G \times X)^n$$

$$(g_1, x_1, \ldots, g_{n-1}, x_{n-1}) \longmapsto (g_1, x_1, \ldots, g_{n-1}, x_{n-1}, 0, *)$$

Consideremos la inclusión $i : F_{n-1}(X,G) \hookrightarrow F_n(X,G)$ y el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(G \times X)^{n-1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\mu_{n-1}"] & (G \times X)^n \arrow[d, "\mu_n"] \\
F_{n-1}(X,G) \arrow[r, "i"] & F_n(X,G)
\end{tikzcd}$$

Claramente j es continua, μ_{n-1} y μ_n son identificaciones, y el diagrama conmuta. Por lo tanto, i es continua.

Consideremos los siguientes subconjuntos cerrados de $(G \times X)^n$

$$Y_{kl} = \{(g_1, x_1, \ldots, g_n, x_n) \mid \ x_k = x_l\} \quad 1 \leq k < l \leq n$$

$$Y_j = \{(g_1, x_1, \ldots, g_n, x_n) \mid g_j = 0 \ o \ x_j = *\} \quad 1 \leq j \leq n$$

Si consideramos el homeomorfismo $\varphi_{kl} : (G \times X)^n \longrightarrow G^n \times X^n$ tal que $(g_1, x_1, \ldots, g_n, x_n) \longmapsto (g_1, \ldots, g_n, x_k, x_l, x_1, \ldots, x_n)$, entonces $\varphi_{kl}(Y_{kl}) = G^n \times \Delta_X \times X^{n-2}$. Como X está en KDH, y bajo esta hipótesis la Proposición 1.2 asegura que Δ_X es cerrado en $X \times X$, entonces $G^n \times \Delta_X \times X^{n-2}$ es cerrado en $G^n \times X^n$, con lo que Y_{kl} es cerrado en $(G \times X)^n$.

Definamos $U_j = \{(g_1, x_1, \ldots, g_n, x_n) \mid g_j = 0\}$, y $V_j = \{(g_1, x_1, \ldots, g_n, x_n) \mid x_j = *\}$. Claramente $U_j \cup V_j = Y_j$. Como X y G son débilmente Hausdorff, también son T_1 y con ello sus puntos cerrados. Por lo tanto U_j y V_j son cerrados en $(G \times X)^n$ y con ello Y_j también.

Afirmación 2. *La unión de los Y_{kl} y Y_j es $\mu_n^{-1}(F_{n-1}(X,G))$*

Demostración. $\subseteq$) Si $y \in Y_j$ entonces $y = (g_1, x_1, \ldots, 0, *, \ldots, g_n, x_n)$ donde $g_j = 0$ o $x_j = *$, por lo tanto $\mu_n(y) = g_1x_1 + \ldots + g_{j-1}x_{j-1} + g_{j+1}x_{j+1} + \ldots + g_nx_n$. Es claro que $\mu_n(y)$ no se anula en a lo más $n-1$ elementos de su dominio, por lo que $\mu_n(y) \in F_{n-1}(X,G)$.

Si $y \in Y_{kl}$, $y = (g_1, x_1, \ldots, g_k, x_k, \ldots, g_l, x_k, \ldots, g_n, x_n)$ y $\mu_n(y) = g_1x_1 + \ldots + (g_k + g_l)x_k + \ldots + g_{l-1}x_{l-1} + g_{l+1}x_{l+1} \ldots + g_nx_n$. Una vez más, es claro que $\mu_n(y)$ no se anula en a lo más $n-1$ puntos, y concluimos que $\mu_n(y) \in F_{n-1}(X,G)$.

$\supseteq$) Sea $y \in \mu_n^{-1}(F_{n-1}(X,G))$. Claramente $\mu_n(y) \in F_{n-1}(X,G)$. Si $y = (g_1, x_1, \ldots, g_n, x_n)$ entonces $x_i = x_j$ para alguna $i \neq j$, o $g_i = 0$ para alguna i, o $x_i = *$ para alguna i. Por lo tanto $y \in Y_j$ para alguna i, o Y_{kl} para algunas k y l. ■

Sea $p_j : Y_j \longrightarrow (G \times X)^{n-1}$ la función que omite la j-ésima coordenada, y $p_{kl} : Y_{kl} \longrightarrow (G \times X)^{n-1}$ la función que reemplaza la k-ésima coordenada por $(g_k + g_l, x_k)$ y omite la l-ésima coordenada. Ambas resultan continuas ya que son la restricción de una proyección, y composición de operar en una entrada con una proyección, respectivamente.

Tenemos pues, el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(G \times X)^{n-1} \arrow[d, "\mu_{n-1}"] & & Y_j, Y_{kl} \subseteq (G \times X)^n \arrow[ll, "p_{kl}"', "p_j"] \arrow[d, "\mu_n|_{Y_j, Y_{kl}}"] \\
F_{n-1}(X,G) \arrow[rr, "i"] & & F_n(X,G)
\end{tikzcd}$$

Claramente se cumplen las hipótesis de la Proposición 1.6, con lo que i es un encaje cerrado. ■

Definición 2.2. Si X es un espacio topológico, y G es un grupo topológico abeliano, a $F(X,G)$ se le da la topología de la unión de la cadena ascendente de subespacios $F_n(X,G)$, donde cada uno de éstos tiene la topología del cociente dada por μ_n.

Definición 2.3. Sea X un espacio topológico y $X^n = X \times \ldots \times X$ su enésimo producto Cartesiano para $n \geq 1$. Si Σ_n denota el grupo de permutaciones del conjunto

$\{1, \ldots, n\}$, entonces hay una acción derecha de este grupo sobre X^n que permuta las entradas. Para $\sigma \in \Sigma_n$ definimos

$$(x_1, \ldots, x_n)\sigma = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}), \qquad x_i \in X$$

El espacio de órbitas de esta acción

$$SP^n X = X^n/\Sigma_n$$

dotado de la topología cociente, es el *enésimo producto simétrico de* X.

Lema 2.2. *Si X está en KDH, entonces su enésimo producto simétrico $SP^n X$ también.*

Demostración. Si $p : X^n \longrightarrow SP^n X$ es el mapeo de órbitas, entonces, por la Proposición 1.3, basta verificar que $(p \times p)^{-1}(\Delta_{SP^n X})$ es cerrado en $X^n \times X^n$, donde, claramente, $(p \times p)^{-1}(\Delta_{SP^n X}) = \{(\overline{x}, \overline{x}\sigma) \mid \overline{x} \in X^n,\ \sigma \in \Sigma_n\}$.

Consideremos $\sigma \in \Sigma_n$ fijo, y el mapeo $\rho_\sigma : X^n \longrightarrow X^n$ dado por $\rho_\sigma(\overline{x}) = \overline{x}\sigma$. La función $Id \times \rho_\sigma : X^n \times X^n \longrightarrow X^n \times X^n$ es continua por lo que $(Id \times \rho_\sigma)^{-1}(\Delta_{X^n}) = \{(\overline{x}, \overline{x}\sigma^{-1}) \mid x \in X\}$ es cerrado en $X^n \times X^n$. Sin embargo, $\{(\overline{x}, \overline{x}\sigma) \mid x \in X,\ \sigma \in \Sigma_n\} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_n} (Id \times \sigma)^{-1}(\Delta_{X^n})$, y Σ_n es finito, por lo tanto $(p \times p)^{-1}(\Delta_{SP^n X})$ es cerrado. ∎

Teorema 2.1. *El espacio $F(X, G)$ está en KDH.*

Demostración. Según la Proposición 1.5, basta probar que $F_n(X, G)$ está en KDH para toda $n \geq 0$.

Trivialmente $F_0(X, G)$ está en KDH. Sea $n > 0$ y supongamos inductivamente que $F_{n-1}(X, G)$ también está.

Como G es abeliano, $\mu_n : (G \times X)^n \longrightarrow F_n(X, G)$ factoriza a través de las identificaciones $q : (G \times X)^n \longrightarrow SP^n(G \times X)$ y $\widetilde{\mu}_n : SP^n(G \times X) \longrightarrow F_n(X, G)$

$$
\begin{tikzcd}
(G\times X)^n \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\mu_n"'] & SP^n(G\times X) \arrow[d, "\widetilde{\mu_n}"] \\
& F_n(X,G)
\end{tikzcd}
$$

Consideremos $F_{n-1}(X,G) \subseteq F_n(X,G)$. Por el Lema 2.1 esta contención es cerrada, con lo que $\widetilde{\mu}_n^{-1}(F_{n-1}(X,G))$ es cerrado en $SP^n(G\times X)$.

El complemento de $\widetilde{\mu}_n^{-1}(F_{n-1}(X,G))$ en $SP^n(G\times X)$ consta de elementos con todas las x_i distintas, ninguna igual a $*$, y todas las g_i distintas del cero. Por lo tanto, $\widetilde{\mu}_n$, en este complemento, es biyectiva, y define un homeomorfismo relativo $h:\big(SP^n(G\times X),\widetilde{\mu}_n^{-1}(F_{n-1}(X,G))\big)\longrightarrow\big(F_n(X,G),F_{n-1}(X,G)\big)$.

Por el Lema 2.2, $SP^n(G\times X)$ está en KDH y por hipótesis de inducción $F_{n-1}(X,G)$ también. Entonces, por Proposición 1.4, $F_n(X,G)$ está en KDH. ■

Definición 2.4. Un *espacio filtrado* X consiste de un objeto X en KDH y una sucesión de subespacios cerrados $X_0\subset X_1\subset\ldots\subset X_n\subset\ldots$ tal que $X=\bigcup_{n=0}^{\infty}X_n$ y X tiene la topología de la unión.

Debido a los resultados que requiere el siguiente lema omitiremos su demostración. Los lineamientos de tal prueba se pueden verificar en el Lema 9.3 y Teorema 10.3 del artículo escrito por Steenrod [**NES**].

Lema 2.3. *El producto $X\times Y$ de espacios filtrados, tiene la topología de la unión dada por los subespacios $\{(X\times Y)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $(X\times Y)_n=\bigcup_{i=0}^{n}X_i\times Y_{n-i}$ $(n=0,1\ldots)$. Por lo tanto, el producto es un espacio filtrado.*

Teorema 2.2. *Si X es un espacio topológico y G un grupo topológico abeliano, entonces $F(X,G)$ es un grupo topológico abeliano.*

Demostración. Para verificar la continuidad de la suma definida en la Proposición 2.1, basta verificar, debido al Teorema 2.1, Lema 2.3, y a que $F(X,G)$ tiene la topología de la unión, que su restricción a $F_m(X,G) \times F_n(X,G)$ es continua para toda $m,n \geq 0$.

Esta restricción compone la parte inferior del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(G\times X)^m \times (G\times X)^n \arrow[r] \arrow[d, "\mu_m\times\mu_n"] & (G\times X)^{m+n} \arrow[d, "\mu_{m+n}"] \\
F_m(X,G)\times F_n(X,G) \arrow[r] & F_{m+n}(X,G)
\end{tikzcd}$$

donde la flecha superior es el homeomorfismo canónico. Como $\mu_m \times \mu_n$ es una identificación por el Teorema 1.3, entonces la restricción resulta continua.

De manera similar, si G tiene una inversión continua, la inversión de $F(X,G)$ resulta continua debido al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(G\times X)^n \arrow[r] \arrow[d, "\mu_n"] & (G\times X)^n \arrow[d, "\mu_n"] \\
F_n(X,G) \arrow[r] & F_n(X,G)
\end{tikzcd}$$

donde la flecha superior manda $\big((g_1,x_1,\ldots,(g_n,x_n)\big)$ a $\big((-g_1,x_1),\ldots,(-g_n,x_n)\big)$. ■

Proposición 2.3. *Sea $\psi : X \longrightarrow X'$ un mapeo y $\varphi : G \longrightarrow G'$ un morfismo de grupos topológicos abelianos. Entonces $F(\psi,\varphi) : F(X,G) \longrightarrow F(X',G')$ definido como en la Proposición 2.2, es un morfismo de grupos topológicos abelianos.*

Demostración. En la Proposición 2.2 se demostró que $F(\psi,\varphi)$ es morfismo de grupos abelianos. Sólo falta probar que $F(\psi,\varphi)$ es continua. Para ello, debido a la propiedad universal de la topología de la unión, basta probar que la restricción de $F(\psi,\varphi)$ a $F_n(X,G)$, que denotamos por $F_n(\psi,\varphi)$, es continua.

Para cada $n \geq 0$ tenemos

$$\begin{tikzcd}
(G \times X)^n \arrow[r, "(\varphi\times\psi)^n"] \arrow[d, "\mu_n"] & (G' \times X')^n \arrow[d, "\mu'_n"] \\
F_n(X,G) \arrow[r, "F_n(\psi,\varphi)"] & F_n(X',G')
\end{tikzcd}$$

Como $\mu'_n \circ (\varphi \times \psi)^n$ es continua y μ_n identificación, $F_n(\psi, \varphi)$ es continua para toda $n \geq 1$. ■

Corolario 2.1. *Si A es la categoría de espacios topológicos basados, y B la categoría de grupos topológicos abelianos, entonces $F(\cdot,\cdot)$ es un bifuntor $A \times B \longrightarrow B$, covariante en ambas variables.*

Demostración. La asignación de objetos y morfismos ya fue dada. Que la identidad va a la identidad es claro debido a la definición de $F(\psi, \varphi)$: si $\psi = Id_X$ y $\varphi = Id_G$, entonces

$$F(\psi, \varphi)(gx) = \varphi(g)\psi(x) = gx$$

por lo tanto $F(\psi, \varphi) = Id_{F(X,G)}$.

Si tenemos $\varphi_1 : G_1 \longrightarrow G_2$, $\varphi_2 : G_2 \longrightarrow G_3$ y $\psi_1 : X_1 \longrightarrow X_2$, $\psi_2 : X_2 \longrightarrow X_3$, entonces

$$F(\psi_2, \varphi_2) \circ F(\psi_1, \varphi_1)(gx) = F(\psi_2, \varphi_2)\big(F(\psi_1, \varphi_1)(gx)\big) = F(\psi_2, \varphi_2)\big(\varphi_1(g)\psi_1(x)\big)$$

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1)(g)(\psi_2 \circ \psi_1)(x) = F(\psi_2 \circ \psi_1, \varphi_2 \circ \varphi_1)$$

■

Las siguientes son algunas propiedades importantes del funtor F. En particular, usaremos estos resultados para definir los grupos de homología y cohomología que utilizaremos.

Proposición 2.4. *Si G es un grupo topológico abeliano, y $H_t : X \longrightarrow X'$ una homotopía basada, entonces $(H_t)_* : F(X,G) \longrightarrow F(X',G)$ es una homotopía.*

Demostración. Al igual que en la Proposición 2.3, para demostrar la continuidad de $(H_t)_*$ nos valemos de la propiedad universal de la topología de la unión, y del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(G \times X)^n \arrow[r, "(Id \times H_t)^n"] \arrow[d, "\mu_n"] & (G \times X')^n \arrow[d, "\mu_n"] \\
F_n(X,G) \arrow[r] & F_n(X',G)
\end{tikzcd}$$

donde la flecha inferior es la restricción de $(\psi_t)_*$ a $F_n(X,G)$.

Definimos $\widetilde{H} : F(X,G) \times I \longrightarrow F(X',G)$ utilizando $(H_t)_*$, de tal forma que (u,t) va a $(H_t)_*(u)$.

El siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(G \times X)^n \times I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mu_n \times Id"] & (G \times X') \arrow[d, "\mu"] \\
F_n(X,G) \times I \arrow[r] & F_n(X',G)
\end{tikzcd}$$

donde φ manda $(g_1, x_1, \ldots, g_n, x_n, t)$ a $\big(g_1, H(x_1,t), \ldots, g_n, H(x_n,t)\big)$, permite verificar la continuidad de la flecha inferior, que es la restricción de $\widetilde{H}$ a $F_n(X,G)$, por lo que $\widetilde{H}$ es continua. Claramente $\widetilde{H}_t = (H_t)_*$, con lo que se concluye el resultado. ∎

Corolario 2.2. *Si $f, g : X \longrightarrow X'$ son funciones homotópicas, entonces $f_*, g_* : F(X,G) \longrightarrow F(X',G)$ también.*

Definición 2.5. Sea $M(Y)$ la suma topológica de los espacios Y^n $(n = 0, 1, \ldots)$ y $\mu : M(G \times X) \longrightarrow F(X, G)$ la función cuya restricción a $(G \times X)^n$ es μ_n seguida de la inclusión $i_n : F_n(X, G) \hookrightarrow F(X, G)$.

Lema 2.4. *La función μ recién definida, es una identificación.*

Demostración. Según la definición de μ, se tiene para toda $n \in \mathbb{N}$ el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M(G \times X) \arrow[r, "\mu"] & F(X,G) \\ (G \times X)^n \arrow[u, "j_n"] \arrow[r, "\mu_n"] & F_n(X,G) \arrow[u, "i_n"] \end{tikzcd}$$

Sea $A \subseteq F(X, G)$ tal que $\mu^{-1}(A)$ es cerrado. Como j_n es continua, $j_n^{-1}(\mu^{-1}(A))$ es cerrado. Además $j_n^{-1}(\mu^{-1}(A)) = \mu_n^{-1}(i_n^{-1}(A)) = \mu_n^{-1}(A \cap F_n(X, G))$. Por lo tanto $\mu_n^{-1}(A \cap F_n(X, G))$ es cerrado.

Como μ_n es una identificación, y el diagrama conmuta para toda $n \in \mathbb{N}$, $A \cap F_n(X, G)$ es cerrado para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $F(X, G)$ tiene la topología de la unión, A es cerrado en $F(X, G)$, y con ello μ es una identificación. ∎

Proposición 2.5. *Sean X y Y espacios topológicos, y G un grupo topológico abeliano. Entonces $F(X \wedge Y, G)$ y $F(Y, F(X, G))$ son isomorfos como grupos topológicos abelianos.*

Demostración. Definimos las siguientes funciones

$$\varphi : F(X \wedge Y, G) \longrightarrow F(Y, F(X, G)) \quad \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i \wedge y_i)\Big) \equiv \sum_{i=1}^{n} (g_i x_i) y_i$$

$$\psi : F(Y, F(X, G)) \longrightarrow F(X \wedge Y, G) \quad \psi\Big(\sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{i(j)} g_{ij} x_{ij}) y_j\Big) \equiv \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{i(j)} g_{ij}(x_{ij} \wedge y_j)\Big)$$

Éstas resultan ser inversas una de la otra:

$$\psi\Big(\varphi(\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i \wedge y_i))\Big) = \psi\Big(\sum_{i=1}^{n}(g_i x_i)y_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i \wedge y_i)$$

$$\varphi\Big(\psi(\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{i(j)} g_{ij}x_{ij})y_j)\Big) = \varphi\Big(\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{i(j)} g_{ij}(x_{ij} \wedge y_j))\Big) = \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{i(j)}(g_{ij}x_{ij})y_j\Big)$$

Además

$$\varphi(e(x \wedge y)) = (ex)y \qquad \psi((ex)y) = e(x \wedge y)$$

Más aún

$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i \wedge y_i) + \sum_{j=1}^{m} g_j(x_j \wedge y_j)\Big) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n+m} g_i(x_i \wedge y_i)\Big) = \sum_{i=1}^{n+m}(g_i x_i)y_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n}(g_i x_i)y_i + \sum_{j=1}^{m}(g_j x_j)y_j = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i \wedge y_i)\Big) + \varphi\Big(\sum_{j=1}^{m} g_j(x_j \wedge y_j)\Big)$$

$$\text{donde } x_i = x_j, g_i = g_j, y_i = y_j, \text{ si } i = n + j$$

$$\psi\Big(\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{i(j)} g_{ij}x_{ij})y_j\Big) + \sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{l=1}^{l(k)}(g_{lk}x_{lk})y_k\Big) = \psi\Big(\sum_{j=1}^{n+m}(\sum_{i=1}^{i(j)} g_{ij}x_{ij})y_j\Big) =$$

$$\sum_{j=1}^{n+m}\Big(\sum_{i=1}^{i(j)} g_{ij}(x_{ij} \wedge y_j)\Big) = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{i(j)} g_{ij}(x_{ij} \wedge y_j)\Big) + \sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{l=1}^{l(k)} g_{lk}(x_{lk} \wedge y_k)\Big) =$$

$$\psi\Big(\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{i(j)}(g_{ij}x_{ij})x_j)\Big) + \psi\Big(\sum_{k=1}^{m}(\sum_{l=1}^{l(k)}(g_{lk}x_{lk})y_k)\Big) \text{donde } y_j = y_k \text{ si } j = n + k$$

Por lo tanto, φ y ψ son isomorfismos.

Falta verificar que φ y ψ son continuas. Para este propósito consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M(G\times X\times Y) \arrow[r, shift left, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "M(Id_G\times\lambda)"] & M(M(G\times X)\times Y) \arrow[l, shift left, "\widetilde{\psi}"] \arrow[d, "M(\mu\times Id_Y)"] \\
M(G\times(X\wedge Y)) \arrow[d, "\mu"] & M(F(X,G)\times Y) \arrow[d, "\mu"] \\
F(X\wedge Y,G) \arrow[r, shift left, "\varphi"] & F(Y,F(X,G)) \arrow[l, shift left, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son identificaciones; μ como en la Definición 2.5 y $\lambda : X\times Y \longrightarrow X\times Y/X\vee Y = X\wedge Y$. Las funciones φ y ψ están cubiertas por $\widetilde{\varphi}$ y $\widetilde{\psi}$ respectivamente, donde

$$\widetilde{\varphi}((g_1,x_1,y_1),\ldots,(g_n,x_n,y_n)) = (((g_1,x_1),y_1,\ldots,((g_n,x_n),y_n))$$
$$\widetilde{\psi}((((g_{11},x_{11}),\ldots,(g_{m_11},x_{m_11})),y_1),\ldots,(((g_{1n},x_{1n},\ldots,(g_{m_nn},x_{m_nn})),y_n))) =$$
$$((g_{11},x_{11},y_1),\ldots,(g_{m_11},x_{m_11},y_1),\ldots,(g_{1n},x_{1n},y_n,\ldots,(g_{m_nn},x_{m_nn},y_n))).$$

La conmutatividad del diagrama en el sentido de la φ y $\widetilde{\varphi}$, se sigue de que

$$\mu(M(\mu\times Id_Y)((g_1,x_1,y_1),\ldots,(g_n,x_n,y_n)))) = \sum_{i=1}^{n}(g_ix_i)y_i$$

y

$$\varphi(\mu(M(Id_G\times\lambda)((g_1,x_1,y_1),\ldots,(g_n,x_n,y_n)))) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i\wedge y_i)) = \sum_{i=1}^{n}(g_ix_i)y_i$$

La prueba de que conmuta en el sentido opuesto es similar.

