



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS**

**“MODELOS ESTADÍSTICOS DE FORRAJEO EN UN MEDIO  
DESORDENADO. UNA DESCRIPCIÓN DE LAS TRAYECTORIAS  
RECORRIDAS POR LOS PRIMATES AL ALIMENTARSE”**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

**PRESENTA:**

**HUMBERTO RAMOS SAAVEDRA**

**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. DENIS PIERRE BOYER**



**posgrado en ciencias físicas  
u n a m**

**MÉXICO, D.F.**

**2006**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A Alma, padres  
y hermanos.*

# Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Denis Pierre Boyer, la oportunidad de trabajar bajo su dirección, así como la confianza y apoyo que me ha brindado durante la realización de este trabajo.

Mi reconocimiento y agradecimiento al Dr. Gabriel Ramos Fernández por sus investigaciones sobre el mono araña en la selva de los alrededores del lago Punta Laguna, México.

A los miembros del comité tutorial: Dr. José Luís Mateos Trigos y Dr. Francois Leyvraz Waltz.

Agradezco a la Dra. Rocio Jáuregui y al Dr. Rafael Pérez Pascual el apoyo que me brindaron durante los primeros semestres de la Maestría.

A los miembros del jurado: Dr. Maximino Aldana González, Dr. Ricardo Mansilla Olivares, Dr. Luís Antonio Pérez López, Dr. José Luís Mateos Trigos y Dr. Denis Pierre Boyer.

Al posgrado en Ciencias Físicas, UNAM.

Al instituto de Física, UNAM, que como estudiante asociado me permitió disponer de sus instalaciones y servicios durante la elaboración de este trabajo.

Quiero agradecer también al CONACyT, el haberme otorgado la beca de Maestría que disfrute durante dos años.

# Índice general

---

1	<b>Introducción</b>
4	<b>Caminatas aleatorias</b>
5	Distribución normal
9	Distribuciones de Lévy
13	Caminatas aleatorias en presencia de trampas
16	<b>Caminatas de Lévy en sistemas biológicos</b>
16	Forrajeo de animales en medios desordenados
17	Albatros
20	Chacales
22	Renos
24	Mono araña
31	Caminatas deterministas en estrategias locales de forrajeo
32	La selva tropical como un medio complejo
34	<b>El modelo</b>
34	Modelo del caminante hambriento bien informado(MCHBI)
37	<b>Resultados</b>
37	Descripción cualitativa de los patrones de movimiento obtenidos por el modelo para algunos valores de $\beta$
.	
40	Función de distribución de probabilidad de las longitudes de los pasos
43	Fluctuaciones de las longitudes de los pasos
44	Función de correlación entre pasos recorridos por el caminante en $\beta_C$
44	Función de correlación entre objetivos visitados por el caminante en $\beta_C$
48	Distancia total recorrida en función del tiempo
49	Desplazamiento medio en función del tiempo
52	<b>El modelo en otras dimensiones y una variación</b>
52	El modelo en una y tres dimensiones
52	Una dimensión
55	Tres dimensiones
58	Una variación del MCHBI
62	<b>Conclusiones</b>

65	Una estrategia óptima de búsqueda de objetos
.	distribuidos aleatoriamente
67	Bibliografía

# Introducción

---

Hace más de un siglo no era posible explicar un fenómeno tan aparentemente sencillo como es el de las trayectorias de movimiento que realiza una partícula muy pequeña en un medio líquido. En aquel entonces hubiera resultado difícil creer que este fenómeno con propiedades tan interesantes daría respuesta a un problema fundamental en física como fue el de la existencia de la estructura atómica de la materia. Y aún más inconcebible resultaría el hecho de pensar que estos patrones de movimiento podrían aplicarse a una gran variedad de fenómenos que ocurren en la naturaleza.

En 1827, Roberto Brown observó que en una solución de agua, el polen de cierta hierba (*Clarkia pulchella*) realizaba un movimiento continuo y desordenado. Brown no pudo dar una explicación satisfactoria para tal fenómeno que ahora se conoce como Movimiento Browniano. Sin embargo Einstein en 1905 (Langevin en 1908) proporciono las bases teóricas de la difusión de este proceso el cual sería una prueba asombrosa acerca de la existencia de los átomos [?].

El movimiento Browniano ha dado lugar al desarrollo de todo un sistema de ideas, como son las caminatas aleatorias, que hoy en día son de gran utilidad para modelar muchos fenómenos de la naturaleza, no sólo en el área de física si no también en otras disciplinas como la economía y la biología.

En el área de biología es de gran interés entender y modelar los patrones de movimiento realizados por los animales en sus actividades de forrajeo. Los animales deben moverse para localizar y capturar su alimento, estos patrones de movimiento son un reflejo de las tácticas que usan para satisfacer sus demandas de supervivencia. Observaciones recientes en las actividades de forrajeo de ciertos animales vertebrados de varias especies, han mostrado que las trayectorias de movimiento que realizan estos animales presentan características muy parecidas a las caminatas aleatorias, pero en varios aspectos totalmente diferentes a las del Movimiento Browniano.

Una de estas especies de animales cuyas trayectorias de movimiento no pueden ser modeladas como una simple partícula Browniana <sup>1</sup> es el mono araña (*Ateles geoffroyi*), el cual ha sido estudiado por Gabriel Ramos Fernández *et al.* en la selva de Punta Laguna, México. [?]. Las trayectorias de movimiento que realiza el mono araña en la selva son descritas adecuadamente

---

<sup>1</sup>Es una partícula con un movimiento continuo y desordenado con una longitud característica en la distribución de sus movimientos.

por una caminata de Lévy,<sup>2</sup> en donde la longitud de los pasos<sup>3</sup> realizados por el primate no poseen una longitud característica como sucede en el Movimiento Browniano. Se ha sugerido que posiblemente las trayectorias de movimiento realizadas por el mono araña, están guiadas por el conocimiento que estos poseen acerca de la localización de su alimento. Si este es el caso, entonces los patrones de movimiento que realizan estos animales no pueden ser descritos adecuadamente por una caminata aleatoria, sino más bien por una caminata determinista.

En física, las caminatas deterministas han sido menos estudiadas que las caminatas aleatorias. Sin embargo las primeras pueden ser de mucho interés al intentar modelar los patrones de movimiento que realizan los animales en sus actividades de forrajeo. Lima *et al.* han presentado un modelo simple de una caminata determinista que podría ser implementado a estrategias locales de forrajeo en un medio desordenado [?]. Este tipo de enfoque puede ser de mucha utilidad al modelar las trayectorias de movimiento del mono araña.

La finalidad de este trabajo es presentar el **Modelo del caminante hambriento bien informado (MCHBI)**, el cual es un modelo determinista que intenta reproducir las trayectorias de movimiento realizadas por el mono araña en sus actividades de forrajeo, así como lograr un mejor entendimiento sobre las causas y consecuencias ecológicas que implican estos patrones de movimiento. Para lograr nuestro objetivo vamos a proceder de la siguiente manera:

En el capítulo uno se presenta una breve revisión sobre algunos aspectos importantes de las caminatas aleatorias. Se define una caminata aleatoria en una dimensión y se analizan las condiciones bajo las cuales la función de distribución de probabilidad de los desplazamientos del caminante es una distribución normal. También se hace un resumen sobre las caminatas de Lévy y los vuelos de Lévy, en donde en ambos casos, la función de distribución de probabilidad de los desplazamientos del caminante es una ley de potencia. Por último en este capítulo se presenta un análisis de las caminatas aleatorias en presencia de trampas, esto debido a que algunos resultados de estos estudios sugieren que posiblemente en la naturaleza existan varias especies de animales que realizan caminatas de Lévy en favor de una estrategia eficiente de búsqueda de alimento.

El capítulo dos se encuentra dividido en tres secciones:

- a) Forrajeo de animales en medios desordenados; en esta sección se presenta una revisión sobre las principales especies de animales reportadas hasta ahora en la literatura, en donde se ha encontrado evidencia de que estos animales realizan vuelos de Lévy en sus patrones de movimiento al ir en busca de alimento. Las especies de animales que se muestran en esta sección son: Albatros (*Diomedea exulans*), Chacales (*Canis adustus*), Renos (*Rangifer tarandus L.*) y Mono araña (*Ateles geoffroyi*).
- b) Caminatas deterministas con estrategias locales de forrajeo; en esta sección se presentan las bases más importantes para justificar de manera adecuada el MCHBI.

---

<sup>2</sup>Una discusión sobre las caminatas de Lévy será presentada en el capítulo 1.

<sup>3</sup>Por un paso se entenderá el desplazamiento que realiza el mono araña al ir de un sitio de alimento a otro.



- c) La selva tropical como un medio complejo; aquí se presentan algunos datos de interés general sobre la selva tropical, todo ello con el objetivo de plantear adecuadamente el MCHBI, además de que los datos reportados en esta sección van a ser de mucha utilidad en el análisis de resultados.

En el capítulo tres se presenta el MCHBI, propuesto por Denis Pierre Boyer *et al.* [?]. También se presentan los argumentos necesarios para justificar el estudio del mono araña cuando se encuentra en ausencia de otros monos a lo largo de sus actividades de forrajeo.

El capítulo cuatro y cinco se presentan los resultados obtenidos con el MCHBI. Estos capítulos constan de las siguientes secciones: Descripción cualitativa de los patrones de movimiento obtenidos por el modelo para algunos valores de  $\beta$ , Función de distribución de probabilidad de las longitudes de los pasos, Fluctuaciones de las longitudes de los pasos, Función de correlación entre pasos recorridos por el caminante en  $\beta_c$ , Función de correlación entre objetivos visitados por el caminante en  $\beta_c$ , Distancia total recorrida en función del tiempo, Desplazamiento medio en función del tiempo. El modelo en una y tres dimensiones. Una variación del MCHBI. Por último en el capítulo cinco se presentan las conclusiones de este trabajo de tesis.

# Capítulo 1

## Caminatas aleatorias

---

Se cree que el término de caminatas aleatorias se usó por primera vez en 1905 cuando apareció en un artículo de Karl Pearson [?], en donde mostraba un modelo de infestación debido a un mosquito: Un caminante parte de un punto  $h$  y se desplaza a cada paso una longitud fija  $l$  en una dirección elegida al azar en un intervalo de tiempo  $\tau$ . Pearson deseaba conocer la distribución de los mosquitos después de algunos pasos. Sin embargo la descripción más general de una caminata aleatoria corresponde al caso en que  $l$  no es una longitud fija (ver Fig. 1.1).

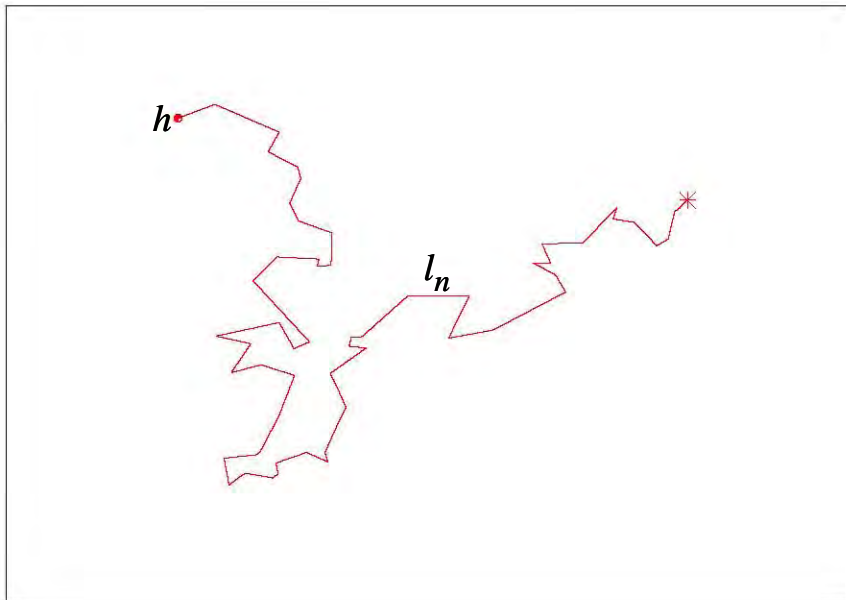


Figura 1.1: Un caminante parte de un punto  $h$  y da  $N$  pasos. Se desplaza a cada paso  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots, N$ ) de longitud  $l_n$  en una dirección arbitraria e independiente del paso anterior (*Random Walk*).

En 1827, Robert Brown publica su estudio del movimiento aleatorio de partículas en suspensión en un medio líquido (granos de polen en agua). Brown no puede dar una explicación satisfactoria para tal fenómeno que se conoce ahora como movimiento Browniano. En 1905,

Einstein proporciona las bases de la teoría de la difusión. En 1908, Langevin publica de manera independiente un estudio similar. En su publicación Einstein muestra que la difusión de una gota de tinta en el agua corresponde al movimiento descrito por Brown, el cual es una consecuencia del caos molecular originado por el movimiento térmico de las moléculas. La trayectoria de una molécula de tinta puede ser modelada como una caminata aleatoria con líneas rectas entre los puntos de colisiones con las moléculas (de agua o de tinta). Después de cada colisión la molécula de tinta se mueve en una nueva dirección sin correlación con la anterior hasta tener nuevamente otra colisión. Las caminatas aleatorias de las moléculas de tinta (fenómeno microscópico) producen a nivel macroscópico la difusión de la tinta la cual es posible medir a través de la constante de difusión  $D$ .<sup>1</sup>

Las caminatas aleatorias han sido de interés para los matemáticos y físicos durante décadas, y éstas han sido utilizadas para modelar algunos procesos importantes en diferentes áreas de la ciencia. Así por ejemplo en física, se conocen algunos problemas relacionados con la difusión de partículas [?], por otra parte en economía en el año de 1959 el economista Osborne, propone comparar el comportamiento de los precios de acciones con el movimiento Browniano [?], el cual puede ser modelado estadísticamente por una caminata aleatoria. Por último mencionaremos que en ecología se sabe de ciertos animales tales como hormigas y aves, que al ir en busca de alimento realizan unas caminatas aleatorias con propiedades muy particulares [?, ?].

## 1.1. Distribución normal

Sea el caso de una caminata aleatoria en una dimensión que parte de un punto  $h$  y se desplaza a cada paso  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots, N$ ) una longitud  $l_n$ , elegida de manera independiente del paso anterior, según la distribución normalizada de probabilidad  $p(l)$ . La posición  $S_N$  después de  $N$  pasos es la suma de  $N$  desplazamientos independientes (Si  $l_n > 0$  el caminante se desplaza hacia la derecha, si por el contrario  $l_n < 0$  el caminante se desplaza hacia la izquierda).

$$S_N = \sum_{n=1}^N l_n. \quad (1.1)$$

Los momentos de  $p(l)$  están definidos por los promedios

$$\langle l^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} l^n p(l) dl. \quad (1.2)$$

Si el primer y segundo momento de  $p(l)$  satisfacen las condiciones

$$\langle l \rangle \text{ finito} \quad \text{y} \quad \langle l^2 \rangle \text{ finito} \quad (1.3)$$

entonces la función de distribución de probabilidad de la suma  $S_N$  está dada por la distribución normal  $P_N(S)$  conforme  $N$  tiende a infinito. Se trata del teorema del límite central.

---

<sup>1</sup>La constante de difusión será definida en la siguiente sección.

### Teorema del Límite Central

Sean  $l_1, l_2, \dots, l_N$ ,  $N$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una distribución de probabilidad no especificada pero de media  $\mu = \langle l \rangle$  y varianza  $\sigma^2 = \langle l^2 \rangle - \langle l \rangle^2$  conocidas y finitas. La variable aleatoria  $Z$  definida por

$$Z = (S_N - N\mu)/\sigma\sqrt{N} \quad \text{con} \quad S_N = \sum_{n=1}^N l_n \quad (1.4)$$

tiene una distribución de probabilidad  $\zeta_N(Z)$  que tiende hacia la distribución normal estándar (ver Fig. 1.2) conforme  $N$  tiende a infinito.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \zeta_N(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}}. \quad (1.5)$$

En otras palabras, la probabilidad de encontrar a la variable  $Z$  entre  $u_1$  y  $u_2$  está dada por

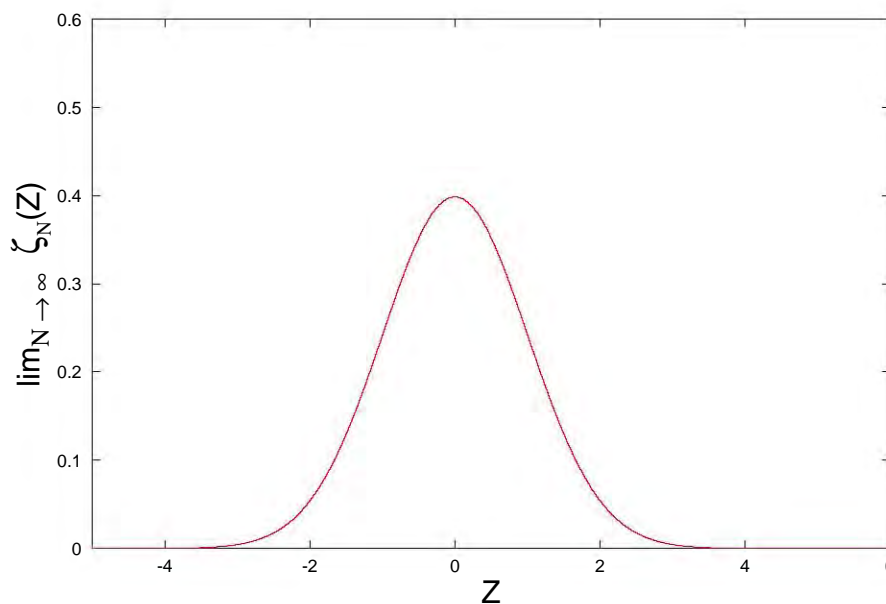


Figura 1.2: Distribución normal estándar en el  $\lim_{N \rightarrow \infty} \zeta_N(Z)$ .

$$\text{Probabilidad}(u_1 \leq Z \leq u_2) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{u_1}^{u_2} \zeta_N(Z) dZ \quad (1.6)$$

y por lo tanto, la función de distribución de probabilidad de la suma  $S_N$  está dada por

$$P_N(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{N}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{S_N - N\mu}{\sigma\sqrt{N}}\right)^2}. \quad (1.7)$$

En el caso en el que se cumplen las condiciones (1.3), se tiene que la media y la varianza de la suma  $S_N$  dependen linealmente de  $N$  como:

$$\langle S_N \rangle = N\mu \quad \langle S_N^2 \rangle - \langle S_N \rangle^2 = N\sigma^2. \quad (1.8)$$

Ahora nos permitimos hacer un mapeo entre  $S_N$  y una nueva variable,  $X_t$ , que va a representar la posición del caminante al instante  $t$ , tal que  $t = N\tau$ , donde  $\tau$  es el tiempo característico de un sólo paso. Bajo este mapeo las expresiones (1.8) se transforman en:

$$\langle X_t \rangle = Vt \quad \langle X_t^2 \rangle - \langle X_t \rangle^2 = 2Dt \quad (1.9)$$

donde la velocidad promedio (de advección) está dada por  $V = \langle l \rangle / \tau$  y la constante de difusión está dada por  $D = (2\tau)^{-1}[\langle l^2 \rangle - \langle l \rangle^2]$ .

Si  $V = 0$  observamos que  $\langle X_t \rangle = 0$ , pero que los valores típicos de  $\sqrt{\langle X_t^2 \rangle}$  crecen con el tiempo como:

$$|X_t| \sim t^{1/2}. \quad (1.10)$$

Como se mencionó anteriormente las caminatas aleatorias están relacionadas con el fenómeno de la difusión en el límite continuo. Suponemos ahora que la caminata no está sesgada, es decir que  $\langle l \rangle = 0$ , lo cual implica  $V = 0$ . Sea  $P(x, t)dx$  la probabilidad de que  $X_t$  se encuentre en el intervalo  $[x, x + dx]$  al instante  $t$ . Tomando el límite continuo para las variables  $t$  y  $x$  ( $\tau \rightarrow 0$ ,  $\langle l^2 \rangle \rightarrow 0$  de tal manera que  $D$  sea constante) en la expresión (1.7), bajo el mapeo  $S_N \rightarrow X_t$  se tiene que:

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2Dt}} f\left(\frac{x}{\sqrt{2Dt}}\right) \quad (1.11)$$

donde  $f$  es una función de  $x/\sqrt{2Dt}$  solamente. De la misma manera, tomando en cuenta las consideraciones anteriores en el límite continuo, se puede mostrar que la densidad de probabilidad dada por la expresión (1.7) satisface la bien conocida ecuación de difusión:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}. \quad (1.12)$$

La función de distribución de probabilidad de la suma  $X_t$ , posee una propiedad muy importante como veremos a continuación.

Sea la transformación  $x \rightarrow \lambda x$  y  $t \rightarrow \lambda^\alpha t$  en (1.11), en donde se obtiene:

$$P(\lambda x, \lambda^\alpha t) = \frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha}{2}}} f\left(\lambda^{1-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\sqrt{2Dt}}\right)\right). \quad (1.13)$$

Se encuentra que para  $\alpha = 2$  se tiene la propiedad de autosimilitud. Es decir, para las caminatas aleatorias que cumplen con las condiciones (1.3), se tiene que:

$$P(\lambda x, \lambda^2 t) = \frac{1}{\lambda} P(x, t) \quad (1.14)$$

Este resultado lo podemos entender de la siguiente manera: Un caminante aleatorio en dos dimensiones parte de un punto  $h$  en  $t = 0$ , y después de un tiempo  $t$  se encuentra a una distancia  $x$ , (ver Fig. 1.3 (círculo 1)). Ahora permitimos que el caminante se siga desplazando

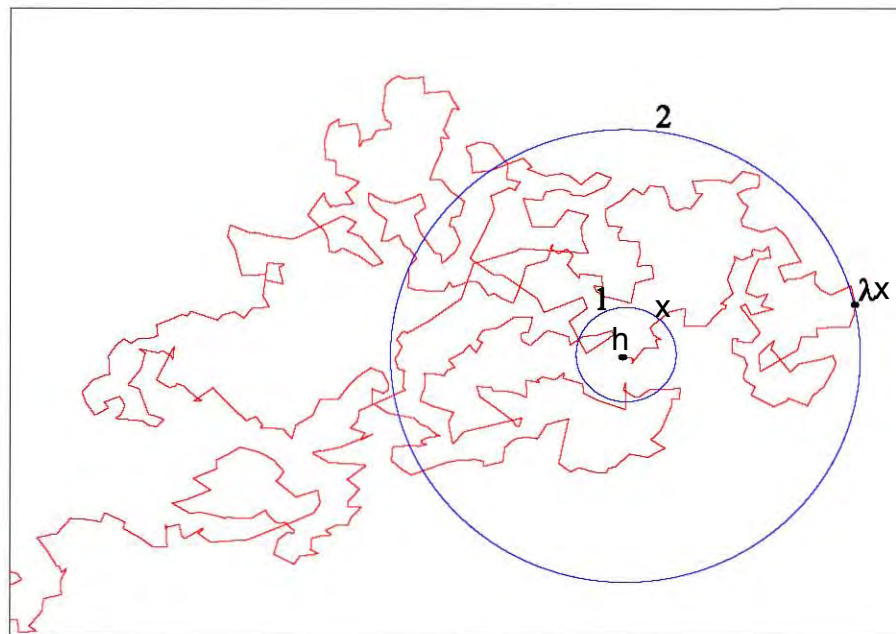


Figura 1.3: La función de distribución de probabilidad de un caminante aleatorio en dos dimensiones en el punto  $x$  a un tiempo  $t$ , es en promedio cualitativamente igual a la función de distribución de probabilidad en el punto  $\lambda x$  a un tiempo  $\lambda^2 t$ , excepto por un factor de escala  $\lambda$ .

durante un tiempo  $\lambda^2 t$ , con  $(\lambda > 1)$  en donde se alcanzan desplazamientos mayores, (círculo 2). De (1.14) podemos interpretar que la densidad de probabilidad en  $x$  a un tiempo  $t$ , es la misma que en  $\lambda x$  a un tiempo  $\lambda^2 t$ , excepto por un factor de escala  $\lambda$  no esencial, que es debido a la normalización. La figura (1.4) muestra que estadísticamente una trayectoria realizada por un caminante aleatorio con 20000 pasos, es cualitativamente similar a la que realiza el caminante con 2000 pasos.

En el límite continuo la caminata tiene la misma estructura a todas las escalas espaciales. Su dimensión fractal es 2 (dado el factor  $\lambda^2$  en (1.14)).

Hasta ahora sólo se ha hablado de las caminatas aleatorias cuyas distribuciones de probabilidad para las longitudes de los pasos  $l$  cumplen con las condiciones (1.3). Pero podríamos preguntarnos: ¿Pueden existir sumas de variables aleatorias independientes distribuidas según alguna distribución  $p(l)$  que tenga propiedades de autosimilitud sin cumplir alguna de las condiciones (1.3)? La respuesta a esta pregunta se dará en la siguiente sección, en donde veremos que efectivamente existen otros tipos de sumas de variables aleatorias independientes con alguna  $p(l)$  que poseen propiedades de autosimilitud. Una caminata aleatoria que satisface las condiciones (1.3), es un caso límite importante de lo que se conoce como leyes estables o leyes de Lévy, que son caracterizadas por un índice  $\mu$ .

