



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

Campos escalares en cosmología y los
picos de Doppler en la radiación
cósmica de fondo

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

F Í S I C O

P R E S E N T A :

JORGE ANDRÉS ROSAS AVILA



Tutor: Dr. Jorge Luis Cervantes Cota.

2006



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	III
1. Modelo estándar de cosmología	1
1.1. Modelos de Friedman-Robertson-Walker	2
1.2. Soluciones a las ecuaciones de FRW	5
1.3. Dinámica del factor de escala a usando técnicas de potencial efectivo	6
1.4. Termodinámica del universo	7
1.5. Evolución del universo	9
1.6. Parámetros Cosmológicos	15
1.7. Problemas del modelo estándar de cosmología.	17
1.8. Inflación	20
1.8.1. Solución al problema del horizonte	20
1.8.2. Presión negativa	23
1.8.3. Implementación con un campo escalar	24
2. Mediciones Cosmológicas y su interpretación	28
2.1. Mediciones de la RCF para ángulos $\theta > 1^\circ$ y anisotropías en la temperatura	28
2.1.1. Análisis de las fluctuaciones angulares	30
2.1.2. Descomposición armónica	32
2.2. Mediciones para ángulos $\theta < 1^\circ$ y los picos de Doppler	34
2.2.1. Oscilaciones acústicas	35
2.3. Curvas de rotación en galaxias y la materia oscura	40
2.4. Supernovas tipo Ia y la energía oscura	41
2.5. Estructura a gran escala	44
2.6. Composición de materia y energía en el universo	47
3. Implementación de campos escalares en la expansión acelerada del universo	49
3.1. Teoría escalar-tensorial de la gravitación en un universo ho- mogéneo e isotrópico.	50
3.1.1. Cosmología homogénea e isotrópica	51
3.2. Cosmología en la teoría de Brans-Dicke	52
3.3. Observaciones de la expansión acelerada del universo actual	53

3.4.	Modelo de quintaesencia	54
3.4.1.	Ecuaciones de evolución	54
3.5.	Soluciones genéricas de quintaesencia	55
4.	Teoría de gravedad inducida y la aceleración cósmica actual	60
4.1.	Gravedad inducida	60
4.1.1.	La teoría y sus ecuaciones de campo	60
4.2.	Ecuaciones cosmológicas	62
4.3.	Constricción de parámetros	63
4.4.	Dinámica cosmológica reciente	68
4.4.1.	Espacio fase	78
4.5.	Evolución de la densidad (ρ) y del parámetro de la ecuación de estado (w)	80
4.6.	Resumen de resultados	81
	Conclusiones	83
	Bibliografía	84

Introducción

Desde los primeros desarrollos cosmológicos relativistas llevados a cabo por Einstein, la cosmología ha estado dominada por consideraciones teóricas que han tenido consecuencias en diversas áreas de la ciencia. Sin embargo, en los últimos años la *cosmología observacional de alta precisión* ha tenido grandes avances. En particular, los resultados de las recientes observaciones del corrimiento al rojo de supernovas SNIa, así como anisotropías de la radiación cósmica de fondo (RCF) han permitido establecer con gran precisión parámetros cosmológicos. De esta manera, se han podido hacer conclusiones más confiables acerca de la forma, estructura y evolución del universo.

El experimento que comenzó esta nueva etapa de la cosmología fue realizado por el satélite COBE (COsmic Background Explorer) a principios de los años 90s. Este experimento, que representa la versión moderna al realizado por Penzias y Wilson en 1965, ha revelado que el universo es casi, pero no completamente, homogéneo e isotrópico. Las pequeñas fluctuaciones cuánticas generadas por campos escalares fundamentales en el universo temprano se convirtieron en pequeñas anisotropías en la materia y radiación. Estas anisotropías fueron detectadas por COBE en la RCF del universo. Éste junto con otros experimentos cosmológicos como BOOMERANG (2000), MAXIMA (2000) y WMAP (2003), no sólo han confirmado con gran precisión algunas de las predicciones teóricas del modelo estándar del *big bang*, sino también han abierto la posibilidad de probar teorías y escenarios del universo muy temprano.

Según la visión moderna de la cosmología, la etapa inicial del universo estuvo dominada por la presencia de campos cuánticos, los cuales proporcionaron una densidad de energía aproximadamente constante en él. Esta densidad de energía casi constante generó una expansión exponencial; a esta etapa del universo se le llama *inflación*. En su versión más estándar, el vacío dominante de energía de un campo escalar hipotético, llamado inflatón, es el responsable de tal expansión acelerada del universo. La inflación propuesta inicialmente por Guth [23] resuelve paradigmas surgidos al confrontar la teoría estándar del big bang con las observaciones; esto es, la inflación resuelve los problemas del horizonte y planitud de la forma del universo, y además proporciona un origen causal de las fluctuaciones de densidad, que provienen precisamente fluctuaciones de los campos cuánticos.

Las fluctuaciones cuánticas tuvieron su origen dentro del horizonte de Hubble (H^{-1}), el cual es un tamaño característico del universo. Así, la aceleración

exponencial causó que las fluctuaciones originales del inflatón se hicieran más grandes que el radio de Hubble. Cierta tiempo después, en la etapa de expansión no inflacionaria, las fluctuaciones crecieron a un ritmo más lento y el tamaño del horizonte creció a un ritmo más rápido, provocando que la longitud característica de las fluctuaciones se igualara con H^{-1} , es decir, las fluctuaciones reingresaron al horizonte; la dinámica que explica esta evolución está dada por las ecuaciones estándares de cosmología, conocidas como ecuaciones de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) en presencia de campos cuánticos. De esta forma, las fluctuaciones cuánticas fueron traducidas en fluctuaciones de materia y radiación a escalas cósmicas, dando como resultado la formación de las macro-estructuras en el universo. Tiempo después de la *época de recombinación*, cuando el universo tenía alrededor de 300 mil años de edad, la RCF se desacopló de la materia en la llamada *superficie de última dispersión*. A partir de este momento, las fluctuaciones de la RCF se desacoplaron de la materia y evolucionaron hasta hoy en día, básicamente, sin cambios, salvo posibles procesos de reionización que alteran un poco la RCF.

Una de las predicciones clave del modelo estándar de inflación es el valor promedio de la densidad de energía total del universo $\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = 1$, donde ρ_c es la densidad crítica necesaria para un universo sin curvatura espacial, según el modelo obtenido de las ecuaciones de FRW. Sin embargo, el resultado de que $\Omega = 1$, no concuerda con la mayoría de las observaciones en la dinámica de galaxias y cúmulos de galaxias. Estas observaciones han mostrado que $\Omega_{obs} \sim 0,30$. Por otro lado, sólo una pequeña fracción $\Omega_{bar} = 0,04$, se debe a la contribución de materia ordinaria (bariones); esto último se sabe de la nucleosíntesis primordial. De esta manera, la mayor parte de densidad de materia del universo, $\Omega_{MO} \sim 0,26$, se atribuye a cierta componente de materia conocida como *materia oscura*, responsable de los halos de galaxias, y de materia presente en los cúmulos de galaxias. El resto del contenido del universo, $\Omega_{\Lambda} \sim 0,70$ para lograr la predicción de la inflación $\Omega = 1$ implica que existe otra forma de energía llamada *energía oscura*. Este escenario vió su confirmación sólo recientemente cuando aparecieron las primeras mediciones de la velocidad de expansión de supernovas tipo Ia, las cuales predecían que debería de existir una energía tal que, $\Omega_{\Lambda} \sim 0,70$. Después se dieron las mediciones de los experimentos BOOMERANG [36], MAXIMA [59], y WMAP [60], las cuales confirmaron que $\Omega \simeq 1$, con la presencia de materia y energía oscura en el universo.

Las teorías que predicen la existencia de materia y energía oscura son las candidatas naturales para explicar estas observaciones. Entre ellas se encuentran las teorías efectivas escalar-tensoriales con potenciales provenientes de teorías de partículas elementales. Estos potenciales, que dependen de campos escalares como funciones del tiempo, son candidatos a producir la materia oscura y la energía oscura del universo: en este esquema la materia oscura correspondería a bosones y la energía oscura tendría que relacionarse a un campo escalar en funcion del tiempo, también llamado campo de quintaesencia. El propósito de este trabajo es estudiar estos campos escalares y predecir

sus consecuencias en la evolución de la expansión del universo, y en particular analizar los cambios inducidos en la RCF.

Los observables más importantes de la RCF son la potencia espectral de la temperatura y el mapeo de la polarización. La teoría predice, y hasta ahora las observaciones lo confirman, que la potencia espectral de la temperatura tiene una serie de máximos y mínimos de amplitud debido a oscilaciones acústicas del plasma bariones-fotones, llamadas *picos de Doppler*. Estas oscilaciones tuvieron lugar en la época del universo dominada por la materia hasta la llamada época de la última dispersión. Es en esa época cuando se aplican las teorías escalar-tensoriales. Por otro lado, si los campos escalares no desaparecen con el curso de la evolución es interesante estudiar las consecuencias de ellos en la expansión actual del universo, que se cree es tipo acelerada, es decir, inflacionaria. Por lo que el campo de quintaesencia es tipo inflatón.

Esta tesis está compuesta por 4 capítulos: En el primero se hace un recuento del modelo del big bang y de problemas presentados en éste, así como la manera en que la inflación los resuelve. El capítulo 2 se refiere a las mediciones cosmológicas de alta precisión que se han realizado en los últimos años: desde la predicción teórica de la RCF hasta su detección, además de una discusión acerca las mediciones más recientes de ésta, introduciendo el concepto de los picos de Doppler en las mediciones de la RCF. Las supernovas y el espectro de distribución de materia en el universo también son tratados.

En el capítulo 3 se hace una breve introducción a la teoría escalar-tensorial y al modelo de quintaesencia para la expansión acelerada del universo actual. Finalmente en el capítulo 4 se estudia la influencia del campo escalar en la teoría de gravedad inducida tomando en cuenta las constricciones en parámetros provenientes de los picos de Doppler en la RCF. Este modelo consiste en agregar un término que involucra un campo escalar, φ , dependiente del tiempo al Lagrangiano que se obtiene al aplicar un principio variacional a las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General.

Esta tesis se llevó a cabo con la hospitalidad de *los trabajadores* del Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares (ININ).

Capítulo 1

Modelo estándar de cosmología

La teoría Newtoniana para describir la gravitación es adecuada para sistemas cuya masa M es muy pequeña comparada con su tamaño, $r : \frac{GM}{c^2 r} \ll 1$. Por otra parte, la teoría de la Relatividad General (RG) de Einstein toma un papel importante para $\frac{GM}{c^2 r} \gg 1$. Este último caso es el de interés para la cosmología: si se considera que el espacio está lleno de materia con la misma densidad en cada punto, entonces al tomar volúmenes cada vez más grandes, se tiene que M aumenta como r^3 . La *isotropía* y *homogeneidad* del universo junto con la RG son los principios fundamentales para formular los modelos de expansión del universo. En esta tesis se utilizará la siguiente convención de signos: $(-, +, +, +)$, para la signatura; $R_{\mu\nu} = -R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$, para el tensor de Riemann; y $G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$, para las fuentes del tensor de Einstein.

La RG considera al espacio-tiempo como una variedad Riemanniana, cuyo invariante fundamental llamado “intervalo” o “elemento de línea” viene dado por [55]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, que es simétrico y representa los potenciales de interacción gravitacional. Las ecuaciones de Einstein (con unidades en las que $c = 1$) se calculan a partir del lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}R}{16\pi G}$, obteniendo:

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

donde $G_{\mu\nu}$, llamado tensor de Einstein, dado por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.3)$$

contiene la parte geométrica y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento y representa el contenido material y energético en el modelo, y G es la constante de gravitación universal, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci de la variedad (espacio-tiempo) y R el escalar de curvatura. A esta ecuación se le puede agregar un término de *constante cosmológica*, Λ , sin alterar la conservación de $T_{\mu\nu}$

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G(T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}) . \quad (1.4)$$

Desde un punto de vista general, adoptar un valor determinado para Λ es restringir la teoría.

1.1. Modelos de Friedman-Robertson-Walker

Los modelos de Friedman-Lemâitre-Robertson-Walker (FRW) son los modelos más adecuados para la descripción del universo. Estos modelos están basados en el llamado *principio cosmológico* el cual establece que el universo es homogéneo e isotrópico. Bajo tales hipótesis es posible mostrar que la métrica está dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi) \right], \quad (1.5)$$

donde $k = 0, +1, -1$ para un espacio plano, cerrado o abierto, respectivamente; $a(t)$ es el factor de escala del universo, el cual indica la evolución de las distancias en el modelo.

La forma que se adopta en general en cosmología para el tensor de energía-momento, $T_{\mu\nu}$, es la correspondiente a un fluido perfecto:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

donde ρ es la densidad en reposo del elemento de fluido, p la presión y U_μ la cuadrivelocidad,

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}, \quad (1.7)$$

si se adopta un sistema en co-movimiento (co-móvil) con la expansión, que es lo usual en cosmología, entonces $U^\mu = \delta_0^\mu = (1, 0, 0, 0)$ es la velocidad en 4 dimensiones.

La métrica de Robertson-Walker y las ecuaciones de campo (1.4) permiten describir lo que se conoce bajo el nombre de cosmología estándar. Así, primero considérese la componente $t-t$. Calculando la parte izquierda de las ecuaciones de Einstein, ecuación (1.4), se tiene que:

$$G_{tt} = -3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right], \quad (1.8)$$

y la parte derecha resulta:

$$-8\pi G(T_{tt} - \Lambda g_{tt}) = -8\pi G(\rho + \Lambda), \quad (1.9)$$

de donde se obtiene la ecuación de Friedman:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \Lambda) - \frac{k}{a^2}, \quad (1.10)$$

donde H es el llamado parámetro de Hubble, el cual proporciona la razón de expansión del universo. La densidad de energía debe contener las diferentes

componentes del modelo en estudio. Así, $\rho = \rho_m + \rho_{rad}$ para universos con materia y radiación respectivamente. Vemos que la constante cosmológica juega el papel de una densidad de energía. El término de constante cosmológica también se puede indicar como $\rho_\Lambda \equiv \Lambda$.

De la misma manera, las componentes $r - r$, $\theta - \theta$ y $\phi - \phi$ se pueden calcular [45]. Estas últimas tres ecuaciones son idénticas debido a la isotropía del espacio:

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = -8\pi G(p - \Lambda), \quad (1.11)$$

Combinando las dos ecuaciones de campo anteriores, se obtiene la ecuación para la aceleración del modelo sólo en términos de sus fuentes:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p - 2\Lambda). \quad (1.12)$$

La ecuación de conservación del tensor de energía-momento, $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$ implica que:

$$\dot{p}a^3 = \frac{d}{dt}(a^3[\rho + p]). \quad (1.13)$$

Haciendo la derivada del lado derecho de la ecuación se obtiene:

$$\dot{p}a^3 = \frac{d}{dt}(\rho a^3) + p \frac{d}{dt}a^3 + \dot{p}a^3, \quad (1.14)$$

por lo que:

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -p \frac{d}{dt}a^3 \quad (1.15)$$

cuya interpretación física es la siguiente: la cantidad del total de energía en un elemento de volumen de tamaño $V = a^3$ es igual a menos la presión por el cambio de volumen, $-pdV$. Por otro lado $u = \rho a^3$, es la energía del fluido, por lo tanto esta ecuación representa la 1a. ley de la termodinámica.

Existe una relación simple, la llamada *ecuación de estado*, entre ρ y p :

$$p = w \cdot \rho \quad (1.16)$$

con w una constante. Por ejemplo, para la época dominada por la radiación $p = \rho/3$ con lo que se tiene que $w = 1/3$. Para materia no relativista, ρ está dominada por la energía de la masa en reposo mc^2 ($= m$, tomando unidades tales que $c = 1$) que es muy grande comparada con la presión la cual es proporcional a la velocidad $v \ll c$. Entonces, una buena aproximación para materia no relativista es tal que no existe presión, $w = 0$, lo que se conoce como universo de *polvo*. Para un vacío de energía asociado a algún campo cuántico, $p = -\rho$, i.e. $w = -1$.

Consideremos ahora las diversas épocas, en las cuales el universo fue dominado por los diferentes tipos de materia-energía. A continuación se procederá analizando la ecuación de continuidad.

- Época dominada por radiación

En la época dominada por radiación, como se considera al universo temprano, la principal densidad de energía se encuentra en la radiación o partículas relativistas, las cuales tienen una ecuación de estado $p = \frac{1}{3}\rho$. Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\rho a^3) &= -\frac{1}{3}\rho \frac{d}{dt}(a^3), \\ \therefore \frac{d}{dt}(\rho a^4) &= 0, \\ \rho a^4 &= M_r = \text{cte.}\end{aligned}\tag{1.17}$$

- Época dominada por materia

La época actual, dominada por la materia tiene como principal componente a la densidad materia de las galaxias, cuyas velocidades promedio son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, ($\frac{v}{c} \sim 10^{-2} - 10^{-3}$), y las cuales se comportan como polvo: $p = 0$. De la ecuación (1.15) se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\rho a^3) &= 0 \\ \text{i.e } \rho a^3 &= M_0 = \text{cte,}\end{aligned}\tag{1.18}$$

donde la constante M_0 es identificada con la masa total de las galaxias en el universo (si éste es cerrado).

En general, para $p = w\rho$ con $w \neq -1$, junto con la ecuación (1.15) se obtiene:

$$\rho = \text{const} \cdot a^{-3(1+w)}.\tag{1.19}$$

- Época dominada por Λ

La constante cosmológica proporciona un factor de escala independiente a la contribución de la densidad de energía. Si consideramos $\rho=p=0$, la ecuación (1.15) es una identidad. Alternativamente, se puede ver la presencia de una constante cosmológica Λ haciendo $\Lambda = 0$ y $\rho=\text{const}$. Así, de la ecuación (1.15) se implica que:

$$p = -\rho = \text{const.}\tag{1.20}$$

En resumen, para un universo dominado por la materia la densidad es inversamente proporcional al volumen, hecho que no es difícil de entender debido a que la materia estable, como los bariones, no se crea ni se destruye de manera espontánea. Es decir, dada una densidad en un tiempo particular la densidad será diluida de manera proporcional al volumen, $a^3(t)$, mientras que éste aumente. Por otro lado, la radiación, que como se verá más adelante,

domina al universo hasta los 10^5 años después del *big bang*, disminuye un factor adicional de $a(t)$ debido a que la energía de cada fotón experimenta un corrimiento al rojo debido a la expansión. Por último, la época dominada por Λ , la densidad total es constante, la cual puede ser provocada por algún *campo escalar* discutido más adelante.

1.2. Soluciones a las ecuaciones de FRW

La ecuación de Friedman (1.10) con $\Lambda = 0$, junto con la ecuación de estado para la época dominada por la radiación (1.17) implican, que

$$\dot{a}^2 = \frac{8}{3}\pi GM_r/a^2 - k \quad . \quad (1.21)$$

De esta ecuación se puede ver que si a es lo suficientemente pequeña, entonces k es despreciable, i.e. todos los universos tienen la misma dinámica inicial y se trabaja con:

$$\dot{a}^2 = \frac{8}{3}\pi GM_r a^{-2} \quad (1.22)$$

o

$$\frac{da}{dt} = \left(\frac{8}{3}\pi GM_r\right)^{1/2} a^{-1}, \quad (1.23)$$

cuya solución es

$$a^2 = \left(\frac{32}{3}\pi GM_r\right)^{1/2} t + \text{cte.} \quad (1.24)$$

Por lo que aun cuando $a = 0$ se dió en un tiempo finito en el pasado, por convención se ajusta el cero del tiempo, $t = 0$, para $a = 0$. Así la constante de la ecuación anterior es nula.

De la misma manera, para la época dominada por la materia se obtiene:

$$a^3 = 6\pi GM_o t^2 \quad (1.25)$$

Entonces, el comportamiento cualitativo es:

$$a(t) \sim t^{1/2} \quad \text{para la época dominada por radiación,} \quad (1.26)$$

y

$$a(t) \sim t^{2/3} \quad \text{para la época dominada por materia.} \quad (1.27)$$

En general, la ecuación (1.12) se puede usar junto con la ecuación de estado (1.16) para determinar el tiempo de evolución del factor de escala, obteniéndose:

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad (1.28)$$

el cual es válido para un fluido con $w \neq -1$.

Para un universo dominado por una energía constante ($w = -1$) se obtiene un crecimiento exponencial del factor de escala:

$$a(t) \sim e^{Ht} \quad (\text{época dominada por } \Lambda). \quad (1.29)$$

1.3. Dinámica del factor de escala a usando técnicas de potencial efectivo

A continuación se utilizan técnicas de potencial efectivo para analizar la evolución del factor de escala a en las diferentes épocas [45], definiendo:

$$(\dot{a})^2 = (-k) - V_M(a), \quad V_M = -\frac{8\pi G M}{3} \frac{1}{a} \quad (1.30)$$

La figura 1.1 muestra la gráfica de $V_M(a)$.

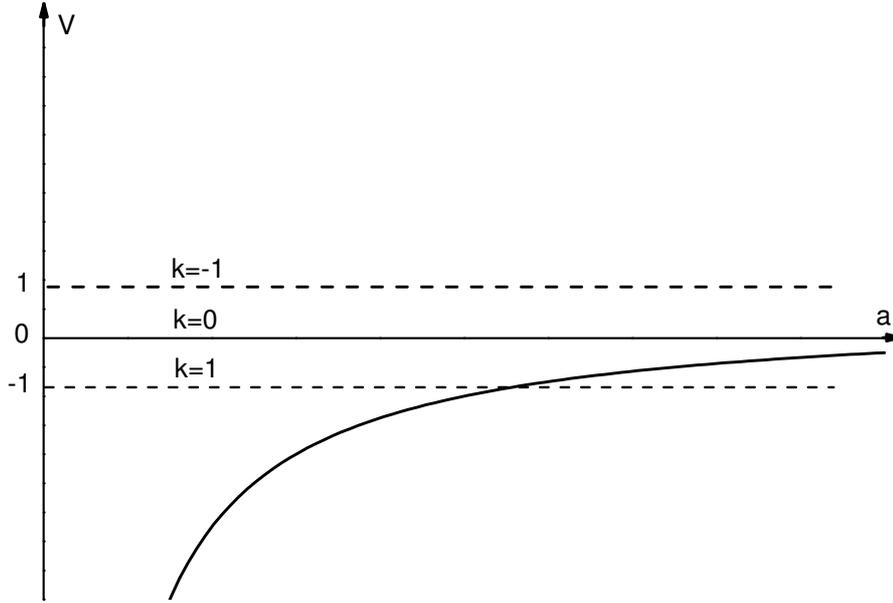


Figura 1.1: Potencial V como función del factor de escala

El universo sólo puede existir en aquellas regiones en donde $-k$ es más grande que $V_M(a)$, ya que $(\dot{a})^2 > 0$. Hasta donde se sabe, actualmente $\dot{a} > 0$, entonces existen 3 futuros posibles: si $k = -1$, el universo se expande infinitamente con una velocidad terminal infinita; si $k = 0$, el universo se expande también infinitamente pero con velocidad siempre decreciente, y finalmente si $k = +1$ el universo alcanza un radio máximo $a = \frac{8}{3}\pi GM$, a partir del cual se regresa y recolapsa. Sin embargo lo, más interesante está en la historia pasada de todos estos casos: todos se originaron en $a = 0$ (ver figura 1.2); ninguno tiene un punto de retorno para a pequeñas. Esto es lo que se conoce como *big bang*, o *gran explosión*.

Las soluciones de FRW a la ecuación de Einstein permiten entender la expansión del universo conforme a la evidencia experimental que obtuvo E. Hubble, quien en 1929 descubrió que las galaxias se alejan una de otras. Es decir, descubrió la expansión del universo.

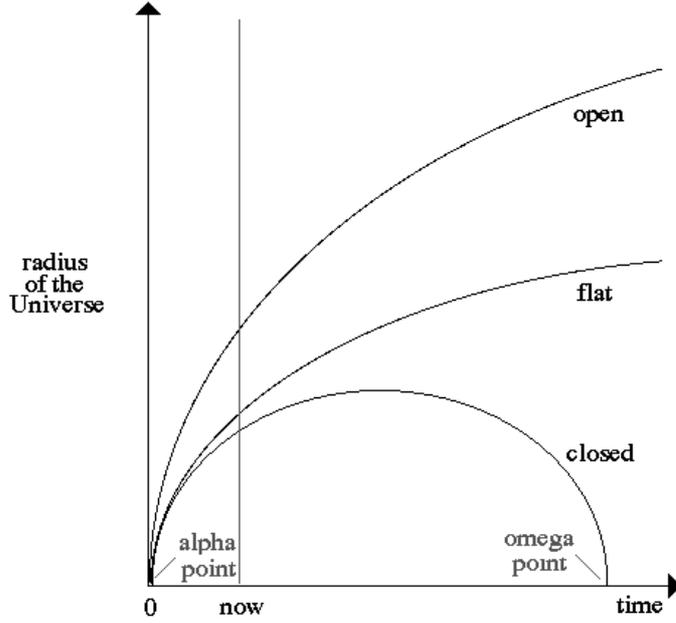


Figura 1.2: Evolución del factor de escala del universo $k = \pm 1, 0$

1.4. Termodinámica del universo

Hasta ahora se han obtenido algunas soluciones exactas para las ecuaciones de Einstein de la cosmología. Para obtener el escenario físico se considera al universo temprano compuesto por un plasma de partículas y sus antipartículas. Debe tenerse en cuenta que la física descrita por la RG no se aplica más allá de las condiciones iniciales de Planck (Pl), debido a que las correcciones cuánticas a la teoría son muy importantes. Cabe mencionar que en esta sección se describe la física después de la era inflacionaria, reservándose la discusión de esta última para la sección 1.8. Así, se asume que para el universo temprano, $t \gg t_{Pl}$, el universo estaba compuesto de un plasma de partículas relativistas, las cuales incluyen quarks, leptones, así como bosones de norma y de Higgs, todos en un equilibrio térmico a temperatura muy alta, T , con algunas simetrías de norma dictadas por la teoría de física de partículas.

Con el propósito de trabajar en esta dirección, a continuación se introducen algunas consideraciones termodinámicas necesarias para la descripción del contenido físico del universo. Considerando una aproximación del gas ideal, la densidad n_i de partículas (número de partículas por unidad de volumen) del tipo i , con momento q , está dado por una distribución de Fermi o Bose:

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int \frac{q^2 dq}{e^{(E_i - \mu_i)/t} \pm 1}, \quad (1.31)$$

donde $E_i = \sqrt{m_i^2 + q^2}$ es la energía de la partícula, μ_i es el potencial químico,

el signo (+) se aplica para fermiones y (-) para bosones y g_i es el número de espín. Se tiene que $g_i = 2$ para el fotón, quark, barión, electrón, muón, tau y sus antipartículas, pero $g_i = 1$ para neutrinos. Para las partículas existentes en el universo temprano usualmente se asume que $\mu_i = 0$: se espera entonces que para cualquier reacción entre partículas μ_i también se conserva, tal como la carga, la energía, el espín, el número leptónico y el bariónico. El número de densidad de fotones (n_γ), el cual puede ser creado y/o aniquilado después de algunas interacciones entre partículas, no se conserva y su distribución con $\mu_\gamma = 0, E = q = h\nu$, se reduce a la distribución de Planck. Para otros constituyentes, con el propósito de determinar los μ_i se necesita n_i ; de la ecuación (1.31) observamos que para μ_i positivas y grandes $\mu_i \gg E_i$, n_i también es grande. Por otro lado de la nucleosíntesis se sabe que

$$\eta \equiv \frac{n_B}{n_\gamma} \equiv \frac{n_{\text{bariones}} - n_{\text{anti-bariones}}}{n_\gamma} \simeq (3 - 4) \times 10^{-10}. \quad (1.32)$$

Que el número de densidad bariónica n_B sea relativamente pequeño a la del fotón sugiere que n_{leptones} también debe ser pequeño comparado con n_γ . Así es que μ_i no puede ser muy grande, por lo que se asume que $\mu_i = 0$ para todas las partículas. La razón por la cual n_B/n_γ es muy pequeño pero distinta de cero es una de las incógnitas del modelo estándar de cosmología.

La aproximación anterior permite tratar la densidad y presión de todas las partículas como una función sólo de la temperatura. De acuerdo a la segunda ley de la termodinámica se tiene [55]:

$$dS(V, T) = \frac{1}{T}[d(\rho V) + p dV] \quad (1.33)$$

en donde S es la entropía en un volumen $V \sim a^3(t)$ con $\rho = \rho(T)$, $p = p(T)$. Además la condición de integrabilidad $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$ también es válida, por lo que se obtiene que:

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\rho + p}{T}. \quad (1.34)$$

Relacionando esta última con la ecuación (1.13) se tiene que:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{a^3(t)}{T} (\rho + p) \right] = 0, \quad (1.35)$$

por lo que la ecuación (1.33) puede ser escrita como:

$$dS(V, T) = \frac{1}{T} d[(\rho + p)V] - \frac{V}{T^2} (\rho + p) dT, \quad (1.36)$$

las ecuaciones (1.35) y (1.36) implican para la entropía

$$S = \frac{a^3}{T} [\rho + p] = \text{cte.} \quad (1.37)$$

es una constante de movimiento.

1.5. Evolución del universo

A continuación se hace un breve recuento de la historia del universo desde el *big bang* hasta nuestros días. Este modelo utiliza una solución del modelo de FRW haciendo consideraciones acerca del contenido de materia del universo. Lo anterior ha tenido gran aceptación a partir de la detección de la radiación cósmica de fondo (RCF) y la explicación dada sobre la abundancia cósmica del helio.

Un buen trato de la naturaleza del universo temprano puede entenderse mediante el hecho de que el factor de escala a , el cual decrece cuando el tiempo disminuye, tiene el mismo efecto local sobre la materia, es decir, si la materia se colocara en una caja cuyas paredes se contraen en la misma medida, entonces, la contribución de radiación comparada con la materia ordinaria (bariones) aumenta en el pasado, según las ecuaciones (1.18) y (1.17). La densidad de energía de la RCF en el universo actual se estima alrededor de 1,000 veces más pequeña que la contribución a la densidad de masa de la materia [54], a pesar de que éste número tiene una incertidumbre de un factor debido a las dificultades para determinar la densidad actual de materia ordinaria. Así, asumiendo que ésta radiación continúa existiendo en el pasado, entonces de acuerdo a las ecuaciones (1.18) y (1.17), cuando el factor de escala a era más de 1,000 veces más pequeño que el valor actual ($a \sim a_0/3233$, a_0 el tamaño actual del universo), esta radiación debió haber sido la contribución dominante a la densidad de energía del universo. Por lo que el modelo de un universo lleno de radiación es una buena aproximación para la dinámica del universo antes de esta época, mientras que el modelo del universo compuesto de polvo correspondería cuando a es más grande que $a_0/3233$, pero hasta antes de $10^{-1}a_0$.

Así como la temperatura de una caja con gas aumenta cuando ésta se comprime, puede esperarse que la materia y la radiación en el universo se calientan cuando a disminuye, y se calientan infinitamente cuando se aproxima al big bang, $a \rightarrow 0$. Si, como es considerado, el universo temprano fue dominado por la radiación, entonces para todos los modelos ($k = 0, \pm 1$) la dependencia de a y ρ respecto a t , para t pequeña se aproxima a la solución para $k = 0$, reescribiendo la ecuación (1.24) como:

$$a(t) = \left(\frac{32}{3} \pi G M_r \right)^{1/4} t^{1/2}, \quad (1.38)$$

y relacionando esta última con la ecuación (1.17) se obtiene:

$$\rho = \frac{3}{32\pi G t^2} \quad (1.39)$$

Si la radiación está térmicamente distribuída, la densidad de energía ρ está dada mediante la siguiente expresión, derivada de la mecánica estadística cuántica de partículas sin masa:

$$\rho = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i \frac{\pi^2}{30 \hbar^3 c^5} (kT)^4, \quad (1.40)$$

donde N es el número de partículas relativistas, f_i es el factor de degeneración del espín, y α_i toma el valor 1 para bosones y $7/8$ para fermiones. Las partículas relativistas cuya masa en reposo es mucho menor que kT actúan como partículas de masa cero, y debido a eso pueden incluirse en la ecuación anterior, como “especies de radiación”. Las tres ecuaciones anteriores implican que $T \propto \rho^{1/4} \propto a^{-1}$.

