UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍA DE CONTROL ÓPTIMO Y SUS APLICACIONES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

JOSÉ ANTONIO ALCÁNTARA FÉLIX

TUTOR: DR. PABLO PADILLA LONGORIA

2006

UNAM Universidad Nacional Autónoma de México

Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno.
   Alcántara
   Félix
   José Antonio
   Teléfono: 56 74 55 43
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Actuaría.

2. Datos del tutor:
   Doctor
   Pablo
   Padilla
   Longoria

3. Datos del sinodal 1
   Doctora
   María de la Luz Jimena
   De Teresa
   De Oteyza

4. Datos del sinodal 2
   Doctor
   Faustino
   Sánchez
   Garduño

5. Datos del sinodal 3
   Doctor
   Mogens
   Bladt
   Petersen

6. Datos del sinodal 4
   Doctor
   Luis Antonio
   Rincon
   Solis

7. Datos del trabajo escrito.
   Teoría de Control Óptimo y sus aplicaciones
   86 páginas
   2006.

Índice general

Introducción

En las ciencia naturales y en otras disciplinas surge la necesidad de optimizar. Una herramienta útil para lograr este propósito es la teoría de control óptimo. ¿ Qué es la teoría de control? Una respuesta que podemos dar a esta pregunta es la siguiente: dado un sistema, deseamos modificar su comportamiento de forma que el resultado sea óptimo en algún sentido. El objetivo principal de esta tesis es poder dar una introducción a esta teoría en dos contextos matemáticos; el determinista y el estocástico.

Este trabajo se divide en tres capítulos, los primeros dos están dedicados a desarrollar los conceptos básicos para entender las correspondientes formulaciones y el último para desarrollar ejemplos concretos.

En el primer capítulo presentamos algunos conceptos fundamentales del cálculo de variaciones que ayudarán a introducir a la teoría de control óptimo determista. Después, enunciamos el principio de Pontryagin y lo desmostramos en un caso particular. Y por último abordamos el tema de la programación dinámica y sus consecuencias: los principios de verificación y la relación con la teoría de control.

En el segundo capítulo construimos la integral de Itô , definimos las ecuaciones diferenciales estocásticas y presentamos los correspondientes resultados de existencia y unicidad, así como la propiedad de Markov y la fórmula de Dynkin. Al final desarrollamos la teoría de control y los principios de verificación correspondientes a este caso.

El tercer capítulo está dedicado a desarrollar y mencionar ejemplos en finanzas y biologa.

Capítulo 1

Teoría de Control

En este capítulo presentaremos los conceptos fundamentales de la teoría de control que serán necesarios para abordar problemas de control estocástico. En particular desarrollaremos las nociones básicas del cálculo de variaciones y deduciremos condiciones necesarias para la existencia de extremos (ecuación de Euler-Lagrange). Posteriormente abordaremos las nociones correspondientes a la teoría de control (principio de Pontryagin, ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman). Se pueden consultar [I02], [FR75], [FS92] y [KSh91].

1.1. Cálculo de Variaciones

El propósito de esta sección es poder dar los conceptos básicos del cálculo de variaciones. Posteriormente veremos cómo relacionar este problema con la teoría de control.

1.1.1. El Problema más Simple

El problema central del cálculo de variaciones es análogo a uno de los problemas más importantes del cálculo diferencial. Éste consiste en que dada una función, y ciertas restricciones sobre ésta, deseamos encontrar un máximo o mínimo interior (en caso de existir) de dicha función en una región, i.e.

$J(z) = \max_{x \in X} J(x)$, donde X={ funciones admisibles }.

Esto nos dice que las funciones que consideraremos está constituida por funciones cuyas variables son a su vez funciones. A estas "funciones de funciones" las llamaremos funcionales. Hemos de notar que las restricciones están dadas por la clase de funciones consideradas, por ejemplo:

1. $C^0[a,b] = C^0(I)$={ $f : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(t)$ es continua },
2. $C^n(I)$={ $f : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(t)$ tiene derivadas hasta orden n y sus derivadas son continuas },
3. $L^p(I)$={$f : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t < \infty$ para $1 \leq p < \infty$}.

Nuestro objetivo es deducir condiciones necesarias sobre los funcionales para la existencia de un extremo (i.e. máximo o mínimo) análogas a las correspondientes del cálculo diferencial sobre la anulación de la derivada.

Sea $F(t, x, p) \in C^1$ una función tal que

1. $F : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $x(t) \in C^1(I)$,
2. $x(a) = A$, $x(b) = B$.

Sea

$$J(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t))\, \mathrm{d}t, \tag{1.1}$$

entonces nuestro problema es encontrar una función z tal que

$$J(z) = \max_{x \in X} J(x),$$

con $X = \{x \in C^1(I) \mid x(a) = A \text{ y } x(b) = B\ \}$.

Así como en el cálculo diferencial sabemos que si en z se alcanza un máximo o un mínimo interior, $g'(z) = 0$, (siguiendo este mismo razonamiento) veremos que una condición parecida es necesaria para nuestro problema.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que z es un máximo de (1.1), i.e. $J(z) \geq J(x)\ \forall x \in X$. Sea $x(t) = z(t) + kh(t)$ tal que $h \in C^1(I)$ y $h(a) = h(b) = 0$, $k \in \mathbb{R}$.

Notemos que $x \in X$, ya que cumple con las condiciones de la clase de funciones admisibles.

Sea

$$g(k) = \int_a^b \Big(F(t, z(t) + kh(t), z'(t) + kh'(t)) \Big) \, \mathrm{d}t.$$

Como z es un máximo entonces $g'(0) = 0$. A continuación veremos como calcular ésta derivada:

Para h fija tenemos

$$\begin{aligned} g'(k) &= \frac{d}{dk}\Big(\int_a^b F(t, x(t), x'(t)) \, \mathrm{d}t \Big) \\ &= F(b, x(b), x'(b)) \frac{d(b)}{dk} - F(a, x(a), x'(a)) \frac{d(a)}{dk} + \qquad (1.2) \\ & \quad \int_a^b \frac{\partial}{\partial k} (F(t, x(t), x'(t)) \, \mathrm{d}t) \\ &= \int_a^b \Big(F_x(t, z + kh, z' + kh')h + F_{x'}(t, z + kh, z' + kh')h' \Big) \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Es decir

$$g'(0) = \int_a^b \Big(F_x(t, z, z')h + F'_x(t, z, z')h' \Big) \, \mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

La expresión (1.2) se deduce de la regla de Leibnitz. A (1.3) se le conoce cómo la primera variación, y se le denota frecuentemente (sobre todo en la literatura física) por $\delta g(z)h$. La condición de extremo es entonces $\delta g(z)h = 0$.

Integrando por partes desde a hasta b y usando las condiciones de frontera

$$\int_a^b F_{x'} h' \, \mathrm{d}t = - \int_a^b \frac{d}{dt}(F_{x'}) h \, \mathrm{d}t. \tag{1.4}$$

Entonces obtenemos que

$$g'(0) = \int_a^b \Big(F_x - \frac{d}{dt}(F_{x'}) \Big) h \, \mathrm{d}t = 0$$

por el Lema 1.1.1 (ver más adelante) tendremos que

$$F_x = \frac{d}{dt}(F_{x'});$$

siendo esta una ecuación diferencial ordinaria (EDO). A la expresión anterior se le conoce como la *ecuación de Euler-Lagrange* (E-L).

Entonces una condición necesaria para que z sea un máximo interior, es que cumpla la ecuación anterior.

Observación 1.1.1 *Para deducir (1.3) sólo usamos el hecho de que z sea un punto extremo interior.*

Ejemplo 1.1.1 (Geodésicas en el plano) *Dados dos punto en el plano, deseamos encontrar la curva que una a estos puntos y a su vez, la longitud de la curva sea mínima.*

Para este problema, consideramos $F(t,x,x') = (1+(x')^2)^{\frac{1}{2}}$ con $x(a) = A, x(b) = B$ y el funcional resultante representa la longitud de una curva.

Sea $X = C^1[a,b]$, entonces la ecuación de E-L es

$$(F_{x'})' = \left((x')(1+(x')^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = F_x = 0,$$

y por tanto

$$F_{x'} = (x')(1+(x')^2)^{-\frac{1}{2}} = C$$

con C constante. Entonces podemos observar que $x(t) = ct + d$ son las soluciones a la correspondiente ecuación de E-L, con $c = A - B/a - b$ y $d = B - bc$. Notemos que las soluciones son rectas, si $A \neq B$; una constante si $A = B$ y, en particular cero si $A = B = 0$. De otra forma, no serían admisibles. La interpretación de este resultado responde a la pregunta de cuál sería la longitud mínima de curva dada por la gráfica de una función. Es curioso ver que obtenemos un resultado que ya conocíamos, y que se puede resolver sin esta herramienta usando argumentos geométricos. Lo importante de lo que hicimos anteriormente es ejemplificar un resultado conocido, ya que este tipo de razonamientos no necesariamente es el más adecuado , pero sirve para poder tratar el problema de las geodésicas en forma más general, por ejemplo buscar las geodésicas en una superficie o en una variedad (ver [Ca93]).

Ejemplo 1.1.2

Sea $F(t,x,x') = cx^2 + dx'^2$ con $x(a) = A$ y $x(b) = B$, donde c, d son constantes. Entonces la ecuación de E-L es

$$dx'' - cx = 0,$$

que es una EDO de segundo orden. Notemos que si la ecuación anterior la multiplicamos por $2x'$ y sumamos y restamos $x''F_{x'}$ lo que nos queda es

$$\frac{d}{dt}(F - x'F_{x'}) = 0,$$

que es lo mismo que

$$F - x'F_{x'} = cx^2 - dx'^2 = K,$$

que es una EDO de primer orden. A la ecuación anterior se le conoce como la integral primera y es de utilidad cuando F no depende explícitamente de la variable t.

Definición 1.1.1 (Derivada de Gâteaux) *Sea J un funcional definido en un espacio vectorial normado (e.v.n.) denotado por $(X, \|\cdot\|)$. Si J cumple con:*

1. *$J(x + th)$ está definido para $|t|$ pequeño.*

2. *$\lim_{t\to 0} \frac{J(x+th)-J(x)}{t} = \frac{d}{dt}J(x + th)\Big|_{t=0}$ existe,*

se dice que J tiene derivada de Gâteaux en x en la dirección h, y se denota como $D_hJ(x)$.

Definición 1.1.2 (Derivada de Fréchet) *Sea J un funcional definido en e.v.n. $(X, \|\cdot\|)$. Si existe un funcional lineal acotado en X, $DJ(x)$, tal que:*

$$J(x + h) = J(x) + DJ(x)h + o(\|h\|),\ \forall h \in X,$$

entonces se dice que $J(x)$ tiene derivada de Fréchet en X, denotada por $DJ(x)$.

Si $X = R^n$ obtendríamos, de la primera definición, la derivada direccional y en el segundo caso la diferencial.

Ejemplo 1.1.3

Sea $F(t, x, x')$ una función continua, con derivadas parciales F_x, $F_{x'}$ continuas en $[a, b] \times \mathbb{R}^2$. Sea $J(x)$ el funcional asociado definido en un subconjunto de $C^1[a, b]$. Un cálculo directo nos da que

$$D_hJ(x) = \int_a^b F_xh + F_{x'}h' \,\mathrm{dt}$$

y también se puede demostrar que (véase [I02])

$$D_h J(x) = DJ(x)h.$$

Por lo tanto la derivada de Fréchet como la de Gâteaux coinciden. Ver [I02].

Enunciaremos los siguientes resultados que justifican algunos pasos anteriores. A estos se les conoce como lemas fundamentales del cálculo de variaciones.

Lema 1.1.1 *Sean g y h funciones continuas en I, con $h(a) = h(b) = 0$. Si*

$$\int_a^b g(t)h(t)\,\mathrm{d}t = 0, \tag{1.5}$$

$\forall$ h entonces $g(t) = 0$ $\forall$ $t \in I$.

Demostración. Haremos la demostración por contradicción. Sin pérdida de generalidad, suponga que $g(t_0) > 0$ para algún $t_0 \in I$. Por continuidad de g, existe un intervalo (α, β) alrededor de t_0 donde $g > 0$ para todo punto en (α, β). Consideremos

$$h(t) = \begin{cases} (t-\alpha)(\beta - t) & \text{if } \alpha \leq t \leq \beta \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

y notemos que

$$\int_a^b g(t)h(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta g(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,\mathrm{d}t > 0$$

y esto contradice (1.5) □.

Lema 1.1.2 *Si $g(t)$ es una función continua en I con $\int_a^b g(t)h'(t)\,\mathrm{d}t = 0$ para toda $h(t) \in C^1(I)$ con $h(a) = h(b) = 0$, entonces $g(t)$ es constante en I.*

Demostración. Ver [I02] □.

A estos lemas se les conoce como *lemas fundamentales del cálculo de variaciones* (véase [I02]).

Podemos observar que nuestra clase de funciones nos permitieron integrar por partes en (1.4) para obtener la ec. de E-L. Los lemas nos dan condiciones más débiles con respecto a la diferenciabilidad de $g(t)$ y los resultados serían más generales si $h(t)$ fuera infinitamente diferenciable (en el sentido distribucional ver [E02]). La demostración no se dará, pero ésta se puede consultar en [I02].

Análogamente presentamos la segunda variación que sería el equivalente a la segunda derivada y ésta es

$$g''(0) = \delta^2 g(t)h = \int_a^b F_{xx}h^2 + 2F_{xx'}hh' + F_{x'x'}h'^2 \,\mathrm{d}t.$$

Ahora bien, una condición suficiente para que en un extremo se alcance un máximo (mínimo) es que $F(t,x,x')$ sea cóncavo (convexo) en x y x', ya que si
$F = F(t,x,x')$ y $\widetilde{F} = F(t,z,z')$ entonces tendríamos, por definición de concavidad, que

$$F(t,x,x') - F(t,z,z') \leq (x-z)F_x + (x'-z')F_{x'},$$

e integrando esta desigualdad

$$\begin{aligned}
\int_a^b (F-\widetilde{F})\,\mathrm{d}t \quad &\leq \quad \int_a^b (x-z)\widetilde{F_x} + (x'-z')\widetilde{F_{x'}}\,\mathrm{d}t && (1.6)\\
&= \quad \int_a^b h\widetilde{F_x} + h'\widetilde{F_{x'}}\,\mathrm{d}t && (1.7)\\
&= \quad \int_a^b h\left(\widetilde{F_x} - \frac{d}{dt}(\widetilde{F_{x'}})\right)\mathrm{d}t = 0. && (1.8)
\end{aligned}$$

La segunda igualdad se debe a que $h = x - z$, $h(a) = h(b) = 0$ y z es un extremo, por lo tanto cumple con la ecuación de E-L.

El inconveniente con esta condición es que la mayoría de los problemas no van a ser necesariamente concavos (convexos).

Análogamente, una condición necesaria para encontrar un máximo (mínimo), es que $\delta^2 J(z)h \leq 0$ (≥ 0). Notemos que

$$\int_a^b 2F_{xx'}hh'\,\mathrm{d}t = -\int_a^b h^2 \frac{d}{dt}\left(F_{xx'}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Observemos que no hay términos de frontera, porque $h(a) = h(b) = 0$, por lo que

$$\delta^2 J = \int_a^b \left(F_{xx} - \frac{d}{dt}(F_{xx'}) \right) h^2 + F_{x'x'} h'^2 \, \mathrm{d}t.$$

Ahora usaremos el siguiente lema para obtener otra condición necesaria para la existencia de máximos o mínimos.

Lema 1.1.3 *Sean $P(t)$ y $Q(t)$ funciones continuas en I tales que el siguiente funcional cuadrático*

$$\int_a^b (P(t)h'(t)^2 + Q(t)h(t)^2) \, \mathrm{d}t$$

esté definido $\forall\ h \in C^1(I)$ con $h(a) = h(b) = 0$. Una condición necesaria para que el funcional no sea positivo para toda h es que $P(t) \leq 0$ en I.

Demostración. Ver [I02] $\square$.

Aplicando el lema anterior, con $P(t) = F_{x'x'}$ y $Q(t) = F_{xx} - (F_{xx'})'$, tenemos que una condición necesaria es que $F_{x'x'} \leq 0$. A esta condición se le conoce como la *condición de Legendre.*

Ejemplo 1.1.4 (continuación del Ejemplo 1.1.1)

En este caso

$$F_{x'x'} = \frac{1}{(1 + x'^2)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

Entonces

$$\delta^2 J(x)h = \int_a^b F_{x'x'} h'^2 \, \mathrm{d}t \geq 0.$$

Por el resultado y la condición anterior, las soluciones de la ecuación de E-L correspondientes a este problema cumplen la condición de Legendre.

Ejemplo 1.1.5 (continuación Ejemplo 1.1.2)

Análogamente,

$$F_{x'x'} = 2d.$$

Entonces si la solución al problema existiera, $d \leq 0$ es necesario para que fuera máximo, más no suficiente y la desigualdad se invierte si se buscara un mínimo. Ahora sólo hay que verificar la segunda variación para darnos cuenta cuál sería su signo , i.e.

$$2\int_a^b ch^2 + dh'^2 \,\mathrm{d}t,$$

y observamos que el signo de la segunda variación no está bien determinado si $c \neq d$, si $c = d$ el signo de la segunda variación sería el mismo de c.

1.1.2. Condiciones Holonómicas y no Holonómicas

En esta sección hablaremos de los tipos de restricción que podemos asociar a nuestra funcional. En varios casos podemos ver que dada una función, no siempre va a existir un máximo o un mínimo interior, aún cuando la función sea continua i.e. una función monótona creciente y continua. Si restringimos los valores que toma la función en un conjunto más pequeño (i.e. compacto), nuestro problema esta resuelto por el teorema de Heine-Borel. En las aplicaciones, de forma natural se dan cierto tipo de restricciones i.e. la cantidad de combustible de una nave espacial, la cantidad de material para construir una caja óptima, etc. Podemos dividir los tipos de restricciones en tres:

1. Los problemas condicionados por un funcional,
2. Los problemas condicionados por un operador no lineal que dependa de la función x (condición holonómica), y
3. Los problemas condicionados por un operador no lineal que dependa de las derivadas de la función x (condición no holonómica).

Para que podamos dar alguna respuesta a nuestro problema con restricciones, tenemos que hablar primero de los multiplicadores de Lagrange:

Teorema 1.1.1 (Multiplicadores de Lagrange en X [I02]) *Sean $J(x)$, $G_1(x), \cdots, G_m(x)$ funcionales definidos en una vecindad de x_0 en X, con derivada de Gâteaux en esta vecindad para toda dirección h en X. Supongamos que cada derivada es continua en x para cada h fijo. Si $J(x)$ tiene un extremo local en x_0, condicionado por $G_i(x) = 0$, entonces existen constantes $\nu, \lambda_1, \cdots, \lambda_m$ con $|\nu| + |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_m| \neq 0$ tales que:*

$$\nu D_h J(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i D_h G_i(x_0) = 0,$$

en particular si los funcionales tienen derivadas de Fréchet continuas en X, entonces

$$\nu DJ(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i DG_i(x_0) = 0.$$

Demostración. Ver [I02].

Condiciones Holonómicas

Sea $J(x) = \int_a^b F(t, x, x')\,\mathrm{d}t$ con $x \in [a, b]$ dado y condicionado por $G(t, x) = 0$.

Dado que podemos usar los multiplicadores como herramienta de optimización, buscamos plantear el problema de forma adecuada, ya que G no es un funcional.