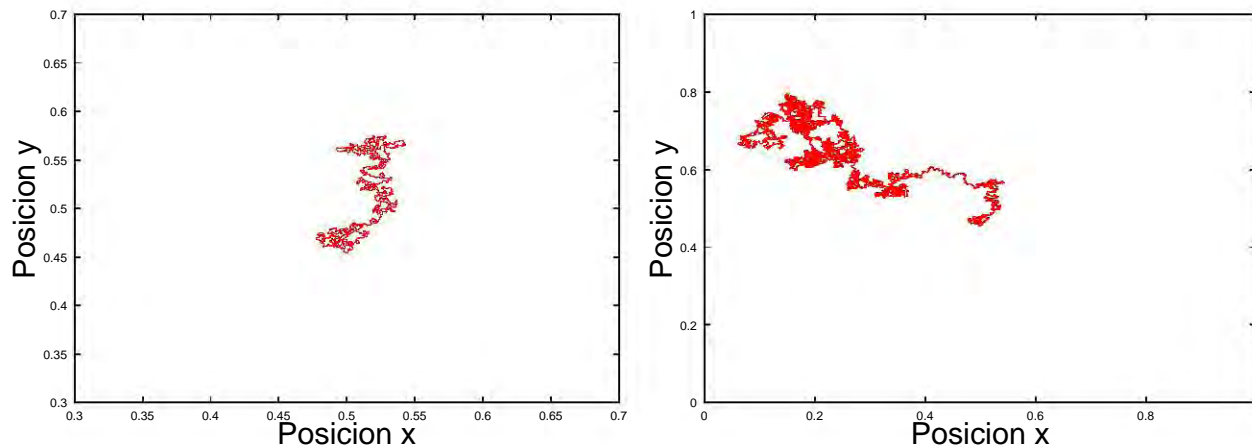


Figura 1.4: En la figura del lado izquierdo se muestra una caminata aleatoria en dos dimensiones de 2000 pasos con primer y segundo momento de  $p(l)$  finitos y en el lado derecho la misma caminata con 20000 pasos; es fácil convencerse que este tipo de caminatas presentan propiedades de autosimilitud.

## 1.2. Distribuciones de Lévy

En las últimas dos décadas, muchos físicos se han interesado en las caminatas aleatorias o en procesos relacionados con éstas, en donde  $p(l)$  tiene un segundo momento infinito, esto es,  $\langle l^2 \rangle = \infty$ . En este caso el Teorema del Límite Central no es aplicable y la constante de difusión no está definida. Tales caminatas con segundo momento infinito fueron primero estudiadas por los matemáticos, en particular por Paul Lévy en los años de 1920 [?].

Cuando el interés en teoría de probabilidad era probar el Teorema del Límite Central bajo las condiciones más débiles posibles, Paul Lévy en los años de 1920 investigó las excepciones de esto. Él se planteó preguntas acerca del escalamiento en las distribuciones de probabilidad  $p(l)$  y esto lo llevo a trabajar con variables aleatorias con segundo momento infinito. Un segundo momento finito está asociado con una escala característica y un comportamiento gaussiano en la densidad de probabilidad  $P(x, t)$ . Un segundo momento infinito implica la ausencia de una escala definitiva. Lévy descubrió la clase de distribuciones de probabilidad que gobiernan la sumas de estas variables aleatorias.

Lévy consideró al conjunto  $\{l_i\}$  de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una distribución de probabilidad  $p(l)$  cuyo primer momento es cero (simétricas). Dado ésto, entonces él se planteó la siguiente pregunta: ¿Cuándo una nueva variable aleatoria  $Z$  dada por  $cZ = c_1^\mu l_1 + \dots + c_N^\mu l_N$ , con  $c_i$  constantes positivas y que satisfacen la condición auxiliar  $c^\mu = c_1^\mu + \dots + c_N^\mu$  ( $0 < \mu \leq 2$ ), tienen la misma densidad de probabilidad  $L(Z)$ <sup>2</sup> que las  $l_i$ ? [?]

Por razones prácticas se considera el caso simple  $c_i = 1$  que implica  $c = N^{1/\mu}$ . Para  $\mu \leq 2$ , Lévy mostró que existe la siguiente solución:

<sup>2</sup>A partir de ahora la función de distribución de probabilidad  $P$  será designada por  $L$ .

$$\tilde{L}(k) = e^{-C|k|^\mu} \quad (1.15)$$

donde  $\tilde{L}(k)$  es la transformada de Fourier de  $L(Z)$  y  $C$  una constante positiva. Esas soluciones tienen el siguiente comportamiento asintótico ( $Z \rightarrow \infty$ )

$$L(Z) \sim Z^{-(1+\mu)}. \quad (1.16)$$

Este proceso puede representar a un camiante aleatorio (con un paso  $i$  representado por  $l_i$ ) que visita en forma autosimilar un conjunto de sitios con dimensión fractal  $\mu$ .

Tanto Lévy como Khintchine [?] han realizado un trabajo muy exhaustivo sobre la clasificación de las posibles distribuciones  $L(Z)$ , todo ello basado en el requerimiento de estabilidad bajo convolución. A continuación se da una descripción cualitativa de sus resultados en base a argumentos estadísticos sencillos.<sup>3</sup>

Supóngase una distribución de probabilidad  $p(l)$  para las longitudes de los pasos  $l$ , con  $l > 0$ , que decrece para valores grandes de  $l$  como

$$p(l) \propto l^{-(1+\mu)} \quad (1.17)$$

(con  $\mu > 0$  para que sea normalizable). Entonces se presentan los siguientes casos:

- Para  $0 < \mu < 1$ ,  $S_N = \sum_{n=1}^N l_n$  se comporta típicamente como  $N^{1/\mu}$  (o como  $N \ln N$  si  $\mu = 1$ ),  $\langle l \rangle$  es infinito y la suma crece más rápido que  $N$ .
- Para  $1 < \mu < 2$ ,  $\langle l \rangle$  es finito y  $\langle S_N \rangle = \langle l \rangle N$  mientras que la diferencia típica entre  $S_N$  y  $\langle S_N \rangle$  otra vez se comporta típicamente como  $N^{1/\mu}$  (o como  $\sqrt{N \ln N}$  si  $\mu = 2$ ). La varianza  $\langle S_N^2 \rangle - \langle S_N \rangle^2$  crece más rápido que  $N$ , un resultado que difiere de (1.8) en donde se cumplan las condiciones de (1.3).
- Para  $\mu > 2$ ,  $\langle l \rangle$  y  $\langle l^2 \rangle$  son finitos, entonces en este caso como ya hemos visto es aplicable el Teorema del Límite Central.

En una forma más general, la distribución de probabilidad de la variable reducida  $Z$  tiende hacia una distribución  $L_{\mu,\epsilon}(Z)$  cuando  $N \rightarrow \infty$  en el mismo sentido que (1.6):

$$\text{Probabilidad}(u_1 \leq Z \leq u_2) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{u_1}^{u_2} L_{\mu,\epsilon}(Z) dZ \quad (1.18)$$

con

$$Z = S_N/N^{1/\mu} \text{ para } 0 < \mu < 1 \quad \text{y} \quad Z = (S_N - \langle l \rangle N)/N^{1/\mu} \text{ para } 1 < \mu < 2.$$

---

<sup>3</sup>El lector puede encontrar una discusión más detallada en [?].



Las distribuciones  $L_{\mu,\epsilon}$  son llamadas leyes de Lévy (o estables) de índice  $\mu$  y están definidas por sus funciones características. Las leyes estables  $L_{\mu,\epsilon}$  están completamente caracterizadas por dos parámetros  $\mu$  y  $\epsilon$  ( $0 < \mu < 2$ ,  $-1 \leq \epsilon \leq 1$ ). El parámetro  $\mu$ , como hemos visto, caracteriza el comportamiento asintótico en  $Z$ :  $L_{\mu,\epsilon} \sim |Z|^{-(1+\mu)}$  y el parámetro  $\epsilon$  caracteriza la simetría de la distribución  $p(l)$ . De una manera más precisa se tiene que:

$$\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{R(-L)}{1-R(L)} \quad R(L) = \int_{-\infty}^L p(l) dl. \quad (1.19)$$

El valor  $\epsilon = 0$  es obtenido cuando  $l$  toma grandes valores tanto positivos como negativos con igual frecuencia (como es el caso en el que  $p(l)$  es simétrica). Así que esto nos lleva a una distribución par  $L_{\mu,0}(Z)$  la cual tiene una expresión simple en el espacio Fourier, ya mencionada en (1.15)

$$L_{\mu,0}(Z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikZ - C|k|^\mu} dk. \quad (1.20)$$

La ley normal (1.6) se recupera para  $\mu = 2$ , mientras que para  $\mu = 1$  nos lleva a la *ley de Cauchy*

$$L_{1,0}(Z) = \frac{C}{\pi} \frac{1}{C^2 + Z^2}. \quad (1.21)$$

En cambio, cuando  $l_n$  sólo toma valores positivos, el valor de  $\epsilon = 1$  es obtenido, y  $L_{\mu,1}$  es convenientemente expresada por su transformada de Laplace,

$$L_{\mu,1}(Z) \equiv L_\mu(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{sZ - C's^\mu} ds. \quad (1.22)$$

Como ya se ha mostrado en (1.16), para el caso particular de  $L_{\mu,0}(Z)$ , las leyes estables  $L_{\mu,\epsilon}(Z)$  decrecen como  $Z^{-(1+\mu)}$  para grandes valores de  $Z$  y sus momentos de orden mayor o igual a  $\mu$  son por lo tanto infinitos. Se puede observar entonces que las distribuciones tales que  $p(l) \sim |l|^{-(1+\mu)}$  ( $|l| \rightarrow \infty$ ) son atraídas a las leyes estables  $L_{\mu,\epsilon}(Z)$ , de comportamiento asintótico similar. Esto, sin embargo no sucede con la ley normal, la cual atrae todas las distribuciones  $p(l)$  que decrecen al menos tan rápido como  $l^{-3}$ .

Los *vuelos de Lévy* con  $\langle l \rangle = 0$  poseen también la importante propiedad de autosimilitud, la cual puede ser mostrada en el espacio de Fourier como veremos a continuación. Sea el cambio de variable  $q = k/N^{1/\mu}$  en (1.20); recordando que  $Z = S_N/N^{1/\mu}$ , la transformada de Fourier de la distribución de probabilidad de  $S_N$  (es decir la posición del caminante), se puede escribir en términos de  $q$  y  $N$  como:

$$\tilde{L}(q, N) \propto e^{-CNq^\mu}. \quad (1.23)$$

$\tilde{L}(q, N)$  representa la transformada de Fourier de  $L(x, N)$ , la densidad de probabilidad de encontrar al vuelo de Lévy en la posición  $x$  después de  $N$  pasos. Ahora consideremos la transformación  $q \rightarrow q/\lambda$  (cambio de escala espacial) y  $N \rightarrow \lambda^\mu N$  en 1.23, obtenemos que:

$$\tilde{L}\left(\frac{q}{\lambda}, \lambda^\mu N\right) \sim \tilde{L}(q, N). \quad (1.24)$$

Es decir, la función de distribución de probabilidad correspondiente a un desplazamiento  $\lambda/q$  dado en  $\lambda^\mu N$  pasos va a tener la misma forma que la correspondiente a un desplazamiento  $1/q$  dado en  $N$  pasos. Entonces una región espacial de longitud  $R$  contiene en promedio  $N \propto R^\mu$  pasos. La dimensión fractal de Lévy es entonces  $\mu$ .

A las caminatas aleatorias gobernadas por la distribución (1.17), en donde cada desplazamiento  $l_i$  se realiza de manera instantánea, reciben el nombre de vuelos de Lévy (ver Fig. 1.5).

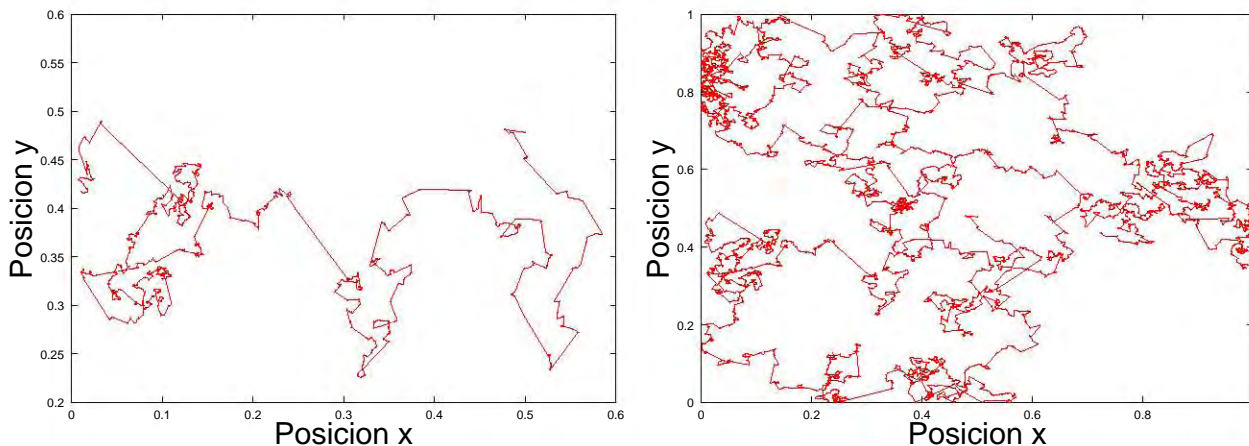


Figura 1.5: En la figura del lado izquierdo se muestra un típico vuelo de Lévy en dos dimensiones con 2000 pasos y en el lado derecho el mismo vuelo con 20000 pasos; es fácil convencerse que este tipo de trayectorias presentan propiedades de autosimilitud.

Si por el contrario cada desplazamiento es realizado con una velocidad finita entonces estaremos hablando de las caminatas de Lévy. A continuación se presentan algunos resultados importantes sobre este último tipo de caminatas:

- La longitud de cada paso sucesivo  $l$  varía de acuerdo a la relación (1.17), en donde se reescribe esta expresión haciendo el cambio de variable

$$a = 1 + \mu \quad (1.25)$$

en donde recordamos que  $\mu$  representa la dimensión fractal del conjunto de sitios visitados por el caminante; por lo tanto:

$$p(l) \sim l^{-a}, \quad 1 < a \leq 3. \quad (1.26)$$

- Suponemos que el caminante se desplaza a velocidad constante.
- Después de un paso de longitud  $l$ , el caminante queda inmóvil en la misma posición durante un tiempo  $t$  (tiempo de espera). Suponemos que el tiempo de espera es una variable aleatoria independiente, tomada de la distribución de probabilidad  $N(t)$

$$N(t) \sim t^{-b}, \quad \text{para } t \gg 1 \quad (1.27)$$

donde  $b$  es un exponente característico. Una distribución estrecha (exponencial) de tiempos de espera se recupera en el límite  $b \gg 1$ .

- El desplazamiento cuadrático medio  $\langle R^2(t) \rangle$  está dado por:

$$\langle R^2(t) \rangle \sim t^c, \quad 1 < c < 2. \quad (1.28)$$

- Existe una predicción precisa acerca de la relación que debería existir entre los tres exponentes  $a$ ,  $b$  y  $c$  [?, ?]:

$$\text{para } b > 2 \quad c = 4 - a \quad (1.29)$$

$$\text{para } b < 2 \quad c = 2 + b - a. \quad (1.30)$$

### 1.3. Caminatas aleatorias en presencia de trampas

Hasta ahora sólo hemos considerado a un caminante aleatorio que puede desplazarse libremente por todo el espacio sin ningún tipo de restricción. Sin embargo un problema de gran interés es aquel donde el caminante se mueve en un medio en presencia de trampas en un espacio de dimensión  $d$ .

El problema de las caminatas aleatorias en presencia de trampas puede plantearse de la siguiente manera. Se considera un espacio homogéneo en  $d$  dimensiones el cual puede ser discreto o continuo, en este espacio se distribuyen aleatoriamente trampas inmóviles con una densidad  $\rho_c$ . Cada trampa ocupa cierto volumen ( $a_0^d$ , donde  $a_0$  es la distancia entre dos nodos vecinos de la red para el caso discreto), y se supone que la densidad de trampas es baja, es decir;  $\rho_c a_0^d \ll 1$ . El caminante parte de un punto aleatorio  $h$  y se desplaza a cada paso  $n$  una longitud  $l_n$  en una dirección arbitraria e independiente del paso anterior hasta encontrarse con una trampa (ver Fig. 1.6).

Si el caminante realiza caminatas Brownianas o de Lévy, nos podemos preguntar ¿Cuál es la probabilidad de que este caminante no encuentre ninguna trampa después de un tiempo  $t$ ? Shlesinger considera este problema para las caminatas de Lévy con  $\mu \leq 1$  [?] y encuentra que la probabilidad promedio  $\phi(t)$  de que el caminante no haya sido atrapado en un tiempo  $t$  está dada por:

$$\phi(t) \sim e^{-t^{d/(d+1)}} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty, \quad (1.31)$$

mientras que para el movimiento Browniano [?] se tiene que:

$$\phi(t) \sim e^{-t^{d/(d+2)}} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.32)$$

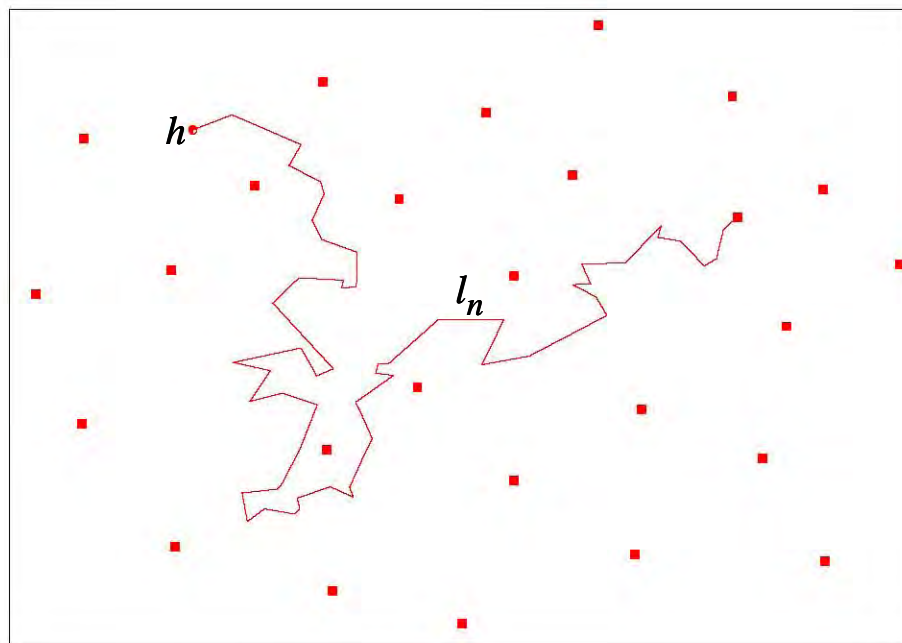


Figura 1.6: Un caminante aleatorio en presencia de trampas de tamaño finito y diluidas en un espacio continuo de dos dimensiones, parte de un punto  $h$  y se desplaza a cada paso  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots, N$ ) de longitud  $l_n$  en una dirección arbitraria e independiente del paso anterior hasta encontrarse con una trampa.

Estas leyes son exponenciales estiradas.

Se puede observar (ver Fig. 1.7) que la probabilidad de no encontrar una trampa a un tiempo  $t$  grande es mayor para el movimiento Browniano que para las caminatas de Lévy.

Para las caminatas de Lévy con  $\mu \leq 1$ , el desplazamiento cuadrático medio está dado por  $X_t^2 \sim t^2$ , mientras que para el movimiento Browniano es  $X_t^2 \sim t$  como se mostró en (1.10). Esto quiere decir que para un tiempo fijo  $T$ , el caminante Browniano busca en dos dimensiones en un círculo de radio  $T^{1/2}$  mientras que un caminante de Lévy busca en un círculo de radio  $T$ . Si la densidad de trampas es baja, el caminante Browniano aunque más completo en su búsqueda (de dimensión fractal 2), pasa mucho tiempo en regiones vacías. Sin embargo el caminante de Lévy visita menos puntos, pero sale más rápido de las regiones vacías.

Si pensamos que los sitios en donde se encuentran las trampas representan los sitios de comida, entonces tenemos que las caminatas de Lévy representan la forma más eficiente de búsqueda de alimento, es decir, la probabilidad de encontrar comida es mayor para las caminatas de Lévy que para las caminatas de un movimiento Browniano. Todo esto pudiera sugerir que para algunos individuos de cierta especie animal, en un medio no conocido con una densidad baja de alimento, las caminatas de Lévy representan una buena estrategia de búsqueda de alimento.

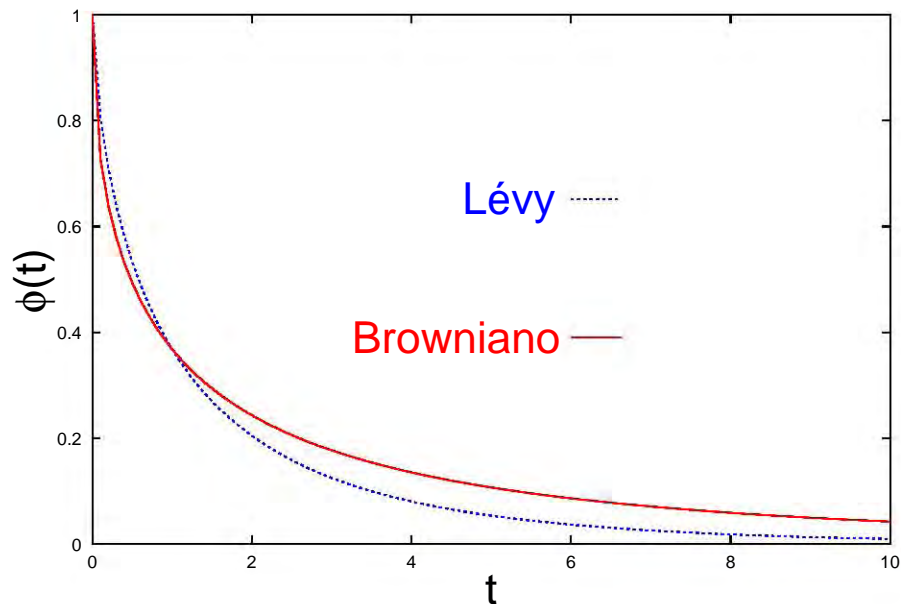


Figura 1.7: En la gráfica se muestra la probabilidad promedio  $\phi(t)$  de no encontrar una trampa después de un tiempo  $t$  grande, en un espacio de dos dimensiones ( $\rho_c a_0^2 \ll 1$ ), tanto para las caminatas de Lévy como para las del movimiento Browniano.

Patrones de Lévy en el forrajeo de animales han sido encontrado en hormigas [?], drosophila [?], microzooplankton [?], albatros [?], renos [?], focas [?], chacales [?] y monos araña [?].

En el siguiente capítulo se presentan varios estudios de animales que realizan caminatas de Lévy en sus actividades de forrajeo, en donde posiblemente las trayectorias recorridas por estos animales están a favor de una estrategia eficiente de búsqueda de alimento, lo que representa un factor determinante para su sobrevivencia.

## Capítulo 2

# Caminatas de Lévy en sistemas biológicos

---

En la naturaleza existen muchos sistemas biológicos que presentan invarianza de escala tanto en los patrones de movimiento de los animales, como en el medio ambiente mismo. Esta invarianza de escala en tales patrones puede reflejar una explotación eficiente del alimento en estos medios, en donde tal vez los movimientos de los animales pueden estar inducidos por la estructura fractal del medio. Todo esto ha dado a especular que tal invarianza puede conferir ventajas biológicas relacionadas con la respuesta de adaptabilidad.<sup>1</sup> En este capítulo se presenta una revisión de algunas especies de animales que realizan caminatas de Lévy al ir en busca de alimento, en donde es de particular interés mostrar el estudio del mono araña, para el que se ha sugerido que sus trayectorias de movimiento podrían ser modelados por caminatas deterministas en lugar de caminatas aleatorias.

### 2.1. Forrajeo de animales en medios desordenados

Muchos animales deben moverse para localizar y capturar comida. Los patrones de movimientos que realizan estos animales son un factor determinante para su supervivencia. Para un ambiente dado existe un rango de comportamientos, los cuales pudieron ser aprendidos o alternativamente ser el resultado de grandes períodos de selección en rasgos específicos. Estos patrones de movimiento reflejan diferentes tácticas usadas por los individuos dentro de una especie o población para satisfacer sus demandas de supervivencia. Entender y modelar estos patrones ha sido de interés para muchos investigadores de diferentes áreas. Es por ello que se han propuesto algunos modelos para poder explicar estos comportamientos [?]. La estadística de Lévy estudiada en el capítulo anterior ha sido útil para describir los movimientos de organismos unicelulares, invertebrados y vertebrados. En la siguiente sección se presenta una revisión sobre el comportamiento de forrajeo de este último tipo de animal: albatros, chacales, renos y mono araña.

---

<sup>1</sup>Por ejemplo, la pérdida de invarianza de escala en los intervalos de los latidos del corazón, corresponden a un estado anómalo [?].

### 2.1.1. Albatros (*Diomedea exulans*)

Uno de los primeros estudios que se llevo a cabo para probar la hipótesis de que ciertos animales realizan vuelos de Lévy al ir en busca de alimento en un medio desconocido en su hábitat natural, fue llevado a cabo con albatros [?]. En este estudio se tomaron datos por un período de tres meses durante el verano, al sur del atlántico. Dispositivos electrónicos de grabación fueron colocados en las patas de cinco *albatros* adultos en la Isla de Bird al sur de Georgia. Estos dispositivos tomaron medidas cada 3 segundos y registraron a cada hora  $u(t)$  el número de intervalos de 15 segundos en el cual el ave se había mojado al menos por 9 segundos. Cada entrada en la serie de tiempo  $u(t)$  es por lo tanto un número de 0 a 240 y  $t = 1, 2, \dots, t_{max}$  es la medida en horas. Se obtienen 19 series de tiempo, una para cada una de los trayectos realizados por las aves al ir en busca de alimento. El rango de duración de los vuelos va de 77 horas a 416 horas con un promedio de 175 horas. Los períodos en los cuales las aves se encuentran mojadas indican interrupción en sus patrones de vuelo, debido a la necesidad de alimentación o de descanso.

Para el estudio de los datos, se usaron los métodos de las caminatas aleatorias, los cuales son útiles para detectar correlaciones de largo alcance.

Se calcula el desplazamiento total  $y(t)$  de la serie de tiempo  $u(t)$  definido por la suma

$$y(t) = \sum_{i=1}^t u(i) \quad (2.1)$$

y el desplazamiento cuadrático medio de  $y(t)$ , que está dado por

$$F(t) = \sqrt{\langle (\Delta y(t))^2 \rangle - \langle \Delta y(t) \rangle^2} \quad \text{con} \quad \Delta y(t) \equiv y(t_0 + t) - y(t_0). \quad (2.2)$$

El cálculo de  $F(t)$  puede distinguir los siguientes comportamientos.