Es importante señalar que las interacciones de materia y radiación en el universo temprano sucedieron a una escala suficientemente rápida para que la termalización ocurra localmente (i.e. dentro del horizonte de partículas). Si no es así entonces la autoconsistencia al asumir que la materia está térmicamente distribuída es cuestionable, y la evolución predicha de la materia y radiación debieran depender de detalles de la distribución inicial supuesta. De esta manera se tiene una evolución relativamente simple que envuelve una distribución térmica de la materia hasta la época en que ya no se mantiene el equilibrio. La escala de expansión temporal del universo, t_E , i.e., el tiempo sobre el cual un cambio considerable en el factor de escala a ocurre, es

$$t_E \sim a/\dot{a} = 2t, \quad (1.41)$$

usando la ecuación (1.38). Por otra parte, la escala de tiempo para las interacciones es

$$t_I \sim \frac{1}{n\sigma c} \propto \frac{a^3}{\sigma} \propto t^{3/2}/\sigma(T), \quad (1.42)$$

donde se considera que el número de partículas que interactúan se conserva, por lo que la densidad del número de partículas, n , va como a^{-3} , y la posible dependencia de la sección de interacción σ está explícitamente indicada mediante σ una función de la temperatura. Comparando las dos últimas ecuaciones se observa que a menos que σ decaiga rápidamente a altas energías, para tiempos suficientemente tempranos se debe tener $t_I \ll t_E$, así que debe alcanzarse la termalización. De hecho, es posible que a muy altas energías las interacciones de la física de partículas se vuelvan “asintóticamente libres”, y σ decae lo suficiente para hacer que $t_I > t_E$ cuando $t \rightarrow 0$. Sin embargo, aún si ésto ocurre, para energías menores que 10^{15} GeV se debe tener que $t_I > t_E$, y la termalización aún debe alcanzarse para tiempos pequeños. Por otro lado, cuando el universo evoluciona, eventualmente se encuentra que $t_I > t_E$ y la distribución de materia deberá alcanzar un estado fuera del equilibrio térmico.

Las consideraciones anteriores nos llevan al siguiente modelo de evolución del universo: El universo comenzó como una “mezcla” caliente ($T \rightarrow \infty$), densa ($\rho \rightarrow \infty$) de material y radiación en equilibrio térmico. El contenido de energía del universo temprano fue dominado por la radiación. Sin embargo, mientras el universo evoluciona, el equilibrio térmico eventualmente se pierde cuando t_I es mucho más grande que t_E y las diferentes especies relativistas se desacoplan del equilibrio. Posteriormente, para la época en la que a fue $1/3233$ veces el valor actual, la contribución de materia ordinaria dominó el contenido energético del universo, y la dinámica del universo está dada por el modelo FRW para el universo compuesto por polvo, i.e. sin presión efectiva

entre sus componentes. A continuación se procederá a estudiar algunos detalles importantes de la historia de la evolución del universo.

Durante los primeros 10^{-43} segundos, t_{Pl} , de la historia de la evolución del universo predicha por la RG, la magnitud de la curvatura del espacio-tiempo era más grande que la longitud de Planck $(G\hbar/c^3)^{1/2} \simeq 10^{-33}$ cm.

Dos efectos importantes que debieron haber ocurrido en el universo temprano, de tan sólo algunos ordenes de magnitud más grande que el tiempo de Planck. El primero concierne a algunos modelos de la teoría cuántica que intentan unificar las interacciones fuerte y electrodébil predicen que a temperaturas muy altas, el estado del equilibrio térmico del campo cuántico debe haber experimentado una transición de fase. En estos modelos, sucede un superenfriamiento debido a una importante contribución del “vacío” cuántico de los campos, al tensor de energía-esfuerzo, $T_{\mu\nu}$ del campo; de la forma $-\Lambda g_{\mu\nu}$ (en donde Λ es una constante positiva de gran magnitud). Entonces, en el universo temprano debió haber atravesado una fase donde la dinámica es la misma que si ocurriera en un universo vacío con una constante cosmológica positiva de valor alto. Si estos modelos son correctos, entonces, como fue propuesto por Guth [23], debió haber un periodo de *inflación* en el universo temprano, por lo que se expandió rápidamente, con una solución del tipo dada por la ecuación (1.29).

El segundo efecto se refiere a la producción de bariones. Existe una razón observacional de gran importancia para creer que el contenido de materia del universo consiste de mucho más bariones que de antibariones; lo que hace que no se tenga una simetría materia-antimateria. Es posible que nuestro universo se hubiera formado con un exceso de bariones sobre antibariones, y sin embargo, el número bariónico se conserve. Por otra parte también es posible que el universo comenzara en un estado simétrico de materia-antimateria y que el exceso de bariones se haya producido en el universo muy temprano. Para que esto suceda es necesario que las interacciones de partículas a altas energías que ocurrieron en el universo temprano satisfagan las siguientes propiedades [54]:

(1) No debe conservar el número bariónico.

(2) Esto debe suceder para que se preserven la conjugación de carga, C, y la composición de la conjugación de carga con paridad, CP.

Si algunas de éstas simetrías se preservan, entonces se producirá la misma cantidad de bariones y de antibariones.

(3) Condiciones fuera del equilibrio. Esto es debido a que las partículas y sus antipartículas tienen masas iguales, y en equilibrio térmico éstas existen en la misma cantidad. Un fenómeno fuera de equilibrio puede producirse naturalmente mediante la existencia de partículas masivas cuya vida media decae más rápido que el tiempo de expansión, t_E , en el instante en que la temperatura del universo cayó por de bajo de la masa de la partícula, y por lo tanto la producción de la partícula se detuvo.

Las teorías de “gran unificación” de las interacciones, fuerte, débil y electromagnética predicen las tres propiedades mencionadas y podrían proporcionar una explicación de la asimetría de materia-antimateria de nuestro universo.

Continuemos el recuento de la historia del universo temprano para el tiempo $t = 1$ segundo, cuando la densidad es $\rho \simeq 5 \times 10^5 \text{gcm}^{-3}$, y la temperatura es $T \simeq 10^{10} K$. A pesar de que esas condiciones son extremas, nos encontramos en un régimen de energía y densidad lo suficientemente bajas para realizar predicciones sólidas. En este momento la materia en el universo consiste casi completamente de neutrinos, fotones, electrones, positrones, neutrones y protones en equilibrio térmico; la temperatura es lo suficientemente baja por lo que la abundancia en equilibrio de más partículas es despreciable. Para esta época, las interacciones de los neutrinos se han vuelto lo suficientemente débiles tal que se desacoplan del resto de la materia. Para el resto de la historia del universo, éstos tienen un corrimiento al rojo de menor energía que la asociada a la RCF. Debido a que el espectro térmico del corrimiento al rojo ($\omega \rightarrow \omega/a$) es simplemente el espectro térmico a una menor temperatura ($T \rightarrow T/a$), el universo actual debe estar lleno con una distribución de cuerpo negro de neutrinos a temperatura $T \simeq 2K$. Recientemente se ha encontrado una traza de los neutrinos en la RCF [51].

Mientras el universo continúa enfriándose, la cantidad de reacciones que convierten los protones a neutrones y viceversa rápidamente decae con la expansión del universo. En consecuencia, la razón protón-neutrón se “congela” o “estanca” a $1/6$ para $t \sim 1,5$ segundos. Los protones son más abundantes que los neutrones debido a que los primeros se encuentran sobre 1 MeV y por lo tanto prevalecen más en equilibrio térmico antes de que la etapa de “estancamiento”, (“freeze out” en inglés). Claro que el término “estancamiento” no debe tomarse de manera literal, ya que el “cambio” de interacciones no ocurre instantáneamente y, más aún, la razón protón-neutrón continúa decreciendo lentamente con el tiempo debido al decaimiento de los neutrones.

Para $t = 4$ segundos, se tiene que $\rho = 3 \times 10^4 \text{gcm}^{-3}$, y $T \simeq 5 \times 10^9 K \simeq 0,5 \text{ MeV}$ que es aproximadamente la masa de los electrones y positrones (con $m = \frac{kT}{c^2}$). En esta etapa el equilibrio de la población de electrones y positrones decrece rápidamente; la producción decae debajo de la aniquilación, y poco después de esta época todos los positrones se debieron haber aniquilado, dejando una pequeña población residual de electrones. Esencialmente toda la energía de pares electrón-positrón es transferida a los fotones, calentándolos a una temperatura aproximadamente 1,4 veces más alta que la temperatura de los neutrinos.

Una vez que la temperatura desciende a alrededor de $10^9 K$ en $t \simeq 3$ minutos, la nucleosíntesis comienza abruptamente, produciendo el núcleo de ^4He . De hecho, en el equilibrio térmico, la abundancia del ^4He en esas densidades bariónicas debe ser apreciada aún a altas temperaturas ($\sim 3,5 \times 10^9 K$) aunque una pequeña nucleosíntesis ocurre antes de $t = 3$ minutos debido a que el deuterio (^2H) juega un papel importante en las reacciones nucleares que forman más que el helio. Sin embargo, la abundancia de ^2H es muy baja hasta que la temperatura alcanza los $10^9 K$. Más allá del ^4He prácticamente no hubo nucleosíntesis debido a las grandes barreras de Coulomb y la estabilidad de núcleos con peso atómico de 5 y 8. Después de algunos minutos, esencialmente todos

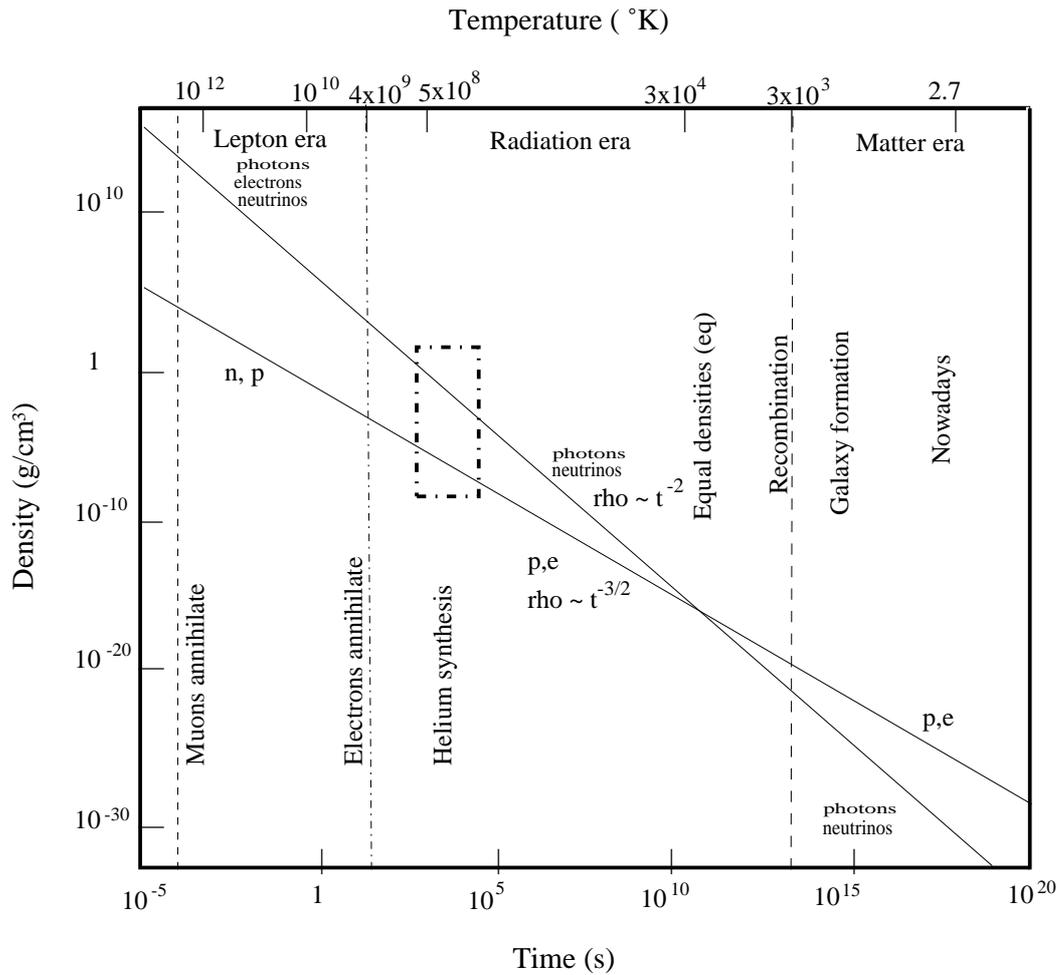


Figura 1.3: Historia térmica del universo. Figura tomada de [9].

neutrones presentan el “estancamiento”, tiempo durante el cual no hubo decaimiento a ${}^4\text{He}$, dando como resultado una abundancia del ${}^4\text{He}$ de alrededor del 25 % por masa, con pequeñas abundancias de ${}^2\text{H}$, ${}^3\text{He}$, y ${}^7\text{Li}$ también producidas, aunque despreciables. El porcentaje del ${}^4\text{He}$ no es tan sensible para el valor de la densidad bariónica, debido a que está gobernado principalmente por la razón neutrón-protón en un “estancamiento”, no así la abundancia de otros elementos, particularmente el ${}^2\text{H}$ es más intuible para la densidad bariónica. Una densidad bariónica relativamente menor puede producir una abundancia del ${}^2\text{H}$, por encima de 5×10^{-4} por masa, mientras que una densidad bariónica alta -específicamente, una densidad por encima de la de un “universo cerrado” - incrementa la eficiencia de las cadenas de reacciones que producen ${}^4\text{He}$, y resulta en una abundancia menor de ${}^2\text{H}$, por varios ordenes de magnitud.

Es difícil observar la abundancia cósmica del helio, pero la cantidad del 25 % parece estar en concordancia con las observaciones. La presencia de esta cantidad de helio en el universo no puede ser contada por otros procesos. En

particular la nucleosíntesis estimada en las estrellas se estima que produce una abundancia del helio de tan sólo un pequeño porcentaje. De esta manera, la predicción del helio mediante la “nucleosíntesis del big bang” puede considerarse el éxito de la teoría.

Después del periodo de la nucleosíntesis, el universo continuó expandiéndose y enfriándose. El siguiente hecho cósmico de gran importancia ocurrió en el momento en que la temperatura ha descendido a $4000^{\circ}K$. Esto sucedió para $t \sim 3,79 \times 10^5$ años, y ya para esa época el universo estaba dominado por la materia. A esta temperatura y menores, los electrones y protones libres se han combinado para formar un hidrógeno neutro. Más aún para el momento en que la temperatura ha alcanzado los $2000^{\circ}K$ la fracción de hidrógeno ionizado es de sólo $\sim 10^{-4}$. Como resultado de este hecho -llamado *recombinación*, sin embargo, los electrones y protones no se habían combinado antes- la interacción entre la materia y radiación disminuyó abruptamente, debido a la sección transversal de la dispersión de fotones a partículas libres cargadas es mucho más grande que con H neutro y He. Además los fotones se desacoplan totalmente de la materia después de la recombinación, y se enfrían con la expansión del universo en lo que sigue de su evolución. Entonces, el universo actual debe estar permeado con esta radiación de cuerpo negro originada durante el big bang, cuyos fotones interactuaron por última vez en el periodo de la recombinación. A la región de última interacción se le llama *superficie de última dispersión*.

Esta radiación de fondo, como se verá más adelante, se encuentra a una temperatura $T \simeq 2,7^{\circ}K$, que corresponde a longitudes de onda de microondas fue descubierta por Penzias y Wilson en 1965. La existencia de esta radiación es difícil de explicar de otra manera, además provee una gran confirmación del modelo descrito para la evolución de nuestro universo.

El desacoplamiento de la materia y radiación en la época de la recombinación tuvo mayor efecto sobre el origen de las perturbaciones gravitacionales, produciendo la formación de galaxias. Justo antes de la recombinación, la presión originada por la radiación inhibió el crecimiento de las perturbaciones gravitacionales involucrando masas menores que $10^{17}M_{\odot}$, que es mucho más grande que las masas galácticas $\sim 10^{11}M_{\odot}$. De esta manera, las irregularidades en la distribución de la materia comenzaron a crecer después de la recombinación, dando como resultado la formación de estrellas, cúmulos de estrellas, y galaxias. Finalmente en $t \sim 1,4 \times 10^{10}$ años el universo alcanzó su estado presente [50].

La RG junto con la suposición de la homogeneidad e isotropía además de las consideraciones acerca del contenido de materia del universo produce un modelo satisfactorio de la historia del universo. Son notables los alcances acerca de la explicación de la abundancia cósmica del helio y la existencia de la radiación cósmica de microondas.

1.6. Parámetros Cosmológicos

A continuación se introducirán algunos parámetros que tienen relevancia en las observaciones cosmológicas. Los objetos observados se encuentran en el pasado del cono de luz y no en una hipersuperficie preferente a $t = \text{constante}$, éste hecho complica el análisis de las observaciones de dos formas. Primero, el universo cambia a través del pasado del cono de luz: pero debido a su expansión, es homogéneo sólo en una hipersuperficie a $t = \text{cte}$. En segundo lugar, la evolución temporal de objetos astronómicos no ha sido comprendida completamente de forma que se debe ser cauteloso al hacer ciertas suposiciones, como por ejemplo considerar que una galaxia lejana de forma elíptica de gran tamaño comparte las mismas propiedades que objetos similares a ésta que están a una distancia cercana.

- Parámetro de Hubble, H

Como se mencionó en la ecuación (1.10), el parámetro de Hubble se define como $H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$ con la cual se puede deducir la densidad de masa del universo a partir de su desaceleración. La idea general es que la ley de Hubble ($v = Hd$) indica que tan rápido se expande el universo; si se extiende esta ley a objetos muy distantes se deberá ver que la expansión cambia con el tiempo, por lo que se observa la desaceleración de la expansión.

- Densidad crítica, ρ_c

De la ecuación (1.10) se obtiene un valor característico de la densidad, el tipo de universo en el que nos encontramos se determina mediante la magnitud de ρ relativo al valor crítico de la densidad ρ_c para el cual $k = 0$:

$$\rho_c \equiv \frac{3}{8\pi G} H^2. \quad (1.43)$$

- Parámetro de desaceleración, q .

El parámetro q se define como:

$$q = -\frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{H^2}, \quad (1.44)$$

utilizando la ecuación (1.12) se obtiene:

$$q = \frac{4\pi G \rho + 3p - 2\Lambda}{3 H^2}, \quad (1.45)$$

relacionándola con la ecuación (1.43) \Rightarrow

$$q = \frac{\rho + 3p - 2\Lambda}{2\rho_c}. \quad (1.46)$$

El parámetro q proporciona una medida de la aceleración del universo. Si $q > 0$ el universo se desacelera, mientras que si $q < 0$ éste se acelera.

- Parámetro de densidad, Ω

La razón entre la densidad total del universo y la densidad crítica es llamada Ω

$$\Omega \equiv \rho/\rho_c. \quad (1.47)$$

De esta manera la ecuación (1.46) se puede reescribir como:

$$2q = \Omega + 3p/\rho_c - 2\Omega_\Lambda, \quad (1.48)$$

donde $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{\rho_c}$ y si $p = \Lambda = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$.

Si se mide q , y aplicando el principio cosmológico, se deduce la cantidad total de densidad del universo, e incidentalmente, su estructura global. Si $\Omega < 1$ el universo es abierto, mientras que si $\Omega > 1$ el universo es cerrado. Si $\Omega \simeq 1$ la fluctuación local de la densidad causada por cúmulos de galaxias, la hacen mayor que 1 y menor que 1 en diferentes lugares, entonces estrictamente el modelo simple de FRW no sería válido, ya que éste plantea una homogeneidad e isotropía total. Y para explicar los cambios locales de densidad se introducen perturbaciones de materia-energía del universo.

- Corrimiento al rojo, z

Tomando la ecuación (1.10) con $\Lambda = 0$, y expandiéndola en serie de Taylor alrededor de t_h , el tiempo actual, se tiene [45]

$$a(t) = a_h[1 + H_h(t - t_h) - \frac{1}{2}q_h H_0^2(t - t_h)^2 + \dots] \quad (1.49)$$

que nos indica la evolución de l universo hacia el pasado. Esto permite verificar la ley de Hubble, donde la velocidad v se deduce del *corrimiento al rojo* z de las líneas de espectro, el cual está dado por:

$$1 + z \equiv a_h/a(t), \quad (1.50)$$

donde t es el tiempo de la emisión de la luz observada actualmente. De la ecuación (1.49) se tiene que

$$z(t) = H_h(t - t_h) + (1 + q_h/2)H_h^2(t - t_h)^2 + \dots \quad (1.51)$$

y de esta ecuación resulta que

$$t_h - t = z(t)/H_h - (1 + q_h/2)z(t)^2/H_h + \dots \quad (1.52)$$

por lo que se obtiene información acerca del tiempo t en el cual una galaxia emitió luz.

- Distancia comóvil, χ

A continuación se define la distancia comóvil entre un observador y un objeto que emite luz. En este caso, la distancia comóvil desde un objeto en el factor de escala a (o el corrimiento al rojo $z = 1/(a - 1)$) es:

$$\chi(a) = \int_{t(a)}^{t_o} \frac{dt'}{a(t')} = \int_a^1 \frac{da'}{a'^2 H(a')} \quad (1.53)$$

Típicamente se pueden observar objetos que se encuentran en $z \leq 6$, para este tiempo domina la materia.

- Flujo lumínico

Se define el flujo F de un objeto a una distancia d de luminosidad conocida L como

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}$$

esto es debido a que la luminosidad a través de una esfera de área $4\pi d^2$ es constante. Este parámetro puede generalizarse para un universo en expansión a través de la escala comóvil como:

$$F = \frac{L(\chi)}{4\pi\chi^2(a)} \quad (1.54)$$

- Distancia lumínica, d_L

Utilizando la luminosidad, L , de una fuente (potencia total emitida) se define la *distancia lumínica* como

$$d_L \equiv \chi/a \quad (1.55)$$

Estas cantidades o parámetros caracterizan diferentes propiedades del universo y se usarán en lo subsiguiente de este trabajo.

1.7. Problemas del modelo estándar de cosmología.

- Singularidad

Como se mencionó en la sección 1.5 para $t = 0$, $a = 0$, la densidad $\rho = \infty$ y $T = \infty$. En ese mismo instante se demuestra que el tensor de curvatura $R_{\mu\nu} = \infty$. Hasta ahora no existe una teoría que explique la gravitación cuando $a(t)$ tiende a cero. De hecho se esperaría que la RG sea válida aún cuando $a(t) \rightarrow l_{Pl}$, sin embargo, para valores menores a este límite se presentarían

problemas; por ejemplo, las fluctuaciones cuánticas de la métrica hacen imposible extenderlas a un formalismo clásico. Con la RG se puede entender la estructura Euclidiana -o de Minkowski- del universo a gran escala, pero no para aquellas menores a l_{Pl} . Para esto es necesario tener una teoría de gravedad cuántica, actualmente en proceso de formulación, ver por ejemplo [?].

- El problema de la planitud

La contribución actual de la curvatura espacial a la expansión está dada por $\Omega - 1 = \rho_0(t)/\rho_c(t) - 1$. Sin embargo, esta contribución ha evolucionado con el tiempo. De la ley de Friedman, ec. (1.10), se tiene que:

$$|\Omega_k(t) - 1| = |\rho_0/\rho_c(t) - 1| = \frac{c^2|k|}{a^2 H^2} = \frac{c^2|k|}{\dot{a}^2} \quad (1.56)$$

Durante la época dominada por la radiación (resp. materia), el factor a crece como $t^{1/2}$ (resp. $t^{2/3}$). Entonces, un universo espacialmente plano es inestable: si inicialmente, k es exactamente cero, Ω_k , permanecerá como cero; pero si sólo es cercana a cero, Ω_k aumentará con el tiempo. Entonces, para no tener una curvatura significativa hoy en día ($|\Omega_k(t_0)| \leq 0,1$), se encuentra que para el tiempo de Planck, la curvatura debió ser muy pequeña, $|\Omega_k(t)| \leq 10^{-60}$. El modelo estándar no explica esta cantidad tan pequeña en el universo temprano: el hecho de que el universo sea espacialmente plano actualmente, aún de manera aproximada, nos obliga a tener condiciones iniciales muy particulares, de ajuste muy fino (“fine tuning”, en inglés). Esto es lo que se conoce como el “problema de la planitud”.

- El problema del horizonte

Se define el horizonte causal como la distancia que viaja la luz desde un observador hasta algún punto en un tiempo posterior. Así, la luz cumple con $ds^2 = 0$. Entonces utilizando la métrica en coordenadas esféricas se obtiene [8]:

$$\int_0^{t_H} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_H} \frac{dr}{1 - kr^2/4}$$

y se define el horizonte causal ($d_h(t)$) como:

$$d_H(t) = a(t) \int_0^{r_H} \frac{dr}{1 - kr^2/4} \quad (1.57)$$

Durante las épocas dominadas por la radiación y por la materia, el horizonte causal es igual al radio de Hubble (por un factor de 2 o 4). De los datos observacionales de las anisotropías de la RCF, se sabe que el radio de Hubble para la época de desacoplamiento es visto por debajo de un ángulo de un grado en el cielo. Así que en un mapa de la RCF, dos puntos vistos bajo un ángulo mayor a un grado aparecen causalmente desconectados. En otras palabras, el mapa de la RCF parece estar compuesto de aproximadamente 10^3 regiones

independientes, lo cual no proporciona ninguna información del pasado. Lo que no se explica es como pueden estar casi a la misma temperatura, con variaciones del orden de $10^{-5}K$. Dados estos argumentos, podría esperarse que cada una de esas regiones tenga su propia temperatura. Por lo que ahora se deberían observar inhomogeneidades de primer orden. Sin embargo, se mide la misma temperatura en todo el cielo ($T_0 = 2,73K$), por lo que aparece “el problema del horizonte”, es decir, la pequeñez del horizonte en la época de la última dispersión no explica la isotropía observada en todo el cielo.

- Origen de las fluctuaciones

Hemos visto que durante las épocas dominadas por la materia y por la radiación el radio de Hubble (y el horizonte causal) crecen más rápido que la longitud de onda de cada perturbación. Entonces, todas las longitudes de onda observadas hoy en escalas cosmológicas fueron más grandes que el tamaño del horizonte en el universo temprano. Dentro del modelo del big bang no existe ningún mecanismo para la generación de perturbaciones primordiales. Aquí es donde se presenta el siguiente problema: si las perturbaciones son acausales, no se explica como es que pueden generarse sin violar la causalidad, i.e. el hecho de que ninguna información puede viajar más rápido que la velocidad de la luz.

- Constante cosmológica

Uno de los problemas que surgen como consecuencia de las teorías de gran unificación (TGU) (o teorías del todo, incluyendo a la gravitación) es que el vacío de energía asociado a éste, $\langle 0|T_{\mu\nu}|0 \rangle = \langle \rho \rangle g_{\mu\nu}$ se hace muy grande. Sumando las energías-cero, las energías mínimas de todos los modos normales de algún campo de masa m , se obtiene $\langle \rho \rangle \simeq M^4/(16\pi^2)$, donde M representa un límite en la integración, $M \gg m$. Considerando la validez de la RG por encima de la escala de Planck, se puede tomar $M \simeq 1/\sqrt{8\pi G}$, de lo que se obtiene $\langle \rho \rangle = 10^{71}\text{GeV}^4$. Este término juega el papel de constante cosmológica $\Lambda = \langle \rho \rangle \simeq M_{Pl}^4 \sim 10^{76}\text{GeV}^4$, valor del término dado en la ecuación de Einstein (1.4). Sin embargo, si la constante cosmológica actualmente es del orden de magnitud de la cantidad de materia del universo se tiene que

$$\Lambda \sim \rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \simeq 10^{-45}\text{GeV}^4, \quad (1.58)$$

el cual es muy pequeño comparado con el valor obtenido anteriormente, de hecho es 121 órdenes de magnitud diferente. Aún considerando simetrías para escalas de energía muy bajas, la Λ teórica es pequeña, pero no tanto como en el valor dado en la ecuación (1.58).

1.8. Inflación

Genéricamente se llama inflación a una expansión acelerada del universo en la época más temprana de su evolución. Este modelo ha sido formulado con el propósito de resolver los problemas antes mencionados.

1.8.1. Solución al problema del horizonte

Para obtener una solución al problema del horizonte, se utiliza el horizonte comóvil dado por:

$$\eta = \int_0^a \frac{da'}{a'} \frac{1}{a'H(a')} \quad (1.59)$$

De esta forma el horizonte comóvil es la integral logarítmica del *radio comóvil de Hubble*, H^{-1}/a . El radio de Hubble, H^{-1} , es la distancia sobre la cual las partículas pueden viajar durante el tiempo de expansión. De esta forma el radio de Hubble es otra manera de medir cuales partículas están causalmente conectadas entre sí: si las partículas se encuentran separadas por distancias más grandes que el radio de Hubble, entonces éstas no pueden comunicarse. Es importante distinguir entre el horizonte comóvil η y el radio comóvil de Hubble $(aH)^{-1}$. Si las partículas se encuentran separadas por distancias mayores que η , entonces éstas nunca pudieron haberse comunicado entre sí; mientras que si están separadas por distancias mayores que $(aH)^{-1}$, entonces estas partículas no pueden comunicarse *actualmente*. Así es posible que η sea mucho más grande que $(aH)^{-1}$ actualmente, por lo que partículas que no pueden comunicarse ahora pudieran haber estado en contacto causal en el pasado. Esto debió haber sucedido si el radio comóvil de Hubble en el pasado era mucho más grande de lo que es ahora por lo que η debió haber adquirido la mayoría de sus contribuciones en el universo temprano. Esto pudo haber sucedido así pero no durante las épocas dominadas por radiación o materia. En estas épocas, el radio comóvil de Hubble aumentó con el tiempo, por lo que típicamente se espera que la mayor contribución a η se dió en tiempos más recientes. Como se muestra en la figura 1.4.

En la parte superior de la figura 1.4 se ha dibujado un eje que representa la temperatura del plasma cósmico para un valor dado del factor de escala. Se tiene poco conocimiento acerca de la física en los límites de la gráfica, de algunos cientos de GeV. Para esos valores de energía, el modelo estándar de la física de partículas es adecuado. Para energías más altas, aunque se tienen algunas ideas, no existe razón experimental para preferir una u otra teoría. Debido a que el contenido de energía del universo determina $a(t)$, si se extrapola el horizonte en la figura anterior regresando a $a = 0$, o equivalentemente para energías infinitamente altas, en realidad se está haciendo una consideración: se está partiendo del hecho de que no sucede nada extraño en el universo temprano, en particular para los inicios de la época dominada por la radiación. Si esto sucedió de esta manera, entonces se sigue que el horizonte comóvil recibió una contribución despreciable del universo temprano, de tal forma que

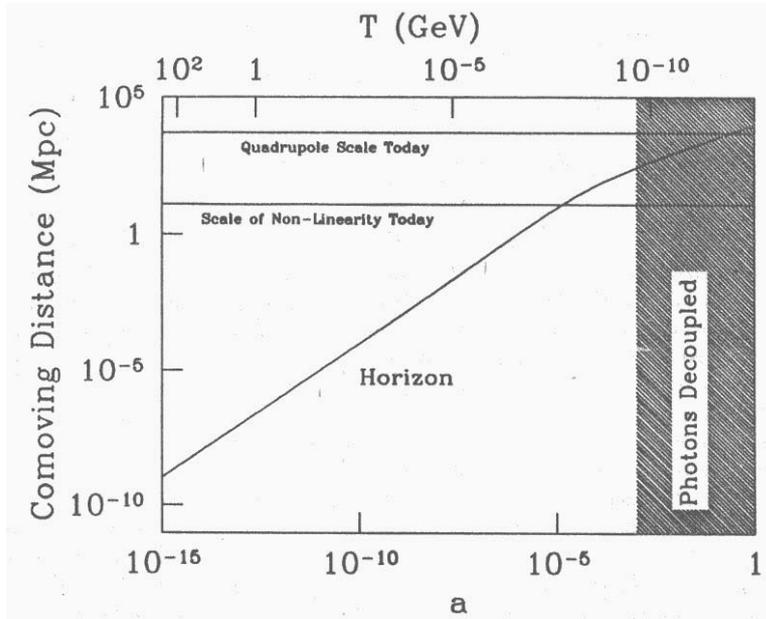


Figura 1.4: El horizonte de comóvil como función del factor de escala (a)[17]

los fotones pudieron viajar sólo pequeñas distancias en la primer fracción de segundo después del big bang.