Para $u \in C^1(I)$ con $u(a) = u(b) = 0$, y dado $G(t, x)$ como antes definimos,

$$G(x, u) = \int_a^b G(t, x)u(t)\,\mathrm{d}t.$$

Como queremos la condición $G(t, x) = 0$, tenemos que $G(x, u) = 0$ $\forall u$ admisible. La igualdad está bien justificada por el Lema 1.1.1 de la sección anterior, y por lo tanto esta $G(x, u)$ ya es un funcional.

Si J, G tienen derivada de Fréchet, entonces

$$\nu DJ(x, u)(h, k) + \lambda DG(x, u)(h, k) = 0,$$

$\forall\ h, k \in C^1(I)$ con $h(a) = h(b) = k(a) = k(b) = 0$. En este caso tenemos un vector (h, k) para la derivada direccional, porque tenemos dos funciones x, u.

Entonces

$$\nu \int_a^b F_x h + F_{x'} h' \mathrm{d}t + \lambda \int_a^b G_x uh + Gk\,\mathrm{d}t = 0.$$

Usando el lema (1.1.2) para integrar por partes y agrupando los términos multiplicados por h, obtenemos

$$\int_a^b \nu(F_x h - F_{x'} + \lambda G_x u)h\mathrm{d}t + \int_a^b +\lambda Gk\,\mathrm{d}t = 0.$$

Notemos que $h = 0$ o $k = 0$ cumplen con las direcciones considerádas. Para cada caso, obtenemos una ecuación de E-L por el lema (1.1.1) y éstas son

$$\nu F_x + \lambda G_x u = \nu(F_{x'})', \qquad \lambda G = 0.$$

Si $\lambda = 0$, entonces $\nu \neq 0$ y tendríamos un punto crítico libre de J i.e. no depende de la restricción; si $\lambda \neq 0$, entonces $G(t, x) = 0$ y con $\lambda(t) = -\lambda u(t)$. En consecuencia se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.1.2 ([I02]) *Si $J(x)$ está condicionado por $G(t, x) = 0$, entonces existe ν constante y una función $\lambda(t)$, con $|\nu| + |\lambda| \not\equiv 0$, tales que:*

$$\nu[(F_{x'})' - F_x] + \lambda(t)G_x = 0.$$

Condiciones no Holómicas

Considere $J(x)$, con $x \in [a, b]$ dado y condicionado por $G(t, x, x') = 0$. Una observación importante es que si $G_{x'} \neq 0$, por el teorema de la función implícita, entonces tenemos que $x' = f(t, x)$ es una ecuación diferencial, sin solución en general. Si dejamos de lado esta dificultad y siguiendo el mismo razonamiento, obtendremos lo siguiente:

Sea

$$G(x, u) = \int_a^b G(t, x, x')u(t)\, \mathrm{d}t$$

para $u \in C^1(I)$, con $u(a) = u(b) = 0$ y claramente $G(x, u) = 0$ para todo u si se cumple la condición no holonómica.

Entonces por un proceso similar con la diferencia que en este caso aparece un término extra $(\lambda G_{x'}u)$, llegamos a que

$$\nu F_x + \lambda G_x u - (\nu F_{x'} + \lambda G_{x'}u)' = 0, \qquad \lambda G = 0.$$

Si $\lambda = 0$, obtenemos la ecuación de E-L sin restringir el funcional J. Si $\lambda \neq 0$, tendremos la condición $G = 0$ y $\lambda u(t) = \lambda(t)$.

Teorema 1.1.3 ([I02]) *Si $J(x)$ está condicionado por $G(t, x) = 0$, entonces existe ν constante y una función $\lambda(t)$, con $|\nu| + |\lambda| \not\equiv 0$, tales que:*

$$\nu F_x + \lambda(t)G_x - (\nu F_{x'} + \lambda(t)G_{x'})' = 0.$$

Se puede consultar [I02].

Ejemplo 1.1.6

Definamos el siguiente funcional
$$J(x) = \int_a^b x'^2 \,\mathrm{d}t,$$
sujeto a $x(a) = A, x(b) = B$ y
$$\int_a^b x \,\mathrm{d}t - (b - a) = 0.$$

Entonces obtendríamos
$$2\nu x'' + \lambda = 0.$$

De esta ecuación podemos ver que $\nu \neq 0$ y que λ es un múltiplo de la segunda derivada de la solución.

Ejemplo 1.1.7

Consideremos el siguiente funcional
$$J(x) = \int_a^b F(t, x, u) \,\mathrm{d}t,$$
sujeto a $u - x' = 0$. Entonces tendremos
$$\begin{aligned} \nu F_y + \lambda' &= 0 \\ \nu F_u + \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Se puede ver que $\nu \neq 0$ y si sustituimos λ obtenemos la ecuación de E-L. Este ejemplo relaciona al problema del cálculo de variaciones como un caso particular del problema de la teoría de control, que se discutirá más adelante.

Ejemplo 1.1.8 (El problema isoperimétrico clásico)

Este problema consiste en encontrar una curva que encierre un área máxima con longitud dada. Su nombre proviene del griego iso=igual, peri=alrededor y metron=medida. Es uno de los problemas clásicos del cálculo de variaciones (ver [I02]). En general se puede plantear de la siguiente forma:

Sea $J(x)$ como en (1.1) en el mismo espacio de funciones, pero en esta ocasión sujeto a
$$G(x) = \int_a^b G(t, x, x') \,\mathrm{d}t - K = 0,$$
con $G(t, x, x') \in C^1(I)$ y K constante.

Ejemplo 1.1.9

Si $F(t,x,x') = x$, $G(t,x,x') = (1+x'^2)^{\frac{1}{2}}$ y $x \geq 0, x(0) = x(b) = 0, K = L$, entonces tendríamos lo siguiente

$$\nu - \left(\frac{\lambda x'}{(1+x'^2)^{\frac{1}{2}}} \right)' = 0.$$

Es claro que $\lambda \neq 0$. Ahora, si suponemos que $\nu = 0$, se puede ver que la solución es una recta, por lo tanto inadmisible, entonces integrando y despejando x' podemos llegar a que

$$(x-c)^2 + (t-k)^2 = \left(\frac{\lambda}{\nu} \right)^2,$$

con c, k constantes de integración. Como podemos ver, la solución es un círculo. Si usamos las restricciones y algunos hechos conocidos, se puede ver que con $b = 2k, c = 0, \lambda^2 = k^2, L = \pi k$. Como estamos considerando funciones sólo sería medio círculo, y no perdemos generalidad si se supone $\nu = 1$.

Ejemplo 1.1.10

Sea $F = (x')^2$, $G = x$, con las condiciones de frontera usuales y $K = C$. Entonces obtendríamos

$$\lambda + 2x'' = 0,$$

de aquí la solución es

$$x = -\frac{\lambda t^2}{4} + c_1 t + c_2$$

de donde c_1, c_2 se determinan por las condiciones de frontera y la restricción.

1.2. Teoría de Control

En esta sección hablaremos sobre la teoría de control y algunos resultados que nos servirán para encontrar condiciones necesarias para la existencia de extremos de un funcional. Este desarrollo se basa en el *principio de Pontryagin* que por un lado, nos da las condiones necesarias para la existencia de un extremo. Y por otro lado, la relación de éste con la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman es de los temas centrales de esta tesis. Queremos señalar que resultados análogos se verán al abordar el problema de control estocástico.

Sea $f(t, x(t), u(t))$, $g(t, x(t), u(t))$ funciones tales que $f, g \in C^1(I \times I \times I)$, $f, g : I \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ sujeto a $x(a) = A$, con $I = [a, b]$.

En problemas de control óptimo las variables se separan en dos tipos: variables de estado y variables de control, que denotaremos por $x(t)$ y $u(t)$ respectivamente.

Nuestro problema en este caso es encontrar una $u(t) \in U$ tal que

$$J(u) = \int_a^b f(t, x(t), u(t))\,\mathrm{d}t \tag{1.9}$$

sea máximo (mínimo) sujeto a

$$x' = g(t, x(t), u(t)) \tag{1.10}$$

$$a, b, x(a) \text{ dados y } x(b) \text{ libre,} \tag{1.11}$$

donde $U = \{u : I \longrightarrow \mathbf{R} \mid u \text{ es continua por pedazos}\}$. A una función u que cumpla con lo anterior se le conoce como control óptimo. Si consideramos el caso $x' = u$ el problema de cálculo de variaciones se puede escribir como un problema de control.

Regresando a nuestro problema, podemos notar que la restricción en este caso se debe cumplir para toda t en I, y tendremos que hacer uso de los multiplicadores por lo que supondremos que $\lambda(t)$ pertenece al conjunto $C^1(I)$.

Para cualquier par de funciones x, u que satisfagan (1.9),(1.10) y para algún $\lambda(t)$ tenemos que:

$$\int_a^b f(t, x, u)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \Big(f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u) - \lambda x'\Big)\,\mathrm{d}t. \tag{1.12}$$

Integrando por partes

$$-\int_a^b \lambda x'\,\mathrm{d}t = -\lambda x\Big|_a^b + \int_a^b x\lambda'\,\mathrm{d}t.$$

Sustituyendo la expresión anterior en (1.12) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t, x, u)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b \Big(f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u) - \lambda' x\Big)\,\mathrm{d}t \\ &- \lambda x\Big|_a^b. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Supongamos que $\tilde{u}$ es un control óptimo, y consideremos $u = \tilde{u} + \delta h$, con h fija y $\delta \in \mathbf{R}$.

Sea $y(t, \delta)$ una variable de estado generada por (1.10) y (1.11). Supongamos que $y \in C^1$.

Si $\delta = 0$ entonces obtenemos que $y(t, 0) = \tilde{x}$ y además $y(a, \delta) = A$.

Considerando $\tilde{u}, \tilde{x}$ fijas, vemos que

$$J(\delta) = \int_a^b \Big(f(t, y, \tilde{u} + \delta h) + \lambda g(t, y, \tilde{u} + \delta h) - \lambda' y \Big) \,\mathrm{d}t - \lambda y \Big|_a^b .$$

Como $\tilde{u}$ es óptimo, $J'(0) = 0$. Diferenciando con respecto a δ y evaluando en $\delta = 0$

$$J'(0) = \int_a^b \Big(\big(f_x + \lambda g_x - \lambda' \big) y_\delta + \big(f_u + \lambda g_u \big) h \Big) \,\mathrm{d}t - \lambda y_\delta \Big|_a^b .$$

Notamos que $y_\delta(a, 0) = 0$ ya que $y(a, \delta) = A \ \forall \ a$.

Si suponemos que λ resuelve la siguiente ecuación

$$\lambda' = f_x + \lambda g_x \tag{1.14}$$

con $\lambda(b) = 0$, entonces (1.13) queda

$$\int_a^b \big(f_u + \lambda g_u \big) h \,\mathrm{d}t = 0,$$

para cualquier h, en particular debe seguir valiendo si $h = f_u + \lambda g_u$, y con esto se concluye que

$$f_u + \lambda g_u = 0 \qquad \forall t \in I. \tag{1.15}$$

Podemos concluir que si u y x son extremos, entonces existe $\lambda \in C^1(I)$ tal que

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} x'(t) & = & g(t, x(t), u(t)) & x(a) & = & A \\ \lambda' & = & f_x + \lambda g_x & \lambda(b) & = & 0 \\ f_u + \lambda g_u & = & 0. & & & \end{array}$$

Si definimos a $H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u)$, obtenemos lo siguiente:

$$H_u = 0 \quad \text{que recupera (1.15)} \tag{1.16}$$
$$H_x = \lambda' \quad \text{que recupera (1.14)} \tag{1.17}$$
$$H_\lambda = x' \quad \text{que recupera (1.10)} \tag{1.18}$$

Notamos que con esta reformulación recuperamos lo que antes desarrollamos. A la función H se le conoce como el *hamiltoniano* y su nombre se debe a la formulación de la mecánica clásica en física.

El resultado que presentaremos a continuación es debido a Lev Semenovich Pontryagin. Éste nos da condiciones necesarias para que un extremo sea candidato a un control óptimo. Tenemos que señalar que en los 50's, Pontryagin después de haber dedicado su vida matemática a resolver problemas en topología hasta ese momento, empezó a trabajar en ecuaciones diferenciales ordinarias, en específico problemas de control.

Teorema 1.2.1 (Principio de Pontryagin [FR75]) *Sea $t \in I = [a, b]$, $A \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\lambda(t), g \in \mathbb{R}^n$ y $f \in \mathbb{R}$. Las condiciones necesarias para que (A, u) sea una condición inicial y un control óptimos son la existencia de un vector no cero $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_k) \in \mathbb{R}^k$ con $\nu_1 \leq 0$ y una función λ tal que para $t \in I$:*

$$\lambda'(t)^T = -H_x(t, x, u) \tag{1.19}$$

para $t \in (a, b)$ y $u \in U$. Para cualquier función v admisible se cumple

$$H(t, x, v) - H(t, x, u) \leq 0 \tag{1.20}$$

$$
\begin{aligned}
\lambda(b)^T &= \nu^T \phi_{x(b)}(a, b, x(a), x(b)) && (1.21)\\
\lambda(a)^T &= -\nu^T \phi_{x(a)}(a, b, x(a), x(b)) && (1.22)\\
\lambda(b)^T g(a, x(b), u(b)) &= -\nu^T \phi_b(a, b, x(a), x(b)) && (1.23)\\
\lambda(a)^T g(a, x(b), u(b)) &= \nu^T \phi_a(a, b, x(a), x(b)), && (1.24)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\phi(a, b, x(a), x(b)) &= (J(u), \phi_2(a, b, x(a), x(b)), \cdots, \phi_k(a, b, x(a), x(b))\\
\phi_i(a, b, x(a), x(b)) &= 0
\end{aligned}
$$

son las condiciones finales de las trayectorias para cada i y definimos a la función $H(t, x, u) = f(t, x, u) + \lambda(t)^T g(t, x, u)$.

Omitimos la demostración del resultado anterior por ser demasiado larga. Ésta se puede encontrar en [FR75]. Más adelante enunciaremos y demostraremos una versión particular.

A continuación presentaremos los conceptos básicos de la programación dinámica y algunos resultados que relacionan a ésta con el problema de control.

Definamos el problema de una forma más general. Sea b fijo, $Q_0 = [a,b) \times \mathbb{R}^n, U \subset \mathbb{R}^m$ cerrado donde U es el espacio de control. Consideremos una función g tal que:

$$g : \overline{Q_0} \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

y supongamos que $g \in C(\overline{Q_0} \times U)$. También pedimos que

$$|g(t,x,u) - g(t,y,v)| \leq K_c |x-y| \tag{1.25}$$

$\forall t \in [a,b], x, y \in \mathbb{R}^n$ y $v \in U$ tal que $|v| \leq c$ con $c > 0$. La condición anterior nos asegura que la siguiente ecuación diferencial ordinaria tiene una única solución

$$x'(s) = g(s, x(s), u(s)) \tag{1.26}$$

$$\text{con } x(t) = x. \tag{1.27}$$

Claramente x depende de $u(\cdot)$ y de la condición inicial. Sea $\mathscr{U}^0(t)$ el conjunto de todos los controles $u(\cdot)$ acotados, de clase $C^1[t,b]$ por pedazos. Para cada condición inicial (t,x), definimos $\mathscr{U}(t,x) \subset \mathscr{U}^0(t)$ el conjunto de funciones admisibles. Sea también $O \subset \mathbb{R}^n$ abierto con $O = \mathbb{R}^n$ o ∂O compacta y de clase C^2. Sea $Q = [a,b) \times O$. Sea $J(t,x,u)$ definida de la siguiente manera:

$$J(t,x,u) = \int_t^\tau F(s,x,u)\,\mathrm{d}s + \Psi(\tau, x(\tau)), \tag{1.28}$$

donde

$$\Psi(t,x) = \begin{cases} l(t,x) & \text{si } (t,x) \in [a,b) \times \mathbb{R}^n \\ \psi(x) & \text{si } (t,x) \in \{b\} \times \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.29}$$

con l y ψ continuas. Sea τ el tiempo de salida de $(s, x(s))$ de $\overline{Q}$ definido por

$$\tau = \begin{cases} \inf\{s \in [a,b) \,|\, x(s) \notin \overline{O}\} \\ b \quad \text{si } x(s) \in \overline{O} \quad \forall s \in [a,b) \end{cases} \tag{1.30}$$

Ahora, sólo vamos a admitir controles $u \in \mathscr{U}(t,x)$ que satisfacen la siguiente condición: si $u \in \mathscr{U}(t,x)$ y $u^* \in \mathscr{U}(r,x(r))$ para alguna $r \in [t,\tau]$, entonces si definimos el siguiente control por

$$\tilde{u} = \begin{cases} u(s) & \text{si } t \leq s \leq r \\ u^*(s) & \text{si } r < s \leq b. \end{cases} \tag{1.31}$$

Y sea $\tilde{x}(s)$ la solución de (1.26) correspondiente al control $\tilde{u}$ y a la condición inicial $\tilde{x}(t) = x$, entonces vamos a suponer

$$\tilde{u}_s \in \mathscr{U}(s, x(s)), \quad t \leq s \leq \tilde{\tau}, \tag{1.32}$$

donde $\tilde{u}_s$ denota la restricción a $[s,b]$ de $\tilde{u}$ y $\tilde{\tau}$ es el tiempo de salida de $\overline{Q}$ de $(s, \tilde{x}(s))$.

Interpretamos lo anterior de la siguiente forma, si reemplazamos un control admisible por otro admisible después de que transcurra un cierto tiempo, entonces el control que resulta de esto sigue siendo admisible.

Para que completemos nuestro planteamiento, sólo nos falta introducir la siguiente definición:

Definición 1.2.1 (Función de valor) *Sea $V(t,x)$ definida como*

$$V(t,x) = \inf_{u \in \mathscr{U}(t,x)} J(t,x,u) \tag{1.33}$$

para todo $(t,x) \in \overline{Q}$.

Supongamos que $V > -\infty$. Esto pasa si $F, \Psi \geq -M$ con $M > 0$. A continuación veremos una desigualdad que acota a la ecuación de valor por arriba, y cuando se da la igualdad.

Lema 1.2.1 *Sea $r \wedge \tau = \min(r,\tau)$. Para cualquier condición inicial $(t,x) \in \overline{Q}$, para cualquier control admisible $u \in \mathscr{U}(t,x)$ y $t \leq r \leq b$, tendremos que*

$$V(t,x) \leq \int_t^{r\wedge\tau} F(s,x,u)\,\mathrm{d}s + l(\tau,x)\chi_{\tau<r} + V(r,x)\chi_{r\leq\tau}. \tag{1.34}$$

Lema 1.2.2 *Para cualquier condición inicial $(t,x) \in \overline{Q}$ y $r \in [t,b]$*

(1.35)
$$V(t,x) = \inf_{u\in\mathscr{U}(t,x)} \left[\int_t^{r\wedge\tau} F(s,x,u)\,\mathrm{d}s + l(\tau,x)\chi_{\tau<r} + V(r,x)\chi_{r\leq\tau} \right].$$

A la identidad anterior se le conoce cómo *principio de programación dinámica*, y es la base de la técnica que desarrolló Bellman en los 50's para resolver problemas de control.Para ver una demostración de los resultados anteriores, se puede consultar [FS92] pag. 9 a 11.