Para verificar que $\mu(M(Id_G \times \lambda))$ y $\lambda(M(\mu \times Id_Y))$ son identificaciones consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M(G \times X \times Y) \arrow[r, "M(Id_G \times \lambda)"] & M(G \times (X \wedge Y)) \\ (G \times X \times Y)^n \arrow[u, "\imath_n"] \arrow[r, "(Id_G \times \lambda)^n"] & (G \times (X \wedge Y))^n \arrow[u, "\jmath_n"'] \end{tikzcd}$$

Por el Teorema 1.3, $(Id_G \times \lambda)^n$ es una identificación para toda $n \in \mathbb{N}$, y como el diagrama conmuta para toda n, entonces $M(Id_G \times \lambda)$ también es identificación. Un diagrama similar permite concluir lo mismo de $M(\mu \times Id_Y)$.

De la función $f = i \times Id_Y : G \times X \times Y \longrightarrow M(G \times X) \times Y$ tal que $(g, x, y) \longmapsto ((g, x), y)$, que claramente es continua, obtenemos $f^n : (G \times X \times Y)^n \longrightarrow (M(G \times X) \times Y)^n$. Esta última define $M(f^n)$ en cada sumando por lo que $M(f^n)$ es continua. Como $M(f^n) = \widetilde{\varphi}$, concluimos la continuidad de $\widetilde{\varphi}$.

Para establecer la continuidad de $\widetilde{\psi}$ consideremos $g_n : (G \times X)^n \times Y \longrightarrow (G \times X \times Y)^n$ tal que $((g_1, x_1), (g_2, x_2), \ldots, (g_n, x_n), y) \longmapsto (g_1, x_1, y, \ldots, g_n, x_n, y)$. Esta función se factoriza en

$$(G \times X)^n \times Y \longrightarrow (G \times X)^n \times Y^n \longrightarrow (G \times X \times Y)^n$$

$$((g_1, x_1), \ldots, (g_n, x_n), y) \longmapsto ((g_1, x_1), \ldots, (g_n, x_n), y, \ldots, y) \longmapsto$$

$$((g_1, x_1, y), \ldots, (g_n, x_n, y))$$

donde la segunda función es un homeomorfismo. Por lo tanto, g_n es continua.

A partir de g_n definimos $g : M(G \times X) \times Y \longrightarrow M(G \times X \times Y)$ como $g\mid_{(G\times X)^n \times Y} = g_n$. Sea $g^m : (M(G \times X) \times Y)^m \longrightarrow M(G \times X \times Y)$ tal que $g^m\mid_{((G\times X)\times Y)^m} : ((G \times X) \times Y)^m \longrightarrow (G \times X \times Y)^{nm}$. Claramente g^m también es continua.

Sea $G : M(M(G \times X) \times Y) \longrightarrow M(G \times X \times Y)$ tal que $G \mid_{(M(G\times X)\times Y)^m} = g^m$. Como G es continua y $G = \widetilde{\psi}$, entonces $\widetilde{\psi}$ resulta continua.

Hecho todo esto, podemos concluir la continuidad de φ y ψ, y con ello, el que $F(X \wedge Y, G)$ y $F(Y, F(X, G))$ sean isomorfos como grupos topológicos abelianos. ■

Algunos de los siguientes resultados se enunciarán sin demostración debido al desarrollo previo que requieren. Se aconseja al lector leer el artículo de McCord [**MCM**].

El resultado a continuación es un caso particular del Teorema 10.2 de [**MCM**]. Necesitamos dos definiciones previas.

Definición 2.6. Si G es un grupo topológico abeliano, definimos el mapeo

$$\eta : G \longrightarrow \Omega F(\mathbb{S}^1, G) \qquad\qquad \eta(g)(t) = g(\overline{1-t})$$

donde $\overline{1-t}$ es la imagen de $1-t$ bajo la identificación canónica $\rho : I \longrightarrow \mathbb{S}^1$.

Definición 2.7. Un espacio topológico X está *bien basado* si la inclusión $i : \{*\} \hookrightarrow X$ de su punto base en X, es una cofibración cerrada.

Para verificar tanto definición como los resultados importantes de cofibraciones, remitimos al lector al capítulo 4 de [**AGP**].

Proposición 2.6. *Si G es un grupo topológico abeliano bien basado, entonces el mapeo de la Definición 2.6, es un $H-$isomorfismo. Esto es, un morfismo de $H-$espacios al mismo tiempo que una equivalencia homotópica basada.*

Definición 2.8. Si X es un espacio topológico y G un grupo topológico abeliano, definimos el mapeo

$$F(X, G) \xrightarrow{h} \Omega F(\Sigma X, G)$$

$$h(g_1x_1 + \ldots + g_nx_n)(t) = g_1(\overline{t} \wedge x_1) + \ldots + g_n(\overline{t} \wedge x_n)$$

donde $\Sigma X \approx \mathbb{S}^1 \wedge X \equiv (\mathbb{S}^1 \times X)/(\mathbb{S}^1 \times \{*_X\} \cup \{*_{\mathbb{S}^1}\} \times X)$.

Proposición 2.7. *Si además de las condiciones de la definición anterior, pedimos que $F(X,G)$ esté bien basado, entonces el mapeo h es un $H-$isomorfismo.*

Demostración. Sea $\tau : \Sigma X \longrightarrow X \wedge \mathbb{S}^1$ el homeomorfismo dado por $\tau(\bar{t} \wedge x) = x \wedge \overline{1-t}$.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(G,X) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\eta"] & \Omega F(\Sigma X, G) \arrow[d, "\Omega(\tau_*)"] \\ \Omega F(\mathbb{S}^1, F(X,G)) \arrow[r, "\Omega\varphi"'] & \Omega F(X \wedge \mathbb{S}^1, G) \end{tikzcd}$$

donde η es el mapeo de la Definición 2.6, y φ el homeomorfismo de la Proposición 2.5. El diagrama claramente conmuta. Por la Proposición 2.6, η es un $H-$isomorfismo. De igual forma, tanto $\Omega\varphi$ como $\Omega(\tau_*)$ son $H-$isomorfismos ya que φ y τ_* son homeomorfismos. Por lo tanto, h es la composición de tres $H-$isomorfismos. ■

La sección 7 de [**MCM**] está dedicada a demostrar que $F(X,G)$ hereda estructura de complejo CW cuando X es triangulable y G es discreto. En general, si X es un complejo CW y $A \subseteq X$ es un subcomplejo, entonces $i : A \hookrightarrow X$ es una cofibración; en particular el punto base de $F(X,G)$ es una $0-$célula, por lo que $F(X,G)$ está bien basado.[1].

En [**JM**], J. Milnor prueba que si X es un espacio basado del mismo tipo de homotopía que un complejo CW, entonces existe una equivalencia homotópica entre éste y un espacio triangulable.

[1] Para verificar lo recién mencionado ver la sección 7 de [**MCM**], y el capítulo 5 sección 1 de [**AGP**]

Teorema 2.3. *Si X es un espacio topológico del mismo tipo de homotopía que un complejo CW, y G es un grupo abeliano discreto, entonces el mapeo definido en 2.8 es un H-isomorfismo.*

Demostración. Por [**JM**] existe una equivalencia homotópica basada $f : X \longrightarrow X'$ donde X' es triangulable.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(G,X) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f_*"] & \Omega F(\Sigma X, G) \arrow[d, "\Omega(\Sigma f)_*"] \\ F(X',G) \arrow[r, "h"'] & \Omega F(\Sigma X', G) \end{tikzcd}$$

Por lo mencionado previo al Teorema 2.3, $F(X',G)$ está bien basado, con lo que la Proposición 2.7 permite concluir que la flecha inferior del diagrama es un $H-$isomorfismo. Las flechas verticales son morfismos de grupos y $H-$grupos respectivamente, gracias a la Proposición 2.3. Como además f es una equivalencia homotópica, Corolario 2.2 permite concluir que tanto f_* como $\Omega(\Sigma f)_*$ son equivalencias homotópicas. Con ello la flecha superior es la composición de tres $H-$isomorfismos. ∎

Teorema 2.4. *Si $h : F(X,G) \longrightarrow \Omega F(\Sigma X, G)$ resulta un H-isomorfismo, entonces obtenemos un isomorfismo*

$$\sigma : [X, F(Y,G)]_* \longrightarrow [X, \Omega F(\Sigma Y, G)]_* \cong [\Sigma X, F(\Sigma Y, G)]_*$$

donde $[-,-]_*$ denota las clases de homotopía punteada. A σ le llamamos isomorfismo de suspensión.

Definición 2.9. Decimos que un espacio topológico X es un *espacio de Eilenberg-MacLane* de tipo $K(G,n)$ si

$$\pi_q(X) \cong \begin{cases} G & \text{si } q = n \\ 0 & \text{si } q \neq n \end{cases}$$

Si G es discreto, tenemos por Teorema 2.3 que $F(\mathbb{S}^q, G) \simeq \Omega F(\mathbb{S}^{q+1}, G)$, y como $F(\mathbb{S}^0, G) \cong G$, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.5. *Si G es un grupo abeliano discreto y $n \geq 0$, entonces $F(\mathbb{S}^q, G)$ es un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo $K(G, q)$ que tiene estructura de grupo topológico abeliano, y de complejo CW.*

Demostración. Del Teorema 2.4 tenemos que $[X, F(Y, G)]_* \cong [\Sigma X, F(\Sigma Y, G)]_*$. Por lo tanto $\pi_q(F(\mathbb{S}^q, G)) \cong \pi_0(F(\mathbb{S}^0, G)) \cong G$. Como $\pi_q(F(\mathbb{S}^0, G)) \cong \pi_q(G) \cong 0$ para toda $q \neq 0$, obtenemos que $\pi_q(F(\mathbb{S}^n, G)) \cong 0$ si $q \neq n$.

La estructura de complejo CW se obtiene de que $\mathbb{S}^n$ es triangulable y de los resultados de la sección 7 de [**MCM**]. ■

Teorema 2.6. *Si X es un espacio del mismo tipo de homotopía de un complejo CW, y G es un grupo abeliano discreto, entonces $\widetilde{H}^q(X; G) = [X, F(\mathbb{S}^q, G)]_*$ define el q-ésimo grupo de cohomología reducida ordinaria con coeficientes en G. La cohomología de parejas está dada por $H^q(X, A; G) = [X/A, F(\mathbb{S}^q, G)]_*$. De igual forma, $\widetilde{H}_q(X, G) = \pi_q(F(X, G))$ define el q-ésimo grupo de homología reducida ordinaria, mientras que el de la pareja está dado por $H_q(X, A; G) = \pi_q(F(X/A, G))$. En particular $H_q(X; G) = [\mathbb{S}^q, F(X^+, G)]_*$ y $H^q(X; G) = [X^+, F(\mathbb{S}^q, G)]_*$; este último es simplemente $[X, F(\mathbb{S}^q, G)]$.*

Demostración. Del Teorema 2.5 tenemos que $F(\mathbb{S}^q, G)$ es un espacio de Eilenberg-MacLane con estructura de complejo CW, por lo que $[X, F(\mathbb{S}^q, G)]_*$ define grupos de cohomología ordinaria.[2]

[2]Capítulo 7 de [**AGP**]

Para la segunda afirmación, verificaremos que se cumplen los axiomas de Eilenberg-Steenrod.

La funtorialidad y homotopía se garantizan debido al Corolario 2.1, Corolario 2.2, y a que π_q cumple ambas propiedades. Para verificar escisión, notemos que si $(X; X_1, X_2)$ es una triada CW, esto es, X complejo CW con subcomplejos X_1 y X_2 tales que $X = X_1 \cup X_2$, entonces la inclusión $j : X_1 \hookrightarrow X$ induce un homeomorfismo entre $X_1/X_1 \cap X_2$ y X/X_2[3]. Ésta a su vez define un isomorfismo entre $\widetilde{H}_q(X_1/X_1 \cap X_2; G) = H_q(X_1, X_1 \cap X_2; G)$ y $\widetilde{H}_q(X/X_2; G) = H_q(X, X_2; G)$, que es, precisamente, la condición de escisión.

En la sección 7 de [**MCM**], se prueba que si (Y, B) es una pareja triangulable y G es discreto, entonces $B \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Y/B$ induce un haz principal locamente trivial $\big(F(Y,G), p_*, F(Y/B,G)\big)$. Como éste haz es una fibración de Serre, obtenemos una sucesión exacta larga al tomar grupos de homotopía[4]

$$\ldots \longrightarrow \pi_q(F(B,G)) \longrightarrow \pi_q(F(Y,G)) \longrightarrow \pi_q(F(Y/B,G)) \longrightarrow \pi_{q-1}(F(B,G)) \ldots$$

Si (X, A) es una pareja del mismo tipo de homotopía que una pareja de complejos CW, por [**JM**], sabemos que existe una homotopía de parejas entre (X, A) y una pareja triangulable (Y, B), a través de la cual obtenemos la sucesión exacta larga de (X, A).

Por último, gracias a que $F(\mathbb{S}^q, G)$ es un espacio de Eilenberg-MacLane y a que $F(\mathbb{S}^0, G) \cong G$, tenemos que

$$H_n(*) = \widetilde{H}_n(\mathbb{S}^0) = \pi_n(F(\mathbb{S}^0, G)) \cong \begin{cases} G & \text{si } q = n \\ 0 & \text{si } q \neq n \end{cases}$$

■

Ahora veremos que la construcción de $F(\cdot,\cdot)$ permite definir productos para homología y cohomología.

[3] Página 182 de [**AGP**]

[4] Capítulo 4 sección 3 de [**AGP**].

Daremos unos resultados preliminares.

Lema 2.5. *La función* $\varepsilon : F(X,G) \longrightarrow G$ *definida por* $\sum_{i=1}^{m} g_i x_i \longmapsto \sum_{i=1}^{m} g_i$ *está bien definida y es continua. En caso de que* G *sea discreto,* $\varepsilon : F(\mathbb{S}^0, G) \longrightarrow G$ *es un isomorfismo de grupos topológicos abelianos.*

Demostración. Consideremos la composición

$$(X \times G)^n \xrightarrow{\mu_n} F_n(X,G) \overset{\varepsilon|_{F_n(X,G)}}{\longrightarrow} G$$

$$(x_1, g_1, \ldots, x_n, g_n) \longmapsto \sum g_i$$

Como G es grupo topológico, la composición resulta continua. La función μ_n es una identificación, por lo tanto $\varepsilon\ |_{F_n(X,G)}$ es continua. Como esto pasa para toda $n \in \mathbb{N}$ y $F(X,G)$ tiene la topología de la unión, ε resulta continua.

En el caso particular de $\varepsilon : F(\mathbb{S}^0, G) \longrightarrow G$ debemos observar que como G es discreto y $F_1(\mathbb{S}^0, G) = F(\mathbb{S}^0, G)$, entonces $F(\mathbb{S}^0, G)$ también es discreto. Ahora, la biyección entre $F(\mathbb{S}^0, G)$ y G es clara al ver que dada $g \in G$ existe un único elemento en $F(\mathbb{S}^0, G)$, en concreto $g(-1)$, tal que bajo ε da g. Por lo tanto $F(\mathbb{S}^0, G)$ y G son homeomorfos como espacios topológicos e isomorfos como grupos. ■

Proposición 2.8. *Sean* X *y* Y *espacios topológicos, y* G *y* H *grupos abelianos discretos. Entonces, la función definida a continuación resulta bilineal y continua.*

$$\varphi : F(X,G) \times F(Y,H) \longrightarrow F(X \wedge Y, G \otimes H)$$

$$(\sum_i g_i x_i, \sum_j h_j g_j) \longmapsto (\sum_{i,j} (g_i \otimes h_j)(x_i \wedge y_j)$$

Demostración. Tanto la bilinealidad, como el hecho de que está bien definida la función, quedan claros dada la regla de correspondencia. La continuidad se verifica a través del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M(G\times X)\times M(H\times Y) & \xrightarrow{M(\varphi)} & M((G\otimes H)\times(X\wedge Y)) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu\times\mu} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ F(X,G)\times F(Y,H) & \xrightarrow{\varphi} & F((G\otimes H),X\wedge Y) \end{array}$$

donde μ es la identificación de la Definición 2.5 y las flechas horizontales tienen la regla de correspondencia dada en esta proposición.

Como μ es identificación, $\mu\times\mu$ también es una identificación por el Teorema 1.3. La conmutatividad del diagrama da la continuidad de $\varphi\circ(\mu\times\mu)$ con lo que se concluye la continuidad de φ. ■

Observación 2.1. a) Como φ es bilineal, la función también se puede ver de la siguiente forma

$$F(X,G)\wedge F(Y,H)\longrightarrow F(X\wedge Y,G\otimes H)$$

b) Si $G=H=R$, donde R es un anillo conmutativo con 1, y $m:R\otimes R\longrightarrow R$ denota la multiplicación en R, componer φ con m_* da

$$F(X,R)\wedge F(Y,R)\longrightarrow F(X\wedge Y,R)$$

■

Estamos en posición de definir los productos.

Proposición 2.9. *Sea X del mismo tipo de homotopía que un complejo CW, y R un anillo conmutativo con 1. Tenemos los siguientes productos cap.*

Si X es 0-conexo y $k\geq q$

$$H^q(X;R)\otimes H_k(X;R)\overset{\frown}{\longrightarrow} H_{k-q}(X;R)$$

Si $k\leq q$

$$H^q(X;R)\otimes H_k(X;R)\overset{\frown}{\longrightarrow} H^{q-k}(X;R)$$

Si $q = k$ tenemos

$$H^q(X;R) \otimes H_q(X;R) \stackrel{<-,->}{\longrightarrow} R$$

Observación 2.2. A este último se le conoce como producto de Kronecker y será fundamental a la hora de verificar la dualidad entre el tránsfer para homología y el tránsfer para cohomología.

Demostración. Definimos la función

$$k : [X^+, F(\mathbb{S}^q, R)]_* \times [\mathbb{S}^k, F(X^+, R)]_* \longrightarrow [\Sigma^k X^+, F(\Sigma^q X^+, R)]_*$$

mediante la composición de dos funciones. La primera es la función

$$[X^+, F(\mathbb{S}^q, R)]_* \times [\mathbb{S}^k, F(X^+, R)]_* \longrightarrow [X^+ \wedge \mathbb{S}^k, F(\mathbb{S}^q, R) \wedge F(X^+, R)]_*$$

que manda $([f]), [f'])$ a $[f \wedge f']$. La segunda es

$$[X^+ \wedge \mathbb{S}^k, F(\mathbb{S}^q, R) \wedge F(X^+, R)]_* \longrightarrow [\Sigma^k X^+, F(\Sigma^q X^+, R)]_*$$

inducida por $m_* \circ \varphi$ recordando que $X^+ \wedge \mathbb{S}^k \approx \Sigma^k X^+$.

Consideremos el isomorfismo σ del Teorema 2.4 y apliquemos σ^{-q} a

$$[\Sigma^k X^+, F(\Sigma^q X^+, R)]_*$$

en el caso en que $k \geq q$. Así obtenemos

$$[\Sigma^k X^+, F(\Sigma^q X^+, R)]_* \approx [\Sigma^{k-q} X^+, F(X, R)]_*.$$

En este caso, la función k queda como

$$k : [X^+, F(\mathbb{S}^q, R)]_* \times [\mathbb{S}^k, F(X^+, R)]_* \longrightarrow [\Sigma^{k-q} X^+, F(X, R)]_*$$

Si ahora componemos k con el homomorfismo

$$[\Sigma^{k-q} X^+, F(X^+, R)]_* \longrightarrow [\mathbb{S}^{k-q}, F(X^+, R)]_*$$

inducido por la inclusión punteada que manda el -1 a algún punto x_{-1} en el espacio conectable por trayectorias X, obtenemos el primer producto

$$\frown : [X^+, F(\mathbb{S}^q, R)]_* \times [\mathbb{S}^k, F(X^+, R)]_* \longrightarrow [\mathbb{S}^{k-q}, F(X^+, R)]_*$$

En cambio, si $k \leq q$, usamos σ^{-k} para obtener el isomorfismo

$$[\Sigma^k X^+, F(\Sigma^q X^+, R)]_* \approx [X^+, F(\Sigma^{q-k} X^+, R)]_*$$

y la función

$$k : [X^+, F(\mathbb{S}^q, R)]_* \times [\mathbb{S}^k, F(X^+, R)]_* \longrightarrow [X^+, F(\Sigma^{q-k} X^+, R)]_*$$

que al componer con el homomorfismo

$$[X^+, F(\Sigma^{q-k} X^+, R)]_* \longrightarrow [X^+, F(\mathbb{S}^{q-k}, R)]_*$$

inducido por el mapeo basado $X^+ \longrightarrow \mathbb{S}^0$, permite obtener el segundo producto

$$\frown : [X^+, F(\mathbb{S}^q, R)]_* \times [\mathbb{S}^k, F(X^+, R)]_* \longrightarrow [X^+, F(\mathbb{S}^{q-k}, R)]_*$$

Para el producto de Kronecker, tomemos $q = k$, usemos el producto anterior, y consideremos la composición

$$[X^+, F(\mathbb{S}^q, R)]_* \times [\mathbb{S}^k, F(X^+, R)]_* \longrightarrow [X^+, F(\mathbb{S}^0, R)]_* \longrightarrow [\mathbb{S}^0, F(\mathbb{S}^0, R)]_* = R$$

donde la última flecha está inducida por la inclusión punteada $\mathbb{S}^0 \longrightarrow X^+$, y el isomorfismo es consecuencia del Lema 2.5. ■

Capítulo 3

Aplicaciones cubrientes ramificadas

En este capítulo tratamos las aplicaciones cubrientes ramificadas. Ninguna condición especial se les pide a los espacios topológicos utilizados, salvo que se especifique.