Esto sugiere una solución al problema del horizonte: es probable que el universo temprano no estuviera dominado ni por materia ni por radiación. Sin embargo, para al menos un periodo de tiempo pequeño, el radio comóvil de Hubble decreció drásticamente durante esta época. En este caso, el horizonte comóvil debió haber recibido la mayoría de su contribución no de épocas recientes, sino de las épocas primordiales provocadas por una expansión rápida del universo. Las partículas separadas por varios radios de Hubble actualmente, estuvieron en contacto causal antes de la época de expansión acelerada.

A continuación se realiza una descripción cualitativa de la manera en que el factor de escala debe evolucionar para resolver el problema del horizonte. Si el radio de Hubble decrece, entonces se tiene que aH debe aumentar, H^{-1}/a disminuye. Esto es:

$$\frac{d}{dt} \left[a \frac{da/dt}{a} \right] = \frac{d^2 a}{dt^2} > 0. \quad (1.60)$$

De esta forma, para resolver el problema del horizonte éste debió haber tenido un periodo en el cual tuvo una expansión acelerada. Es importante mencionar que la mayoría de los modelos inflacionarios operan a escalas de energía del orden de 10^{15} GeV o mayores. Para obtener tal orden de magnitud se considera que el universo estuvo dominado por radiación desde el principio hasta el fin de la inflación. Entonces la escala de H evoluciona como a^{-2} por lo que $a_0 H_0 / a_e H_e = \frac{a_e}{a_0} = \frac{T_0}{T_e}$, en donde a_e es el factor de escala al final de la inflación y T_0 es la temperatura de la radiación actualmente ($T_0 \sim 10^{-13}$ GeV). Si a_e

corresponde a un tiempo para el cual la temperatura era de 10^{15}GeV , entonces $\frac{a_e}{a_0} \simeq T_0/10^{15}\text{GeV} \simeq 10^{-28}$ ($T_0 \simeq 10^{-13}\text{GeV}$). De esta manera, el radio comóvil de Hubble al final de la inflación era 28 ordenes de magnitud más pequeño de lo que es actualmente. Para que la inflación funcione, el radio comóvil de Hubble en el período de inflación tuvo que ser más grande que las escalas más grandes observadas hoy en día, i.e. más grande que el radio comóvil de Hubble actual.

La manera más común de lograr lo anterior es construir un modelo en el cual H es constante durante la inflación. En este caso, debido a que $\frac{da}{a} = Hdt$ el factor de escala evoluciona como

$$a(t) = a_e e^{H(t-t_e)} \quad t < t_e \quad (1.61)$$

en donde t_e es momento en que termina la inflación, con $H=\text{cte}$. El decrecimiento en el radio comóvil de Hubble $(aH)^{-1}$ ahora es debido al crecimiento en el factor de escala. Para que el factor de escala aumente por un factor de 10^{28} , el argumento de la función exponencial debe de ser del orden de $\ln(10^{28}) \sim 64$, de esta manera la inflación puede resolver el problema del horizonte si el universo se expande exponencialmente por más de 60 e -folds.

La figura 1.5 muestra el radio comóvil de Hubble como función del factor de escala. El lado derecho de la gráfica muestra que es virtualmente idéntico a la figura 1.4, la cual proporciona información en que las escalas comóvil de interés eran mucho más grandes que el radio de Hubble en la cosmología estándar. El lado izquierdo de la gráfica muestra que una época inflacionaria el radio comóvil de Hubble se reduce dramáticamente. Lo cual tiene sentido; debido a que el factor de escala se está expandiendo rápidamente, para los fotones se hace difícil moverse a través del la red comóvil (el cual se está expandiendo con a). Antes de que comenzara la inflación, el radio comóvil de Hubble era muy grande, más grande que cualquier escala cosmológica de interés actual, por lo que todas esas escalas se encuentran dentro del horizonte.

Nótese la simetría en la figura 1.5. Las escalas que se encuentran dentro del horizonte actual -estrictamente hablando de 60 e -folds después de la inflación- permitieron un horizonte de 60 e -folds antes del fin de la inflación. La amplitud de las perturbaciones en esas escalas permaneció constante mientras tuvieron un tamaño mayor al del horizonte. De esta forma, al medir estas perturbaciones actualmente, se observan primero las que salieron del horizonte durante la era inflacionaria. Para explicar la estructura del universo actual, es importante entender la generación de las perturbaciones durante la inflación, que puede ser explicada en el marco de la teoría cuántica de campos escalares.

En resumen, la inflación es una época en la que el universo se expande aceleradamente, la cual resuelve el problema del horizonte. Durante esta expansión acelerada el radio de Hubble permanece constante, por lo que las partículas que estaban inicialmente en contacto causal unas con otras no pueden seguir comunicándose. Las regiones que se encuentran separadas por distancias grandes actualmente de hecho se encontraban en contacto antes de la inflación. En esa

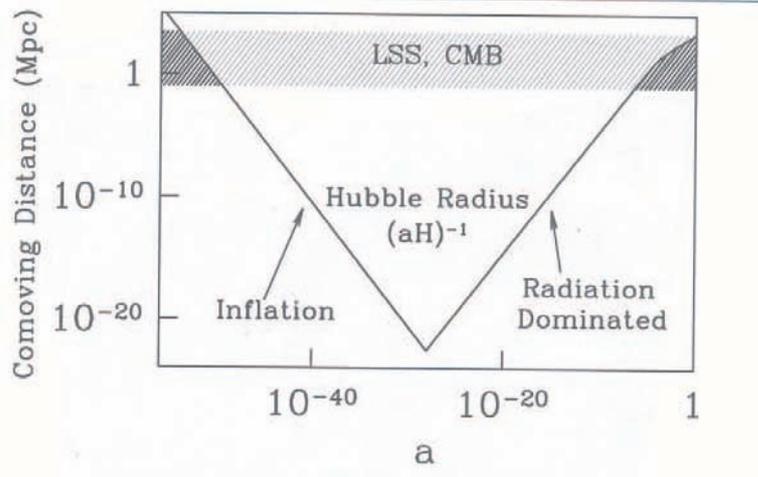


Figura 1.5: Radio comóvil de Hubble como función del factor de escala (a) [17]

época, esas regiones adquirieron las condiciones iniciales necesarias, la suavidad observada actualmente, y al mismo tiempo se generaron las pequeñas perturbaciones que crecieron fuera del horizonte de Hubble, H^{-1} , y eventualmente ingresaron de nuevo a una escala de H^{-1} para formar las estructuras que observamos en el universo: galaxias, cúmulos de galaxias, etc.

1.8.2. Presión negativa

Hasta ahora hemos visto que una expansión acelerada del universo puede resolver el problema del horizonte. Debido a que la relatividad general relaciona la expansión del universo con la densidad de energía contenida él, ahora surge la pregunta acerca de que tipo de materia puede producir tal aceleración. Para obtener una respuesta se apela a las ecuaciones de FRW. Primero consideremos el caso en que $\Lambda = 0$. Así, la ecuación (1.12) nos dice $\ddot{a} > 0$ requiere que $\rho + 3p < 0$, es decir,

$$p < -\frac{\rho}{3}. \quad (1.62)$$

Debido a que la densidad de energía es siempre positiva, la presión debe ser negativa. La cuestión a resolver es qué tipo de materia puede producir una presión de este estilo. Por otro lado en un contexto diferente al de la inflación resulta que las observaciones de las SNIa son compatibles con la cosmología estándar si $\ddot{a} > 0$. Estas observaciones requieren por lo tanto postular un tipo de energía (energía oscura) que produzca al igual que en la inflación una $p < 0$. La inflación es aparentemente causada por una forma similar de energía, con $p < 0$. La materia no relativista tiene una pequeña presión positiva proporcional a la temperatura dividida por la masa, mientras que un gas relativista tiene $p = +\rho/3$, nuevamente positiva. Así, lo que proporciona la inflación no es

materia ordinaria ni radiación, sino energía con presión negativa tipo constante cosmológica.

Consideremos el caso tal que $\Lambda \neq 0$. La ecuación (1.12) indica que

$$\rho + 3p - 2\Lambda < 0 \Rightarrow \rho + \Lambda + 3(p - \Lambda) < 0, \quad (1.63)$$

es decir, Λ juega el papel de una densidad positiva para una presión negativa. En el límite $\Lambda \gg \rho, \Lambda, \rho_\Lambda \equiv \Lambda, p_\Lambda = -\Lambda$, es decir, $p_\Lambda = -\rho_\Lambda, w = -1$ de la ecuación de estado (1.16).

1.8.3. Implementación con un campo escalar

A continuación se discutirá la inflación producida por un campo escalar genérico. La versión más simple del modelo estándar se encuentra dentro del marco de un campo escalar, el campo de Higgs. Aunque no se tiene tanto conocimiento acerca del campo de Higgs en el modelo estándar, sus interacciones y propiedades causan las constricciones suficientes para saber si puede o no servir como fuente de la inflación.

Lo que se pretende saber es si un campo escalar $\phi(\vec{x}, t)$ puede tener $p + 3\rho$ negativa. Lo primero es escribir el tensor de energía-momento para ϕ . Esto es

$$T^\alpha{}_\beta = g^{\alpha\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} - g^\alpha{}_\beta \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} + V(\phi) \right]. \quad (1.64)$$

Aquí $V(\phi)$ es el potencial para el campo. Por ejemplo un campo libre con masa m tiene un potencial $V(\phi) = m^2\phi^2/2$. Se considera que ϕ es casi homogéneo consistente de una parte de orden cero, $\phi^{(0)}(t)$, y una perturbación de primer orden, $\delta\phi(\vec{x}, t)$. A continuación se obtendrá información acerca de la parte homogénea de orden cero, su densidad de energía y su evolución temporal. Después se considerarán sus perturbaciones, $\delta\phi$, y cómo es que éstas fueron generadas.

Para la parte homogénea del campo, sólo las derivadas temporales de ϕ son relevantes por lo que los índices α y β en el primer término de la ecuación (1.64) y μ, ν , en el segundo deben ser igual a cero. Entonces el tensor de energía-momento se reduce a

$$T^{(0)\alpha}{}_\beta = -g^\alpha{}_0 g^0{}_\beta \left(\frac{d\phi^{(0)}}{dt} \right)^2 + g^\alpha{}_\beta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi^{(0)}}{dt} \right)^2 - V(\phi^{(0)}) \right]. \quad (1.65)$$

La densidad de energía $\rho = -T^0{}_0$ resulta

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi^{(0)}}{dt} \right)^2 + V(\phi^{(0)}). \quad (1.66)$$

El primer término corresponde a la densidad de energía cinética del campo, mientras que el segundo es su potencial de energía. Un campo escalar homogéneo entonces semeja la misma dinámica que la de una partícula libre

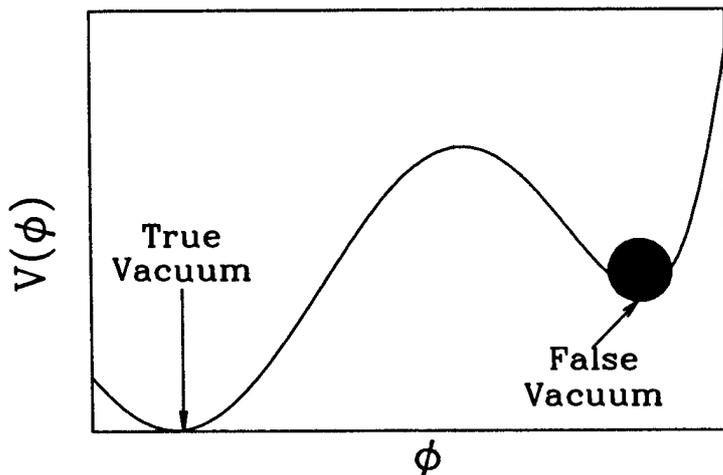


Figura 1.6: Potencial como función del campo ϕ

moviéndose en un potencial [pensando a $\phi^{(0)}(t)$ como la posición de la partícula $x(t)$]. De hecho esta analogía domina en el lenguaje usado para describir la inflación. La presión para el campo homogéneo es $p = T^{(0)i}_i$ (no se suma sobre el índice espacial i), entonces

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi^{(0)}}{dt} \right)^2 - V(\phi^{(0)}) \quad (1.67)$$

Una configuración del campo con presión negativa es entonces uno con una mayor energía potencial que cinética. El ejemplo se muestra en la gráfica de la figura 1.6 del potencial, en la cual el campo está atrapado dentro de un *falso vacío*, i.e. un mínimo local, aunque no global del potencial, con $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 < V_0$

Hay algo importante que notar acerca del campo atrapado en el falso vacío. Debido a que $\phi^{(0)}$ es constante, pues está atrapado por la barrera del potencial, su densidad de energía, la cual toda es potencial, permanece constante en el tiempo. La densidad de energía constante es muy diferente a otros tipos de materia-energía más conocidos. Las densidades tanto de materia como de radiación, por ejemplo, decaen muy rápido cuando el universo se expande. Entonces, aunque el universo inicialmente contiene una mezcla de materia, radiación [ver ecuaciones (1.18) y (1.17)] o falso vacío, según la ecuación (1.20), éste rápidamente estará dominado por un vacío de energía. Para un campo atrapado, es trivial determinar la evolución del factor de escala. Debido a que la densidad de energía es constante, la ecuación de Einstein para la evolución de a es

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}} = \text{constante}. \quad (1.68)$$

Se observa que el campo atrapado en un falso vacío produce la expansión exponencial como en la ecuación (1.59), con $H \propto \rho^{1/2}$ constante. El horizonte

comóvil primordial, que se generó antes del término de la inflación, entonces es obtenido al integrar en el tiempo el inverso de la ecuación (1.59),

$$\eta_{prim} = \frac{1}{H_e a_e} (e^{H(t_e - t_b)} - 1) \quad (1.69)$$

donde t_b es el inicio de la inflación. Por lo que si el campo está atrapado por al menos 60 e-foldings ($H(t_e - t_b) > 60$), de esta manera se resuelve el problema del horizonte.

En la formulación inicial de la inflación propuesta por Guth [23], se usó un campo escalar atrapado en un falso vacío del potencial, sin embargo esta consideración rápidamente fué descartada debido a que tal escenario no es viable. La única manera para el campo evolucione a su mínimo global es similar a la forma en que la partícula α emigre fuera de la barrera de potencial en un núcleo: el efecto túnel de la mecánica cuántica. Entonces, inicialmente las pequeñas regiones localizadas pasan por el tunel del falso al vacío real. Estas burbujas del estado del vacío real deben agruparse para que el universo como un todo se mueva al estado del vacío real. Cuidadosos cálculos [17] han mostrado que esas burbujas nunca se agrupan por lo que las regiones del falso vacío debieron expandirse rápidamente y permanecer, de tal forma que el estado del vacío real del universo nunca se obtuvo adecuadamente para generar inflación, problema llamado “graceful exit” en inglés.

Para evitar el problema de que el universo nunca alcanza su estado de vacío real, en algunos modelos de inflación [1], [29], se utilizó un campo escalar que rueda a través de su estado base. La densidad de energía de tal campo también es muy cercana a ser constante, siempre y cuando el potencial no sea demasiado profundo, por lo que ésta rápidamente dominó. Para determinar la evolución de $\phi^{(0)}$ en general cuando el campo no está atrapado, regresemos a la ecuación de Friedman (1.10), con $k = \Lambda = 0$. Si la componente dominante en el universo es ϕ , entonces la densidad de energía del lado derecho se transforma en $(d\phi^{(0)}/dt)^2 + V$. Derivando esta ecuación se obtiene

$$2 \frac{da/dt}{a} \left[\frac{d^2 a/dt^2}{a} - \left(\frac{da/dt}{a} \right)^2 \right] = \frac{8\pi G}{3} \left[\left(\frac{d\phi^{(0)}}{dt} \right) \left(\frac{d^2 \phi^{(0)}}{dt^2} \right) + V' \frac{d\phi^{(0)}}{dt} \right] \quad (1.70)$$

en donde V' se define como la derivada de V con respecto al campo $\phi^{(0)}$, $V' = \frac{dV}{d\phi}$. Podemos reemplazar el primer término en los paréntesis de la izquierda por $-4\pi G(\rho/3 + p)$ como en la ecuación (1.12). Similarmente el segundo término del lado izquierdo es $8\pi G\rho/3$, considerando $k \sim 0$. Entonces el lado izquierdo se reescribe como

$$\frac{da/dt}{a} 8\pi G [-(\rho/3) - p - 2\rho/3] = -8\pi GH \left(\frac{d\phi^{(0)}}{dt} \right)^2 \quad (1.71)$$

Igualando esta última con el lado derecho de la ecuación (1.70) se obtiene la ecuación de evolución para un campo escalar homogéneo en un universo en expansión,

$$\frac{d^2 \phi^{(0)}}{dt^2} + 3H \frac{d\phi^{(0)}}{dt} + V' = 0 \quad (1.72)$$

La ecuación anterior puede reescribirse en términos del tiempo conforme como variable, $dt \equiv ad\tau$, entonces se obtiene:

$$\ddot{\phi}^{(0)} + 2aH\dot{\phi}^{(0)} + a^2V'\phi^{(0)} = 0 \quad (1.73)$$

donde los puntos ahora sobre ϕ denotan la derivada con respecto al tiempo conforme.

La mayoría de los modelos de inflación corresponden a modelos de *rodamiento lento* (slow rollover, en inglés), en los cuales el campo de orden cero y por lo tanto el parámetro Hubble, varían lentamente. Entonces, se obtiene una relación simple entre el tiempo conforme η y la razón de expansión. En particular, durante la inflación

$$\begin{aligned} \eta &\equiv \int_{a_e}^a \frac{da}{Ha^2} \\ &\simeq \frac{1}{H} \int_{a_e}^a \frac{da}{a^2} \\ &\simeq \frac{-1}{aH} \end{aligned} \quad (1.74)$$

la segunda línea de la ecuación anterior es obtenida debido a que H es casi una constante, mientras que la tercera se debe a que el factor de escala al final de la inflación es mucho más grande que en la mitad de esta etapa ($a_e \gg a$). Para cuantificar el rodamiento lento, típicamente se definen dos variables que se anulan en el límite en el que ϕ permanece constante. Primero se define

$$\epsilon \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right) = \frac{-\dot{H}}{aH^2}. \quad (1.75)$$

Debido a que H siempre decrece, ϵ siempre es positivo. Durante la inflación, este valor es típicamente pequeño, mientras que para la era de radiación su valor es 2. De hecho, una definición de una época inflacionaria es aquella para la cual $\epsilon < 1$. Una variable complementaria la cual también cuantifica que tan lento rueda el campo es:

$$\begin{aligned} \delta &\equiv \frac{1}{H} \frac{d^2\phi^{(0)} dt^2}{d\phi^{(0)}/dt} = \frac{-1}{aH\dot{\phi}^{(0)}} [aH\dot{\phi}^{(0)} - \ddot{\phi}^{(0)}] \\ &= \frac{-1}{aH\dot{\phi}^{(0)}} [3aH\dot{\phi}^{(0)} + a^2V'], \end{aligned} \quad (1.76)$$

la cual también cumple con $\delta < 1$, durante la inflación. Así los modelos concretos de inflación tienen que cumplir con $\epsilon < 1$ y $\delta < 1$.

Hasta aquí se ha explicado cualitativa y cuantitativamente como se implementa un campo escalar en el modelo inflacionario.

Capítulo 2

Mediciones cosmológicas y su interpretación

En los últimos años se han realizado importantes mediciones astronómicas entre las que destacan las siguientes: *i*) las mediciones de la RCF para ángulos grandes, es decir, ángulos ($\theta > 1^\circ$) que sustentan una longitud mayor al tamaño del horizonte. Estas mediciones fueron realizadas por el satélite COBE en 1992, *ii*) las mediciones de la RCF de ángulo pequeño ($\theta < 1^\circ$), correspondiente a tamaños menores que el horizonte, realizada por los experimentos MAXIMA y BOOMERANG en el año 2000, y por WMAP reportada en 2003. Por otro lado, *iii*) mediciones del corrimiento al rojo de supernovas tipo Ia a finales de los 90's. Finalmente, *iv*) mediciones de gran estructura de la materia en el universo, publicada en los catálogos 2dF y SDSS. Estas observaciones han permitido hacer conclusiones importantes dentro de los modelos cosmológicos. A continuación se hace una breve descripción de estas observaciones.

2.1. Mediciones de la RCF para ángulos $\theta > 1^\circ$ y anisotropías en la temperatura

Para longitudes de onda del orden de milímetros o centímetros, la radiación de fondo electromagnética fuera de la Tierra está dominada por una componente, la radiación cósmica de fondo (RCF). Debido a la isotropía, la RCF debe llenar el universo de la misma forma. Entonces, un observador situado en otra galaxia detectará la misma intensidad de radiación. La figura 2.1 muestra el espectro de la radiación de fondo para longitudes de onda de $500 \mu\text{m}$ a 5 mm , medido por el satélite COBE [46]. La línea que atraviesa los puntos es un espectro térmico de Planck de cuerpo negro. Una función de Planck tiene un sólo parámetro libre, la temperatura, que en este caso es $T_0 = 2,728 \pm 0,004\text{K}$ [26].

Las mediciones en la RCF realizadas por el satélite COBE indicaron que ésta es casi isotrópica. En este experimento se realizaron observaciones para ángulos $\Theta > 7^\circ$, cubriendo una zona amplia del espacio, midiendo esencial-

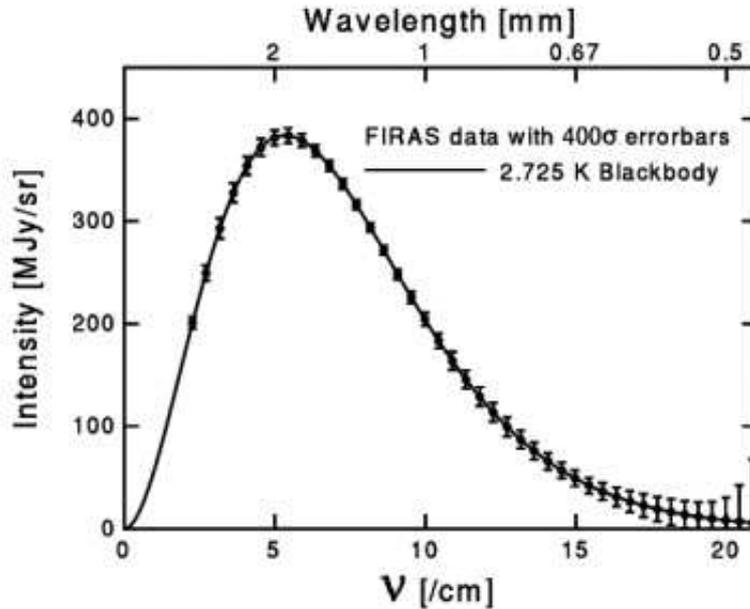


Figura 2.1: Espectro de radiación de cuerpo negro de la RCF

mente la misma temperatura, salvo pequeñas diferencias. Estas anisotropías observadas dan cuenta de las siguientes características: la variación dipolar ($\propto \cos \theta$) en la temperatura termodinámica como función de la posición en el espacio, de amplitud $\sim 0,1\%$. La evidencia es que esta anisotropía está dominada por el efecto de nuestro movimiento relativo al marco de referencia inercial definido por la radiación y por el corrimiento al rojo de las galaxias distantes. La anisotropía cuadrupolar, también medida por COBE, es de aproximadamente una parte en 10^5 . Este es el valor esperado de la perturbación gravitacional a la RCF debido a las fluctuaciones de gran-escala en la distribución de masa. Para escalas angulares menores que 20 segundos de arco, la RCF es isotrópica mejorando en una parte en 10^4 .

- Satélite COBE

El satélite Explorador de la Radiación de Fondo consistió básicamente de tres instrumentos complementarios entre sí realizando las siguientes funciones:
 -Un conjunto de radiómetros diferenciales de microondas (Radiómetro difuso de microondas DMR) utilizados para detectar las posibles anisotropías de la RCF.

-Un interferómetro de Michelson (FIRAS) para verificar cuando la RCF es térmica y detectar diversas distorsiones en el espectro y

-Un fotómetro infrarrojo (DIRBE) para la detección de radiación cósmica infrarroja, así como la radiación astrofísica local.

COBE determinó que la RCF muestra anisotropías en una cantidad de una parte en 10^5 y mostró que espectro de RCF corresponde a la de un cuerpo

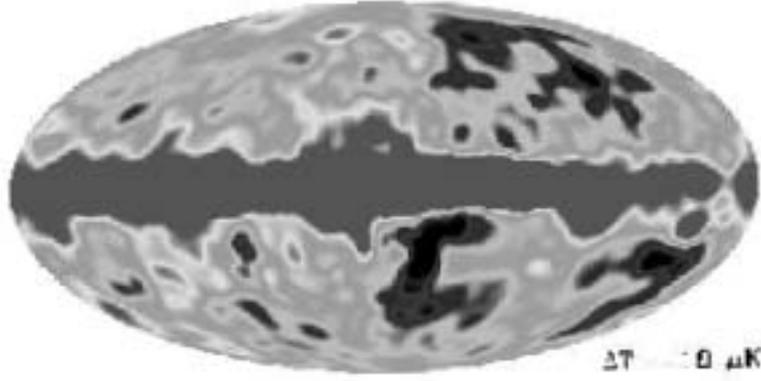


Figura 2.2: Espectro de anisotropías del satélite COBE

negro con una temperatura de $2,735\text{K} \pm 2\text{mK}$ (figura 2.2).

El experimento de anisotropías corresponde a DMR, que permitió una detección positiva de éstas. La órbita de inclinación del satélite se controló para evitar la contaminación debido a la radiación reflejada por la Tierra y la Luna. El detector consiste de dos cavidades a un ángulo de 60° ; un radiómetro midió la diferencia de temperatura entre estas dos. El radiómetro cuenta con dos canales (A y B) para cada una de las tres frecuencias: 31.5, 53 y 90 HGz, respectivamente.

2.1.1. Análisis de las fluctuaciones angulares

La RCF aparece como una distribución de radiación sobre la superficie de una esfera (vista desde adentro). Esta radiación aparece como una distribución de la temperatura:

$$T(\hat{n}) = T_0 + \Delta T(\hat{n}) = T_0[1 + (\Delta T/T)(\hat{n})] \quad (2.1)$$

como función de la dirección angular \hat{n} en el cielo. Cada dirección se fija por un vector unitario \hat{n} correspondiente, por ejemplo, a las coordenadas polares θ (longitud galáctica l) y ϕ (latitud b o colatitud $\pi/2 - b$). Generalmente los resultados se expresan en términos de las fluctuaciones relativas $\Delta T/T$. Su valor promedio es por definición cero. La desviación estándar, $C_0 = (\Delta T/T)$ tiene un papel muy importante debido a que en la práctica ésta contamina todas las mediciones de las fluctuaciones para escalas angulares distintas de cero.

Es claro que las fluctuaciones pueden representarse mediante un mapa en la esfera celeste. Sin embargo, los modelos sólo predicen la estadística de las fluctuaciones, no su distribución exacta. De esta forma, es necesario realizar un tratamiento estadístico para comparar las predicciones con las observaciones de las fluctuaciones. Éste consiste en la descomposición de términos en armónicos esféricos y en la función de autocorrelación.

La observable básica de la RCF es su intensidad como función de la frecuencia y de la dirección en el cielo \hat{n} . Esta observable se describe simplemente en términos de la fluctuación de la temperatura $\Theta(\hat{n}) = \Delta T/T$.

Si las fluctuaciones son Gaussianas, entonces los momentos multipolares del campo de temperatura están dados por:

$$\Theta_{lm} = \int d\hat{n} Y_{lm}^*(\hat{n}) \Theta(\hat{n}), \quad (2.2)$$

y están completamente caracterizados por su potencia espectral

$$\langle \Theta_{lm}^* \Theta_{l'm'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l$$

cuyos valores como función de l son independientes de una realización dada. Debido a esto las predicciones y el análisis son típicamente realizados en el espacio de los armónicos. En pequeñas secciones del espacio donde la curvatura de éste puede ser despreciada, el análisis de los armónicos esféricos son simplemente el análisis de Fourier en 2 dimensiones. En este límite l es el número de onda de Fourier. Debido a la longitud de onda $\theta = 2\pi/l$, los momentos multipolares grandes corresponden a escalas angulares pequeñas con $l \sim 10^2$ representando las separaciones de escalas angulares. Por otro lado, debido a que en este límite la variación del campo es $\int d^2l C_l / (2\pi)^2$, la potencia espectral normalmente se escribe como

$$\Delta_T^2 \equiv \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l T_0^2, \quad (2.3)$$

la cual es la potencia por intervalo logarítmico en el número de onda para $l \gg 1$.

La gráfica de la figura 2.3 muestra las observaciones de Δ_T junto con la predicción del modelo cosmológico de materia oscura fría. En la figura se observan máximos y mínimos llamados *picos acústicos* (discutidos más adelante).

La potencia espectral mostrada en la figura 2.3 comienza en $l = 2$ y exhibe grandes errores para multipolos pequeños. La razón es que la potencia espectral predicha es el promedio de la potencia en el momento multipolar l observado, y debería verse en un ensamble de universos. Sin embargo, un observador real está limitado a un universo en un cielo con un solo conjunto de Θ_{lm} 's que corresponden a $2l + 1$ números para cada l . Esto es particularmente problemático para el monopolo y el dipolo, con $l = 0, 1$ respectivamente. Por lo que si el monopolo fuera más grande en nuestra vecindad de lo que es su valor promedio, no tendríamos forma de conocerlo, ya que tiene una incertidumbre teórica grande. Mientras que para el dipolo, no hay forma de distinguir un dipolo cosmológico de nuestro movimiento peculiar con respecto al marco inercial de RCF. Por otro lado, el monopolo y el dipolo -llamados simplemente Θ y v_γ - son de poca importancia en el universo temprano. Sin embargo, la variación tanto temporal como espacial de esas cantidades son de interés, especialmente la del monopolo, el cual determina el patrón de anisotropías observadas actualmente. Un objeto distante observa variaciones espaciales en su temperatura

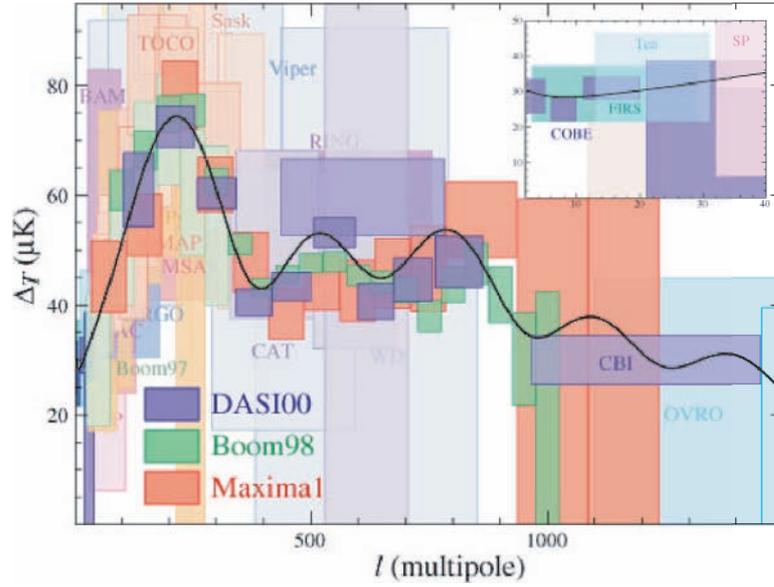


Figura 2.3: Anisotropías en la RCF predichas por la teoría inflacionaria comparadas con las observaciones.

local o monopolo, en una distancia dada por una observación temporal en el pasado, como una anisotropía angular de escala-fina. Por otro lado, los dipolos locales aparecen como un corrimiento Doppler de la temperatura, la cual es observada análogamente.