Observación 1.2.1 *Un control óptimo $u \in \mathscr{U}(t,x)$ minimiza (1.35) para cada r, entonces para determinar el control óptimo sólo necesitamos analizar (1.35) para una r arbitraria cercana a t.*

Ahora supongamos que $V \in C^1$, y sea $0 < h \leq b-t$ y tomemos $r = t+h$ en (1.35), restemos $V(t,x)$ en ambos lados de ésta igualdad y dividimos entre h, lo que obtenemos es lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \inf_{u\in\mathscr{U}(t,x)} \Bigg\{ &\frac{1}{h}\int_t^{(t+h)\wedge\tau} F(s,x,u)\,\mathrm{d}s + l(\tau,x)\chi_{\tau<t+h} \\ &+ \left[V(t+h,x(t+h))\chi_{t+h\leq\tau} - V(t,x)\right] \Bigg\} \end{aligned} \tag{1.36}$$

y supongamos que para toda $(t,x) \in Q$ y $v \in U$ existe $u \in \mathscr{U}(t,x)$ tal que

$$v = \lim_{s\to t} u(s), \tag{1.37}$$

si tomamos el límite cuando h tiende a 0, obtenemos para $(t,x) \in Q$

$$\frac{\partial}{\partial t}V(t,x) + \inf_{v\in U}\{F(t,x,v) + g(t,x,v)D_xV(t,x)\} = 0 \tag{1.38}$$

o lo que es equivalente

$$-\frac{\partial}{\partial t}V(t,x) + H(t,x,D_xV(t,x)) = 0, \tag{1.39}$$

donde $(t,x,D_xV(t,x)) \in \overline{Q_0} \times \mathbb{R}^n$

$$(1.40) H(t,x,D_xV(t,x)) = \sup_{v\in U}\{-F(t,x,v) - g(t,x,v)D_xV(t,x)\}.$$

A (1.39) se le conoce cómo la *ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman* (HJB). A continuación presentaremos algunos resultados que relacionan la ecuación HJB con el problema de control y son conocidos como teoremas de verificación o principios de verificación.

Teorema 1.2.2 ([FS92]) *Sea* $Q = Q_0$, $W \in C^1(\overline{Q_0})$ *tal que satisface (1.38) y* $W(b,x) = \psi(x)$*. Entonces*

$$W(t,x) \le V(t,x), \qquad \forall (t,x) \in \overline{Q_0}.$$

Además, si existe $\tilde{u} \in \mathscr{U}^0(t)$ *tal que:*

$$F(s,\tilde{x}(s),\tilde{u}(s)) + g(s,\tilde{x}(s),\tilde{u}(s))D_xW(s,\tilde{x}(s)) = -H(s,\tilde{x}(s),D_xW(s,\tilde{x}(s))$$

para casi toda $s \in [t,b]$*,entonces* $\tilde{u}$ *es óptimo para la condición inicial* (t,x) *y* $W(t,s) = V(t,s)$*.*

Teorema 1.2.3 ([FS92]) *Sea* $W \in C^1(\overline{Q})$*, tal que satisface (1.38),* $V(b,x) = \psi(x)$ *para* $x \in \overline{O}$ *y* $W(t,x) \le l(t,x)$ *para* $x \in [a,b) \times \partial O$*. Entonces*

$$W(t,x) \le V(t,x), \qquad \forall (t,x) \in \overline{Q}.$$

Además, si existe $\tilde{u} \in \mathscr{U}^0(t)$ *tal que:*

$$F(s,\tilde{x}(s),\tilde{u}(s)) + g(s,\tilde{x}(s),\tilde{u}(s))D_xW(s,\tilde{x}(s)) = -H(s,\tilde{x}(s),D_xW(s,\tilde{x}(s))$$

para casi toda $s \in [t,\tilde{\tau}]$ *y* $W(\tilde{\tau},\tilde{x}(\tilde{\tau})) = l(\tilde{\tau},\tilde{x}(\tilde{\tau}))$*, entonces* $\tilde{u}$ *es óptimo para la condición inicial* (t,x) *y* $W(t,s) = V(t,s)$*.*

Para ver una demostración de los resultados anteriores, se puede consultar [FS92] pag. 14.

Ejemplo 1.2.1 (El problema del regulador cuadrático lineal)

El problema que desarrollaremos a continuación tiene una gran trascendencia y la razón es la siguiente: si g es igual a cero en algún punto (x,u), entonces podemos calcular la linealización de $x' = g$ en ese punto. Por otro lado, si J alcanza su máximo en ese punto, la función J se ve localmente como una función convexa. En conclusión, este sería una primera aproximación a un problema más general de control.

Sean $x(s) \in \mathbb{R}^n, u(s) \in \mathbb{R}^m$ y que satisfacen

$$x'(s) = A(s)x(s) + B(s)u(s)$$

donde $A(s) \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $B(s) \in \mathscr{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ son matrices con entradas en $\mathbb{R}$ y de dimensiones $n \times n$ y $n \times m$ respectivamente. Dadas $M(s), D \in \mathscr{M}_{n\times n}$ definidas no negativas y simétricas y $N(s) \in \mathscr{M}_{m\times m}$ simétrica y positiva definida, hay que buscar u tal que

$$\int_t^b x(s)M(s)x(s) + u(s)N(s)u(s)\,\mathrm{d}s + x(b)Dx(b)$$

sea mínimo. Notemos que

$$\begin{aligned} g(t,x,u) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ F(t,x,u) &= x(t)M(t)x(t) + u(t)N(t)u(t), \\ \Psi(t,x) &= \psi(x) = xDx. \end{aligned}$$

Podemos escribir a (1.39) como

$$-\frac{\partial}{\partial t}V(t,x) + H(t,x,D_xV(t,x)) = 0, \qquad a \le t \le b,\ x \in \mathbb{R}^n$$

donde

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4}N^{-1}(t)B^T(t)D_xV(t,x)B^T(t)D_xV(t,x) \\ &- A(t)xD_xV(t,x)x - xM(t)x. \end{aligned}$$

Ahora, sólo nos falta resolver (1.39) para este caso, con condición final $V(b,x) = xDx$. Supongamos que la solución es de la siguiente forma:

$$W(t,x) = xP(t)x,$$

para alguna matriz $P(t)$ simétrica. Si sustituimos en (1.39) obtenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t}V(t,x) + H(t,x,D_xV(t,x)) &= x\Big[-\frac{\partial}{\partial t}P(t) - A(t)P(t) - M(t) \\ &\quad + P(t)B^T(t)N^{-1}(t)B^t(t)P(t)\Big]x, \end{aligned}$$

y se satisface la ecuación anterior si

$$(1.41)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P(t) &= P(t)B^T(t)N^{-1}(t)B^t(t)P(t)\\ &\quad -A(t)P(t)-M(t)\Big]x, \qquad t\in[a,b).\end{aligned}$$

Por la continuidad de W en b, $P(b)=D$. A (1.41) se le conoce como la ecuación de Riccati, y se sabe que tiene una única solución con la condición final dada. Se puede demostrar que

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= -\frac{1}{2}N^{-1}(s)B^T(s)D_xV\\ &= -N^{-1}(s)B^T(s)P(s)\tilde{x}\end{aligned}$$

es el único máximo para cualquier $s\in[t,b]$. Si sustituimos la expresión anterior en la ecuación de estado, obtendremos

$$\tilde{x}'(s)=[A(s)-B(s)N^{-1}(s)B^T(s)P(s)]\tilde{x}(s).$$

Esta ecuación tiene una única solución con la condión inicial $\tilde{x}(t)=x$ entonces por el teorema 1.2.2 existe un control óptimo $\tilde{u}$ en (t,x) $\square$.

Teorema 1.2.4 ([FS92]) *Sea $(t,x)\in Q$ un punto en el que V sea diferenciable. Entonces:*

(i) $V_t(t,x)+L(t,x,u)+g(t,x,u)D_xV(t,x)\geq 0, \qquad \forall u\in U.$

(ii) Si existe un control control óptimo $\tilde{u}\in\mathscr{U}(t,x)$ tal que si

$$\lim_{s\to t}\tilde{u}(s)=\tilde{v}(t)$$

entonces

$$V_t(t,x)+F(t,x,\tilde{v})+g(t,x,\tilde{v})D_xV(t,x)=0.$$

En otras palabras, la ecuación (1.38) se cumple en (t,x).

Demostración. Por hipótesis (1.37), para cualquier $v\in U$ existe un control $u\in\mathscr{U}(t,x)$ tal que $u(s)\to v$, si $s\to t$. Por el Lema 1.2.1, si $t+h<\tau$, entonces

$$V(t,x)\leq\int_t^{t+h}F(s,x,v)\,\mathrm{d}s+V(t+h,x(t+h)),$$

donde x es la solución de (1.26) con $x(t) = x$. Entonces tendríamos

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[x(t+h) - x(t)] = g(t,x,u)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[V(t+h, x(t+h)) - V(t,x(t))] = V_t(t,x) + g(t,x,u)D_xV(t,x),$$

ya que V es diferenciable en (t,x) y además,

$$\lim_{h\to 0} \int_t^{t+h} F(s,x,v)\,\mathrm{d}s = F(t,x,u)$$

esto prueba (i). Para probar (ii) usamos el mismo argumento, sólo que en este caso usamos igualdad en la primera ecuación $\square$.

El suguiente teorema muestra la relación entre el principio de Pontryagin y la ecuación de HJB.

Teorema 1.2.5 ([FS92]) *Sea $\mathscr{U}(t,x) = \mathscr{U}^0(t)$ y $O = \mathbb{R}^n$. Sea $\tilde{u}$ un control óptimo continuo por la derecha para cada $s \in [t,b)$. Supongamos que V es diferenciable en $(s, \tilde{x}(s))$ para $t \leq b$, y sea*

$$\lambda(s) = D_xV(s, \tilde{x}(s)).$$

Entonces $\lambda(s) = (\lambda_1(s), \cdots, \lambda_n(s))$ satisface para $j = 1, \cdots, n\,;\ t \leq s \leq \tilde{\tau}$

$$\begin{aligned} \lambda_j'(s) = &-\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} g_r(s,\tilde{x}(s),\tilde{u}(s))\lambda_r(s) \\ &-\frac{\partial}{\partial x_j}F(s,\tilde{x}(s),\tilde{u}(s)), \end{aligned} \tag{1.42}$$

$$\begin{aligned} -H(s,\tilde{x}(s),\lambda(s)) = &\,\lambda(s)g(s,\tilde{x}(s),\tilde{u}(s)) \\ &+F(s,\tilde{x}(s),\tilde{u}(s)), \end{aligned} \tag{1.43}$$

para casi toda $s \in [t, \tilde{\tau}]$ y $\lambda(b) = D_x\psi(\tilde{x}(b))$.

Demostración. La última afirmación se sigue directamente de que $V(b,y) = \psi(y)$ para toda $y \in \mathbb{R}^n$. Por el Teorema 1.2.4 , (1.43) se sigue inmediatamente. Se puede ver que (1.42) tiene una única solución $\overline{\lambda}(s)$ con la condición inicial $\lambda(b) = D_x\psi(\tilde{x}(b))$. Si $t \leq c < b$ la restricción $\tilde{u}_c$ de $\tilde{u}$ a $[c,b]$ es admisible.

Entonces para cualquier $y \in \mathbb{R}^n$

$$V(t,y) \leq J(c,y,\tilde{u}_c). \tag{1.44}$$

Si $y = \tilde{x}(c)$, entonces $\tilde{u}_c$ es óptimo para la condición inicial $(c, \tilde{x}(c))$ y se da la igualdad en (1.44). Como $J(c,y,\tilde{u}_c) - V(c,y)$ tiene un mínimo en $\tilde{x}(c)$,

$$D_x V(t,\tilde{x}(c)) = D_x J(c,\tilde{x}(c),\tilde{u}_c), \tag{1.45}$$

para toda $c \in [t,b)$, entonces basta demostrar que el lado derecho de (1.45) es igual a $\overline{\lambda}(s)$. Sea $c \in [t,b]$ tiempo inicial fijo y el contro $\tilde{u}_c$ fijo, sea $x(c,y)$ el estado al tiempo $s \in [c,b]$ con condición inicial $x(c,y) = y$.
Claramente $x(s,\tilde{x}(c)) = \tilde{x}(s)$ para toda $s \in [c,b]$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} J(c,\tilde{x}(c),\tilde{u}) &= \sum_{j=1}^{n} \Big[\int_c^b F_{x_j}(s,\tilde{x}(s),\tilde{u}(s)) z_{ij}(s)\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \psi_{x_j}(\tilde{x}(b)) z_{ij}(b) \Big], \end{aligned} \tag{1.46}$$

donde $z_{ij}(s) = \frac{\partial}{\partial y_i} x_j(s,\tilde{x}(c))$ para $i,j = 1,\cdots,n$. Un cálculo directo nos da

$$z'_{ij}(s) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l} g_j(s,\tilde{x}(s),\tilde{u}(s)) z_{il}(s), \tag{1.47}$$

con $s \in [c,b]$ y condición inicial

$$z_{ij}(c) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}.$$

Usando (1.42) y (1.47) tenemos

$$\frac{d}{ds}\left\{ \sum_{j=1}^{n} z_{ij}(s)\overline{\lambda}_j(s) \right\} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l} F_{x_j}(s,\tilde{x}(s),\tilde{u}(s)) z_{ij}(s),$$

para $i = 1,\cdots,n$. Integrando lo anterior en $[c,b]$ y usando (1.45),(1.46), la condición inicial anterior y $\lambda(b) = D\psi(\tilde{x}(b)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}_i(c) &= \sum_{j=1}^{n} z_{ij}(c)\overline{\lambda_j}(c) \\ &= \sum_{j=1}^{n} z_{ij}(b)\overline{\lambda_j}(b) - \int_c^b \frac{d}{ds}\left\{ \sum_{j=1}^{n} z_{ij}(s)\overline{\lambda_j}(s) \right\} \mathrm{d}s \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} J(c,\tilde{x}(c),\tilde{u}_c) = \frac{\partial}{\partial x_i} V(c,\tilde{x}(c)). \qquad \square \end{aligned}$$

En el siguiente capítulo veremos como adaptar los resultados que presentamos anteriormente en un contexto aleatorio. Veremos como las ideas de la programación dinámica se mantienen y probaremos principios de verificación bastante análogos a los ya mencionados a lo largo del capítulo.

Capítulo 2

Teoría de Control Estocástico

En esta capítulo presentaremos los fundamentos para poder atacar de forma rigurosa el problema de la teoría de control estocástico. Estos fundamentos están constituidos por la integral de Itô, las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) y algunos resultados de ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Se pueden consultar [KS91], [E02], [Ap04], [FR75], [FS92] y [Øk00].

2.1. Integral de Itô

Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Consideremos $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento browniano (m.b.) tal que $B_0 = 0$ en ese espacio de probabilidad.

Definición 2.1.1 *Una filtración en $(\Omega, \mathscr{F})$ es una familia $\mathscr{M} = \{\mathscr{M}_t\}_{t\geq 0}$ de σ-álgebras $\mathscr{M}_t \subset \mathscr{F}$ tal que si:*

$$0 \leq s < t \Rightarrow \mathscr{M}_s \subset \mathscr{M}_t.$$

Un proceso estocástico $\{S_t\}_{t\geq 0}$ en $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ es una martingala con respecto a la filtración $\{\mathscr{M}_t\}_{t\geq 0}$ si:

(i) S_t es $\mathscr{M}_t$-medible para toda t.

(ii) $\mathbb{E}[|S_t|] < \infty$.

(iii) $\mathbb{E}[S_r|\mathscr{M}_t] = S_t$ para toda $r \geq t$.

Para ver la definición de esperanza condicional se puede consultar [KS91].

Sea $\mathscr{F}_t$ la σ-álgebra generada por $\{B_s : s \leq t\}$ y supodremos que $\mathscr{F}_0$ contiene todos los conjuntos de probabilidad cero de $\mathscr{F}$. En otras palabras, estamos pidiendo que la filtración sea completa. Por último, necesitamos que $\mathscr{F}_t$ sea continua por la derecha para cada t. Sea $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ una partición del intervalo $[0, T]$. Para $0 \leq S < T$ definimos

$$t_i = \begin{cases} i \cdot 2^{-n} & \text{si} \quad S \leq i \cdot 2^{-n} \leq T \\ S & \text{si} \quad\quad i \cdot 2^{-n} < S \\ T & \text{si} \quad\quad T > i \cdot 2^{-n} \end{cases}$$

Si $t \in (S, T)$, llamaremos a una función $e(t, \omega) \in N$ elemental si es de la siguiente forma:

$$e(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} e(t_i, \omega) \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t) \tag{2.1}$$

$e(t_i, \omega) = e_i(\omega)$ y con cada $e_i(\omega)$ es $\mathscr{F}_l$-medible con $l = t_i$, $\forall i$.

Para esta clase de funciones, definimos la integral de Itô de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathscr{I}[e](\omega) &= \int_S^T e(t, \omega)\, \mathrm{d}B_t \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} e_i(\omega)[B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)], \end{aligned} \tag{2.2}$$

con $0 \leq S < T$.

El resultado que presentaremos a continuación será de gran utilidad para el proceso de aproximación que realizaremos posteriormente. A éste se le conoce como isometría de Itô y relaciona a la integral con la norma en $\mathscr{L}^2(\Omega \times [0, \infty), \mathbb{P} \times dt)$

Lema 2.1.1 *Si $e(t, \omega)$ está acotada, entonces el valor esperado, $\mathbb{E}$ de $\mathscr{I}[e](\omega)$ satisface*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T e(t, \omega)\, \mathrm{d}B_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_S^T e^2(t, \omega)\, \mathrm{d}t\right].$$

Demostración. Si $\Delta B_i = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ podemos observar que

$$e_i e_j \chi_{[t_i,t_{i+1})}(t)\chi_{[t_j,t_{j+1})}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ e_i^2 \chi_{[t_i,t_{i+1})}(t) & \text{si } i = j \end{cases}$$

de donde se sigue inmediatamente que

$$\mathbb{E}[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] = \mathbb{E}[e_i^2](t_{i+1} - t_i),$$

usando que $e_i e_j \Delta B_i$ es independiente de ΔB_j si $i < j$. Luego

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\int_S^T e(t,\omega)\,\mathrm{d}B_t\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_i e_i \Delta B_i\right)^2\right] \\ &= \sum_{i,j} \mathbb{E}[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[e_i^2](t_{i+1} - t_i) \\ &= \mathbb{E}\left[\int_S^T e^2(t,\omega)\,\mathrm{d}t\right] \quad \square. \end{aligned}$$

Ahora lo que queremos hacer es poder extender nuestra clase de funciones integrables. Claramente las funciones elementales van a pertenecer a esta clase.

Sea $N = N(S,T)$ la clase de funciones $g(t,\omega) : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

(i) $(t,\omega) \longrightarrow g(t,\omega)$ es medible con respecto a $\mathscr{B} \times \mathscr{F}$, donde $\mathscr{B}$ es la σ-álgebra de Borel en $[0,\infty)$.

(ii) Para cada t el mapeo $\omega \longrightarrow g(t,\omega)$ es $\mathscr{F}_t$-medible (i.e. el proceso sea $\mathscr{F}_t$-adaptado).

(iii) $\mathbb{E}\left[\int_S^T g^2(t,\omega)\,\mathrm{d}t\right] < \infty$.

A continuación, vamos a construir la integral de Itô como un elemento de $\mathscr{L}^2(\Omega,\mathbb{P})$ haciendo las aproximaciones usuales. Los siguientes tres lemas sirven para éste propósito.

Lema 2.1.2 *Sea $g \in N$ acotada para toda (ω,t) y continua para cada ω. Entonces existe una sucesión $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N$ de funciones elementales tal que:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_S^T (g - e_n)^2\,\mathrm{d}t\right] \longrightarrow 0.$$

Demostración. Sea $e_n = \sum_i g(t_i, \omega)\chi_{[t_i, t_{i+1}]}(t)$ para $i = 0, 1, \cdots n-1$, claramente e_n es elemental ya que $g \in N$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_S^T (g - e_n)^2 \, \mathrm{d}t \longrightarrow 0$$

para cada ω, ya que g es continua. Entonces se concluye la afirmación por el teorema de convergencia acotada $\square$.