Definición 3.1. Una aplicación cubriente ramificada de grado n es un mapeo $p : E \longrightarrow X$ acompañado de una función multiplicidad $\mu : E \longrightarrow \mathbb{N}$, que cumple las siguientes condiciones:

a) Las fibras $p^{-1}(x)$, $x \in X$, son finitas y discretas.

b) Para cada $x \in X$, $\sum\limits_{e \in p^{-1}(x)} \mu(e) = n$.

c) La función $\varphi_p : X \longrightarrow SP^n E$ definida por

$$\varphi_p(x) = [\underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{\mu(e_1)}, \ldots, \underbrace{e_m, \ldots, e_m}_{\mu(e_m)}]$$

es continua, donde $p^{-1}(x) = \{e_1, \ldots, e_m\}$.

Observación 3.1. La función φ_p es una especie de mapeo inverso multivaluado para p. Por un lado $(SP^n p) \circ (\varphi_p)(x) = [x, \ldots, x]$ para toda $x \in X$, donde $SP^n p : SP^n E \longrightarrow SP^n X$. Por otro lado, si $e \in E$, entonces $e \in p^{-1}(p(e))$.

De hecho, podemos considerar la categoría cuyos objetos son las aplicaciones cubrientes ramificadas de grado n compuestos con sus inversos multivaluados (p, φ_p)

$$E \xrightarrow{p} X \xrightarrow{\varphi_p} SP^n E$$

y los morfismos son parejas de mapeos $(\psi, \widetilde{\psi})$, donde $\psi : E \longrightarrow E'$ y $\widetilde{\psi} : X \longrightarrow X'$, son tales que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\
X \arrow[r, "\widetilde{\psi}"] \arrow[d, "\varphi_p"'] & X' \arrow[d, "\varphi_{p'}"] \\
SP^n E \arrow[r, "SP^n \psi"'] & SP^n E'
\end{tikzcd}$$

Si $(\psi, \widetilde{\psi}) : (p, \varphi_p) \longrightarrow (p', \varphi_{p'})$ y $(\varphi, \widetilde{\varphi}) : (p', \varphi_{p'}) \longrightarrow (p'', \varphi_{p''})$ son morfismos, su composición está dada por $(\varphi, \widetilde{\varphi}) \circ (\psi, \widetilde{\psi}) = (\varphi \circ \psi, \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}) : (p, \varphi_p) \longrightarrow (p'', \varphi_{p''})$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p'"'] & E'' \arrow[d, "p''"'] \\
X \arrow[r, "\widetilde{\psi}"] \arrow[d, "\varphi_p"'] & X' \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "\varphi_{p'}"'] & X'' \arrow[d, "\varphi_{p''}"'] \\
SP^n E \arrow[r, "SP^n \psi"'] & SP^n E' \arrow[r, "SP^n \varphi"'] & SP^n E''
\end{tikzcd}$$

$\blacksquare$

Observación 3.2. Si $p : E \longrightarrow X$ es una aplicación cubriente ramificada de grado n, con función multiplicidad $\mu : E \longrightarrow \mathbb{N}$, podemos definir $p^+ : E^+ \longrightarrow X^+$, donde $Y^+ = Y \sqcup \{+\}$, de tal forma que resulte nuevamente una aplicación cubriente ramificada de grado n. La forma es sencilla:

La aplicación se define como $p^+|_E = p$, $p(+) = +$. Su función multiplicidad $\mu^+ : E^+ \longrightarrow \mathbb{N}$ se obtiene al considerar $\mu^+|_E = \mu$, $\mu(+) = n$. Claramente, $\varphi^+_{p^+} : X^+ \longrightarrow SP^nE^+$ es continua, y las demás condiciones son inmediatas gracias a la definición.

Si ahora consideramos $A \subseteq X$ cerrado, podemos definir $\overline{p} : \overline{E} \longrightarrow X/A$, donde $\overline{E} = E/p^{-1}(A)$, como la función que resulta de tomar cocientes a través de p. La función multiplicidad $\overline{\mu} : \overline{E} \longrightarrow \mathbb{N}$ se define como $\overline{\mu}|_{E-p^{-1}(A)} = \mu$, y $\overline{\mu}(*) = n$, donde $*$ es el punto al cual $p^{-1}(A)$ se colapsa. Las primeras dos condiciones de las aplicaciones cubrientes ramificadas claramente se cumplen. Para ver que $\varphi_{\overline{p}} : X/A \longrightarrow SP^n(E/p^{-1}(A))$ es continua, consideremos $q : E \longrightarrow E/p^{-1}(A)$, su correspondiente $SP^n(q) : SP^n(E) \longrightarrow SP^n(E/p^{-1}(A))$, y la composición $SP^n(\mu) \circ \varphi_p : X \longrightarrow SP^n(E) \longrightarrow SP^n(E/p^{-1}(A))$. Esta última función es la composición de dos funciones continuas. Más aún, $SP^n(\mu) \circ \varphi_p(A) = \{*\}$, por lo tanto $X/A \longrightarrow SP^n(E) \longrightarrow SP^n(E/p^{-1}(A))$ es continua. Claramente esta aplicación es igual a $\varphi_{\overline{p}}$. Por lo tanto $\varphi_{\overline{p}}$ resulta continua.

De igual forma, si $p : E \longrightarrow X$ es una aplicación cubriente ramificada de grado n, y $A \subseteq X$ es cerrado, la función $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \longrightarrow A$ resulta ser una aplicación cubriente ramificada del mismo grado. La función multiplicidad se obtiene de restringir $\mu|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \longrightarrow \mathbb{N}$, la cual claramente cumple las condiciones necesarias, mientras que el mapeo inverso multivaluado se obtiene de restringir $\varphi_p|_A : A \longrightarrow SP^nE$, observar que $\varphi_p(a) \in SP^n(p^{-1}(A))$, ya que $\varphi_p(a)$ rescata la fibra de a bajo p, y considerar topologías relativas en $\varphi_p|_A : A \longrightarrow SP^n(p^{-1}(A)) \subseteq SP^n(E)$, por lo cual $\varphi_p|_A$ resulta continua. ■

Las aplicaciones recién descritas serán importantes a la hora de definir los tránsferes en homología no reducida mas adelante.

Ejemplo 3.1. Aplicaciones cubrientes con un número finito de hojas.

Demostración. Supongamos que la multiplicidad de la aplicación cubriente es n. Asignemos $1 \in \mathbb{N}$ a cada elemento de E para definir la función multiplicidad

$$\mu : E \longrightarrow \mathbb{N} \qquad \mu(e) := 1$$

De esta forma, la aplicación cubriente ramificada resulta de grado n y claramente, las primeras dos condiciones de una aplicación cubriente ramificada, se cumplen.

Para verificar la continuidad de $\varphi_p : X \longrightarrow SP^nE$ elijamos una base conveniente para SP^nE. Consideremos el conjunto $\{A_k\}_{k\in K}$ de hojas en E que yacen sobre las vecindades cubiertas parejamente de X. Como éstas conforman una base de E, los subconjuntos en SP^nE del tipo $\rho(A_{k(1)}, \ldots, A_{k(n)})$, donde $\rho : E^n \longrightarrow SP^nE$ es una identificación, conforman una base para SP^nE. Denotemos a esta base por $\{B_i\}_{i\in I}$ y supongamos que $x \in \varphi_p^{-1}(B_i)$ para alguna $i \in I$, donde $x \in X$. Como $\varphi_p(x) = [e_1, \ldots, e_n]$ con $e_i \in A_{k(i)}$, entonces $\{A_{k(i)}\}_{1\leq i\leq n}$ o subconjuntos de éstos, conforman un conjunto de hojas sobre x. Para cada i, $p(A_{k(i)})$ es una vecindad cubierta parejamente por p. Como el conjunto de vecindades cubiertas parejamente conforman una base de X, entonces $V = \bigcap_{i=1}^{n} p(A_{k(i)})$ también es una vecindad cubierta parejamente y por tanto, abierta. Además cada $A_{k(i)}$, o subconjunto de éste, cubre a V, por lo que cada elemento de V tiene a su fibra bajo p en $\{A_{k(i)}\}_{1\leq i\leq n}$, y por lo tanto, está en $\varphi_p^{-1}(B_i)$. Con esto vemos que $V \subseteq \varphi_p^{-1}(B_i)$. Como $x \in \varphi_p^{-1}(B_i)$ fue elemento arbitrario, entonces $\varphi_p^{-1}(B_i) = \bigcup_{l\in L} V_l$, que claramente es abierta. Con esto φ_p es continua. ■

Un resultado importante es que las aplicaciones cubrientes ramificadas se preservan bajo pullbacks.

Proposición 3.1. *Sea $p : E \longrightarrow X$ una aplicación cubriente ramificada de grado n con función multiplicidad $\mu : E \longrightarrow \mathbb{N}$. Sea $F : Y \longrightarrow X$ una función continua. Entonces, la función $F^*(p) : F^*(E) \longrightarrow Y$, donde $F^*(E)$ es el pullback inducido por F, resulta una aplicación cubriente ramificada de grado n.*

Demostración. Se considera $F^*(\mu) : F^*(E) \longrightarrow \mathbb{N}$, $F^*(\mu)(y,e) = \mu(e)$, como función multiplicidad de $F^*(p)$. Como $F^*(E) = \{(y,e) \in Y \times E \mid F(y) = p(e)\}$, entonces $F^*(p)^{-1}(y) = \{y\} \times p^{-1}(F(y))$ que es discreto en $Y \times E$ ya que $p^{-1}(F(y))$ lo es en E, y consta del mismo número de elementos que $p^{-1}(F(y))$, por lo que, las fibras son finitas y discretas. Más aún, $F^*(p)^{-1}(y) = \{(y,e) \in \{y\} \times E \mid F(y) = p(e)\} = \{(y,e) \in \{y\} \times E \mid e \in p^{-1}(F(y))\}$, por lo tanto

$$\sum_{(y,e)\in F^*(p)^{-1}(y)} F^*(\mu)(y,e) = \sum_{e\in p^{-1}(F(y))} \mu(e) = n$$

con lo cual vemos se cumple la segunda condición. Para obtener la continuidad de $F^*(\varphi_p) : Y \longrightarrow SP^n(F^*(E))$ consideremos la inclusión $F^*(E) \longrightarrow Y \times E$. Ésta a su vez induce $SP^n(F^*(E)) \longrightarrow SP^n(Y \times E)$.

Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "F^*(\varphi_p)"] \arrow[dd, "(Id_Y,F)"'] & SP^n\big(F^*(E)\big) \arrow[dr] & \\
 & & SP^n(Y \times E) \\
Y \times X \arrow[r, "(Id_Y,\varphi_p)"'] & Y \times SP^n(E) \arrow[ur, "D"'] &
\end{tikzcd}$$

donde D es la función inducida por la diagonal $Y \longrightarrow Y^n$. Tanto D, (Id_Y, F), como (Id_Y, φ_p), son continuas, por lo tanto su composición $D \circ (Id_Y, \varphi_p) \circ (Id_Y, F)$, también lo es. Como $SP^n\big(F^*(E)\big)$ tiene la topología relativa, y el diagrama conmuta, $F^*(\varphi_p)$ resulta continua. ■

Ejemplo 3.2. Sea B espacio topológico, y sea $\pi_B : B^n \times_{\Sigma_n} \overline{n} \longrightarrow SP^nB$, donde $\overline{n} = \{1, \ldots, n\}$, y $B^n \times_{\Sigma_n} \overline{n}$ es el espacio de órbitas de $B^n \times \overline{n}$ bajo la acción diagonal de Σ_n, dada por $\pi_B[b_1, \ldots, b_n; i] = [b_1, \ldots, b_n]$. Entonces, π_B es una aplicación cubriente ramificada de grado n, con función multiplicidad $\mu_B : B^n \times_{\Sigma_n} \overline{n} \longrightarrow \mathbb{N}$, definida como $\mu_B([b_1, \ldots, b_n; i]) = \#\{j \mid b_j = b_i\}$.

Demostración. La acción diagonal de Σ_n en $B^n \times_{\Sigma_n} \overline{n}$ se comporta de la siguiente forma: si $(b, i) \in B^n \times \overline{n}$ donde $b = (b_1, \ldots, b_n) \in B^n$, y $\sigma \in \Sigma_n$, entonces $\sigma(b, i) = \big(\sigma(b), \sigma(i)\big) = \big(b_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, b_{\sigma^{-1}(n)}; \sigma(i)\big)$. Por lo tanto, cualquier representante de $[b, i]$ en $B^n \times_{\Sigma_n} \overline{n}$, toma el mismo valor bajo π_B, lo que comprueba la buena definición de esta función. En concreto, si $[b, i] = [b', j]$, entonces existe $\sigma \in \Sigma_n$ tal que $\sigma(b, i) = (b', j)$, donde $\sigma(b) = b'$, por lo tanto, este mismo σ relaciona a $\pi_B[b, i] = [b]$ y a $\pi_B[b', j] = [b']$, en SP^nB.

La buena definición de la función multiplicidad es consecuencia de la siguiente observación:

Si $\sigma \in \Sigma_n$, y $[b, i] \in B^n \times_{\Sigma_n} \overline{n}$, entonces, por un lado tenemos

$$\mu_B[\sigma(b, i)] = \mu_B[\big(\sigma(b), \sigma(i)\big)] = \mu_B[\big(b_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, b_{\sigma^{-1}(n)}; \sigma(i)\big)] = \#\{j \mid b_j = b_{\sigma^{-1}(\sigma(i))}\}$$

ya que la $\sigma(i)$-ésima entrada de $\sigma(b)$ está ocupada por el elemento en la i-ésima entrada de b.

Sin embargo ésta es la definición de la función multiplicidad

$$\mu_B[b, i] = \#\{j \mid b_j = b_i\}$$

Por lo tanto

$$\mu_B[\sigma(b, i)] = \mu_B[b, i]$$

Concluimos que el valor de μ_B en $[b, i]$ no depende de la elección del representante.

Sea $[b] \in SP^nB$, y consideremos todos lo elementos en $B^n \times_{\Sigma_n} \overline{n}$ que bajo π_B dan $[b]$. Claramente es un conjunto finito, ya que si el conjunto de entradas de b' en (b', j), no es el mismo que el conjunto de entradas de b, entonces bajo π_B, no se obtiene el mismo elemento. Por lo tanto la fibra de $[b]$ bajo π_B es finita. Más aún, como $\overline{n}$ es discreto, y elementos distintos en la mismo fibra tienen representaciones cuyos elementos en $\overline{n}$ son distintos, la fibra es discreta. Con esto se cumple la primer condición para que π_B sea una aplicación cubriente ramificada.

Para probar $\sum_{[b,i]\in\pi_B^{-1}([b])} \mu([b,i]) = n$, primero elegimos una representación adecuada de la fibra de $[b]$ bajo π_B. Afirmamos que $\pi_B^{-1}([b]) = \{[b,1],\ldots,[b,n]\}$.

Si $b' \in B^n$ es tal que $\sigma(b') = b$ entonces $\sigma(b',i) = \big(\sigma(b'),\sigma(i)\big) = (b,\sigma(i))$. Lo último, junto a que $\sigma(i)$ es un elemento de $\overline{n}$, permiten ver que $[b',i] \in \{[b,1],\ldots,[b,n]\}$. Esto es: si $[b',i]$ es un elemento que bajo π_B da b, entonces b se obtiene de b' mediante una permutación. Por lo tanto $\sigma(b',i) = \big(\sigma(b'),\sigma(i)\big) = \big(b,\sigma(i)\big)$, cuya clase de equivalencia debe estar representada por $[b,j]$ para algún $j \in \overline{n}$.

Ahora consideremos a B^n como el espacio de funciones

$$B^n := \{b : \overline{n} \longrightarrow B\}$$

Definimos $A(b,i) = b^{-1}(b(i)) \subseteq \overline{n}$. Como $A(b,i)$ identifica las entradas de b que son iguales a la i-ésima entrada, resulta claro que $\mid A(b,i) \mid= \mu[b,i]$. Más aún, considerar todos los $A(b,i)$ $1 \leq i \leq n$, permite obtener una partición $\mathcal{P}$ de $\overline{n}$, donde cada elemento $A(b,i)$ de la partición, contiene los índices de las entradas de b que son iguales a la i-ésima entrada. De hecho, si (b,i), $(b,j) \in B^n \times \overline{n}$ son tales que $b(i) = b(j)$, entonces $[b,i] = [b,j]$. Basta considerar la permutación $\sigma \in \Sigma_n$ que manda i en j, j en i, y fija los elementos restantes. Si $b(i) \neq b(j)$, es claro que no hay permutación que mande i en j tal que $\sigma(b) = b$, por lo que $[b,i] \neq [b,j]$. Queda claro entonces, que los elementos $[b,i]$ de la fibra $\pi_B^{-1}[b]$ que representan la misma clase, son aquellos que bajo $A(b,i)$ pertenecen a la misma clase de la partición $\mathcal{P}$. Por lo tanto

$$\sum_{[b,i]\in\pi_B^{-1}([b])} \mu\big([b,i]\big) = \sum_{\mathcal{A}\in\mathcal{P}} \mid A \mid= n$$

Para probar la continuidad de $\varphi_{\pi_B} : SP^n B \longrightarrow SP^n(B^n \times_{\Sigma_n} \overline{n})$ definimos

$$l_i : B^n \longrightarrow B^n \times_{\Sigma_n} \overline{n}$$

$$l_i(b) = [b, i]$$

La función l_i es continua para cada $i \in \overline{n}$ ya que se obtiene de la composición

$$B^n \longrightarrow B^n \times \overline{n} \xrightarrow{\rho} B^n \times_{\Sigma_n} \overline{n}$$

donde la primera función es la inclusión y por lo tanto continua, y ρ identifica los elementos de cada órbita.

Las funciones l_i permiten definir la función continua

$$l : B^n \longrightarrow (B^n \times_{\Sigma_n} \overline{n})^n$$

$$l(b) = (l_1(b), \ldots, l_n(b))$$

que además resulta Σ_n equivariante. Para verificar esto consideremos $b \in B^n$ y $\sigma \in \Sigma_n$. Hay que probar $l(\sigma(b)) = \sigma(l(b))$. Por la definición de la función l, resulta que

$$l(\sigma(b)) = \big([\sigma(b), 1], \ldots, [\sigma(b), n]\big)$$

y

$$\sigma(l(b)) = \sigma([b, 1], \ldots, [b, n]) = ([b, \sigma^{-1}(1)], \ldots, [b, \sigma^{-1}(n)]).$$

En cada entrada de $\sigma(l(b))$, la acción de $\sigma \in \Sigma_n$ recupera la entrada correspondiente de $l(\sigma(b))$ ya que $\sigma[b, \sigma^{-1}(i)] = [\sigma(b), \sigma(\sigma^{-1}(i))] = [\sigma(b), i]$. Por lo tanto, l es Σ_n equivariante lo cual permite considerar

$$SP^n(l) : SP^n B \longrightarrow SP^n(B^n \times_{\Sigma_n} \overline{n})$$

$$\text{donde} \quad SP^n(l)([b]) = \big[[b, 1], \ldots, [b, n]\big]$$

Ya vimos previamente que cada elemento de la fibra aparece tantas veces como su valor bajo la función multiplicidad en la colección $\big[[b, 1], \ldots, [b, n]\big]$, por lo tanto, la función $SP^n(l)$ coincide con φ_{π_B}, y con esto, φ_{π_B} resulta continua. ■

Proposición 3.2. *Si $p : E \longrightarrow X$ es una aplicación cubriente ramificada de grado n, entonces existe un diagrama cartesiano o de pullback*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "p"'] & E^n \times_{\Sigma_n} \overline{n} \arrow[d, "\pi_E"] \\ X \arrow[r, "\varphi_p"'] & SP^n E \end{tikzcd}$$

Demostración. Para definir $\widetilde{\varphi}$ tomemos $e_1 \in E$ y consideramos la fibra de $x = p(e_1)$ bajo p i.e. $p^{-1}(x)$. Ordenamos la fibra de tal forma que e_1 aparezca primero tantas veces como su multiplicidad lo indique, seguida de los elementos restantes de la fibra; éstos apareciendo también tantas veces como su multiplicidad. Por ejemplo:

$$(\underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{\mu(e_1)}, \underbrace{e_2, \ldots, e_2}_{\mu(e_2)}, \ldots, \underbrace{e_m, \ldots, e_m}_{\mu(e_m)})$$

$$\text{Definimos} \quad \widetilde{\varphi}(e_1) := [(e_1, \ldots, e_1, e_2, \ldots); 1] \in E^n \times_{\Sigma_n} \overline{n}$$

El orden de los elementos restantes de la fibra después de colocar a e_1 no es importante, de hecho, cualquier orden de estos elementos se obtiene de aplicar algún elemento del grupo de isotropía de $1 \in \overline{n}$, $\sigma \in \Sigma_n$, a $[(e_1, \ldots, e_1, e_2, \ldots); 1]$, que por definición, representan la misma clase de equivalencia. Por lo tanto $\widetilde{\varphi}(e_1) \in E^n \times_{\Sigma_n} \overline{n}$ está bien definida y permite comprobar la conmutatividad del diagrama ya que

$$\pi_E\big(\widetilde{\varphi}(e)\big) = \pi_E\big([(e_1, \ldots, e_1, e_2, \ldots); 1]\big) = [e_1, \ldots, e_1, \ldots, e_m] = \varphi_p(x) = \varphi_p(p(e_1))$$

Para establecer la continuidad de $\widetilde{\varphi}$ y la naturaleza cartesiana del diagrama consideremos E^n como el espacio de funciones $E^{\overline{n}}$. La función evaluacion

$$e : E^n \times \overline{n} \longrightarrow E \qquad e(e', j) = e'(j)$$

es continua ya que E^n tiene la topología del producto, y es Σ_n equivariante, por lo que define

$$\overline{e} : E^n \times_{\Sigma_n} \overline{n} \longrightarrow E$$

La continuidad de esta función permite definir la función continua φ por medio del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \times_B (E^n \times_{\Sigma_n} \overline{n}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \times (E^n \times_{\Sigma_n} \overline{n}) \arrow[d, "proy"] \\
E & E^n \times_{\Sigma_n} \overline{n} \arrow[l, "\overline{e}"]
\end{tikzcd}$$

donde $B = SP^nE$

Más aún, como la proyección es un mapeo cerrado y $X \times_B (E^n \times_{\Sigma_n} \overline{n})$ es cerrado en $X \times (E^n \times_{\Sigma_n} \overline{n})$, φ resulta cerrada.