- Las series de tiempo en donde no existen correlaciones son descritas por:

$$F(t) \sim t^{\tilde{\alpha}} \quad \text{con} \quad \tilde{\alpha} = 1/2. \quad (2.3)$$

- Las series de tiempo con correlaciones de largo alcance son descritas por

$$F(t) \sim t^{\tilde{\alpha}} \quad \text{con} \quad \tilde{\alpha} \neq 1/2. \quad (2.4)$$

En el análisis de los datos se detectaron correlaciones de largo alcance con  $\tilde{\alpha} = 0.84 \pm 0.2 \neq \frac{1}{2}$ .

En este estudio además, se grafica la distribución de los intervalos de tiempo de vuelo de las aves, y se encuentra que ésta posee una invarianza de escala, que se aproxima a una ley de potencia inversa. Para analizar los datos obtenidos, se propone un modelo de vuelos de Lévy de índice  $a$  (en forma muy parecida a la relación (??)), para un ave que va en busca

de alimento y que tiene una probabilidad de vuelo  $t_i$  entre cada tiempo de pesca, la cual está dada por:

$$p(t_i) \sim (t_i + 1)^{-a} \quad (2.5)$$

el término “+1” de esta expresión, se debe a que el lapso invertido en cada pesca es igual a una unidad de tiempo. Se observa que  $a \simeq 2$  en el histograma de los datos obtenidos de los tiempos de vuelo (ver Fig. 2.1(a)), por tal motivo se asigna  $a = 2$  en el modelo y se usan simulaciones para calcular  $F(t)$ . El modelo reproduce la ley de potencias obtenida en los datos para  $F(t)$  con  $\tilde{\alpha} = 0.8 \pm 0.08$  lo cual es consistente con el valor  $\tilde{\alpha} = 0.84 \pm 0.2$  encontrado en los datos de estudio (ver Fig. 2.1(a)).

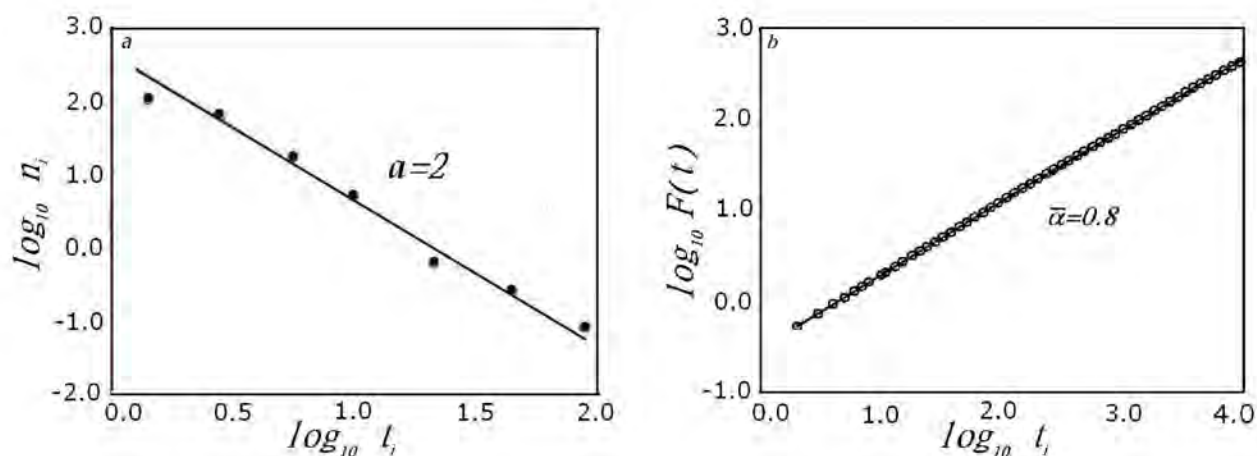


Figura 2.1: (a) En una grafica (log-log) se muestra la distribución del número  $n_i$  de los intervalos de tiempo de vuelo  $t_i$ , se puede observar que el modelo de la caminata de Lévy reproduce muy bien los datos obtenidos durante el verano. (b) En la gráfica (log-log) se muestra  $F(t)$  (desplazamiento cuadrático medio de la serie de tiempo  $u(i)$ ) para el modelo, el cual nos dice que existen correlaciones de largo alcance y que éstas siguen una ley de potencias, este resultado es consistente con los datos obtenidos en el estudio. Datos tomados de [?].

Como ya se mencionó en el capítulo 1, el conjunto de sitios visitados por el caminante posee una dimensión fractal  $\mu$  ( $\mu = a - 1$ ). Los datos obtenidos de este estudio, muestran que los puntos de pesca de los albatros tienen la propiedad de invarianza de escala (ver Fig. 2.2), la cual podría indicar que la distribución de comida sobre la superficie del océano posee a su vez una distribución invariante de escala.

En un estudio posterior Viswanathan *et al.* [?], muestran que un caminante de Lévy que viaja a velocidad constante y que se encuentra con una baja densidad de sitios de comida aleatoriamente distribuidos en el plano, va a visitar más nuevos sitios que un caminante Browniano que viaja la misma distancia lineal. El estudio predice que la óptima distribución de longitudes de los pasos que maximiza la cantidad de comida encontrada por unidad de tiempo, va a estar dada por la relación (??) con exponente  $a = 2$  (ver apéndice A). Este resultado constata de cierta manera, los resultados del problema de trampas presentado en el capítulo 1.



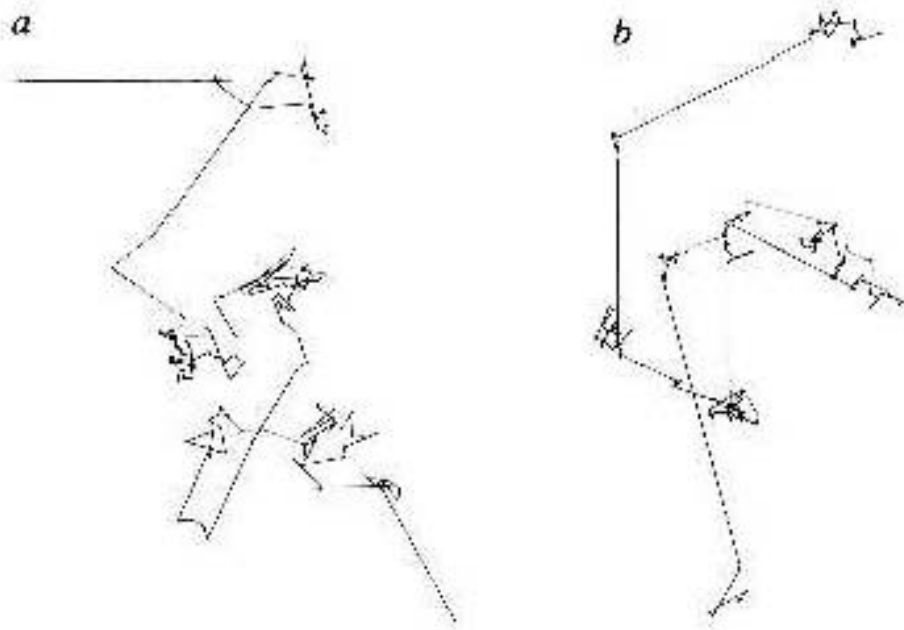


Figura 2.2: (a) Posibles trayectorias de vuelo de una ave, construidas a partir de las series de tiempo. (b) Posibles trayectorias de vuelo dada por el modelo de caminatas de Lévy. Ambas trayectorias (a) y (b), tienen propiedades de fractalidad, lo cual podría indicar que la distribución de comida sobre la superficie del océano es invariante de escala. Datos tomados de [?].

Este estudio ha mostrado que los albatros realizan patrones de Lévy al ir en busca de alimento en un medio no conocido por ellos. Estos patrones parecen ser una estrategia eficiente de búsqueda de alimento con  $a = 2$ . Estos patrones de movimiento realizados por las aves pudieran estar inducidos por la distribución de los recursos, los cuales podrían a su vez tener propiedades de invarianza de escala.

### 2.1.2. Chacales (*Canis adustus*)

Un estudio posterior al de los albatros se realizó con chacales [?], en donde se muestra que estos animales realizan patrones de Lévy en sus desplazamientos al ir en busca de alimento, con la característica de que la posición de su alimento está cambiando continuamente.<sup>2</sup> El estudio de los patrones de movimiento en chacales fue motivado por observaciones en las trayectorias de forrajeo realizadas por estos animales durante la noche, así como también la carencia de visitas a ciertos sitios específicos. Estas observaciones sugirieron que estos animales estaban forrajeando en un medio en donde los recursos alimenticios cambian constantemente de posición. Este estudio fue realizado en Zimbabwe entre octubre de 1993 y octubre de 1994 con algunos chacales, de los cuales 4 eran hembras adultas ( $F$ ), y tres machos adultos ( $M$ ). El análisis de datos fue llevado de la misma forma que con los albatros [?]; se analizaron las series de tiempo de las frecuencias de los desplazamientos, es decir, el número de veces por hora durante la noche en donde había un cambio de posición del Chacal. Esta metodología difiere ligeramente del estudio anterior en que se define  $u(i)$  como el número de veces por hora que el Chacal cambia de posición (asociado a un tiempo de espera), mientras que con el albatros se usó el número de intervalos de 15 segundos por hora donde el ave estaba mojada. Sin embargo, estos métodos son complementarios uno del otro, y son métodos completamente válidos para detectar correlaciones de largo alcance y para indicar la existencia de invarianza de escala. Así que los datos obtenidos en el campo de estudio son analizados a partir de las relaciones (2.1) y (2.2). En este análisis se encontró evidencia de propiedades de invarianza de escala en donde se obtiene un  $\tilde{\alpha} \neq 1/2$  en la relación (2.4), que como se mencionó anteriormente, es un fuerte indicador de la presencia de correlaciones de largo alcance.

Para investigar sobre el posible origen de un comportamiento fractal, se calculó además, la dimensión  $\mu$ , para el conjunto de puntos visitados en las trayectorias de cada uno de los chacales. La dimensión promedio de la trayectoria de forrajeo  $\mu$  para los ocho chacales fue de  $\mu = 1.53 \pm 0.22$ .

La figura (2.3), muestra dos patrones de movimiento tomados para dos chacales hembras durante varias noches sucesivas, lo cual sugiere la posibilidad de que estén buscando alimento en un medio en donde sus presas están cambiando constantemente de posición. En esta misma figura, se observa que ocasionalmente se presentan desplazamientos de gran longitud, lo cual sugiere que la estadística de Lévy estudiada en el capítulo anterior y gobernada por la relación (??), podría ser una estrategia usada por los chacales para explorar de manera más eficiente su habitat. El valor obtenido para  $\mu$  en este estudio es consistente con esta estadística. Recordemos que el exponente  $a$  de la distribución de probabilidad de las longitudes de los pasos en la relación (??), está relacionado con la dimensión fractal  $\mu$  por la expresión (??).

---

<sup>2</sup>La dieta típica de los chacales consiste en fruta y pequeños mamíferos de aproximadamente 5 Kg. [?].

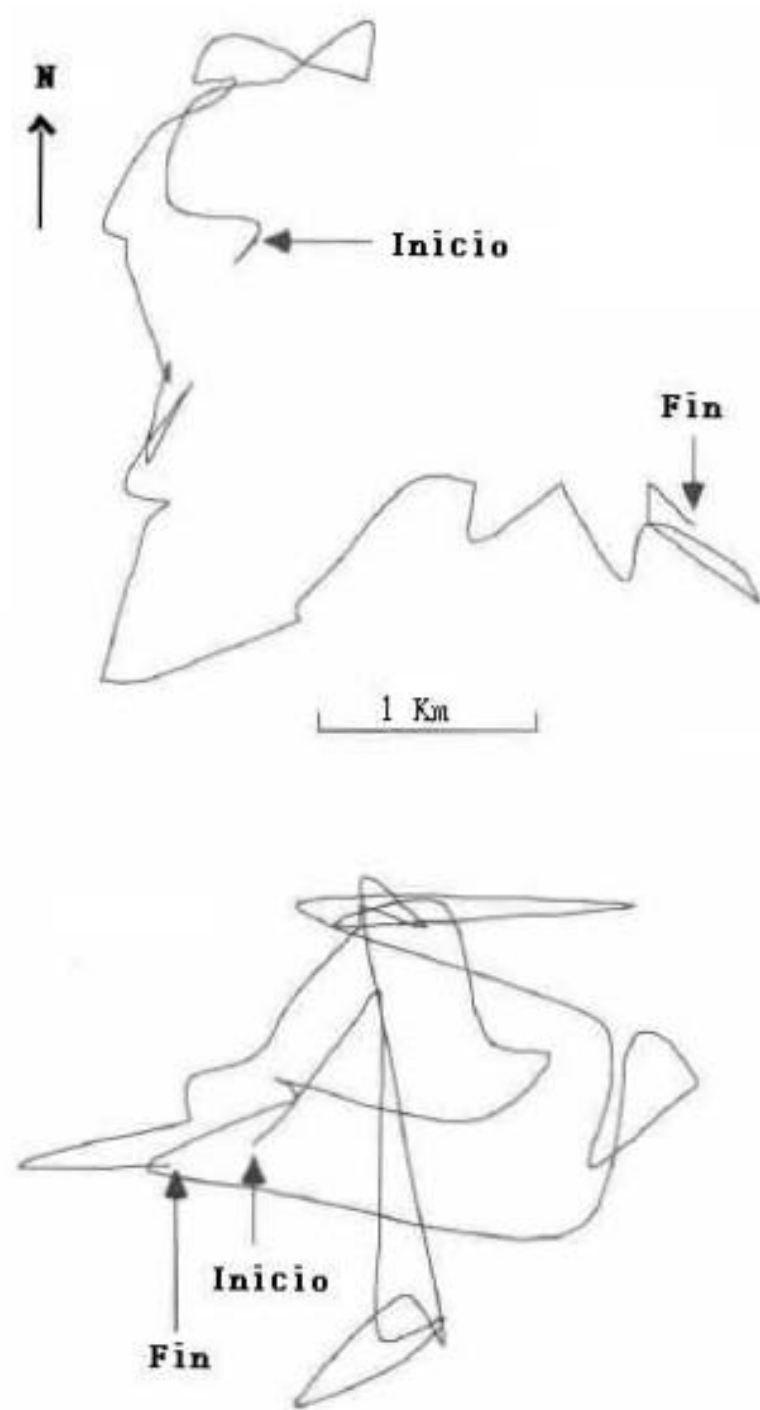


Figura 2.3: Trayectorias de movimiento para dos chacaes hembra. Datos tomados de [?].

En este estudio se encuentra invarianza de escala en los patrones de movimiento realizados por los chacales, correlaciones de largo alcance, sin una escala característica de tiempo. Además de no tener una dimensión entera, el conjunto de puntos visitados por el chacal sugiere que la estadística de Lévy provee una manera adecuada para caracterizar los movimientos observados en los chacales.

En esta revisión de los patrones de movimiento realizados por los chacales, los autores del estudio proponen a un nivel cualitativo, que esta estrategia particular está bien adaptada a la localización de los recursos en un ambiente complejo. El alimento de estos animales está continuamente cambiando de posición, y los patrones de movimiento invariantes de escala pueden ser en respuesta a la fractalidad de los recursos distribuidos en el medio. Para lo cual la competencia individual por los recursos puede ser favorecida por los vuelos de Lévy. Ya que un chacal en busca de alimento puede competir con otro chacal u otros animales de diferentes especies y este tipo de caminatas le permiten encontrar nuevas áreas de explotación. Los patrones de Lévy tal vez son inducidos por la variación de los recursos, tanto temporal como espacialmente, si esto es así, entonces las actividades humanas que afectan este medio ecológico, pueden tener consecuencias dramáticas sobre estos patrones de movimiento.

### 2.1.3. Renos (*Rangifer tarandus L.*)

Otro estudio interesante sobre el comportamiento de forrajeo en animales, es el que se realizó con los renos hembra [?]. Se considera el comportamiento de estos animales en relación a la cantidad y calidad de comida <sup>3</sup> presentes en su hábitat. El estudio fue llevado a cabo en 1999 (como una continuación a un estudio previo del verano de 1998) en una área montañosa del norte de Suecia, en donde una manada de renos perteneciente a la aldea de Gabna Saami, fue estudiada en una área de 2081  $Km^2$ , por un período que comprendiendo la primavera, el verano y el otoño. Durante este lapso la mayoría del tiempo los renos pastearon libremente. Los renos fueron seguidos desde la última semana de mayo hasta la mitad de septiembre. Las observaciones de estos animales fueron llevadas a cabo a una distancia suficientemente lejos de tal manera que no afectara el comportamiento de éstos.

El estudio se realizó con un total de 17 renos, en donde se observó que la selección de los sitios de alimentación llevada a cabo por estos animales, contenían una gran cantidad de alimento y que estos no seleccionaban los sitios en base a su contenido de nitrógeno (este elemento es a menudo un índice de la calidad de la planta, debido a que está correlacionado con el contenido de proteínas de ésta). Además se observó que el reno se movía a diferentes velocidades, al ir en busca de alimento en diferentes temporadas. En cuanto al estudio de los patrones de movimiento, se obtienen los siguientes resultados:

- El desplazamiento cuadrático medio predicho por una caminata aleatoria fue consistentemente menor que el desplazamiento cuadrático medio observado para todos los períodos. Lo que significa que el reno tiene que moverse a grandes distancias que no son bien predichas por un modelo de caminatas aleatorias.
- Las distribuciones de frecuencias de las longitudes de los pasos  $l$  durante el forrajeo en los tres períodos (primavera, verano y otoño), son parecidas a una función de distribución

---

<sup>3</sup>Estos animales se alimentan principalmente de líquenes, hierbas y arbustos.

de vuelos de Lévy estudiada en el capítulo 1, la cual es gobernada por la relación (??).

- El exponente  $a$  estimado en la relación (??) permanece prácticamente constante durante los tres períodos de estudio (ver Fig. 2.4).

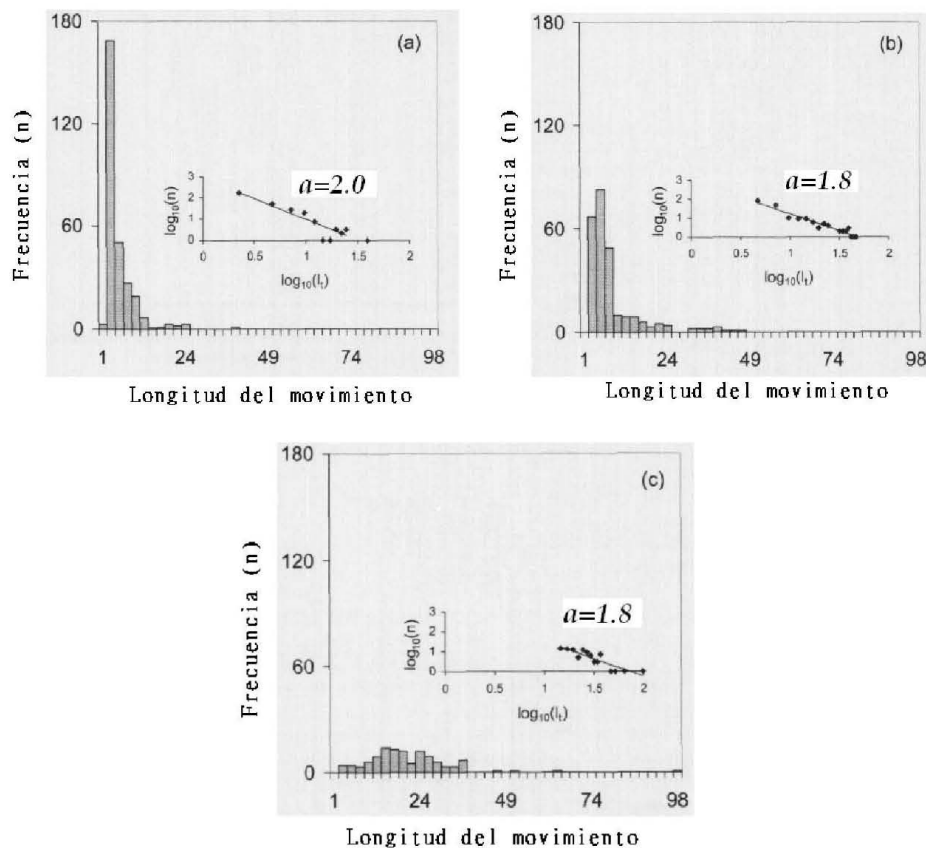


Figura 2.4: Distribución de frecuencias de las longitudes de los pasos  $l$  en el forrajeo de los renos hembra para los diferentes períodos de estudio. ((a) Finales de mayo a mitad de junio. (b) Mitad de junio a finales de julio. (c) Mitad de agosto a mitad de septiembre.) En cada una de las gráficas se muestra también el mismo análisis de datos pero ahora en una gráfica (log-log). Datos tomados de [?].

Los autores de este estudio interpretan sus resultados al igual que Viswanathan *et al.* [?], en donde este tipo de comportamiento de forrajeo en los renos puede representar una estrategia eficiente de búsqueda de alimento con  $a \simeq 2$  en la relación (??). Lo cual sugiere que el reno adopta una estrategia de búsqueda aleatoria cuando el alimento está fuera de su rango de detección, lo cual lo lleva a una área nueva e inexplorada.

Es importante mencionar que este trabajo muestra evidencia de patrones de Lévy en las longitudes de los pasos  $l$  de los renos hembras al ir en busca de alimento, durante los períodos de primavera, verano y otoño, con la importante característica que el exponente  $a$  de la relación (??), permanece prácticamente constante durante los tres períodos.

#### 2.1.4. Mono araña (*Ateles geoffroyi*)

En México existe una área natural protegida en el noreste de la península de Yucatán, entre los estados de Quintana Roo y Yucatán. El área, conocida como *Otoch Ma'ax Yetel Kooh* (en maya yucateco, que significa “casa del mono araña y del puma”) tiene una población importante de monos araña (ver Fig. 2.5) y fragmentos aún considerables de selva bien conservada, de donde el mono araña se alimenta de una gran variedad de frutas. Este animal es muy frugívoro [?]; del total del tiempo que destina a la alimentación el 80 % a 90 % lo dedica al consumo de la fruta de los árboles <sup>4</sup> y el resto del tiempo se alimenta de hojas, flores y corteza. Debido a estas características, las poblaciones de monos araña son vulnerables a los cambios ecológicos del medio en que habitan, en donde tanto las distribuciones espaciales como temporales de los recursos están lejos de ser uniformes.



Figura 2.5: El mono araña perteneciente al género *Ateles geoffroyi* es de constitución delgada, tiene extremidades largas y colgantes, su cabeza es relativamente pequeña y los machos no tienen barba. Miden de 35 a 45 centímetros y su cola alcanza hasta los 85 centímetros. En México habita las selvas tropicales desde el sur de Tamaulipas y toda la costa del Golfo hasta el sureste de México. (Imagen tomada del sitio de internet <http://www.pronatura-ppy.org.mx>).

Desde 1994, investigadores de diversas instituciones de México y el extranjero han estudiado tanto la ecología como la conducta del mono araña, en esta área protegida. En 1996 Gabriel Ramos Fernández y su grupo de trabajo inician la investigación sobre el comportamiento del mono araña en la selva de los alrededores del lago Punta Laguna, que está situado dentro de *Otoch ma'ax yetel Kooh* (ver Fig. 2.6).

En uno de los trabajos publicados recientemente por Gabriel Ramos *et al.* [?], se analizan las trayectorias de forrajeo descritas por el mono araña, en la selva de Punta Laguna sobre un territorio de 2 Km<sup>2</sup> (ver Fig. 2.7). Para esto se utilizaron las trayectorias de 20 individuos diferentes, los cuales fueron seguidos desde el amanecer hasta el anochecer, esto con el propósito de analizar la distribución de probabilidad de las distancias recorridas en intervalos de 5 minutos, así como la distribución de probabilidad de los tiempos de espera entre dos

---

<sup>4</sup>Los monos araña se encuentran casi todo el tiempo (día y noche) en la cima de los árboles.



Figura 2.6: Localización de *Punta laguna* en la península de Yucatán (Imagen tomada del sitio de internet <http://www.pronatura-ppy.org.mx/Copia%20de%20proyectos-mono-ver.html>).

desplazamientos y el desplazamiento cuadrático medio como función del tiempo.

El análisis de los datos de campo muestra lo siguiente:

- El mono araña realiza en primera aproximación, trayectorias similares a las caminatas de Lévy las cuales son descritas por la relación (??). Tres ejemplos de estas trayectorias se muestran en la figura (2.8, (a-d)); en (d) es posible ver un acercamiento de la parte izquierda inferior de la figura (c) y podemos observar que existe aparentemente una invariancia de escala en las trayectorias de los pasos.
- La distribución de frecuencias para las longitudes de los pasos presenta invariancia de escala (ver Fig. 2.9). Gráficando en (log-log) estos datos se encuentra que existe una ley de potencia inversa asociada a ellos, cuyo exponente  $a$  está dado por  $a \simeq 2.2$ .
- Se define  $N(t)$  (tiempo de espera), como el intervalo de tiempo durante el cual un individuo se queda inmóvil o dentro de un radio de 10 metros alrededor de una posición fija (durante este tiempo el mono araña come fruta o descansa). Se encuentra que la distribución de probabilidad de los tiempos de espera a lo largo de las trayectorias, presentan invariancia de escala. A lo largo de una trayectoria el mono araña puede detenerse de 10 minutos hasta dos horas antes de iniciar algún nuevo desplazamiento. Los datos obtenidos son mostrados en una gráfica (log-log) en donde se encuentra que existe una ley de potencia inversa asociada a ellos, con exponente  $b = 1.7$  (ver Fig. 2.10).
- Del desplazamiento cuadrático medio  $\langle R^2(t) \rangle$  de las trayectorias realizadas por los individuos, es posible identificar un patrón común; el mono araña por la mañana tienden a irse lejos en unas pocas horas del sitio de donde durmieron, para después del medio día regresar



Figura 2.7: La selva de Punta Laguna consta de enormes y frondosos árboles tropicales, dispersos entre el resto de la vegetación. Esta región es caracterizada por un clima tropical con un promedio anual de temperatura de  $25^{\circ}\text{C}$  y un promedio anual de precipitación de alrededor de 1500 mm; de los cuales el 70% de estos se reúne entre los meses de mayo y octubre (Imagen tomada de [?]).