Lema 2.1.3 *Sea $h \in N$ acotada. Entonces existe una sucesión de funciones $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N$ acotadas tal que $g_n(\cdot, \omega)$ es continua para toda ω y n, además*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_S^T (h - g_n)^2 \, \mathrm{d}t\right] \longrightarrow 0.$$

Demostración. Sea $\varphi_n(x) \geq 0$ continua tal que:

$$1)\varphi_n(x) = 0 \qquad\qquad \text{si } x \in (-\infty, -\tfrac{1}{n}] \cup [0, \infty)$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \, \mathrm{d}x = 1.$$

Sea $g_n = \int_0^t \varphi_n(s - t)h(s, \omega) \, \mathrm{d}s$, podemos ver que g_n es continua para cada ω y $|g_n| \leq M \; \forall n$, además que g_n es $\mathscr{F}_t$ medible $\forall t$ (ver [KS91] pag. 133).

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_S^T (h - g_n)^2 \, \mathrm{d}t = 0$$

para cada ω (ver [Fo99] pag. 243). Entonces por el teorema de convergencia acotada se obtiene el resultado $\square$.

Observación 2.1.1 *El teorema de la convergencia acotada es un caso particular del teorema de la convergencia dominada cuando estamos en un espacio de medida finita. Para esta situación, podemos dominar los términos de la sucesión por una constante.*

Lema 2.1.4 *Sea $f \in N$. Entonces existe una sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N$ acotadas $\forall n$ y*

$$lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_S^T (f - h_n)^2 \, \mathrm{d}t\right] \longrightarrow 0.$$

Demostración. Sea

$$h_n = \begin{cases} f(t,\omega) & \text{si} \quad |f(t,\omega)| \leq n \\ n & \text{si} \quad |f(t,\omega)| \geq n \end{cases}$$

y observemos que $|h_n| \leq |f|$. Por el teorema de la convergencia dominada obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_S^T (f - h_n)^2 \, \mathrm{d}t\right] \longrightarrow 0 \qquad \square.$$

Por los lemas anteriores, si $f \in N$ podemos concluir que

$$\begin{aligned} \mathscr{I}(f)(\omega) &= \int_S^T f \, \mathrm{d}B_t \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_S^T e_n \, \mathrm{d}B_t. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Notemos que en la definición se toma a t_i como el punto izquierdo del intervalo para aproximar a la integral. Podemos ver con ejemplos que si se toma otro punto diferente, las integrales no necesariamente coinciden. Si tomaramos el punto intermedio del intervalo, obtendríamos una integral en el sentido de Stratonovich, que también es de relevancia en el estudio de EDE.

El límite en (2.3) existe como elemento de $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathbb{P})$, ya que

$$\left\{\int_S^T e_n \mathrm{d}B_t\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

constituye una sucesión de Cauchy por el lema 2.1.1.

Teorema 2.1.1 (Isometría de Itô [Øk00]) *Si $f \in N$ entonces*

$$\mathbb{E}\left[(\mathscr{I}(f)(\omega))^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_S^T f^2 \, \mathrm{d}t\right].$$

Además, Sea $f, g \in N(0,T)$ y $S, U \in (0,T)$ con $U > S$. Entonces

(i) $\int_S^T f \, \mathrm{d}B_t = \int_S^U f \, \mathrm{d}B_t + \int_U^T f \, \mathrm{d}B_t$

(ii) $\int_S^T cf + g \, \mathrm{d}B_t = c\int_S^T f \, \mathrm{d}B_t + \int_S^T g \, \mathrm{d}B_t$ *con* $c \in \mathbb{R}$

(iii) $\mathbb{E}\left[\int_S^T f\,\mathrm{d}B_t\right] = 0$

(iv) $\int_S^T f\,\mathrm{d}B_t$ *es* $\mathscr{F}_T$*-medible.*

Demostración. La primera afirmación se sigue inmediatamente de los lemas anteriores. Si tomamos funciones elementales, (i) y (ii) son inmediatos. Y tomando aproximaciones se obtiene el resultado. En general (iii) se cumple para funciones elementales, entonces tomemos e_n elemental tal que aproxime a f y notemos que

$$|\mathbb{E}\left[\mathscr{I}[f] - \mathscr{I}[e_n]\right]| \leq \mathbb{E}\left[|\mathscr{I}[f] - \mathscr{I}[e_n]|\right] \leq \mathbb{E}\left[|\mathscr{I}[f] - \mathscr{I}[e_n]|^2\right] \longrightarrow 0$$

si $n \to \infty$, ya que e_n aproxima a f. Para (iv), como en lo anterior la aproximación es en $\mathscr{L}^2$, podemos encontrar una subsucesión e_{n_k} tal que $\mathscr{I}[e_{n_k}] \to \mathscr{I}[f]$ casi seguramente (c.s.) si $n_k \to \infty$ y obtenemos el resultado. Con esto se concluye la demostración $\square$.

Ejemplo 2.1.1 *B_t es una martingala con respecto a las σ-algebras $\mathscr{F}_t$ generadas por $\{B_s \,|\, s \leq t\}$ ya que*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|B_t|]^2 &\leq \mathbb{E}[|B_t|^2] = |B_0|^2 + nt \\
& \qquad \textit{y si } s \geq t \textit{ entonces} \\
\mathbb{E}[B_s|\mathscr{F}_t] &= \mathbb{E}[B_s - B_t + B_t|\mathscr{F}_t] \\
&= \mathbb{E}[B_t|\mathscr{F}_t] + \mathbb{E}[B_s - B_t|\mathscr{F}_t] = B_t.
\end{aligned}$$

La primera desigualdad es por Cauchy-Schwarz, ya que $|B_t| = 1 \cdot |B_t|$ y estamos en un espacio de probabilidad. La primera igualdad se debe a que $B_0 = x$ c.s., $\mathbb{E}[B_t] = x = 0$ y nt es la varianza de B_t.

El siguiente resultado nos ayudará para poder construir a la integral como un proceso estocástico en el teorema posterior.

Teorema 2.1.2 (Desigualdad de Doob para martingalas) *Si S_t es una martingala tal que $t \to S_t(\omega)$ es continua c.s., entonces para toda $p \geq 1, T \geq 0$ y para toda $\lambda > 0$*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |S_t| \geq \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda^p}\mathbb{E}[|S_T|^p].$$

Demostración. Ver [KS91] □.

Ahora podemos ver que

$$\int_0^t f(s,\omega)\,\mathrm{d}B_s$$

se puede escoger de manera que dependa de forma continua en t. Esto es lo que asegura el siguiente teorema:

Teorema 2.1.3 ([Øk00]) *Sea $f \in N(0,T)$. Entonces existe una versión t-continua de*

$$M_t(\omega) = \int_0^t f(s,\omega)\,\mathrm{d}B_s; \qquad 0 \le t \le T,$$

i.e. existe un proceso estocástico t-continuo J_t tal que

$$\mathbb{P}\left[J_t = \int_0^t f\,\mathrm{d}B_s\right] = 1 \tag{2.4}$$

para toda $t \in [0,T]$. Además si $f(t,\omega) \in N(0,T)$ para toda T. Entonces M_t es una martingala con respecto a $\mathscr{F}_t$.

Demostración. Sea $\phi_n = \phi_n(t,\omega) = \sum_j e_j^n(\omega)\chi_{[t_j^{(n)},\, t_{j+1}^{(n)})}$ funciones elementales que aproximen a $f \in N$. Sea

$$\mathscr{I}_n(t,\omega) = \int_0^t \phi_n\,\mathrm{d}B_s$$

y

$$\mathscr{I}(t,\omega) = \int_0^t f\,\mathrm{d}B_s; \quad 0 \le t \le T.$$

$\mathscr{I}_n$ es continua en t para toda n, este hecho se demuestra con la definición de la integral para funciones simples y utilizando el hecho de que el movimiento browniano tiene trayectorias continuas (c.s.). Además, $\mathscr{I}_n$ es una martingala con respecto a $\mathscr{F}_t$, ya que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathscr{I}_n(s,\omega)\mid\mathscr{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_n\,\mathrm{d}B + \int_t^s \phi_n\,\mathrm{d}B\right)\Big|\mathscr{F}_t\right]\\
&= \int_0^t \phi_n\,\mathrm{d}B + \mathbb{E}\left[\sum_{t\le t_j^{(n)}\le\ t_{j+1}^{(n)})\le s} e_j^n(\omega)\Delta B_j\Big|\mathscr{F}_t\right]\\
&= \int_0^t \phi_n\,\mathrm{d}B + \sum_j \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e_j^n(\omega)\Delta B_j|\mathscr{F}_{t_j^{(n)}}\right]|\mathscr{F}_t\right]\\
&= \int_0^t \phi_n\,\mathrm{d}B + \sum_j \mathbb{E}\left[e_j^n(\omega)\mathbb{E}\left[\Delta B_j|\mathscr{F}_{t_j^{(n)}}\right]|\mathscr{F}_t\right]\\
&= \int_0^t \phi_n\,\mathrm{d}B = \mathscr{I}_n(t,\omega) \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

si $t<s$, usando que $\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}_{t_j^{(n)}}$ y que e_j^n es independiente de $\mathscr{F}_{t_j^{(n)}}$ respectivamente en la tercera y cuarta linea. Es claro que $\mathscr{I}_n-\mathscr{I}_m$ es también una $\mathscr{F}_t$-martingala, entonces por el teorema anterior se puede ver que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\sup_{0\le t\le T}|\mathscr{I}_n(t,\omega)-\mathscr{I}_m(t,\omega)|>\epsilon\right] &\le \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left[|\mathscr{I}_n(T,\omega)-\mathscr{I}_m(T,\omega)|^2\right]\\
&= \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left[\int_0^T(\phi_n-\phi_m)^2\,\mathrm{d}s\right]\to 0
\end{aligned}$$

si $m,n\to\infty$. Podemos escoger una subsucesión $n_k\uparrow\infty$ tal que

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\le t\le T}|\mathscr{I}_{n_{k+1}}(t,\omega)-\mathscr{I}_{n_k}(t,\omega)|>2^{-k}\right]<2^{-k}.$$

Por el Lema de Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\le t\le T}|\mathscr{I}_{n_{k+1}}(t,\omega)-\mathscr{I}_{n_k}(t,\omega)|>2^{-k}\text{ para una infinidad de }k\text{'s}\right]=0.$$

Entonces para casi toda ω existe $k_1(\omega)$ tal que

$$\sup_{0\le t\le T}|\mathscr{I}_{n_{k+1}}(t,\omega)-\mathscr{I}_{n_k}(t,\omega)|\le 2^{-k}\text{ para }k\ge k_1.$$

Entonces $\mathscr{I}_{n_k}(t,\omega)$ es uniformemente convergente para $t \in [0,T]$, para casi toda ω. Tomando el límite llamado J_t, es continuo para $t \in [0,T]$ c.s.. Como $\mathscr{I}_{n_k}(t,\cdot) \to \mathscr{I}(t,\cdot)$ en $L^2[\mathbb{P}]$ para toda t, entonces obtenemos que

$$\mathscr{I}(t,\omega) = J_t \quad \text{c.s., para toda } t \in [0,T].$$

Para demostrar la segunda afirmación, notemos que se sigue de (2.5), por el hecho de que $\mathscr{I}_n(t,\omega) \to \mathscr{I}(t,\omega)$ en L^2 y por consiguiente

$$\mathbb{E}[\mathscr{I}_n(t,\omega)|\mathscr{F}_t] \to \mathbb{E}[\mathscr{I}(t,\omega)|\mathscr{F}_t]$$

en L^2 $\square$.

2.2. Fórmula de Itô

En esta sección veremos la fórmula de Itô, que es una herramienta muy útil para poder construir nuevos procesos estocásticos. También veremos que esta fórmula es bastante análoga al teorema fundamental del cálculo, además de asociar al proceso correspondiente con una EDP.

Para empezar esta sección, introducimos un concepto que caracteriza cierto tipo de procesos, que llamaremos *procesos de Itô*. Éstos los podemos escribir en términos de su condición inicial y de la integral estoćastica que construimos en la sección anterior. Más adelante, veremos como podemos definir una EDE a partir de la siguiente definición:

Definición 2.2.1 (Proceso de Itô) *Sea $B(t,\omega) = (B_1, \cdots, B_m)$ un m.b. m-dimensional en $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Un proceso de Itô n-dimensional es un proceso estocástico $X(t) = (X_1(t), \cdots, X_n(t))$ en $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ de la forma*

$$X_i(t) = X_i(0) + \int_0^t u_i(t,\omega)\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t v_{ij}(t,\omega)\,\mathrm{d}B_j; \tag{2.6}$$

$\forall i = 1, \cdots, n$ con $v_{ij} \in N(0,t)$ y u_i $\mathscr{F}_t$-adaptada y

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |u(s,\omega)|\,\mathrm{d}s\right] < \infty. \tag{2.7}$$

Además, se puede escribir en forma diferencial como

$$dX(t) = udt + vdB(t) \tag{2.8}$$

El resultado que presentaremos a continuación será de mucha utilidad a lo largo del trabajo. Éste nos sirve para construir soluciones a EDE.

Teorema 2.2.1 ([Øk00]) *[Fórmula de Itô] Sea $X(t)$ un proceso de Itô y sea $g(t,x) = (g_1(t,x), \cdots, g_p(t,x))$ una función C^2 de $[0,\infty] \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$. Entonces $Y(t,\omega) = g(t, X(t))$ es un proceso de Itô y su componente k-ésima satisface*

$$
\begin{aligned}
(2.9) \qquad dY_k &= \frac{\partial g_k}{\partial t}(t,X)dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t,X)dX_i \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t,X)dX_i dX_j,
\end{aligned}
$$

donde $dB_i dB_j = \delta_{ij}dt, dB_i dt = dt dB_i = 0$ para $k = 1, \cdots, p$.

Demostración. Supongamos que $X(t)$, $u_i(t,\omega)$ y $v_{ij}(t,\omega)$ son variables aleatorias acotadas $\forall t \geq 0$. Y sea $\{P_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ una sucesión de particiones del $[0,t]$. Por el teorema de Taylor, tenemos que para cada partición

$$
\begin{aligned}
g_k(t,X(t)) - g_k(0,X(0)) &= \sum_{l=0}^{m} g_k(t_{l+1}, X(t_{l+1})) - g_k(t_l, X(t_{l+1})) \\
&+ \sum_{l=0}^{m} g_k(t_l, X(t_{l+1})) - g_k(t_l, X(t_l)) \\
&= J(t) + J_1(t) + \frac{1}{2}J_2(t)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
J(t) &= \sum_{l=0}^{m} g_k(t_{l+1}, X(t_{l+1})) - g_k(t_l, X(t_{l+1})) \\
J_1(t) &= \sum_{l=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} \partial_i g_k(t_l, X(t_l)) \left[X_i(t_{l+1}) - X_i(t_l)\right] \\
J_2(t) &= \sum_{l=0}^{m}\sum_{i,j=0}^{n} \partial_i \partial_j g_k(t_l, N_{ij}^l)) \left[X_i(t_{l+1}) - X_i(t_l)\right]\left[X_j(t_{l+1}) - X_j(t_l)\right]
\end{aligned}
$$

donde las N_{ij}^l son variables aleatorias $\mathscr{F}_{l+1}$-adaptadas en $\mathbb{R}^n$ con la propiedad $|N_{ij}^l - X(t_l)| \leq |X(t_{l+1}) - X(t_l)|$. Para $J(t)$, por el teorema del valor medio, podemos encontrar $t_l < s_l < t_{l+1}$ tal que

$$\begin{aligned} J(t) &= \sum_{l=0}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial t}(s_l, X(t_{l+1}))(t_{l+1} - t_l) \\ \text{la cual converge a } & \int_0^t \frac{\partial g_k}{\partial s}(s, X(s))\, \mathrm{d}s \\ \text{en } L^2 & \end{aligned}$$

si $r \to \infty$. De igual forma podemos ver que

$$\begin{aligned} J_1(t) &\longrightarrow \sum_{i=0}^{n} \int_0^t \partial_i g_k(s, X(s))\, \mathrm{d}X_i \\ \text{en } L^2 & \end{aligned}$$

si $r \to \infty$. Si ahora escribimos $J_2(t) = K_1(t) + K_2(t)$ donde

$$\begin{aligned} K_1(t) &= \sum_{l=0}^{m} \sum_{i,j=0}^{n} \partial_i \partial_j g_k(t_l, X(t_l)) \left[X_i(t_{l+1}) - X_i(t_l)\right] \left[X_j(t_{l+1}) - X_j(t_l)\right] \\ K_2(t) &= \sum_{l=0}^{m} \sum_{i,j=0}^{n} \left[\partial_i \partial_j g_k(t_l, N_{ij}^l) - \partial_i \partial_j g_k(t_l, X(t_l))\right] \\ &\times \left[X_i(t_{l+1}) - X_i(t_l)\right] \left[X_j(t_{l+1}) - X_j(t_l)\right]. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy- Schwarz tenemos que

$$\begin{aligned} |K_2(t)| &\leq \sum_{i,j=0}^{n} \max_{0 \leq l \leq m} \left|\partial_i \partial_j g_k(t_l, N_{ij}^l) - \partial_i \partial_j g_k(t_l, X(t_l))\right| \\ &\times \left(\sum_{l=0}^{m} \left[X_i(t_{l+1}) - X_i(t_l)\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{l=0}^{m} \left[X_j(t_{l+1}) - X_j(t_l)\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Si $r \to \infty$, por continuidad

$$\max_{0 \leq l \leq m} \left|\partial_i \partial_j g_k(t_l, N_{ij}^l) - \partial_i \partial_j g_k(t_l, X(t_l))\right| \to 0$$

mientras que

$$\begin{aligned} K_1(t) &\longrightarrow \sum_{i,j=0}^{n} \int_0^t \partial_i \partial_j g_k(s, X(s)) \mathrm{d}X_i \mathrm{d}X_j \\ \text{en } L^2. & \end{aligned}$$

Esto se puede demostrar usando una modificación al Lema (2.1.1) $\square$.

El resultado que presentaremos a continuación no será utilizado posteriormente en el trabajo. El propósito de enunciarlo es dar a conocer una propiedad importante que cumplen los procesos de Itô.

Teorema 2.2.2 (Teorema de Representación de Martingalas [Øk00]) *Sea $B(t)$ un m.b. n-dimensional. Supongamos que M_t es una $\mathscr{F}_t$-martingala y que $M_t \in \mathscr{L}^2(\mathbb{P})$ para toda $t \geq 0$. Entonces existe un único proceso estocástico $g(s,\omega)$ tal que $g \in N(0,t)$ para toda $t \geq 0$ y*

$$M_t(\omega) = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t g(s,\omega)\,\mathrm{d}B(s) \qquad c.s.\ \forall t \geq 0. \tag{2.10}$$

Interpretamos este resultado de la siguiente forma: ya vimos que la integral de Itô para $t \geq 0$

$$X_t = X_0 + \int_0^t g(s,\omega)\,\mathrm{d}B(s),$$

es una martingala con respecto a su propia flitración $\mathscr{F}_t$. El resultado anterior establece que cualquier martingala se puede representar como una integral de Itô. Antes de demostrar este teorema, necesitamos de los siguientes resultados.