La función

$$\psi : E \longrightarrow X \times_B (E^n \times_{\Sigma_n} \overline{n}) \quad : \; \psi(e) = \big(p(e), \widetilde{\varphi}(e)\big)$$

es la inversa de φ ya que

$$\varphi\big(\psi(e)\big) = \varphi\big(p(e), \widetilde{\varphi}(e)\big) = e$$

$$\psi\big(\varphi(x, [e_1, \ldots, e_m; i])\big) = \psi(e_i) = \big(p(e_i), [e_i, \ldots, e_m; 1]\big)$$

donde $p(e_i) = x$ debido a que $\{e_1, \ldots, e_m\} = p^{-1}(x)$, y $[e_i, \ldots, e_m; 1] = [e_1, \ldots, e_m; i]$.

Consideremos el siguiente diagrama donde $Z = X \times_B (E^n \times_{\Sigma_n} \overline{n})$

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "\psi"] \arrow[drr, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[ddr, "p"'] & & \\
& Z \arrow[r, "proy"'] \arrow[d, "proy"] & E^n \times_{\Sigma_n} \overline{n} \arrow[d, "\pi_E"] \\
& X \arrow[r, "\varphi_p"'] & SP^nE
\end{tikzcd}
$$

Claramente ψ y $proy$ son continuas, por lo tanto $\widetilde{\varphi} = proy \circ \psi$ es continua. Por todo lo anterior, podemos concluir que ψ es un homeomorfismo, y con ello, el diagrama es de pullback. ■

Combinando este último resultado con la Proposición 3.1, obtenemos la siguiente caracterización de las aplicaciones cubrientes ramificadas. Ésta, a su vez, permite ver a $\pi_B : B^n \times_{\Sigma_n} \overline{n} \longrightarrow SP^nB$, como ejemplo genérico de las aplicaciones cubrientes ramificadas de grado n. Aconsejamos ver [**LS**].

Teorema 3.1. *El mapeo $p : E \longrightarrow X$ es una aplicación cubriente ramificada de grado n si y sólo si existe un diagrama cartesiano*

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "p"'] & E^n \times_{\Sigma_n} \overline{n} \arrow[d, "\pi_E"] \\
X \arrow[r, "\varphi_p"'] & SP^nE
\end{tikzcd}
$$

■

Ejemplo 3.3. Mapeos $p : X/H \longrightarrow X/G$ dados por la acción de un grupo G en X y la acción restringida de un subgrupo $H \subseteq G$. Estos mapeos pueden ser considerados aplicaciones cubrientes ramificadas de grado $[G : H]$ cuya función multiplicidad se define como $\mu_p(H_x) = [G_x : H_x]$, donde G_x y H_x denotan los subgrupos de isotropía de $x \in X$ para la acción de G y la acción restringida de H, y $[G : H]$ y $[G_x : H_x]$, denotan los índices correspondientes.

Demostración. La función $p : X/H \longrightarrow X/G$ está dada por $Hx \longmapsto Gx$.

La buena definición se asegura por lo siguiente:

Si $Hx_1 = Hx_2$, entonces existe $h \in H$ tal que $hx_1 = x_2$. Como $H \subseteq G$, entonces $h \in G$, por lo tanto, $Gx_1 = Gx_2$. Esto es, $p(Hx_1) = p(Hx_2)$.

Para lo que resta probar, supongamos que $[G : H] = n$, y consideremos n elementos de G, $\{g_1, \ldots, g_n\}$, tales que el conjunto $\{Hg_1, \ldots, Hg_n\}$ represente las clases laterales de G/H.

Tomemos $Gx \in X/G$ y consideremos el conjunto $\{Hg_1x, \ldots, Hg_nx\}$. Por un lado es claro que cada elemento del conjunto mencionado representa algún elemento de la fibra de Gx; basta observar que $p(Hg_ix) = Gg_ix = Gx$ para toda i, $1 \leq i \leq n$. No sólo esto, sino además el conjunto agota los elementos de la fibra de Gx. Sea $x_1 \neq x$ y Hx_1 tal que $p(Hx_1) = Gx$. Como $p(Hx_1) = Gx_1$, entonces $Gx_1 = Gx$, por lo que existe $g \in G$ tal que $gx = x_1$ y $Hgx = Hx_1$. Sin embargo, como Hg es clase lateral de G/H, $Hg = Hg_i$ para alguna i, por lo tanto, $Hg_ix = Hgx = Hx_1$. Con esto vemos que $\{Hg_1x, \ldots, Hg_nx\}$[1] es la fibra de Gx, con lo que la fibra de Gx, elemento arbitrario en X/G, bajo p, es finita.

La función multiplicidad μ_p se definió como $\mu_p(Hx) = [G_x : H_x]$. Para probar que $\sum_{Hx \in p^{-1}(Gx)} \mu_p(Hx) = n$, probaremos que

$$[G_x : H_x] = \#\{i \mid Hx = Hg_ix\}$$

Por lo que una definición alternativa de la función multiplicidad resulta

$$\mu_p(Hx) = \#\{i \mid Hx = Hg_ix\}$$

[1]En este conjunto pueden haber elementos repetidos

donde los Hg_i son los elementos del conjunto $\{Hg_1, \ldots, Hg_n\}$.

Proposición 3.3. *Sea Hg_ix elemento del conjunto $\{Hg_1x, \ldots, Hg_nx\}$, donde $x \in X$. Entonces, $Hg_ix = Hx$ si y sólo si la clase lateral Hg_i tiene un elemento en el subgrupo de isotropía de x en G.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si $Hg_ix = Hx$ entonces dada $h \in H$, existe $h_1 \in H$ tal que $h_1g_ix = hx$. Por lo tanto $h^{-1}h_1g_ix = x$, con lo que $h^{-1}h_1g_i \in G_x$ y $h^{-1}h_1g_i \in Hg_i$.

$\Leftarrow$) Si $h_1 \in H$ es tal que $h_1g_ix = x$, entonces $Hh_1g_ix = Hx$. Sin embargo, $Hh_1g_ix = Hg_ix$, por lo tanto $Hg_ix = Hx$. ∎

Proposición 3.4. *Sea Hg_i tal que $Hg_ix = Hx$. Entonces hay tantos elementos en Hg_i que pertenecen a G_x como elementos hay en H_x.*

Demostración. La proposición anterior, junto a la hipótesis $Hg_ix = Hx$, asegura que existe $g \in Hg_i$ tal que $gx = x$, por lo tanto $Hgx = Hx$.

Si $h \in H$ es tal que $h \in H_x$, entonces $hgx = hx = x$, por lo tanto $hg \in G_x$. Más aún, si $h_1, h_2 \in H_x$ son distintos, entonces $h_1g \neq h_2g$. Si $h \in H$ es tal que $hx \neq x$, entonces $hgx = hx \neq x$, por lo tanto $hg \notin G_x$. Tenemos pues, el mismo número de elementos en H_x, que elementos en Hg_i que pertenecen a G_x. ∎

Como consecuencia de las dos proposiciones previas, tenemos que dada $x \in X$, $[G_x : H_x] = \#\{i \mid Hx = Hg_ix\}$, por lo que $\mu_p(Hx) = \#\{i \mid Hx = Hg_ix\}$.

Para cada $x \in X$, se puede dar una partición del conjunto $\{Hg_1, \ldots, Hg_n\}$, determinada por la igualdad, una vez que cada elemento del conjunto es aplicado a x. Esto es, $\overline{Hg_i} = \overline{Hg_i}$ si y sólo si $Hg_ix = Hg_jx$. Por la relación recién descrita, y como tenemos tantos elementos en este conjunto como posibles elementos en la fibra de Gx, la fibra de Gx tiene tantos elementos como elementos tiene la partición de

$\{Hg_1, \ldots, Hg_n\}$. Por lo tanto, la suma de las multiplicidades de los elementos de la fibra de Gx, es igual al número de elementos en $\{Hg_1, \ldots, Hg_n\}$

$$\sum_{Hx \in p^{-1}(Gx)} \mu_p(Hx) = n$$

Para probar la continuidad de $\varphi_p : X/G \longrightarrow SP^n(X/H)$ consideremos la siguiente construcción:

Tomemos la identificación $\rho : X \longrightarrow X/H$ y consideremos la composición con cada uno de los homeomorfismos determinados por los g_i $1 \leq i \leq n$ utilizados en el conjunto $\{Hg_1, \ldots, Hg_n\}$. Esto es, para cada g_i, el homeomorfismo $g_i : X \longrightarrow X$ tal que $g_i(x) = g_i x$, se compone con ρ. Claramente $\rho \circ g_i$ es continua para toda i.

Definamos $\tau = (\rho \circ g_i)_{i=1}^n = (\rho \circ g_1, \ldots, \rho \circ g_n)$

$$\tau : X \longrightarrow (X/H)^n \qquad \tau(x) := (Hg_1x, \ldots, Hg_nx)$$

Claramente, τ es continua.

Tenemos la acción de G en X, y la acción de G en $(X/H)^n$. Esta última dada por

$$g(Hx_1, \ldots, Hx_n) = (Hgx_1, \ldots, Hgx_n)$$

Resulta inmediato probar que τ es G equivariante

$$\tau(gx) = (Hg_1gx, Hg_2gx, \ldots, Hg_ngx)$$

$$g\tau(x) = g(Hg_1x, Hg_2x, \ldots, Hg_nx) = (Hg_1gx, \ldots, Hg_ngx)$$

Por lo tanto $\tau(gx) = g\tau(x)$.

Queda bien definida, entonces, la función continua

$$t : X/G \xrightarrow{\tau/G} (X/H)^n/G$$

Como G actúa sobre G/H permutando los elementos en G/H, la acción de cada $g \in G$ sobre cualquier elemento de $(X/H)^n$ que esté en la imagen de τ, resulta una permutación. Por lo tanto, podemos definir una función suprayectiva q de la imagen de τ a $(X/H)^n/\Sigma_n$.

Para verificar la continuidad de q consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X/H)^n \arrow[d, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & \\
(X/H)^n/G \arrow[r, "q"'] & (X/H)^n/\Sigma_n
\end{tikzcd}$$

donde q_1 y q_2 son aplicaciones orbitales. El diagrama claramente conmuta por la forma en que se definió q.

Si $A \subseteq (X/H)^n/\Sigma_n$ es tal que $q_2^{-1}(A)$ resulta abierto en $(X/H)^n$, entonces A es abierto en $(X/H)^n/\Sigma_n$ con la topología de identificación inducida por q. Por lo tanto, la topología inducida por q_2 está contenida en la topología inducida por q. Esto permite concluir la continuidad de q cuando $(X/H)^n/\Sigma_n$ tiene su topología usual.

Por lo anterior, la composición $q \circ t$ resulta continua, y como evidentemente, debido a que la forma en que fue construida, coincide con φ_p, esta última resulta continua. ■

De hecho, como fue observado por Dold en [**AD**], el ejemplo anterior agota las posibles aplicaciones cubrientes ramificadas si estamos en la categoría KDH.

Para la demostración del resultado, necesitamos un lema previo que a su vez requiere de la siguiente observación.

Observación 3.3. Los elementos $z = [e_1, \ldots, e_n]$ de SP^nE se pueden escribir como sumas, $z = \sum_{j=1}^{n} e_j$, donde $e_j \in E$. Por lo tanto, tiene sentido escribir $(e + z) \in SP^{n+1}E$ para $e \in E$, y $(z - e) \in SP^{n-1}E$ si e es uno de los sumandos de z. Estas operaciones resultan continuas si E está en la categoría KDH.[2]

Teniendo esto en cuenta, dada una aplicación cubriente ramificada de grado n $p : E \longrightarrow X$, su inverso multivaluado $\varphi_p : X \longrightarrow SP^nE$ es la aplicación que cumple

1) $e \in \varphi_p(p(e))$ para toda $e \in E$

2) $(SP^n p)(\varphi_p(x)) = \sum^n x = x + \ldots + x$ para toda $x \in X$. ∎

Lema 3.1. *Sea $p : E \longrightarrow X$ una aplicación cubriente ramificada de grado n. Entonces el siguiente diagrama es de pullback*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "(Id_E,\widetilde{\varphi})"] \arrow[d, "p"'] & E \times SP^{n-1}E \arrow[d, "\alpha"] \\ X \arrow[r, "\varphi_p"'] & SP^nE \end{tikzcd}$$

donde $\widetilde{\varphi} = \varphi_p(p(e)) - e$, $\alpha(e, z) = e + z$ con $e \in E$, $z \in SP^{n-1}E$

Demostración. Dada la definición de $\widetilde{\varphi}$, el diagrama claramente conmuta.

Sean

$$\varphi' = (p, Id_E, \widetilde{\varphi}) : E \longrightarrow X \times_B \left(E \times SP^{n-1}E\right)$$

donde $B = SP^nE$ y

$$t : X \times_B \left(E \times SP^{n-1}E\right) \longrightarrow E$$

la proyección a E restringida al pullback.

Tanto una como la otra son continuas y $t(\varphi'(e)) = t(p(e), e, z) = e$. Por lo tanto $t\varphi' = Id_E$

La composición contraria da

$$\varphi'(t(x, e, z)) = \varphi'(e) = (p(e), e, \varphi_p(p(e)) - e)$$

[2]El producto simétrico infinito, que definiremos en el capítulo 7, resulta ser un monoide topológico abeliano débil. Si E está en KDH, el Lema 2.2 permite concluir que SP^nE está en KDH. Como SPE está filtrado por los subespacios SP^nE, entonces, por la Proposición 1.5, SPE está en KDH. Finalmente, el inciso (vii) del Teorema 1.1, permite concluir que las operaciones suma y resta recién definidas, resultan continuas, ya que son continuas en subconjuntos compactos.

Como $X \times_B (E \times SP^{n-1}E)$ es el pullback sobre SP^nE, entonces $\varphi_p(x) = e + z$. Además, por la Observación 3.3 $(SP^n p)\varphi_p(x) = \sum^n x$. Por lo tanto

$$\sum^n x = SP^n p(e+z) = p(e) + SP^{n-1}p(z)$$

Con esto vemos que $p(e) = x$ y que $\varphi_p(p(e)) - e = \varphi_p(x) - e = z$.

Por lo tanto $\varphi' \circ t$ también es la identidad. ∎

Teorema 3.2. *Para cada objeto (p, φ_p) de la categoría mencionada en la Observación 3.1, existe un Σ_n-espacio W tal que*

$$E \xrightarrow{p} X \xrightarrow{\varphi_p} SP^n E$$

es naturalmente homeomorfo a $W/\Sigma_{n-1} \xrightarrow{\overline{p}} W/\Sigma_n \xrightarrow{\varphi_{\overline{p}}} SP^n(W/\Sigma_{n-1})$, donde $\overline{p}$ es una proyección orbital como la descrita en el ejemplo 3.3.

Demostración. Como vimos en el Ejemplo 3.3, el mapeo $\overline{p} : W/\Sigma_{n-1} \longrightarrow W/\Sigma_n$ es una aplicación cubriente ramificada de grado $[\Sigma_n : \Sigma_{n-1}] = n$, donde Σ_{n-1} es visto como subgrupo de Σ_n mediante $1 \times \Sigma_{n-1} \subset \Sigma_n$. Por lo tanto, el homeomorfismo natural se define en la categoría de aplicaciones cubrientes ramificadas de grado n. Claramente, el primer funtor involucrado es el funtor identidad. El segundo se construye de la siguiente manera:

Sea $W = X \times_B E^n$ el pullback de $X \xrightarrow{\varphi_p} SP^n E \longleftarrow E^n$, donde $B = SP^n E$, y consideremos la acción de Σ_n sobre el segundo factor de W, y la acción restringida de Σ_{n-1} sobre el factor E^{n-1} de $W = X \times_B (E \times E^{n-1})$. El objeto (p, φ_p)

$$E \xrightarrow{p} X \xrightarrow{\varphi_p} SP^n E$$

es mandado a $(\overline{p}, \varphi_{\overline{p}})$

$$W/\Sigma_{n-1} \xrightarrow{\overline{p}} W/\Sigma_n \xrightarrow{\varphi_{\overline{p}}} SP^n(W/\Sigma_{n-1})$$

donde $\overline{p}(x, e_j, \sum_{i=1}^n e_i - e_j) = (x, e_j + \sum_{i \neq j}^n e_i)$ y $\varphi_{\overline{p}}(x, \sum_{i=1}^n e_i) = \sum_{i=1}^n (x, e_i, \varphi_p(x) - e_i)$.

Si $(\psi, \widetilde{\psi}) : (p, \varphi_p) \longrightarrow (p', \varphi_{p'})$ es un morfismo, entonces

$$F(\psi, \widetilde{\psi}) = (\psi_W, \widetilde{\psi}_W) = (\widetilde{\psi} \times \psi \times SP^{n-1}\psi, \widetilde{\psi} \times SP^n\psi) : (\overline{p}, \varphi_{\overline{p}}) \longrightarrow (\overline{p}', \varphi_{\overline{p}'})$$

es el morfismo correspondiente. Donde la continuidad resulta clara ya que se construye a partir de funciones continuas.

Si $(\psi, \widetilde{\psi}) : (p, \varphi_p) \longrightarrow (p', \varphi_{p'})$ y $(\varphi, \widetilde{\varphi}) : (p', \varphi_{p'}) \longrightarrow (p'', \varphi_{p''})$ son morfismos de aplicaciones cubrientes ramificadas de grado n entonces

$$F\big((\varphi, \widetilde{\varphi}) \circ (\psi, \widetilde{\psi})\big) = F(\varphi \circ \psi, \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}) = \big((\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}) \times (\varphi \circ \psi) \times SP^{n-1}(\varphi \circ \psi), (\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}) \times SP^n(\varphi \circ \psi)\big)$$

$$= \big((\widetilde{\varphi} \times \varphi \times SP^{n-1}\varphi) \circ (\widetilde{\psi} \times \psi \times SP^{n-1}\psi), (\widetilde{\varphi} \times SP^n\varphi) \circ (\widetilde{\psi} \times SP^n\psi)\big) =$$

$$(\widetilde{\varphi} \times \varphi \times SP^{n-1}\varphi, \widetilde{\varphi} \times SP^n\varphi) \circ (\widetilde{\psi} \times \psi \times SP^{n-1}\psi, \widetilde{\psi} \times SP^n\psi) = F(\varphi, \widetilde{\varphi}) \circ F(\psi, \widetilde{\psi})$$

Además, si $Id_{(p,\varphi_p)} : (p, \varphi_p) \longrightarrow (p, \varphi_p)$ es la identidad entonces

$$F(Id_{(p,\varphi_p)}) = F(Id_E, Id_X) = (Id_X \times Id_E \times SP^{n-1}Id_E, Id_X \times SP^n Id_E) =$$

$$(Id_{W/\Sigma_{n-1}}, Id_{W/\Sigma_n}) = Id_{(\overline{p},\varphi_{\overline{p}})}$$

Por lo tanto F es un funtor covariante.

Para ver que (p, φ_p) y $(\overline{p}, \varphi_{\overline{p}})$ son naturalmente homeomorfos, basta dar un isomorfismo entre ellos. Esto es: un morfismo en el que la pareja de mapeos que lo conforman, sean homeomorfismos.

$$\begin{tikzcd}
W/\Sigma_{n-1} \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\overline{p}"'] & E \arrow[d, "p"] \\
W/\Sigma_n \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\varphi_{\overline{p}}"'] & X \arrow[d, "\varphi_p"] \\
SP^n(W/\Sigma_{n-1}) \arrow[r, "\approx"] & SP^n(E)
\end{tikzcd}$$

Por el Lema 3.1, $E \approx W/\Sigma_{n-1}$ donde el homeomorfismo

$$t : W/\Sigma_{n-1} = X \times_B E \times SP^n E \longrightarrow E$$

se definió en el Lema 3.1. Como $E \approx W/\Sigma_{n-1}$, resulta inmediato que $SP^n(E) \approx SP^n(W/\Sigma_{n-1})$.

Consideremos $X \xrightarrow{\varphi_p} SP^n E \xleftarrow{Id} SP^n E$ y su pullback

$$\begin{tikzcd}
X \times_B SP^n E \arrow[r] \arrow[d] & SP^n E \arrow[d, "Id"] \\
X \arrow[r, "\varphi_p"'] & SP^n E
\end{tikzcd}$$

Como $Id^{-1}(\varphi_p(x))$ consta de sólo un elemento para toda $x \in X$, y φ_p es inyectiva, el mapeo

$$s : W/\Sigma_n = X \times_B SP^n E \longrightarrow X$$
$$(x, \sum_{i=1}^{n} e_i) \longmapsto x$$

tiene inverso

$$X \longrightarrow X \times_B SP^n E$$
$$x \longmapsto (x, \varphi_p(x))$$

lo que da el homeomorfismo entre X y W/Σ_n.

La conmutatividad del primer cuadrado

$$p(t(x, e, z)) = p(e) = x = s(x, e + z) = s(\overline{p}(x, e, z))$$

es inmediata al notar que tanto $e \in E$, como los sumandos de $z \in SP^{n-1}E$, que conforman $(x, e, z) \in W/\Sigma_{n-1}$, son elementos de la fibra de x bajo p.

La conmutatividad del segundo cuadrado se expresa en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(x, \sum_{i=1}^{n} e_i) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\varphi_{\overline{p}}"'] & X \arrow[d, "\varphi_p"] \\
\sum_{i=1}^{n} (x, e_i, \varphi_p(x) - e_i) \arrow[r, "SP^n(t)"'] & \sum_{i=1}^{n} e_i
\end{tikzcd}$$

que conmuta ya que los sumandos de $\sum_{i=1}^{n} e_i \in SP^n E$ son los elementos de la fibra de x bajo p.