2.1.2. Descomposición armónica

Expandiendo $\Delta T/T$ en términos de armónicos esféricos se tiene que:

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{n}) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} a_{lm} Y_{lm}(\hat{n}), \quad (2.4)$$

donde los coeficientes

$$a_{lm} = \int_{4\pi} d\Omega \frac{\Delta T}{T}(\hat{n}) Y_{lm}(\hat{n}) \quad (2.5)$$

expresan la potencia del armónico esférico $Y_{lm}(\hat{n})$. Nótese que los armónicos esféricos satisfacen la condición de normalización

$$\int d\Omega Y_{lm} Y_{l'm'} = \delta_{lm} \delta_{l'm'}, \quad (2.6)$$

donde la integral se toma sobre toda la esfera celeste.

Por otra parte el teorema de adición establece que

$$\sum_m Y_{lm}(\hat{n}_1) Y_{lm}(\hat{n}_2) = P_l(\cos \theta), \quad (2.7)$$

en donde P_l es el polinomio de Legendre y $\cos \theta = \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2$ es el coseno del ángulo entre las dos direcciones consideradas. La estadística de $\Delta T/T$ está completamente determinada por los coeficientes a_{lm} . Como se ha mencionado, el término dipolar $l = 1$, usualmente no se incluye en la suma, ya que la componente correspondiente es mucho más grande que las otras, y su origen está en el movimiento de nuestra galaxia con respecto al fondo cósmico. Así, la fórmula se aplica sólo para anisotropías en escalas menores a 180° . El estudio de las anisotropías de la RCF introduce las diferencias en la temperatura en direcciones de una separación angular dada, θ . Estableciendo una expansión en términos de los modos podemos ver que al hablar de una escala angular θ es más o menos equivalente que hablar de un modo particular l . Éste último puede ser considerado como una medida del ángulo de separación, en radianes⁻¹. En otras palabras, un modo l corresponde a una separación angular de $\theta = \frac{360^\circ}{2\pi} \frac{1}{l}$ [22], es decir, de $(60^\circ)/l$ aproximadamente.

La homogeneidad del universo significa que la RCF es globalmente isotrópica, lo que implica que las estadísticas son rotacionalmente invariantes. Más aún para estadísticas Gaussianas, los coeficientes son independientes, con fases aleatorias. Debido a esto podemos definir los coeficientes relativos para cada modo l como ¹

$$C_l = \langle |a_l|^2 \rangle \equiv a_l^2 \equiv \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l |a_l|^2. \quad (2.8)$$

El momento multipolar *rms* invariante-rotacional l está dado por

$$\sigma_{T,l}^2 = \frac{\Delta T_l^2}{T_0^2} = \frac{2l+1}{4\pi} C_l. \quad (2.9)$$

Comúnmente, los resultados observacionales se expresan en términos de la variancia por intervalo logarítmico del espectro angular

$$\delta T_l^2 \equiv l(2l+1)C_l/4\pi. \quad (2.10)$$

El valor *rms* de la anisotropía de la temperatura está dado por

$$\frac{\delta T}{T}|_{rms} = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(2l+1)C_l}{4\pi} \quad (2.11)$$

Para una observación ideal del cielo, la variación en la medición de C_l es $2C_l/(2l+1)$. Esto viene del hecho de que los valores de C_l tienen una distribución estadística (una distribución χ^2) con $2l+1$ grados de libertad en el volumen del universo. Esta variación cósmica no puede evitarse, ya que sólo se observa una realización del universo, lo cual no refleja el valor promedio del ensamble. Esto afecta la comparación entre la teoría y la observación y no depende de la calidad del experimento realizado. De acuerdo con la ecuación anterior (2.11), la variación es más significativa para multipolos l bajos.

¹A la operación $\langle |\dots|^2 \rangle$ se le llama el promedio de la raíz cuadrada elevada al cuadrado, o *rms* por sus siglas en inglés (root mean square)

La componente $l = 1$ define el dipolo y $l = 2$ define el cuadrupolo. Éste último se escribe como:

$$Q_{rms}^2 = (\Delta T_2)^2 = T_0^2 \sigma_{T,2}^2 = \frac{5a_2^2}{4\pi} T_0^2 \quad (2.12)$$

Las mediciones de COBE indican que $Q_{rms} = 10,7 \pm \mu K$ [46].

Una buena resolución angular significa que se puede obtener modos de orden más alto. Por ejemplo, un ángulo de 5° proporciona información acerca de los primeros 10-20 multipolos.

Los valores de los coeficientes a_l pueden predecirse mediante los modelos de formación de estructura a gran escala y de galaxias, en particular, la potencia espectral, $P(k)$, o las fluctuaciones en el momento de la recombinación. Para modelos de formación de galaxias en los cuales las estadísticas de las inhomogeneidades son Gaussianas, por ejemplo para materia oscura fría pueden calcularse la estadística de los coeficientes a_{lm} . De hecho $\langle a_{lm} \rangle = 0$, ya que es una estadística Gaussiana. El hecho de que se puedan calcular los coeficientes de cualquier modelo dado permite hacer un mapeo sintético de todas las fluctuaciones de la RCF, para las cuales las estadísticas son representativas de la “realidad” si coinciden con las mediciones.

2.2. Mediciones para ángulos $\theta < 1^\circ$ y los picos de Doppler

- BOOMERANG y MAXIMA

En el mes de abril de 2000 se anunció la detección de oscilaciones acústicas en el plasma primordial, mediante precisas mediciones de la RCF usando su instrumento Boomerang (Observatorio de Radiación Extragaláctica Milimétrica y Geomagnetismo). El instrumento consiste de un telescopio de microondas (a 90, 150, 240 y 400 GHz) que vuela colgado de un globo. Para la detección de radiación de micro-ondas se usaron bolómetros enfriados a $0,3K$. Con las mediciones realizadas por estos instrumentos se obtuvieron los coeficientes C_l para $5 \leq l \leq 800$, encontrándose el pico mayor en $l \sim 200$, ver figura 2.3.

- WMAP

El satélite Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), lanzado en 2001 ha medido también la RCF, realizando un mapeo de las anisotropías con una alta resolución espacial y de temperatura, obteniendo mejores resultados que COBE (figura 2.4). Mientras que la primer detección de las anisotropías realizada por COBE para escalas grandes. El satélite WMAP, mide hasta para $l \sim 1000$.

Consiste de 2 espejos primarios de 1.5 m y ha mapeado el todo cielo con una resolución por debajo de los $0,3^\circ$ al medir las anisotropías de la RCF.

Los resultados de WMAP están representados en la figura 2.5, donde se observa la confirmación de que el pico más alto se encuentra en $l \sim 200$.

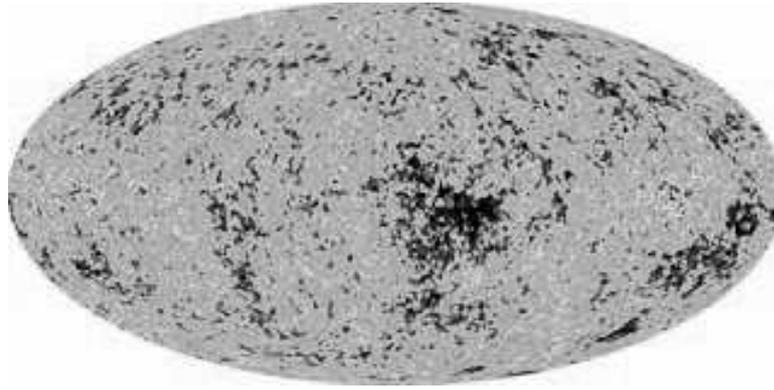


Figura 2.4: Espectro de anisotropías en la temperatura de la RCF medidas por WMAP. Los tonos representan diferentes valores de la temperatura

- PLANCK

El satélite europeo Planck, que está previsto ser lanzado en el siguiente lustro, mostrará datos un factor 2 veces más preciso. Pretende medir las anisotropías de la RCF en una escala angular menor de $8'$ a $30'$. Observará todo el cielo, con una sensibilidad cercana a $\Delta T/T \simeq 10^{-6}$, con 8 bandas de frecuencia entre 30-890GHz (o λ de $350 \mu\text{m}$ a 1 cm). Este permitirá determinar la potencia angular espectral y las propiedades estadísticas de las fluctuaciones. De esta manera se obtendrá información importante acerca de los parámetros cosmológicos y de los modelos para la formación de estructura y sobre la física del universo temprano, y por ende, sobre teorías relacionadas con física de altas energías.

De las observaciones del satélite Planck se espera poder precisar entre otras cosas, los valores de los parámetros cosmológicos fundamentales, como la constante de Hubble; también se espera determinar si el universo temprano atravesó por una fase inflacionaria y la naturaleza de la materia y energía oscura que dominan el universo actual.

2.2.1. Oscilaciones acústicas

Como se mencionó en la sección 1.5, la época de la recombinación se dió cuando el universo estaba a una temperatura aproximada de $4000K$, época en la cual los electrones y protones se combinaron para formar hidrógeno neutro. Antes de esta era los electrones libres actuaban como pegamento entre los fotones y los bariones mediante la dispersión de Thomson y la atracción Coulombiana. Así, el plasma cosmológico se encontraba fuertemente acoplado en forma de un fluido perfecto de fotones y bariones. Después de la recombinación los fotones básicamente viajaron libremente hasta nosotros en la actualidad, por lo tanto el problema de trasladar las inhomogeneidades acústicas en la distribución de fotones en la época de la recombinación (superficie de la última dispersión) se convierte en un problema de proyección. Esta proyección

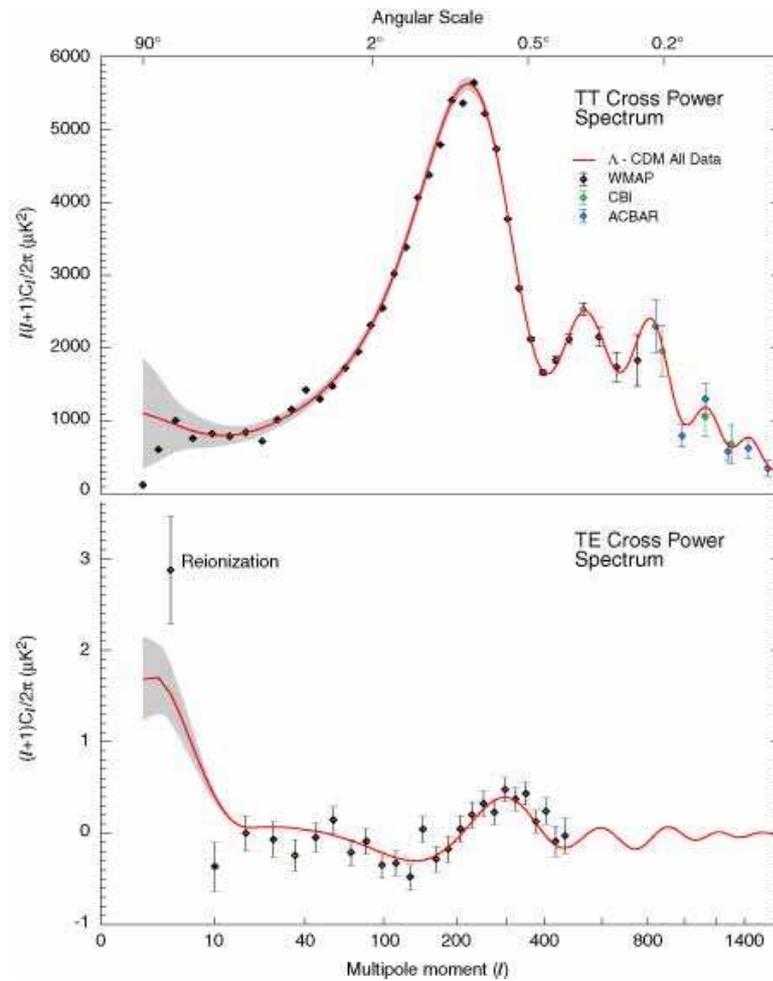


Figura 2.5: Anisotropías en la RCF predichas por el modelo Λ CDM comparadas con las mediciones realizadas por WMAP.

depende de la distancia angular entre nosotros y la superficie de la última dispersión. Ese número depende de la energía contenida en el universo después de la recombinación a través del radio de expansión.

Comencemos con una idealización de un fluido perfecto de fotones y bariones y despreciemos los efectos dinámicos de la gravedad y los bariones. Las perturbaciones de este fluido perfecto pueden ser descritas mediante la ecuación de continuidad y la ecuación de Euler que encierran las propiedades básicas de los osciladores acústicos. La discusión de las vibraciones acústicas será realizada exclusivamente en el espacio de Fourier. Por ejemplo, se puede descomponer el término monopolar del campo de temperatura en la forma

$$\Theta_{l=0,m=0} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot x} \Theta(k), \quad (2.13)$$

y omitir los subíndices 00 en la amplitud de Fourier. Como las perturbaciones son muy pequeñas, las ecuaciones dinámicas son lineales, de modo que los diferentes modos de Fourier evolucionan independientemente. Por lo tanto, en lugar de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para un campo $\Theta(x)$, tenemos ecuaciones diferenciales ordinarias para $\Theta(k)$. De hecho, debido a la simetría de rotación, todos los $\Theta(k)$ para un k dado obedecen las mismas ecuaciones. De aquí en adelante se omitirá el argumento k siempre y cuando no produzca confusión con las cantidades espaciales.

Las perturbaciones de temperatura en el espacio de Fourier vienen dadas por

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{3} k v_\gamma, \quad (2.14)$$

que es una forma de la ecuación de continuidad. Esta ecuación para la temperatura de los fotones $\Theta(k)$ tiene varios detalles a considerar, que a continuación se describen.

Primero, la derivada temporal aquí está definida respecto al *tiempo conforme* definido por $\eta \equiv \int dt/a(t)$. Dado que estamos trabajando en unidades en que la velocidad de la luz $c = 1$, también es la máxima distancia comóvil a una partícula que hubiese viajado desde el instante $t = 0$. Esta distancia se conoce como *horizonte comóvil*.

Segundo, la velocidad del fluido de fotones, v_γ , ha sido escrita en forma de un escalar y no como un vector. En el universo primigenio, sólo la componente paralela al vector de onda k es importante. Específicamente $\vec{v}_\gamma = -i v_\gamma \vec{k}$. En términos de los momentos multipolares, v_γ representa un momento dipolar a lo largo de \mathbf{k} . El factor de $1/3$ en la ecuación 2.14 proviene de que, por continuidad, el número de fotones se conserva; pero no la temperatura, de modo que la densidad de fotones viene dada, a partir de la ecuación (1.31), por $n_\gamma \propto T^3$. Finalmente, hay que destacar que por el momento se están despreciando los efectos gravitatorios.

Finalmente, la ecuación de Euler para un fluido es una expresión de la conservación del momento. La densidad de momento de los fotones es $(\rho_\gamma + p_\gamma)$, donde la presión de los fotones es $p_\gamma = \rho_\gamma/3$. En ausencia de gravedad y de

imperfecciones en el fluido por viscosidad, los gradientes de presión $\nabla p_\gamma = \nabla \rho_\gamma/3$ es la única fuerza existente. Como $\rho_\gamma \propto T^4$ ecuación (1.40), en el espacio de Fourier adquiere la forma $4k\Theta\bar{\rho}_\gamma/3$. La ecuación de Euler puede escribirse como

$$\dot{v}_\gamma = k\Theta. \quad (2.15)$$

Derivando la ecuación de continuidad (2.14) e introduciéndola en la ecuación de Euler (2.15) obtenemos la forma más básica de ecuación para un oscilador

$$\ddot{\Theta} + c_s^2 k^2 \Theta = 0 \quad (2.16)$$

donde $c_s \equiv \sqrt{\dot{p}/\dot{\rho}}$ es la velocidad del sonido en el fluido. Lo que nos dice esta ecuación es que el gradiente de presión actúa como una fuerza restauradora para cualquier perturbación en el sistema, de modo que éste oscila a la velocidad del sonido. Físicamente estas oscilaciones de la temperatura representan el calentamiento y enfriamiento del fluido que se comprime y expande en forma de ondas acústicas. Esta situación se dió hasta el período de la recombinación. Asumiendo despreciables las variaciones de velocidad iniciales obtenemos una distribución de temperatura en la época de la recombinación de

$$\Theta(\eta_{rec}) = \Theta(0) \cos(ks_{rec}) \quad (2.17)$$

donde $s = \int c_s d\eta \simeq \eta/\sqrt{3}$, s la distancia que el sonido puede viajar en el tiempo η , denominado como *horizonte del sonido*. El subíndice *rec* denota que se está evaluando en la época de la recombinación $z = 1089$.

En el límite de escalas grandes, comparadas con el horizonte del sonido $ks \ll 1$, entonces $\cos(ks_{rec}) \simeq 1$, es decir la perturbación se congeló con sus condiciones iniciales. Este es el punto clave que justifica el hecho de que las medidas del COBE son realmente una visión de las condiciones iniciales del universo primigenio, que se originaron durante la inflación dadas por $\Theta(0)$. A pequeñas escalas, la amplitud de los modos de Fourier presentan una oscilación temporal, tal y como muestra la figura 2.6, con $\Psi = 0$, $\Psi_i = 3(\Theta)(0)$ para esta idealización.

Los máximos o mínimos de los modos, corresponden a picos del espectro de potencias, es decir a variaciones del campo de temperatura primigenio $\Theta(k)$. Los distintos modos que aparecen siguen la relación armónica $k_n = n\pi/s_*$, donde n es un entero.

A continuación se describe el proceso por el cual es que en la actualidad se aprecia el espectro de inhomogeneidades de la recombinación. La inhomogeneidad espacial en la temperatura de la RCF de longitud de onda λ , aparece como una anisotropía angular de escala $\Theta \simeq \lambda/D$, donde $D(z)$ es la distancia diametral angular comóvil a un corrimiento z medido por un observador, ver figura 2.7. En un universo plano, $D_* = \eta_0 - \eta_*$, donde $\eta_0 \equiv \eta(z = 0)$. En el espacio armónico, la relación anterior implica una serie coherente de picos acústicos en el espectro de anisotropías, localizados a

$$l_n \simeq nl_a, \quad l_a \equiv \pi D/s_*. \quad (2.18)$$

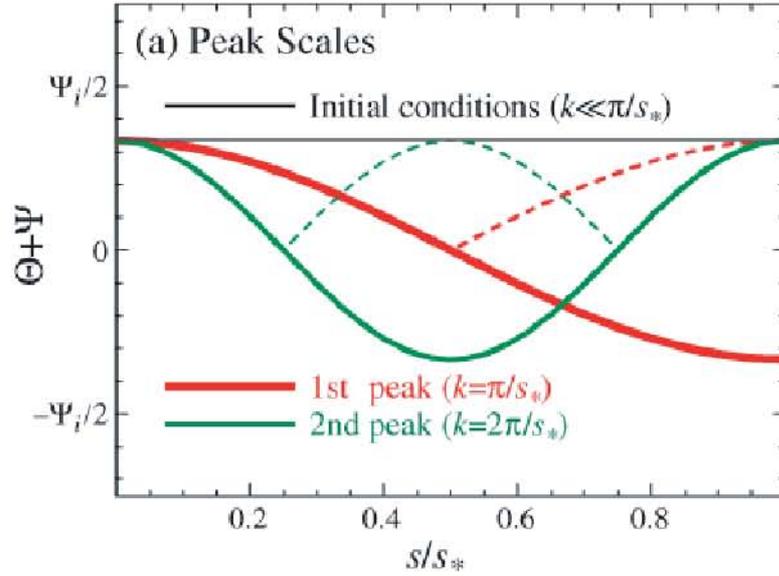


Figura 2.6: Oscilaciones acústicas

Para saber donde debería aparecer la primer perturbación, tengamos en cuenta que en un universo plano dominado por la materia $\eta \propto (1+z)^{-1/2}$ así que $\eta_*/\eta_0 \simeq 1/30 \simeq 2^\circ$, o lo que es lo mismo $l_1 = 200$. En un universo espacialmente curvo, la distancia diametral angular no tiene la misma longitud lo que implica que la localización del pico acústico es sensible a la curvatura espacial del universo. Consideremos un universo cerrado con un radio de curvatura $R = H_0^{-1}|\Omega_{tot} - 1|^{-1/2}$. Eliminando una coordenada espacial obtenemos una geometría de 2 dimensiones representada por la superficie de una esfera, con el observador situado en el polo, como se muestra en la figura 2.7.

La luz viaja a través de las líneas de longitud. Una longitud física λ situada en una determinada latitud, subtiende un ángulo $\alpha = \lambda/R \sin \theta$ con el observador. Para valores de $\alpha \ll 1$, un análisis Euclidiano deduciría una distancia $D = R \sin \theta$, y la distancia coordenada a lo largo del arco es $d = \theta R$; de modo que

$$D = R \sin(d/R). \quad (2.19)$$

Para universos abiertos, se reemplaza sin por sinh. El resultado es que objetos en universos cerrados (abiertos) están más lejanos (más cercanos) de lo que aparentan si el universo es plano. Obsérvese la distancia D a la que se ubica λ en un universo plano y cerrado en la figura 2.7. Este efecto se observa también en los lentes gravitacionales debido a la densidad del fondo cósmico. En consecuencia, en una escala comóvil una distancia fija subtiende un menor (mayor) ángulo en un universo abierto (cerrado) que en un universo plano. Esta fuerte dependencia con la curvatura espacial indica que el primer pico observado en el espectro de potencias (figuras 2.3 y 2.5) a $l_1 = 200$, indica que la geometría del universo es prácticamente plana espacialmente.

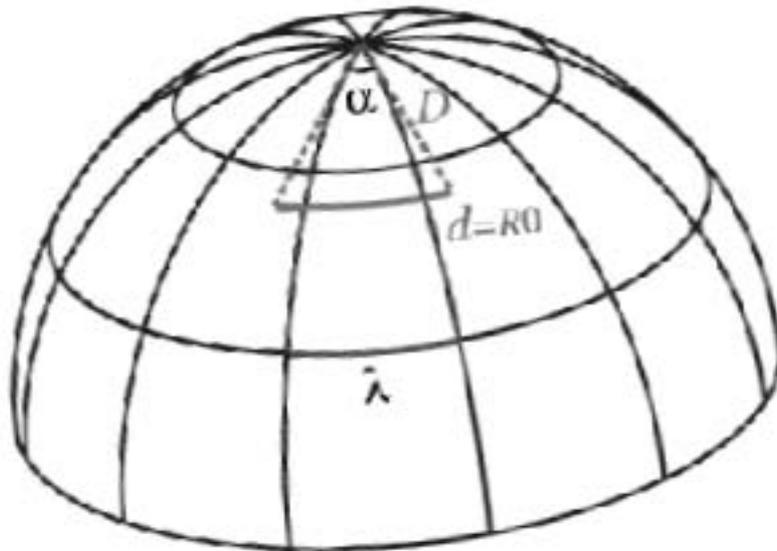


Figura 2.7: Distancia diametral angular

2.3. Curvas de rotación en galaxias y la materia oscura

El concepto de materia oscura fue introducido inicialmente por el astrónomo suizo Zwicky en 1933. La figura 2.8 ilustra la manera en que la materia oscura puede encontrarse en las galaxias, mediante el uso de curvas de rotación proporcionadas por el campo gravitacional. En la figura 2.8 la línea cortada correspondiente al disco estelar es lo que se esperaría ver para una galaxia, sin embargo, el modelo realista, que se ajusta a los puntos experimentales sugiere la existencia de un halo de materia oscura. De hecho, este *error* encontrado entre lo que se esperaría para la materia luminosa inferida a partir de la gravedad Newtoniana y lo que puede ser observado a grandes escalas, nos lleva a postular que la materia oscura representa aproximadamente el 90 % de la materia de cada galaxia espiral. De esta forma, la materia oscura se encuentra en forma de un halo aproximadamente esférico alrededor del disco.

Existe otra evidencia indirecta de la materia oscura en el universo, la cual se encuentra en la dinámica de cúmulos de galaxias. Resulta que el movimiento de las galaxias es más lento que el predicho por la teoría, es decir, la dinámica no se puede entender con la cantidad de materia bariónica observada. Así es que es necesaria una cantidad de materia oscura para explicar este fenómeno dinámico. En total la contribución de la materia oscura en el universo es de $\Omega_m \sim 0,3$.

La idea más popular es que la materia oscura consiste de partículas elementales producidas en los momentos más tempranos del universo. En general se argumenta que la materia oscura se produjo de alguna manera cuando la temperatura del universo era del orden de cientos de GeV . La hipótesis de que la

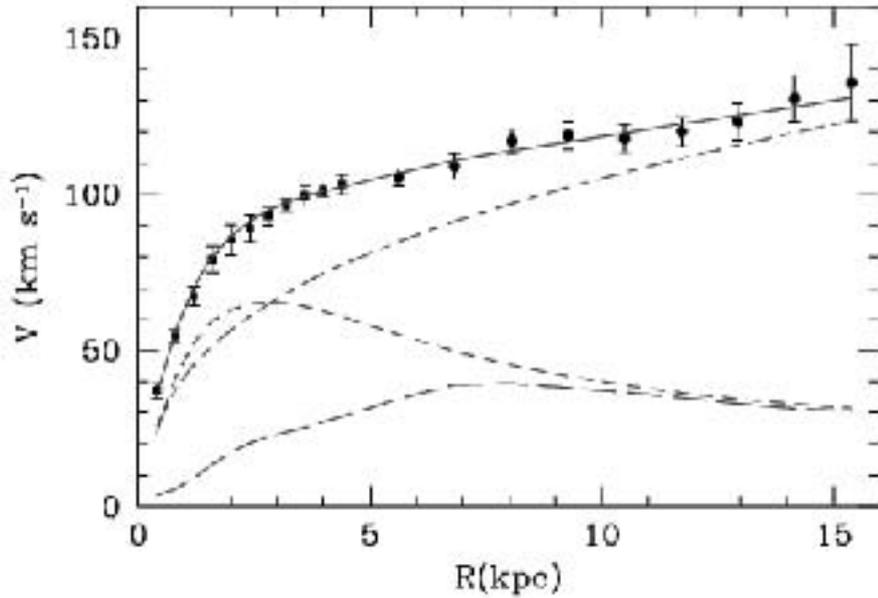


Figura 2.8: Curva de rotación para la galaxia M33 [15]. Los puntos con barras de error vienen de la línea de hidrógeno de 21 cm provenientes de las estrellas del disco estelar. La línea sólida es el ajuste a los datos considerando un disco visible, gas y halo de materia oscura. Se grafican diferentes contribuciones a la curva de rotación: halo de materia oscura (línea cortada y punteada), disco estelar (líneas cortadas) y gas (líneas grandes cortada). Se observa que para radios grandes, domina la materia oscura.

materia oscura consiste de componentes fundamentales del universo temprano es motivo de pruebas experimentales hoy en día.

2.4. Supernovas tipo Ia y la energía oscura

La muerte de estrellas masivas se da con grandes explosiones que constituyen los eventos más luminosos del universo actual, compitiendo en brillo con la misma galaxia, de la que la estrella forma parte. Según sea su estrella precursora, se distinguen dos tipos de supernovas:

Las supernovas de tipo I son explosiones de enanas blancas (de unas 1.4 masas solares) situadas en sistemas binarios. La acumulación de materia que se produce desde la estrella compañera hace que la enana blanca alcance el límite superior de masa -conocido como límite de Chandrasekhar- donde pierde su estabilidad. Entonces la estrella empieza a colapsar y la compresión propicia la combustión explosiva del carbono que produce una destrucción total de la estrella. La radiación que se emite procede principalmente de la descomposición radiactiva del níquel y el cobalto producidos en la explosión. Dentro de este tipo se distingue especialmente el tipo Ia por un espectro que presenta ausencia de líneas del hidrógeno y la presencia de una banda de absorción muy

fuerte en el rojo a unos 6100 Å correspondiente al Si II, el átomo de silicio que ha perdido su electrón más externo. El pico de luminosidad de este tipo de supernovas está relacionado con la rapidez de debilitamiento de su brillo de una manera muy regular en diferentes supernovas. Cuando se aplica esta correlación, la luminosidad relativa (magnitud) de una supernova de tipo Ia puede determinarse dentro de un intervalo de error del 10 al 20 %. Su utilidad en cosmología reside en el hecho de que se pueden utilizar como *candelas estándares* -fuentes de luz de brillo intrínseco conocido- para medir distancias extragalácticas relativas con alta precisión.

En 1998, dos grupos [40, 41], reportaron la evidencia de la energía oscura mediante observaciones de la supernovas tipo Ia. La evidencia se basa en diferencias entre la distancia lumínica en un universo dominado por materia oscura y uno dominado por energía oscura tipo constante cosmológica Λ . De las observaciones de distancia en el universo, la distancia lumínica es más grande para objetos con corrimiento al rojo altos en un universo dominado por materia oscura. De esta forma, objetos con brillo intrínseco fijo deberán aparecer con brillo más débil si el universo está contiene energía oscura.

Más concretamente, la distancia lumínica definida en la ecuación (??), puede usarse para encontrar la magnitud aparente m de una fuente con magnitud absoluta M . Las magnitudes están relacionadas mediante el flujo F , $m = -(5/2) \log(F) + \text{const.}$ Debido a que la escala del flujo va como d_L^{-2} , la magnitud aparente es $m = M + 5 \log(d_L)$. Se establece que

$$m - M = 5 \log \left(\frac{d_L}{10pc} \right) + K \quad (2.20)$$

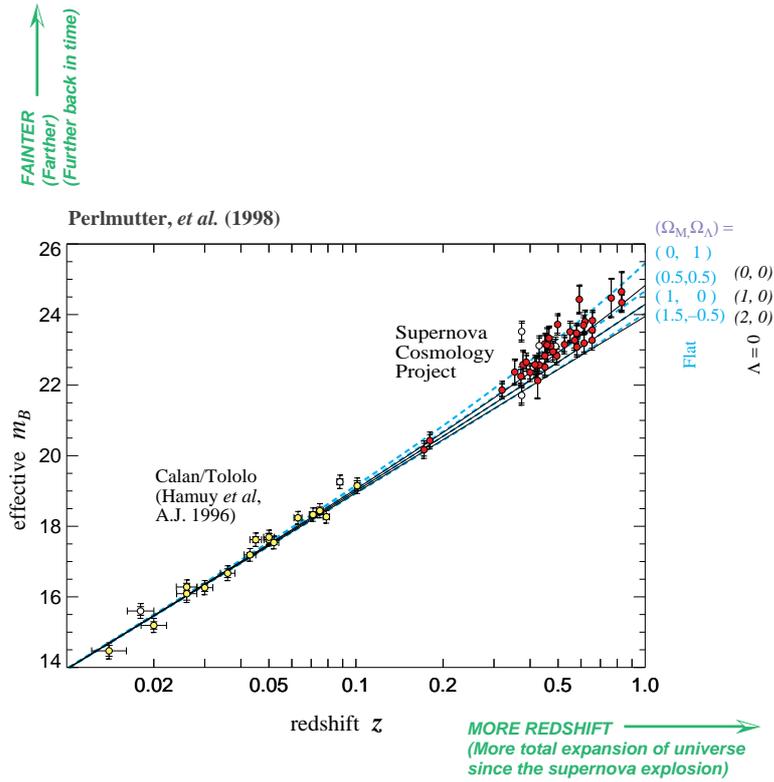
en donde K es una corrección para el corrimiento del espectro dentro o fuera del intervalo de longitud de onda medido debido a la expansión. Las primeras mediciones de 1998, ver figura 2.9 mostraron una tendencia a magnitudes efectivas mayores para supernovas con corrimientos del orden de $z \sim 1$. Posteriormente, un estudio más preciso, figura 2.10, confirmó estos resultados.