Lema 2.2.1 *Sea $T > 0$. El conjunto de variables aleatorias*

$$\{\phi(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n}); t_i \in [0,T], \phi \in C^\infty[\mathbb{R}^n], n \in \mathbb{N}\}$$

son densas en $\mathscr{L}^2(\mathscr{F}_T, \mathbb{P})$.

*Demostración.*Ver [Øk00] pág. 50 $\square$.

Lema 2.2.2 *Las combinaciones lineales de variables aleatorias de la forma*

$$\exp\left\{\int_0^T h(t)\,\mathrm{d}B_t(\omega) - \frac{1}{2}\int_0^T h^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}; \quad h \in \mathscr{L}^2[0,T] \tag{2.11}$$

son densas en $\mathscr{L}^2(\mathscr{F}_T, \mathbb{P})$.

*Demostración.*Ver [Øk00] pág. 50 $\square$.

Teorema 2.2.3 (Teorema de Representación de Itô [Øk00]) *Supongamos que $F \in \mathscr{L}^2(\mathscr{F}_T, \mathbb{P})$. Entonces existe un único proceso estocástico $f(t,\omega) \in N(0,T)$ tal que*

$$F(\omega) = \mathbb{E}[F] + \int_0^T f(t,\omega)\,\mathrm{d}B(t) \tag{2.12}$$

Demostración. Consideremos el caso $n = 1$, ya que el caso general es análogo. Por (2.11) sabemos que

$$F(\omega) = \exp\left\{\int_0^T h(t)\,\mathrm{d}B_t(\omega) - \frac{1}{2}\int_0^T h^2(t)\,\mathrm{d}t\right\},$$

para alguna $h(t) \in \mathscr{L}^2[0,T]$. Definamos

$$Y_t(\omega) = \exp\left\{\int_0^t h(s)\,\mathrm{d}B_s(\omega) - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)\,\mathrm{d}s\right\}; \quad 0 \le t \le T.$$

Por la fórmula de Itô con $g(t, X_t) = \exp X_t$

$$dY_t = Y_t(h(t)dB_t - \frac{1}{2}h^2(t)) + Y_t\frac{1}{2}(h(t)dB_t)^2 = Y_t h(t) B_t$$

o bien

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_s h(s)\,\mathrm{d}B_s; \quad t \in [0,T].$$

Entonces

$$F = Y_T = 1 + \int_0^T Y_s h(s)\,\mathrm{d}B_s; \quad t \in [0,T].$$

y $\mathbb{E}[F] = 1$, entonces (2.12) se cumple para este caso. Por linealidad se cumple para todas la combinaciones lineales de la forma (2.11). Tomemos una función $F \in \mathscr{L}^2(\mathscr{F}_T, \mathbb{P})$ y aproximémosla por combinaciones lineales de funciones F_n de la forma (2.11). Para cada n

$$F_n(\omega) = \mathbb{E}[F_n] + \int_0^T f_n(s,\omega)\,\mathrm{d}dB_s; \quad f_n \in N(0,T).$$

$$\mathbb{E}[(F_n(\omega) - F_m(\omega))^2] = \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}[F_n] - \mathbb{E}[F_m] + \int_0^T f_n(s,\omega) - f_m(s,\omega)\,\mathrm{d}B_s\right)^2\right]$$

(por la isometría de Itô)

$$= (\mathbb{E}[F_n - F_m])^2 + \int_0^T \mathbb{E}[(f_n(s,\omega) - f_m(s,\omega))^2]\,\mathrm{d}t \to 0 \quad \text{si } n, m \to \infty,$$

lo que quiere decir que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathscr{L}^2([0,T]\times\Omega)$ que converge a alguna $f \in \mathscr{L}^2([0,T]\times\Omega)$. Como $f_n \in N(0,T)$ tenemos que $f \in N(0,T)$. (Una subsucesión $\{f_n(t,\omega)\}$ converge a $f(t,\omega)$ para casi toda $(t,\omega) \in [0,T]\times\Omega$. Por lo tanto $f(t,\cdot)$ es $\mathscr{F}_t$-medible para casi toda t. Podemos modificar $f(t,\omega)$ en un t conjunto de medida cero y obtenemos que $f(t,\cdot)$ es $\mathscr{F}_t$-adaptada.) Usando otra vez la isometría de Itô vemos que

$$F = \lim_{n\to\infty} F_n = \mathbb{E}[F] + \int_0^T f \,\mathrm{d}B,$$

tomando el límite en $\mathscr{L}^2(\mathscr{F}_T,\mathbb{P})$. Ahora para que podamos probar la unicidad sólo tenemos que notar que si suponemos que

$$F(\omega) = \mathbb{E}[F] + \int_0^T f_1(t,\omega)\,\mathrm{d}B(t) = \mathbb{E}[F] + \int_0^T f_2(t,\omega)\,\mathrm{d}B(t)$$

con $f_1, f_2 \in N(0,T)$. Entonces

$$0 = \mathbb{E}[(\int_0^T f_1(t,\omega) - f_2(t,\omega)\,\mathrm{d}B(t))^2] = \int_0^T \mathbb{E}[(f_1(t,\omega) - f_2(t,\omega))^2]\,\mathrm{d}t$$

y por lo tanto $f_1(t,\omega) = f_2(t,\omega)$ para casi toda $(t,\omega) \in [0,T]\times\Omega$. $\square$
Demostración del Teorema 2.2.2 para el caso n=1. Por el teorema anterior aplicado a $T = t, F = M_t$, obtenemos que para toda t existe un único proceso estocástico $f^{(t)}(s,\omega) \in \mathscr{L}^2(\mathscr{F}_t,\mathbb{P})$ tal que

$$M_t(\omega) = \mathbb{E}[M_t] + \int_0^t f^{(t)}(s,\omega)\,\mathrm{d}B_s = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t f^{(t)}(s,\omega)\,\mathrm{d}B_s$$

Supóngase que $0 \le t_1 < t_2$. Entonces

$$\begin{aligned} M_{t_1} &= \mathbb{E}[M_{t_2}|\mathscr{F}_{t_1}] \\ &= \mathbb{E}[M_0] + \mathbb{E}\left[\int_0^{t_2} f^{(t_2)}(s,\omega)\,\mathrm{d}B_s \mid \mathscr{F}_{t_1}\right] \\ &= \mathbb{E}[M_0] + \int_0^{t_1} f^{(t_2)}(s,\omega)\,\mathrm{d}B_s. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Pero por otro lado tenemos que

$$M_{t_1} = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^{t_1} f^{(t_1)}(s,\omega)\,\mathrm{d}B_s. \tag{2.14}$$

y vemos que si comparamos (2.13) y (2.14)

$$0 = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t_1} f^{(t_1)} - f^{(t_2)}(s,\omega)\,\mathrm{d}B_s\right)^2\right] = \int_0^{t_1} \mathbb{E}(f^{(t_1)} - f^{(t_2)}(s,\omega))^2\,\mathrm{d}s$$

y por lo tanto $f^{(t_1)} = f^{(t_2)}(s,\omega)$ para casi toda $(s,\omega) \in [0,t_1] \times \Omega$. Entonces podemos definir $f(s,\omega)$ para casi toda $(s,\omega) \in [0,\infty)\times\Omega$ poniendo $f(s,\omega) = f^{(N)}(s,\omega)$ si $s \in [0,N]$ y obtenemos el resultado. □

2.3. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

En esta sección vamos a introducir el concepto de EDE y algunas de sus propiedades, discutiremos un poco el tema de existencia y en qué sentido se considera el tema relacionado con la unicidad, así como algunos resultados y conceptos que nos serán de utilidad cuando consideremos el problema de control.

Definimos una ecuación diferencial estocástica (EDE) de la siguiente forma:

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t,X_t) + \sigma(t,X_t)W_t, \tag{2.15}$$

donde a $W_t = \frac{dB_t}{dt}$ se le conoce cómo *ruido blanco*. Si multiplicamos por dt la ecuación anterior, obtenemos

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t, \tag{2.16}$$

o bien en su forma integral

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)\,\mathrm{d}t + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,\mathrm{d}B_t. \tag{2.17}$$

De hecho, observemos que aunque (2.15) y (2.16) se usan frecuentemente, en un sentido riguroso, es (2.17) la formulación adecuada. En particular, aún cuando las trayectorias del m.b. son continuas c.s. también puede probarse que son no diferenciables casi donde quiera (ver[KS91]), por lo que W_t no existe en el sentido usual. Una de tantas preguntas que nos podemos hacer es cómo resolveríamos este tipo de ecuaciones. Una de las respuestas que surgen es tratar de usar la fórmula de Itô. Otra preguntar es en qué sentido debemos entender la existencia y la unicidad de las soluciones a una EDE. Hay que recalcar que este problema se resuelve de forma análoga a su versión determinista (en el caso de EDO) y por tanto se omiten las pruebas.

Teorema 2.3.1 (Existencia y unicidad de EDE [Øk00]) *Sea* $T > 0$ *y* $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}$ *funciones medibles tales que cumplen con:*

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|) \tag{2.18}$$

y

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|), \tag{2.19}$$

para algunas constantes $C, D,$ *con* $x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T]$*. Sea* Z *una variable aleatoria independiente de la* σ*-álgebra* $\mathscr{F}_\infty$ *generada por* $B_s, s \geq 0$ *y tal que*

$$\mathbb{E}[|Z|^2] < \infty.$$

Entonces la EDE

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \tag{2.20}$$

para $0 \leq t \leq T, X_0 = Z$ *tiene una única solución* t*-continua con la propiedad que si* $X_t(\omega)$ *es adaptada a la filtración* $\mathscr{F}_t^Z$ *generada por las variables* Z *y* B_s*;* $s \leq t$*. Además*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t|^2 \, \mathrm{d}t\right] < \infty. \tag{2.21}$$

Demostración. Ver [Øk00] pag. 67 □.

Antes de que discutamos algunos ejemplos de existencia y unicidad, primero quisieramos ver cómo se resuelve una EDE usando un razonamiento similar al caso en EDO. Aún cuando la fórmula de Iô no resuelve ecuaciones, es de gran ayuda pra proponer posibles soluciones como se verá a continuación.

Ejemplo 2.3.1 (Un ejemplo clásico)

Una de las primeras ED que se discuten y qué tiene como aplicación el crecimiento de poblaciones conociendo parcialmente la tasa de crecimiento más un término que solo conocemos su distribución en probabilidad. También suponemos que la velocidad a la que crece la población es proporcional a ésta misma y que tiene recursos y territorio ilimitados. La ecuación que modela lo anterior es la siguiente:

$$\frac{dN_t}{dt} = a_t N_t,$$

con condición inicial N_0 en $t = 0$ y $a_t = r + \alpha W_t$ con r, α constantes. Esta ecuación la podemos escribir como

$$dN_t = rN_t dt + \alpha N_t dB_t$$

o bien

$$\frac{dN_t}{N_t} = rdt + \alpha dB_t,$$

con $B_0 = 0$. Si integramos de 0 a t obtenemos

$$\int_0^t \frac{dN_s}{N_s} = rt + \alpha B_t$$

Si usamos la fórmula de Itô para $x > 0$ y $g(t, x) = \ln x$ llegamos a que

$$d \ln N_t = \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2N_t^2}\alpha^2 N_t^2 \, dt = \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2}\alpha^2 \, dt$$

Entonces

$$\frac{dN_t}{N_T} = d \ln N_t + \frac{1}{2}\alpha^2 dt$$

y concluimos que

$$N_t = N_0 \exp((r - \frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha B_t)$$

que es similar a su versión determinista ya que en los dos casos la solución es de tipo exponencial. La diferencia con la EDO es que no aparece en el exponente el término B_t. A este proceso, se le conoce como movimiento Browniano geométrico y más adelante veremos su utilidad.

Ahora, regresando a la discusión de la existencia y unicidad, vamos a ver dos ejemplos relacionados con este tema:

Ejemplo 2.3.2

Los siguientes dos ejemplos son EDO.

i) La ecuación
$$\frac{dX_t}{dt} = X_t^2$$
con condición inicial $X_0 = 1$ tiene una única solución y es
$$X_t = \frac{1}{1-t} \qquad \text{para } t \in [0,1).$$
La ecuación no cumple con (2.18) y , podemos notar que esta condición nos asegura que de existir la solución, ésta no explote en un tiempo finito.

ii) La ecuación
$$\frac{dX_t}{dt} = 3X_t^{\frac{2}{3}},$$
con condición inicial $X_0 = 0$ tiene más de una solución. De hecho, si tomamos cualquier $a > 0$, la función
$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ (t-a)^3 & \text{si } t > a \end{cases}.$$

Claramente notamos que la ecuación no cumple con (2.19), ya que esta condición nos asegura unicidad de la solución.

Observación 2.3.1 *A la solución dada por el Teorema de existencia y unicidad se le conoce como solución fuerte.*

Lo anterior motiva a definir un nuevo tipo de solución, ya que no siempre va a ser posible encontrar soluciones fuertes.

Definición 2.3.1 *Una solución es una solución débil si se pueden encontrar un par de procesos $((X_t, B_t), \mathscr{H}_t)$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{H}, \mathbb{P})$ donde X_t es solución de (2.16).*

En lema siguiente nos será de gran utilidad :

Lema 2.3.1 *Si b y σ satisfacen las condiciones del teorema 2.3.1, entonces tenemos que la solución (débil o fuerte) del problema es débilmente única.*

Un hecho que es importante señalar, es que la solución de (2.16) se puede interpretar como la descripción de forma matemática del movimiento de una partícula en un líquido en movimiento. A este tipo de procesos se les conoce como *procesos de difusión de Itô* (PDI). Ahora un estudio un poco más a fondo las propiedades que cumplen estos procesos. Empezamos introduciendo el siguiente concepto:

Definición 2.3.2 *Decimos que un procesos de difusión de Itô (PDI) es homogéneo si satisface (2.16) y (2.19), con $b(t, X_t) = b(X_t)$ y $\sigma(t, X_t) = \sigma(X_t)$ para $t \geq s$, $X_s = x$.*

Denotemos a $X_t = X_t^{s,x}$ para $t \geq s$ sobreentendiendo que la condición inicial al tiempo s es x. Hablamos de que el proceso sea homogéneo en el siguiente sentido:

$$\begin{aligned} X_{s+h}^{s,x} &= x + \int_s^{s+h} b(X_u^{s,x})\,\mathrm{d}u + \int_s^{s+h} \sigma(X_u^{s,x})\,\mathrm{d}B_u \\ &= x + \int_0^h b(X_{s+v}^{s,x})\,\mathrm{d}v + \int_0^h \sigma(X_{s+v}^{s,x})\,\mathrm{d}\tilde{B}_v, \end{aligned}$$

donde $\tilde{B}_v = B_{s+v} - B_s$; $v \geq 0$. Además

$$X_h^{0,x} = x + \int_0^h b(X_v^{0,x})\,\mathrm{d}v + \int_0^h \sigma(X_v^{0,x})\,\mathrm{d}B_v,$$

como $\{B_v\}_{v\geq 0}$ y $\{\tilde{B}_v\}_{v\geq 0}$ tienen la misma $\mathbb{P}^0$-distribución, se sigue del lema 2.3.2, que $\{X_{s+h}^{s,x}\}_{h\geq 0}$ y $\{X_h^{0,x}\}_{h\geq 0}$ tienen la misma $\mathbb{P}^0$-distribución.

Sea $\mathscr{M}_\infty$ la σ-álgebra generada por las variables aleatorias $\omega \to X_t(\omega)$ con $X_t(\omega) = X_t^y(\omega)$ para $t \geq 0, y \in \mathbb{R}^n$. Se define a $\mathbb{Q}^x$ en los miembros de $\mathscr{M}$ por

(2.22) $\mathbb{Q}^x[X_{t_1} \in E_1, \cdots, X_{t_k} \in E_k] = \mathbb{P}^0[X_{t_1}^x \in E_1, \cdots, X_{t_k}^x \in E_k]$

donde $E_i \subset \mathbb{R}^n$ son borelianos para $i = 1, \cdots, k$. Sea $\mathscr{M}_t$ la σ-álgebra generada por $\{X_r, r \leq t\}$. Por el teorema 2.3.1 X_t es medible con respecto a $\mathscr{F}_t$, entonces $\mathscr{M}_t \subseteq \mathscr{F}_t$.

El resultado que presentaremos a continuación es de gran utilidad ya que nos permite demostrar los principios de verificación en la siguiente sección, la fórmula de Dynkin y otros resultados que no incluimos, como la fórmula de Feynman-Kac o la ecuación hacia atras de Kolmogorov.

Teorema 2.3.2 (Propiedad de Markov [Øk00]) *Sea f una función acotada de Borel de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Entonces, para $h, t \geq 0$*

(2.23) $$\mathbb{E}^x[f(X_{t+h})|\mathscr{F}_t](\omega) = \mathbb{E}^{X_t(\omega)}[f(X_h)],$$

donde $\mathbb{E}^x$ es la esperanza con respecto a la medida de probabilidad $\mathbb{Q}^x$ y $\mathbb{E}^{X_t(\omega)}$ es la esperanza con respecto a la medida $\mathbb{P}^0$.