Finalmente, si $(\psi, \widetilde{\psi}) : (p, \varphi_p) \longrightarrow (p', \varphi_{p'})$ es un morfismo entre aplicaciones cubrientes ramificada del mismo grado, la naturalidad se verifica a través de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(p, \varphi_p) \arrow[r, "s{,}t"] \arrow[d, "F(\psi{,}\widetilde{\psi})"'] & (p, \varphi_p) \arrow[d, "\psi{,}\widetilde{\psi}"] \\
F(p', \varphi_{p'}) \arrow[r, "s'{,}t'"'] & (p', \varphi_{p'})
\end{tikzcd}$$

Para ello, basta la conmutatividad de los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
W/\Sigma_{n-1} \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\psi_W"'] & E \arrow[d, "\psi"] \\
W'/\Sigma_{n-1} \arrow[r, "t'"'] & E'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W/\Sigma_{n} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\widetilde{\psi}_W"'] & X \arrow[d, "\widetilde{\psi}"] \\
W'/\Sigma_{n} \arrow[r, "s'"'] & X'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
SP^n(W/\Sigma_{n-1}) \arrow[r, "SP^n t"] \arrow[d, "SP^n(\psi_W)"'] & SP^n E \arrow[d, "SP^n \psi"] \\
SP^n(W'/\Sigma_{n-1}) \arrow[r, "SP^n t'"'] & SP^n E'
\end{tikzcd}$$

Sea $(x, e_j, \sum_{i=1}^{n} e_i - e_j) \in W/\Sigma_{n-1}$. Entonces

$$\psi t(x, e_j, \sum_{i=1}^{n} e_i - e_j) = \psi(e_j)$$

Por el otro lado

$$t'\psi_W(x, e_j, \sum_{i=1}^{n} e_i - e_j) = t'(\widetilde{\psi}(x), \psi(e_j), \sum \psi(e_i) - \psi(e_j)) = \psi(e_j)$$

Por lo tanto, el primer diagrama conmuta.

La conmutatividad del segundo diagrama se verifica de manera similar, y como el tercero se obtiene del primero, su conmutatividad es inmediata. ■

Capítulo 4

Tránsfer para homología

Este capítulo está dedicado a la definición del tránsfer en homología y sus propiedades elementales. Recordemos que cuando utilizamos el funtor F, los objetos son tomados y las operaciones realizadas en la categoría KDH; en particular el producto. En caso de no usar el funtor, los resultados son válidos para espacios mas generales. Los grupos considerados tienen la topología discreta.

Definición 4.1. Sea $p : E \longrightarrow X$ una aplicación cubriente ramificada de grado n con función multiplicidad μ. Llamamos pretránsfer a la siguiente función

$$t_p : F(X, G) \longrightarrow F(E, G) \quad : \quad t_p(u) = \widetilde{u}$$

donde $\widetilde{u}(e) = \mu(e)u(p(e))$. Mas claramente, si $u = \sum_{i=1}^{n} g_i x_i \in F(X, G)$, entonces

$$t_p(u) = \sum_{\substack{p(e)=x_i \\ i=1,\dots,n}} \mu(e) g_i e$$

Observación 4.1. Con esta definición es claro que el pretránsfer es un homomorfismo de grupos topológicos, por lo tanto, resulta conveniente observar la manera en que actúa sobre generadores. Específicamente, si gx es una función de $F(X, G)$, que vale g en x, y cero en el resto de X, entonces es un generador, y bajo el pretránsfer obtenemos

$$t_p(gx)(e) = \mu(e)gx(p(e)) = \begin{cases} \mu(e)g & \text{si } p(e) = x \\ 0 & \text{si } p(e) \neq x \end{cases}$$

Por lo tanto, los únicos puntos en donde $t_p(gx)$ es distinto de cero son los elementos de $p^{-1}(x) = \{e_1, \ldots, e_m\}$

$$t_p(gx)(e_1) = \mu(e_1)g,\ t_p(gx)(e_2) = \mu(e_2)g, \ldots,\ t_p(gx)(e_m) = \mu(e_m)g$$

Con esto vemos que

$$t_p(gx) = \mu(e_1)ge_1 + \mu(e_2)ge_2 + \ldots + \mu(e_m)ge_m$$

■

A continuación probaremos que t_p es continua. De esta forma, según la construcción de homología dada en el Capítulo 2, aplicar el funtor homología al pretránsfer da un morfismo en homología

$$\tau_p : \widetilde{H}_q(X; G) \longrightarrow \widetilde{H}_q(E; G)$$

que llamamos tránsfer.

Proposición 4.1. *Sea $p : E \longrightarrow X$ una aplicación cubriente ramificada de grado n con función de multiplicidad $\mu : E \longrightarrow \mathbb{N}$. Entonces, el pretránsfer $t_p : F(X,G) \longrightarrow F(E,G)$ es continuo.*

Demostración. Como $F(X,G)$ tiene la topología de la unión, basta verificar que $t_p|_{F_r(X,G)}$ es continua para toda $r \in \mathbb{N}$. Para este propósito recordemos la identificación $q_r : k(G \times X)^r \longrightarrow F_r(X,G)$ y definamos

$$\delta : G \times_k X \longrightarrow F_n(E,G) \qquad : \qquad \delta(g,x) = t_p(q_1(g,x)) = t_p(gx)$$

Consideremos

$$\begin{tikzcd}
k(G\times X)^r \arrow[r, "\delta^r"] \arrow[d, "q_r"'] & F_n(E,G)\times_k \ldots \times_k F_n(E,G) \arrow[d, "\sum_{i=1}^r"] \\
F_r(X,G) \arrow[r, "t_p|_{F_r(X,G)}"'] & F(E,G)
\end{tikzcd}$$

donde $\sum_{i=1}^r$ es la operación en $F_n(E,G)$, que como ya vimos, en KDH resulta continua.

Dada la conmutatividad del diagrama y la naturaleza proclusiva de q_r, habremos probado la continuidad de $t_p|_{F_r(X,G)}$, si probamos la continuidad de δ.

Definamos $\alpha : G\times X \longrightarrow (G\times E)^n/\Sigma_n$ como

$$\alpha(g,x) = [\underbrace{(g,e_1),\ldots,(g,e_1)}_{\mu(e_1)},\ldots,\underbrace{(g,e_m),\ldots,(g,e_m)}_{\mu(e_2)}]$$

donde $p^{-1}(x) = \{e_1,\ldots,e_m\}$.

Para cada $g\in G$, sea $i_g : X \longrightarrow G\times X$ dada por $i_g(x) = (g,x)$, y sea $j_g : SP^nE \longrightarrow (G\times E)^n/\Sigma_n$ dada por $j_g[e_1,\ldots,e_n] = [(g,e_1),\ldots,(g,e_n)]$.

Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_g"] \arrow[d, "\varphi_p"'] & G\times X \arrow[d, "\alpha"] \\
SP^nE \arrow[r, "j_g"'] & (G\times E)^n/\Sigma_n
\end{tikzcd}$$

que claramente conmuta para toda g, según las definiciones de los mapeos involucrados.

Sea $\widetilde{j}_g : E^n \longrightarrow (G\times E)^n$ definida por $\widetilde{j}_g(e_1,\ldots,e_n) = ((g,e_1),\ldots,(g,e_n))$. Esta función claramente es continua, por lo que $SP^n(\widetilde{j}_g) : SP^nE \longrightarrow SP^n\big((G\times X)\big)$ donde $SP^n(\widetilde{j}_g) = j_g$, también lo es. Por hipótesis, φ_p es continua. Esto último deja ver la continuidad de $\alpha\circ i_g$, que junto a la conmutatividad del diagrama para toda g, y a la topología discreta de G, permite concluir que α es continua.

Si $\alpha : G \times X \longrightarrow (G \times E)^n/\Sigma_n$ es continua, entonces $k(\alpha) : k(G \times X) \longrightarrow k((G \times E)^n/\Sigma_n)$ también lo es. Por el Lema 2.2, sabemos que el espacio de órbitas de la acción de un grupo finito sobre un espacio en KDH, es un espacio en la misma categoría, por lo que $k((G\times E)^n/\Sigma_n) \approx k((G\times E)^n)/\Sigma_n$. Más aún, como G es discreto $k(G \times X) = G \times X$. Tenemos entonces $k(\alpha) : G \times X \longrightarrow (k(G \times E)^n)/\Sigma_n$ continua.

La identificación $q_n : k(G \times E)^n \longrightarrow F_n(E, G)$ factoriza a través de la identificación $\overline{q_n} : k(G\times E)^n \longrightarrow (k(G\times E)^n)/\Sigma_n$ dando el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} k((G \times E)^n) \arrow[r, "\overline{q}_n"] \arrow[dr, "q_n"'] & k((G \times E)^n)/\Sigma_n \arrow[d, "\rho_n"] \\ & F_n(E, G) \end{tikzcd}$$

donde la definición de ρ_n y su naturaleza proclusiva resultan claras.

El mapeo δ hace conmutativo el próximo diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "k(\alpha)"] \arrow[dr, "\delta"'] & k((G \times E)^n)/\Sigma_n \arrow[d, "\rho_n"] \\ & F_n(E, G) \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, δ es continua, y con ello δ^r, por lo que $t_p \mid_{F_r(X,G)}$ también, para toda $r \in \mathbb{N}$. ■

Corolario 4.1. *Sea $p : E \longrightarrow X$ una aplicación cubriente ramificada de grado n con función multiplicidad $\mu : E \longrightarrow \mathbb{N}$, donde E y X son del mismo tipo de homotopía de complejos CW. Entonces existe un tránsfer en homología $\tau_p : \widetilde{H}_n(X; G) \longrightarrow \widetilde{H}_n(E; G)$.*

Ejemplo 4.1. Debido a la importancia de la aplicación cubriente ramificada $\pi_B : B^n \times_{\Sigma_n} \overline{n} \longrightarrow SP^nB$, resulta interesante calcular su pretránsfer.

Primero veremos como se comporta sobre elementos generadores.

Sea

$$b = (\underbrace{b_1, \ldots, b_1}_{i_1}, \underbrace{b_2, \ldots, b_2}_{i_2}, \ldots, \underbrace{b_r, \ldots, b_r}_{i_r}) \in B^n$$

donde $i_1 + i_2 + \ldots + i_r = n$. Entonces

$$\pi_B^{-1}[b] = \{[b_1, i_1], [b_2, i_1 + i_2], \ldots, [b_r, n]\}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
t_{\pi_B}(g[b]) = {} & \mu[b, i_1]g[b, i_1] + \mu[b, i_1 + i_2]g[b, i_1 + i_2] + \ldots \\
& +[b, i_1 + i_2 + \ldots + i_r]g[b, i_1 + i_2 + \ldots + i_r] = i_1 g[b, i_1] + i_2 g[b, i_1 + i_2] + \ldots \\
& +i_r g[b, i_1 + i_2 + \ldots + i_r] = \underbrace{g[b, i_1] + g[b, i_1] + \ldots + g[b, i_1]}_{i_1} + \\
& +\underbrace{g[b, i_1 + i_2] + g[b, i_1 + i_2] + \ldots + g[b, i_1 + i_2]}_{i_2} + \ldots \\
& +\underbrace{g[b, n] + g[b, n] + \ldots + g[b, n]}_{i_r} \\
= {} & g[b, 1] + \ldots + g[b, i_1] + g[b, i_1 + 1] + \ldots + g[b, i_1 + i_2] + \ldots \\
& +g[b, i_1 + i_2 + \ldots + i_{r-1} + 1] + \ldots + g[b, n] \\
= {} & g[b, 1] + g[b, 2] + \ldots + g[b, n]
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$t_{\pi_B}(g[b_1, \ldots, b_n]) = g[b_1, \ldots, b_n; 1] + \ldots + g[b_1, \ldots, b_n; n]$$

En general, si $\beta = \sum_{i=1}^{k} g_i[b_1^i, \ldots, b_n^i]$ entonces

$$t_{\pi_B}(\beta) = \sum_{(i,l)=(1,1)}^{(k,n)} g_i[b_1^i, \ldots, b_n^i; l]$$

ya que al variar l de 1 a n, los elementos de la fibra de $[b_1^i, \ldots, b_n^i]$, específicamente $[b_1^i, \ldots, b_n^i; l]$, se repiten $\mu_B([b_1^i, \ldots, b_n^i; l])$ veces.

Observación 4.2. A partir de una aplicación cubriente ramificada $p : E \longrightarrow X$, donde X es del mismo tipo de homotopía que un complejo CW, se pueden definir tránsferes no sólo para homología reducida, como se hizo previamente, sino también para homología no reducida y homología relativa. La Observación 3.2 hace notar que tanto $p^+ : E^+ \longrightarrow X^+$, $\overline{p} : \overline{E} \longrightarrow X/A$, donde $A \subset X$, $\overline{E} = E/p^{-1}(A)$, como $p\mid_{p^{-1}(A)}: p^{-1}(A) \longrightarrow A$, son aplicaciones cubrientes ramificadas del mismo grado, a partir de las cuales, y usando el mismo procedimiento, se obtienen los tránsferes deseados. Basta observar que $\widetilde{H}_n(X^+;G) = H_n(X;G)$ y $\widetilde{H}_n(X/A;G) = H_n(X,A;G)$.

Para obtener el tránsfer en homología relativa, observemos que las aplicaciones cubrientes ramificadas p, $\overline{p}$ y $p\mid_{p^{-1}(A)}$, se pueden relacionar en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(A) \arrow[r, "\bar{i}"] \arrow[d, "p|_{p^{-1}(A)}"'] & E \arrow[r, "\overline{q}"] \arrow[d, "p"'] & \overline{E} \arrow[d, "\overline{p}"'] \\
A \arrow[r, "i"'] & X \arrow[r, "q"'] & X/A
\end{tikzcd}$$

Al aplicar los correspondientes pretránsferes obtenemos

$$\begin{tikzcd}
F(A,G) \arrow[r, "\imath_*"] \arrow[d, "t_{p|_{p^{-1}(A)}}"'] & F(X,G) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "t_p"] & F(X/A,G) \arrow[d, "t_{\overline{p}}"] \\
F(p^{-1}(A),G) \arrow[r, "\bar{\imath}_*"'] & F(E,G) \arrow[r, "\overline{q}_*"'] & F(\overline{E},G)
\end{tikzcd}$$

Del pretránsfer $t_{\overline{p}}$ obtenemos $\tau_p : \widetilde{H}_n(X/A;G) \longrightarrow \widetilde{H}_n(\overline{E},G)$. Sin embargo, como $\widetilde{H}_n(X/A;G) = H_n(X,A;G)$ y $\overline{E} = E/p^{-1}(A)$ entonces $\tau_p : H_n(X,A;G) \longrightarrow H_n(E,p^{-1}(A);G)$.

Por la conmutatividad del diagrama anterior obtenemos la conmutatividad del siguiente

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}_n(A;G) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_p|_{p^{-1}(A)}"'] & \widetilde{H}_n(X,G) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_p"] & H_n(X,A;G) \arrow[d, "\tau_{\overline{p}}"] \\
\widetilde{H}_n(p^{-1}(A),G) \arrow[r] & \widetilde{H}_n(E,G) \arrow[r] & H_n(E,p^{-1}(A);G)
\end{tikzcd}$$

de donde vemos que el tránsfer manda la sucesión exacta larga de (X, A), en la sucesión exacta larga de (E, E_A).

La definición del tránsfer para homología no reducida resulta clara si tenemos en cuenta que $p^+ : E^+ \longrightarrow X^+$ es una aplicación cubriente ramificada y que $H_n(X;G) = \widetilde{H}_n(X^+;G)$. Tenemos pues $\tau_{p^+} : H_n(X;G) \longrightarrow H_n(E;G)$. Por último, el hecho de que tanto $\overline{p}$ como p^+ sean del mismo grado que p, permite que las propiedades fundamentales de los respectivos tránsferes, sean las mismas. Con esto, será posible considerar uno u otro tránsfer para $p : E \longrightarrow X$, según sea conveniente. ■

Los siguientes resultados establecen las propiedades fundamentales del tránsfer.

Teorema 4.1. *La composición* $p_* \circ \tau_p : \widetilde{H}_n(X;G) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X;G)$ *es multiplicación por* n.

La prueba es una consecuencia inmediata de la siguiente proposición.

Proposición 4.2. *Si* $p : E \longrightarrow X$ *es una aplicación cubriente ramificada de grado* n*, entonces la composición*

$$F(X,G) \xrightarrow{t_p} F(E,G) \xrightarrow{p_*} F(X,G)$$

es multiplicación por n

Demostración. Si $u = \sum\limits_{i=i}^{n} g_i x_i \in F(X,G)$, entonces

$$p_*(t_p(u)) = p_*\big(t_p(\sum_{i=1}^{n} g_i x_i)\big) = p_*\big(\sum_{\substack{p(e)=x_i\\ i=1,\ldots,n}} \mu(e) g_i e\big) = \sum_{\substack{p(e)=x_i\\ i=1,\ldots,n}} \mu(e) g_i x_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n} g_i x_i \Big(\sum_{p(e)=x_i} \mu(e) \Big) = n \sum_{i=1}^{n} g_i x_i = n \cdot u$$

■

La invariancia bajo pullbacks está dada por el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *Supongamos que $F : Y \longrightarrow X$ es continua. Entonces, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}_q(Y;G) \arrow[r, "\tau_{F^*(p)}"] \arrow[d, "\widetilde{H}(F)"'] & \widetilde{H}_q(F^*(E);G) \arrow[d, "\widetilde{H}(\overline{F})"] \\
\widetilde{H}_q(X;G) \arrow[r, "\tau_p"'] & \widetilde{H}_q(E;G)
\end{tikzcd}$$

donde $F^*(p) : F^*(E) \longrightarrow Y$ es la aplicación cubriente ramificada de grado n inducida por $p : E \longrightarrow X$ a través de F.

La prueba es consecuencia inmediata de la siguiente proposición.

Proposición 4.3. *Si $p : E \longrightarrow X$ es una aplicación cubriente ramificada de grado n, y $F : Y \longrightarrow X$ es continua, entonces el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
F(Y,G) \arrow[r, "t_{F^*(p)}"] \arrow[d, "F_*"'] & F(F^*(E),G) \arrow[d, "\overline{F}_*"] \\
F(X,G) \arrow[r, "t_p"'] & F(E,G)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $v = \sum_{i=1}^{n} g_i y_i \in F(Y,G)$. Entonces $t_{F^*(p)}(v) \in F(F^*(E),G)$ es tal que

$$\overline{F}_*\big(t_{F^*(p)}(v)\big) = \overline{F}_*\Big(\sum_{\substack{\overline{F}_*(p)(y,e)=y_i \\ i=1,\ldots,n}} F^*(\mu)(y,e) g_i(y,e) \Big) = \sum_{\substack{F^*(p)(y,e)=y_i \\ i=1,\ldots,n}} F^*(\mu)(y,e) g_i e =$$

$$\sum_{p(e)=F(y_i)} \mu(e)g_ie = t_p\big(\sum_{i=1}^{n} g_iF(y_i)\big) = t_p\big(F_*(\sum_{i=1}^{n} g_iy_i)\big) = t_p\big(F_*(v)\big)$$

■

Consideremos los mapeos $f_0, f_1 : Y \longrightarrow X$ y sea $p : E \longrightarrow X$ una aplicación cubriente ramificada de grado n. Tenemos las siguientes aplicaciones cubrientes ramificadas inducidas por los mapeos f_0, f_1

$$\begin{tikzcd} f_0^*(E) \arrow[r, "\widetilde{f}_0"] \arrow[d, "p_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f_0"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f_1^*(E) \arrow[r, "\widetilde{f}_1"] \arrow[d, "p_1"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f_1"'] & X \end{tikzcd}$$

Otra propiedad del tránsfer es la siguiente invariancia homotópica.

Teorema 4.3. *Si $f_0, f_1 : Y \longrightarrow X$ son homotópicas y $p : E \longrightarrow X$ una aplicación cubriente ramificada de grado n, entonces*

$$\widetilde{f}_{0*} \circ \tau_{p_0} = \widetilde{f}_{1*} \circ \tau_{p_1} : \widetilde{H}_q(Y;G) \longrightarrow \widetilde{H}_q(E;G)$$

La prueba es consecuencia del siguiente resultado

Proposición 4.4. *Si $f_0 \simeq f_1 : Y \longrightarrow X$ y $p : E \longrightarrow X$ es una aplicación cubriente ramificada de grado n, entonces*

$$\widetilde{f}_{0*} \circ t_{p_0} \simeq \widetilde{f}_{1*} \circ t_{p_1} : F(Y,G) \longrightarrow F(E,G)$$

Demostración. Si $H : Y \times I \longrightarrow X$ es una homotopía que relaciona a f_0 con f_1, entonces $\widehat{H} : F(Y,G) \times I \longrightarrow F(X,G)$ dada por $\widehat{H}(v,t) = \sum_{y \in Y} v(y)H(y,t)$ es una homotopía que relaciona a f_{0*} con f_{1*}. Por lo tanto, aplicando la Proposición 4.3, obtenemos $\widetilde{f}_{0*} \circ t_{p_0} = t_p \circ f_{0*} \simeq t_p \circ f_{1*} = \widetilde{f}_{1*} \circ t_{p_1}$. Finalmente, de la invariancia homotópica de π_q obtenemos el resultado. ■

La siguiente propiedad del tránsfer para homología resulta interesante.

Proposición 4.5. *Sea $f : B \longrightarrow C$ función continua y consideremos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} B^n \times_{\Sigma_n} \overline{n} \arrow[r, "f^n \times_{\Sigma_n} Id_{\overline{n}}"] \arrow[d, "\pi_B"'] & C^n \times_{\Sigma_n} \overline{n} \arrow[d, "\pi_C"] \\ SP^n B \arrow[r, "SP^n f"'] & SP^n C \end{tikzcd}$$

Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} F(B^n \times_{\Sigma_n} \overline{n}, G) \arrow[r, "(f^n \times_{\Sigma_n} Id_{\overline{n}})_*"] & F(C^n \times_{\Sigma_n} \overline{n}, G) \\ F(SP^n B, G) \arrow[r, "(SP^n f)_*"'] \arrow[u, "t_{\pi_B}"'] & F(SP^n C, G) \arrow[u, "t_{\pi_C}"] \end{tikzcd}$$

Como consecuencia inmediata, el diagrama obtenido al aplicar el funtor homología también conmuta.

Demostración. Tanto los tránsferes t_{π_B} y t_{π_C}, como $(f^n \times_{\Sigma_n} Id\overline{n})_*$ y $(SP^n f)_*$, son homomorfismos de grupos, por lo tanto, basta considerar generadores de $F(SP^n B, G)$ para comprobar la conmutatividad del diagrama.