Los dos grupos midieron las magnitudes aparentes de docenas de supernovas tipo Ia, las cuales tienen casi las magnitudes absolutas. A pesar de que se pueden hacer algunas constricciones sobre la materia oscura usando algunas supernovas que han sido detectadas, se pueden hacer conclusiones utilizando sólo un par de ellas. Por ejemplo, considérese la supernova 1997ap [17], encontrada con un corrimiento al rojo $z = 0,83$ con magnitud aparente $m = 24,32$, y la supernova 1992P, con corrimiento al rojo $z = 0,026$ con magnitud aparente $m = 16,08$. Debido a que las magnitudes absolutas de éstas son iguales, la diferencia de las magnitudes aparentes es:

$$24,32 - 16,08 = 5 \log(d_L(z = 0,83)) - 5 \log(d_L(z = 0,026)). \quad (2.21)$$

La cercanía en distancia lumínica es independiente de la cosmología, es simplemente igual a $z/H_0 = 0,026/H_0$. De esta forma, el término desconocido en la ecuación (2.21) está dado mediante las observaciones,

$$H_0 d_L(z = 0,083) = 1,16 \quad (2.22)$$



In flat universe: $\Omega_M = 0.28 [\pm 0.085 \text{ statistical}] [\pm 0.05 \text{ systematic}]$

Prob. of fit to $\Lambda = 0$ universe: 1%

Figura 2.9: *Diagrama de Hubble*. Gráfica de la magnitud observada contra el corrimiento al rojo z . Se muestran mediciones de supernovas cercanas y lejanas combinándolas en una misma gráfica. Cuando $z \geq 0,1$, las predicciones cosmológicas comienzan a divergir, dependiendo de las densidades de energía para la masa y energía oscuras. Las curvas en tono más claro representan modelos con energía cero del vacío; y la densidad de masa variando desde la densidad crítica ρ_c , hasta un universo vacío. La mejor aproximación (línea en tono fuerte) se obtiene cuando $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0,3, 0,7)$, implicando una expansión cósmica acelerada. [40, 41]

En un universo plano, dominado por materia ($\Omega = 1$), la distancia lumínica más allá de $z = 0,83$ es igual a $0,95H_0^{-1}$, mientras que en un universo con ($\Omega = 0,3$) y constante cosmológica ($\Omega_\Lambda = 0,7$), tiene una distancia lumínica de $1,23H_0^{-1}$. La magnitud aparente de una supernova distante entonces sugiere que la energía oscura impregna el universo.

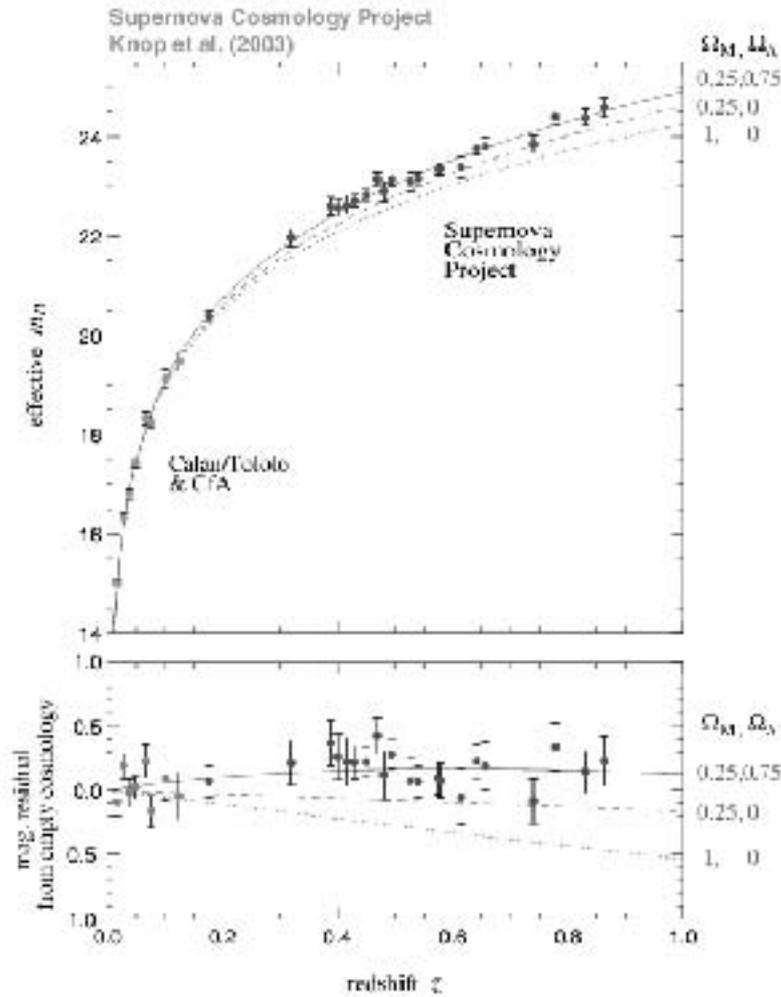


Figura 2.10: Diagramas de Hubble. Arriba: Gráfica de la magnitud utilizando una escala lineal en z . Se han graficado el promedio de las magnitudes en intervalos determinados. La curva sólida representa el mejor ajuste con $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0,25, 0,75)$. Se muestran otros dos modelos cosmológicos para su comparación $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0,20, 0)$ y $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$. Abajo: Diagrama residual de Hubble del promedio de los datos respecto de un universo vacío, también se incluyen los modelos presentados arriba [40, 41].

2.5. Estructura a gran escala

Al tener un mapa tridimensional a gran escala de la distribución de galaxias en el universo, puede ser comparado con el espectro predicho por la teoría, y medirse los parámetros cosmológicos de los cuales depende este espectro. Claro que lo que se observa en el cielo en un catálogo de galaxias sólo es materia bariónica luminosa, y no la materia oscura. Sin embargo, se considera que a grandes escalas, la distribución de materia bariónica “traza” la distribución de masa. Esto significa que las inhomogeneidades en la materia luminosa podrían

ser proporcionales a la densidad total de inhomogeneidades, es decir, en buena aproximación, a las inhomogeneidades de la materia oscura. El hasta ahora desconocido coeficiente de proporcionalidad *bias* b :

$$\delta_{luminosidad}(t, k) \simeq b \delta_{\text{CDM}}(t, k), \quad (2.23)$$

donde $\delta \equiv \delta\rho/\rho$ es el contraste de la densidad.

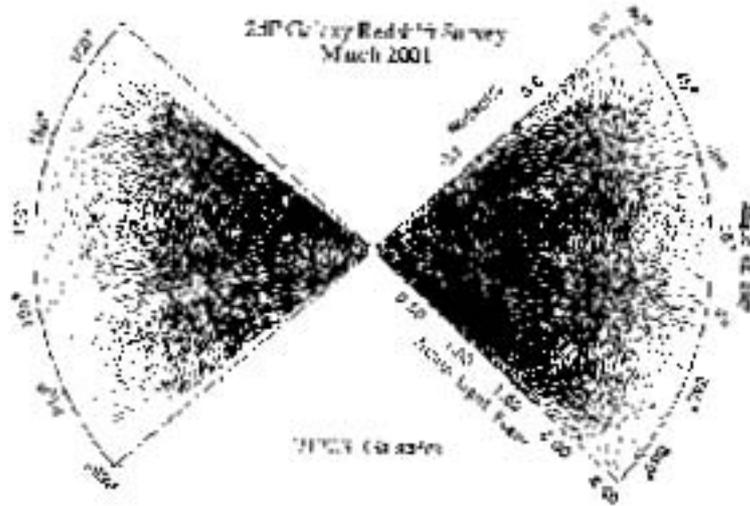


Figura 2.11: Distribución de galaxias en dos cortes delgados de una vecindad del universo, obtenido por 2dF Galaxy Redshift Survey [59]. La coordenada radial es el corrimiento al rojo z , o la distancia entre los objetos y nosotros.

Desde hace varias décadas los astrónomos han construido algunos mapas tridimensionales de gran escala de la distribución de galaxias, aun en la escala de no linealidad. En la figura 2.11 se pueden observar dos cortes delgados del universo a nuestro alrededor. Dentro de los cortes, cada punto corresponde a una galaxia vista por el 2-degree Field Galaxy Redshift Survey (2dF GRS). La coordenada radial es el corrimiento al rojo, o la distancia entre los objetos y nosotros. Aun para un corrimiento $z < 0,1$, pueden observarse algunas regiones oscuras, que corresponden a los *vacíos* -grandes estructuras desprovistas de materia visible en el universo. Para $z > 0,1$, el promedio de densidad parece disminuir suavemente, pero esto es simplemente debido a la sensibilidad limitada del catálogo: En distancias pequeñas éste observa todas las galaxias, mientras que para distancias grandes sólo observa las más brillantes. Al tomar en cuenta el efecto de esta selección, y mediante el suavizado sobre distancias del orden de 50 Mpc, se recupera una distribución bastante homogénea de materia.

En la figura 2.12 se observa el espectro de potencias reconstruido de otro catálogo de corrimiento al rojo de galaxias, el Sloan Digital Sky Survey (SDSS). Cada punto experimental se obtiene mediante el suavizado sobre pequeñas longitudes de onda. Los puntos de datos con $k < 0,1 h\text{Mpc}^{-1}$ pueden compararse

directamente con el espectro predicho por la teoría lineal de las perturbaciones cosmológicas. De tal comparación puede extraerse cierta información acerca de valores de los parámetros cosmológicos. Esto es similar a la extracción de parámetros de las anisotropías de la RCF, aunque ésta proporciona algunas constricciones independientes.

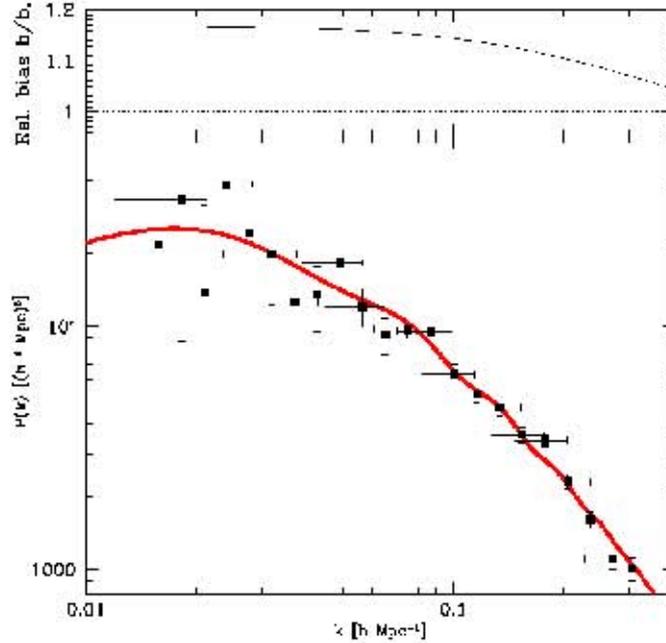


Figura 2.12: Espectro de potencias de las perturbaciones de materia, reconstruido del catálogo SDSS del corrimiento al rojo de galaxias. En la gráfica inferior: datos comparados con un espectro teórico del modelo Λ CDM, obtenido de una integración numérica sobre un sistema de ecuaciones diferenciales, tomando en cuenta la evolución de perturbaciones lineales. En el cálculo, los parámetros cosmológicos fueron escogidos con el propósito de obtener un ajuste máximo con los datos. Comparando los datos con el espectro lineal es significativo sólo para longitudes de onda grandes, $k < 0,1 hMpc^{-1}$, las cuales no han sido afectadas por la no linealidad de la evolución [50].

En el extremo izquierdo de la gráfica 2.12 de las perturbaciones de materia, se puede observar que la curva teórica alcanza su máximo (para $k \sim 0,01 hMpc^{-1}$, i.e. $\lambda \sim 400 Mpc$). Los resultados del espectro de potencial tridimensional [50] se obtienen al considerar $h = 0,72 \Rightarrow h\Omega_m = 0,213 \pm 0,023$, con $\Omega_b/\Omega_m = 0,17$. Estos resultados son consistentes con las mediciones de WMAP, mostrados en tabla 1.

Se espera que con futuros catálogos de corrimiento al rojo, realizados con más precisión, se obtengan mejores resultados de la medición de los parámetros cosmológicos.

Además, recientemente los astrónomos han desarrollado nuevas técnicas para la medición de la potencia espectral a gran escala, basándose en efectos de lente gravitacional. Estos efectos miden directamente la distribución de potencial gravitacional, en lugar de las perturbaciones de materia luminosa.

2.6. Composición de materia y energía en el universo

En la gráfica del espectro de potencias, figura 2.12, se observa que la perturbación de materia a grandes escalas depende de ciertos parámetros cosmológicos. El corrimiento al rojo de catálogos de galaxias proporciona algunas constricciones. Los experimentos anteriores han proporcionado la siguiente cantidad de materia-energía en el universo actual

$$\Omega_h = \Omega_B + \Omega_{CDM} + \Omega_\Lambda \simeq 1, \quad (2.24)$$

donde

$$\Omega_B \simeq 0,04, \quad \Omega_{CDM} \simeq 0,23, \quad \Omega_\Lambda \simeq 0,73 \quad .$$

De esta forma el universo parece estar expandiéndose de manera acelerada actualmente, y el 96% de su densidad de materia-energía es debida a una parte no bariónica y desconocida hasta ahora. Los valores medidos de manera indirecta de la constante cosmológica muestran que el universo comenzó a estar recientemente en una época dominada por Λ : para $z \leq 2$, el universo aún estaba dominado por la materia. Pero actualmente se encuentra en una época dominada por Λ , consistente con la expansión de las supernovas tipo Ia en la figura en las figuras 2.9 y 2.10.

La tabla 1 muestra los valores para diferentes parámetros cosmológicos derivados de las mediciones de WMAP.

“Best” Cosmological Parameters:
Table 3 from **Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations:
Preliminary Maps and Basic Results**,
C. L. Bennett et al. (2003), accepted by the *Astrophysical Journal*;
available at <http://lambda.gsfc.nasa.gov/>

Description	Symbol	Value	+ uncertainty	- uncertainty
Total density	Ω_{tot}	1.02	0.02	0.02
Equation of state of quintessence	w	< -0.78	95% CL	—
Dark energy density	Ω_{Λ}	0.73	0.04	0.04
Baryon density	$\Omega_b h^2$	0.0224	0.0009	0.0009
Baryon density	Ω_b	0.044	0.004	0.004
Baryon density (cm^{-3})	n_b	2.5×10^{-7}	0.1×10^{-7}	0.1×10^{-7}
Matter density	$\Omega_m h^2$	0.135	0.008	0.009
Matter density	Ω_m	0.27	0.04	0.04
Light neutrino density	$\Omega_{\nu} h^2$	< 0.0076	95% CL	—
CMB temperature (K) ^a	T_{cmb}	2.725	0.002	0.002
CMB photon density (cm^{-3}) ^b	n_{γ}	410.4	0.9	0.9
Baryon-to-photon ratio	η	6.1×10^{-10}	0.3×10^{-10}	0.2×10^{-10}
Baryon-to-matter ratio	$\Omega_b \Omega_m^{-1}$	0.17	0.01	0.01
Fluctuation amplitude in $8h^{-1}$ Mpc spheres	σ_8	0.84	0.04	0.04
Low- z cluster abundance scaling	$\sigma_8 \Omega_m^{0.5}$	0.44	0.04	0.05
Power spectrum normalization (at $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$) ^c	A	0.833	0.086	0.083
Scalar spectral index (at $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$) ^c	n_s	0.93	0.03	0.03
Running index slope (at $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$) ^c	$dn_s/d \ln k$	-0.031	0.016	0.018
Tensor-to-scalar ratio (at $k_0 = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$)	r	< 0.90	95% CL	—
Redshift of decoupling	z_{dec}	1089	1	1
Thickness of decoupling (FWHM)	Δz_{dec}	195	2	2
Hubble constant	h	0.71	0.04	0.03
Age of universe (Gyr)	t_0	13.7	0.2	0.2
Age at decoupling (kyr)	t_{dec}	379	8	7
Age at reionization (Myr, 95% CL)	t_r	180	220	80
Decoupling time interval (kyr)	Δt_{dec}	118	3	2
Redshift of matter-energy equality	z_{eq}	3233	194	210
Reionization optical depth	τ	0.17	0.04	0.04
Redshift of reionization (95% CL)	z_r	20	10	9
Sound horizon at decoupling ($^{\circ}$)	θ_A	0.598	0.002	0.002
Angular size distance to decoupling (Gpc)	d_A	14.0	0.2	0.3
Acoustic scale ^d	ℓ_A	301	1	1
Sound horizon at decoupling (Mpc) ^d	r_s	147	2	2

^afrom *COBE* (Mather, J. C. et al., 1999, ApJ, 512, 511)

^bderived from *COBE* (Mather, J. C. et al., 1999, ApJ, 512, 511)

^c $l_{\text{eff}} \approx 700$

^d $\ell_A \equiv \pi \theta_A^{-1}$ $\theta_A \equiv r_s d_a^{-1}$

Figura 2.13: Tabla 1

Capítulo 3

Implementación de campos escalares en la expansión acelerada del universo

Entre las ideas originales de Einstein al formular su teoría de gravitación se encontraba el *principio de Mach*, el cual establece que la masa de una partícula debe estar influenciada por la interacción con todas las demás partículas del universo. Sin embargo, pronto se encontró que las ecuaciones de la RG admiten soluciones en vacío, lo cual contradecía las ideas de Mach. Es por esto que P. Jordan, M. Fierz, C. Brans y R. Dicke, entre otros, plantearon la existencia de campos escalares para hacer más efectiva la interacción gravitacional de las partículas en el universo. Como resultado de estas ideas se llegó a la formulación de teorías escalar-tensoriales (TET) de la gravitación. En este caso la “constante” gravitacional de Newton se considera como una *función escalar* determinada por la distribución de las partículas en el universo. Una de las consecuencias de las teorías escalar-tensoriales es que la “constante” gravitacional varía en el tiempo, idea que por otro lado fue analizada por P.A.M. Dirac para resolver el problema de los “grandes números” de la naturaleza¹.

En la teoría de Brans-Dicke de 1961 [6] la constante de Newton se considera como función del espacio y del tiempo, además se introduce un nuevo parámetro, ω . La teoría de RG es recuperada en el límite $\omega \rightarrow \infty$. En modelos cosmológicos basados en TET más generales, en las cuales ω es una variable, generalmente existe un mecanismo atractor que hace que ω tienda a ∞ para tiempos grandes. De esta forma, es posible que la gravitación difiera considerablemente de la RG para un universo temprano, pero funciona bien actualmente. Sin embargo, las desviaciones que podrían tener las TET están acotadas por escenarios físicos como el de la nucleosíntesis del big bang, la cual proporciona una de las pruebas para tiempos pequeños.

Por otro lado, Einstein notó que la ecuación para el campo gravitacional permite la existencia de una constante, denotada por Λ , la cual no tenía

¹ $\frac{e^2}{Gm_p m_e} \simeq 0,23 \times 10^{40}$, $\frac{\hbar c}{Gm_p^2} \simeq 1,5 \times 10^{38}$, $\frac{cH_0^{-1}}{e^2/m_e c^2} \simeq 3,7 \times 10^{40}$.

originalmente una motivación teórica. Sin embargo, en 1922 A. Friedmann mostró que la solución cosmológica a la ecuación de Einstein sin el término Λ predice un modelo del universo en expansión o contracción, lo cual estaba en contradicción con la suposición de un universo estático. Con el propósito de obtener la solución estática Einstein entonces introdujo el término Λ . Como vimos en el capítulo 1, esta constante se utiliza en la cosmología moderna para generar un universo en expansión acelerada, es decir, en el modelo inflacionario reciente o de quintaesencia del universo.

Algunas TET plantean que los campos escalares están relacionados con los campos fundamentales de partículas elementales, e.g. el campo de Higgs. Así, el campo escalar en estas teorías es responsable tanto de interacciones gravitacionales como de la producción de la masa de las partículas del universo. De esta manera se obtiene una implementación mayor del principio de Mach [9].

Considerando parte de estas ideas, algunas de las teorías modernas alternativas de la gravitación incorporan tanto campos escalares, así como constantes o funciones cosmológicas. Las consecuencias en la dinámica del universo de dichas teorías es motivo del presente capítulo.

3.1. Teoría escalar-tensorial de la gravitación en un universo homogéneo e isotrópico.

Comencemos con una teoría escalar-tensorial general. Consideremos la densidad Lagrangiana en el marco de Jordan [5]:

$$\mathcal{L} = \left[F(\Phi)R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi + V(\Phi) + L_m(g_{\mu\nu}) \right] \sqrt{-g}, \quad (3.1)$$

en donde L_m describe la materia y $F(\Phi) > 0$. Esto corresponde al parámetro de Brans-Dicke $\omega = F/(dF/d\Phi)^2 > 0$. También se puede introducir una función $Z(\Phi)$ frente al término cinético, $(\partial_\mu\Phi)^2$, pero puede establecerse también como igual a uno mediante una redefinición del campo escalar. Por el momento, no introducimos ningún acoplamiento entre Φ y L_m . Esto garantiza que el principio de equivalencia débil debe satisfacerse, ya que la universalidad de la caída libre de objetos sólo depende del campo gravitacional. También las constantes fundamentales son invariantes en el tiempo en esta teoría; como por ejemplo la constante de estructura fina. Esto concuerda bastante bien con los datos del laboratorio, geofísicos y cosmológicos.

Alternativamente a la ecuación (3.1), se puede considerar la siguiente densidad Lagrangiana [58]:

$$\mathcal{L} = \left[\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + 16\pi V(\phi) + L_m(g_{\mu\nu}) \right] \frac{\sqrt{-g}}{16\pi}. \quad (3.2)$$

Realizando la variación con respecto a la métrica se obtiene:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} [T_{\mu\nu} + V(\phi)g_{\mu\nu}] + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda} \right) + \frac{1}{\phi} (\phi_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu}\square\phi), \quad (3.3)$$

en donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento, definidos en el capítulo 1.

Ahora, realizando la variación con respecto al campo escalar:

$$\square\phi + \frac{1}{2}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda} \frac{d}{d\phi} \ln \left[\frac{\omega(\phi)}{\phi} \right] + \frac{1}{2} \frac{\phi}{\omega(\phi)} \left\{ R + 16\pi \frac{d}{d\phi} \left[\frac{\omega(\phi)}{\phi} V(\phi) \right] \right\} = 0. \quad (3.4)$$

Las dos ecuaciones anteriores se pueden combinar para obtener la ecuación:

$$\square\phi + 16\pi \frac{\phi \frac{dV}{d\phi} - 2V}{3 + 2\omega(\phi)} = \frac{1}{3 + 2\omega(\phi)} \left(8\pi T - \frac{d\omega}{d\phi} \phi_{,\mu}\phi^{,\mu} \right), \quad (3.5)$$

donde T es la traza del tensor de energía-momento.

3.1.1. Cosmología homogénea e isotrópica

A continuación se considera $\omega(\phi) = \text{cte.}$, $V = V(\phi)$, y $\phi = \phi(t)$. Tomando el elemento de línea FRW dado por la ecuación (1.1), las ecuaciones (3.3) y (3.5) implican:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3\phi} (\rho + V) + \frac{\omega}{6} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 - \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi}, \quad (3.6)$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{\phi} (p - V) + \frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 2\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} \quad (3.7)$$

$$\left[\frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 3\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} \right] (3 + 2\omega) + 16\pi \left(\frac{dV}{d\phi} - 2\frac{V}{\phi} \right) - \frac{8\pi}{\phi} (\rho - 3p) = 0. \quad (3.8)$$

De la ecuación (3.6) y (3.7) se observa que el potencial juega un papel de densidad positiva y presión negativa, en consistencia con lo explicado en la sección 1.8.2.

La conservación del tensor de energía-momento de la materia implica que

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.9)$$

La solución a estas ecuaciones depende del escenario físico considerado, es decir, de las condiciones iniciales y de los parámetros introducidos, como ω .

3.2. Cosmología en la teoría de Brans-Dicke

En el marco de la teoría original de Brans-Dicke $V = 0$, por lo que las ecuaciones anteriores implican

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3\phi} + \frac{\omega\dot{\phi}^2}{6\phi^2} - \frac{\dot{\phi}\dot{a}}{\phi a}, \quad (3.10)$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi}{3+2\omega}\frac{1}{\phi} [(2+\omega)\rho + 3(1+\omega)p] - \omega\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - \frac{\ddot{\phi}}{\phi} \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\phi}a^3) = \frac{8\pi}{(3+2\omega)}(\rho - 3p)a^3 \quad (3.12)$$

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p) \quad (3.13)$$

Puede mostrarse que, en el marco de una aproximación Newtoniana, la ‘constante’ en la ley de la gravitación de Newton es

$$G = \frac{2\omega + 4}{2\omega + 3} \frac{1}{\phi} \quad (3.14)$$

Si se identifica a $\frac{1}{\phi} \equiv G_N$, donde G_N es la constante medida en la Tierra, entonces las variaciones astrofísicas ó cosmológicas de G constriñen la teoría valores $\omega \geq 10^5$ [58].

Los modelos cosmológicos que resuelven las ecuaciones (3.11) y (3.12) dependen de las cuatro cantidades a_0 , \dot{a}_0 , ϕ_0 , $\dot{\phi}_0$ y ρ_0 y los parámetros k ($\pm 1, 0$) y $\omega > 0$. Nótese que los modelos de FRW sólo dependen de los 3 valores iniciales y sólo de un parámetro, k . Entonces, el conjunto de las soluciones cosmológicas en la teoría de Brans-Dicke forma una familia de soluciones las cuales son mucho más grandes que en los modelos de FRW. No se describirán con detalle tales soluciones, sin embargo cabe mencionar que las soluciones de Brans-Dicke para un universo homogéneo e isotrópico poseen una singularidad en el pasado, y sus soluciones son similares a las de la RG.

La densidad de materia actual está dada por

$$\rho_{0m} = \frac{3H_0^2(4+3\omega)(4+2\omega)}{8\pi G(6(1+\omega)^2)} \quad (3.15)$$

mientras que la edad del universo es

$$t_{0H} = \frac{2(1+\omega)}{(4+3\omega)}H_0^{-1} \quad (3.16)$$

y el parámetro de desaceleración

$$q_0 = \frac{1\omega + 2}{2\omega + 1} \quad (3.17)$$

que en el límite $\omega \rightarrow \infty$, estos parámetros son iguales a los parámetros de la cosmología estándar definidos en la sección 1.6.

3.3. Observaciones de la expansión acelerada del universo actual

Como se mencionó en la sección 2.4, de recientes observaciones de explosiones de supernovas tipo Ia para el corrimiento al rojo $z \equiv \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1 \sim 1$ se ha concluido la existencia de una componente en el universo cuya densidad de energía no solo es positiva sino que domina las densidades de energía de todas las formas de materia conocidas anteriormente. Esta forma de materia-energía tiene una fuerte presión negativa y permanece esparcida en escalas cosmológicas afectando al cúmulo gravitacional de bariones y materia oscura fría (no bariónica). Su gravitación resulta en la aceleración actual del universo: $\ddot{a}(t_0) > 0$. En una primera aproximación, este tipo de materia puede ser descrita mediante una constante en el término Λ de las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, este término también puede ser variable en el tiempo cosmológico. Esto puede ser determinado de datos observacionales. En particular, si se usa un modelo simple en donde Λ es variable, llamado *quintaesencia* [13], similar al de un escenario inflacionario en el universo temprano, descrito en la sección 1.8, llamado un campo escalar efectivo Φ con una autointeracción potencial $V(\Phi)$ *mínimamente acoplado* a la gravedad, entonces la forma funcional de $V(\Phi)$ puede determinarse de *funciones cosmológicas*: tanto la distancia lumínica $d_L(z)$ o de la perturbación de densidad lineal en la componente de *polvo* de materia en el universo $\delta_m(z)$ para un radio comóvil fijo suave. Sin embargo, este modelo no puede ser explicado por ninguna observación futura, en particular, para cualquier forma funcional de $d_L(z)$. Esto sucede debido a que un término variable Λ en este modelo debe satisfacer la condición de energía-débil $\rho_\Lambda + p_\Lambda \geq 0$. En términos de la cantidad observable $H(z) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$ describiendo la evolución del universo en expansión en épocas recientes, se debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$$\frac{dH^2(z)}{dz} \geq 3\Omega_{m,h}H_h^2(1+z^2). \quad (3.18)$$

Aquí, $H_h = H(z=0)$ es la constante de Hubble evaluada hoy en día y $\Omega_{m,h}$ es la densidad de energía en forma de polvo (CDM + bariones) componente de materia en términos de la densidad crítica $\rho_{crit} = 3H_h^2/8\pi G$. Nótese que la desigualdad se satura cuando el término Λ es una constante, determinado a través de H . De los datos de observaciones actuales no es claro si se cumple la desigualdad (3.18). De hecho hay indicios de que sucede lo contrario: Un intento de reconstruir $V(\Phi)$ de los datos de las supernovas y ajustar a los datos para un modelo con una ecuación lineal de estado del término Λ , $p_\Lambda = w\rho_\Lambda$, con -1 , muestra la posibilidad de la violación de la desigualdad (3.18), aunque está restringido, no está completamente excluida. Por lo que es natural e importante el considerar un término Λ variable en una clase más general de teorías de gravitación donde no se da la condición (3.18).

3.4. Modelo de quintaesencia

Como se ha visto la expansión acelerada del universo requiere de una nueva componente en la composición de éste. Un elemento que se suma a los ya establecidos: bariones, fotones, neutrinos y materia oscura. Este nuevo elemento se le ha llamado quintaesencia y genéricamente se considera como el generador de la *energía oscura* asociado a algún campo escalar Q .

Por otra parte una de las motivaciones para proponer el modelo de quintaesencia es para explicar el porqué la densidad ρ_Q y la densidad de materia-energía deben ser comparables actualmente. Primero debe tenerse en cuenta que a través de la evolución del universo, estas dos últimas densidades disminuyeron de diferente manera por lo que aparecen condiciones en el universo temprano para obtener el valor de las densidades en la actualidad. Esto es lo que se ha llamado el *problema de la coincidencia*.

La quintaesencia, Q provoca una componente de presión negativa variable en el tiempo y en el espacio. Se distingue de la constante Λ en que es dinámica: la energía de quintaesencia y la presión varían en el tiempo y es inhomogénea en el tiempo y en el espacio. Un ejemplo es un campo escalar de rodamiento lento a través de un potencial, similarmente al inflatón en la cosmología inflacionaria. A diferencia de Λ , el *campo escalar dinámico* está en concordancia con fluctuaciones para longitudes de onda grandes las cuales están reflejadas en la RCF y en la distribución de materia a gran escala, discutidas en las secciones 2.4 y 2.5. Por otra parte los modelos de quintaesencia principalmente resuelven el problema de *ajuste fino* debido a la existencia de soluciones *tracking*, las cuales son soluciones atractoras de las ecuaciones de campo permitiendo condiciones iniciales del campo escalar que varíen por alrededor de 150 órdenes de magnitud [42].

3.4.1. Ecuaciones de evolución

La evolución de un campo escalar cósmico se obtiene mediante el siguiente mecanismo. Comenzando con el lagrangiano de un campo escalar autointeractuante, el campo se separa en una porción homogénea Q y una perturbación inhomogénea δQ . Las ecuaciones de movimiento para el campo en una expansión FRW del espacio-tiempo que se obtienen son [12]:

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu Q \partial^\mu Q - V(Q) \quad \rightarrow \quad Q'' + 2\frac{a'}{a}Q' = -V_{,Q}. \quad (3.19)$$

acoplados mínimamente a la teoría de la RG. Se necesita especificar un potencial para la evolución de las ecuaciones. Se definen las densidades de energía y presión, análogas a las ecuaciones (1.66) y (1.67):

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{Q}^2 + V, \quad p = \frac{1}{2}\dot{Q}^2 - V \quad (3.20)$$

Ahora, al considerar una ecuación de estado barotrópica se obtiene

$$w = \frac{p}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}\dot{Q}^2 + V}{\frac{1}{2}\dot{Q}^2 - V} \quad (3.21)$$

Así es que un potencial de energía dominado por un campo escalar dará como resultado una ecuación de estado $w < 0$. Recordemos que para obtener una expansión acelerada se requiere que $w < -1/3$, ver ecuación 1.62. Una formulación equivalente del campo escalar se da para especificar la evolución de la ecuación de estado como una función del factor de escala, (a).

3.5. Soluciones genéricas de quintaesencia

Asumiendo un potencial $V(Q)$, en términos del cual la ecuación de campo Q está dada por:

$$\ddot{Q} + 3H\dot{Q} + \frac{dV}{dQ} = 0, \quad (3.22)$$

donde el punto denota derivada temporal, la densidad del campo escalar es

$$\rho_Q = \frac{1}{2}\dot{Q}^2 + V(Q) \quad (3.23)$$

De acuerdo a *la ecuación de estado* definida en el capítulo 1, y utilizando la condición de conservación de materia-energía se obtienen:

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0 \quad (3.24)$$

$$\dot{\rho}_p + 3H\rho_p = 0 \quad (3.25)$$

para un universo dominado por la radiación y por polvo, respectivamente.