Demostración. Para $r \geq t$,

$$X_r(\omega) = X_t(\omega) + \int_r^t b(X_u)\,\mathrm{d}u + \int_r^t \sigma(X_u)\,\mathrm{d}B_u,$$

por unicidad tenemos que

$$X_r(\omega) = X_r^{t,X_t}(\omega).$$

Si definimos

$$F(x,t,r,\omega) = X_r^{t,x}(\omega) \qquad \text{para } r \geq t\ ,$$

entonces

$$F(X_t,t,r,\omega) = X_r(\omega) \qquad \text{para } r \geq t\ , \tag{2.24}$$

vemos que $\omega \to F(x,t,r,\omega)$ es independiente de $\mathscr{F}_t$. Usando (2.24) podemos escribir (2.23) como

$$\mathbb{E}[f(F(X_t,t,t+h,\omega))|\mathscr{F}_t] = \mathbb{E}[f(F(x,0,h,\omega)]_{x=X_t} \tag{2.25}$$

Si ponemos $g(x,\omega) = f \circ F(x,t,t+h,\omega)$. Se puede probar que $(x,t) \to g(x,\omega)$ es medible . Entonces podemos aproximar g de forma puntual por funciones acotadas del tipo

$$\sum_{k=1}^m \phi_k(x)\psi_k(\omega).$$

Usando las propiedades de esperanza condicional tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(x,\omega)|\mathscr{F}_t] &= \mathbb{E}\left[\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^m \phi_k(X_t)\psi_k(\omega)|\mathscr{F}_t\right] \\
&= \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^m \phi_k(X_t)\mathbb{E}\left[\psi_k(\omega)|\mathscr{F}_t\right] \\
&= \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^m \mathbb{E}\left[\phi_k(y)\psi_k(\omega)|\mathscr{F}_t\right]_{y=X_t} \\
&= \mathbb{E}[g(y,\omega)|\mathscr{F}_t]_{y=X_t} = \mathbb{E}[g(y,\omega)]_{y=X_t}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, cómo $\{X_t\}$ es homogéneo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(F(X_t,t,t+h,\omega))|\mathscr{F}_t] &= \mathbb{E}[f(F(y,t,t+h,\omega))]_{y=X_t} \\ &= \mathbb{E}[f(F(y,0,h,\omega))]_{y=X_t} \end{aligned}$$

que es precisamente (2.25). □

Otra de las propiedades que nos servirán más adelante, es la propiedad fuerte de Markov. Antes de establecerla, hay que definir lo siguiente:

Definición 2.3.3 (Tiempo de Paro) *Sea $\{\mathscr{N}_t\}$ una familia creciente de σ-álgebras. Una función $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ se dice que es un tiempo de paro con respecto a $\{\mathscr{N}_t\}$ si*

$$\{\omega; \tau(\omega) \leq t\} \in, \mathscr{N}_t \qquad \text{para todo } t \geq 0\ .$$

Definición 2.3.4 *Sea τ un tiempo de paro con respecto a $\{\mathscr{N}_t\}$ y sea $\mathscr{N}_\infty$ la σ-álgebra más pequeña que contenga a $\mathscr{N}_t$ para todo $t \geq 0$. Entonces la σ-álgebra $\mathscr{N}_\infty$ consiste de todos los conjuntos $N \in \mathscr{N}_\infty$ tal que*

$$N \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{N}_t \qquad \text{para todo } t \geq 0\ .$$

Teorema 2.3.3 (Propiedad fuerte de Markov [Øk00]) *Sea f una función acotada de Borel en $\mathbb{R}^n$, τ un tiempo de paro con respecto a $\mathscr{F}_t$, $\tau < \infty$ c.s. Entonces,*

$$\mathbb{E}^x[f(X_{\tau+h})|\mathscr{F}_t](\omega) = \mathbb{E}^{X_\tau}[f(X_h)] \quad \text{para toda } h \geq 0\ . \tag{2.26}$$

Demostración. Tratemos de demostrar de forma análoga a la demostración de la propiedad de Markov. Para casi toda ω tenemos que

$$X^{\tau,x}_{\tau+h} = x + \int_\tau^{\tau+h} b(X^{\tau,x}_u)\,\mathrm{d}u + \int_\tau^{\tau+h} \sigma(X^{\tau,x}_u)\,\mathrm{d}B_u,$$

por la propiedad fuerte del m.b. tenemos que

$$\tilde{B}_v = B_{\tau+v} - B_\tau \qquad \text{para } v \geq 0$$

es otra vez un m.b. e independiente de $\mathscr{F}_\tau$. Por lo tanto

$$X^{\tau,x}_{\tau+h} = x + \int_0^h b(X^{\tau,x}_{\tau+v})\,\mathrm{d}v + \int_0^h \sigma(X^{\tau,x}_{\tau+v})\,\mathrm{d}\tilde{B}_v.$$

Entonces $\{X_{\tau+h}^{\tau,x}\}_{h\geq 0}$ debe coincidir casi donde sea con la única solución fuerte Y_h de la ecuación

$$Y_h = x + \int_0^h b(Y_v)\,\mathrm{d}v + \int_0^h \sigma(Y_v)\,\mathrm{d}\tilde{B}_v.$$

Como $\{Y_h\}_{h\geq 0}$ es independiente de $\mathscr{F}_\tau$, $\{X_{\tau+h}^{\tau,x}\}_{h\geq 0}$ también debe ser independiente. Ahora, por el lema de la solución 2.16 podemos concluir que $\{Y_h\}_{h\geq 0}$ y $\{X_{\tau+h}^{\tau,x}\}_{h\geq 0}$ tienen la misma ley de $\{X_h^{0,x}\}_{h\geq 0}$.

Si definimos

$$F(x,t,r,\omega) = X_r^{t,x}(\omega) \qquad \text{para } r \geq t \ ,$$

entonces podemos escribir (2.26)

$$\mathbb{E}[f(F(x,0,\tau+h,\omega))|\mathscr{F}_\tau] = \mathbb{E}[f(F(x,0,h,\omega)]_{x=X_\tau^{0,x}}$$

Ahora, si $X_t = X_t^{0,x}$,

$$\begin{aligned}
F(x,0,\tau+h,\omega) &= X_{\tau+h}(\omega) \\
&= x + \int_0^{\tau+h} b(X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^{\tau+h} \sigma(X_s)\,\mathrm{d}B_s \\
&= x + \int_0^{\tau} b(X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^{\tau} \sigma(X_s)\,\mathrm{d}B_s \\
&\quad + \int_\tau^{\tau+h} b(X_s)\,\mathrm{d}s + \int_\tau^{\tau+h} \sigma(X_s)\,\mathrm{d}B_s \\
&= X_\tau + \int_\tau^{\tau+h} b(X_s\,\mathrm{d}s + \int_\tau^{\tau+h} \sigma(X_s)\,\mathrm{d}B_s \\
&= F(X_\tau,\tau,\tau+h,\omega).
\end{aligned}$$

Entonces (2.26) queda de la siguiente forma

$$\mathbb{E}[f(F(X_\tau,\tau,\tau+h,\omega))|\mathscr{F}_\tau] = \mathbb{E}[f(F(x,0,h,\omega)]_{x=X_\tau^{0,x}}$$

Escribamos $g(x,t,r,\omega) = f \circ F(x,t,r,\omega)$. Cómo en el Teorema 2.23, podemos suponer que g tiene la forma

$$g(x,t,r,\omega)\sum_{k=1}^{m} \phi_k(x)\psi_k(t,r,\omega).$$

Entonces cómo $X_{\tau+h}^{\tau,x}$ es independiente de $\mathscr{F}_\tau$ y por medibilidad e g obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X_\tau,\tau,\tau+h,\omega)|\mathscr{F}_\tau] &= \sum_k \phi_k(X_\tau)\mathbb{E}\left[\psi_k(\tau,\tau+h,\omega)|\mathscr{F}_\tau\right] \\
&= \sum_k \mathbb{E}\left[\phi_k(y)\psi_k(\tau,\tau+h,\omega)|\mathscr{F}_t\right]_{y=X_\tau} \\
&= \mathbb{E}[g(y,\tau,\tau+h,\omega)|\mathscr{F}_\tau]_{y=X_\tau} \\
&= \mathbb{E}[g(y,\tau,\tau+h,\omega)]_{y=X_\tau} \\
&= \mathbb{E}[f(X_{\tau+h}^{\tau,y})]_{y=X_\tau} \\
&= \mathbb{E}[f(X_h^{0,y})]_{y=X_\tau} \\
&= \mathbb{E}[f(F(y,0,h,\omega)]_{y=X_\tau}\square.
\end{aligned}$$

Formulemos una versión más general del resultado anterior: Sea $\mathscr{H}$ el conjunto de todas las funciones reales $\mathscr{M}_\infty$-medibles. Para $t \geq 0$ definamos el operador de traslación o de *shift*

$$\theta_t : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$$

cómo sigue: si $\eta = g_1(X_{t_1})\cdots g_k(X_{t_k})$, con g_i funciones de Borel medibles, $t_i \geq 0$, entonces

$$\theta_t\eta = g_1(X_{t_1+t})\cdots g_k(X_{t_k+t}).$$

Entonces la propiedad de Markov fuerte se vería de la siguiente forma

$$\mathbb{E}^x[\theta_\tau\eta)|\mathscr{F}_t](\omega) = \mathbb{E}^{X_\tau}[\eta]. \tag{2.27}$$

Sea $H \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y sea τ_H el primer tiempo de salida de H para un PDI X_t. Sea α otro tiempo de paro, g una función continua y acotada en $\mathbb{R}^n$ y definamos

$$\eta = g(X_{\tau_H})\chi_{\tau_H}, \quad \tau_H^\alpha = \text{ínf}\{t > \alpha;\, X_t \notin H\}. \tag{2.28}$$

Definición 2.3.5 *Sea $\{X_t\}$ un PDI en $\mathbb{R}^n$. Definimos el generador infinitesimal A de X_t cómo*

$$Af(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\mathbb{E}^x[f(X_t)] - f(x)}{t}; \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

El conjunto de las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para el cuál el límite exista en x es denotado por $\mathscr{D}_A(x)$ y $\mathscr{D}_A$ es el conjunto de todas las funciones para el cuál el límite existe para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Cuando tenemos suficiente regularidad en la función f, podemos asociar un operador diferencial parcial al proceso.

Teorema 2.3.4 ([Øk00]) *Sea X_t un PDI homogéneo. Si $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ entonces $f \in \mathscr{D}_A$ y*

$$Af(x) = \sum_i b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{i,j}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Otro resultado de gran utilidad, que sirve para contruir soluciones a EDP, y lo utilizaremso más adelante en la demostración del principio de verificación para el problema de control estocástico, es el siguiente:

Teorema 2.3.5 (Fórmula de Dynkin [Øk00]) *Sea $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Supongamos que τ es un tiempo de paro $\mathbb{E}^x[\tau] < \infty$. Entonces*

$$\mathbb{E}^x[f(X_\tau)] = f(x) + \mathbb{E}^x[\int_0^\tau Af(X_s)\,\mathrm{d}s].$$

2.4. Teoría de Control Estocástico

Supongamos que el estado de un sistema al tiempo t es descrito por X_t y cumple con:

$$dX_t = b(t, X_t, u)dt + \sigma(t, X_t, u)dB_t, \tag{2.29}$$

donde $X_t \in \mathbb{R}^n$, $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $u \in U \subset \mathbb{R}^k$ y B_t es un m.b. m dimensional, donde U es un conjunto de Borel dado. Entonces $u = u(t, \omega)$ es un proceso estocástico y se le nombra variable de control. Supongamos que u es $\mathscr{F}$-adaptado y que el proceso que cumple con (2.29) existe. Sea $\left\{X_h^{s,x}\right\}_{h\geq s}$ la solución de (2.29) tal que $X_s^{s,x} = x$ y sea $\mathbb{Q}^{s,x}$ la ley de probabilidad de X_t empezando en x para $t = s$, i.e.

$$\mathbb{Q}^{s,x}\left[X_{t_1} \in E_1, \cdots, X_{t_k} \in E_k\right] = \mathbb{P}^0\left[X_{t_1}^{s,x} \in E_1, \cdots, X_{t_k}^{s,x} \in E_k\right],$$

para $s \leq t_i$, $1 \leq i \leq k$, $k \in \mathbb{N}$, $E_i \subset \mathbb{R}^n$.

Dadas F, K, funciones continuas llamadas función de utilidad y función de costo respectivamente, tales que $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ y $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sea G un dominio en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ fijo y sea $\widetilde{T}$ el primer tiempo de salida de G empezando en s para el proceso $\{X_r^{s,x}\}_{r\geq s}$, i.e.

$$\widetilde{T} = \widetilde{T}^{s,x}(\omega) = \inf\{r > s; (r, X_r^{s,x}(\omega)) \notin G\} \leq \infty \tag{2.30}$$

Supongamos que

$$\mathbb{E}^{s,x}\left[\int_s^{\widetilde{T}} |F^{u_r}(r, X_r)|\,\mathrm{d}r + |K(\widetilde{T}, X_{\widetilde{T}})|\chi_{\widetilde{T}<\infty}\right] < \infty \tag{2.31}$$

para todo s, x, u, donde $F^u(r,z) = F(r,z,u)$. Entonces definimos la función objetivo $J^u(s,x)$ por

$$J^u(s,x) = \mathbb{E}^{s,x}\left[\int_s^{\widetilde{T}} F^{u_r}(r, X_r)\,\mathrm{d}r + K(\widetilde{T}, X_{\widetilde{T}})\chi_{\widetilde{T}<\infty}\right]. \tag{2.32}$$

Sea $Y_t = (s+t, X_{s+t}^{s,x})$ para $t \geq 0$, $Y_0 = (s,x)$. Sustituyendo Y_t en (2.29) obtenemos

$$dY_t = b(Y_t, u)dt + \sigma(Y_t, u)dB_t, \tag{2.33}$$

donde u, b y σ en (2.33) son los coeficientes resultantes al cambio de variable en (2.29). Consideremos a $Q^{s,x} = Q^y$ como la ley de probabilidad de Y_t empezando en $y = (s,x)$ en $t = 0$.

Notemos que

$$\int_s^{\widetilde{T}} F^{u_r}(r, X_r)\,\mathrm{d}r = \int_0^{\widetilde{T}-s} F^{u_{s+t}}(X_{s+t})\,\mathrm{d}t = \int_0^{T} F^{u_{s+t}}(Y_t)\,\mathrm{d}t,$$

donde

$$T = \operatorname{ínf}\{t > 0 \quad | Y_t \notin G\} = \widetilde{T} - s.$$

Además

$$K(\widetilde{T}, X_{\widetilde{T}}) = K(Y_{\widetilde{T}-s}) = K(Y_T).$$

Entonces la función (2.32) la podemos escribir en términos de Y con $y = (s,x)$,

$$J^u(y) = \mathbb{E}^y\left[\int_0^T F^{u_t}(Y_t)\,\mathrm{d}t + K(Y_T)\chi_{T<\infty}\right]. \tag{2.34}$$

Nuestro problema es el siguiente: para cada $y \in G$, queremos encontrar un número $\Phi(y)$ y un control $\tilde{u} = \tilde{u}(t,\omega) = \tilde{u}(y,t,\omega) \in \mathscr{A}$ tal que

$$\Phi(y) = \sup_{u(t,\omega)\in\mathscr{A}} J^u(y) = J^{\tilde{u}}(y) \tag{2.35}$$

donde el supremo se toma en la familia $\mathscr{A}$ de controles admisibles , contenida en el conjunto de todos los procesos $\mathscr{F}_t$-adaptados $\{u_t\}$ con valores en U. Si un control $\tilde{u}$ existe, le llamaremos control óptimo y a la correspondiente Φ, función de valor.

Tenemos que mencionar que hay varios tipos de controles admisibles :

1. $u(t,\omega) = u(t)$ que se les denomina deterministas.
2. Procesos $\{u_t\}$ que son $\mathscr{M}_t$-adaptados, donde $\mathscr{M}_t$ es la σ-álgebra generada por $\{X_r^u \,|\, r \leq t\}$.
3. $u(t,\omega) = u_0(t, X_t(\omega))$ para alguna función $u_0 : \mathbb{R}^n \to U \subset \mathbb{R}^k$. En este caso, supongamos que u no depende de $y = (s,x)$: el valor que escojamos al tiempo t sólo depende del estado del sistema en ese momento. A este tipo de controles les llamaremos de Markov, porque el correspondiente proceso X_t se convierte en un proceso de difusión de Itô y en particular un proceso de Markov.
4. Otro tipo de control sería en el caso en el que se tuviera un conocimiento parcial del estado del sistema. En este caso sólo se tienen observaciones de X_t dadas por un proceso de Itô y en este caso está relacionado con un problema de filtro.

Consideremos sólo en este momento controles de Markov $u = u(t, X_t(\omega))$. Sea $Y_t = (s+t, X_{s+t})$ y la ecuación de sistema asociado es

$$dY_t = b(Y_t, u(Y_t))dt + \sigma(Y_t, u(Y_t))dB_t. \tag{2.36}$$

Para $v \in U$ y $\phi \in C_0^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ definimos

$$(L^v\phi)(y) = \frac{\partial \phi}{\partial s}(y) + \sum_{i=0}^{n} b_i(y,v)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}(y,v)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \tag{2.37}$$

donde $a_{ij} = 1/2(\sigma\sigma^T)_{ij}$, $y = (s,x)$ y $x = (x_1, \cdots, x_n)$. Entonces para cada elección de la función u la solución $Y_t = Y_t^u$ es un proceso de difusión de Itô con generador A dado por

$$(A\phi)(y) = (L^{u(y)}\phi)(y) \qquad \text{para } \phi \in C_0^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n).$$

Podemos observar que estamos considerando procesos no homogéneos, y por tanto aparece el término con respecto a t.

Definición 2.4.1 (Frontera Regular) *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$. Un punto $y \in \partial D$ se dice regular con respecto a X_t si*

$$\mathbb{Q}^y[\tau_D = 0] = 1.$$

Si esta condición se cumple para toda $y \in \partial D$ se dice que la frontera es regular.

Un resultado que utilizaremos para demostrar el teorema de esta sección y su demostración se puede encontrar en [Øk00] pag. 182. Esteresultado cómo encontrar la solución a un problema clásico de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Teorema 2.4.1 (El Problema de Poisson con condiciones Dirichlet) *Supongamos que $\tau_D < \infty$ c.s. $\mathbb{Q}^y$ para toda y. Sea $\phi \in C(\partial D)$ acotada y sea $g \in C(D)$ que satisfaga*

$$\mathbb{E}^y \left[\int_0^{\tau_D} |g(Y_s)| \, \mathrm{d}s \right] < \infty \quad \forall y \in D.$$

Definamos

$$w(x) = \mathbb{E}^y \left[\phi(Y_{\tau_D}) \right] + \mathbb{E}^y \left[\int_0^{\tau_D} g(Y_s) \, \mathrm{d}s \right], \quad x \in D.$$

Entonces

$$\mathscr{A} w = -g \quad \text{en } D.$$

y

$$\lim_{t \uparrow \tau_D} w(X_t) = \phi(X_{\tau_D}) \quad \text{c.s. } \mathbb{Q}^y \; \forall y \in D,$$

donde $\mathscr{A}$ es el operador característico de $\{X_s\}$ y se defiene de manera análoga al operador infinitesimal.

Observación 2.4.1 *En la definición de generador infinitesimal se cambia el tiempo t por τ_U, en el denominador $\mathbb{E}^y[\tau_U]$ en lugar de t y el límite se toma para cualquier colección de abiertos U's que decrescan a y. Otra cosa que podemos decir es que $\mathscr{D}_A \subseteq \mathscr{D}_{\mathscr{A}}$ y por tanto*

$$Af = \mathscr{A} f \quad \forall f \in \mathscr{D}_A$$

Los resultados que presentaremos a continuación son los principios de verificación correspondientes a esta formulación. La importancia de estos resultados es la reducción del problema de control a resolver una EDP de segundo orden.