Sea $g[b_1, \ldots, b_n] \in F(SP^n B, G)$. Usando los cálculos del Ejemplo 4.1

$$t_{\pi_B}(g[b_1, \ldots, b_n]) = g[b_1, \ldots, b_n; 1] + \ldots + g[b_1, \ldots, b_n; n]$$

Si $g[b_1, \ldots, b_n; i] \in F(B^n \times_{\Sigma_n} \overline{n}, G)$, entonces

$$(f^n \times_{\Sigma_n} Id_{\overline{n}})_*(g[b_1, \ldots, b_n; i]) = g[f(b_1), \ldots, f(b_n); i]$$

Por lo tanto

$$(f^n \times_{\Sigma_n} Id_{\overline{n}})_*(t_{\pi_B}(g[b_1,\ldots,b_n])) = (f^n \times_{\Sigma_n} Id_{\overline{n}})_*(g[b_1,\ldots,b_n;1]+\ldots+g[b_1,\ldots,b_n;n]) =$$

$$(f^n \times_{\Sigma_n} Id_{\overline{n}})_*(g[b_1,\ldots,b_n;1]) + \ldots + (f^n \times_{\Sigma_n} Id_{\overline{n}})_*(g[b_1,\ldots,b_n;n]) =$$

$$g[f(b_1),\ldots,f(b_n);1] + \ldots + g[f(b_1),\ldots,f(b_n);n]$$

Recorriendo el diagrama en el otro sentido obtenemos

$$t_{\pi_C}\big((SP^n f)^*(g[b_1,\ldots,b_n])\big) = t_{\pi_C}\big(g[f(b_1),\ldots,f(b_n)]\big) =$$

$$g[f(b_1),\ldots,f(b_n);1] + \ldots + g[f(b_1),\ldots,f(b_n);n]$$

■

En la Proposición 4.1 calculamos $p_* \circ t_p$. La composición opuesta también resulta interesante.

Proposición 4.6. *Sea $p : E \longrightarrow X$ una aplicación cubriente ramificada de grado n con función multiplicidad μ. Entonces la composición*

$$F(E,G) \xrightarrow{p_*} F(X,G) \xrightarrow{t_p} F(E,G)$$

está dada por

$$t_p\big(p_*(u)\big)(e) = \mu(e) \sum_{p(e')=p(e)} u(e')$$

para toda $u \in F(E,G)$.

Demostración. Sea $u = \sum_{i=1}^{n} g_i e_i$ entonces

$$t_p\big(p_*(u)\big) = t_p\big(p_*(\sum_{i=1}^{n} g_i e_i)\big) = t_p\big(\sum_{i=1}^{m} g_i p(e_i)\big) = \sum_{\substack{p(e)=p(e_i)\\ i=1,\ldots,n}} \mu(e) g_i e$$

Por lo tanto, es fácil ver que

$$t_p\big(p_*(u)\big)(e) = \mu(e) \sum_{p(e')=p(e)} u(e')$$

■

En el caso de la acción de un grupo finito en un espacio E, la composición descrita anteriormente es particularmente simple.

Corolario 4.2. *Si $v \in F(E,G)$, entonces $t_p\big(p_*(v)(e)\big) = \sum_{g \in G} v(ge)$.*

Demostración.

$$p : E \longrightarrow E/G$$

que también puede ser vista como

$$p : E/H \longrightarrow E/G$$

donde $H = \{e_G\}$.

Utilizando la Proposición 4.6

$$t_p\big(p_*(v)(e)\big) = \mu(e) \sum_{p(e)=p(e')} v(e')$$

Sin embargo, si $e' \in E$ es tal que $p(e) = p(e')$, entonces existe $g \in G$ tal que $ge = e'$, por lo tanto $\{v(ge) \mid g \in G\}$ considera todos lo $v(e')$, donde $p(e) = p(e')$, repitiendo cada uno tantas veces como elementos tenga su grupo de isotropía. Como $\mu(e) =\mid G_e \mid$, y $\mid G_e \mid = \mid G'_e \mid$, si $p(e) = p(e')$, entonces

$$\mu(e) \sum_{p(e)=p(e')} v(e') = \mid G_e \mid \sum_{p(e)=p(e')} v(e') = \sum_{g \in G} v(ge)$$

■

Otra propiedad interesante resulta de considerar el tránsfer de la composición de un par de aplicaciones cubrientes ramificadas.

Definición 4.2. Sean N y H grupos, y $\varphi : H \longrightarrow Aut(N)$ un homomorfismo de grupos. Definimos el *producto semidirecto exterior* $N \times_\varphi H$ como el conjunto de parejas (n, h) dotado con la operación

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1\varphi(h_1)(n_2), h_1h_2)$$

Si consideramos a Σ_n y $(\Sigma_m)^n$, podemos definir un homomorfismo $\varphi : \Sigma_n \longrightarrow Aut\big((\Sigma_m)^n\big)$ a partir de la acción de Σ_n en $(\Sigma_m)^n$ que permuta los n factores. Al producto semidirecto exterior $\Sigma_n \times_\varphi (\Sigma_m)^n$, lo llamamos *producto orlado* y lo denotamos por $\Sigma_n \int \Sigma_m$.

Proposición 4.7. *Sea $p : Y \longrightarrow X$ una aplicación cubriente ramificada de grado n con función multiplicidad $\mu : Y \longrightarrow \mathbb{N}$ y sea $q : Z \longrightarrow Y$ una aplicación cubriente ramificada de grado m con función multiplicidad $\nu : Z \longrightarrow \mathbb{N}$. Entonces, la composición $p \circ q : Z \longrightarrow Y \longrightarrow X$ es una aplicación cubriente ramificada de grado mn, con función multiplicidad $\xi : Z \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $\xi(z) = \nu(z)\mu(q(z))$.*

Demostración. Como p y q son aplicaciones cubrientes ramificadas, y la fibra de un elemento $x \in X$ está dada por el siguiente conjunto $q^{-1}(p^{-1}(x)) = \bigcup\limits_{i=1}^{s} q^{-1}(y_i)$, donde $\{y_i, \ldots, y_s\}$ es la fibra de x bajo p, entonces la fibra de x bajo $p \circ q$ es finita y discreta.

Para verificar la segunda condición, tomemos $x \in X$ y enumeremos su fibra bajo p como se hizo previamente: $p^{-1}(x) = \{y_1, \ldots, y_s\}$. Consideremos $z \in (p \circ q)^{-1}(x)$. Como z está en la fibra de x, $q(z) = y_i$ para algún i. Más aún, usando la definición de $\xi : Z \longrightarrow \mathbb{N}$, se cumple

$$\sum_{q(z')=q(z)} \xi(z') = \sum_{q(z')=q(z)} \nu(z')\mu(q(z')) = \mu(q(z)) \sum_{q(z')=q(z)} \nu(z') = \mu(q(z))m$$

Ahora, como la fibra de x bajo $p \circ q$ es la unión de las fibras de los y_i bajo p, obtenemos

$$\sum_{z \in (p \circ q)^{-1}(x)} \xi(z) = \sum_{\substack{q(z)=y_i \\ i=1,\ldots,s}} \xi(z) = \sum_{\substack{q(z)=y_i \\ i=1,\ldots,s}} \nu(z)\mu(q(z)) = \sum_{\substack{q(z)=y_i \\ i=1,\ldots,s}} \nu(z)\mu(y_i) = m\sum_{i=1}^{s}\mu(y_i) = mn$$

con lo que se establece la segunda propiedad.

Resta probar la continuidad de $\varphi_{p\circ q} : X \longrightarrow SP^{mn}Z$. Para este propósito, consideremos el producto orlado $\Sigma_n \int \Sigma_m$ y la acción $\underbrace{Z^m \times \ldots \times Z^m}_{\text{n-veces}} \times \Sigma_n \int \Sigma_m \longrightarrow Z^m \times \ldots \times Z^m$ dada por $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \cdot (\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n) = (\zeta_{\sigma(1)} \cdot \tau_1, \ldots, \zeta_{\sigma(n)} \cdot \tau_n)$ con $\zeta_i \in Z^m$, $\sigma \in \Sigma_n$, $\tau_i \in \Sigma_m$. Usando la aplicación orbital de esta acción obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z^m \times \ldots \times Z^m \arrow[r, "\alpha\times\ldots\times\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & Z^m/\Sigma_m \times \ldots \times Z^m/\Sigma_m \arrow[d, "\pi'"] \\
(Z^m)^n/\Sigma_n \int \Sigma_m \arrow[r, "h"] & SP^n(SP^m Z)
\end{tikzcd}$$

Tomemos $z_1 = (\zeta_1^1, \ldots, \zeta_n^1)$, $z_2 = (\zeta_1^2, \ldots, \zeta_n^2) \in Z^m \times \ldots \times Z^m$ y supongamos que pertenecen a la misma clase de equivalencia inducida por la acción $\Sigma_n \int \Sigma_m$. Esto es, existen $\sigma \in \Sigma_n$, y $(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in (\Sigma_m)^n$, tales que $(\zeta_1^1, \ldots, \zeta_n^1) \cdot (\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n) = (\zeta_{\sigma(1)} \cdot \tau_1, \ldots, \zeta_{\sigma(n)} \cdot \tau_n) = z_2$. Claramente, aplicar $(\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ a z_1 da lo mismo que calcular $(\zeta_1 \cdot \tau_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \zeta_n \cdot \tau_{\sigma^{-1}(n)}) \cdot \sigma$, por lo tanto, $\pi' \circ (\alpha \times \ldots \times \alpha)(z_1) = \pi' \circ (\alpha \times \ldots \times \alpha)(z_2)$. Operar los elementos $\sigma \in \Sigma_n$, $(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in (\Sigma_m)^n$, al revés de como se hizo previamente, permite demostrar, de manera similar, que las clases de equivalencia inducidas por $\pi' \circ (\alpha \times \ldots \times \alpha)$ son las mismas que las inducidas por π. Si a este hecho le sumamos la suprayectividad de ambas funciones, obtenemos una función bien definida y biyectiva $h : (Z^m)^n/\Sigma_n \int \Sigma_m \longrightarrow SP^n(SP^m Z)$. La naturaleza proclusiva de π y $\pi' \circ (\alpha \times \ldots \times \alpha)$, se encarga de la continuidad de h como de su inversa. Por lo tanto, hay un homeomorfismo $(Z^m)^n/\Sigma_n \int \Sigma_m \approx SP^n(SP^m Z)$.

De la definición de $SP^n(SP^m Z)$ podemos ver que si z_1, z_2 $\in Z^m \times \ldots \times Z^m$ son tales que $\overline{z_1} = \overline{z_2}$ en $SP^n(SP^m Z)$, entonces existe una permutación $\xi \in \Sigma_{nm}$ tal que $z_1\xi = z_2\xi$, por lo que tenemos definido un cociente canónico $\rho : SP^n(SP^m Z) \longrightarrow SP^{mn}Z$. Al componerlo con φ_p y $SP^n(\varphi_q)$ obtenemos la función continua

$$\rho \circ SP^n(\varphi_p) \circ \varphi_p : X \longrightarrow SP^n(Y) \longrightarrow SP^n(SP^m(Z)) \longrightarrow SP^{mn}Z$$

Sin embargo, como la fibra de $x \in X$ bajo $p \circ q$ está dada por $\cup_{i=1}^s q^{-1}(y_i)$, donde $\{y_1, \ldots, y_s\}$ es la fibra de x bajo p, y la multiplicidad de $p \circ q$ por $\xi(z) = \nu(z)\mu(q(z))$, entonces, bajo $\rho \circ SP^n(\varphi_q) \circ \varphi_p$

$$x \longmapsto [\underbrace{y_1, \ldots, y_1}_{\mu(y_1)\text{-veces}}, \ldots] \longmapsto [\underbrace{z_1, \ldots, z_1}_{\nu(z_1)\text{-veces}}, \ldots, \underbrace{z_t, \ldots, z_t}_{\nu(z_t)\text{-veces}}, \underbrace{z_1, \ldots, z_1}_{\nu(z_1)\text{-veces}}, \ldots, \underbrace{z_t, \ldots, z_t}_{\nu(z_t)\text{-veces}}, \ldots]$$

$$= [\underbrace{\underbrace{z_1, \ldots, z_1}_{\nu(z_1)\text{-veces}}, \ldots, \underbrace{z_1, \ldots, z_1}_{\nu(z_1)\text{-veces}}}_{\mu(q(z_1))\text{-veces}}, \ldots, \underbrace{\underbrace{z_t, \ldots, z_t}_{\nu(z_t)\text{-veces}}, \ldots, \underbrace{z_t, \ldots, z_t}_{\nu(z_t)\text{-veces}}}_{\mu(q(z_t))\text{-veces}}, \ldots]$$

$$= [\underbrace{z_1, \ldots, z_1}_{\nu(z_1)\mu(q(z_1))\text{-veces}}, \ldots, \underbrace{z_t, \ldots, z_t}_{\nu(z_t)\mu(q(z_t))\text{-veces}}, \ldots] = [\underbrace{z_1, \ldots, z_1}_{\xi(z_1)\text{-veces}}, \ldots, \underbrace{z_t, \ldots, z_t}_{\xi(z_1)\text{-veces}}, \ldots] = \varphi_{p \circ q}(x)$$

donde $q^{-1}(y_1) = \{z_1, \ldots, z_t\}$. Por lo tanto $\varphi_{p \circ q}$ es continua. ∎

Ahora estamos en posición de ver qué sucede con el tránsfer de la composición de aplicaciones cubrientes ramificadas.

Teorema 4.4. *Tenemos las siguientes igualdades:*

$$t_{p \circ q} = t_q \circ t_p : F(X, G) \xrightarrow{t_p} F(Y, G) \xrightarrow{t_q} F(Z, G)$$

$$\tau_{p \circ q} = \tau_q \circ \tau_p : \widetilde{H}_k(X; G) \xrightarrow{\tau_p} \widetilde{H}_k(Y; G) \xrightarrow{\tau_q} \widetilde{H}_k(Z; G)$$

Demostración. Debido a que τ_p es el morfismo obtenido al aplicar el funtor homotopía, la segunda igualdad se obtiene de la primera.

Sea $u \in F(X,G)$, $v \in F(Y,G)$, y $w \in F(Z,G)$, tales que $v = t_p(u)$ y $w = t_q(v)$. entonces, como

$$v(y) = \mu(y)u\big(p(y)\big) \quad \text{y} \quad w(z) = \nu(z)v\big(q(z)\big)$$

$$t_q\big(t_p(u)\big)(z) = \nu(z)t_p(u)\big(q(z)\big) = \nu(z)v\big(q(z)\big) =$$

$$\nu(z)\mu\big(q(z)\big)u\big(p(q(z))\big) = \xi(z)u\big((p \circ q)(z)\big) = t_{p\circ q}(u)(z)$$

■

Corolario 4.3. *Dada una aplicación cubriente ramificada $p : E \longrightarrow X$ de grado n, con función multiplicidad μ, y dado un entero l, existe una aplicación cubriente ramificada de grado ln, $p_l : E \longrightarrow X$, tal que $p_l = p$ y $\mu_l(e) = l\mu(e)$, $e \in E$. Más aún $t_{pl} = lt_p : F(X,G) \longrightarrow F(E,G)$ y $\tau_{pl} = l\tau_p : \widetilde{H}_k(X;G) \longrightarrow \widetilde{H}_k(E;G)$*

Demostración. Consideremos la aplicación cubriente ramificada $q : E \longrightarrow E$ tal que $q = Id_E$ y $\nu(e) = l$ para toda $e \in E$. Claramente $p_l = p \circ q$. Al usar el Teorema 4.4, obtenemos $t_{pl} = t_{p\circ q} = t_q \circ t_p = l \cdot t_p$ y $\tau_{pl} = \tau_{p\circ q} = \tau_q \circ \tau_p = l \cdot \tau_p$ ■

Observación 4.3. Haciendo uso del Corolario 4.3, vemos que a una misma aplicación cubriente ramificada podemos darle distintos grados. No obstante, el tránsfer resulta ser esencialmente el mismo ya que difieren entre ellos por un múltiplo.

Capítulo 5

Tránsfer para cohomología

En este capítulo se define el tránsfer para cohomología, se prueban algunas de sus propiedades, y se demuestra una aplicación para mapeos de órbitas obtenidos de acciones de grupos finitos. Una vez más, los objetos son tomados y las operaciones realizadas en la categoría KDH.

Definición 5.1. Sea $p : E \longrightarrow X$ una aplicación cubriente ramificada de grado n con función multiplicidad μ donde E y X son del mismo tipo de homotopía que un complejo CW. Se define una función entre los respectivos grupos de cohomología

$$\tau^p : H^q(E;G) = [E, F(\mathbb{S}^q, G)] \longrightarrow [X, F(\mathbb{S}^q, G)] = H^q(X;G)$$

$$\tau^p([\widetilde{\alpha}]) = [\alpha], \text{donde } \alpha(x) = \sum_{p(e)=x} \mu(e)\widetilde{\alpha}(e), x \in X$$

Proposición 5.1. *La función τ^p está bien definida y es un homomorfismo.*

Demostración. Primero demostraremos que α está en $[X, F(\mathbb{S}^q, G)]$.

Debido a la forma en que se definió α, es fácil ver que coincide con la siguiente composición

$$X \xrightarrow{\varphi_p} SP^n E \xrightarrow{SP^n\widetilde{\alpha}} SP^n(F(\mathbb{S}^q, G)) \xrightarrow{\Sigma} F(\mathbb{S}^q, G)$$

donde el último mapeo está dado por la estructura de grupo en $F(\mathbb{S}^q, G)$. Como cada una de las funciones es continua, la composición resulta continua, y con ello α.

Ahora demostraremos que $\tau^p([\widetilde{\alpha}])$ no depende de la elección del elemento de la clase de $[\widetilde{\alpha}]$.

Si $\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha}_2 \in [E, F(\mathbb{S}^q, G)]$ son tales que $[\widetilde{\alpha_1}] = [\widetilde{\alpha_2}]$, entonces existe una homotopía $\widetilde{H} : E \times I \longrightarrow F(\mathbb{S}^q, G)$, donde $\widetilde{H}(e, 0) = \widetilde{\alpha_1}(e)$, y $\widetilde{H}(e, 1) = \widetilde{\alpha_1}(e)$, que los relaciona. Consideremos $\alpha_1 = \tau^p([\widetilde{\alpha_1}])$, $\alpha_2 = \tau^p([\widetilde{\alpha_2}])$, y definamos la siguiente función

$$H(x, t) = \sum_{p(e)=x} \mu(e)\widetilde{H}(e, t)$$

Claramente, debido a la definición de τ^p, obtenemos

$$H(x, 0) = \sum_{p(e)=x} \mu(e)\widetilde{H}(e, 0) = \sum_{p(e)=x} \mu(e)\widetilde{\alpha_1}(e) = \alpha_1(x)$$
$$H(x, 1) = \sum_{p(e)=x} \mu(e)\widetilde{H}(e, 1) = \sum_{p(e)=x} \mu(e)\widetilde{\alpha_2}(e) = \alpha_2(x)$$

Veamos a $H : X \times I \longrightarrow F(\mathbb{S}^q, G)$ como la siguiente composición

$$X \times I \xrightarrow{f} SP^n(E \times I) \xrightarrow{SP^n\widetilde{H}} SP^n(F(\mathbb{S}^q, G)) \xrightarrow{\Sigma} F(\mathbb{S}^q, G)$$

Tanto $SP^n\widetilde{H}$ como Σ son continuas. La primera porque $\widetilde{H}$ es una homotopía, y la segunda debido a la estructura de grupo de $F(\mathbb{S}^q, G)$. A f la podemos ver como la función que se obtiene de combinar $\varphi_p : X \longrightarrow SP^nE$ y la aplicación diagonal $D : I \longrightarrow I^n$

$$\varphi_p \times D : X \times I \longrightarrow SP^nE \times I^n$$

Como la imagen de la aplicación diagonal consta de eneadas con entradas iguales, la imagen de $\varphi_p \times D$ se puede considerar dentro de $SP^n(E \times I)$. Entonces, la función f se puede ver como

$$f = \varphi_p \times D : X \times I \longrightarrow SP^nE \times I \longrightarrow SP^n(E \times I)$$

probando la continuidad de f. Resulta entonces claro, que H es una homotopía que relaciona α_1 con α_2.

Para ver que τ^p es un homomorfismo, basta observar que $F(\mathbb{S}^q)$ tiene estructura de grupo y la definición de τ^p. ■

Corolario 5.1. *Sea $p : E \longrightarrow X$ una aplicación cubriente ramificada de grado n con función multiplicidad μ, donde E y X son del mismo tipo de homotopía que un complejo CW. Entonces existe un tránsfer para cohomología $\tau^p : H^q(E; G) \longrightarrow H^q(X; G)$.*

El tránsfer para cohomología tiene una serie de propiedades similares a las del tránsfer para homología.

Teorema 5.1. *La composición*

$$\tau^p \circ p^* : H^q(X; G) \longrightarrow H^q(E; G) \longrightarrow H^q(X; G)$$

resulta ser multiplicación por n, donde n es el grado de la aplicación cubriente ramificada.

Demostración. Si $[\alpha] \in [X, F(\mathbb{S}^q, G)]$, entonces $\tau^p(p^*(\alpha)) = \tau^p(\alpha \circ p) : X \longrightarrow F(\mathbb{S}^q, G)$.

Más aún

$$(\tau^p \circ p^*)(\alpha)(x) = \tau^p(\alpha \circ p)(x) = \sum_{p(e)=x} \mu(e)(\alpha \circ p)(e) =$$

$$\sum_{p(e)=x} \mu(e)\alpha(p(e)) = \sum_{p(e)=x} \mu(e)\alpha(x) = \big(\sum_{p(e)=x} \mu(e)\big)\alpha(x) = n\alpha(x).$$

Pot lo tanto, $\tau^p p^*([\alpha]) = n[\alpha]$. ■

Teorema 5.2. *Sea $p : E \longrightarrow X$ una aplicación cubriente ramificada de grado n y sea $F : Y \longrightarrow X$ continua. Entonces, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} H^q(E;G) \arrow[r, "\tau^p"] \arrow[d, "\widetilde{F}^*"'] & H^q(X;G) \arrow[d, "F^*"] \\ H^q(F^*(E);G) \arrow[r, "\tau^{F^*(p)}"'] & H^q(Y;G) \end{tikzcd}$$

donde $F^*(E)$ es el pullback de p inducido por F, τ^p y $\tau^{F^*(p)}$ los tránferes de p y $F^*(p)$, respectivamente, y $\widetilde{F}^*$, F^* los mapeos correspondientes a $\widetilde{F}$ y F bajo el funtor cohomología H^q.