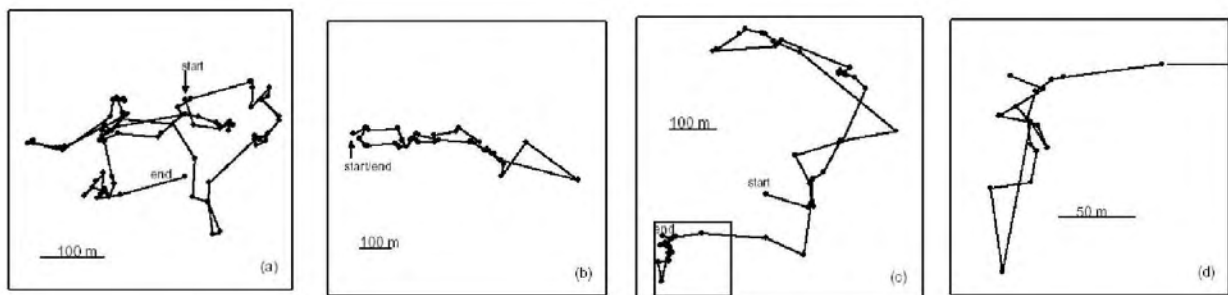


Figura 2.8: Trayectorias diarias del mono araña. En (a,b) para hembras adultas. En (c) para machos adultos, con una sección de la trayectoria de la parte izquierda inferior ampliificada en (d). Note que algunos individuos como las hembras adultas en (b), regresan a dormir a un sitio no muy lejano de donde iniciaron su viaje. Datos tomados de [?].



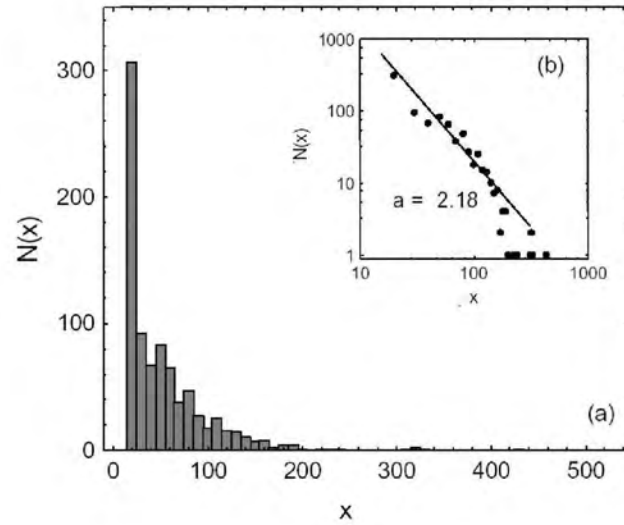


Figura 2.9: (a) Distribución del número de intervalos  $N(x)$  en un lapso de 5 minutos durante el cual el mono araña viaja una distancia de  $x$  metros. Un total de 841 intervalos de 5 minutos en 20 adultos son considerados. (b) Se grafica en (log-log)  $N(x)$  contra  $x$  y se encuentra la existencia de una ley de potencia inversa cuyo valor estimado del exponente es de 2.2. Datos tomados de [?].

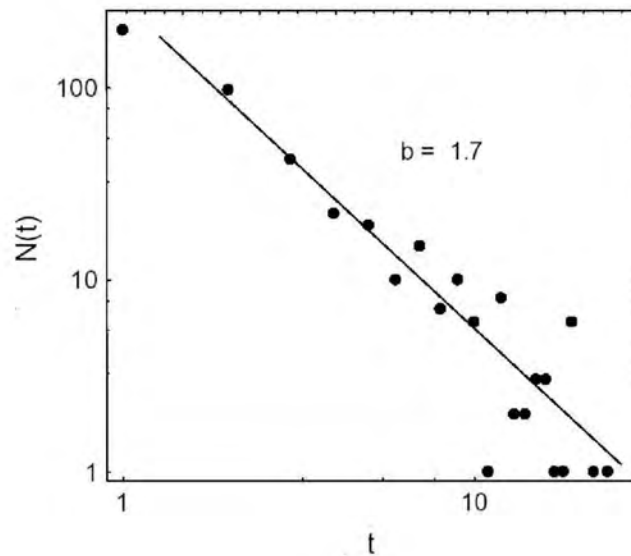


Figura 2.10: Distribución de los tiempos de espera durante las trayectorias del *mono araña*. Se grafica en (log-log) el número de intervalos  $N(t)$  asociado a un tiempo de espera  $t$ . Es clara la existencia de una ley de potencia inversa cuyo valor estimado del exponente es de 1.7. Datos tomados de [?].

a algún lugar cercano antes de la puesta del sol.<sup>5</sup> Algunos individuos, especialmente los machos, no se apegan mucho a esta regla. En la gráfica (2.11(a)) es posible observar un máximo en el desplazamiento cuadrático medio aproximadamente a las 10:30 horas. Se grafica en (log-log) estos datos (2.11 (b)) en un intervalo de 06:30 a 10:30 horas, y se encuentra la existencia de una ley de potencia, cuyo exponente está dado por  $c = 1.7$ .

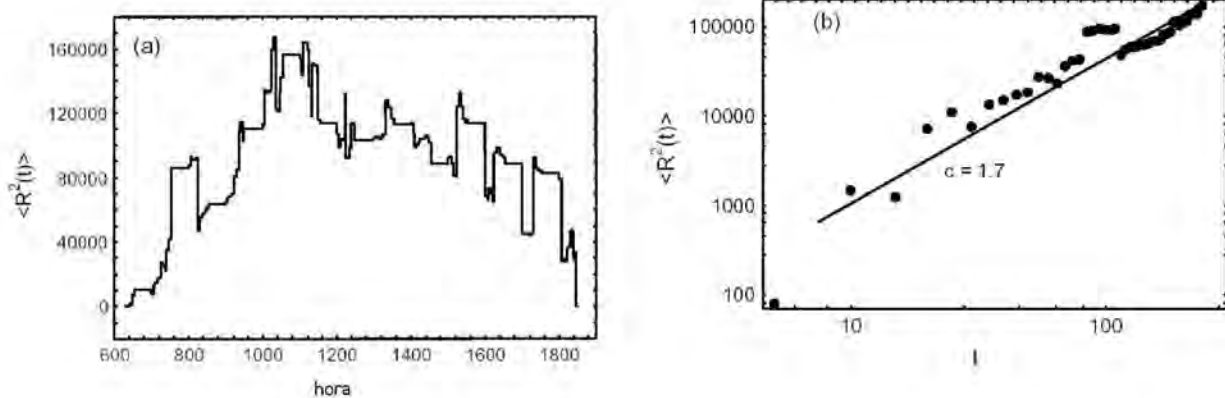


Figura 2.11: (a) Gráfica del desplazamiento cuadrático medio  $\langle R^2(t) \rangle$  de las trayectorias realizadas por el mono araña en diferentes horas del día. Notese que hay un máximo a las 10:30 horas. (b) Se grafica en (log-log)  $\langle R^2(t) \rangle$  en el intervalo de 06:30 a 10:30 horas. Es clara la existencia de una ley de potencia cuyo valor estimado del exponente es de 1.7. Datos tomados de [?].

De los datos obtenidos en el área de estudio, se tiene que el exponente de la distribución de los tiempos de espera es  $b = 1.7$ . Se puede intentar probar si se satisface la relación (??), válida para caminatas de Lévy con pasos independientes. Así que si sustituimos en esta relación los valores de  $b = 1.7$  y  $a = 2.2$ , el exponente que caracteriza los desplazamientos está dado por:

$$c = 2 + (1.7) - (2.2) = 1.5$$

cuyo valor es cercano al que se mide  $c = 1.7$ . Así que de lo anterior se concluye que las trayectorias realizadas por el mono araña pueden ser muy bien descritas por una caminata de Lévy, al menos durante la primera parte del día.

Además en este estudio se analizaron separadamente los patrones de forrajeo, tanto de hembras como de machos. La figura (2.12) muestra que en ambos casos, estos movimientos se describen adecuadamente por patrones de Lévy gobernados por la relación (??), cuyos exponentes están dados por  $a_f = 2,1$  para hembras y  $a_m = 1.5$  para machos. De donde observamos que los machos realizan pasos más grandes que las hembras. Este resultado está de acuerdo con el hecho de que los machos ocupan regiones más grandes que las de las hembras, además de que los machos viajan más lejos en el día comparado con las hembras.

<sup>5</sup>Se sabe que generalmente regresan a un lugar cercano de donde durmieron.

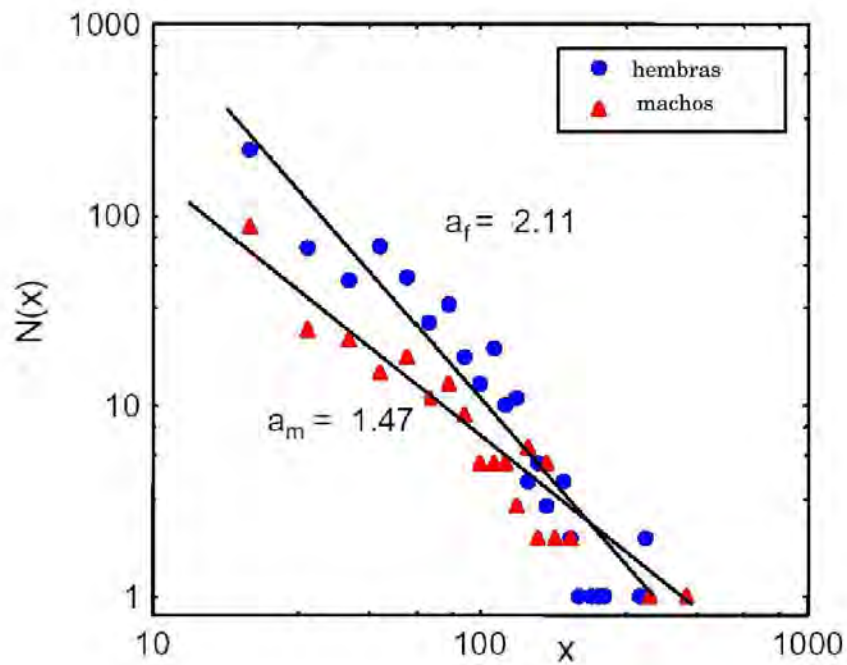


Figura 2.12: Se grafica en (log-log) tanto para hembras como para machos, la distribución del número de intervalos  $N(x)$  de 5 minutos, durante el cual el mono araña viaja una distancia de  $x$  metros. Para 14 hembras un total de 604 intervalos fueron analizados en donde se encuentra que existe una ley de potencia inversa con exponente de 2.1. Para 7 machos un total de 237 intervalos fueron analizados en donde se encuentra que existe una ley de potencia inversa cuyo valor estimado del exponente es 1.5. Datos tomados de [?].

Por otra parte es importante mencionar que la comunidad de los monos araña forman temporalmente agregados de diferentes tamaños y composición a través del día. Las trayectorias descritas por un sólo individuo podrían entonces ser diferentes a las descritas por los individuos de un subgrupo. Del análisis de los datos de campo obtenidos por Gabriel Ramos *et al.* se sabe que el mono araña cambia de subgrupo varias veces durante el día, así que la trayectoria descrita por un individuo en un día completo incluye los pasos que realiza el individuo andando solo y otros más cuando forma parte de algún subgrupo. Cuando se analiza la distribución de la longitudes de los pasos para ambos casos, el valor del exponente es diferente:  $a_a = 1.50$  para la longitudes de los pasos del individuo andando solo y  $a_g = 2.1$  para el individuo formando parte de un subgrupo (ver Fig. 2.13.).

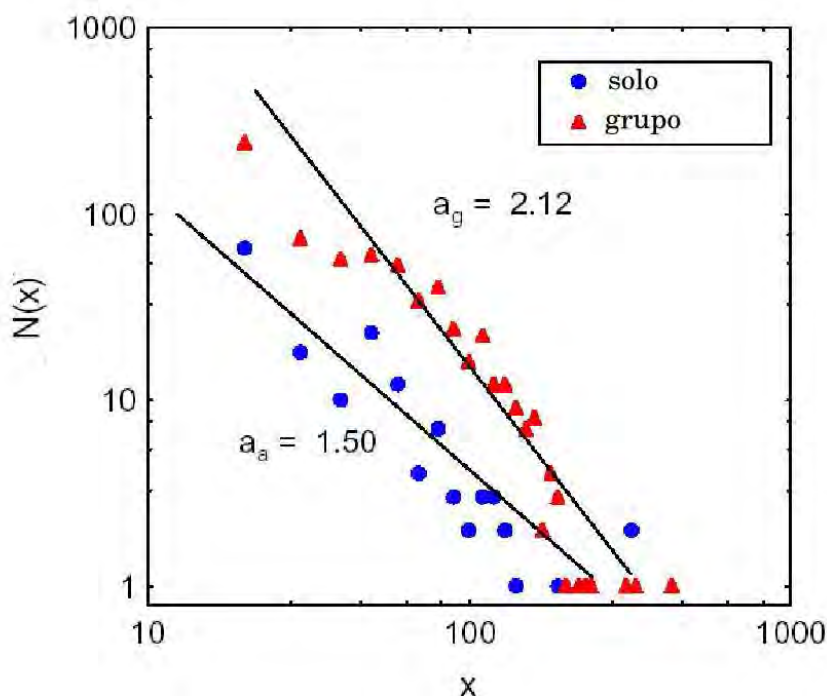


Figura 2.13: Distancia recorrida por los mono araña, cuando están solos y en grupos. Se muestra en una gráfica (log-log) el número  $N(x)$  en intervalos de 5 minutos en el cual un sólo mono araña adulto recorre una distancia  $x$ . Para el mono araña viajando solo, un total de 156 intervalos de 5 minutos es obtenido. Una relación de ley de potencia inversa se ajusta a los datos con un exponente de  $a_a = 1.50$ . Para el mono araña viajando en grupo, un total de 685 intervalos de 5 minutos son obtenidos. Una relación de ley de potencia inversa se ajusta a los datos con un exponente  $a_g = 2.12$ . Datos tomados de [?].

Las caminatas de Lévy reportadas en este estudio podrían representar una estrategia eficiente de obtención de alimento, esto basado en los mapas mentales que pudiera poseer el mono araña acerca de la localización de la fruta. Un sofisticado conocimiento de la ubicación de los recursos de comida ha sido observado en varias especies de animales [?, ?]. Trabajos recientes llevados a cabo en el sitio de estudio del mono araña, han mostrado que estos animales pueden orientar

sus movimientos en línea recta hacia árboles de fruta a una distancia superior a los 1500 metros. Es difícil creer que estos primates sean capaces de visualizar estos árboles a tan grandes distancias. En lugar de ello se ha propuesto que el mono araña debe utilizar algún tipo de representación mental para la localización de su alimento [?]. Por lo tanto los patrones de movimiento reportados en este estudio, no pueden *a priori*, ser descritos adecuadamente por un simple modelo de búsqueda con caminatas aleatorias. Es posible que estos movimiento llevados a cabo por el mono araña estén inducidos por la distribución de los recursos, los cuales tal vez posean por sí mismos una estructura fractal.

En la siguiente sección se aborda la posibilidad de introducir un modelo, en el cual se incluya la capacidad de memoria que posee el mono araña sobre la ubicación de su alimento. Este conocimiento, podría ser un factor determinante para que estos animales realicen caminatas de Lévy como parte de una estrategia eficiente de obtención de alimento.

## 2.2. Caminatas deterministas en estrategias locales de forrajeo

En la sección anterior se mostró que ciertos animales tales como los albatros, chacales, renos y mono araña, muestran patrones de Lévy en sus actividades de forrajeo. En el caso de los tres primeros se ha propuesto que éstos se ajustan adecuadamente a una descripción de forrajeo en un medio donde no se conoce la posición de su alimento o el cual puede estar constantemente cambiando. Los patrones de movimiento se interpretan como una estrategia eficiente de búsqueda de alimento, representadas por una caminata aleatoria, la que es gobernada por la relación (??) con un exponente  $a \simeq 2$ . En el caso del mono araña, a diferencia de los anteriores, se cree que posee un buen conocimiento de su territorio (que es relativamente pequeño) y sabe dónde se encuentra localizado su alimento. Estos animales parecen contar con mapas mentales, por lo que es posible que su comportamiento de forrajeo esté determinado por esta información.<sup>6</sup> Se ha encontrado que los patrones de movimiento para el mono araña son también descritos apropiadamente por una caminata de Lévy con un exponente  $a \simeq 2$  (relación ??). Creemos que este tipo de comportamiento está a favor de una estrategia eficiente de forrajeo. Al tener en cuenta los mapas mentales del mono araña sobre la ubicación de los recursos, los patrones de movimientos reportados por Gabriel Ramos *et al.* para el mono araña, pudieran ser descritos adecuadamente por una caminata determinista.

Las caminatas deterministas presentan dificultades comunes al área de los sistemas dinámicos no lineales, y han sido menos estudiadas que las caminatas aleatorias. Lima *et al.* [?], presentan un modelo sencillo de una caminata determinista que podría ser aplicado de manera más específica a estrategias locales de forrajeo. El modelo es definido de la siguiente manera:  $N$  puntos son distribuidos aleatoriamente con una densidad uniforme  $\rho$  en un espacio  $\mathcal{R}^d$  donde  $d$  es la dimensión del espacio ( $d = 2$  para situaciones prácticas). A cada paso el caminante sigue una sencilla regla determinista:

Ir al sitio más cercano que no haya sido visitado en los pasados  $\tau$  pasos.

---

<sup>6</sup>Se sabe de algunos animales que parecen contar con mapas mentales al moverse en su hábitat tales como: abejas, roedores y primates [?, ?, ?].

Es importante notar que el caminante desea minimizar sólo la distancia al próximo sitio (un procedimiento local de optimización permitido por el mapa mental que posee el caminante sobre su territorio).

Tal como Lima *et al.* han sugerido, este modelo puede ser de mucha utilidad para entender los patrones de movimiento realizados por ciertos animales tales como los herbívoros [?]. Si el medio no regenera alimentos rápidamente, se toma el límite  $\tau \rightarrow \infty$ . Sin embargo, la longitud de los pasos de sitio a sitio en el modelo no va a estar dada por una ley de potencia inversa, con exponente  $a = 2$ ; existe una escala característica  $\rho^{-1/d}$  entre sitios cercanos. En nuestro caso el mono araña trataría de ir al sitio más cercano y conseguir la mayor cantidad o calidad de alimento. En seguida se presentan algunos datos de interés general sobre la selva tropical (habitat del mono araña), todo ello con el objetivo de plantear adecuadamente en el siguiente capítulo un modelo determinista basado en el modelo presentado en esta sección y en el que se intente reproducir los patrones de movimiento llevados a cabo por el mono araña al ir en busca de alimento.

### 2.3. La selva tropical como un medio complejo

La competencia por energía y nutrientes ha jugado un papel muy importante en la diversificación de las plantas en las selvas tropicales, desarrollándose una enorme variedad de formas de vida, de crecimiento y de utilización de los recursos.<sup>7</sup> Estos medios tienden a alcanzar un aprovechamiento óptimo de recursos, aún en condiciones de competencia extrema. La lucha por la luz es un factor crucial en la vida de todas las plantas de la selva y contribuye a determinar aspectos tan diversos de la estructura y dinámica de la vegetación.

La vida arbórea permite a las plantas aprovechar la energía radiante del sol, la que es más abundante en las alturas que en el suelo de la selva. Otras ventajas de este tipo de vida son la dispersión de semillas y polen por medio del viento y la acción de animales móviles, aves, murciélagos y otros vertebrados muy comunes en las copas de los árboles.

La caída de ramas y árboles en la selva provocan la apertura de claros, que permiten el crecimiento de nuevos individuos. Los claros pueden ser de diferentes tamaños pero los pequeños son mucho más comunes que los grandes, y así un gran número de árboles de la selva están adaptados para crecer en tales condiciones. Las distribuciones (tanto espaciales como de tamaño) de los árboles que emergen en este sistema complejo, podrían inducir los patrones de movimiento de ciertos animales frugívoros. Es muy posible que estas caminatas de Lévy con propiedades de autosimilitud, estén inducidas por la estructura fractal de la selva tropical. Trabajos recientes [?], han encontrado que en los bosques tropicales y templados, la probabilidad  $p(k)$  de observar árboles de tamaño  $k$  (estimado por la medición del diámetro del árbol a la altura del pecho; una medición estándar en ecología) decae de acuerdo a una ley de potencia de la forma  $p(k) \sim k^{-\beta}$  en donde los valores de  $\beta$  están en el intervalo de  $1.5 \leq \beta \leq 4$  [?, ?]. Algunos de los árboles de la selva tropical son llamados pioneros, ya que son de crecimiento

---

<sup>7</sup>En esta sección se pretende hacer una muy breve revisión de algunos aspectos importantes de la selva tropical en México, por tal motivo gran parte de la información presentada en esta sección ha sido tomada del libro de divulgación “Las selvas tropicales húmedas de México” [?].

rápido, reproducción temprana y vida corta. Por el contrario las especies conocidas como persistentes son de crecimiento lento, vida larga y por lo general producen semillas más grandes que las especies pioneras. Estas semillas son dispersadas por un conjunto más pequeño de animales frugívoros, como el mono aullador, mono araña, aves grandes como el tucán y roedores terrestres como el serete.

Es un hecho bien documentado que en las selvas la mayoría de las plantas produce frutos carnosos que sirven para atraer gran variedad de aves y mamíferos, que los usan como alimento. Muchos de estos animales ingieren las semillas accidentalmente, al tragarse la pulpa de la fruta, las que son defecadas o regurgitadas más tarde, más o menos lejos de su punto de origen.<sup>8</sup> Muchas semillas no son destruidas durante la defecación y algunas germinarán después de la dispersión. Para muchas plantas de estas selvas, la única manera de lograr el éxito reproductivo y colonizar un nuevo hábita es a través de la dispersión de las semillas por animales. Además, las plantas invierten energía en la producción de un suministro alimenticio atractivo para que los animales coman los frutos y dispersen las semillas. En un clima cálido y húmedo, los depredadores de semillas pueden incrementar fácilmente sus poblaciones, y pueden hacer que muy pocas o ninguna de las semillas sobrevivan para germinar.

Un árbol joven que intenta crecer a la sombra de la copa del árbol madre está sujeto a una fuerte competencia con éste y otros congéneres jóvenes. Además, se ha comprobado que las plántulas de los árboles de la selva no crecen bien bajo las condiciones de penumbra del piso de la selva, requieren abundancia de luz, aportada generalmente por claros. Igualmente, la agregación con el árbol madre también facilita el ataque de patógenos (por contagio) y herbívoros. Así, al ser dispersadas las semillas lejos de su lugar de origen tienen más probabilidades de encontrar un claro; un microambiente de menor competencia, con menos parásitos en donde establecerse y crecer [?, ?].

Hemos mencionado que los frutos, a menudo carnosos, dulces y succulentos, son el cebo por medio del cual la planta atrae a una amplia variedad de animales, que aparte de ser grandes y poder ingerir varias semillas, también se mueven a grandes distancias. Al alimentarse, los animales frugívoros se tragan las semillas y las dispersan a través de sus heces, posiblemente a grandes distancias del árbol progenitor, especialmente si recorren trayectorias de tipo caminatas de Lévy. Entonces, los frugívoros le prestan dos servicios importantes a las plantas:

- 1) Permiten que muchas semillas escapen de una muerte segura bajo la sombra de la copa del árbol madre, incrementando así el éxito reproductivo de la planta.
- 2) Hacen posible que las plantas colonicen sitios que de otra manera no les serían accesibles.

De esta manera, las plantas de las selvas húmedas están atrapadas en una íntima dependencia con los animales frugívoros, y éstos a su vez dependen de los frutos de las plantas como fuente importante de alimento.

---

<sup>8</sup>El mono araña deposita las semillas que ingiere lejos del lugar que las ha consumido, en un tiempo de aproximadamente 4.4 horas [?]. Durante este tiempo el mono puede viajar distancias de 10 a 100 metros.

# Capítulo 3

## El modelo

---

En este capítulo se presenta un modelo determinista que intenta reproducir los patrones de movimiento y las características principales de forrajeo llevadas a cabo por el mono araña. Creemos que las caminatas de Lévy realizadas por este animal, están inducidas por una estrategia eficiente de forrajeo, así como también por el medio que habitan. Como se mostró en el capítulo anterior, el mono araña puede realizar caminatas de Lévy cuando se alimenta estando sólo o formando parte de un grupo. Para este modelo se considera el estudio del mono araña cuando se encuentra solo, debido a lo siguiente:

- En un estudio llevado a cabo por Gabriel Ramos *et al.* se ha encontrado que los monos araña son animales sociables, que forman grupos constituidos en su mayoría de 1 a 2 animales.<sup>1</sup> Es posible que el comportamiento de forrajeo de un mono araña sea afectado por los otros individuos del grupo, pero en primera aproximación se considera que esto no sucede.

También en este modelo no se hace ninguna distinción entre si el primate es hembra o macho, o si durante sus trayectorias ha realizado algunos pasos formando parte de un grupo.

### 3.0.1. Modelo del caminante hambriento bien informado (MCHBI)

Se considera un espacio de  $d$  dimensiones (en la práctica tomamos  $d=2$ ) con objetivos puntuales distribuidos aleatoriamente y uniformemente en el espacio (de densidad  $\rho_0$ ), estos objetivos van a representar a los árboles del campo. Los árboles contienen la fruta con que el mono se alimentan. No todos los objetivos representan necesariamente comida, también algunos de ellos pueden ser lugares que los monos utilizan para descansar. Los animales que se alimentan de las frutas de estos árboles pueden encontrar árboles (o conglomerados) de varios tamaños. Nosotros vamos a modelar cada uno de estos objetivos  $i$  asignando un número entero aleatorio  $k_i (\geq 1)$  el cual va a representar el tamaño o la importancia relativa del árbol.