Para obtener un adecuado modelo de quintaesencia, se necesita un tipo de solución particular de Q . Lo más importante es la suposición de que ρ_Q decrezca mucho más lento que la densidad ordinaria de energía, la cual decrece como $\rho_r, \rho_p \sim t^{-2}$. Mientras que ρ_Q sea mucho más pequeña que ρ_r o ρ_d , el universo se expandirá como una potencia del tiempo t . Si se encuentran tales condiciones, ρ_Q , la cual comienza en un valor inicial, en $z < 1$, mucho más pequeño que el valor de densidad de materia ordinaria, será atrapado por este último, el cual es como una constante Λ en alguna extensión, y de ahí causando una aceleración adicional. Este mecanismo (comportamiento) regularmente se conoce como “tracking”. El comportamiento decreciente de ρ_Q puede pensarse como una implementación de la idea de una constante cosmológica decreciente.

Este comportamiento atractor debe haber disminuído en el pasado, y así no afectar a la nucleosíntesis ni a la formación de estructuras durante las eras dominadas por la radiación y por el polvo. Esto asegura que un universo acelerado en tiempos tardíos es genérico, resolviéndo así uno de los problemas de ajuste fino, de las condiciones iniciales particulares del campo de quintaesencia.

Se han examinado en la literatura diversos tipos de potenciales del tipo exponencial y potencias negativas [7]. A continuación se describe el modelo en un potencial de potencia negativa dado por [21]:

$$V(Q) = \mu^{n+4}Q^{-n} \quad (3.26)$$

en donde μ es una escala de masa típica del potencial.

En las épocas dominadas por la radiación o por el polvo, se encuentra una solución analítica para el campo escalar:

$$Q = \left(\frac{n(n+2)^2}{G(n)} \right)^{1/(n+2)} \mu^{(n+4)/(n+2)} t^{2/(n+2)}, \quad (3.27)$$

por lo que

$$\rho_Q = [n(n+2)^2]^{-n/(n+2)} G(n)^{-2/(n+2)} [2n + G(n)] \mu^{2(n+4)/(n+2)} t^{-2n/(n+2)}, \quad (3.28)$$

en donde $G(n)$ es una constante adimensional definida como:

$$G(n) = \begin{cases} n + 6, & \text{para la época dominada por la radiación,} \\ 2(n + 4), & \text{para la época dominada por el polvo.} \end{cases} \quad (3.29)$$

De la ecuación (3.28) se sigue que el comportamiento buscado para ρ_Q se obtiene si

$$n > 0, \quad (3.30)$$

lo que implica que el potencial necesario es de hecho una potencia negativa del campo de quintaesencia Q . Se puede mostrar que la solución (3.27) es un atractor. Usando esta solución, se encuentra que la evolución del parámetro de densidad del campo escalar

$$\Omega_Q \sim \begin{cases} a^{8/(n+2)}, & \text{para la época dominada por la radiación,} \\ a^{6/(n+2)}, & \text{para la época dominada por el polvo.} \end{cases} \quad (3.31)$$

Para cualquier estado inicial, el campo de fondo se desarrollará dentro de esta solución atractiva. Si el valor inicial de Ω_Q es mucho menor que 1, este se incrementará en el tiempo de acuerdo a la solución atractiva.

De esta manera de la ecuación (3.28) se obtiene que:

$$\rho_Q \sim \begin{cases} a^{-4n/(n+2)}, & \text{para la época dominada por radiación,} \\ a^{-3n/(n+2)}, & \text{para la época dominada por el polvo.} \end{cases} \quad (3.32)$$

Como regularmente es establecido, ρ_Q disminuye proporcionalmente a una potencia negativa del factor de escala, con un exponente mayor que -4 ó -3 para las épocas dominadas por radiación y el polvo, respectivamente.

A continuación se evalúa el parámetro de densidad del campo escalar de manera más precisa. Debido a que las dos soluciones atractivas en cada época

son independientes una de otra, se espera una discrepancia en la densidad de energía del campo escalar en el momento en el que el universo cambia de la época dominada por la radiación a la dominada por el polvo. Sin embargo, la diferencia en ρ_Q en cualquier época aparece en el factor de $G(n)$. Además se puede revisar que la razón del factor para la época dominada por la radiación entre la dominada por el polvo varía sólo de 0.5 a 0.75 para cualquier valor de n , donde $0 < n < \infty$. Entonces se sigue que sólo hay una pequeña diferencia entre las densidades de energía de las dos soluciones atractoras en el momento de la transición de la época dominada por la radiación a la dominada por el polvo. De esta manera se estima el parámetro de densidad sobre la base de una solución analítica, aunque sea necesario un cálculo numérico para conocer como es que este atractor es alcanzado.

La solución atractora en la era dominada por el polvo es:

$$\Omega_Q = \frac{3}{4} \left(\frac{n(n+2)^2}{2(n+4)} \right)^{-n/(n+2)} \mu^{2(n+4)/(n+2)} t_h^{4/(n+2)}, \quad (3.33)$$

en donde t_h es el tiempo actual.

Ajustando el valor observado de la energía oscura actualmente se requiere fijar los valores de μ_{obs} , dados por, en términos de la masa de Planck:

$$\mu_{obs} \sim \begin{cases} 6,25 \times 10^{-18}, & n = 3, \\ 8,75 \times 10^{-16}, & n = 4, \\ 40,6 \times 10^{-14}, & n = 5. \end{cases} \quad (3.34)$$

Esto parece ajustar μ de manera fina. Sin embargo, la escala de masa se encuentra cercana la escala de energía electrodébil. Esta observación sugiere que el valor de μ puede relacionarse a algún tipo de transición de fase como una condensación de fermiones. Si el valor obtenido en esta forma es diferente al valor de μ_{obs} arriba, entonces se tiene un universo acelerado antes o después que en la actualidad.

El tamaño de la escala de μ sugiere que el origen de esta constante decreciente se encuentra entre dos tipos, la energía primordial y la energía de vacío. La condensación de fermiones, como se consideró en el origen de μ , viene de efectos cuánticos, sin embargo el resultado final depende sólo de un objeto clásico, sugiriendo una similitud con el origen primordial.

Desde un punto de vista físico, el potencial de potencia negativa debe haber ocurrido en algún momento después del tiempo de Planck. La solución (3.27) puede extrapolarse para cualquier tiempo anterior desde un punto de vista matemático. En otras palabras, el potencial de potencia negativa falla al confrontar la primera fase del problema de la constante cosmológica en un sentido convencional, es decir, cómo es que Λ pueda ser mucho menor que M_{Pl}^4 . Se podría tomar esto como una indicación para una masa más pequeña en la unificación, como es sugerido por la cosmología de branas.

En la figura 3.1 se muestran los resultados de cálculos numéricos. La gráfica muestra que dadas cualquiera condiciones iniciales que satisfagan la dominación de radiación debe desarrollarse dentro de la solución atractora, dando

como resultado un universo acelerado en la actualidad si se usa alguno de los valores de μ .

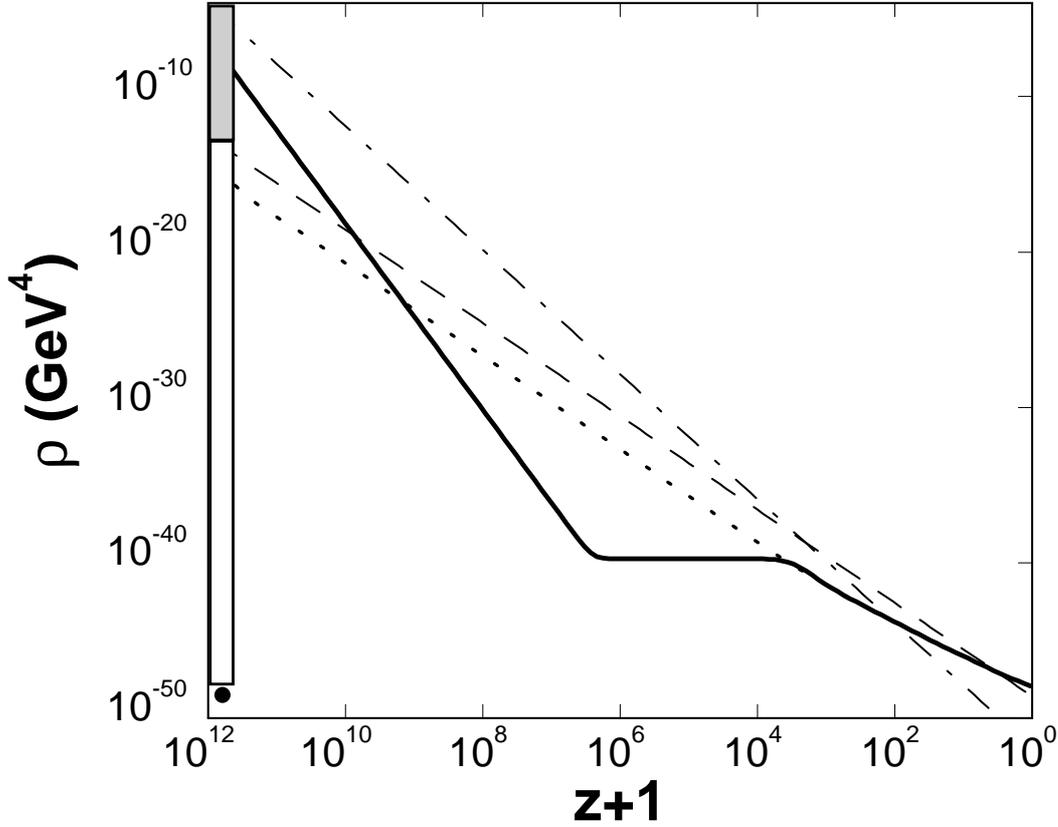


Figura 3.1: Evolución temporal de un campo tracker con $n=6$ (línea sólida). La evolución track de la solución atractora corresponde a la línea punteada. La líneas cortada-punteada y la cortada corresponden para los fluidos de radiación y polvo, respectivamente [47].

En la gráfica 3.2, se muestra la evolución temporal de la ecuación de estado del campo escalar Q , dada por la ecuación 3.21. De esta gráfica se encuentra que en la solución atractora anterior existe un término cinético dominante seguido de una fase de *transición*, teniendo el comportamiento de la gráfica, la cual finaliza para un tiempo grande. Esta es la razón por la cual se obtiene un buen modelo de quintaesencia. En la época dominada por el término cinético, la ecuación de estado de Q es justa aquella para un “stiff” de materia ($p=\rho$), resultando que ρ_Q decae como a^{-6} , que es mucho mayor que el decrecimiento de la radiación (a^{-4}). Entonces el parámetro de densidad para el campo escalar decrece hasta que la solución atractora es alcanzada.

Podría parecer atractivo si se pudiera comenzar con una condición de equipartición, i.e. $\rho_Q \sim \rho_r/g$, en donde g es un grado de libertad de las partículas. Sin embargo, la mayor parte de la energía de Q está almacenada

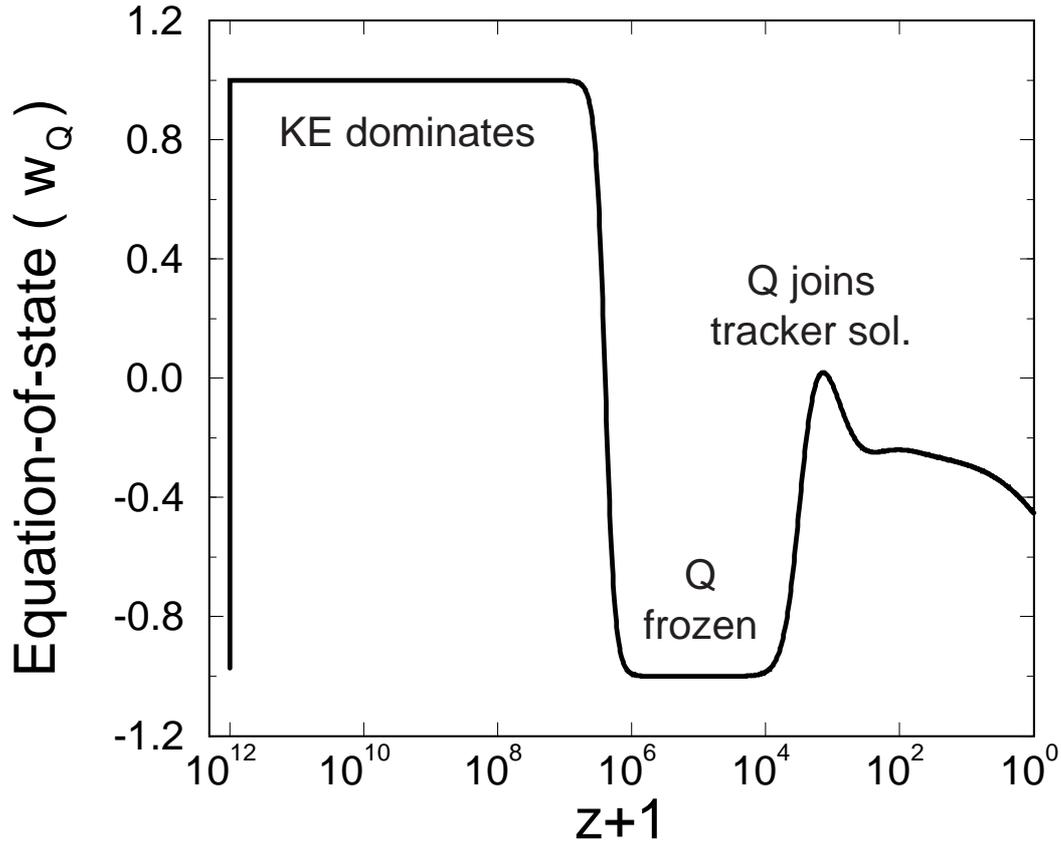


Figura 3.2: Una gráfica de $w = p_Q/\rho_Q$ vs. el corrimiento al rojo. w decae rápidamente desde $+1$ y Q empieza a ser dominada por energía cinética. El campo se congela y w decae hasta -1 . Finalmente, cuando Q satisface la solución tracker, w_Q decrece, oscila brevemente y evoluciona dentro del valor tracker [47].

en la energía cinética; la energía potencial, aunque está casi en la misma cantidad de esta como de la energía cinética inicial, podría convertirse en energía cinética casi de manera instantánea, debido a que el potencial decae lo suficientemente rápido. La equipartición no necesita ser realizada de manera natural, podría ser, por ejemplo, que, aunque cualquiera condiciones iniciales permitan un universo acelerado actualmente, la energía inicial del campo escalar es mucho menor que la energía de radiación si se comienza con la condición de equipartición natural.

En general se puede concluir que la idea de la quintaesencia provee un escenario razonablemente exitoso para una constante cosmológica decreciente. La naturaleza “tracker” de la solución explica de manera natural el porque un campo escalar domina para tiempos tardíos y sin necesidad de imponer condiciones iniciales ajustadas de manera fina.

Capítulo 4

Teoría de gravedad inducida y la aceleración cósmica actual

4.1. Gravedad inducida

En este capítulo se considera una teoría escalar-tensorial, la cual acopla la gravedad (R) con campos de Higgs (ϕ) de manera no-mínima ($\phi^2 R$). De acuerdo al mecanismo de Higgs, el campo evoluciona a su valor de mínima energía, y con esto da lugar a la masa de las partículas elementales. En nuestro caso este Higgs producirá la masa de un bosón, cuya naturaleza es todavía desconocida. Es decir, se utilizará una teoría con mecanismo de Higgs, del tipo del modelo estándar de partículas. Al generarse la masa del bosón, acoplada a la gravedad, el campo escalar evoluciona a una constante, y simultáneamente el término de acoplamiento no-mínimo también se hace constante, generando la teoría de RG. Es por esto que a esta teoría se le conoce con el nombre de gravedad inducida, debido a que la RG es obtenida a través de un mecanismo tipo Higgs utilizando una teoría escalar tensorial.

4.1.1. La teoría y sus ecuaciones de campo

El Lagrangiano está dado por:

$$\mathcal{L} = \left[\frac{\alpha}{16\pi} \phi^\dagger \phi R + \frac{1}{2} \phi^\dagger_{;\mu} \phi^{;\mu} - V(\phi^\dagger \phi) + L_M \right] \sqrt{-g}, \quad (4.1)$$

donde ϕ es el campo escalar tipo Higgs y α es un parámetro adimensional por determinar.

El potencial de Higgs se toma como:

$$V(\phi) = \frac{\lambda_a}{24} \left(|\phi|^2 + 6 \frac{\mu^2}{\lambda_a} \right)^2 \quad (4.2)$$

en donde se ha agregado un término constante, $V(0) = \frac{3\mu^4}{2\lambda_a}$, para evitar una constante cosmológica negativa después del rompimiento de simetría. El estado

base de Higgs, v , está dado por

$$v^2 = -\frac{6\mu^2}{\lambda_a} \quad (4.3)$$

con $V(v) = 0$, en donde λ_a es una constante real adimensional, mientras que $\mu^2 < 0$.

En la teoría de gravedad inducida aplicada a la cosmología, el potencial $V(\phi)$ juega el papel de una “función” cosmológica durante el periodo en el cual ϕ pasa de su estado inicial a su estado base, v , cuyo valor determina la constante de gravitación Newtoniana:

$$G = \frac{1}{\alpha v^2}, \quad (4.4)$$

a través de la cual también se determina el valor de α .

De esta manera, la constante gravitacional de Newton está relacionada con la masa de los bosones de norma (M_b), de la siguiente manera:

$$M_b = \sqrt{\pi} g v \quad (4.5)$$

donde g es la constante de acoplamiento de la teoría fundamental a considerar; por ejemplo, el modelo SU(5) o el modelo estándar de partículas, o algún otro modelo.

Como consecuencia de las dos últimas ecuaciones el parámetro α está determinado por

$$\alpha = 2\pi \left(g \frac{M_{Pl}}{M_b} \right)^2 \quad (4.6)$$

en donde $M_{Pl} \equiv 1/\sqrt{G} = 10^{19}$ GeV es la masa de Planck. Si, por ejemplo, consideramos el Higgs del modelo estándar, tenemos el bosón W, tal que $M_b = M_W = 80$ GeV y $g = 0,18$, por lo tanto $\alpha \approx 10^{33}$.

De la ecuación (4.1) se pueden calcular las ecuaciones de la gravitación, obteniéndose:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \frac{8\pi V(\phi^\dagger \phi)}{\alpha \phi^\dagger \phi} g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi}{\alpha \phi^\dagger \phi} T_{\mu\nu} - \frac{8\pi}{\alpha \phi^\dagger \phi} \left[\phi^\dagger_{\parallel\mu} \phi_{\parallel\nu} - \frac{1}{2} \phi^\dagger_{\parallel\lambda} \phi^{\parallel\lambda} g_{\mu\nu} \right] - \frac{1}{\phi^\dagger \phi} \left[(\phi^\dagger \phi)_{\parallel\mu\parallel\nu} - (\phi^\dagger \phi)^{\parallel\lambda}_{\parallel\lambda} g_{\mu\nu} \right], \quad (4.7)$$

los paréntesis en los subíndices representan la suma simétrica de tensor¹. Por otra parte la ecuación para el campo escalar es:

$$\phi^{\parallel\lambda}_{\parallel\lambda} + \frac{\delta V}{\delta \phi^\dagger} - \frac{\alpha}{8\pi} R \phi = 2 \frac{\delta L_M}{\delta \phi^\dagger}. \quad (4.8)$$

¹ $\phi_{\parallel a} \phi_{\parallel b} = \frac{1}{2}(\phi_{\parallel a} \phi_{\parallel b} + \phi_{\parallel b} \phi_{\parallel a})$. La derivada covariante \parallel incluye la derivada covariante gravitacional (\parallel) más la componente de los campos de norma de la teoría de partículas en cuestión [9].

Para analizar el rompimiento de simetría se introduce una nueva variable real (χ), para evitar tratar modelos con campos escalares matriciales, ya que ϕ es genéricamente una matriz. De esta manera, definimos

$$\phi \equiv v\sqrt{1+2\chi}N, \quad \phi^\dagger\phi = v^2(1+2\chi)N^\dagger N = v^2(1+2\chi), \quad N = \text{cte}, \quad (4.9)$$

donde la variable χ describe el campo de Higgs excitado alrededor de su valor de equilibrio, v . N es una matriz constante. Con esta definición de campo escalar tenemos que el potencial toma una forma cuadrática simple:

$$V(\chi) = \frac{\lambda_a v^4}{6} \chi^2 = \left(1 + \frac{4\pi}{3\alpha}\right) \frac{3}{8\pi G} M_H^2 \chi^2, \quad (4.10)$$

el cual se anula en su estado de mínima energía, $V(\chi = 0) = 0$. Nótese que $V(\chi) \sim M_{Pl}^2 M_H^2 \chi^2$; este hecho se debe a la relación (4.4), que es necesaria para obtener la teoría de RG una vez que ocurra el rompimiento de simetría. Así, de la Eq. (4.7) y (4.4) se recupera RG para el estado base, en el cual $\chi, \dot{\chi} \sim 0$,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -8\pi G \tilde{T}_{\mu\nu} \quad (4.11)$$

donde \tilde{T} es el tensor de energía-momento efectivo de la teoría, el cual contiene un término de bosones de norma; los detalles se encuentran en [9].

El término de la constante de Newton es ahora variable y está dado por la función:

$$G(\chi) = \frac{1}{\alpha v^2} \frac{1}{1+2\chi} \quad (4.12)$$

con la constante de Newton dada por $G(\chi = 0) = G$, dada por la ecuación (4.4).

4.2. Ecuaciones cosmológicas

Utilizando la métrica de FRW en las ecuaciones de campo anteriores se obtienen, para las ecuaciones de la gravedad:

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{1}{1+2\chi} \left(\frac{8\pi G}{3} [\rho + V(\chi)] - 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\chi} + \frac{4\pi}{3\alpha} \frac{\dot{\chi}^2}{1+2\chi} \right) \quad (4.13)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{1}{1+2\chi} \left(8\pi G(-p + V(\chi)) - 2\ddot{\chi} - 4\frac{\dot{a}}{a}\dot{\chi} - \frac{4\pi}{\alpha} \frac{\dot{\chi}^2}{1+2\chi} \right) \quad (4.14)$$

Por otro lado, la ecuación del campo escalar es diferente para los diferentes campos de Higgs, dependiendo de la teoría de partículas que se emplee. Se introduce un parámetro adimensional, $\tilde{\mu}$, el cual es una medida del acoplamiento del campo de Higgs con la parte fermiónica de la teoría fundamental. Por ejemplo, la teoría de gravedad inducida con el campo de Higgs del modelo estándar

implica que $\tilde{\mu} = 1$; mientras que para el campo de Higgs en el modelo SU(5) de Gran Unificación se tiene que $\tilde{\mu} = 0$, [10, 11]. Para otras teorías este parámetro podría ser diferente.

La ecuación para el campo de Higgs es:

$$\ddot{\chi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\chi} + M_H^2\chi = \frac{1 - \tilde{\mu}}{\left(1 + \frac{4\pi}{3\alpha}\right)} \frac{4\pi G}{3}(1 - 3w)\rho, \quad (4.15)$$

mientras que de la conservación de energía se obtiene:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + w)\rho = \tilde{\mu} \frac{\dot{\chi}}{1 + 2\chi}(1 - 3w)\rho, \quad (4.16)$$

la cual tiene un término fuente, debido al campo Higgs. Integrando la ecuación anterior se obtiene:

$$\rho a^{3(1+w)} = M_W(1 + 2\chi)^{\frac{\tilde{\mu}}{2}(1-3w)}. \quad (4.17)$$

donde M_W es la constante de integración, Si $w = 0$, M_W es la suma total de las partículas presentes.

Las ecuaciones anteriores no son todas independientes, y resulta más conveniente combinarlas para obtener la siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} = & \frac{1}{1 + 2\chi} \left[-\frac{4\pi G}{3} \left(\left[1 + \frac{1 - \tilde{\mu}}{\left(1 + \frac{4\pi}{3\alpha}\right)} \right] \rho + \left[1 - \frac{1 - \tilde{\mu}}{\left(1 + \frac{4\pi}{3\alpha}\right)} \right] 3p \right) \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{4\pi}{3\alpha} \right) M_H^2 \chi^2 + M_H^2 \chi + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\chi} - \frac{8\pi}{3\alpha} \frac{\dot{\chi}^2}{1 + 2\chi} \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Para realizar la integración numérica vamos a utilizar esta última ecuación junto con la ecuación (4.15), en donde ρ estará dada por la ecuación (4.17) y $p = w\rho$.

4.3. Constricción de parámetros

Para estar en condiciones de integrar las ecuaciones cosmológicas arriba mencionadas necesitamos determinar las condiciones iniciales de integración y los parámetros cosmológicos. De las ecuaciones anteriores se infiere que es necesario especificar: ρ_0 , a_0 , \dot{a}_0 , χ_0 , $\dot{\chi}_0$. Además, también se requiere de los siguientes parámetros cosmológicos: $\tilde{\mu}$, k , w , M_H , α . Estas condiciones y parámetros se determinarán a continuación.

Dado que estamos interesados en la dinámica del universo reciente, integraremos las ecuaciones diferenciales a partir de la época de la última dispersión, también llamada de desacoplamiento (dec). En este caso, de la tabla 1 del capítulo 2 se tiene que $z_{dec} = 1089$, $t_{dec} = 379 \text{ kyr} = 1,19 \times 10^{13} \text{ s}$, y dado que $1 + z_{dec} = a_h/a_{dec}$, entonces $a_{dec} = a_h/1090 = 10^{25} \text{ cm}$; el subíndice “h” denota el valor de hoy en día. También sabemos que $\rho_{dec} = \rho_h \left(\frac{a_h}{a_{dec}} \right)^3$, y con el valor

actual de la densidad de materia oscura fría $\rho_h = 2,6 \times 10^{-28} g/cm^3$, tenemos que $\rho_{dec} = 3,36 \times 10^{-19} g/cm^3$.

Analicemos ahora el campo escalar. Su valor inicial será considerado arbitrariamente como $\chi_{dec} = 1$, ya que estamos asumiendo que en ese momento el campo evoluciona desde algún valor diferente de su mínimo de energía. Este valor es tal que $\dot{\chi}_{dec} = 0$.

Finalmente, el valor de \dot{a}_{dec} lo obtenemos de la ecuación (4.13). Así, tenemos que $\dot{a}_{dec} \approx a_{dec} \sqrt{8\pi G \rho_{dec}/3} = 4,33 \times 10^{12} cm/s$. Estos valores iniciales serán identificados con el subíndice "0". Las cantidades \ddot{a}_0 y $\ddot{\chi}_0$ se determinarán mediante las ecuaciones (4.15) y (4.18).

Los cálculos numéricos también requieren especificar los parámetros cosmológicos arriba mencionados. El valor $\tilde{\mu}$ será tomado como 1. Es decir, se tomará un campo de Higgs con acoplamiento similar al que resulta de la teoría de gravedad inducida con el modelo estándar de partículas.

También se asumirá un universo con curvatura plana, $k = 0$, tal como se desprende de los datos analizados en el capítulo 2 y mostrados en la tabla 1.

En la época del universo desde la superficie de la última dispersión a hoy en día, la materia oscura es tipo polvo, según lo explicado en el capítulo 1, tal que $w = 0$.

La masa del Higgs, M_H , es un parámetro que debería determinarse por los experimentos de partículas elementales. Dado que hasta el momento no se conoce esta masa, el valor será determinado por la longitud de Compton ($\lambda_C = \hbar/M_H c$) asociada a una escala cosmológica, correspondiente al tamaño del universo cuando $z = 1$. También se harán variaciones de esta longitud para estudiar su efecto en la dinámica cosmológica. Escogeremos estos valores ya que corresponden a la época del universo cuando aparece la expansión acelerada actual. Antes de esta época el campo escalar va a jugar un papel intrascendente en la dinámica cosmológica, ya que se asume que la materia oscura domina la dinámica. De esta manera $\lambda_C = a_h/(1+z_q) = a_h/2 = 5 \times 10^{27} cm$. El subíndice "q" se refiere a la época en la cual empieza la expansión acelerada, $z_q \approx 1$, mencionado en las secciones 2.4 y 3.3. Por lo tanto, $M_H \approx 4 \times 10^{-31} eV$. Nótese que este valor de la masa es mucho más pequeño que el valor de $10^{-3} eV$ que se obtiene al aplicar la teoría de RG a un campo escalar con masa (M). Es decir, al considerar $H^2 = (8\pi G/3)V = (8\pi/3)M^4/M_{Pl}^2$ y tomando $H^{-1} = 5 \times 10^{27} cm$, se obtiene $M = 10^{-3} eV$.

Por último se toman en cuenta las constricciones del parámetro α . Existen varias situaciones físicas que pueden constreñir este parámetro. Por un lado, están las que tienen que ver con las modificaciones de la teoría a la ley de gravitación universal de Newton. Por otra parte están las modificaciones a la dinámica cosmológica. Primero analizaremos las consecuencias de la teoría de gravedad inducida en el límite Newtoniano, el cual establece que el potencial (U_N) está dado por [19]:

$$U_N = -\frac{GM}{r} \left(1 + \frac{1 - \tilde{\mu}}{3(1 + \frac{4\pi}{3\alpha})} e^{-r/\lambda_C} \right), \quad (4.19)$$

donde se observa que el parámetro de acoplamiento no-mínimo (α) y el potencial (a través de λ_C) modifican la teoría de gravitación de Newton. Sin embargo, para el caso en que $\tilde{\mu} = 1$ esta teoría predice que no existen desviaciones a la gravedad de Newton. Este hecho es sorprendente ya que a pesar de la presencia del campo escalar, su acoplamiento con la materia fermiónica hace que la contribución neta sea nula [19].

Para el caso $\tilde{\mu} \neq 1$ el parámetro α está constreñido, ya que es conocido que a nivel local las desviaciones de la constante de Newton son muy pequeñas, ver por ejemplo [18]. Alternativamente, es posible definir adecuadamente el valor del estado base del campo de Higgs de tal manera que la modificación al potencial Newtoniano sea de la forma

$$U_N = -\frac{GM}{r} \frac{1}{1 + \alpha'} \left(1 + \alpha' e^{-r/\lambda_C}\right), \quad (4.20)$$

donde se incluyó la constante $\alpha' = \frac{1-\tilde{\mu}}{3(1+\frac{4\pi}{3\alpha})}$ para hacer coincidir el potencial gravitacional de esta teoría localmente ($r \ll \lambda_C$) con el de Newton. Si este es el caso, el potencial gravitacional para $r \gg \lambda_C$ se ve modificado por el factor $1/(1 + \alpha')$, el cual cambia la dinámica a grandes escalas. De aquí se tienen constricciones a la constante α . Es decir, se esperan modificaciones a la constante de Newton a escalas del orden de λ_C . El valor menor de λ_C tomado en esta tesis es 10^{25} cm, que corresponde a escalas de megaparsecs.

De acuerdo con [52] modificar la constante de gravitación por un factor ξ , $G' = \xi G$, tiene el efecto de variar la altura de los picos de Doppler, según se muestra en la figura 4.1.

Estas constricciones tienen sentido considerarse ya que el tamaño del universo en la época de la última dispersión es del orden de la λ_C mínima que vamos a considerar en esta tesis.

La relación entre la constante ξ y el parámetro de acoplamiento no-mínimo de la teoría de gravedad inducida es:

$$\alpha = 4\pi \frac{1 - \xi}{4\xi - 3}. \quad (4.21)$$

Las desviaciones de los picos de Doppler permitidas por el rango experimental de las mediciones de WMAP implican que $0,75 \leq \xi \leq 1,74$, lo cual corresponde al rango $-2,4 \leq \alpha \leq \infty$.

Los cálculos anteriores se realizaron sólo variando la constante gravitacional dentro del marco de la teoría de RG. Un estudio más apropiado, considerando una teoría escalar-tensorial tipo Brans-Dicke, ha sido realizado en [34]. En este caso los autores encuentran las desviaciones mostradas en la figura 4.2.