Teorema 2.4.2 (Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)[Øk00]) *Si definimos*

$$\Phi(y) = \sup\{J^u(y); u = u(Y) \quad \textit{control de Markov}\}.$$

Supongamos que $\Phi \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ *es acotada,* $T < \infty$ *c.s.* $\mathbb{Q}^y$ *para toda* $y \in G$ *y que exista un control óptimo de Markov* $\tilde{u}$. *Supongamos que* ∂G *sea regular para* $Y_t^{\tilde{u}}$. *Entonces*

$$\sup_{v \in U}\{F^v(y) + (L^v\Phi)(y)\} = 0 \qquad \textit{para toda } y \in G \tag{2.38}$$

$$\Phi(y) = K(y) \qquad \textit{para toda } y \in \partial G \tag{2.39}$$

El supremo en (2.38) se alcanza si $v = \tilde{u}(y)$ *donde* $\tilde{u}(y)$ *es óptimo. En otras palabras*

$$F(y, \tilde{u}(y)) + (L^{\tilde{u}(y)}\Phi)(y) = 0 \qquad \textit{para toda } y \in G \tag{2.40}$$

Demostración. Para probar las últimas dos afirmaciones notemos que el control $\tilde{u} = \tilde{u}(y)$ es óptimo y obtenemos

$$\Phi(y) = J^{\tilde{u}}(y) = \mathbb{E}^y\left[\int_0^T F(Y_s, \tilde{u}(Y_s))\,\mathrm{d}s + K(Y_T)\chi_{T<\infty}\right].$$

Si $y \in \partial G$ entonces $T = 0$ c.s. $\mathbb{Q}^y$ ya que ∂G es regular y se demuestra (2.39). Ahora, por el teorema (2.4.1)

$$(L^{\tilde{u}(y)}\Phi)(y) = -F(y, \tilde{u}(y)) \qquad \text{para toda } y \in G$$

que es precisamente (2.40). Sólo nos falta demostrar (2.38) y para hacer esto fijemos $y = (s, x) \in G$ y escojamos un control de Markov u. Sea $\alpha \leq T$ un tiempo de paro. Como

$$J^u(y) = \mathbb{E}^y\left[\int_0^T F^u(Y_r)\,\mathrm{d}r + K(Y_T)\chi_{T<\infty}\right],$$

observando que bajo un argumento análogo para poder obtener (2.28) (ver [Øk00] pag. 226)

$$\theta_\alpha\left(\int_0^T F^u(Y_r)\,\mathrm{d}r + K(Y_T)\chi_{T<\infty}\right) = \int_\alpha^T F^u(Y_r)\,\mathrm{d}r + K(Y_T)\chi_{T<\infty}$$

tenemos por la propiedad fuerte de Markov (2.27) combinado con (2.28) y con la observación anterior que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^y\left[J^u(Y_\alpha)\right] &= \mathbb{E}^y\left[\mathbb{E}^{Y_\alpha}\left[\int_0^T F^u(Y_r)\,\mathrm{d}r + K(Y_T)\right]\chi_{T<\infty}\right] \\
&= \mathbb{E}^y\left[\mathbb{E}^y\left[\theta_\alpha\left(\int_0^T F^u(Y_r)\,\mathrm{d}r + K(Y_T)\chi_{T<\infty}\right)|\mathscr{F}_\alpha\right]\right] \\
&= \mathbb{E}^y\left[\mathbb{E}^y\left[\int_\alpha^T F^u(Y_r)\,\mathrm{d}r + K(Y_T)\chi_{T<\infty}|\mathscr{F}_\alpha\right]\right] \\
&= \mathbb{E}^y\left[\int_0^T F^u(Y_r)\,\mathrm{d}r + K(Y_T)\chi_{T<\infty} - \int_0^\alpha F^u(Y_r)\,\mathrm{d}r\right] \\
&= J^u(y) - \mathbb{E}^y\left[\int_0^\alpha F^u(Y_r)\,\mathrm{d}r\right].
\end{aligned}$$

Entonces

$$J^u(y) = \mathbb{E}^y\left[\int_0^\alpha F^u(Y_r)\,\mathrm{d}r\right] + \mathbb{E}^y\left[J^u(Y_\alpha)\right]. \tag{2.41}$$

Sea $W \subset G$ con $W = \{(r,z) \in G; r < t_1\}$ donde $s < t_1$. Consideremos $\alpha = \text{ínf}\{t \geq 0; Y_t \notin W\}$. Supongamos que un control óptimo existe $\tilde{u}(y) = \tilde{u}(r,z)$ y escogemos

$$u(r,z) = \begin{cases} v & \text{si } (r,z) \in W \\ \tilde{u}(r,z) & \text{si } (r,z) \in G \setminus W \end{cases}$$

donde $v \in U$ es arbitraria. Entonces

$$\Phi(Y_\alpha) = J^{\tilde{u}}(Y_\alpha) = J^u(Y_\alpha) \tag{2.42}$$

y por lo tanto, combinando (2.41) y (2.42) obtenemos

$$\Phi(y) \geq J^u(y) = \mathbb{E}^y\left[\int_0^\alpha F^u(Y_r)\,\mathrm{d}r\right] + \mathbb{E}^y\left[\Phi(Y_\alpha)\right]. \tag{2.43}$$

Como $\Phi \in C^2(G)$ por la fórmula de Dynkin

$$\mathbb{E}^y\left[\Phi(Y_\alpha)\right] = \Phi(y) + \mathbb{E}^y\left[\int_0^\alpha (L^u\Phi)(Y_r)\,\mathrm{d}r\right],$$

que sustituimos en (2.43) y nos da

$$\Phi(y) \geq \mathbb{E}^y\left[\int_0^\alpha F^v(Y_r)\,\mathrm{d}r\right] + \Phi(y) + \mathbb{E}^y\left[\int_0^\alpha (L^v\Phi)(Y_r)\,\mathrm{d}r\right]$$

o bien,

$$\mathbb{E}^y\left[\int_0^\alpha F^v(Y_r)\,\mathrm{d}r + \int_0^\alpha (L^v\Phi)(Y_r)\,\mathrm{d}r\right] \leq 0.$$

Entonces

$$\frac{\mathbb{E}^y\left[\int_0^\alpha F^v(Y_r)\,\mathrm{d}r + \int_0^\alpha (L^v\Phi)(Y_r)\,\mathrm{d}r\right]}{\mathbb{E}^y[\alpha]} \leq 0 \qquad \text{para todo } W.$$

Si dejamos que $t_1 \to s$ obtenemos, cómo F^v y $(L^v\Phi)$ son continuas en y, que $F^v(y) + (L^v\Phi)(y) \leq 0$, que combinado con (2.40) da (2.38). □

Teorema 2.4.3 ([Øk00]) *Sea ϕ una función $C^2(G) \cap C(\overline{G})$ tal que , para toda $v \in U$,*

$$F^v(y) + (L^v\phi)(y) \leq 0; \qquad y \in G \tag{2.44}$$

con valores en la frontera

$$\lim_{t\to T} \phi(Y_t) = K(Y_T)\chi_{\{T<\infty\}} \quad c.s.\ \mathbb{Q}^y \tag{2.45}$$

y tal que $\{\phi(Y_\tau)\}_{\tau\leq T}$ sea uniformemente $\mathbb{Q}^y$-integrable para todo control de Markov u y para toda $y \in G$.Entonces

$$\phi(y) \geq J^u(y) \quad \text{para todo control de Markov } u \text{ y } \forall y \in G. \tag{2.46}$$

Más aún, si para cada $y \in G$ podemos encontrar $u_0(y)$ tal que

$$F^{u_0(y)}(y) + (L^{u_0(y)}\phi)(y) = 0, \tag{2.47}$$

entonces $u_0 = u_0(y)$ es un control de Markov tal que

$$\phi(y) = J^{u_0}(y)$$

y por lo tanto u_0 debe de ser un control óptimo y $\phi(y) = \Phi(y)$

Demostración. Sea u un control de Markov. Sea ϕ que satisface (2.44) y (2.45). Como $L^u\phi \leq -F^u$ en G tenemos por la fórmula de Dynkin

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^y[\phi(Y_{T_R})] &= \phi(y) + \mathbb{E}^y\left[\int_0^{T_R}(L^u\phi)(Y_r)\,\mathrm{d}r\right] \\ &\leq \phi(y) - \mathbb{E}^y\left[\int_0^{T_R} F^u(Y_r)\,\mathrm{d}r\right],\end{aligned}$$

donde

$$T_R = \min\{R, T, \inf\{t > 0; |Y_t| \geq R\}\} \tag{2.48}$$

para toda $R < \infty$. Esto nos da, por (2.39), (2.45) y por integrabilidad uniforme

$$\begin{array}{rcl}\phi(y) & \geq & \mathbb{E}^y\left[\int_0^{T_R} F^u(Y_r)\,\mathrm{d}r + \phi(Y_{T_R})\right] \\ & \to & \mathbb{E}^y\left[\int_0^{T} F^u(Y_r)\,\mathrm{d}r + K(Y_T)\chi_{\{T<\infty\}}\right] = J^u(y)\end{array}$$

si $R \to \infty$ que prueba (2.46). Si u_0 es tal que se cumple (2.47), entonces el trabajo anterior con igualdades completa la prueba $\square$.

En el siguiente capítulos veremos algunas aplicaciones que tiene la teoría desarrollada a lo largo del trabajo, así como algunos ejemplos donde es necesario conocer más a fondo varios aspectos que no incluimos.

Capítulo 3

Algunas Aplicaciones

En este capítulo hablaremos de algunas de las aplicaciones que podemos encontrar de la teoría de control determinista y estocástico en las finanzas y la biología.

3.1. Regulador Cuadrático Lineal

En esta sección deseamos discutir uno de los ejemplos clásicos en la teoría de control. Este ejemplo es de nuestro interés por su uso en aplicaciones , además de que podemos dar una solución explícita a este problema. En el primer capítulo se desarrolló su análogo en el caso determinista, ahora deseamos desarrollar este mismo en su versión aleatoria.

Supongamos que el estado de un sistema al tiempo t está dado por la siguiente ecuación:

$$dX_t = (H_t X_t + M_t u_t)dt + \sigma_t dB_t, \quad t \geq s; \quad X_s = x \tag{3.1}$$

y la función de costo asociada a este problema para $s \leq t_1$ es

$$J^u(s,x) = \mathbb{E}^{s,x}\left[\int_s^{t_1} \{X_t^T C_t X_t + u^T D_t u_t\}\, \mathrm{d}t + X_{t_1}^T R X_{t_1}\right], \tag{3.2}$$

donde todos los coefecientes $H_t, C_t, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M_t \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $\sigma_t \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $D_t \in \mathbb{R}^{k\times k}$ son t-continuos (ver 2.4) y deterministas. Supondremos que las matrices R y C_t son simétricas, no negativas definidas y D_t simétrica y definida positiva para toda t. También supondremos que t_1 es determinista.

Nuestro problema sería encontrar una $u = u(t, X_t) \in \mathbb{R}$ tal que minimice el funcional J^u. La ecuación de HJB (2.38) asociado a nuestro problema es:

$$
\begin{aligned}
(3.3) \qquad 0 &= \inf_v \{F^v(s,x) + (L^v\Phi)(s,x)\} \\
&= \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \inf_v \{x^T C_s x + v^T D_s v + \sum_{i=1}^{n} (H_s x + M_s v)_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (\sigma_s \sigma_s^T)_{ij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}\} \quad \text{para } s < t_1
\end{aligned}
$$

y

$$\phi(t_1, x) = x^T R x.$$

Para encontrar la solución, se propone una función de la forma

$$\phi(t_1, x) = x^T S_t x + a_t$$

con $S(t) = S_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica, no negativa definida, $a_t \in \mathbb{R}$ y ambas continuamente diferenciables con respecto a t y deterministas.

El primer requerimiento que debe cumplir es

$$\phi(t_1, x) = x^T R x = x^T S_{t_1} x + a_{t_1} \quad \Rightarrow \quad a_{t_1} = 0, \quad S_{t_1} = R$$

Ahora, sustituyendo $\phi(t, x)$ en la ecuación de HJB correspondiente (3.3), obtenemos

$$
\begin{aligned}
F^v(t,x) + (L^v\phi)(t,x) &= x^T S_t' x + a_t' + x^T C_t x + v^T D_t v \\
&+ (H_t x + M_t v)^T (S_t x + S_T^T x) + \sum_{i,j=1}^{n} (\sigma_t \sigma_t^T)_{ij} \, S_{ij},
\end{aligned}
$$

ya que la matriz S_t es simétrica i.e. $a_i = b_i$ para toda i donde a_i y b_i forman los vectores renglón y columna respectivamente, entonces $x^T S_t x = (x \cdot a_1, \ldots, x \cdot a_n) \cdot x$ donde $\cdot$ denota el producto interior usual. Entonces de aquí se deduce, por la propiedad del producto que

$$
\begin{aligned}
\{(x \cdot a_1, \ldots, x \cdot a_n) \cdot x\}_{x_i} &= (a_{1i}, \ldots, a_{ni}) \cdot x + (x \cdot a_1, \ldots, x \cdot a_n) \cdot e_i \\
&= 2a_i \cdot x, \quad e_i = (0, \ldots, \underbrace{1}_{i-esima}, \ldots, 0).
\end{aligned}
$$

Por lo anterior

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(H_t x + M_t)_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} &= \sum_{i=1}^{n}(H_t x + M_t)_i (b_i \cdot x + a_i \cdot x) \\
&= (H_t x + M_t v)^T (S_t x + S_t^T x) \\
\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma_t \sigma_t^T)_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{i,j=1}^{n}(\sigma_t \sigma_t^T)_{ij}\, S_{ij}
\end{aligned}$$

El mínimo se obtiene si

$$D_v(F^v(t,x) + (L^v\Phi)(t,x)) \;=\; 2D_t v + 2M_t^T v S_t x \;=\; 0$$

Y esto se cumple si

$$v = -D_t^{-1} M_t^T S_t x,$$

de lo que se puede ver que

$$\begin{aligned}
v^T D_t v &= (-D_t^{-1} M_t^T S_t x)^T D_t (-D_t^{-1} M_t^T S_t x) \\
\text{(por ser simétricas } D_t, S_t) &= x^T S_t M_t D_t^{-1} D_t D_t^{-1} M_t^T S_t x \\
&= x^T S_t M_t D_t^{-1} M_t^T S_t x \\
(H_t x + M_t v)^T &= (H_t x + M_t - D_t^{-1} M_t^T S_t x)^T \\
F^v(t,x) + (L^v \phi)(t,x) &= x^T (S_t' x + C_t - S_t M_t D_t^{-1} M_t^T S_t + 2H_t S_t) x \\
&+ \;\; a_t' + \sum_{i,j=1}^{n}(\sigma_t \sigma_t^T)_{ij}\, S_{ij} = 0,
\end{aligned}$$

la última igualdad a cero se cumple si escojemos S_t y a_t tales que

$$\begin{aligned}
S_t' &= S_t M_t D_t^{-1} M_t^T S_t - 2H_t S_t - C_t \\
a_t' &= -\sum_{i,j=1}^{n} -(\sigma_t \sigma_t^T)_{ij}\, S_{ij} \quad \text{o bien} \\
a_t &= \int_t^{t_1} \sum_{i,j=1}^{n} -(\sigma_t \sigma_t^T)_{ij}\, S_{ij}\, \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

para $t < t_1$. Podemos notar que la primera ecuación es precisamente la ecuación del ejemplo 1.2.1 , y por tanto es el mismo control que el caso deterministico. Sabemos que esta tiene una solución con su correspondiente condición inicial, y por tanto determina a S_t de manera única. Por el teorema (2.44) podemos concluir que

$$\begin{aligned} u(t,x) &= -D_t^{-1} M_t^T S_t x, \quad t < t_1 \\ \Phi(s,x) &= x^T S_s x + \int_t^{t_1} \sum_{i,j=1}^{n} -(\sigma_t \sigma_t^T)_{ij} \, S_{ij} \, \mathrm{d}s, \quad s < t_1 \end{aligned}$$

control óptimo y función de costo mínimo correspondientemente.

3.2. Selección Óptima de un Portafolio

En esta sección se desea construir un portafolio en un caso muy simple usando metodologías de control. Se puede tratar este problema desde una perspectiva más general, cómo se verá en la siguiente sección. Falta mencionar que un portafolio es el conjunto de activos financieros en los cuales se invierte.

Supongamos que una persona quiere invertir su dinero y puede escoger entre dos instrumentos de inversión: uno libre de riesgo (un banco) y uno con riesgo (una acción). Supongamos que el precio $p_1(t)$ del instrumento con riego se rige por la siguiente ecuación

$$dp_1 = p_1 a dt + p_1 \alpha dB_t,$$

donde $a, \alpha > 0$ son sus tasas de interés y se suponen constantes. Sea p_2 el precio del activo libre de riesgo y cumple con la siguiente ecuación

$$dp_2 = p_2 b dt.$$

Es natural pensar que la tasa de interés del activo libre de riesgo sea menor que la del activo con riesgo ($b < a$). Supongamos que la persona puede decidir a cada instante que proporción u de su dinero se invierte en el activo con riego y el resto $1 - u$ al activo libre de riesgo. Si X_t denota la cantidad de dinero que tiene la persona al tiempo t la ecuación que rige el bienestar de la persona es

$$\begin{aligned} dX_t &= u X_t a dt + u X_t \alpha dB_t + (1-u) X_t b dt \\ &= X_t (au + b(1-u)) dt + \alpha u X_t dB_t. \end{aligned}$$

Supongamos que su bienestar al tiempo t es $X_t = x > 0$ la persona quiere maximizar su utilidad esperada a un tiempo futuro t_0. Consideremos el hecho de no pedir dinero prestado $X_t \geq 0$ y dada una función de utilidad

$$N : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad N(0) = 0 \text{ creciente y concava,}$$

nuestro problema es encontrar $\Phi(s, x)$ y un control $u = (s, X_t)$, $0 \leq u \leq 1$ tal que

$$\begin{aligned} \Phi(s, x) &= \sup_v \{J^v(s, x); \quad 0 \leq v \leq 1, \ v \text{ control de Markov}\} \\ &= J^u(s, x) = \mathbb{E}^{s,x}[N(X_T^u)] \end{aligned}$$

con T el primer tiempo de salida de la región $G = \{(r, z); r < t_0, \, z > 0\}$, entonces la correspondiente ecuación de HJB (2.38), ($F = 0$, $K = N$) sería

$$\begin{aligned} \sup_v \{(L^v \Phi)(t, x)\} &= 0 \quad \text{para } (t, x) \in G \\ \Phi(t, x) &= N(x) \text{ para } t = t_0, \quad \Phi(t, 0) = 0 \quad \text{ para } t < t_0. \end{aligned}$$

Por tanto, buscamos una función v que maximice la función

$$\eta(v) = L^v \Phi = \Phi_t + x(b + (a - b)v)\Phi_x + \frac{1}{2}\alpha^2 v^2 x^2 \Phi_{xx}$$

Si $\Phi_x > 0$ y $\Phi_{xx} < 0$ la solución sería

$$v = -\frac{(a - b)\Phi_x}{x\alpha^2 \Phi_{xx}}.$$

Si sustituimos en η nuestro problema se convierte en

$$\begin{aligned} \Phi_t + xb\Phi_x - \frac{(a - b)^2 \Phi_x^2}{2\alpha^2 x^2 \Phi_{xx}} \quad &\text{para} \quad t < t_0, \ x > 0 \\ \Phi(t, x) = N(x) \quad &\text{para} \quad t = t_0, \quad x = 0 \end{aligned}$$

Este problema es un problema muy complicado de resolver en general, pero si consideramos el caso particular $N(x) = x^r$ con $0 < r < 1$ y usando el metodo de separación de variables, buscando soluciones de la forma $\phi(t, x) = f(t)x^r$. Sustituyendo, se puede ver que $\phi(t, x) = e^{\lambda(t - t_0)} x^r$ con $\lambda = br + (a - b)^2 r / 2\alpha^2 (1 - r)$. Por lo tanto el control óptimo sería

$$u(t, x) = \frac{(a - b)}{\alpha^2 (1 - r)}.$$

Si $u \in (0,1)$ es el control que resuelve nuestro problema, por el teorema (2.44). Otra elección interesante es $N(x) = \log(x)$, y usando la fórmula de Dynkin 2.3.5 :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{s,x}[\log(X_T)] &= \log(x) + \\ &\quad \mathbb{E}^{s,x}\left[\int_s^T au(t,X_t) + b(1-u(t,X_t)) - \alpha^2 u^2(t,X_t) d\,\mathrm{d}t\right].\end{aligned}$$

De aquí es claro que si escogemos v tal que maximice el integrando, otendremos el control deseado, y este es

$$v = \frac{a-b}{\alpha^2}.$$

Podemos utilizar este procedimiento para el caso $N(x) = x^r$.

3.3. Un Modelo de Depredador-Presa

En el siguiente ejemplo consideramos un sistema de EDP acopladas. El sistema nos describe la interacción entre dos tipos de plankton (fitoplankton y zooplankton), el segundo se alimenta del primero y a su vez una especie de peces se alimentan del zooplankton (ver [MPTML02] pag. 334). Lo que haremos en este ejemplo es tratar de aplicar el teorema 1.2.1 al sistema que describe esta interacción en su versión discretizada. Hay que señalar que este problema se puede hacer uso de la formulación que hay para EDP, pero va más allá de esta tesis desarrollar dicha teoría.