*A priori* todos los objetivos no tienen la misma importancia y asumimos que el peso  $k$  está distribuido al azar de manera no uniforme de acuerdo con una distribución de probabilidad de la forma de una ley de potencia inversa:

---

<sup>1</sup>Pueden existir grupos de hasta 12 a 13 individuos, pero la probabilidad de observar un grupo disminuye rápidamente con el tamaño [?].



$$P(k) = Ck^{-\beta}, \quad C = 1/\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\beta} \quad (3.1)$$

donde  $1 < \beta < \infty$ , es un exponente que caracteriza la distribución de los recursos en el medio ambiente y  $C$  es la constante de normalización. Esta suposición está de acuerdo con lo que se mencionó en el capítulo 2, acerca de que existen trabajos recientes en los cuales se han reportado leyes de potencia en la distribución del tamaño de los árboles en los bosques tropicales y templados.

En el caso límite en que  $\beta = \infty$  en la relación (3.1), todos los objetivos tienen la misma importancia ( $k_i = 1$ ). En el caso general, la distribución de los objetivos es de muchos de ellos pequeños y unos pocos grandes, tal como sucede en una situación más realista ( $1.5 \leq \beta \leq 4$ ).<sup>2</sup>

Como ya ha sido mencionado anteriormente se sabe que en el campo de estudio, el mono araña usa rutas regulares para viajar entre los sitios de alimento, en una área limitada de 2 Km<sup>2</sup> [?]. Por lo tanto, nosotros vamos a suponer que el mono araña tiene un buen conocimiento de su territorio, es decir parece contar con mapas mentales. Se ha mostrado que otras especies de animales utilizan estos mapas mentales con el propósito de moverse en su medio ambiente. Estos mapas pueden contener información acerca de la localización de diferentes objetivos y las relaciones geométricas entre estos [?]. Durante las caminatas son también capaces de evaluar la cantidad de comida presente en diferentes localizaciones de su medio ambiente [?] y en algunos casos integrar esta información a su conocimiento espacial [?].

Es de interés en este trabajo entender los efectos de una distribución de recursos en las trayectorias de los monos. Para ello vamos a suponer que el mono araña conoce dónde están todos los objetivos, como también su importancia o peso. En esta situación idealizada nosotros consideramos las siguientes reglas de movimiento:

- Un mono localizado en un objetivo  $i$  va a moverse a un objetivo  $j$  tal que  $\xi_{ij} \equiv l_{ij}/k_j$  es un mínimo entre todos los objetivos  $j \neq i$ , donde  $l_{ij}$  es la distancia de separación de ambos objetivos y  $k_j$  es la importancia del objetivo  $j$ .
- Los monos no van a un objetivo ya visitado.

Los objetivos populares (grandes  $k$ ) son visitados de manera preferencial, de igual forma si ellos no están tan cerca. El cociente  $l/k$  representa la razón de *costo/ganancia*. Cabe mencionar que el exponente  $\beta$  de la distribución de los recursos es sólo un parámetro del modelo.

Para implementar el MCHBI, se distribuyen al azar de manera uniforme e independiente 1,000,000 de objetivos en un espacio de dos dimensiones ( $d = 2$ ), en una área de una unidad cuadrada. Se define  $l_0 \equiv N^{-1/d}$  como la distancia promedio entre dos objetivos cercanos. Cada uno de los objetivos  $i$  tiene asociado un peso  $k_i (\geq 1)$ , el cual está distribuido aleatoriamente de manera no uniforme de acuerdo con la relación (3.1), en donde recordamos que el exponente  $\beta$  de esta relación es el único parámetro del modelo que representa la distribución de

---

<sup>2</sup>Ver la sección: La selva tropical como un medio complejo.

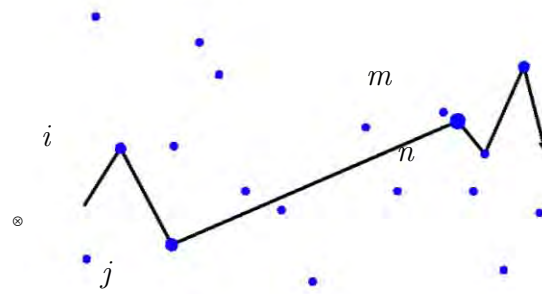


Figura 3.1: Un caminante hambriento siguiendo unas sencillas reglas de movimiento visita algunos de los objetivos de diferentes peso  $k$ , los cuales han sido previamente distribuidos al azar.

los recursos. Para una distribución dada de recursos ( $\beta$  fijo), permitimos que el caminante parta de un objetivo muy cercano al centro del área de estudio ( $x \sim 0.5, y \sim 0.5$ ) y que realice 20,000 pasos obedeciendo las reglas del modelo. Con el propósito de lograr un buen estudio de los resultados obtenidos por el modelo, para cada valor de  $\beta$  se va a realizar de manera similar 10 veces el proceso anterior.

Los valores de  $\beta$  que se van a considerar en este estudio son:  $\{1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5\}$ , los cuales como ya hemos dicho van a representar, cada uno de ellos una distribución diferente de los recursos en el área de estudio del modelo.

# Capítulo 4

## Resultados

---

La selva tropical es un medio complejo con una enorme variedad de formas de vida, <sup>1</sup> en donde la competencia por la energía y los nutrientes llevan a estos organismos a alcanzar un aprovechamiento óptimo de los recursos, los que a su vez, juegan un papel muy importante en su crecimiento. Uno de los habitantes de la selva tropical es el mono araña, el cual es un animal muy frugívoro, del total de tiempo que destina a la alimentación, el 80 % a 90 % lo dedica al consumo de la fruta de los árboles. En el capítulo dos se mostró que estos animales realizan caminatas de Lévy en sus actividades de forrajeo, las cuales están gobernadas por la relación (??) con exponente  $\alpha \simeq 2$ . Estos patrones de movimiento realizados por el mono araña podrían estar a favor de una estrategia eficiente de obtención de alimento, basada en las capacidades cognitivas que posee este animal acerca de la localización de la fruta. Es muy posible que estos patrones de movimientos estén inducidos por la distribución de los recursos, los que tal vez por sí mismos poseen una estructura fractal. En este capítulo se presentan los resultados obtenidos por el MCHBI, cuya finalidad es reproducir las trayectorias de movimiento realizadas por el mono araña en sus actividades de forrajeo, así como lograr un mejor entendimiento de las causas y consecuencias de estos patrones de movimiento.

### 4.1. Descripción cualitativa de los patrones de movimiento obtenidos por el modelo para algunos valores de $\beta$

Mencionamos desde ahora que es difícil en un sentido estricto comparar todos los resultados que a continuación se presentan con los de las caminatas aleatorias (Browniana o de Lévy) usuales, ya que se tratan de caminatas deterministas con propiedades intrincadas y poco conocidas. Sin embargo usaremos la palabra Browniano o Lévy para los comportamientos posibles de la función de distribución de probabilidad de las longitudes de los pasos, en analogía a las caminatas aleatorias.

Se analiza de manera cualitativa una de las trayectorias obtenidas por el modelo para algún valor pequeño de  $\beta$  tal como:  $\beta = 1.5$  (ver Fig. 4.1). El tipo de movimiento realizado por el caminante es muy parecido al de una caminata Browniana en donde aparentemente existe

---

<sup>1</sup>Las selvas tropicales ocupan sólo 10% de la superficie terrestre y alojan de 50% a 80% de todas las especies de organismos existentes en la tierra [?].

una longitud característica grande para los desplazamientos entre objetivos. Este comportamiento puede ser explicado de manera cualitativa: Como  $\beta$  ha tomado valores muy pequeños los objetivos más grandes (los más atractivos) son numerosos. El caminante puede atravesar una fracción de la longitud del sistema para alcanzar un objetivo valioso. El caminante va a decidirse por cualquiera de los objetivos con grandes valores de  $k$ , ignorando a los pequeños y entonces la caminata va a ser parecida al movimiento de una partícula Browniana atrapada en una caja.

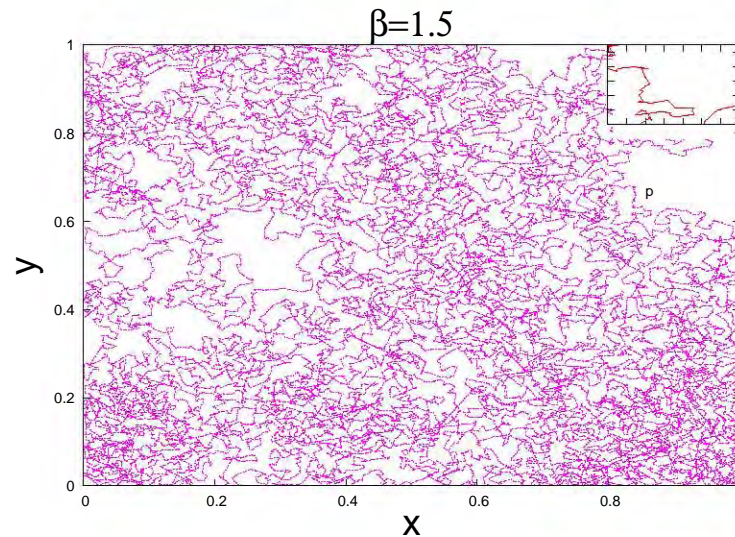


Figura 4.1: En la gráfica se muestra una de las trayectorias obtenidas por el modelo para  $\beta = 1.5$ . El tipo de comportamiento que se obtiene es muy parecido al del movimiento Browniano. En la esquina superior derecha de la figura se muestra un acercamiento en el entorno de un punto  $p$  de la trayectoria.

Por otra parte, si se analiza una de las trayectorias obtenidas por el modelo para algún valor  $\beta > 5$ , se observa que la trayectoria descrita por el caminante es también similar a la del movimiento Browniano (ver Fig. 4.2), pero con pasos chicos de longitud de orden  $l_0$ . Este comportamiento puede ser explicado de manera cualitativa. Como  $\beta$  ha tomado valores grandes, prácticamente todos los objetivos serán relativamente igual de importantes ( $k_i = 1$ ), así que el caminante eligirá el objetivo más cercano que no haya sido visitado. En este límite se recupera el modelo de Lima *et al.* [?].<sup>2</sup>

El caso de interés se debe presentar cuando  $\beta$  toma valores intermedios entre grandes y pequeños, por ejemplo:  $\beta = 3$ , en donde se puede observar (ver Fig. 4.3) que una de estas trayectorias de movimiento no tiene una longitud característica para los desplazamientos entre objetivos. Este tipo de patrones de movimiento son parecidos a los estudiados en el capítulo 1, que se caracterizan por tener una distribución amplia de probabilidad  $p(l)$  para las longitudes de los pasos  $l$ . Existe una probabilidad finita de que el caminante realice pasos de longitud muy grandes, aunque estos pasos son más escasos.

<sup>2</sup>Ver la sección: Caminatas deterministas en estrategias locales de forrajeo.

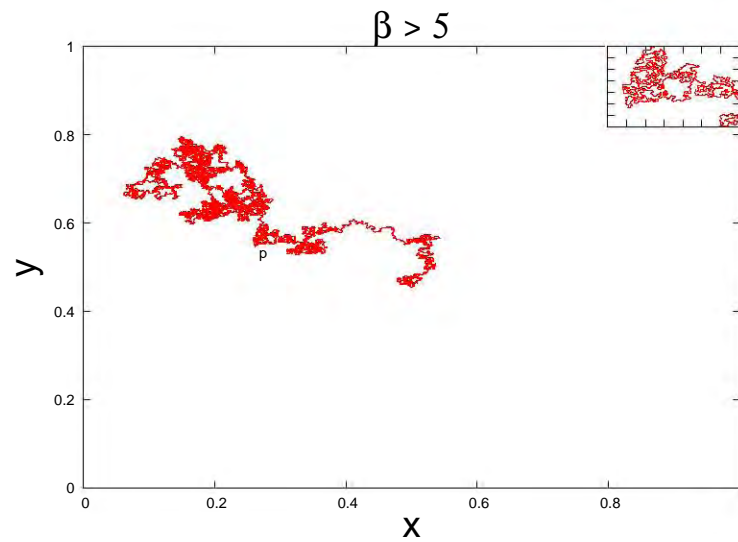


Figura 4.2: En la gráfica se muestra una de las trayectorias obtenidas por el modelo para  $\beta > 5$ , el tipo de movimiento que se obtiene es muy parecido al del movimiento Browniano ( $k_i = 1$ ). En la esquina superior derecha de la figura se muestra un acercamiento en el entorno de un punto  $p$  de la trayectoria.

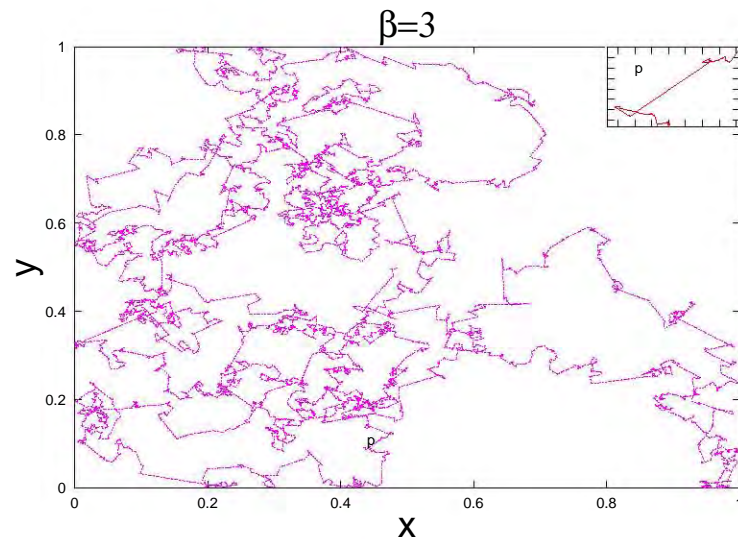


Figura 4.3: En la gráfica se muestra una de las trayectorias características del caminante hambriento en busca de alimento con  $\beta = 3$ . Este tipo de patrones de movimiento, son muy parecidos a los obtenidos a partir de las estadísticas de Lévy. En la esquina superior derecha de la figura se muestra un acercamiento en el entorno de un punto  $p$  de la trayectoria.

## 4.2. Función de distribución de probabilidad de las longitudes de los pasos

Ahora investigaremos cualitativamente el comportamiento de la función de distribución de probabilidad de las longitudes de los pasos,  $P_\beta(l)$ ,<sup>3</sup> para los diferentes valores de  $\beta$  que han sido considerados en este estudio.

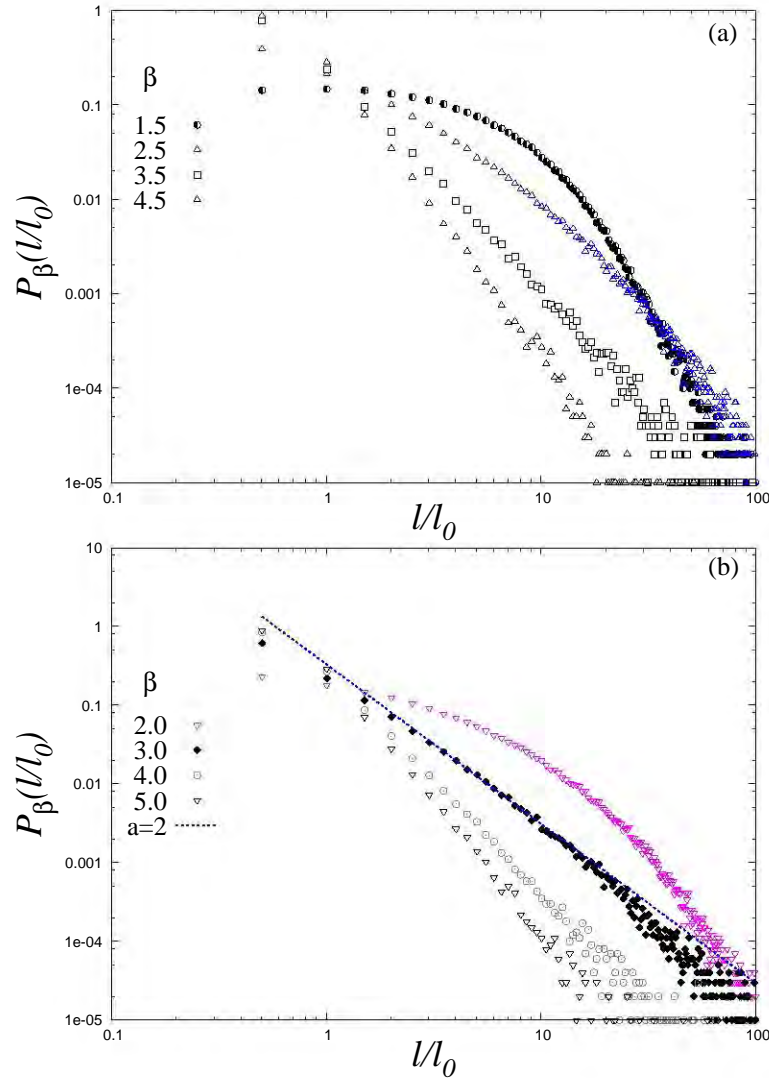


Figura 4.4: Se grafica en log-log (a y b) la distribución de probabilidad de las longitudes de los pasos  $P_\beta(l)$ , para diferentes valores de  $\beta$  considerados en estudio, aquí  $l_0$  es la distancia promedio entre los objetivos más cercanos. Cabe mencionar que el número de objetivos visitados por el caminante es mucho menor que el número de objetivos distribuidos en el área de estudio ( $N$ ).

<sup>3</sup>A partir de ahora la función de distribución de probabilidad de las longitudes de los pasos  $p(l)$ , será designada por  $P_\beta(l)$  dado que esta depende del parámetro de los recursos  $\beta$ .

Los resultados obtenidos de las simulaciones numéricas para  $P_\beta(l)$  (ver Fig. 4.4 (a y b)), pueden ser resumidos de la siguiente manera:

- Para  $1 < \beta < 3$ ,  $P_\beta(l)$  no es invariante de escala, a pesar de que pareciera ser cuando  $\beta \rightarrow 3$ .
- Para  $3 < \beta < 4$ ,  $P_\beta(l)$  puede ser aproximada por una distribución de Lévy, para  $l \gg l_0$ :  $P_\beta(l) \sim l^{-a}$ . Se encuentra numericamente que  $a \sim \beta - 1$ .
- Para  $\beta > 4$ ,  $P_\beta(l)$  decae más rápido que  $l^{-3}$ , lo que sugiere que las caminatas se parecen a las Brownianas.

En la figura (4.5) se observa  $P_\beta(l)$  con  $\beta = 3$ , se ha encontrado que esta distribución puede ser ajustada de una manera más adecuada que cualquier otra función por una ley de potencia de la forma dada por la relación (??), cuya pendiente  $a$  es muy próxima a un valor de 2. Este resultado es consistente con el comportamiento estadístico del mono araña, <sup>4</sup> que muestra que la distribución de pasos que realiza el mono araña al ir por su alimento, obedece a una ley de potencia inversa con exponente  $\alpha \simeq 2.2$  (ver Fig. ??).

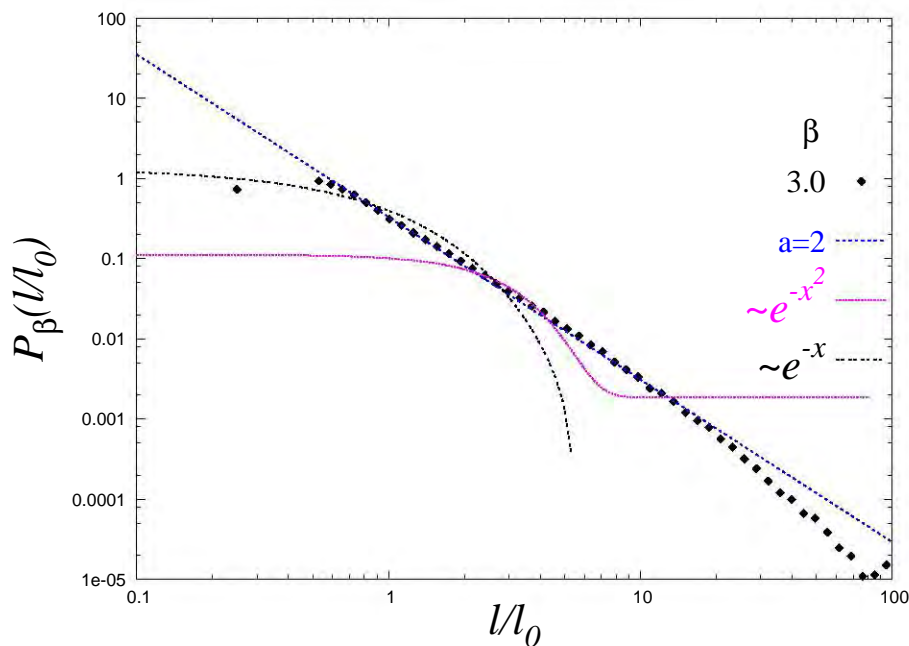


Figura 4.5: Se grafica en (log-log) la distribución de probabilidad de las longitudes de los pasos  $P_\beta(l)$  para  $\beta = 3$ , en esta gráfica se muestra la función con la que mejor puede ser ajustada esta distribución, la cual corresponde a una ley de potencia inversa con exponente  $a \simeq 2$ .

Este importante resultado nos permite decir que el MCHBI, cumple con una de sus finalidades, que es reproducir estadística y cualitativamente las trayectorias de movimiento que realiza el mono araña en sus actividades de forrajeo.

<sup>4</sup>Se recuerda al lector que en el modelo se considera el estudio de un solo mono araña, para el que no se hace ninguna distinción entre si es hembra o macho, o si durante sus trayectorias ha realizado algunos pasos formando parte de un grupo (Capítulo 3).

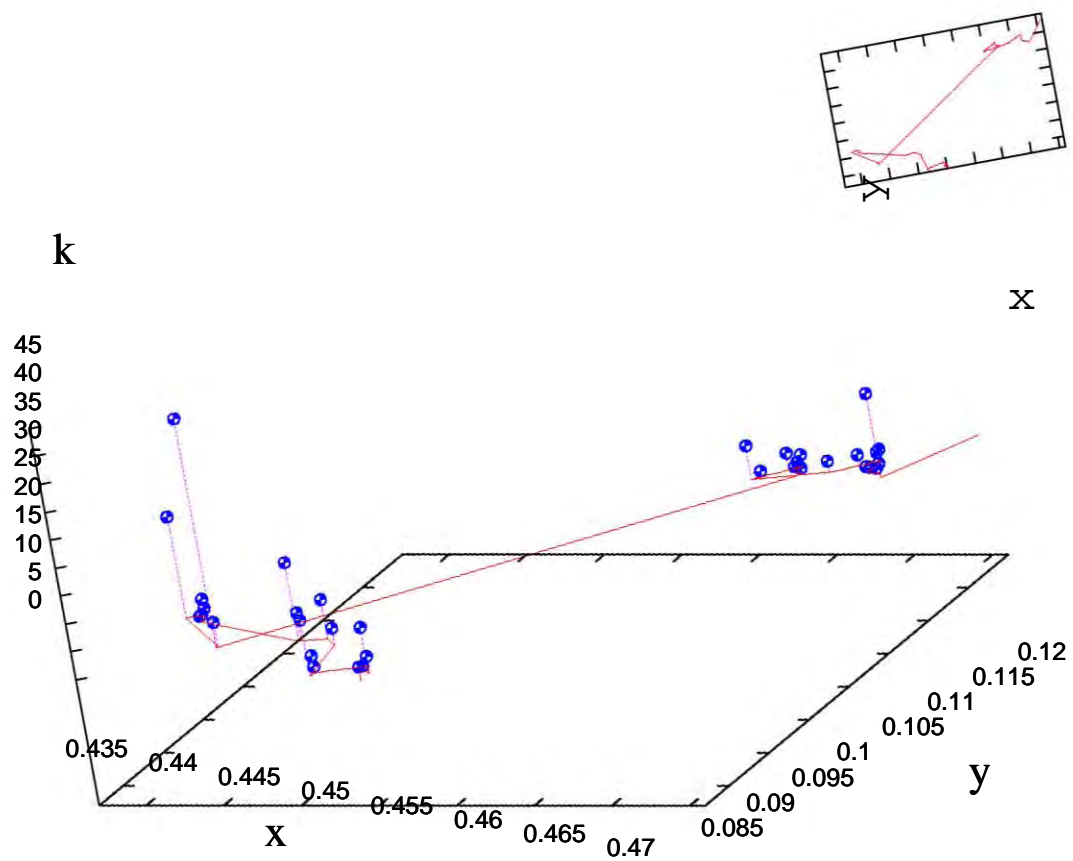


Figura 4.6: Representación típica de una trayectoria característica para  $\beta = 3$ , en la que podemos observar que para desplazamientos hacia objetivos muy alejados corresponden valores relativamente grandes de  $k$ . Estas trayectorias son cualitativamente similares a las realizadas por el mono araña en la selva de Punta Laguna, México.



### 4.3. Fluctuaciones de las longitudes de los pasos

Un dato interesante de conocer, es como cambia la estadística de las longitudes de los pasos del modelo para los diferentes valores de  $\beta$  que han sido considerados en este estudio.

En la figura (4.7) se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones numéricas para las fluctuaciones de los pasos  $\langle l^2 \rangle / \langle l \rangle^2$  para los diferentes valores de  $\beta$ . Esta cantidad es del orden de 1 para una caminata que contiene pasos con una longitud característica, y mucho mayor que 1 en el límite de sistemas grandes para pasos con distribuciones de Lévy.