De los datos mostrados en la gráfica se concluye que el primer pico se ve menos afectado que los posteriores y que un valor razonable para su parámetro

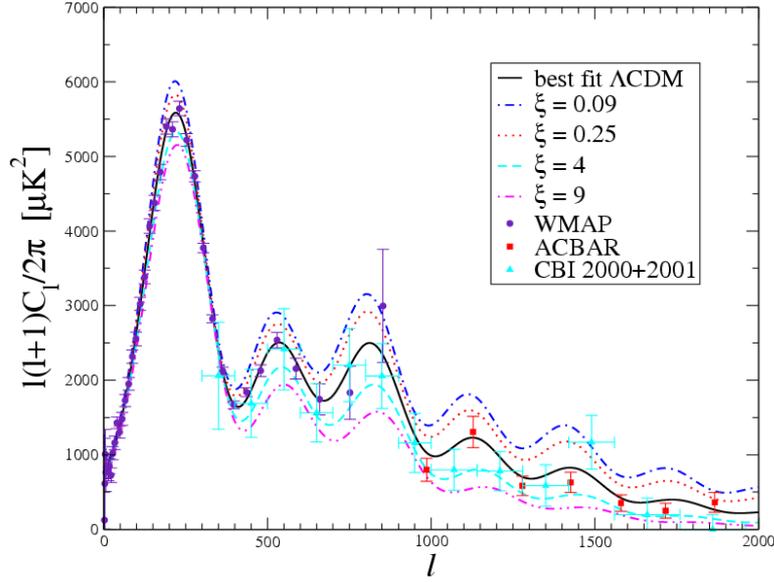


Figura 4.1: Potencia espectral de la RCF al variar ξ . Los picos más altos están más amortiguados cuando ξ aumenta, mientras que la altura del primer pico permanece casi sin cambios.

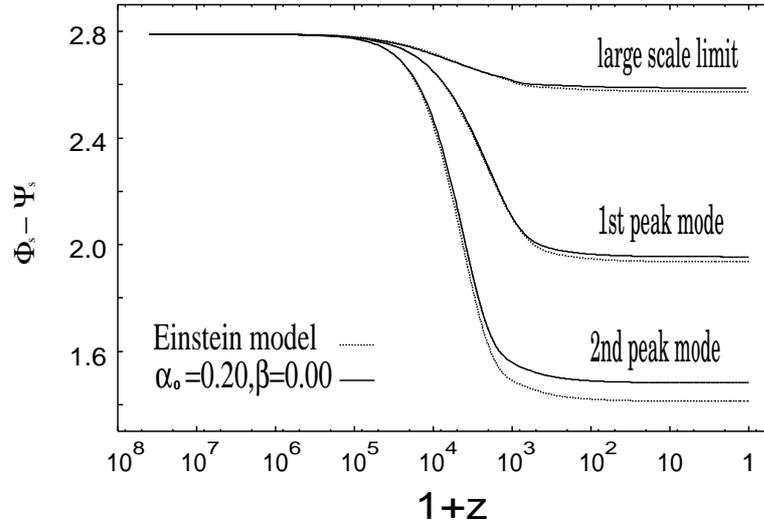


Figura 4.2: La evolución de $\Phi_s - \Psi_s$ en algunas escalas en el modelo de Einstein y de Brans-Dicke con parámetros de SCDM. En nuestro caso el parámetro $\beta = 0$.

$\alpha_0 = 0,2^2$. La relación de este parámetro con nuestro parámetro α es:

$$\alpha = 4\pi \frac{\alpha_0^2}{1 - 3\alpha_0^2}, \quad (4.22)$$

²Donde de manera general se tiene que $2\omega(\phi) + 3 = (\alpha_0^2 - \beta(\phi/\phi_0))^{-1}$. Dado que estamos trabajando dentro de la teoría tipo Brans-Dicke $\omega = cte$, i.e. $\beta = 0$.

lo cual implica que $\alpha = 0,57$, o valores cercanos a éste.

Finalmente existen algunas constricciones provenientes de las desviaciones de la gravedad Newtoniana a escala cosmológica debido a la formación de macroestructuras en el universo (galaxias, cúmulos de galaxias, etc.). En el contexto de teorías escalar-tensoriales se ha estudiado la influencia de los parámetros del campo escalar [44], obteniendo los resultados mostrados en la gráfica 4.3:

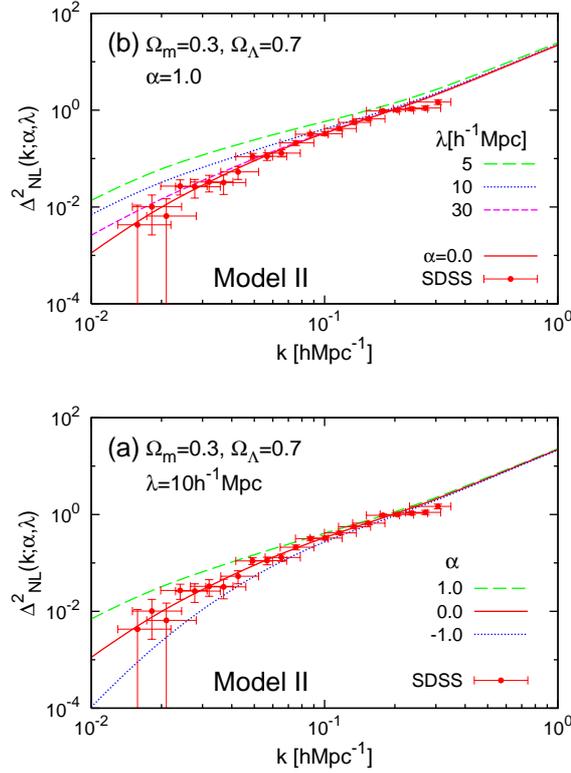


Figura 4.3: Comparación de la potencia espectral entre las predicciones de este modelo y el catálogo de galaxias SDSS; (a) $\alpha = 1$ (línea punteada) y -1 (línea cortada larga) para $\lambda = 10h^{-1}\text{Mpc}$, y (b) $\lambda = 5h^{-1}\text{Mpc}$ (línea cortada larga), 10^{-1}Mpc (línea punteada), y $30h^{-1}\text{Mpc}$ (línea cortada corta) para $\alpha = 1$. Como referencia, el caso Newtoniano ($\alpha = 0$) está graficado en líneas sólidas. Los puntos de los datos con barras de error representan los resultados del catálogo de galaxias SDSS [44].

Los cálculos realizados en [44] implican que valores razonables para el parámetro α (que en este trabajo se denota como α'') está en el intervalo $-1 \leq \alpha'' \leq +1$. La relación de este parámetro α'' con α está dado por:

$$\alpha = -4\pi \frac{\alpha''}{1 + 4\alpha''}, \quad (4.23)$$

lo cual implica que $-4,19 \leq \alpha \leq -2,51$.

Las constricciones para α del análisis anterior son aparentemente dispares, sin embargo un análisis más detallado nos muestra valores compatibles. Veamos: la primera restricción nos dice que $-2,4 \leq \alpha \leq \infty$, la cual proviene de considerar que el campo escalar empezó a influir sustantivamente en la dinámica en la época de la última dispersión, $z \approx 1089$. Por otra parte sabemos que la presencia del campo de quintaesencia se da cuando $z \approx 1$. Si tomamos λ_C igual al tamaño del universo en esa época, a_q , entonces la fórmula (4.20) se aproxima al potencial Newtoniano y en consecuencia no se tendrían constricciones para α . Así es que el intervalo anterior sólo nos puede indicar ciertas tendencias.

Por otro lado, la segunda restricción es $\alpha = 0,57$ o valores cercanos a este. En este caso, la figura 4.2 muestra la evolución de los picos de Doppler sólo para valores de α_0 positivos. Sin embargo los resultados no son comparados con las mediciones. Viendo la tendencia se observa que es posible tomar valores de α_0 también negativos, pero cercanos a la unidad. Esto tendría el efecto de colocar las curvas por debajo del caso Newtoniano, y no por arriba como es en el caso α_0 positivas.

Finalmente, la última restricción $-4,19 \leq \alpha \leq -2,51$ proviene de escalas para λ_C entre $5 - 30h^{-1}\text{Mpc}$. Al tomar valores de λ_C en este rango entonces las constricciones se aplican. En este caso se tomarán valores de λ_C entre 3 y 300 Mpc, por lo cual en algunos casos esta restricción de α es importante. De la figura 4.3 se observa que las curvas teóricas se ajustan mejor a los datos experimentales correspondientes a grandes escalas (k pequeñas) para valores de α'' negativos. Por ejemplo si $\alpha'' = -0,1$, entonces $\alpha = 2,1$, lo que implica que los datos experimentales permiten variar el valor de α en un intervalo más amplio.

En conclusión, los valores de α pueden estar en un rango mayor al deducido de las mediciones anteriores. En concreto se utilizarán valores en el intervalo $-5 \leq \alpha \leq 5$.

4.4. Dinámica cosmológica reciente

A continuación presentamos la evolución del factor de escala (a) y del campo escalar (χ) tomando en cuenta las restricciones y condiciones iniciales obtenidas en la sección 4.3.

En la tabla 4.1 se muestran diferentes valores para los parámetros considerados. A continuación analizamos la dinámica obtenida con estos valores, mostrada en las figuras 4.4-4.10.

Escogimos los valores $\lambda_C = 10^{25}, 10^{26}, 10^{27}\text{cm}$ y hemos escogido un valor de condición inicial para el tamaño del universo $a_{dec} = 10^{25}\text{cm}$. Por lo tanto el valor más pequeño de λ_C coincide con este valor de a_{dec} . El valor para $\lambda_C = 10^{27}\text{cm}$ es un décimo del tamaño actual del universo. A continuación se analiza el comportamiento de las soluciones para valores de $\alpha > 0$ y $\alpha < 0$

Cuadro 4.1: Se muestran los valores para (λ, α) utilizados para resolver las ecuaciones cosmológicas de acuerdo a las observaciones de la sección 4.3.

Longitud de onda de Compton λ_C	Acoplamiento no – mínimo α
10^{25} cm	$-5, -1, -0.1, 0.1, 1, 5$
10^{26} cm	$-5, -1, -0.1, 0.1, 1, 5$
10^{27} cm	$-5, -1, -0.1, 0.1, 1, 5$

- $\alpha > 0$

En las figuras 4.4 (a-c) se muestran valores positivos para α . Para estos modelos se observa un comportamiento tipo $a \propto t^{2/3}$, el cual corresponde a un modelo similar al modelo de polvo, pero en nuestro caso la dinámica es generada por el campo escalar. Este último comportamiento corresponde con lo predicho en [49] para la evolución del universo en presencia de un campo escalar asintóticamente oscilante. En particular, para la gráfica 4.4 a) el mejor ajuste es $a(t) = 1,31 \times 10^{16} t^{2/3}$, cuyo coeficiente corresponde al valor $a_h/t_h^{2/3}$ como lo indica la teoría; ver figura 4.7.

El comportamiento del universo tipo polvo se obtiene como solución asintótica en todos los modelos para valores positivos de α . Para los casos de las gráficas 4.5, 4.6 se realizó la integración numérica hasta $t = 10^{18}$ s, obteniendo este comportamiento asintótico.

Analizaremos ahora el factor de crecimiento del universo, $a_h/a_{rec} = 1 + z_{rec}$. De la figura 4.4 se observa que a medida que α crece, a_h/a_{rec} disminuye. Valores de $\alpha \ll 1$ generan un factor de crecimiento demasiado grande comparado con la expansión del universo desde la época de la recombinación a hoy en día, y no coincide con el valor esperado $z_{rec} = 1089$. Esta misma tendencia se observa en todas las figuras con $\alpha > 0$, ver figuras 4.5 y 4.6.

Además, de la gráfica 4.5 se observa que al aumentar α , el periodo inflacionario se corre a tiempos más pequeños. Se obtiene el mismo comportamiento para las gráficas 4.4 y 4.6.

$$\lambda = 10^{25} \text{ cm.}$$

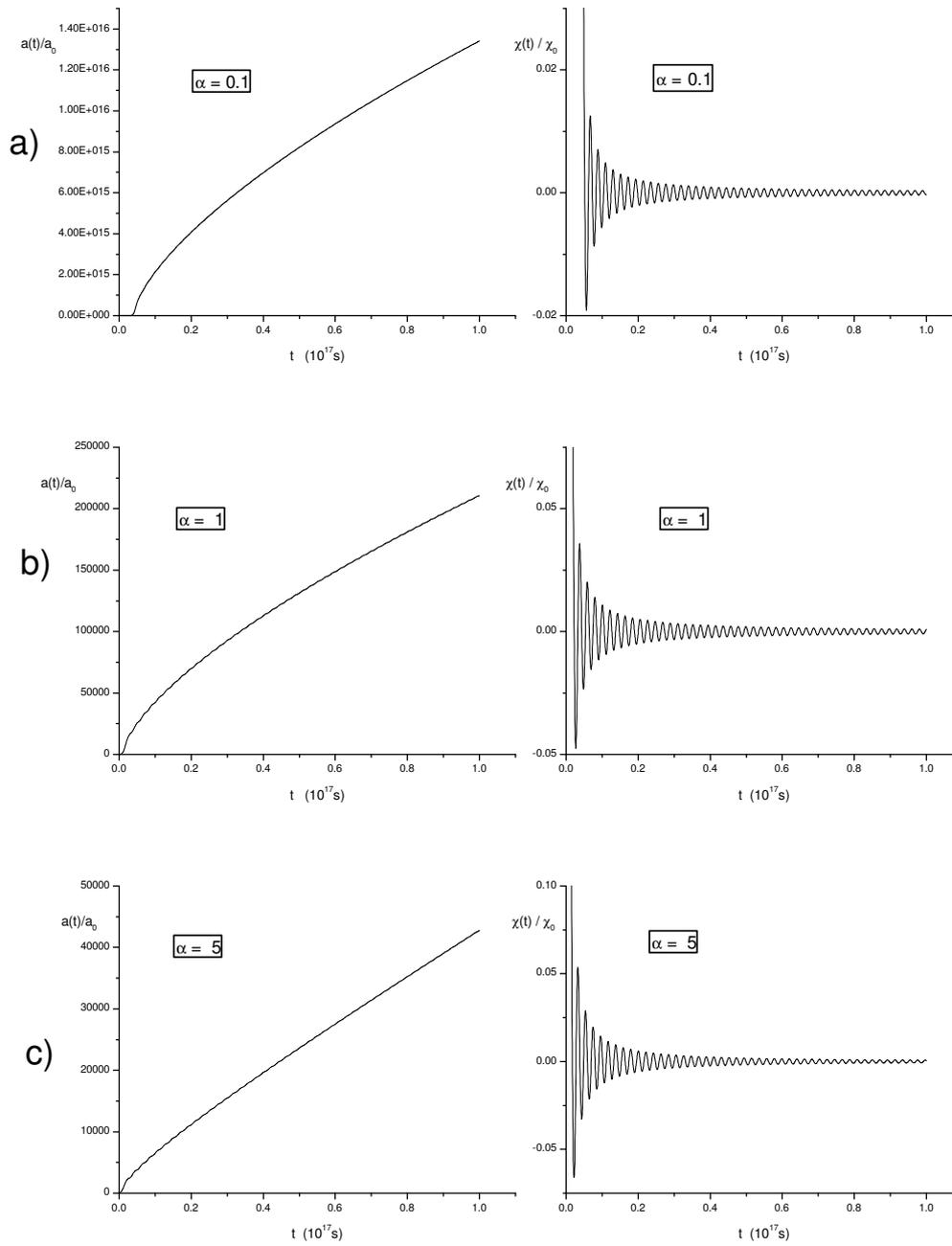


Figura 4.4: Evolución de a y del campo escalar χ para $\lambda = 10^{25}$ cm, con $\alpha = 0.1, 1.0, 5.0$.

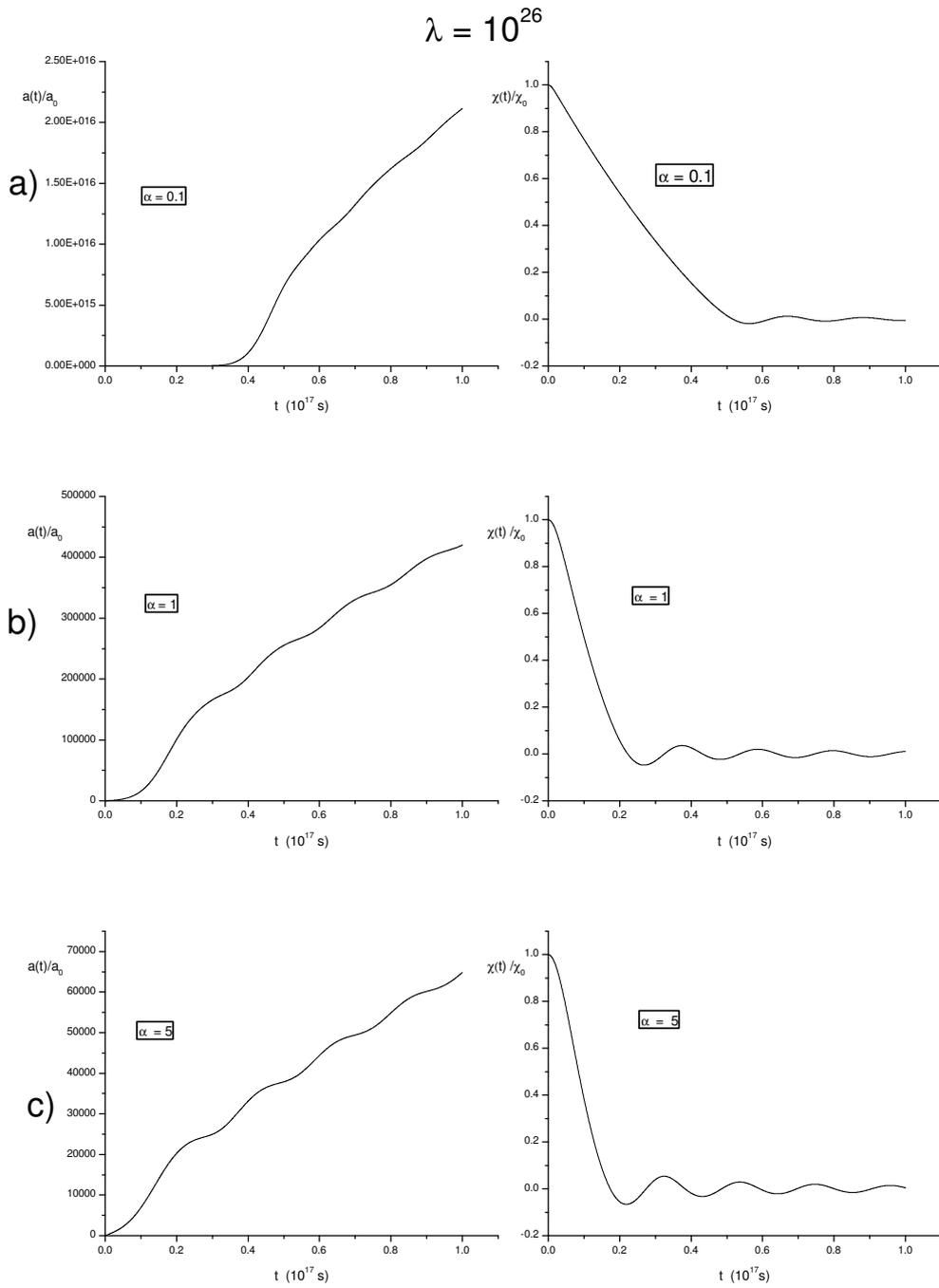


Figura 4.5: Evolución de a y del campo escalar χ para $\lambda = 10^{26}$ cm, con $\alpha = 0.1, 1.0, 5.0$.

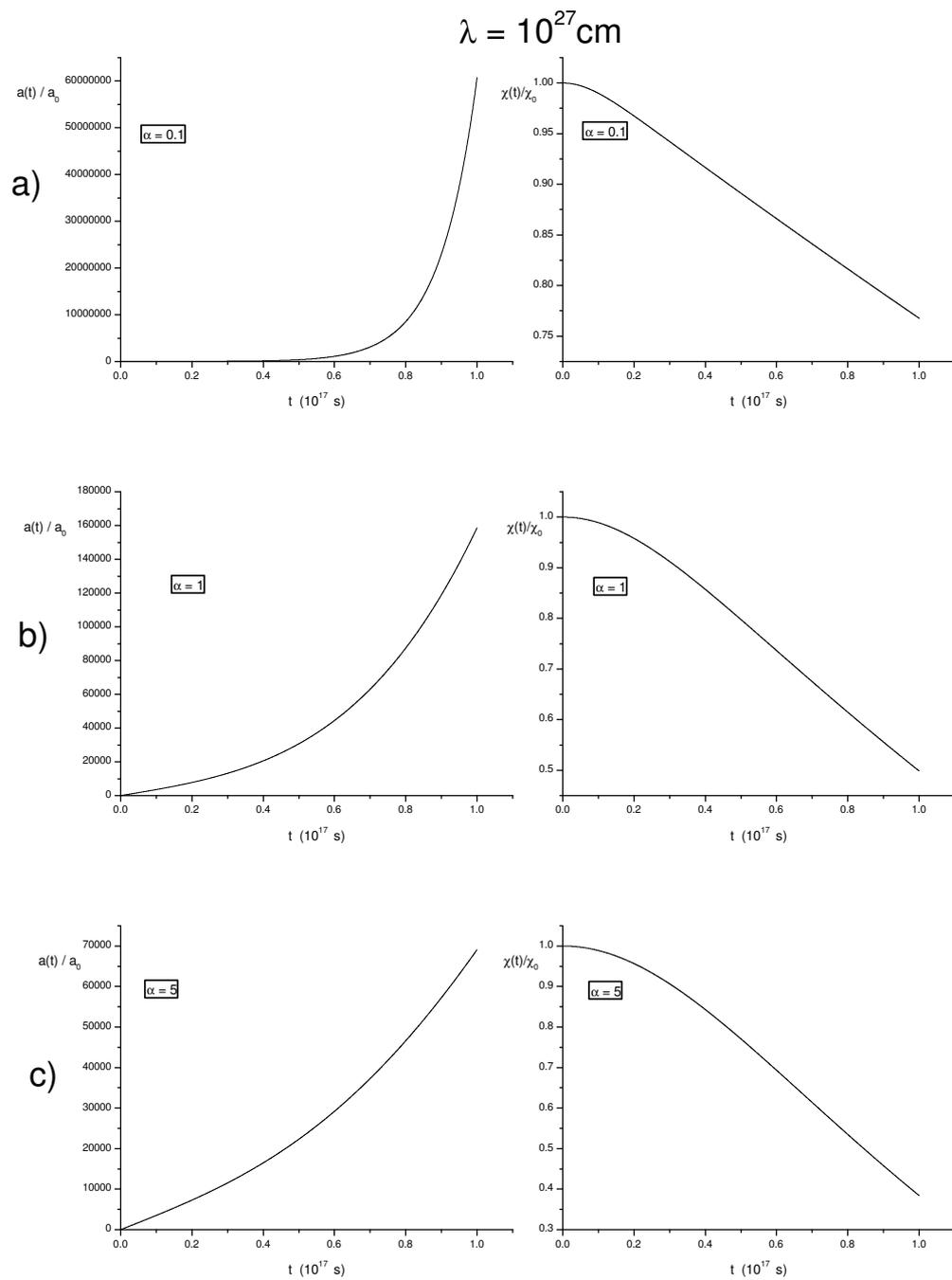


Figura 4.6: Evolución de a y del campo escalar χ para $\lambda = 10^{27} \text{ cm}$, con $\alpha = 0.1, 1.0, 5.0$.

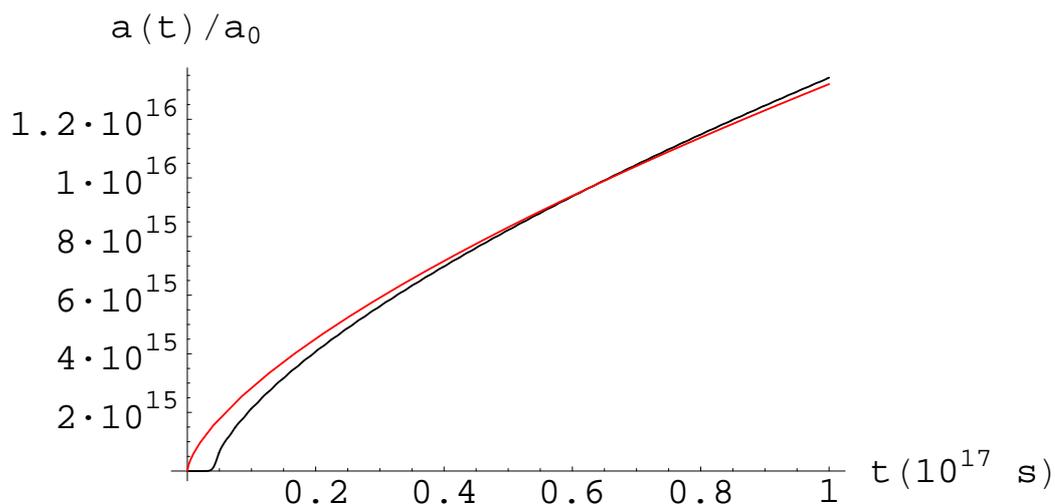


Figura 4.7: Ajuste de la evolución del factor de escala para el caso $\lambda = 10^{25}$ cm y $\alpha = 0,1$, con una curva tipo $a \propto t^{2/3}$.

- $\alpha < 0$

En contraste con el comportamiento anterior, se encontró que para $\alpha < 0$, el factor de escala evoluciona de manera casi lineal, ver figuras 4.8 (a-c). De manera similar, los modelos de las figuras 4.9 y 4.10 muestran un comportamiento asintótico lineal para los valores de α negativos. En este caso también se hicieron los cálculos hasta $t = 10^{18}$ s y se observó este comportamiento asintótico. En conclusión, para los diferentes valores de $\alpha < 0$, dentro del intervalo escogido, no hay grandes variaciones en el factor de crecimiento del universo.

Por otro lado, de la gráfica 4.9 se observa que al tomar valores negativos, $\alpha \rightarrow -5$, el inicio de la inflación se corre hacia tiempos mayores. Se obtiene el mismo comportamiento para las gráficas 4.8 y 4.10.

En las figuras 4.4 y 4.8 se tiene que $a_{rec} \sim \lambda_C$. Por lo tanto, el universo se infla en una etapa muy temprana en su evolución. Por otra parte, el campo escalar χ -gráficas a la derecha- decae a cero, alrededor del cual oscila en su evolución posterior.

En los modelos con λ_C más grandes se obtiene que el período inflacionario o de expansión acelerada se da a tiempos mayores, esto se observa al comparar las figuras 4.4, 4.5 y 4.6, o al comparar 4.8, 4.9 y 4.10.

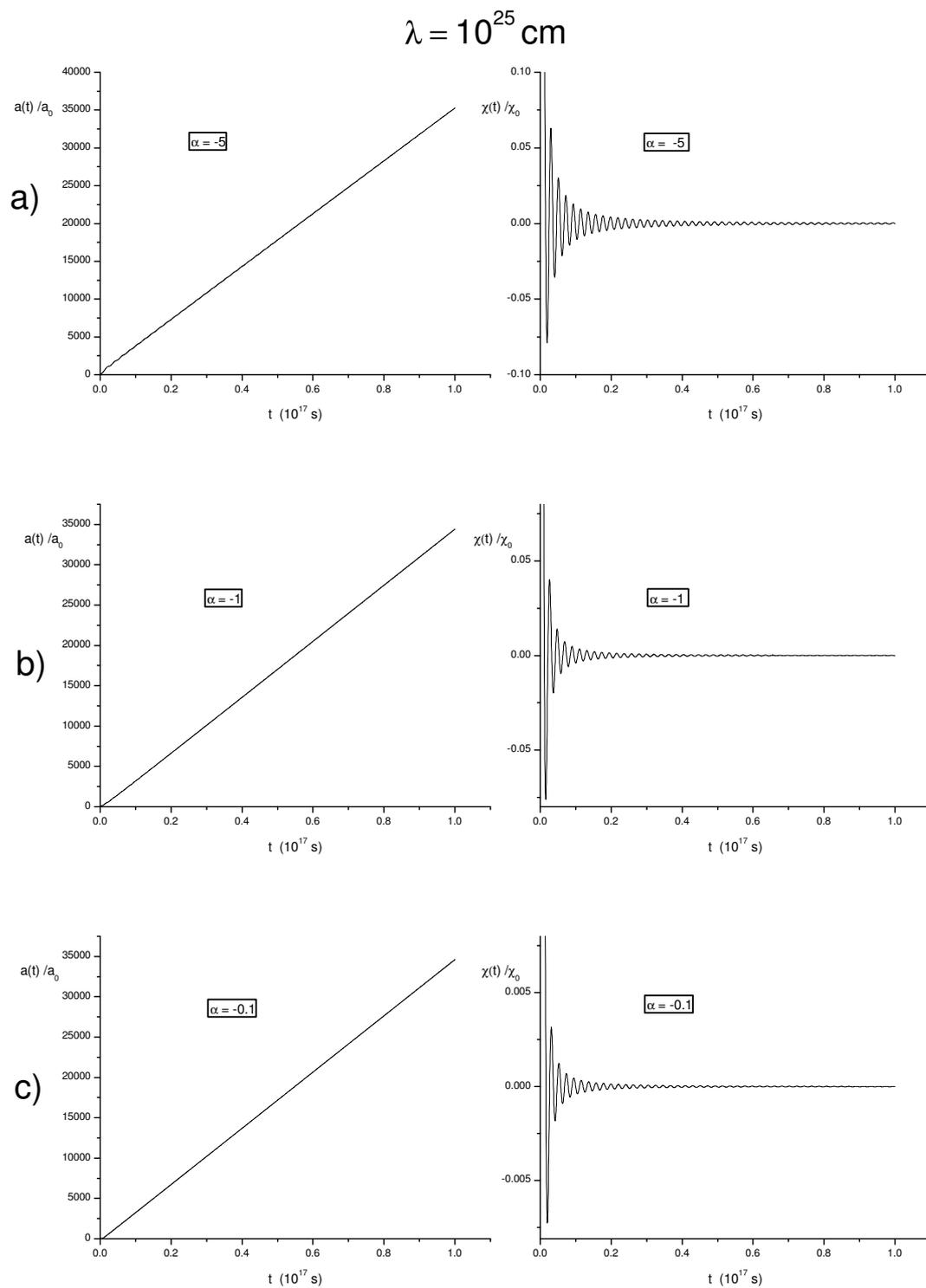


Figura 4.8: Evolución de a y del campo escalar χ para $\lambda = 10^{25}$ cm, con $\alpha = -0.1, -1.0, -5.0$.

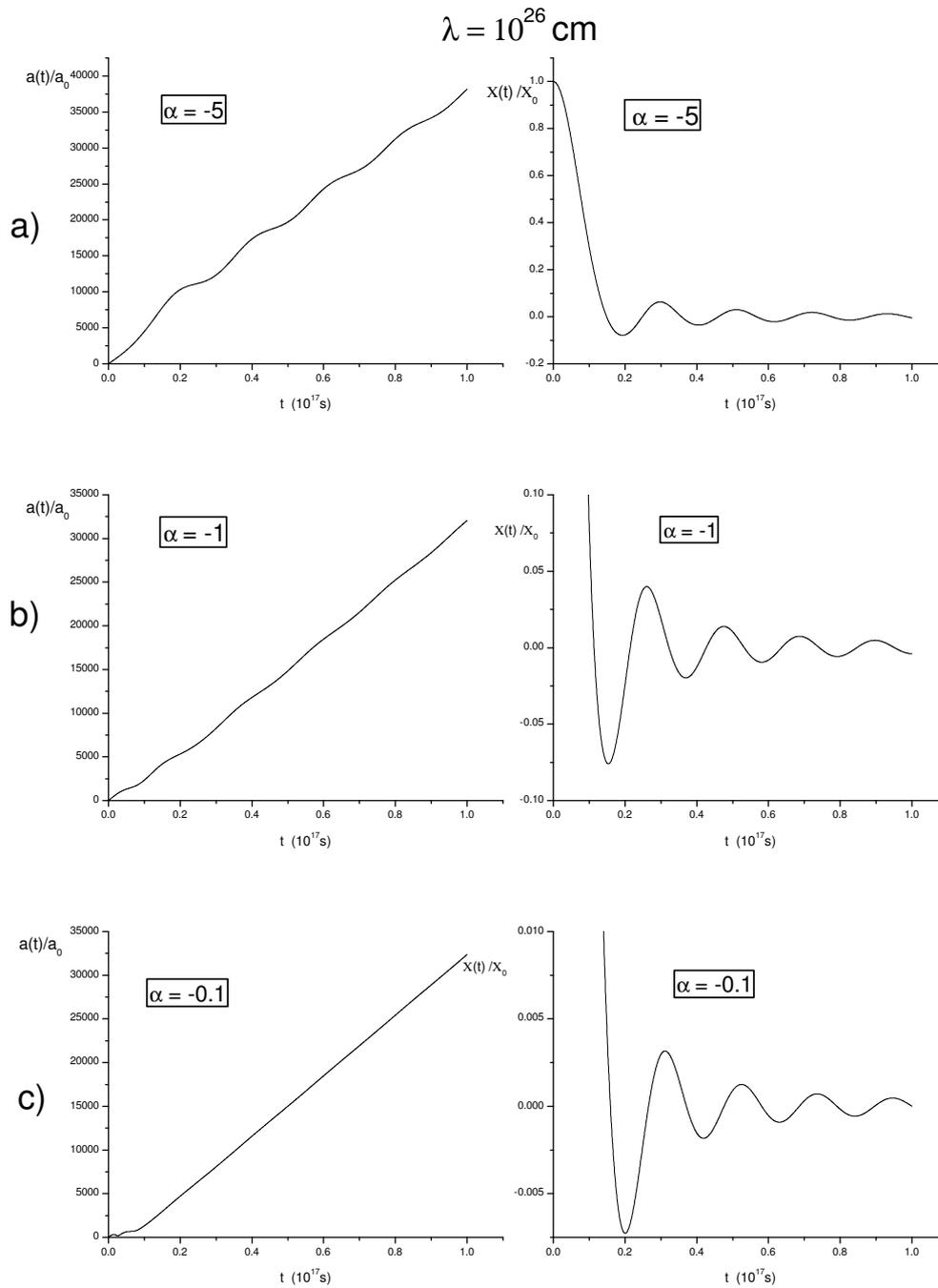


Figura 4.9: Evolución de a y del campo escalar χ para $\lambda = 10^{26} \text{ cm}$, con $\alpha = -0.1, -1.0, -5.0$.