Demostración. Si $[\widetilde{\alpha}] \in H^q(E;G)$ y $\tau^p([\widetilde{\alpha}]) = [\alpha]$ donde $\alpha(x) = \sum_{p(e)=x} \mu(e)\widetilde{\alpha}(e)$, entonces

$$F^*\big(\tau^p([\widetilde{\alpha}])\big)(y) = F^*([\alpha])(y) = \alpha \circ F(y) = \alpha(F(y)) = \sum_{p(e)=F(y)} \mu(e)\widetilde{\alpha}(e)$$

Llamemos $[\widetilde{\alpha}^*]$ a $\widetilde{F}^*([\widetilde{\alpha}])$. De esta forma tenemos $\widetilde{\alpha}^*(y,e) = \widetilde{F}^*([\widetilde{\alpha}])(y,e) = \widetilde{\alpha}(\widetilde{F}(y,e)) = \widetilde{\alpha}(e)$

Por lo tanto

$$\tau^{F^*(p)}(\widetilde{F}^*([\widetilde{\alpha}]))(y) = \tau^{F^*(p)}([\widetilde{\alpha}^*])(y) = \sum_{F^*(p)(e,y)=y} F^*(\mu)(e,y)\widetilde{\alpha}^*(e,y) =$$

$$\sum_{F^*(p)(e,y)=y} F^*(\mu)(e,y)\widetilde{\alpha}(e) = \sum_{F^*(p)(e,y)=y} \mu(e)\widetilde{\alpha}(e)$$

Como $F^*(E)$ es el pullback inducido por F, entonces, para cada $y \in Y$

$$\{e \in E \mid (e,y) \in F^*(E)\} = \{e \in E \mid p(e) = F(y)\}$$

Por lo tanto

$$\sum_{F^*(p)(e,y)=y} \mu(e)\widetilde{\alpha}(e) = \sum_{p(e)=F(y)} \mu(e)\widetilde{\alpha}(e)$$

Con esto vemos que $F^*\big(\tau^p([\widetilde{\alpha}])\big) = \tau^{F^*(p)}\big(\widetilde{F}^*([\widetilde{\alpha}])\big)$ ∎

Similar al Teorema 4.3, tenemos la siguiente propiedad que se obtiene como consecuencia del Teorema 5.2.

Teorema 5.3. *Si $f_0, f_1 : Y \longrightarrow X$ son mapeos homotópicos y $p : E \longrightarrow X$ una aplicación cubriente ramificada de grado n, entonces*

$$\tau^{p_0} \circ \widetilde{f}_0^* = \tau^{p_1} \circ \widetilde{f}_1^* : H^q(E; G) \longrightarrow H^q(Y; G)$$

Proposición 5.2. *Sea $p : E \longrightarrow X$ una aplicación cubriente ramificada de grado n con función multiplicidad μ. Entonces la composición*

$$H^q(E; G) \xrightarrow{\tau^p} H^q(X; G) \xrightarrow{p^*} H^q(E; G)$$

está dada de la siguiente manera:

Sea $[\widetilde{\alpha}] \in H^q(E; G) = [E, F(\mathbb{S}^q, G)]$, entonces $p^*\tau^p[\widetilde{\alpha}]$ está representada por la aplicación $\alpha^{'} : E \longrightarrow F(\mathbb{S}^q, G)$ cuya regla de correspondencia es

$$\alpha^{'}(e) = \sum_{p(e')=p(e)} \mu(e')\widetilde{\alpha}(e')$$

Demostración. Si $\tau^p([\widetilde{\alpha}]) = \alpha$, entonces

$$p^*(\tau^p([\widetilde{\alpha}]))(e) = p^*([\alpha])(e) = \alpha \circ p(e) = \alpha(p(e)) = \sum_{p(e')=p(e)} \mu(e')\widetilde{\alpha}(e')$$

∎

En el caso de la acción de un grupo finito G sobre un espacio E, la composición estudiada en la proposición anterior resulta interesante debido a la relevancia que tienen las aplicaciones cubrientes ramificadas de este tipo, y a una aplicación que se demuestra al final de este capítulo.

Corolario 5.2. *Si* $[\widetilde{\alpha}] \in H^q(E;G)$, *entonces*

$$p^*\big((\tau^p([\widetilde{\alpha}]))\big) = \sum_{g\in G} g^*(\widetilde{\alpha})$$

Demostración. La aplicación cubriente ramificada en este caso es

$$p : E \longrightarrow E/G$$

que también puede ser vista como

$$p : E/H \longrightarrow E/G$$

donde $H = \{e_G\}$

En el Ejemplo 3.3 vimos que el grado n de éste tipo de aplicaciones está dado por $[G : H]$, y que la función multiplicidad está definida por $\mu(e) = [G_e : H_e]$. Entonces, para $p : E \longrightarrow E/G$, el grado es $[G : e_G] =\mid G \mid$, y $\mu(e) = [G_e : H_e] = [G_e : \{e_G\}] = \mid G_e \mid$. Por lo tanto

$$p^*\big(\tau^p([\widetilde{\alpha}])\big)(e) = \sum_{p(e')=p(e)} \mu(e')\widetilde{\alpha}(e') = \sum_{p(e')=p(e)} \mid G_e \mid \widetilde{\alpha}(e')$$

Como $\mid G_e \mid = \mid G'_e \mid$ si $p(e) = p(e')$, entonces

$$\{e' \mid p(e') = p(e)\} = \{ge \mid g \in G, e \in E\}$$

y $ge = e$ tantas veces como $\mid G_e \mid$, por lo que

$$\sum_{p(e')=p(e)} \mid G_e \mid \widetilde{\alpha}(e') = \sum_{g\in G} \widetilde{\alpha}(ge)$$

Entonces

$$p^*(\tau^p([\widetilde{\alpha}]))(e) = \sum_{g\in G} \widetilde{\alpha}(ge)$$

Si vemos a $g \in G$ como el homeomorfismo $g : E \longrightarrow E$ dado por $g(e) = ge$, entonces

$$\sum_{g\in G} \widetilde{\alpha}(ge) = \sum_{g\in G} g^*(\widetilde{\alpha})(e)$$

Resulta inmediato que

$$p^*\big(\tau^p([\widetilde{\alpha}])\big) = \sum_{g\in G} g^*(\widetilde{\alpha})$$

■

Una consecuencia del Teorema 5.1 y del Corolario 5.2, es la siguiente proposición.

Proposición 5.3. *Sea Γ un grupo finito que actúa en un espacio E. Sea $\Gamma' \subset \Gamma$ un subgrupo de índice n. Supongamos que R es un anillo donde el entero n es invertible. Entonces, el homomorfismo de cohomología $p^* : H^q(E/\Gamma; R) \longrightarrow H^q(E/\Gamma'; R)$, donde $p : E/\Gamma' \longrightarrow E/\Gamma$, es un monomorfismo que se escinde. Más aún, si el orden de Γ es invertible en R, entonces la imagen de p^* es $H^q(E/\Gamma'; R)^\Gamma$. Por lo tanto, en este caso $H^q(E/\Gamma; R) \cong H^q(E/\Gamma'; R)^\Gamma$.*

Demostración. Dadas las hipótesis, y considerando el Ejemplo 3.3, tenemos que $p : E/\Gamma' \longrightarrow E/\Gamma$ es una aplicación cubriente ramificada de grado $[\Gamma : \Gamma'] = n$. Por el Teorema 5.1, la composición

$$\tau^p \circ p^* : H^q(E/\Gamma; R) \longrightarrow H^q(E/\Gamma'; R) \longrightarrow H^q(E/\Gamma'; R)$$

es multiplicación por n. Como el grupo de coeficientes, en este caso, tiene estructura de anillo, la cohomología tiene estructura de R-módulo. Por hipótesis, $n \in R$ es invertible, por lo tanto, multiplicación por n^{-1} tiene sentido. Claramente, los homomorfismos multiplicación por n, y multiplicación por n^{-1}, son inversos uno del otro, por lo tanto, $\tau^p \circ p^*$ resulta un isomorfismo, y con ello, p^* un monomorfismo. Tomemos $\nu \in H^q(E/\Gamma; R)$ y consideremos $p^*(\nu)$

$$p^*(\nu) = \nu \circ p : E/\Gamma' \longrightarrow E/\Gamma \longrightarrow F(\mathbb{S}^q, R)$$

La acción de todo elemento $\gamma \in \Gamma$ en $H^q(E/\Gamma'; R)$ está determinada por $\gamma^*(p^*(\nu)) = p^*(\nu) \circ \gamma$

$$p^*(\nu) \circ \gamma : E/\Gamma' \longrightarrow E/\Gamma' \longrightarrow E/\Gamma \longrightarrow F(\mathbb{S}^q, R)$$

Como cada elemento en E/Γ', no sale de la órbita a la que corresponde en E/Γ bajo la acción de cualquier $\gamma \in \Gamma$

$$p^*(\nu) \circ \gamma = p^*(\nu)$$

Por lo tanto

$$p^*(H^q(E/\Gamma; R)) \subset H^q(E/\Gamma'; R)^\Gamma$$

Sea m el orden de Γ y consideremos la acción de Γ en E/Γ'. Como $(E/\Gamma')/\Gamma = E/\Gamma$, podemos considerar a $p : E/\Gamma' \longrightarrow E/\Gamma$ como una aplicación cubriente ramificada de grado m. Tomemos $\xi \in H^q(E/\Gamma'; R)^\Gamma$. Usando el Corolario 5.2, y el hecho de que todo $\gamma \in \Gamma$ deja fija a ξ, tenemos

$$p^*(\tau^p(\xi)) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^*(\xi) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \xi = m\xi$$

Como $m \in R$ es invertible, entonces $m^{-1}\tau^p(\xi) \in H^q(E/\Gamma; R)$ es un elemento en la preimagen de ξ

$$p^*(m^{-1}\tau^p(\xi)) = m^{-1}p^*(\tau^p(\xi)) = m^{-1}m\xi = \xi$$

Dado que p^* es un monomorfismo, y que la imagen de p^* es $H^q(E/\Gamma'; R)^\Gamma$, resulta inmediato que $H^q(E/; R) \cong H^q(E/\Gamma'; R)^\Gamma$. ■

Capítulo 6

Dualidad entre el tránsfer de homología y cohomología

En este capítulo comparamos el tránsfer para homología, y el tránsfer para cohomología. Trabajamos en la categoría KDH.

Dada una aplicación cubriente ramificada $p : E \longrightarrow X$ de grado n , con función multiplicidad $\mu : E \longrightarrow \mathbb{N}$, se tiene el tránsfer para cohomología

$$\tau^p : H^q(E; G) \longrightarrow H^q(X; G)$$

tal y como se definió en el capítulo pasado. La aplicación cubriente ramificada se puede extender a $p^+ : E^+ \longrightarrow X^+$ del mismo grado que p, tal y como se hizo en la Observación 3.2, y con ello definir el tránsfer para homología no reducida

$$\tau_p : H_q(X; G) = \widetilde{H}_q(X^+; G) \longrightarrow \widetilde{H}_q(E^+; G)$$

Teorema 6.1. *Sea $p : E \longrightarrow X$ una aplicación cubriente ramificada de grado n, con función multiplicidad $\mu : E \longrightarrow \mathbb{N}$, donde E es un espacio conectable por trayectorias, y sean $\tau_p : H_q(X; R) \longrightarrow H_q(E; R)$ y $\tau^p : H^q(E; R) \longrightarrow H^q(X; R)$, sus tránsferes para homología y cohomología con coeficientes en R, un anillo conmutativo con uno. Si $\xi \in H_q(X; R)$ y $\overline{\xi} \in H^q(E; R)$ entonces*

$$< \tau_p(\xi), \overline{\xi} >_E = < \xi, \tau^p(\overline{\xi}) >_X \in X$$

donde $< \, , \, >_E$ *y* $< \, , \, >_X$*, son los productos de Kronecker con respecto a* E *y* X *respectivamente.*

Demostración. Tenemos que probar la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[E^+, F(\mathbb{S}^q, R)]_* \times [\mathbb{S}^q, F(E^+, R)]_*} \arrow[r] & R \\
{[E^+, F(\mathbb{S}^q, R)]_* \times [\mathbb{S}^q, F(X^+, R)]_*} \arrow[u, "Id\times\tau_p"'] \arrow[d, "\tau^p\times Id"'] & \\
{[X^+, F(\mathbb{S}^q, R)]_* \times [\mathbb{S}^q, F(X^+, R)]_*} \arrow[r] & R
\end{tikzcd}$$

Recordemos el morfismo k usado en la Proposición 2.9 para definir el producto cap. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[E^+, F(\mathbb{S}^q, R)]_* \times [\mathbb{S}^q, F(E^+, R)]_*} \arrow[r] & {[E^+, F(E^+, R)]_*} \arrow[dr] & \\
{[E^+, F(\mathbb{S}^q, R)]_* \times [\mathbb{S}^q, F(X^+, R)]_*} \arrow[u, "Id\times\tau_p"'] \arrow[d, "\tau^p\times Id"'] \arrow[r] & {[E^+, F(X^+, R)]_*} \arrow[u, "\tau_p"'] \arrow[d, "\tau^p"'] & R \\
{[X^+, F(\mathbb{S}^q, R)]_* \times [\mathbb{S}^q, F(X^+, R)]_*} \arrow[r] & {[X^+, F(X^+, R)]_*} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

donde los morfismos horizontales se obtienen de componer a k con el inverso del isomorfismo de suspensión q veces, y la composición de los dos morfismos horizontales superiores como la de los dos morfismos horizontales inferiores, coincide con el producto cap. Por lo tanto, basta demostrar la conmutatividad de los tres diagramas que lo componen, para obtener el resultado.

Primero consideremos

$$\begin{tikzcd}
{[E^+, F(\mathbb{S}^q, R)]_* \times [\mathbb{S}^q, F(X^+, R)]_*} \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\tau^p \times Id"'] & {[\Sigma^q E^+, F(\Sigma^q X^+, R)]_*} \arrow[d, "\tau^{\Sigma^q p}"] \\
{[X^+, F(\mathbb{S}^q, R)]_* \times [\mathbb{S}^q, F(X^+, R)]_*} \arrow[r, "k"'] & {[\Sigma^q X^+, F(\Sigma^q X^+, R)]_*}
\end{tikzcd}$$

Sea $(\overline{\xi}, \xi) \in [E^+, F(\mathbb{S}^q, R)]_* \times [\mathbb{S}^q, F(X^+, R)]_*$. Recordemos que el tránsfer para cohomología está dado por

$$\tau^p(\overline{\xi}) = [\alpha] \qquad\qquad \alpha(x) = \sum_{p(e)=x} \mu(e)\overline{\xi}(e)$$

De definición de k, obtenemos, recorriendo la parte inferior del diagrama

$$k(\alpha, \xi)(x \wedge s)(x' \wedge s') = \alpha(x)(s') \otimes \xi(s)(x') = \big(\sum_{p(e)=x} \mu(e)\overline{\xi}(e)\big)(s') \otimes \xi(s)(x')$$

donde $(x \wedge s), (x' \wedge s') \in X^+ \bigwedge \mathbb{S}^q \approx \Sigma^q X^+$.

De igual forma

$$k(\overline{\xi}, \xi)(e \wedge s)(x' \wedge s') = \overline{\xi}(e)(s') \otimes \xi(s)(x')$$

por lo que al recorrer la parte superior del diagrama obtenemos

$$\tau^{\Sigma^q p}\big(k(\overline{\xi}, \xi)\big)(x \wedge s)(x' \wedge s') = \big(\sum_{p(e \wedge s)=x \wedge s} \mu(e)k(\overline{\xi}, \xi)(e \wedge s)\big)(x' \wedge s') =$$

$$\big(\sum_{p(e)=x} \mu(e)\overline{\xi}(e)\big)(s') \otimes \xi(s)(x')$$

Ahora consideramos

$$
\begin{tikzcd}
{[E^+, F(\mathbb{S}^q, R)]_* \times [\mathbb{S}^q, F(E^+, R)]_*} \arrow[r, "k"] & {[\Sigma^q E^+, F(\Sigma^q E^+, R)]_*} \\
{[E^+, F(\mathbb{S}^q, R)]_* \times [\mathbb{S}^q, F(X^+, R)]_*} \arrow[r, "k"'] \arrow[u, "Id\times\tau_p"] & {[\Sigma^q E^+, F(\Sigma^q X^+, R)]_*} \arrow[u, "\tau_{\Sigma^q p}"']
\end{tikzcd}
$$

Utilizando la definición del tránsfer τ_p y del pretránsfer t_p, obtenemos, recorriendo la parte superior del diagrama

$$k(\overline{\xi}, t_p \circ \xi)(e \wedge s)(e' \wedge s') = \overline{\xi}(e)(s') \otimes (t_p \circ \xi)(s)(e')$$

Sin embargo

$$(t_p \circ \xi)(s)(e') = t_p(\xi(s))(e') = \mu(e')\xi(s)(x)$$

donde $p(e') = x$. Por lo tanto,

$$k(\overline{\xi}, t_p \circ \xi)(e \wedge s)(e' \wedge s') = \overline{\xi}(e)(s') \otimes \mu(e')\xi(s)(x) = \mu(e')\big(\xi(e')(s') \otimes \xi(s)(x)\big)$$

Realizando lo mismo, pero ahora por la parte inferior, obtenemos

$$\tau_p\big(k(\overline{\xi}, \xi)\big)(e \wedge s)(e' \wedge s') = t_p\big(k(\overline{\xi}, \xi)(e \wedge s)\big)(e' \wedge s') = \mu(e')k(\overline{\xi}, \xi)(e \wedge s)(x \wedge s') =$$

$$\mu(e')\big(\overline{\xi}(e)(s') \otimes \xi(s)(x)\big)$$

donde $p(e') = x$. Con ello, concluimos la conmutatividad.

Falta entonces considerar el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
{[X^+, F(X^+, R)]_*} \arrow[r, "i^*_{x_{-1}}"] & {[\mathbb{S}^0, F(X^+, R)]_*} \arrow[dr] & \\
{[E^+, F(X^+, R)]_*} \arrow[u, "\tau^p"] \arrow[d, "\tau_p"'] & & R \\
{[E^+, F(E^+, R)]_*} \arrow[r, "i^*_{e_{-1}}"'] & {[\mathbb{S}^0, F(E^+, R)]_*} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Sean

$$i_{x_{-1}} : \mathbb{S}^0 \longrightarrow X \qquad\qquad i_{x_{-1}}(x) = \begin{cases} * & \text{si } x = 1 \\ x_{-1} & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

$$i_{e_{-1}} : \mathbb{S}^0 \longrightarrow E \qquad\qquad i_{e_{-1}}(x) = \begin{cases} * & \text{si } x = 1 \\ e_{-1} & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

Consideremos

$$q_1 : X^+ \longrightarrow \mathbb{S}^0 \qquad\qquad q_2 : E^+ \longrightarrow \mathbb{S}^0$$

que inducen

$$F(q_1, Id_R) : F(X^+, R) \longrightarrow F(\mathbb{S}^0, R) \quad y \quad F(q_2, Id_R) : F(E^+, R) \longrightarrow F(\mathbb{S}^0, R)$$

Éstas a su vez inducen

$$F(q_1, Id_R)_* : [\mathbb{S}^0, F(X^+, R)]_* \longrightarrow [\mathbb{S}^0, F(\mathbb{S}^0, R)]_*$$

$$F(q_2, Id_R)_* : [\mathbb{S}^0, F(E^+, R)]_* \longrightarrow [\mathbb{S}^0, F(\mathbb{S}^0, R)]_*$$

donde $[\mathbb{S}^0, F(\mathbb{S}^0, R)]_* \cong R$.

Sea $\delta : E^+ \longrightarrow F(X^+, R)$ donde $\delta(e) = \sum_{i=1}^{m(e)} r_i(e) x_i(e)$. Si recorremos la parte superior del diagrama con el elemento δ, obtenemos $n = F(q_1, Id_R)_*\Big(i^*_{x_{-1}}\big(\tau^p(\delta)\big)\Big) \in [\mathbb{S}^0, F(\mathbb{S}^0, R)]_*$, cuyo valor en R corresponde al valor de $u(-1)$ en $-1 \in \mathbb{S}^0$. Ahora, debido a la naturaleza de $i_{x_{-1}}$ como de q_1, este elemento es la suma de los elementos de R distintos de cero, que definen a $\tau^p(\delta)(x_{-1})$.

Usando la definición de τ^p, tenemos que

$$\tau^p(\delta)(x) = \sum_{p(e)=x} \mu(e)\delta(e) = \sum_{p(e)=x} \mu(e)\big(\sum_{i=1}^{m(e)} r_i(e) x_i(e)\big)$$

Por lo tanto, en el caso particular de $x_{-1} \in X^+$, obtenemos

$$\tau^p(\delta)(x_{-1}) = \sum_{p(e)=x_{-1}} \mu(e)\big(\sum_{i=1}^{m(e)} r_i(e)x_i(e)\big)$$

Entonces, el valor de R que le corresponde a δ recorriendo la parte superior del diagrama es

$$r_1 = \sum_{p(e)=x_{-1}} \mu(e)\big(\sum_{i=1}^{m(e)} r_i(e)\big)$$

Utilizando argumentos similares, vemos que al recorrer el diagrama en su parte inferior con el mismo elemento δ, el valor que se obtiene en R, corresponde al valor de la suma de los elementos en R que definen $\tau_p(\delta)(e_{-1})$.

Recordando que para definir τ_p se utiliza el pretránsfer $t_p : F(X^+, R) \longrightarrow F(E^+, R)$, tenemos pues

$$\tau_p(\delta)(e) = t_p\big(\delta(e)\big) = \sum_{\substack{p(e)=x_i(e) \\ i=1,\ldots,m(e)}} \mu(e) r_i(e) e$$

En el caso particular de $e_{-1} \in E^+$

$$\tau_p(\delta)(e_{-1}) = \sum_{\substack{p(e)=x_i(e_{-1}) \\ i=1,\ldots,m(e_{-1})}} \mu(e) r_i(e) e$$

Por lo tanto, el valor de R que le corresponde a δ recorriendo la parte inferior del diagrama es

$$r_2 = \sum_{\substack{p(e)=x_i(e_{-1}) \\ i=1,\ldots,m(e_{-1})}} \mu(e) r_i(e) = n \sum_{i=1,\ldots,m(e_{-1})} r_i(e_{-1})$$

Para verifica que $r_1 = r_2$, llamemos ρ a $\sum\limits_{i=1}^{m(e)} r_i(e)$. Esto es

$$\rho : E^+ \longrightarrow R \qquad\qquad \rho(e) = \sum_{i=1}^{m(e)} r_i(e)$$

Considerando la definición de ρ, la de $\delta \in [E^+, F(X^+, R)]_*$, y la función $\varepsilon : F(X, R) \longrightarrow R$ del Lema 2.5, es fácil ver que $\rho = \varepsilon \circ \delta$, por lo que δ es continua.