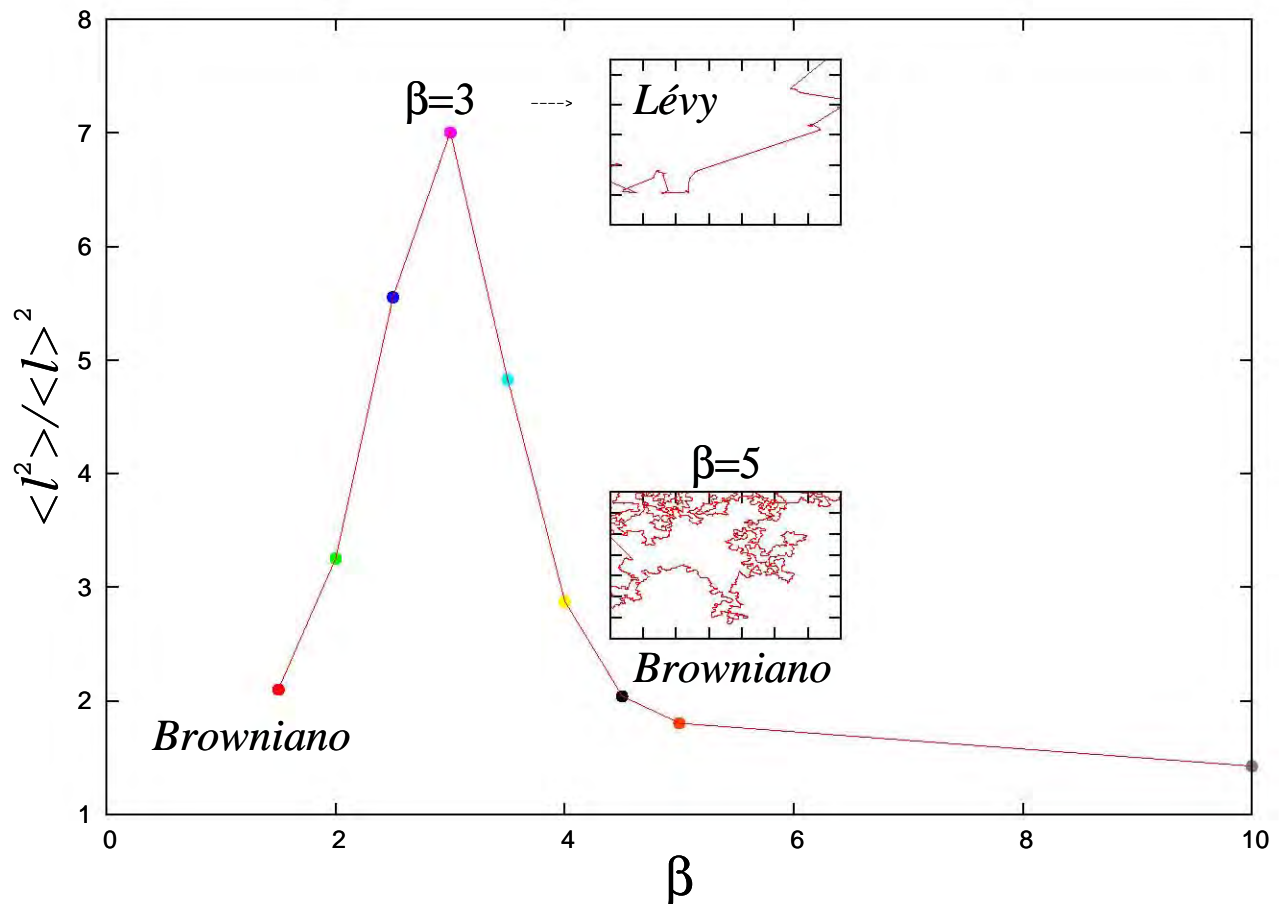


Figura 4.7: Fluctuaciones de las longitudes de los pasos ( $\langle l^2 \rangle / \langle l \rangle^2$ ) en función del parámetro  $\beta$ . En los recuadros de la figura se muestra la caminata típica para  $\beta = 3$  y  $\beta = 5$ .

En (4.7) se muestra que en un valor muy cercano a  $\beta = 3$ , se presentan las fluctuaciones más grandes, a este valor de  $\beta$  lo designamos  $\beta_c$ .

#### 4.4. Función de correlación entre pasos recorridos por el caminante en $\beta_c$

Dados una secuencia de pasos  $(l_1, l_2, l_3, \dots, l_n)$  recorridos sucesivamente por el caminante, se calcula la función de correlación entre la longitud del paso  $i$  y la del paso  $i+n$  con  $(0 \leq n \leq 1000)$ . Esta función de correlación se define como:

$$C(n) = \langle l_i l_{i+n} \rangle - \langle l_i \rangle \langle l_{i+n} \rangle .$$

Los resultados obtenidos de las simulaciones numéricas (ver Fig. 4.8) pueden ser resumidos de la siguiente manera:

- Existen correlaciones de largo alcance entre los  $l$  de dos pasos. Estas correlaciones son positivas.
- La función de correlación  $C(n)$  para los  $l$  entre dos pasos, puede ser ajustada de una manera más adecuada que cualquier otra función por una ley de potencia:  $C(n) \sim n^{-\gamma}$  con  $\gamma = 0.29$ .

Entonces, no podemos decir que estamos en presencia de una caminata de Lévy usual. El desorden y la regla que prohíbe regresar a un sitio visitado generan correlaciones de largo alcance. Por ejemplo, si el caminante da un paso grande a un instante dado, es más probable que de otro paso grande en el futuro, lo que se esperaría por azar.

#### 4.5. Función de correlación entre objetivos visitados por el caminante en $\beta_c$

Para comprobar el resultado anterior, calculamos correlaciones entre los tamaños de los objetivos visitados. Dado una secuencia de objetivos con pesos  $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$  visitados sucesivamente por el caminante, se calcula la función de correlación entre el peso asociado al objetivo  $i$  y el del objetivo  $i+n$  con  $(0 \leq n \leq 1400)$ . Esta función de correlación se define como:

$$C_k(n) = \langle k_i k_{i+n} \rangle - \langle k_i \rangle \langle k_{i+n} \rangle .$$

Los resultados obtenidos de las simulaciones numéricas (ver Fig. 4.9) pueden ser resumidos de la siguiente manera:

- Existen correlaciones de largo alcance entre los  $k$  de dos objetivos visitados. Estas correlaciones son positivas.
- La función de correlación  $C_k(n)$  para los  $k$  entre dos objetivos visitados, puede ser ajustada de una manera más adecuada que cualquier otra función por una ley de potencia:  $C_k(n) \sim n^{-\delta}$  con  $\delta = 0.38$ .

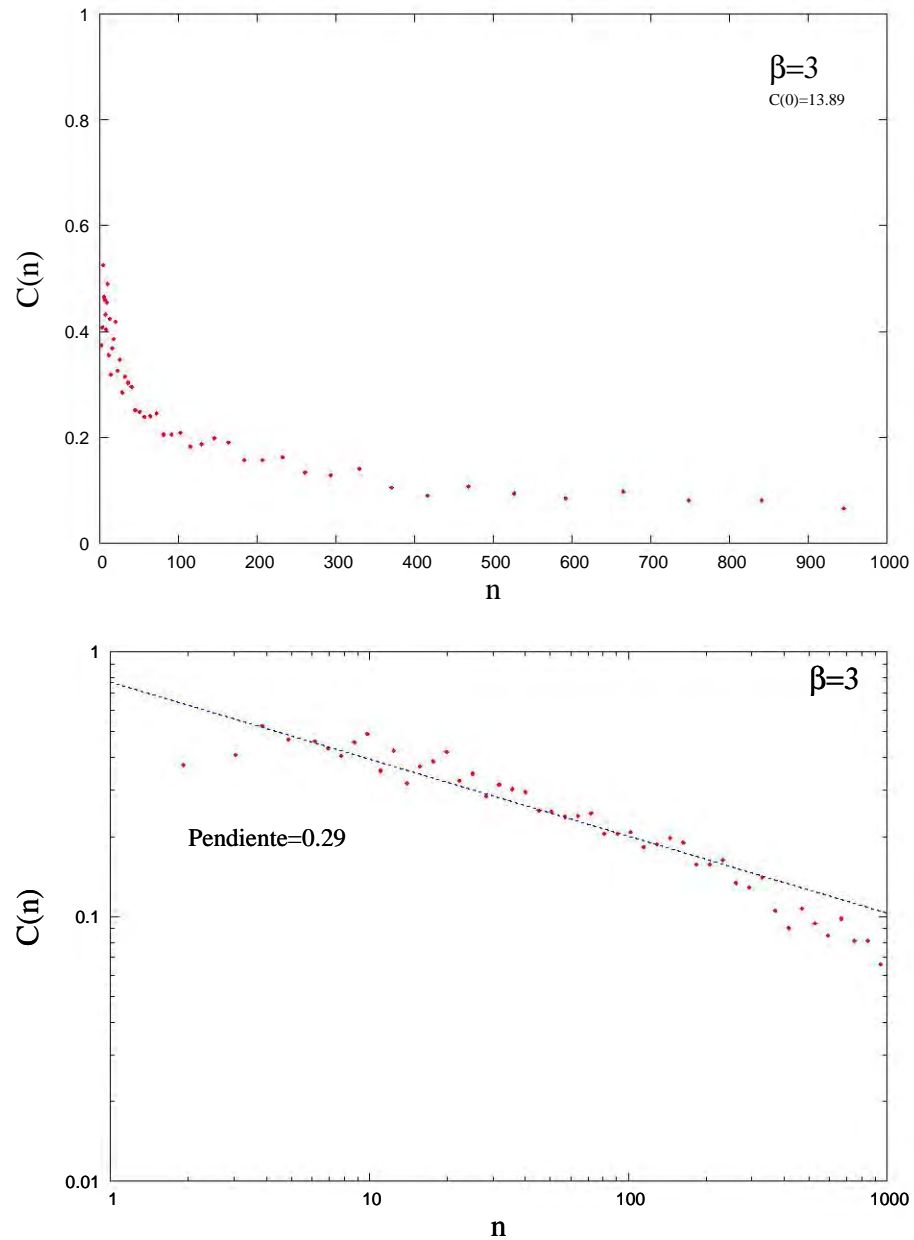


Figura 4.8: Se grafica la función de correlación  $C(n)$  para los  $l$  entre dos pasos. En la gráfica superior se muestra que  $C(n)$  presenta correlaciones de largo alcance, con  $C(0) = \langle l^2 \rangle - \langle l \rangle^2 = 13.89$  (no se presenta este punto en la gráfica). En la gráfica inferior se presenta en (log-log)  $C(n)$ , en donde se muestra la función con la que mejor puede ser ajustada  $C(n)$ , y que esta dada por una ley de potencia:  $C(n) \sim n^{-\gamma}$  con  $\gamma = 0.29$ .

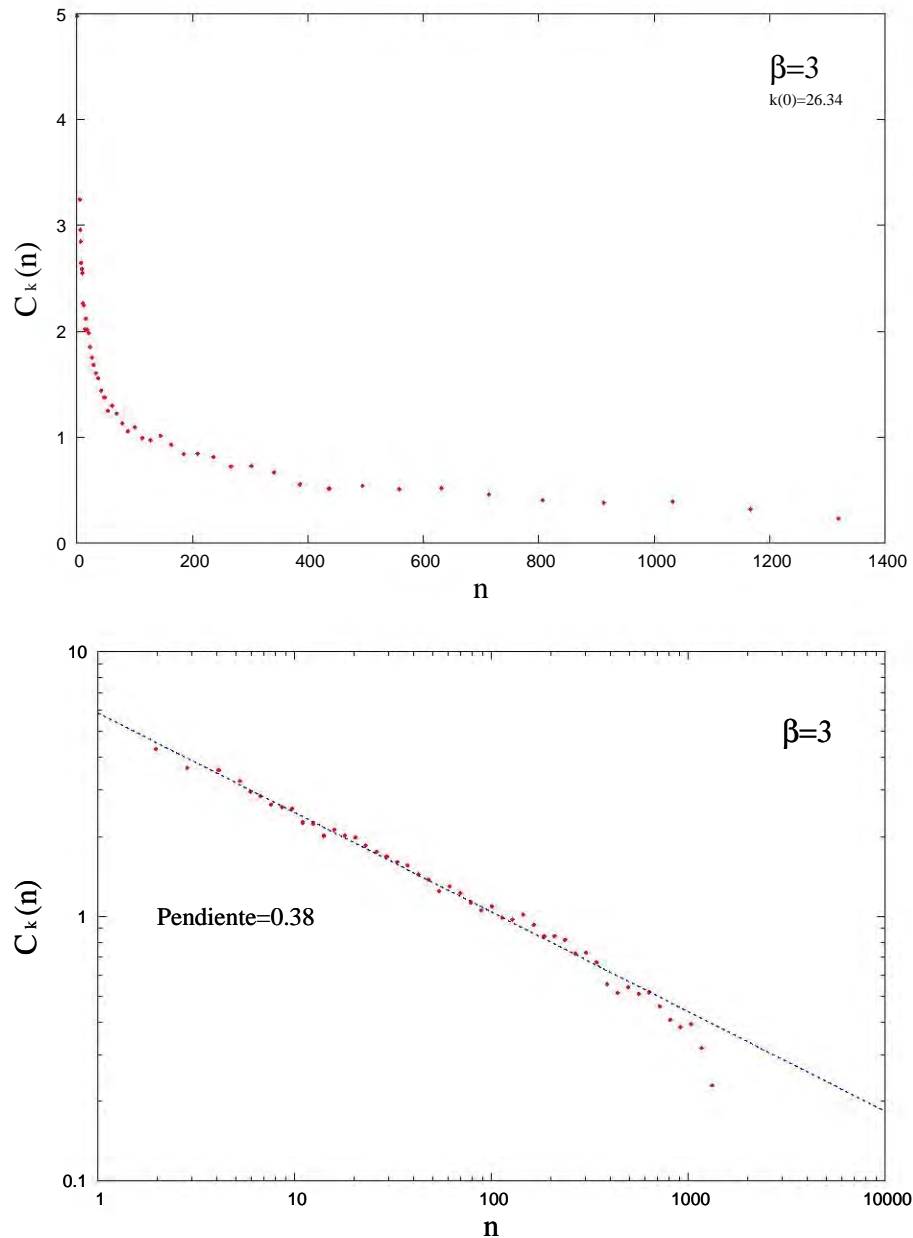


Figura 4.9: Se grafica la función de correlación  $C_k(n)$  para los  $k$  de dos objetivos visitados por el caminante. En la gráfica superior se muestra que  $C_k(n)$  presenta correlaciones de largo alcance, con  $C_k(0) = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = 26.34$  (no se presenta este punto en la gráfica). En la gráfica inferior se presenta en (log-log) la función de correlación  $C_k(n)$ , en donde se muestra la función con la que mejor puede ser ajustada  $C_k(n)$ , y que esta dada por una ley de potencia:  $C_k(n) \sim n^{-\delta}$  con  $\delta = 0.38$ .

La precisión numérica obtenida para  $C_k(n)$  es mejor que la de  $C(n)$ . Hemos averiguado que la función de correlación obtenida numericamente para un proceso de Lévy con  $a = 2$ , con pasos independientes y con el mismo número de pasos oscila alrededor de cero. Las correlaciones de las figuras (4.8) y (4.9) son mucho mayores que otras correlaciones para pasos independientes, y son siempre positivas.

Hasta ahora se ha mostrado que el parámetro  $\beta_c$  de el MCHBI reproduce estadística y cualitativamente los patrones de movimiento realizados por el mono araña al ir a conseguir su alimento. Este parámetro de los recursos induce las fluctuaciones más grandes en las longitudes de los pasos realizadas por el caminante. También se encontro que para  $\beta_c$  existen correlaciones de largo alcance descritas por una ley de potencia entre los tamaños ( $k$ ) de los objetivos visitados y los pasos  $l$  recorridos por el caminante.

Sin embargo hasta ahora no se ha mostrado ningún resultado que nos indique cuáles son las consecuencias de las caminatas de Lévy que realiza el mono araña al alimentarse. En las siguientes secciones mostramos algunos resultados que podrían ayudarnos a responder este tipo de preguntas.

## 4.6. Distancia total recorrida en función del tiempo

Se calcula la distancia total recorrida  $\sum_{i=1}^{n(t)} l_i$  como función del tiempo para los diferentes valores de  $\beta$  considerados en este estudio, en donde  $n(t)$  es el número de árboles visitados por el caminante en el tiempo  $t$ .

La medición del tiempo en este cálculo se realiza en unidades de  $k$  y  $l/l_0$  tomando en cuenta las siguientes circunstancias:

- El caminante hambriento permanece un determinado tiempo en cada objetivo del que se alimenta. Este tiempo se define como el tamaño del objetivo ( $t = k$ ) (El tiempo que permanece el caminante en el objetivo visitado va a depender de la cantidad o calidad del alimento en el árbol; mucha fruta requiere más tiempo en ser devorada).
- El tiempo que invierte el caminante hambriento al trasladarse de un objetivo a otro va a ser igual a la longitud del paso normalizada por  $l_0$ ,  $l/l_0$ , bajo la suposición de que el caminante se mueve a velocidad constante de  $l_0$  por unidad de tiempo.

Por lo tanto, el tiempo  $t$  invertido para desplazarse de un punto inicial a un punto final, va a ser la suma de los tiempos que le ha tomado en permanecer en cada objetivo que ha visitado, así como el tiempo para desplazarse entre ellos a velocidad constante.

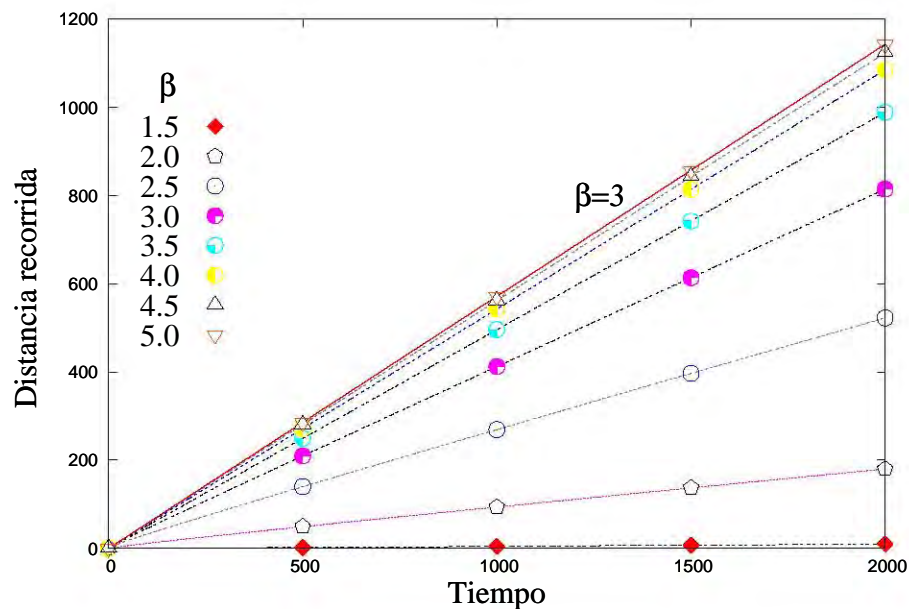


Figura 4.10: La gráfica muestra la distancia total recorrida por el caminante hambriento en función del tiempo para los diferentes valores de  $\beta$  considerados en este estudio. Para un tiempo  $t$ , la distancia total recorrida crece monótonicamente como función de  $\beta$ .

En la gráfica (4.10) se muestran los resultados obtenidos de las simulaciones numéricas para el cálculo de la distancia total recorrida por el caminante en función del tiempo para diferentes

valores de  $\beta$ . Se observa que para un tiempo  $t$ , la distancia total recorrida crece monótonicamente como función de  $\beta$ .

Los resultados mostrados en esta gráfica pueden ser interpretados cualitativamente:

- Para  $\beta$  pequeño el caminante se queda atrapado en los árboles muy grandes y entonces no recorre mucha distancia (Régimen de abundancia).
- Para  $\beta$  grande el mono se queda poco tiempo en cada árbol y entonces se mueve a mayor distancia con el tiempo (Régimen de relativa escasez de alimento o de esfuerzo mayor para conseguir alimento).

## 4.7. Desplazamiento medio en función del tiempo

Como ya se ha mencionado, el mono araña es un animal muy frugívoro que se alimenta la mayor parte del tiempo de una gran variedad de frutas de los árboles. Estos animales son unos de los principales dispersores de las semillas de los árboles de los que se alimentan. Para los árboles un factor importante para lograr el éxito reproductivo y colonizar nuevos hábitats es a través de esta dispersión. El mono araña digiere las frutas que come después de 4,4 horas [?] y muchas de las semillas evacuadas no son destruidas después de la digestión. Se sabe bien que si las semillas son dispersadas lejos de su lugar de origen, estas tienen una mayor probabilidad de supervivencia. Existe además una correlación positiva entre distancias de dispersión y diversidad de especies en bosques tropicales [?, ?, ?]. El mono araña se alimenta de una gran variedad de frutas que van de 50 a 150 especies diferentes [?]. La dispersión a grandes distancias contribuye a “mezclar” espacialmente diferentes especies de árboles, favoreciendo la diversidad y la homogeneidad del bosque. Debido a estas circunstancias, el desplazamiento medio del mono araña es un factor muy importante que puede influir considerablemente en la regeneración de los recursos así como en la conservación del medio.

En esta sección se calcula el desplazamiento medio en función del tiempo, el cual va a estar dado por:

$$\overline{D(t)} = \overline{\| \vec{R}(t_0) - \vec{R}(t_0 + t) \|} \quad (4.1)$$

en donde  $\vec{R}$  es la posición del caminante partiendo de un objetivo arbitrario a un tiempo  $t = 0$ , para los distintos valores de  $\beta$  considerados en este estudio. La medición del tiempo se realiza de la misma forma que en la sección 4.1.6. Los resultados obtenidos de las simulaciones numéricas muestran que para  $\beta_c$  ( $\beta = 3$ ) se alcanza el mayor desplazamiento medio para todo  $t$  (ver Fig. 4.11 (a)).

La distribución de los recursos gobernada por la relación (??) con  $\beta = 3$ , es muy similar a la que se ha encontrado en el campo de estudio del mono araña con  $\beta_{real} = 2.6 \pm 0.2$  [?]. De acuerdo a esto, en el campo de estudio el mono araña está dispersando las semillas que ha consumido de tal manera que estas tengan una mayor probabilidad de supervivencia, este tipo de dispersión favorece a la selva tropical en la diversidad de especies de plantas y la conservación del medio.

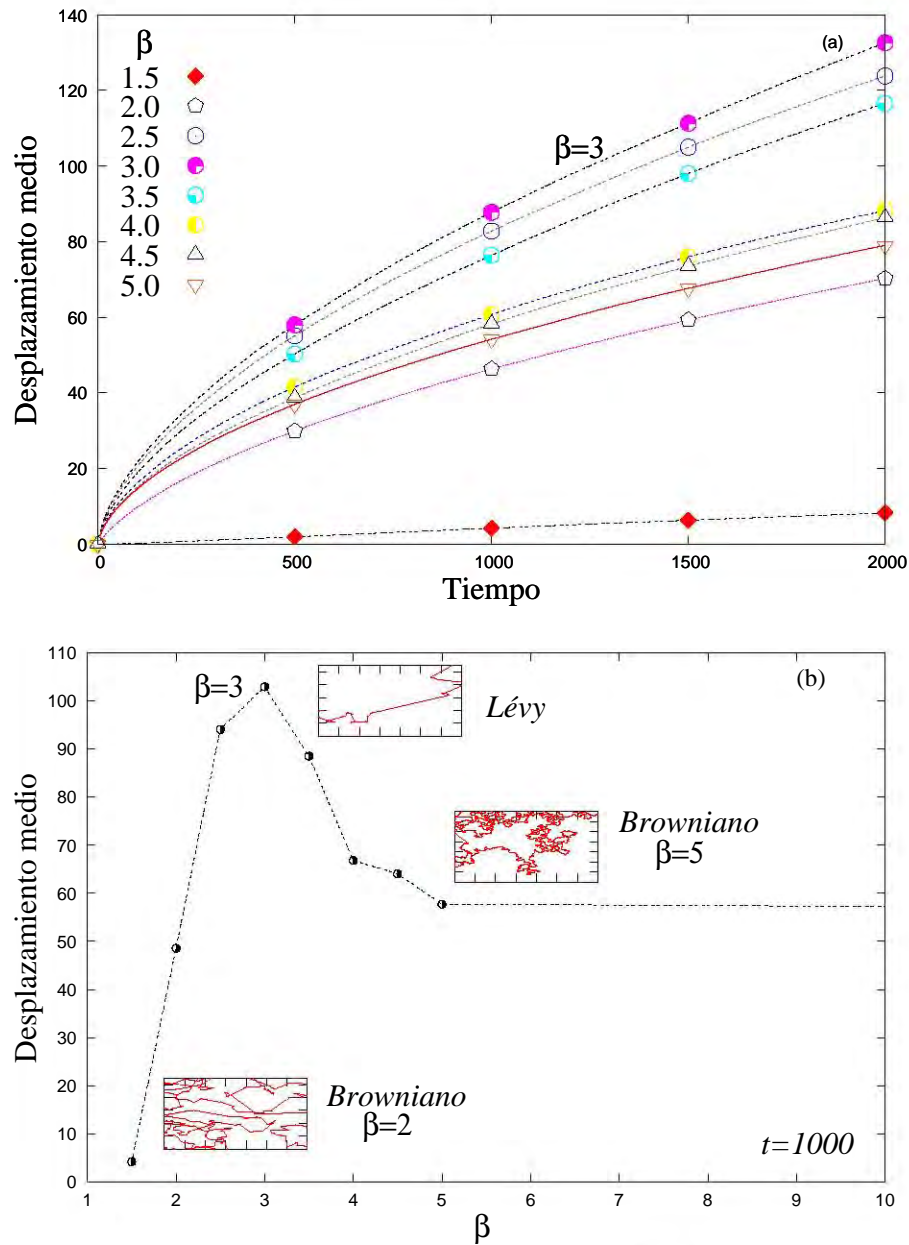


Figura 4.11: En (a) se muestra el desplazamiento medio  $\overline{D}(t)$  en función del tiempo para los diferentes valores de  $\beta$  considerados en este estudio, en donde se observa que  $\beta_c$  induce la máxima dispersión de semillas de la fruta que ha sido consumida por el caminante hambriento. En (b) se toma un tiempo fijo,  $t = 1000$  y se grafica desplazamiento medio en función de  $\beta$ . En cuadros pequeños se observa las trayectorias características para  $\beta = 2$ ,  $\beta = 3$  y  $\beta = 5$ .



De acuerdo con el MCHBI, para una distribución de recursos gobernados por la relación (??) con parámetro  $\beta = 3$ , las semillas que han sido consumidas por el caminante hambriento, serán dispersadas lo más lejos posible.  $\beta_c$  es el parámetro de los recursos que induce la máxima dispersión de semillas. Este resultado es de suma importancia para la conservación del medio.