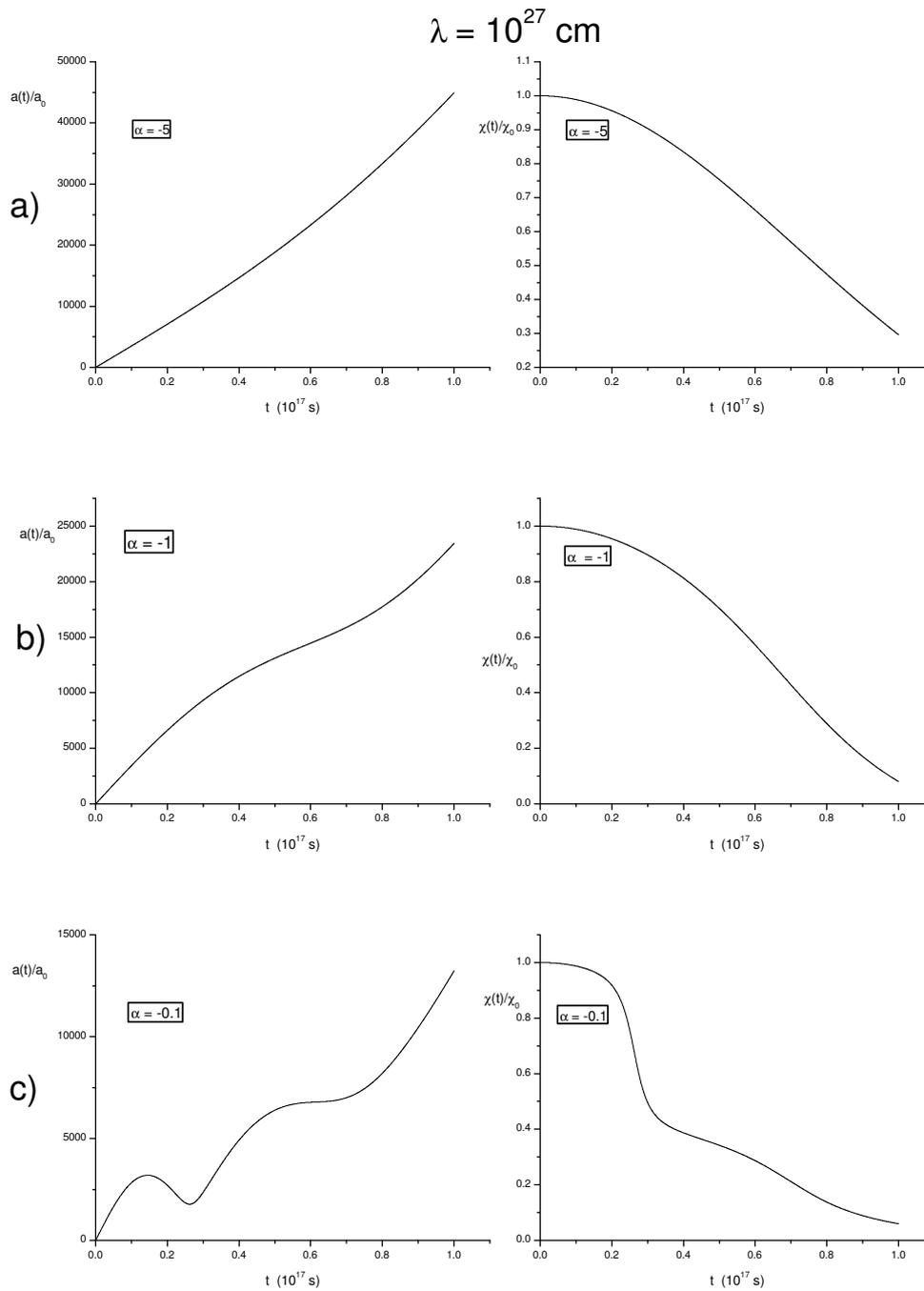


Figura 4.10: Evolución de a y del campo escalar χ para $\lambda = 10^{27}$ cm, con $\alpha = -0.1, -1.0, -5.0$.

Un modelo ideal del universo que se ajuste a las observaciones explicadas anteriormente es aquel que cumple con un factor de expansión $a_h/a_{rec} \sim 10^3$, y cuyo periodo inflacionario haya empezado en $z_q \sim 1$. Por lo tanto, los modelos con $\lambda = 10^{25}$ cm se descartan como modelos aceptables, ya que su periodo inflacionario sucede en $z \approx 1000$.

Analicemos el caso con $\lambda = 10^{26}$ cm. De las tendencias analizadas anteriormente vemos que para valores de α positivos mayores obtenemos un crecimiento del universo menor. Sin embargo, se realizó el cálculo para $\lambda = 10^{26}$ cm con valores de $\alpha = 10$ y obtuvimos $a_h/a_{rec} \simeq 50,000$, y para $\alpha = 100$ se obtuvo $a_h/a_{rec} \simeq 40,000$, es decir, un orden de magnitud más grande de lo necesario. Por otro lado para α negativos cercanos a cero el crecimiento del factor de escala disminuye. Sin embargo, tomamos valores hasta $\alpha = -10^{-6}$ y obtuvimos que $a_h/a_{rec} = 25,000$, resultando valores muy altos. Por lo tanto, el modelo con $\lambda = 10^{26}$ cm tampoco se ajusta a las observaciones.

Para el caso $\lambda = 10^{27}$ cm no hay una variación significativa en la evolución del factor de escala para valores de $\alpha > 5$. Por ejemplo para $\alpha = 1000$, $a_h/a_{rec} \simeq 50,000$, el cual no corresponde con el valor esperado. Finalmente para valores de $\alpha < 0$ se obtiene que para $\alpha = -0,1$ existe un periodo contracción en el factor de escala, que se sucede entre $0,1 \times 10^{17}s < t < 0,3 \times 10^{17}s$, siendo $a_h/a_{rec} \approx 15,000$, ver gráfica 4.10 .

Un análisis más detallado indica que una expansión del orden de 10^3 se obtiene para valores de α en el intervalo $[-10^{-3}, -10^{-4}]$. Por ejemplo, para $\alpha = -3 \times 10^{-4}$ obtenemos un valor de $a_h/a_{rec} \approx 1036$, el cual se aproxima bastante bien al valor de expansión esperado. En la figura 4.11 se muestra la evolución de este modelo, donde se observa que para valores negativos de $\alpha \rightarrow 0^-$ el periodo de oscilación aumenta conforme el tiempo, es decir, las oscilaciones en el factor de escala son más grandes a medida que el universo se expande. Estas oscilaciones en el factor de escala pueden generar una evolución en la formación de estructura diferente al modelo estándar de cosmología, la cual no será estudiada en esta tesis.

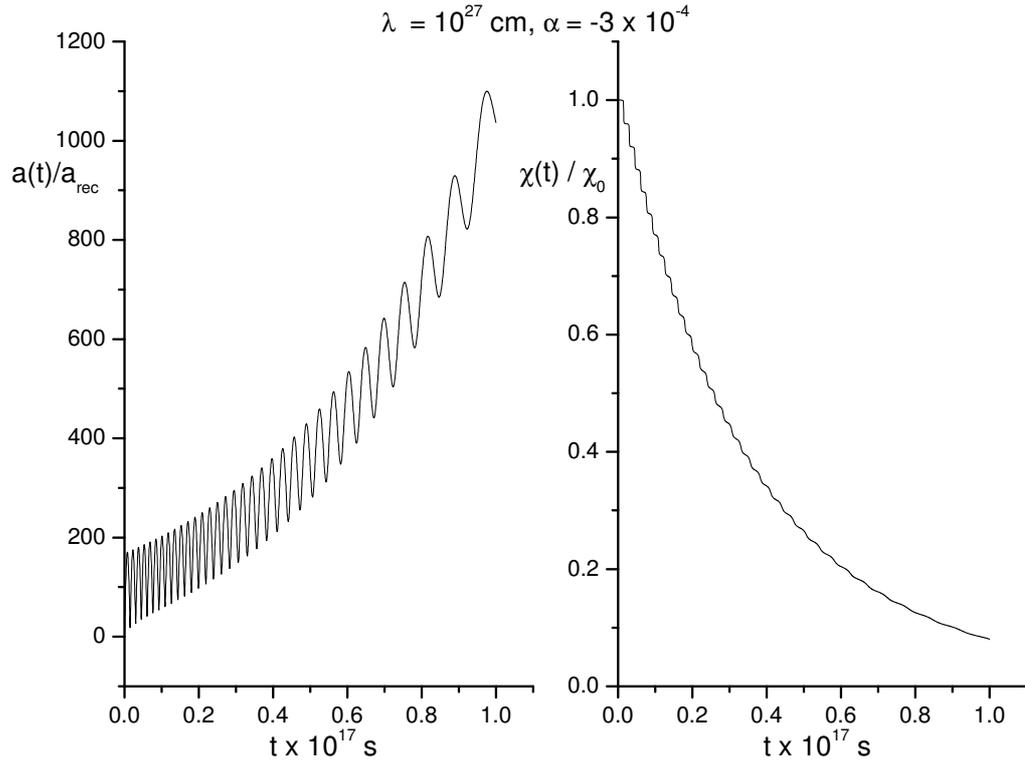


Figura 4.11: Evolución de a y del campo escalar χ para $\lambda = 10^{27} \text{ cm}$, con $\alpha = -3 \times 10^{-4}$

4.4.1. Espacio fase

La figura 4.12, muestra la grafica del espacio fase (\dot{a}/\dot{a}_0 vs. a/a_0 , $\dot{\chi}/\dot{\chi}_0$ vs. χ/χ_0) de las soluciones, correspondientes a los casos de las figuras 4.8 a), 4.5 c) y 4.11. La figura 4.12 a) muestra que la envolvente a la curva se comporta como $\dot{a}/a = 1/t$, lo cual es consistente con la expansión lineal asintótica del modelo. Por otro lado, el campo escalar empieza en un punto arbitrario $(\chi_0, \dot{\chi}_0) = (1, 0)$ y evoluciona a un atractor que se observa en la figura, el cual es un valor muy cercano a cero, pero diferente de éste. La figura 4.12 b) muestra la evolución de un valor para $\alpha > 0$, dando una expansión tipo polvo $H = 2/3t$, correspondiente a los puntos máximos de las oscilaciones del espacio fase del factor de escala. El campo escalar para este modelo también evoluciona a su atractor de manera similar al caso a).

Finalmente se muestra el espacio fase para el mejor ajuste obtenido en los cálculos anteriores, ver figura 4.12 c). En este caso se ve que el espacio fase para el factor de escala tiene valores negativos para \dot{a} , lo cual corrobora las pequeñas oscilaciones en el factor de escala observados en la figura 4.11. La envolvente de esta gráfica indica también un comportamiento lineal asintótico efectivo.

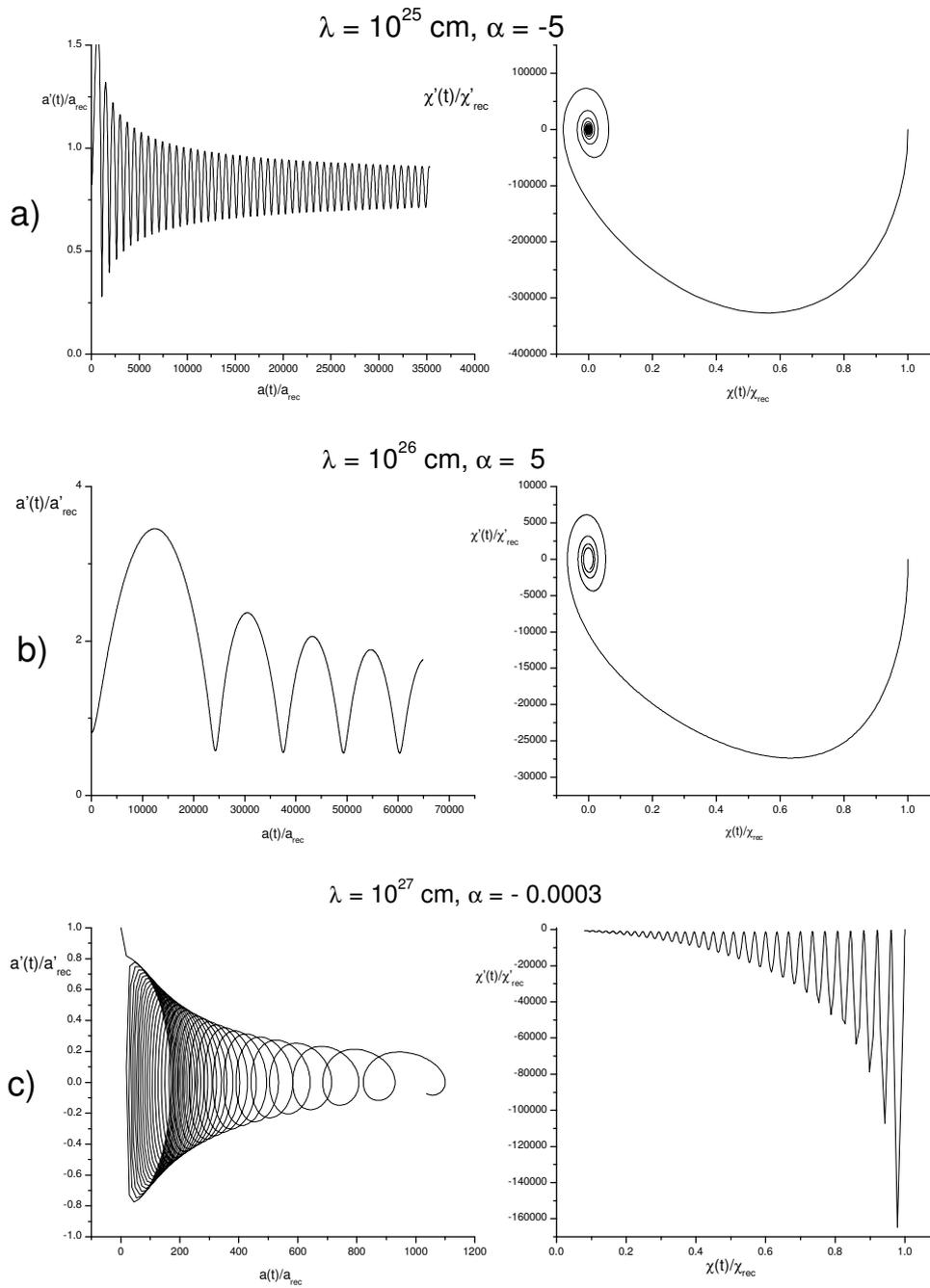


Figura 4.12: Espacio fase de a y del campo escalar χ para diversos valores de λ y α .

4.5. Evolución de la densidad (ρ) y del parámetro de la ecuación de estado (w)

También se realizaron los cálculos de cómo es que evoluciona la densidad de energía y materia y del parámetro w de la ecuación de estado. Para realizar esti identificamos a la ecuación (4.13) con:

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \frac{1}{1 + 2\chi} [\rho_m + \rho_{res}] \quad (4.24)$$

y a la ecuación (4.18) con

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{1}{1 + 2\chi} \{\rho_m + \rho_{res} + 3(p_m + p_{res})\} \quad (4.25)$$

Se define ρ_{res} como:

$$\begin{aligned} \rho_{res} \quad \equiv \quad \rho_T - \rho_m &= V + \frac{1}{2G\alpha} \frac{\dot{\chi}^2}{(1 + 2\chi)} - \frac{3}{4\pi G} \frac{\dot{a}}{a} \dot{\chi} \\ &\equiv \rho_\chi - \frac{3}{4\pi G} \frac{\dot{a}}{a} \dot{\chi} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Mientras que p_{res} :

$$\begin{aligned} p_{res} \quad \equiv \quad p_T - p_m &= -V + \frac{1}{2G\alpha} \frac{\dot{\chi}^2}{(1 + 2\chi)} - \frac{1}{3} \frac{V'}{(1 + \frac{4\pi}{3\alpha})} - \frac{1}{4\pi G} \frac{\dot{a}}{a} \dot{\chi} \\ &\equiv p_\chi - \frac{1}{3} \frac{V'}{(1 + \frac{4\pi}{3\alpha})} - \frac{1}{4\pi G} \frac{\dot{a}}{a} \dot{\chi} \end{aligned} \quad (4.27)$$

A continuación se muestran las gráficas de la evolución de la densidad asociada al campo escalar χ y del parámetro $w_{eff} = p_T/\rho_T$, donde $p_T = p_m + p_{res}$ y $\rho_T = \rho_m + \rho_{res}$. Análogas a las gráficas 3.1 y 3.2. Para el caso $\lambda = 10^{27}$ cm, $\alpha = 5$.

Se tomaron tales valores de λ y α , debido a que éste representa un caso de expansión del factor de escala a , dominado por el término del potencial, en el cual a tiene pequeñas oscilaciones, a diferencia de los valores anteriores en los que se observa que existen grandes oscilaciones en este factor.

Se tiene que $\rho_{res} = \rho_m$ en $z \simeq 1$. En la gráfica w_{eff} representa el cociente entre presión y densidad asociadas al campo escalar χ . Aquí se observa que el mínimo es dominado inicialmente por $w \sim 0$, y sólo en épocas recientes $w < 0$, al esquema presentado en la figura 3.2.

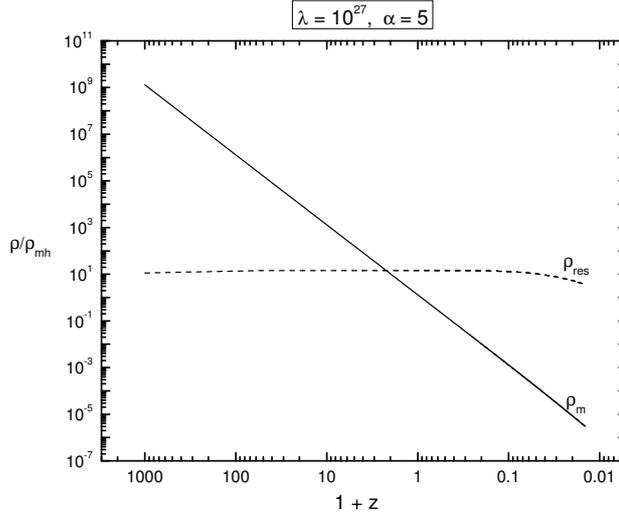


Figura 4.13: Evolución de la densidad ρ para valores de $\lambda = 10^{27}$ y $\alpha = 5$.

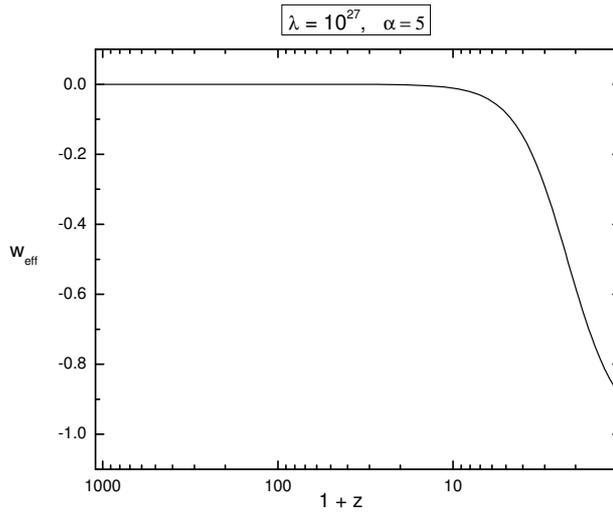


Figura 4.14: Evolución del parámetro w de la ecuación de estado para valores de $\lambda = 10^{27}$ y $\alpha = 5$.

4.6. Resumen de resultados

En este capítulo se consideró la teoría de gravedad inducida como modelo de quintaesencia en la expansión del universo. La dinámica cosmológica está dada por las ecuaciones 4.13 - 4.18. De estas ecuaciones se escogieron 4.15 y 4.18 para la integración numérica, y utilizando la ecuación 4.17 para la densidad

de materia.

Se establecieron las condiciones iniciales a partir de las mediciones cosmológicas recientes estudiadas en el capítulo 2. Además, se utilizaron los resultados teóricos y experimentales [34, 44, 52] concernientes a las teorías escalar-tensoriales para restringir los parámetros (α, λ) en el marco de la teoría de gravedad inducida. Una vez establecidas las condiciones iniciales y el intervalo de parámetros de la teoría ($-5 \leq \alpha \leq 5$), se integraron las ecuaciones desde la época de la última dispersión (recombinación) hasta hoy en día. Esto se hizo para estudiar la dinámica del universo en las épocas recientes y, en particular, para estudiar la influencia del campo de quintaesencia, que en este caso es un campo de Higgs. Dado que la época de expansión acelerada reciente se dió en $z_q \approx 1$, se escogieron valores $10^{25}\text{cm} \leq \lambda_C \leq 10^{27}\text{cm}$, los cuales generan una dinámica acelerada en épocas recientes.

Se realizaron cálculos numéricos para la evolución del factor de escala (a) y del campo escalar (χ) para diversos valores de los parámetros antes mencionados.

Los modelos con $\lambda = 10^{25}\text{cm}$ y 10^{26}cm resultan inadecuados ya que generan o bien una expansión más grande de la esperada, o bien un comienzo de la época acelerada demasiado temprano. Los cálculos con $\lambda = 10^{27}\text{cm}$ generan la tendencia que mejor aproxima a los resultados deseados, con $\alpha \rightarrow 0^-$. En particular, se encontró que dentro del intervalo de $-10^{-3} \leq \alpha \leq -10^{-4}$ se obtiene una buena aproximación a los valores observados, a saber, $z_q \simeq 1$, $z_{rec} \simeq 10^3$. De manera más detallada analizamos el caso $\alpha = -3 \times 10^{-4}$, encontrando que el factor de escala presenta oscilaciones, las cuales son de mayor longitud de onda a medida que se expande el universo.

También se estudió la dinámica cosmológica usando el espacio fase del factor de escala y del campo escalar. De esta dinámica se observa que las soluciones tienden asintóticamente a atractores que corresponden a soluciones de universos tipo polvo ($\alpha > 0$) o tipo expansión lineal ($\alpha < 0$). Las soluciones asintóticas con $\alpha > 0$ son conocidas para campos escalares oscilantes [49]. Las soluciones asintóticas con $\alpha < 0$ muestran un comportamiento dinámico nuevo.

Conclusiones

En esta tesis se inició con una revisión de la cosmología moderna, donde se estudiaron los modelos de FRW, sus problemas, y el escenario inflacionario para resolverlos. En particular, se estudió la implementación de un campo escalar en la dinámica cosmológica.

A continuación se analizaron las mediciones cosmológicas recientes, así como su interpretación dentro del modelo Λ CDM. La visión actual del cosmos es que el universo es plano o casi plano con un contenido material-energético de fotones y neutrinos despreciable, de materia bariónica que contribuye con el 4% del contenido del universo, materia oscura que representa aproximadamente el 26% y un 70% de energía oscura. Esta última componente puede ser debida a una constante cosmológica o una nueva componente diferente a las otras 4 conocidas (fotones, neutrinos, bariones y materia oscura), a la cual se le ha llamado quintaesencia. Esta componente se modela típicamente mediante la implementación de un campo escalar. Se ha estudiado la influencia y constricciones de los campos escalares de quintaesencia provenientes de las diferentes mediciones cosmológicas y de manera especial se estudiaron los picos de Doppler en la RCF en presencia de dichos campos.

Con todos estos elementos se estudió la dinámica cosmológica reciente del factor de escala y del campo de quintaesencia, identificando a este campo con un campo de Higgs dentro del marco de la teoría de gravedad inducida. Se encontró un crecimiento del factor de escala del orden esperado para valores de α negativos cercanos a cero, ($-10^{-3} \leq \alpha \leq -10^{-4}$), con $\lambda = 10^{27}$ cm. Genéricamente se encuentra que factor de escala es creciente pero con oscilaciones en la evolución temporal, teniendo un comportamiento asintótico lineal.

De las mediciones del satélite Planck que será lanzado en 2007, se espera poder precisar entre otras cosas, los valores de los parámetros cosmológicos fundamentales, como la constante de Hubble; también se espera determinar si el universo temprano atravesó por una fase inflacionaria y la naturaleza de la materia y energía oscura que dominan el universo actual.

Así mismo otro tipo de observaciones en astrofísica, cosmología y física de partículas proporcionarán elementos físicos que constriñan aún más los parámetros de las teorías existentes, además de permitir el desarrollo de nuevos paradigmas.

Bibliografía

- [1] A. Albrecht y P.J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48** 1220 (1982)
- [2] J.M. Bardeen, P.J. Steinhardt y M.S. Turner, *Phys. Rev. D* **28** 679-693 (1983).
- [3] J.A. Barrientos Pérez, *Expansión del Universo*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM (2004).
- [4] L. Bergström y A. Goobar, *Cosmology and Particle Astrophysics*, (John Wiley & Sons, 1999).
- [5] B. Boisseau, et. al., *Phys.Rev.Lett.* **85** 2236 (2000).
- [6] C. Brans y R. Dicke, *Phys. Rev.* **124** 925 (1961).
- [7] P. Brax, J. Martin y A. Riazuelo, *Phys.Rev. D* **62** 103505 (2000).
- [8] N. Bretón, J. L. Cervantes-Cota y M. Salgado edits. *The early universe and observational cosmology*, Lectures Notes in Physics 646 (Berlin Heidelberg: Springer - Verlag 2004).
- [9] J.L. Cervantes-Cota, *Induced Gravity and Cosmology*, Tesis Doctoral, Konstanz University, (1996).
- [10] J.L. Cervantes-Cota y H. Dehnen, *Phys. Rev. D* **51** 395 (1995).
- [11] J.L. Cervantes-Cota y H. Dehnen, *Nucl. Phys. B* **442** 391 (1995).
- [12] R.R. Caldwell, *Braz. Jour. Phys.* **30** 2 215 (2000).
- [13] R.R. Caldwell, R. Dave, y P.J. Steinhardt. *Phys. Rev. Lett.* **80** 1582 (1998).
- [14] Colles, Martin y Squires, *Particle Physics and Cosmology*, (Willey, 1989).
- [15] E. Corbelli y P. Salucci, *MNRAS* **311**, 441 (2000).
- [16] R.H. Dicke, P.J.E. Peebles, P.G. Roll y D.T. Willkinson, *Astrophys. J.* **142** 414 (1965).
- [17] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, (Academic Press, 2003).

- [18] E. Fischbach y C. L. Talmadge, *The Search for Non-Newtonian Gravity*, Springer-Verlag (1999), cap. 2.
- [19] H. Frommert, *Higgsmechanismus und Gravitation*, Tesis Doctoral, Konstanz University, (1992), cap. 8.
- [20] Y. Fujii, *Some aspects of the scalar-tensor theory*, arXiv:gr-qc/0410097 v1. (2004)
- [21] Y. Fujii y K. Maeda, *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*, (Cambridge University press, 2003).
- [22] E. Gunzig y M. Lachièze-Rey, *The Cosmological Background Radiation*, (Cambridge University press, 1999).
- [23] A. H. Guth, *Phys. Rev. D* **23** 347 (1981).
- [24] A. H. Guth y S. Pi, *Phys. Rev. D*: **32** 1899-1920 (1985).
- [25] S. Hawking, *Phys. Rev. Lett.* **B115** 295-297 (1982).
- [26] W. Hu y S. Dodelson, *Annu. Rev. Astron. and Astrophys.* (2002).
- [27] E.W. Kolb y M.S. Turner, *The Early Universe* “Frontiers in Physics” no. 69 (Addison-Wesley, 1990).
- [28] A.R. Liddle y D.H. Lyth. *Phys. Rept.* **37** 231:1-105 (1993).
- [29] A.D. Linde, *Phys. Lett.* **B 108** 389 (1982)
- [30] A.D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, (Harwood Ac., 1990).
- [31] C.P. Ma and E. Bertschinger, *ApJ* **455**, 7 (1995).
- [32] M.K. Mak y T. Harko *Int. Journal of Modern Physics D.* **11**, 09, 1389-1397 (2002).
- [33] C.W. Misner, K.S. Thorne, y J.A. Wheeler, *Gravitation*, (Freeman and Company, 1973).
- [34] R. Nagata, T. Chiba y N. Sugiyama. *Phys. Rev. D* **66** 103510 (2002).
- [35] J.V. Narlikar, *Introduction to Cosmology* (Cambridge University press, 1993).
- [36] C. B. Netterfield *et. al.* [BOOOMERANG Collaboration], arXiv:astro-ph/0104460.
- [37] T. Padmanabhan, *Structure formation in the universe*, (Cambridge University press, 1993).

- [38] J.A. Peacock, *Cosmological Physics*, (Cambridge University press, 1999).
- [39] J.A. Peacock, 1991. *MNRAS* 253:1P-5P.
- [40] S. Perlmutter *et. al.*, *Astrophysical Journal* **517**, 565 (1999).
- [41] A.G. Riess *et. al.*, *Astrophysical Journal* **116**, 1009 (1998).
- [42] A. Riazuelo, y J.P. Uzan, *Phys. Rev. D* **66** 023525 (2002).
- [43] R.K. Sachs y A.M. Wolfe. *Ap. J.* 147:73-90 (1967).
- [44] A. Shirata, *et. al.* *Phys. Rev. D* **71**, (2005) 064030.
- [45] L. Schutz, *A First Course in General Relativity*, (Cambridge University Press, 1985).
- [46] G.F. Smoot *et. al.*, *Astrophys. J. Lett.* **396** (1992) L1.
- [47] P.J. Steinhardt, L. Wang, I. Zlatev, *Phys. Rev. D* **59**, 123504 (1999).
- [48] K. Subramanian, *The physics of CMBR Anisotropies* arXiv:astro-ph/0411049.
- [49] M.S. Turner, *Phys. Rev. D* **28** 1243 (1983).
- [50] M. Tegmark, *et. al.*, *Phys. Rev. D* **69** 103501 (2004).
- [51] R. Trotta y A. Melchiorri, *Phys. Rev. Lett.* **95** 011305 (2005).
- [52] K. Umezumi, K. Ichiki y M. Yahiro. *Phys.Rev. D* **72** 044010 (2005).
- [53] R. V. Wagoner *Phys. Rev. D* **1** 3209 (1970).
- [54] R. M. Wald, *General Relativity*, (The University of Chicago Press, 1984)
- [55] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, (John Wiley & Sons, 1972).
- [56] M. White y W. Hu. 1997 *Astron. Astrophys.* 321:8-9.
- [57] M. White, D. Scott, and J. Silk, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **32** 319 (1994).
- [58] C. M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics*, (Cambridge, 1993)
- [59] <http://physics7.berkeley.edu/group/cmb/gen.html>.
- [60] <http://map.gsfc.nasa.gov/>.