Por hipótesis, E es un espacio conectable por trayectorias. Además, el anillo R es discreto, por lo que ρ resulta constante con valor $r_\rho \in R$. Entonces

$$r_1 = \sum_{p(e)=x_{-1}} \mu(e)\big(\sum_{i=1}^{m(e)} r_i(e)\big) = \sum_{p(e)=x_{-1}} \mu(e)\rho(e) = nr_\delta$$

y

$$r_2 = n \sum_{i=1,\ldots,m(e_{-1})} r_i(e_{-1}) = n\rho(e_{-1}) = nr_\delta$$

Por lo tanto $r_1 = r_2$ y el diagrama conmuta. ∎

Por simplicidad, en lo que sigue, no se especificará el anillo R en homología y cohomología. Para el producto de Kronecker $< -, - >_Y$: $H^q(Y) \otimes H_q(Y) \longrightarrow R$, existen homomorfismos inducidos

$$\Phi_Y : H^q(Y) \longrightarrow Hom(H_q(Y), R) \qquad \Psi_Y : H_q(Y) \longrightarrow Hom(H^q(Y), R)$$

para cada espacio Y, dados por $\Phi(y)(\eta) =< y, \eta >_Y$ y $\Psi(\eta)(y) =< y, \eta >_Y$, $y \in H^q(Y)$, $\eta \in H_q(Y)$.

Corolario 6.1. *Los siguientes diagramas conmutan*

$$\begin{tikzcd} H^q(E) \arrow[r, "\Phi_E"] \arrow[d, "\tau^p"'] & Hom(H_q(E), R) \arrow[d, "Hom(\tau_p, Id_R)"] \\ H^q(X) \arrow[r, "\Phi_X"'] & Hom(H_q(X), R) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_q(X) \arrow[r, "\Psi_X"] \arrow[d, "\tau_p"'] & Hom(H^q(X), R) \arrow[d, "Hom(\tau^p, Id_R)"] \\ H_q(E) \arrow[r, "\Psi_E"'] & Hom(H^q(E), R) \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $\eta \in H^q(E)$ y $\xi \in H_q(X)$. Entonces

$$\Phi_X(\tau^p(\eta))(\xi) =< \tau^p(\eta), \xi >_X$$

Recorriendo el diagrama por su parte superior utilizando $\eta \in H^q(E)$ obtenemos

$$\mathrm{Hom}(\tau_p, Id_R)\big(\Phi_E(\eta)\big)(\xi) = \Phi_E(\eta)\big(\tau_p(\xi)\big) =< \eta, \tau_p(\xi) >_E$$

Por el Teorema 6.1 $< \tau^p(\eta), \xi >_X = < \eta, \tau_p(\xi) >_E$ para toda $\xi \in H_q(X)$, por lo tanto

$$\Phi_X \circ \tau^p = \mathrm{Hom}(\tau_p, Id_R) \circ \Phi_E$$

Siguiendo la parte inferior del segundo diagrama y utilizando la definición de Ψ_E obtenemos $\Psi_E(\tau_p(\xi))(\eta) = < \eta, \tau_p(\xi) >_E$. Recorriendo el diagrama en su parte superior obtenemos $\mathrm{Hom}(\tau^p, Id_R)(\Psi_X(\xi))(\eta) = \Psi_X(\xi)(\tau^p(\eta)) = < \tau^p(\eta), \xi >_X$. Por el Teorema 6.1 $< \eta, \tau_p(\xi) >_E = < \tau^p(\eta), \xi >_X$, por lo tanto

$$\Psi_E(\tau_p(\xi_1))(\eta) = \mathrm{Hom}(\tau^p, Id_R)(\Psi_X(\xi))(\eta)$$

$\blacksquare$

Capítulo 7

Relación con el tránsfer de Smith

En este capítulo se verá que el tránsfer dado por Smith en [**LS**] coincide con el expuesto en [**AP**] cuando se utilizan coeficientes en $\mathbb{Z}$. Vamos a dar la definición del tránsfer de Smith para la cual requerimos de una serie de definiciones y resultados previos, muchos de los cuales no probaremos, ya que un desarrollo riguroso requiere de mucha teoría. Para tratados cuidadosos de estas afirmaciones daré referencias. Sólo cuando se especifique, los espacios utilizados y las operaciones entre ellos, serán tomados de la categoría KDH.

Definición 7.1. Definimos el *producto débil* $\widetilde{\prod}_{n=1}^{\infty} X_n$ de una familia de espacios punteados $\{(X_n, *)\}_{n\geq 1}$, como el colímite o límite directo sobre n del sistema dirigido

$$X_1 \hookrightarrow X_1 \times X_2 \hookrightarrow X_1 \times X_2 \times X_3 \hookrightarrow \dots$$

donde las inclusiones están dadas tomando el punto base en la última coordenada del espacio en el que se incluye.

Observación 7.1. Otra manera, a veces más útil de ver el producto débil $\widetilde{\prod}_{n=1}^{\infty} X_n$ es como el conjunto de elementos $x \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ tal que todas las coordenadas x_i de x, salvo un número finito de ellas, son el punto base. Su topología es la de la unión dada por los productos finitos $\prod_{n=1}^{k} X_n \subset \widetilde{\prod}_{n=1}^{\infty} X_n$.

Observación 7.2. El producto de complejos CW en KDH vuelve a ser un complejo CW[1]. Más aún, el colímite de complejos CW es un complejo CW. Por lo tanto, si $\{(X_n,*)\}_{n\geq 1}$ es una familia de complejos CW, su producto débil $\widetilde{\prod}_{n=1}^{\infty} X_n$ también lo es.

Definición 7.2. Sea $n \geq 1$ un entero. Decimos que una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios topológicos arbitrarios es una n-equivalencia, si para toda $x \in X$ el homomorfismo

$$f_* : \pi_q(X,x) \longrightarrow \pi_q(Y, f(x))$$

es un isomorfismo para $q \leq n-1$, y un epimorfismo para $q = n$. Llamamos a f una equivalencia homotópica débil si es una n-equivalencia para toda $n \geq 1$.

Observación 7.3. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, entonces f es una equivalencia homotópica débil. Esto se debe a que existe $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq Id_X$ y $f \circ g \simeq Id_Y$, y que al mandar dichas funciones bajo el funtor π_q, obtenemos, gracias a la inversa homotópica, $g_* \circ f_* = Id_{\pi_q(X,x)}$ y $f_* \circ g_* = Id_{\pi_q(Y,y)}$ donde $f_* : \pi_q(X,x) \longrightarrow \pi_q(Y, f(x))$ y $g_* : \pi_q(Y,y) \longrightarrow \pi_q(X, g(y))$. Como esto sucede para toda $x \in X$, y los inversos de morfismos son únicos, $f_* : \pi_q(X,x) \longrightarrow \pi_q(Y, f(x))$ resulta un isomorfismo para toda $x \in X$. ∎

En cualquier teoría de homología es válido el Teorema de suspensión y $\widetilde{H}_n(X;R) \cong H_n(X;R)$ para $n \neq 0$. En particular, tenemos $R \cong \widetilde{H}_0(\mathbb{S}^0;R) \cong \widetilde{H}_1(\mathbb{S}^1;R) \cong H_1(\mathbb{S}^1;R)$.[2]

Definición 7.3. Sea X un espacio topológico y $[\sigma] \in \pi_n(X,x_0)$ un elemento del enésimo grupo fundamental de X donde $\sigma : \mathbb{S}^n \longrightarrow X$. Como H_n es un funtor, tenemos $\sigma_* : H_n(\mathbb{S}^n;R) \longrightarrow H_n(X;R)$, y podemos considerar $\sigma_*(g_n) \in H_n(X;R)$,

[1] Ver 5,1,47 de [**AGP**]

[2] Ver 12,1 de [**AGP**].

donde $g_n \in H_n(\mathbb{S}^n; R)$ se obtiene de un generador canónico $g_1 \in H_1(\mathbb{S}^1; R) \cong R$ a través del isomorfismo de suspensión. Definimos el *homomorfismo de Hurewicz*

$$h_n : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow H_n(X; R)$$

para $n > 0$ mediante $h_n([\sigma]) = \sigma_*(g_n)$.

Que h_n está bien definido es consecuencia del axioma de invariancia homotópica, ya que si $\sigma' \simeq \sigma$, entonces $\sigma'_* = \sigma_*$. Que es homomorfismo resulta inmediato de la definición.

De la prueba del Teorema a continuación, sólo se dará un bosquejo. No obstante, especial atención se debe prestar al modo en que se determina la equivalencia homotópica débil, ya que resultará muy importante en observaciones posteriores. Para ver los detalles de la prueba recomendamos [**GWW**].

Teorema 7.1. *Un espacio conexo X es débilmente homotópico equivalente al producto débil $\widetilde{\prod}_{n\geq 1} K(\pi_n(X), n)$ de espacios de Eilenberg-MacLane, si y sólo si el homomorfismo de Hurewicz $h_n : \pi_n(X) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X; \mathbb{Z})$ es un monomorfismo escisivo pata toda $n \geq 1$.*

Supongamos que $\varphi_n : \widetilde{H}_n(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow \pi_n(X)$ es un inverso izquierdo de h_n. Como $\mathbb{Z}$ es un dominio de ideales principales, el producto de Kronecker determina un epimorfismo[3]

$$\widetilde{H}^n(X; \pi_n(X)) \longrightarrow Hom\big(\widetilde{H}_n(X), \pi_n(X)\big)$$

Sea $[\xi_n] \in \widetilde{H}^n(X; \pi_n(X)) = [X, K(\pi_n(X), n)]_*$ una preimagen de φ_n. Entonces la familia de mapeos punteados (ξ_n) define la equivalencia homotópica débil.

Definición 7.4. Un espacio topológico X es un *monoide topológico abeliano* si está dotado de una multiplicación $X \times X \longrightarrow X$ asociativa, conmutativa, y con

[3] Ver III,23 de [**GH**]

un elemento neutro, tal que resulta continua. Si a la multiplicación sólo le pedimos que sea continua en subconjuntos compactos de $X \times X$, entonces X es un *monoide topológico abeliano débil*.

Definición 7.5. Recordemos la Definición 2.3 del enésimo producto simétrico de X. Denotemos a la clase de equivalencia de $(x_1, \ldots, x_n)$ como $[x_1, \ldots, x_n]$. Utilizando el punto base $x_0 \in X$ definimos las inclusiones

$$SP^n X \hookrightarrow SP^{n+1} X$$

por

$$[x_1, \ldots, x_n] \longmapsto [x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

para $n \geq 1$. Podemos entonces, tomar la unión

$$SPX = \bigcup_n SP^n X$$

equipada con la topología de la unión: $B \subset SPX$ es cerrado si y sólo si $B \cap SP^n X$ es cerrado para cada $n \geq 1$. Decimos que SPX es el *producto simétrico infinito* de X.

Observación 7.4. Dado un espacio topológico X, tenemos una multiplicación $SPX \times SPX \longrightarrow SPX$ dada por la yuxtaposición de los elementos. Esto le da a SPX una estructura de monoide topológico abeliano débil [**DT**]. ■

Si X es del mismo tipo de homotopía que un complejo CW, entonces SPX es del mismo tipo de homotopía que un complejo CW. Este resultado es consecuencia de la Observación 7.2 y la siguiente Proposición.

Proposición 7.1. *Sean X y Y espacios punteados y $f, g : X \longrightarrow Y$ mapeos punteados. Si $f \simeq g$ entonces $\widehat{f} \simeq \widehat{g}$ donde $\widehat{f}, \widehat{g} : SPX \longrightarrow SPY$.*

Demostración. Por hipótesis tenemos una homotopía punteada $H : X \times I \longrightarrow Y$ de la cual obtenemos las siguientes homotopías

$$H^n : SP^nX \times I \longrightarrow SP^nY$$

En consecuencia, obtenemos una homotopía

$$\widehat{H} : SPX \times I \longrightarrow SPY$$

■

Corolario 7.1. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, entonces $\widehat{f} : SPX \longrightarrow SPY$ también es una equivalencia homotópica.*

Definición 7.6. Sea X un complejo CW conexo con punto base x_0. Definimos a su enésimo grupo de homología reducida con coeficientes en $\mathbb{Z}$ para $n \geq 0$ como

$$\widetilde{H}_n(X) = \pi_n(SPX)$$

donde el grupo de homotopía se define con respecto al punto base de SPX determinado por x_0. Para $n < 0$ definimos $\widetilde{H}_n(X) = 0$.

En este caso, la inclusión $i : X \hookrightarrow SPX$ induce el homomorfismo de Hurewicz

$$h_* = i_* : \pi_*(X) \longrightarrow \widetilde{H}_*(X; \mathbb{Z}).$$

Corolario 7.2. *Si X es un monoide topológico abeliano conexo del mismo tipo de homotopía que un complejo CW, entonces existe una equivalencia homotópica $X \longrightarrow \widetilde{\prod}_{n\geq 1} K(\pi_n(X), n)$.*

Demostración. Como X es un monoide topológico abeliano, las funciones

$$\rho_n : X^n \longrightarrow X \qquad \rho_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$$

resultan continuas. Cada ρ_n factoriza a través de la identificación $q_n : X^n \longrightarrow SP^nX$ y la función

$$r_n : SP^nX \longrightarrow X \qquad\qquad r_n[x_1, \ldots, x_n] = x_1 + \ldots + x_n$$

Como se muestra en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X^n \arrow[d, "q_n"'] \arrow[dr, "\rho_n"] & \\ SP^nX \arrow[r, "r_n"'] & X \end{tikzcd}$$

la función resulta continua y por lo tanto, una retracción.

Por la Proposición universal de la topología de la unión, las retracciones r_n definen una retracción $r : SPX \longrightarrow X$. Claramente, si $i : X \hookrightarrow SPX$ entonces $r \circ i = Id_X$, y como $\pi_n(SPX) = \widetilde{H}_n(X)$, e i induce el homomorfismo de Hurewicz, el morfismo $r_* : \widetilde{H}_n(X) = \pi_n(SPX) \longrightarrow \pi_n(X)$ es un inverso izquierdo del homomorfismo de Hurewicz. Por lo tanto, el Teorema 7.1 garantiza la existencia de una equivalencia homotópica débil entre X y $\widetilde{\prod}_{n\geq 1} K(\pi_n(X), n)$.

Si tomamos como $K(\pi_n(X), n)$ a los $F(\mathbb{S}^n, \pi_n(X))$, el Teorema 2.5 y la Observación 7.2 permiten ver a $\widetilde{\prod}_{n\geq 1} K(\pi_n(X), n)$ como un complejo CW. Por hipótesis X es del mismo tipo de homotopía de un complejo CW, por lo tanto, utilizando un famoso resultado de J.H.C. Whitehead [4], concluimos que la equivalencia homotópica débil es una equivalencia homotópica. ■

Si tomamos a X en KDH, podemos debilitar la hipótesis del Corolario anterior pidiéndole a X que sea monoide topológico abeliano débil. En este caso, la continuidad de la retracción está garantizada por el Lema 1.2.

[4] 5.1.37 de [**AGP**]

Corolario 7.3. *Dado un espacio conexo E en KDH del mismo tipo de homotopía que un complejo CW, existe una equivalencia homotópica $w_E : SPE \longrightarrow K(\widetilde{H}(E)) = \widetilde{\prod}_{n=1}^{\infty} K(\widetilde{H}_n(E), n)$.*

Demostración. Para la existencia de la equivalencia homotópica, basta observar que SPE es un monoide topológico abeliano débil del mismo tipo de homotopía de un complejo CW, y que $\widetilde{H}(E) = \pi_n(SPE)$; el resultado se sigue del Corolario 7.2. ■

La definición del tránsfer de Smith tal y como aparece en [**LS**], es la siguiente: dada una aplicación cubriente ramificada $p : E \longrightarrow X$ de grado n , con función multiplicidad $\mu : E \longrightarrow \mathbb{N}$, consideramos la composición

$$\widehat{p} : X \xrightarrow{\varphi_p} SP^n E \longrightarrow SPE \xrightarrow{\simeq} K(\widetilde{\widetilde{H}_*}(E))$$

donde la equivalencia homotópica es la del Corolario 7.3. Utilizando la familia de mapeos punteados (ξ_n) que definen la equivalencia homotópica, obtenemos una familia de elementos $[\widehat{p}] \in \widetilde{H}^*(X, \widetilde{H}_*(E))$. Por otro lado, el producto de Kronecker determina un homomorfismo

$$\psi : \widetilde{H}^*(X; \widetilde{H}_*(E)) \longrightarrow Hom(\widetilde{H}_*(X), \widetilde{H}_*(E))$$

El tránsfer de Smith es la imagen $p_\sharp : \widetilde{H}_*(X) \longrightarrow \widetilde{H}_*(E)$ de $[\widehat{p}]$ bajo el homomorfismo ψ.

Teorema 7.2. *Sea $p : E \longrightarrow X$ una aplicación cubriente de grado n con función multiplicidad $\mu : E \longrightarrow \mathbb{N}$. Entonces $p_\sharp = \tau_p : \widetilde{H}_*(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow \widetilde{H}_*(E; \mathbb{Z})$, donde τ_p es el tránsfer descrito en el Corolario 4.1.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[E, SP^n E]_*} \arrow[r] \arrow[d, "\tau^p"'] & {[E, SPE]_*} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\tau^p"'] & \widetilde{H}^*(E, \widetilde{H}_*(E)) \arrow[r] \arrow[d, "\tau^p"'] & Hom(\widetilde{H}_*(E), \widetilde{H}_*(E)) \arrow[d, "Hom(\tau_p, Id)"] \\
{[X, SPE]_*} \arrow[r] & {[X, SPE]_*} \arrow[r, "\cong"] & \widetilde{H}^*(X, \widetilde{H}_*(E)) \arrow[r] & Hom(\widetilde{H}_*(X), \widetilde{H}_*(E))
\end{tikzcd}$$

Los primeros dos cuadrados claramente conmutan. El cuadrado de la derecha conmuta por el Corolario 6.1, con lo que el diagrama conmuta. Tomemos $[i] \in [E, SP^n E]_*$, donde $i : E \hookrightarrow SP^n E$ es la inclusión canónica. Siguiendo este elemento por la parte inferior del diagrama obtenemos $p_\sharp$. Para ver qué obtenemos recorriendo la parte superior consideremos el siguiente

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}^*(SPE; \widetilde{H}_*(E)) \arrow[r] \arrow[d, "i^*"'] & Hom(\widetilde{H}_*(SPE), \widetilde{H}_*(E)) \arrow[d, "Hom(i_*)"] \\
\widetilde{H}^*(E, \widetilde{H}_*(E)) \arrow[r] & Hom(\widetilde{H}_*(E), \widetilde{H}_*(E))
\end{tikzcd}$$

Observemos que este diagrama conmuta gracias a la naturalidad del producto de Kronecker.

Sea $[\alpha] \in \widetilde{H}^*(E, \widetilde{H}_*(E))$ el elemento al que $[i] \in [E, SPE]_*$ va a dar bajo el isomorfismo del primer diagrama. Como el isomorfismo está definido a partir de $\xi_n : SPE \longrightarrow K(\widetilde{H}_n(E), n))$, tenemos que $i^*[\xi_*] = [\xi_* \circ i] = [\alpha]$. Recorriendo la parte superior del segundo diagrama, $[\xi_*]$ va a $r_* \in Hom(\widetilde{H}_*(SPE), \widetilde{H}_*(E))$ donde $r : SP(SPE) \longrightarrow SPE$ es la retracción descrita en la demostración del Corolario 7.2. Aplicando $Hom(i_*)$ obtenemos $Hom(i_*)(r_*) = r_* \circ i_* = Id_*$, por lo que bajo $Hom(\tau_p, Id)$, recuperamos τ_p. ■

Bibliografía

[**A**] M. Aguilar, *Notas de curso de Maestría, Topología Algebráica*, Agosto-Diciembre 2005, UNAM, México.

[**AGP**] M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto, *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*, Springer-Verlag, New York Berlin Deidelberg 2002.

[**AP**] M. Aguilar, C. Prieto, Transfers for ramified covering maps in homology and cohomology, *International J. Math. And Math. Sci.* vol. 2006, Articule ID94651, 28 pages, 2006 (NY, USA).

[**AD**] A. Dold, Ramified coverings, orbit projections and symmetric powers, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* ***99*** *(1986), 65-72.*

[**DT**] A. Dold, R. Thom, Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produckte, *Annals of Math.* ***67*** *(1958), 239-281.*

[**CHD**] C.H. Dowker, Topology of metric complexes, *Amer.J.Math. 74 (1952), 555-577.*

[**JD**] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston,. 1966.

[**GH**] M.J. Greenberg, J.R. Harper, *Algebraic Topology. A first course*, Addison-Wesley Publishing company, Inc. 1981.

[JPM] J.P. May, *A Concise Course in Algebraic Topology*, Chicago Lecture Notes in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago and London 1999.

[MCM] M.C. McCord, Classifying spaces and infinite symmetric products, *Trans. Amer. Math. Soc.* ***146*** *(1969), 273-298.*

[JM] J. Milnor, On spaces having the homotopy type of a CW-complex, *Trans. Amer. Math. Soc.* ***90*** *(1959), 272-280.*

[CP] C. Prieto, *Topología Básica*, Sección de Obras de Ciencia y Tecnología, Fondo de Cultura Económica, México 2003.

[LS] L. Smith, Transfer and ramified coverings, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* ***93*** *(1983), 485-493.*

[NES] N.E Steenrod, A convenient category of topological spaces, *Michigan Math.J.* ***14*** *(1967), 133-152.*

[GWW] G.W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin 1978.