Para un tiempo fijo  $t = 1000$  se grafica  $\overline{D(t)}$  en función de  $\beta$  (ver Fig. 4.11 (b)), los resultados mostrados en esta gráfica pueden ser interpretados cualitativamente de la siguiente manera:

- Para  $\beta < 3$  el mono araña se queda atrapado en árboles muy grandes después de pocos pasos y entonces no se aleja rápido de su punto de origen.
- Para  $\beta > 3$  el mono araña se queda poco tiempo en cada árbol, pero sus pasos son chicos, por lo tanto tampoco se aleja mucho de su punto de partida.
- Para  $\beta = 3$  el desplazamiento  $\overline{D(t)}$  es mayor que en los casos anteriores debido a que el mono araña realiza algunos pasos mucho mayores que  $l_0$  (pocos).<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup> $l_0 \equiv N^{-1/2}$ .

# Capítulo 5

## El modelo en otras dimensiones y una variación

---

### 5.1. El modelo en una y tres dimensiones

Ahora se considera el estudio de el MCHBI en un espacio de una y tres dimensiones ( $d = 1$  y  $d = 3$  respectivamente).

#### 5.1.1. Una dimensión

En el estudio del modelo en una dimensión ( $d = 1$ ) se han considerado los mismos valores de  $\beta$  que el estudio del modelo en dos dimensiones ( $d = 2$ ), para los que se han obtenido los siguientes resultados de las simulaciones numéricas:

- La función de distribución de probabilidad de las longitudes de los pasos,  $P_\beta(l)$ , en el intervalo  $2.5 < \beta < 3.5$  puede ser aproximada por una distribución de Lévy,  $P_\beta(l) \sim l^{-a}$  con  $a \simeq \beta - 1$  (ver Fig. 5.1(a y b)).
- Las mayores fluctuaciones de las longitudes de los pasos se presentan en  $\beta = 2.5$ , a este valor de  $\beta$  lo designamos  $\beta_c$  (ver Fig. 5.2(a)).
- $\beta_c$  es el parámetro de los recursos que induce el máximo desplazamiento medio para un tiempo determinado (ver Fig. 5.2(b)).
- Para el estudio llevado a cabo en una dimensión no se cumple la relación  $\beta_c \sim d + 1$ , como sucede en el estudio llevado a cabo en dos dimensiones ( $d = 2$ ).

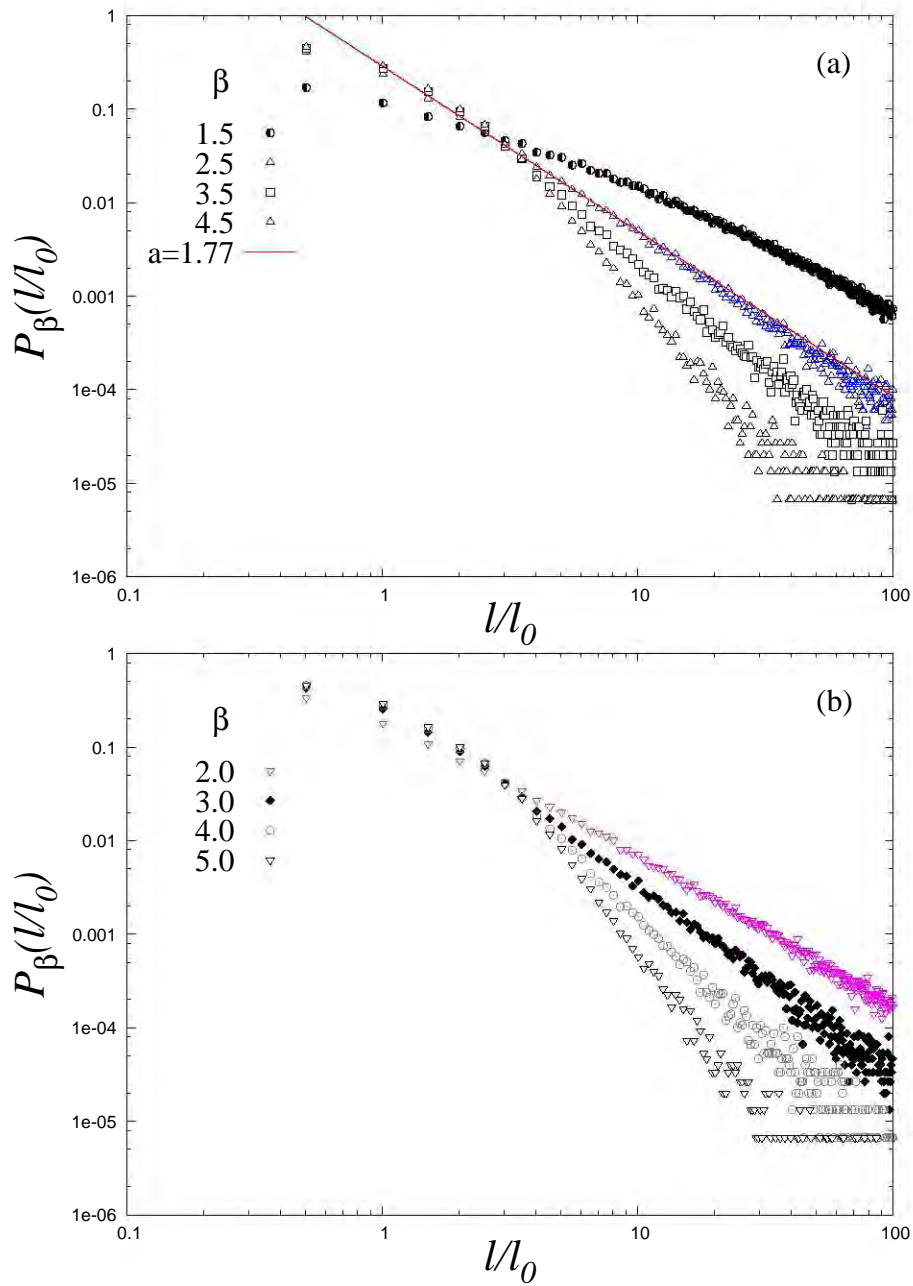


Figura 5.1: Se grafica en log-log (a y b) la distribución de probabilidad de las longitudes de los pasos para  $d = 1$ . En esta gráfica se muestra que  $\beta = 2.5$  hay una función que puede ser adecuadamente descrita por una ley de potencia con  $a = 1.77$ .

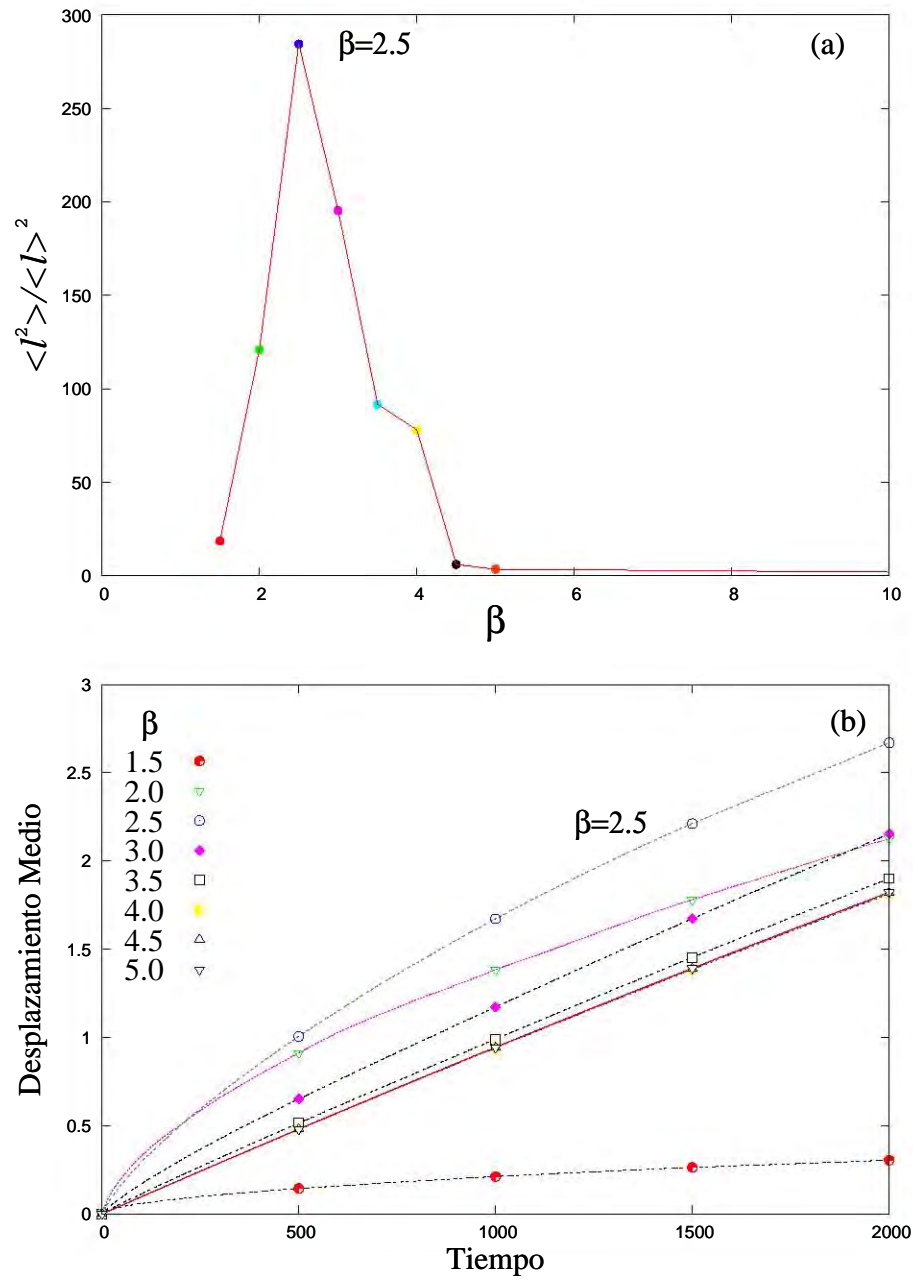


Figura 5.2: Resultados obtenidos del modelo para  $d = 1$ . (a)  $\beta_c$  ( $\beta = 2.5$ ) presenta la mayor fluctuación en las longitudes de los pasos  $l$ . (b)  $\beta_c$  induce el mayor desplazamiento medio para el caminante.

### 5.1.2. Tres dimensiones

En el estudio del modelo en tres dimensiones ( $d = 3$ ) se han considerado los mismos valores de  $\beta$  que el estudio del modelo en dos dimensiones ( $d = 2$ ), para los que se han obtenido los siguientes resultados de las simulaciones numéricas:

- La función de distribución de probabilidad de las longitudes de los pasos  $P_\beta(l)$  para  $\beta = 4$  puede ser aproximada por una distribución de Lévy,  $P_\beta(l) \sim l^{-a}$  con la misma relación  $a \simeq \beta - 1$ , esto es  $a \simeq 3$  (ver Fig. 5.3).
- Las mayores fluctuaciones de las longitudes de los pasos se presentan en  $\beta = 4$ , a este valor de  $\beta$  lo designamos  $\beta_c$ . (ver Fig. 5.4(a y b))
- En la vecindad de  $\beta_c$  ( $\beta \in [3.5, \beta_c.]$ ); se induce el máximo desplazamiento medio para un tiempo  $t$  determinado (ver Fig. 5.4(b)).
- Para el estudio llevado a cabo en esta dimensión se cumple la relación  $\beta_c \sim d + 1$  al igual que en dos dimensiones ( $d=2$ ).

Entre la familia entera de distribuciones gobernadas por la relación (??), la curva  $P_{\beta_c}(\sim l^{-3})$  es la que decae más rápido en  $l$  con  $a = 3$ .  $\beta_c$  es el único valor de  $\beta$  donde se presenta una caminata de tipo Lévy.

De los resultados obtenidos al implementar el MCHBI en una y tres dimensiones, se encuentra que para cada una de estas, existe un parámetro de los recursos  $\beta_c$ , el cual induce propiedades similares a las obtenidas por el modelo para un espacio de dos dimensiones ( $d=2$ ). Además, en el estudio de los resultados de las simulaciones numéricas se encontró la siguiente relación:

$$\beta_c \simeq a + 1 \quad (5.1)$$

en donde  $a$  es el exponente de las distribuciones de Lévy en la relación (??). Esta expresión aún no ha sido probada analíticamente.

Un resultado analítico de campo medio llevado a cabo por Boyer y Larralde [?] muestran que  $\beta_c = d + 1$  y que  $a = 1$ , independiente de la dimensión.

Nuestros resultados numéricos muestran que tanto para dos como tres dimensiones ( $d=2$  y  $d=3$  respectivamente) se cumple la relación:

$$\beta_c \simeq d + 1 \quad (5.2)$$

Estas relaciones sugieren que  $a \simeq d$ . Estos resultados difieren a los obtenidos por Boyer y Larralde. Esta situación es bastante inusual en física estadística porque entre más alto es la dimensión espacial  $d$  de estudio, mejor debería de ser la aproximación de campo medio.

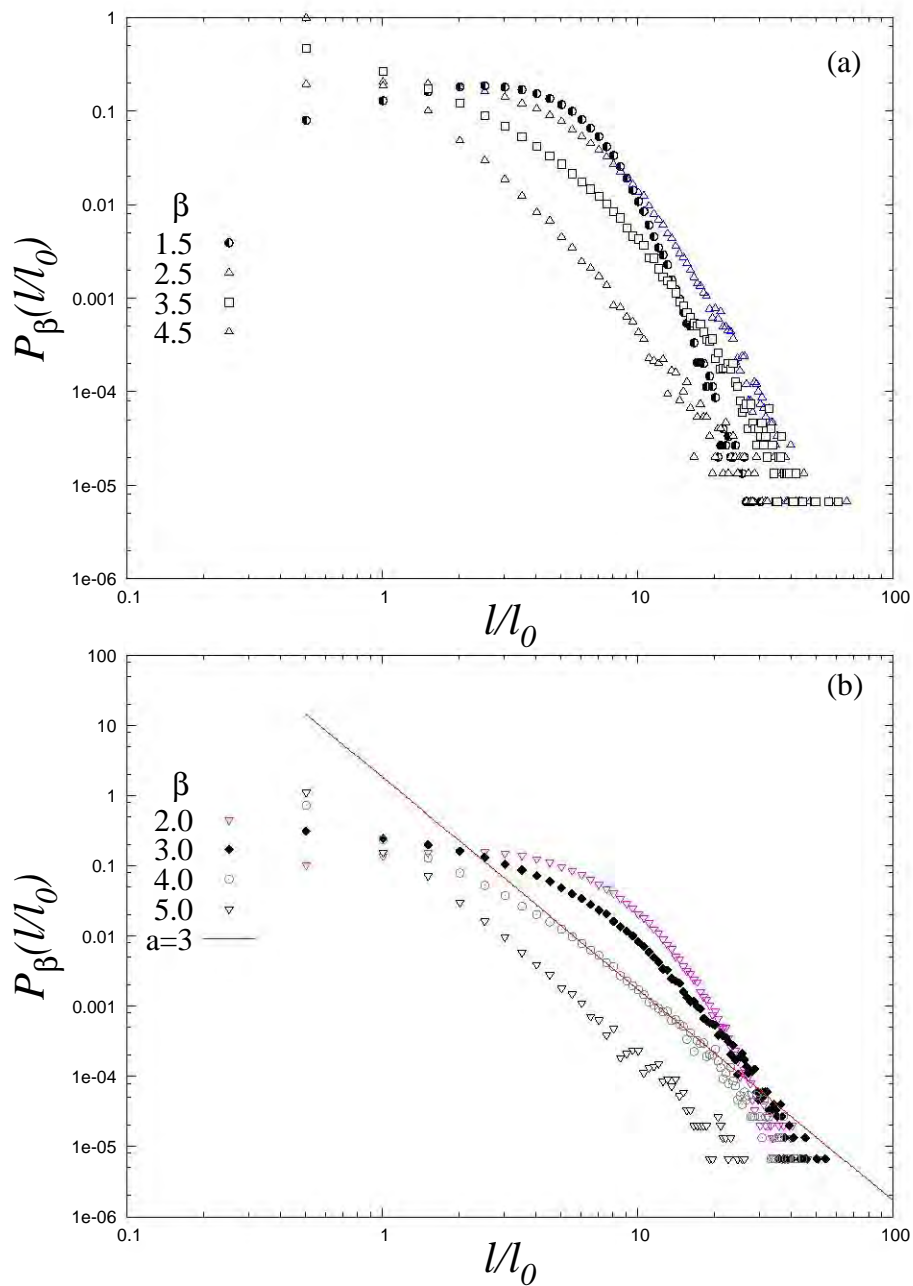


Figura 5.3: Se grafica en log-log (a y b) la distribución de probabilidad de las longitudes de los pasos para  $d = 3$ . En esta gráfica se muestra que  $\beta = 4$  hay una función que puede ser adecuadamente descrita por una ley de potencia con  $a = 3$ .

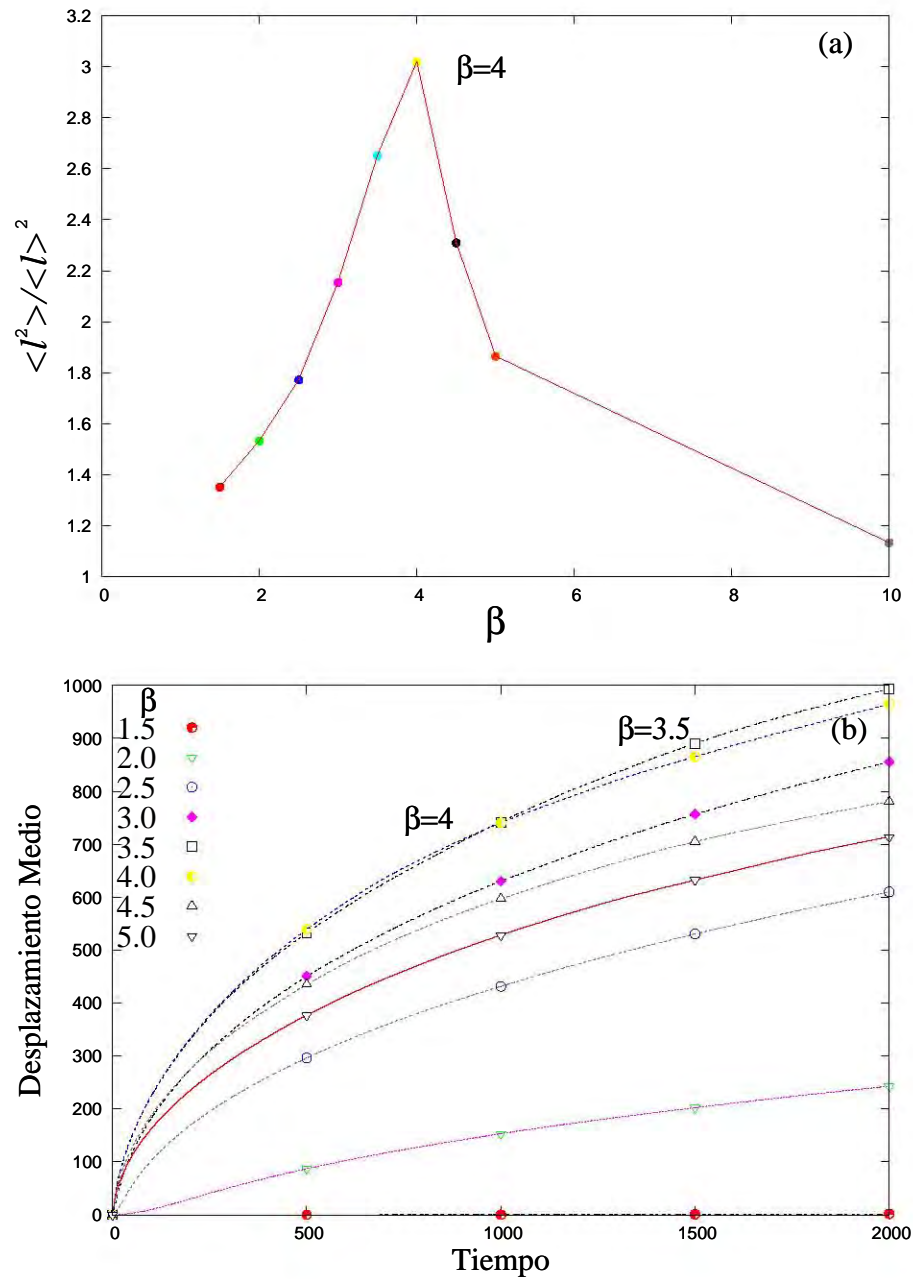


Figura 5.4: Resultados obtenidos del modelo para  $d = 3$ . (a)  $\beta_c$  ( $\beta = 4$ ) presenta la mayor fluctuación para las longitudes de los pasos  $l$ . (b) Tanto  $\beta_c$  como  $\beta = 3.5$  inducen un gran desplazamiento medio para el caminante.

## 5.2. Una variación del MCHBI

Con el propósito de investigar la robuztes de los resultados presentados anteriormente en este trabajo (capítulo 4), se implementa una variación al MCHBI considerando ahora las siguientes reglas de movimiento:

- (1) Un mono localizado en un objetivo  $i$  va a moverse a un objetivo  $j$  (elegido al azar) tal que  $\xi_{ij} \equiv l_{ij}/k_j$  sea uno de los 10 valores más chicos entre los objetivos  $j \neq i$ , donde  $l_{ij}$  es la distancia de separación de ambos objetivos y  $k_j$  es la importancia del objetivo  $j$ .
- (2) Los monos no saltan a un objetivo ya visitado.

Para implementar la variación de el MCHBI, se distribuyen al azar 1,000,000 de objetivos en un espacio de dos dimensiones ( $d = 2$ ), en una área de una unidad cuadrada. Cada uno de los objetivos  $i$  tiene asociado un peso  $k_i (\geq 1)$ , el cual está distribuido entre estos de manera no uniforme de acuerdo con la relación (??). Para una distribución dada de recursos ( $\beta$  fijo), permitimos que el caminante parta de un objetivo muy cercano al centro del área de estudio ( $x \sim 0.5, y \sim 0.5$ ) y que realice 20,000 pasos obedeciendo las reglas del modelo modificado; (1) y (2). Para la regla (1) se va a permitir que el mono elija al azar uno de los  $\xi_{ij}$  que se encuentre dentro de los 10 valores más chicos. Con el propósito de lograr un buen estudio de los resultados obtenidos por el modelo, para cada valor de  $\beta$  se va a realizar de manera similar 10 veces el proceso anterior. Los valores de  $\beta$  que se van a considerar en este estudio son:  $\{2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 3.0, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5\}$ .

Los resultados obtenidos al implementar esta variación al modelo muestran lo siguiente:

- Las fluctuaciones de las longitudes de los pasos  $\langle l^2 \rangle / \langle l \rangle^2$  para los diferentes valores de  $\beta$  considerados en este estudio, muestran que nuevamente para  $\beta = 3$  se presentan las mayores fluctuaciones de  $l$ . La variación del modelo no afecta de manera cualitativa a los resultados obtenidos en la sección 4.1.3 (ver Fig. 5.5).

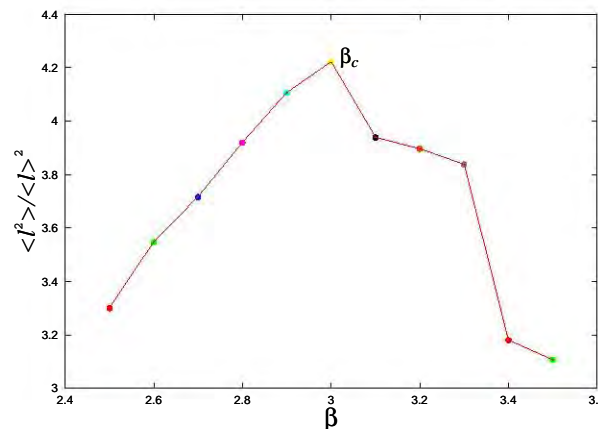


Figura 5.5: Fluctuaciones de las longitudes de los pasos del caminante hambriento en función de  $\beta$ , en donde se muestra que las fluctuaciones más grandes se encuentran en  $\beta_c$ .



- Los desplazamientos medios en función del tiempo  $\overline{D(t)}$  calculados para los distintos valores de  $\beta$  considerados en este estudio muestran que nuevamente, al igual que en la sección 4.1.7,  $\beta = 3$  es el parámetro de los recursos que induce el mayor desplazamiento medio. La medición de  $t$  se realiza de la misma forma que en la sección 4.1.6 (ver Fig. 5.6 (a)).

Para observar mejor los resultados obtenidos en este cálculo se grafica  $\overline{D(t)}$  en función de  $\beta$  para un tiempo  $t = 1500$ . Se ve claramente en la figura (5.6 (b)) que en  $\beta_c$  ( $\beta = 3$ ) se presenta el mayor desplazamiento medio.

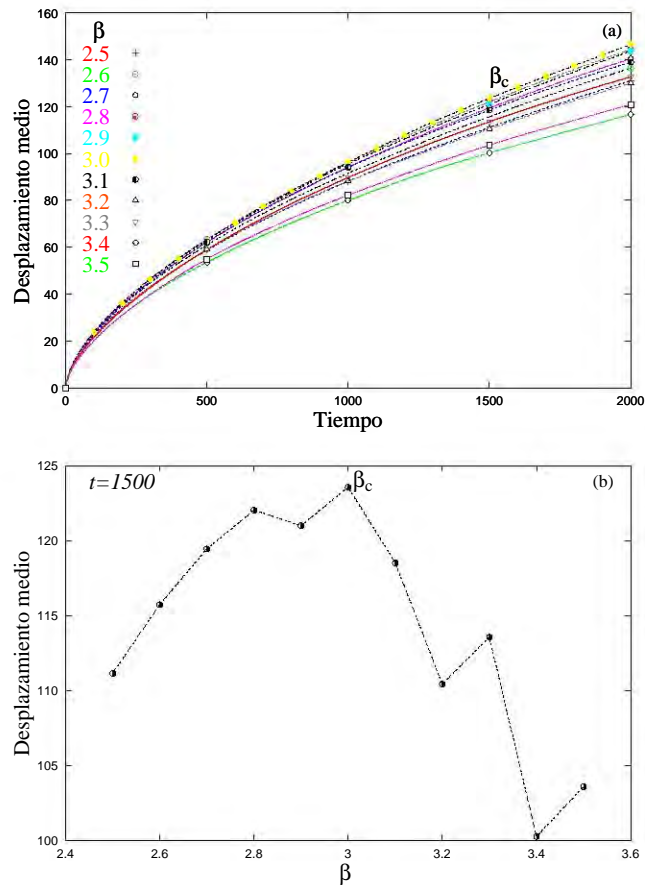


Figura 5.6: En la gráfica (a) se muestra el desplazamiento medio en función del tiempo para los diferentes valores de  $\beta$  considerados en este estudio, en donde se observa que  $\beta_c$  induce la máxima dispersión de semillas de la fruta que ha sido consumida por el caminante hambriento. En (b) se toma un tiempo fijo,  $t = 1500$  y se grafica el desplazamiento medio en función de  $\beta$ .

Los dos resultados anteriores muestran que la variación realizada a el MCHBI no afecta de manera cualitativa a los resultados antes obtenidos. El parámetro de los recursos  $\beta = 3$  induce las mayores fluctuaciones en las longitudes de los pasos así como también el mayor desplazamiento medio para todo tiempo  $t$ . Debido a esto, un dato interesante de conocer es si se cumple la relación  $P_{\beta_c}(l) \sim l^{-a}$  con  $a \simeq 2$ .

- En la gráfica (5.7) se muestra  $P_\beta(l)$  para algunos de los valores de  $\beta$  considerados en este estudio, en donde se puede observar que aparentemente para  $\beta = 3$  se cumple adecuadamente la relación  $P_\beta(l) \sim l^{-a}$  con  $a \simeq 2$ . Sin embargo un análisis más detallado de estos resultados muestra que  $P_{\beta_c}$  no es una ley de potencia (ver Fig. 5.8).

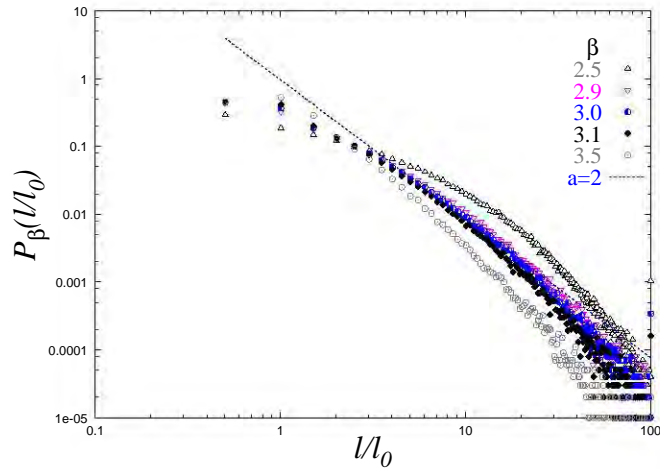


Figura 5.7: Se grafica en (log-log) la distribución de probabilidad de las longitudes de los pasos, para algunos valores de  $\beta$  considerados en este estudio. El número de objetivos visitados por el caminante es mucho menor que el número de objetivos distribuidos en el área de estudio ( $N$ ).

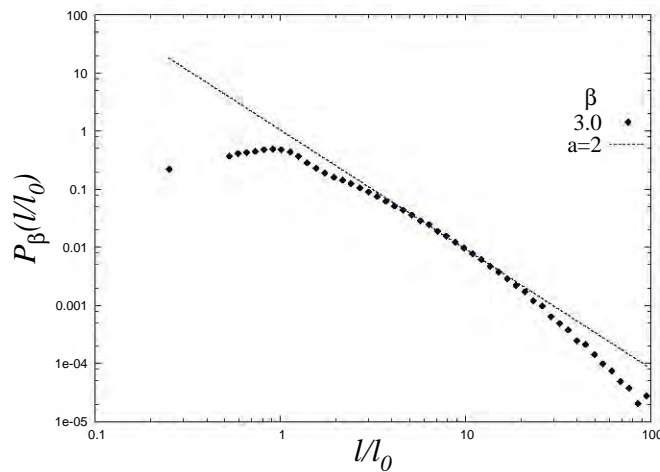


Figura 5.8: Se grafica en (log-log) la distribución de probabilidad de las longitudes de los pasos, para  $\beta_c$ . Se observa que  $P_{\beta_c}$  no se ajusta en todo el intervalo a  $P_\beta(l) \sim l^{-a}$  con  $a \simeq 2$ .

Estos resultados pueden ser entendidos cualitativamente de la siguiente manera:

Para  $l_{ij} \simeq l_0$ , la distribución de probabilidad de las longitudes de los pasos,  $P_{\beta_c}(l)$ , es menor en el modelo modificado que en el original (ver Fig. ?? y 5.8). Esto quiere decir que los sitios con  $\xi_{ij}$  chico (no el mínimo absoluto) están más lejos que el mínimo absoluto (ver Fig. 5.9 (a)).

Para  $l_{ij} \gg l_0$ , la distribución de probabilidad de las longitudes de los pasos,  $P_{\beta_c}(l)$ , es un poco menor en la variación del modelo que en el original (ver Fig. ?? y 5.8). Esto quiere decir que los sitios con  $\xi_{ij}$  chico (no el mínimo absoluto) están más cerca que el mínimo absoluto (ver Fig. 5.9 (b)).

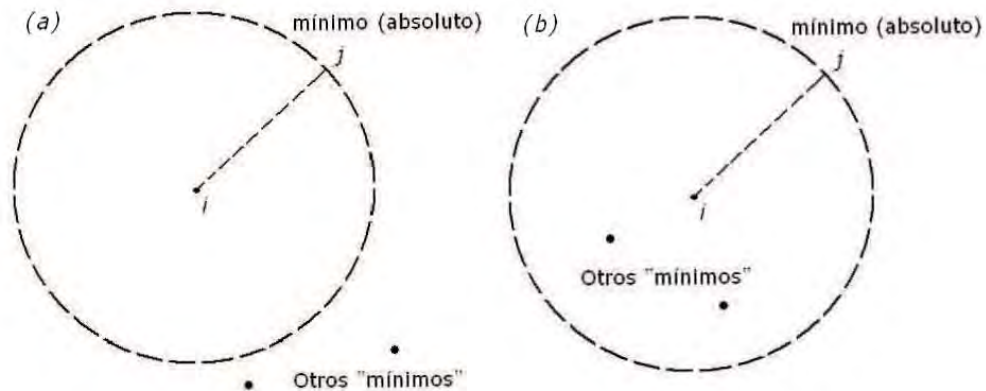


Figura 5.9: Diagrama cualitativo para explicar los resultados obtenidos para  $P_{\beta_c}(l)$  en la variación del modelo. (a) para  $l_{ij} \simeq l_0$  y (b) para  $l_{ij} \gg l_0$ .

# Capítulo 6

## Conclusiones

---

En la naturaleza es posible observar algunos sistemas biológicos con propiedades muy interesantes análogas a las que se presentan en diversos fenómenos físicos. Un ejemplo de este tipo de sistemas es la selva tropical, en donde tanto las trayectorias de forrajeo recorridas por algunos de sus habitantes, así como la distribución de árboles en el medio ambiente mismo, parecen obedecer leyes de potencia [?].

La selva tropical es un sistema complejo con una enorme variedad de formas de vida, en donde sus habitantes tienden a alcanzar un aprovechamiento óptimo de los recursos que son necesarios para su supervivencia. Para los animales que necesitan moverse por la selva para obtener su alimento y que la mayor parte del tiempo de su alimentación lo dedican al consumo de fruta, la distribución de los árboles que proveen estos recursos, influye de manera esencial en los patrones de movimiento que realizan, los cuales llegan a ser un factor determinante para su supervivencia. Este tipo de animales ofrecen a su vez, un importante servicio a la selva, debido a que son buenos dispersores de las semillas de las frutas de las que se han alimentado, para las que la única manera de lograr el éxito reproductivo y colonizar nuevos hábitats es a través de esta dispersión. Se sabe bien que si las semillas son dispersadas lejos de su lugar de origen, éstas tienen una mayor probabilidad de supervivencia. Por todo esto, podemos decir que las plantas de las selvas están atrapadas en una dependencia íntima con los animales frugívoros, y éstos a su vez dependen de las frutas de las plantas como fuente importante de alimento.

Uno de los habitantes de la selva tropical es el mono araña el cual es un animal bastante frugívoro, del total del tiempo que destina a la alimentación el 80 % a 90 % lo dedica al consumo de fruta en los árboles. Los patrones de movimiento que realiza este animal al alimentarse han sido estudiados en la selva de los alrededores del lago de Punta Laguna, México. Los estudios han mostrado [?] que estos animales parecen realizar caminatas de Lévy en sus actividades de forrajeo, de acuerdo a la distribución de de probabilidad de las longitudes de los pasos  $\ell$  dada por:

$$P(\ell) \sim \ell^{-a} \quad \text{con} \quad a \simeq 2.2 \quad (6.1)$$

En este trabajo de tesis se presentó el MCHBI el cual es un modelo determinista que contiene reglas basadas en una estrategia eficiente de forrajeo. El modelo se implementó para una distribución de recursos que obedece una ley de potencia inversa

$$P(k) = Ck^{-\beta} \quad (6.2)$$

donde  $k$  representa tamaño de los árboles o la importancia relativa de éstos.<sup>1</sup> El exponente  $\beta$  de esta distribución es sólo un parámetro del modelo.

Para un valor particular de  $\beta$  en (6.2) el modelo reproduce las propiedades estadísticas de las caminatas de Lévy realizadas por el mono araña en sus actividades de forrajeo. Los resultados numéricos obtenidos por el modelo para  $\beta = 3$  muestran que se cumple aproximadamente la relación (6.1) con  $a \sim 2$ , el cual es un valor muy cercano al obtenido de los datos de campo ( $a \simeq 2.2$ ). Además la distribución de los recursos gobernada por la relación (6.2) con  $\beta = 3$ , es muy similar a la que se ha encontrado en el campo de estudio del mono araña con  $\beta_{real} = 2.6 \pm 0.2$  [?].

El modelo nos ha permitido lograr un mejor entendimiento sobre las causas y consecuencias del tipo de movimiento que están realizando los monos araña en la selva de los alrededores del lago de Punta Laguna, México. Sobre éste último aspecto sabemos que el desplazamiento medio  $\overline{D}(t)$  que realiza el mono araña es un factor determinante que influye en la regeneración de los recursos, así como en la conservación del medio debido a las consecuencias que éste tiene en la dispersión de las semillas. Las semillas que son consumidas por el mono araña y no son destruidas en la digestión al ser evacuadas lejos de su lugar de origen poseen una mayor probabilidad de supervivencia, además de que en tal caso se pueden mezclar espacialmente las diferentes especies de árboles, lo que favorece la diversidad y la homogeneidad del bosque. Los resultados de las simulaciones numéricas muestran que el desplazamiento medio  $\overline{D}(t)$  es máximo en  $\beta = 3$  para todo tiempo  $t$ . Es decir,  $\beta = 3$  es el parámetro de los recursos que favorece la máxima dispersión de semillas.

La consistencia entre los resultados numéricos obtenidos por el modelo y los datos de campo<sup>2</sup> tomados en la selva de Punta Laguna [?], sugieren que el MCHBI, captura correctamente la interacciones entre el mono araña y su medio ambiente.

Una suposición crucial de nuestro modelo es que el mono araña posee un buen conocimiento de su territorio y sabe donde se encuentra localizado su alimento. Estos animales a diferencia de otros que también parecen realizar caminatas de Lévy (albatros, chacales, renos, etc) cuentan con mapas mentales.<sup>3</sup>

El estudio llevado a cabo actualmente con el mono araña en la selva tropical de Punta Laguna, es importante porque nos puede permitir estudiar un poco las interacciones entre éstos

---

<sup>1</sup> $C = 1/\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\beta}$ .

<sup>2</sup>Distribución de las longitudes de los pasos y la distribución del tamaño de los árboles.

<sup>3</sup>Se sabe de algunos animales que parecen contar con mapas mentales al moverse en su hábitat tales como: abejas, roedores y primates [?, ?, ?].

individuos y su medio [?], además de que es uno de los últimos trabajos en donde se han reportado caminatas de Lévy [?].

Entre los posibles estudios a realizar en el futuro relacionados con los problemas de forrajeo en medios complejos se encuentran los siguientes:

- Para el MCHBI, el mono araña sólo optimiza la razón de *costo/ganancia* a un próximo paso. Podría implementarse una variación al modelo en donde el caminante no sólo optimice a un proximo paso, sino una serie de pasos sucesivos (2, 3, ...).
- Se podría proponer otras distribuciones de tamaños de árboles  $p(k)$  diferentes a (6.2) con el propósito de investigar si alguna de ellas nos llevan a distribuciones de longitud de paso  $l$  de la forma (6.1).
- Se podría proponer un modelo donde estarían acoplados el crecimiento de los árboles y el forrajeo. Se estudiarían los estados estacionarios finales y la posible aparición de leyes de potencia con los exponentes  $\beta \sim 3$  y  $a \sim 2$ .

# Apéndice A

## Una estrategia óptima de búsqueda de objetos distribuidos aleatoriamente

---

La distribución de vuelos de Lévy, con longitud de vuelo  $l_j$

$$p(l_j) \sim l_j^{-a}, \quad 1 < a \leq 3. \quad (\text{A.1})$$

posee la ventaja de que en la búsqueda de objetos distribuidos aleatoriamente y con una baja densidad en el área de estudio (objetos escasos), la probabilidad de retorno a un sitio previamente visitado es más pequeña que para una distribución gaussiana ( $a \geq 3$ ) [?]. Por otra parte Shlesinger *et al.* argumentan que  $N$  caminantes de Lévy visitan más nuevos sitios que  $N$  caminantes Brownianos [?, ?, ?]. Debido a esto Viswanathan *et al.* [?], proponen encontrar el valor de  $a$  en (A.1) para el que se obtiene una estrategia óptima de búsqueda de alimento aleatoriamente distribuido. Se desarrolla un modelo idealizado que captura algunos aspectos importantes de la dinámica de forrajeo, sin considerar algunos otros como la relación depredador-presa así como la capacidad de aprendizaje del caminante. Se asume que el alimento está distribuido aleatoriamente y que el caminante sigue las siguientes reglas de movimiento:

- (1) Si el alimento se encuentra localizado dentro de su espacio visual en un radio  $r_v$  entonces el caminante se va a dirigir en línea recta al sitio más cercano en donde se encuentre su alimento. Para un valor finito de  $r_v$  sin importar el valor que este tenga, el modelo restringe al caminante a que no pueda recordar los sitios de alimento localizados arbitrariamente a una distancia lejana.
- (2) Si el caminante no detecta alimento en un radio  $r_v$ , entonces éste se va a mover en una dirección al azar con una longitud  $l_j$  dada por la distribución de probabilidad (A.1). Si con este desplazamiento el caminante no detecta un sitio de alimento en su espacio visual, entonces elige nuevamente una dirección al azar así como una longitud  $l_{j+1}$ . En el caso contrario de que el caminante detecte su alimento en su nuevo espacio visual este va a proceder de acuerdo con la regla (1).

El modelo es resuelto analíticamente. Sea  $\lambda$  el camino libre medio del caminante entre dos sitios de alimento (para dos dimensiones  $\lambda \equiv (2r_v\rho)^{-1}$  donde  $\rho$  es la densidad de sitios en el área). La distancia promedio del vuelo es:

$$\langle l \rangle \sim \frac{\int_{r_v}^{\infty} l^{-a} dl}{\int_{r_v}^{\infty} l^{-a} dl} \sim \frac{\int_{r_v}^{\lambda} l^{-a} dl + \int_{\lambda}^{\infty} l^{-a} dl}{\int_{r_v}^{\infty} l^{-a} dl} \dots \quad (\text{A.2})$$

$$\langle l \rangle \sim \frac{\int_{r_v}^{\lambda} l^{1-a} dl + \lambda \int_{\lambda}^{\infty} l^{-a} dl}{\int_{r_v}^{\infty} l^{-a} dl} \sim \left( \frac{a-1}{2-a} \right) \left( \frac{\lambda^{2-a} - r_v^{2-a}}{r_v^{1-a}} \right) + \frac{\lambda^{2-a}}{r_v^{1-a}}. \quad (\text{A.3})$$

El segundo término de este cálculo (“campo medio”) es aproximado debido a que se asume que la distancia  $\lambda_k$  entre dos sitios sucesivos  $k$  es igual a  $\lambda$ .

Se define la función de búsqueda eficiente  $\eta(a)$  como la razón del número de sitios de alimento visitados entre el total de la distancia recorrida por el caminante, así que

$$\eta = \frac{1}{\langle l \rangle N} \quad (\text{A.4})$$

donde  $N$  es el promedio del número de vuelos tomados por el caminante de Lévy mientras se desplaza entre dos sitios sucesivos de alimento. Un valor pequeño de  $\eta$  puede resultar de un valor grande para  $N$  o para  $\langle l \rangle$ , lo que corresponde a un valor grande y pequeño de  $a$  respectivamente. Por tal motivo, para los valores intermedios de  $a$  es factible pensar que existe un máximo para  $\eta$ .

Se considera el caso en que puede visitar un mismo sitio de alimento varias veces. Este tipo de movimiento puede ocurrir si los sitios de alimento son temporalmente escasos o están por debajo del valor de umbral de concentración. En tal caso el número promedio de vuelos  $N_n$  realizados en una trayectoria a una distancia promedio  $\lambda$  entre dos sitios sucesivos de alimento va como:

$$N_n \sim (\lambda/r_v)^{(a-1)/2}. \quad (\text{A.5})$$

En este caso en que los sitios de alimento son distribuidos escasamente, se tiene que  $\lambda \gg r_v$ . Sustituyendo (A.3) y (A.5) en (A.4) y diferenciando con respecto a  $a$ , se encuentra que la eficiencia  $\eta$  es óptima en:

$$\mu_{opt} = 2 - \delta \quad (\text{A.6})$$

donde  $\delta \sim 1/(\ln(\lambda/r_v))^2$ . Por lo tanto, en ausencia de un conocimiento *a priori* sobre la distribución de sitios de alimento, la estrategia óptima es escoger  $a_{opt} = 2$  cuando  $\lambda/r_v$  es grande.



# Bibliografía

- [1] Einstein, A. Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. *Annalen der Physik* **17**, 549 (1905).
- [2] Ramos-Fernández, G., Mateos, J.L., Miramontes, O., Cocho, G., Larralde, H., Ayala-Orozco, B. Lévy walk patterns in the foraging movements of spider monkeys (*Ateles geoffroyi*). *Behav. Ecol. Sociobiol.*, **55**, 223-230 (2004).
- [3] Lima, G. F., Martinez, A.S. & Kinouchi, O. Deterministic walks in random media. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 010603(1-4) (2001).
- [4] Denis Boyer, Gabriel Ramos Fernández, Octavio Miramontes, José L. Mateos, Germinal Cocho, Hernán Larralde, Humberto Ramos and Fernando Rojas. Scale-free foraging by primates emerges from their interaction with a complex environment. *Proc. R. Soc. B* (2006, in press).
- [5] Pearson, Karl. The problem of the random walk. *Nature* **72**, pp. 294,318,342 (1905).
- [6] Larralde, H., Trunfio, P., Havlin, S., Stanley, H. E. and Weiss, G. H. Territory covered by  $N$  diffusing particles. *Nature* **355**, 423-426 (1992).
- [7] Osborne, M. F. M. Brownian motion in the stock market. *Operations research* (Marzo-Abril), 145-173 (1959).
- [8] Shlesinger, M. F. Lévy walks versus Lévy flights. In: Stanley, H. E. and Ostrowsky, N. (eds), *On growth and form*. Nijhoff Publishers. (1986).
- [9] Lévy, P. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. (Gauthier-Villars, Paris, 1937).
- [10] Bouchaud, J-P. & Georges, A. Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications. *Phys. Rep.* **195**(2-4), 127-293 (1990).
- [11] Weeks, E. R., Solomon, T. H., Urbach, J. S., Swinney, H. L. Observation of anomalous diffusion and Lévy flights. In: Shlesinger, M. F., Zaslavsky, G. M., Frisch, U. (eds) *Lévy flights and related topics in physics*. Springer, Berlin Heidelberg. New York. pp. 51-71 (1970).
- [12] Zumofen, G., Klafter, J. Laminar-localized-phase coexistence in dynamical systems. *Phys Rev E* **51**, 1818-1821 (1995).

- [13] M. Donsker and S.R.S. Varadhan. Asymptotics for the Wiener sausage, *Comm. Pure Appl. Math.* **28**, 427-432 (1975).
- [14] Cole, B. J. Fractal time in animal behaviour: the movement activity of *Drosophila*. *J. Anim.* **50**, 1317-1324 (1995).
- [15] Bartumeus, F., Peters, F., Pueyo, S. et al. Helical Lévy walks: adjusting searching statistics to resource availability in microzooplankton. *PNAS* **100**(22), 12771-12775 (2003).
- [16] Viswanathan, G. M., Afanasyev, V., Buldyrev, S. V. et al. Lévy flight search patterns of wandering albatrosses. *Nature* **381**, 413-415 (1996).
- [17] Márell, A., Ball, J. P. and Hofgaard, A. Foraging and movement trajectories of female reindeer: insights from fractal analysis, correlated random walks and Lévy flights. *Can. J. Zool.* **80**, 854-865 (2002).
- [18] Austin, D., Bowen W. D. and McMillan J. I. Intraspecific variation in movement patterns: modeling individual behaviour in a large marine predator. *Oikos* **105**, 15-30 (2004).
- [19] Atkinson, R. P., Rhodes, C. J., Macdonald, D. W. et al. Scale-free dynamics in the movement patterns of jackals. *Oikos* **98**, 134-140 (2002).
- [20] Shlesinger, M. F. Zaslavsky, G. & Frisch, U. (eds). Lévy flights and related topics in physics. (Springer, Berlin, 1995).
- [21] Viswanathan, G. M., Buldyrev, S. V., Havlin, S. et al. Optimizing the success of random searches. *Nature* **401**, 911-914 (1999).
- [22] Ramos-Fernández, G. Ayala-Orozco, B. Population size and habitat use in spider monkeys at Punta Laguna, México. In *Primates in Fragments: Ecology and Conservation*, Marsh, L.K. (Ed.) (Kluwer Academic Publishers, New York, (2002)).
- [23] Kamil, A.C. and Jones, J. E. The seed-storing corvid Clark's nutcracker learns geometric relationships among landmarks. *Nature* **390**, 276-279 (1997).
- [24] Shettleworth, S.J., Krebs, J.R., Stephens, D.W. Gibbon, J. Tracking a fluctuating environment: a study of sampling. *Animal Behaviour* **36**, 87-105 (1998).
- [25] Janson, C.H. Experimental evidence for spatial memory in foraging wild capuchin monkeys, *Cebus apella*. *Animal Behaviour* **55**, 1229-1243 (1998).
- [26] Kamil, A. C., Balda, R. P. Cache recovery and spatial memory in Clark's nutcrackers (*Nucifraga columbiana*). *J. Exp. Psychol Anim.* **11**, 95-111 (1985).
- [27] Dyer, F. C. Spatial cognition and navigation in insects. In: Real L.A. (ed) Behavioral mechanisms in evolutionary ecology. University of Chicago Press, Chicago. (1994).
- [28] Valero, A. Spider monkey (*Ateles geoffroyi*) travel patterns in a subtropical forest of Yucatan, México. PhD Thesis. School of Psychology. University of St Andrews, St Andrews. pp 155. (2004).

- [29] Gross, E. J., Zank, C., Hobbs, T. N. Spalinger, E. D. Movement rules for herbivores in spatially heterogeneous environments: responses to small scale pattern. *Landscape Ecology*. **10**, 209-217 (1995).
- [30] Collett, T. S., Cartwright, B. A. & Smith, B. A. Landmark learning and visuo-spatial memories in gerbils. *Journal of Comparative Physiology A* **158**(6), 835-851 (1986).
- [31] Garber, P. A. The role of spatial memory in primate foraging patterns: *Saguinus mystax* and *Saguinus fuscicollis*. *Am. J. Primatol.* **19**, 203-216 (1989).
- [32] Estrada, A. & Coates-Estrada, A. Las selvas tropicales húmedas de México. (Fondo de Cultura Economica, 1995) pp. 10-97.
- [33] Enquist, B. J. & Niklas, K. J. Invariant scaling relations across tree-dominated communities. *Nature* **410**, 655-660 (2001).
- [34] Niklas, K. J., Midgley, J. J. & Rand, R. H. Tree size frequency distributions, plant density, age and community disturbance. *Ecol. Lett.* **6**, 405-411 (2003).
- [35] Lambert, J. E. Primate digestion: Interactions among anatomy, physiology, and feeding ecology. *Evol. Anthropol.* **IX**, 8-20 (1998).
- [36] Janzen, D.H. Herbivores and the number of tree species in tropical forests. *American Naturalist* **104**, 501-528 (1970).
- [37] Harms, K.E., Wright, S.J., Calderón, O., Hernández, A. & Herre, E.A. Pervasive density-dependent recruitment enhances seedling diversity in a tropical forest. *Nature* **404**, 493-495 (2000).
- [38] Garber, P.A. The role of spatial memory in primate foraging patterns: *Saguinus mystax* and *Saguinus fuscicollis*. *Am. J. Primatol.* **19**, 203-216 (1989).
- [39] Nathan, R. & Muller-Landau, H. C. Spatial patterns of seed dispersal, their determinants and consequences for recruitment. *Trends Ecol. Evol.* **15**, 278-285 (2000).
- [40] Boyer, D., Larralde, H. Looking for the Right Thing at the Right Place: Phase Transition in a Agent Model with Heterogeneous Spatial Resources. *Complexity* **10**(3), 52-55 (2005).
- [41] Berkolaiko, G., Havlin, S., Larralde, H. and Weiss, G. H. Expected number of distinct sites visited by  $N$  discrete Lévy flights on a one-dimensional lattice. *Phys. Rev. E* **53**, 5774-5778 (1996).
- [42] Berkolaiko, G., Havlin, S. Territory covered by  $N$  Lévy flights on d-dimensional lattices. *Phys. Rev. E* **55**, 1395-1400 (1997).
- [43] Gabriel Ramos-Fernández, Denis Boyer & Vian P. Gómez. A complex social structure with fission-fusion properties can emerge from a simple foraging model. *Behavioral Ecology Biosociol.* (2006, in press).
- [44] Joseph Klafter & Igor M. Sokolov. Anomalous diffusion spreads its wings. *Phys. world* **18**, 29-32 (2005).