Si denotamos por $p = p(t,x,y)$ y $h = h(t,x,y)$ a la densidad de población de fitoplankton y de zooplankton hervíboro al tiempo t y posición (x,y), el sistema que describe dinámica descrita anteriormente esta representada por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} &= rp(1-p) - \frac{ap}{1+bp}h + d_p\Delta p \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{ap}{1+bp}h - mh - \frac{gh^2}{1+g^2h^2}f + d_h\Delta h,\end{aligned} \tag{3.4}$$

en $\Omega = (0,l_1) \times (0,l_2)$, con condiciones iniciales de las dos poblaciones $p(0,x,y) = p_0$ y $h(0,x,y) = h_0$, y las de frontera

$$p_z = \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 = \frac{\partial h}{\partial \nu} = h_z \quad \in \partial\Omega, \tag{3.5}$$

donde $\frac{\partial p}{\partial \nu} = \nabla \cdot \vec{n}$, siendo $\vec{n}$ el vector normal a la frontera del dominio y con w_z denotando las derivadas parciales con respecto a x, y. La igualdad entre derivadas normales exteriores y parciales se debe a que el dominio es un rectángulo. Los términos con laplaciano en las dos ecuaciones con su respectivo coeficiente representa como se distribuyen las especies en el medio considerado. Los términos de la forma

$$F(Y)X$$

representan como crece la población X a una tasa $F(Y)$. A F se le conoce como respuesta funcional que es el cambio en número de presas atacadas por un depredador en un periodo de tiempo al cambiar el valor de la densidad inicial de la presa.

Lo anterior en palabras nos dice que nuestras poblaciones iniciales al tiempo 0 son p_0 y h_0, y estan contenidas en en un estanque rectangular de lados l_1 y l_2, y no hay flujo de población fuera del rectangulo. Los parámetros a, b, r, m, f, d_p, d_h son valores obtenidos bajo un cambio de variable de lo que originalmente representaban las tasas de crecimiento, muerte, depredación, capacidad de carga, la respuesta de saturación funcional, etc. (ver [MPTML02] pag. 334-335). Para que podamos dar una discretización de (3.3), tenemos que considerar una partición de Ω (por simplicidad, consideraremos una partición regular).

Sea $P = \{(x_i, y_j) \in \bar{\Omega} : u_k < u_{k+1}, u = x\,, y, i = 0, \ldots, n\,, j = 0, \ldots, m\}$ con $(x_0 = y_0 = 0)$ y $(x_n, y_m) = (l_1, l_2)$. El sitema discretizado sería

$$\begin{aligned} p'_{ij} &= rp_{ij}(1 - p_{ij}) - \frac{ap_{ij}}{1 + bp_{ij}} h_{ij} + d_p \Delta_{ij} p \\ h'_{ij} &= \frac{ap_{ij}}{1 + bp_{ij}} h_{ij} - mh_{ij} - \frac{gh_{ij}^2}{1 + g^2 h_{ij}^2} f + d_h \Delta_{ij} h \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde $w_{ij} = w(t, x_i, y_j)$ para $w = p, h$, ' denota derivada con respecto al tiempo y

$$\Delta_{ij} w = \frac{w_{i-1,j} - 2w_{ij} + w_{i+1,j}}{\Delta x_i^2} + \frac{w_{i,j-1} - 2w_{ij} + w_{i,j+1}}{\Delta y_j^2}$$
$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1} \quad \text{para} \quad z = x, y$$

representando el laplaciano en su versión discreta. Las condiciones de frontera asociadas a este problema serían

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{w_{k,j} - w_{k-1,j}}{\Delta z_k} = 0 \quad j = 0, l_2 \\ w_y &= \frac{w_{k,j} - w_{k,j-1}}{\Delta z_k} = 0 \quad k = 0, l_1. \end{aligned}$$

Definamos

$$P_{ij} = (p_{ij}, h_{ij}, p_{i-1,j}, p_{i+1,j}, p_{i,j-1}, p_{i,j+1})$$

y

$$H_{ij} = ((h_{ij}, p_{ij}, h_{i-1,j}, h_{i+1,j}, h_{i,j-1}, h_{i,j+1}))$$

para hacer destacar la dependencia y aplicar el teorema 1.2.1. Por el argumento anterior notamos que

$$(P_{ij})_{w_{kr}} = (H_{ij})_{w_{kr}} = 0$$

para $0 < k < i-1$, $0 < r < j-i$ o $i+1 < k < l_1$, $j+1 < r < l_2$ y los casos correspondientes para w_{ij}, y ademas

$$\begin{aligned}
(P_{ij})_{p_{ij}} &= r(1-2p_{ij}) - \tfrac{h_{ij}}{(1+bp_{ij})^2} - 2d_p\left(\tfrac{1}{\Delta x_i^2} + \tfrac{1}{\Delta y_j^2}\right) \\
(P_{ij})_{h_{ij}} &= -\tfrac{ap_{ij}}{1+bp_{ij}} \\
(P_{ij})_{p_{i-1,j}} &= \tfrac{\partial P_{ij}}{\partial p_{i+1,j}} = \tfrac{d_p}{\Delta x_i^2} \\
(P_{ij})_{p_{i,j-1}} &= \tfrac{\partial P_{ij}}{\partial p_{i,j+1}} = \tfrac{d_p}{\Delta y_j^2} \\
(H_{ij})_{h_{ij}} &= \tfrac{ap_{ij}}{1+bp_{ij}} + m - fg\left(\tfrac{2h_{ij}}{(1+g^2h_{ij}^2)^2}\right) - 4d_h\left(\tfrac{1}{\Delta x_i^2} + \tfrac{1}{\Delta y_j^2}\right) \\
(H_{ij})_{p_{ij}} &= \tfrac{h_{ij}}{(1+bp_{ij})^2} \\
(H_{ij})_{h_{i-1,j}} &= (H_{ij})_{h_{i+1,j}} = \tfrac{d_h}{\Delta x_i^2} \\
(H_{ij})_{h_{i,j-1}} &= (H_{ij})_{h_{i,j+1}} = \tfrac{d_h}{\Delta y_j^2}.
\end{aligned}$$

Tenemos el vector (P_{ij}, H_{ij}) y deseamos calcular la diferencial con respecto a las variables p_{kr}, h_{kr} para $1 \leq k, r \leq n-1, m-1$, y ordenamos el orden de derivación con respecto a las variables de estado de la siguiente forma

$$z = (p_{11}, \ldots, p_{1m},\, h_{11}, \ldots, h_{1m}, \ldots, p_{n1},\, \ldots, p_{nm},\, h_{n1}, \ldots, h_{nm})$$

Para este caso 1.19 sería

$$\lambda'_{ij}(t) = \lambda_{ij}(t)\nabla(P_{ij}\, H_{ij})$$

donde λ_{ij} es un vector en dos dimensiones y $\nabla(P_{ij}, H_{ij})$ es la matriz

$$\left(\begin{array}{llllll} (P_{ij})_{p_{i-1,j}} & 0 & (P_{ij})_{p_{i,j-1}} & (P_{ij})_{p_{ij}} & (P_{ij})_{p_{i,j+1}} & 0 \\ 0 & (H_{ij})_{h_{i-1,j}} & 0 & (H_{ij})_{p_{ij}} & 0 & 0 \end{array} \right.$$
$$\left. \begin{array}{lllll} 0 & (P_{ij})_{h_{ij}} & 0 & (P_{ij})_{p_{i+1,j}} & 0 \\ (H_{ij})_{h_{i,j-1}} & (H_{ij})_{h_{ij}} & (H_{ij})_{h_{i,j+1}} & 0 & (H_{ij})_{h_{i+1,j}} \end{array} \right)$$

donde el 0 representa una o varias entradas de la matriz con este valor.

Tenemos que destacar que un caso muy particular de la submatriz anterior es cuando consideramos los valores cercanos a la frontera ($i = 2, n$, $1 \leq j \leq m$, $j = 2, m$, $1 \leq i \leq n$). Por las condiciones de frontera el laplaciano discreto tiene una reducción

$$\Delta_{ij} w = \begin{cases} \frac{w_{i\pm1,j} - w_{ij}}{\Delta x_i^2} + \frac{w_{i,j\pm1} - w_{ij}}{\Delta y_j^2} & \text{para} \quad i = 1, n-1,\ j = 1, m-1 \\ \frac{w_{i\pm1,j} - w_{ij}}{\Delta x_i^2} + \frac{w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1}}{\Delta y_j^2} & \text{para} \quad i = 1, n-1,\ 1 < j < m-1 \\ \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{\Delta x_i^2} + \frac{w_{i,j\pm1} - w_{ij}}{\Delta y_j^2} & \text{para} \quad 1 < i < n-1,\ j = 1, m-1 \end{cases},$$

donde entendemos el signo " $+$ " los caso $i, j = 1$ y " $-$ " los casos $i, j = n-1, m-1$. Podemos notar que el sistema de ecuaciones es lineal con coeficientes variables. Para un trabajo posterior sería interesante dar alguna aproximación de la solución, tratar de ver si un control óptimo existe, si éste se conserva óptimo y utilizar otros esquemas de discretización y compararlos.

3.4. Ejemplos más Elaborados

En esta sección deseamos presentar ejemplos en los cuales la teoría desarrollada no basta para dar los detalles. Se puede consultar en las referencias de donde tomamos estos ejemplos para ver la teoría correspondiente. Como las tecnicas utilizadas son bastante análogas a lo ya expuesto se presentan los ejemplos desarrollados o al menos el planteamiento de dichos problemas.

3.4.1. Opciones Reales

En esta sección deseamos construir un portafolio al cuál le podamos aplicar una valuación de riesgo neutral. Lo que nos interesa es el valor de mercado de una opción de cambio generalizada. Hay que destacar que no daremos la solución del problema, porque habría que deducir la fórmula de Itô para procesos más generales y habría que desarrollar la teo˚ıa de control correspondienmte con esta formulación. Damos cómo referencia [V02] de donde se tomo este ejemplo y donde se desarrolla parte de la teoría de control usada y por otro lado se puede consultar [Ap04] para la parte de teoría de integración estocástica.

Para poder plantear nuestro problema en el marco de control, vamos a necesitar que la opción de cambio generalizada tenga fecha fija de ejercicio $(T < \infty)$, después de la cuál carece de valor.

Sea $\mathscr{X}$ el espacio de acción tal que $\mathscr{X} = \mathscr{X}^d \cup \mathscr{X}^i$ donde $\mathscr{X}^d$ y $\mathscr{X}^i$ se definen de la siguiente manera:

1. $\mathscr{X}^d$ = el espacio de las variables que tienen un impacto directo en la dinámica.
2. $\mathscr{X}^i$ = l espacio de las variables que sólo pueden ser ajustadas indirectamente al cambio de la dinámica (i.e.aquellas que no aparecen explítamente en los coeficientes de (3.7)).

Sea U_t la variable de estado que es solución de la siguiente EDE:

$$dU_t = b(t, U_t)dt + \sigma(t, U_t)dB_t \quad \text{con } U_0 = u \tag{3.7}$$

y consideremos $\mathscr{X} = \mathscr{X}^i$.

Sea w una estrategia de control de impulso admisible i.e. una sucesión $w = \{(\theta_k, \xi_k) : k \in \mathbb{N}\}$ de tiempos de intervención e impulsos respectivamente con $Z_t \in \mathscr{X}$, $\xi_k = Z_{\theta_k}$ tal que

$$\begin{aligned} s \leq \theta_k \leq \theta_{k+1} \quad c.s.\,\forall k \in \mathbb{N}, \\ \xi_k \in \mathscr{X}, \end{aligned}$$

donde θ_k es un tiempo de paro con respecto a la filtración natural $\{\mathscr{F}_t\}$ generada por el m.b. $\{B_t\}$, ξ_k son medibles con respecto a $\sigma((X_{\theta_{k^-}}), (\xi_n), n < k)$. Finalmente

$$\mathbb{P}(\lim_{k\to\infty} \theta_k \leq T) = 0; \quad \forall T \geq 0$$

Llamaremos W al espacio de las estrategias de control admisibles w. Si aplicamos una estrategia de impulso, el estado de todo el sistema al tiempo t esta descrito por

$$X_t = \begin{pmatrix} t \\ U_t \\ \xi_k \end{pmatrix} \quad \text{si } t \in [\theta_j, \theta_{j+1}],\ j \in \{0, 1, \cdots, k\}$$

con $X_0 = x = (s, u, z)$, el tiempo de ejercicio $\theta_k = \sup\{\theta_j \mid \theta_j < T\}$.

Sean $f(t, U_t, Z_t)$ y $H(X_{t^-}, Z_t) > 0$ para $Z_{t^-} \neq Z_t$ las funciones de flujo de ganancia instantáneo y de cambio de costo respectivamente. Vamos a suponer que el mercado de activos garantizados es perfercto, es decir sin fricción y completo.

También supondremos la existencia de un activo libre de riesgo que su precio β sea de la forma

$$d\beta_t = r\beta_t dt \quad \text{con } \beta_0 > 0$$

y donde la tasa instantanea por unidad de tiempo r se supone constante. Por la dinámica de U_t nos da la oportunidad de comerciar en portafolios que replican completamente las ganancias netas de las opciones de cambio generalizadas. Sea $M = (M^1, \cdots, M^n)$ el proceso de precios de los "n"portafolios $(n \geq d)$ que es de la forma

$$dM_t = \mu_M(t, M_t)dt + \sigma_M(t, M_t)dB_t$$

con $\mu_M \in \mathbb{R}^n, \sigma_M \in \mathbb{R}^{n\times d}$.

Se comercia con activos garantizados de forma continua, sin fricción y sin costos de transacción. Se permiten ventas en corto de valores garantizados.

Sea $V(x)$ el valor del mercado de la opción de cambio generalizada. Suponemos que es estocásticamente C^2 en $\mathbb{R}^{n+1}$ con respecto a $Y_t = (t, U_t)$ con $z \in \mathscr{Z}$ fija, es decir si

$$\mathbb{E}^y \left[V(Y_{\theta'})|\mathscr{F}_\theta\right] = V(Y_\theta) + \mathbb{E}^y \left[\int_\theta^{\theta'} \mathscr{A}V(Y_t)\,\mathrm{d}t|\mathscr{F}_\theta\right]$$

para todo tiempo de paro $\theta \leq \theta' \leq \text{ínf}\{t > 0| \quad Y_t \notin \mathbb{R}^{n+1}\} < \infty$, Y_t proceso de difusión de Itô con

$$\mathscr{A} = \frac{\partial}{\partial s} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (\sigma\sigma^T)_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial U_i \partial U_j}.$$

Sea

$$\delta^i(t, U_t, M_t) = \left[\frac{\mu_M^i(t, M_t)}{M_t^i} - \frac{b^i(t, U_t)}{U_t^i} \right] \quad \text{para } i = 1, \cdots, n \tag{3.8}$$

la tasa de equilibrio de equilibrio de regreso shortfall.

Para replicar el mercado de la opción de cambio generalizada, consideremos Π el espacio de los procesos en $[0, T]$ localmente acotados, predecibles y con valores en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sea $(\pi^0(t), \pi^1(t)) = \pi(t) \in \Pi$, $t \in [0, T]$ una estrategia de comercio. Supongamos que las integrales

$$\int \pi_t^0 \, \mathrm{d}\beta_t \quad \text{y} \quad \int \pi_t^1 \, \mathrm{d}M_t$$

estan bien definidas en $[0, T]$. π_t^0 es la cantidad del activo sin riesgo al tiempo t y π_t^1 es el vector posición de los "n"portafolios replicados del vector M_t. Sea $f(X_t)$ el flujo de efectivo instantaneo al tiempo t generado por la opción de cambio generalizada. Este se puede ver cómo una tasa de consumo continua en el portafolio replicado.

Mientra se incurra en cambios de costo de cantidad $H(X_{\theta_j^-}, \xi_j)$ a cada tiempo de intervención θ_j, el proceso del portafolio replicado tiene que imitar esto dividend-like payments.

Entonces se obtiene que el valor de mercado de la opción de cambio generalizada que es replicada por el capital del portafolio del mercado es:

$$\begin{aligned} V(t, U_t, Z_t) &= V(t, M_t, Z_t) = \pi_t^0 \beta_t + \pi_t^1 M_t \\ &= \pi_0^0 \beta_0 + \pi_0^1 M_0 + \int_0^t \pi_s^0 \, \mathrm{d}\beta_s + \int_0^t \pi_s^1 \, \mathrm{d}M_s \\ &\quad - \int_0^t f(s, U_s, Z_s) \, \mathrm{d}s + \sum_{j:\theta_{\leq} t} H(\theta_j^-, \xi_j) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Los primeros dos sumandos son la dotación inicial y los ultimos dos representan el proceso acumulado de consumo que rige el retiro e infusión de fondo en el portafolio replicado del mercado.

Para cualquier estrategia de control de impulso admisible $w \in W$, por la formula de Itô generalizada se obtiene

$$\begin{aligned} V(t, U_t, Z_t) &= V(0, u, z) + \int_0^t \mathscr{A} V(X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \nabla V(X_s)\sigma(s, U_s)\,\mathrm{d}B_s \\ &\quad + \sum_{j:\theta_{\leq} t} V(\theta_j, U_{\theta_j}, Z_{\theta_j}) - V(\theta_j^-, U_{\theta_j^-}, Z_{\theta_{j-1}}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dado que en (3.9) para $t = 0$ el portafolio replicado es igual al valor de mercado de la opción de cambio generalizada

$$\pi_0^0 \beta_0 + \pi_0^1 M_0 = V(0, u, z), \tag{3.11}$$

y restando (3.9) y (3.10) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \mathscr{A} V(X_s) - \pi_s^0 r \beta_s - \pi_s^1 \mu_M(s, M_s) + f(X_s)\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \sum_{j:\theta_{\leq} t} V(\theta_j, U_{\theta_j}, Z_{\theta_j}) - V(\theta_j^-, U_{\theta_j^-}, Z_{\theta_{j-1}}) - H(\theta_j^-, \xi_j) \\ &\quad + \int_0^t \nabla V(X_s)\sigma(s, U_s) - \pi_s^1 \sigma_M(s, M_s)\,\mathrm{d}B_s \end{aligned} \tag{3.12}$$

La ecuación (3.12) se debe cumplir para toda $t \in [0, T], U_t \in \mathbb{R}^n$ y $Z_t \in \mathscr{Z}$. Por lo tanto cada sumando de los renglones correspondientes debe ser igual a cero. Lo verificamos de la siguiente manera:

1. Como M^i imita el riesgo de incertidumbre de U^i por construcción, debenos tener que

   $$\frac{(\sigma)_{ij}}{U^i} = \frac{(\sigma_M)_{ij}}{M^i} \quad \forall i = 1, \cdots, n, \quad j = 1, \cdots, d. \tag{3.13}$$

   Si sustituimos en el sumando del último renglon, entonces

   $$\nabla V(X_s)\sigma(s, U_s) - \pi_s^1 \frac{M_s}{U_s}\sigma(s, U_s) = 0 \tag{3.14}$$

donde se entiende que el vector $M_s/U_s = (M^1/U^1 \cdots , M^n/U^n)$. Resolviendo esta ecuación llegamos a que

$$\pi_s^1 = \frac{U_s}{M_s}\nabla V(s, U_s, Z_s) = \left[\frac{\partial V(X_s)}{\partial U^1}\frac{U^1}{M^1}, \cdots , \frac{\partial V(X_s)}{\partial U^n}\frac{U^n}{M^n}\right] \tag{3.15}$$

2. Si usamos el resultado anterior e igualamos a cero el sumando del primer renglon de (3.12) se tiene:

$$\mathscr{A}V(X_s) - \pi_s^0 r\beta_s - \frac{U_s}{M_s}\nabla V(s, U_s, Z_s)\mu_M(s, M_s) + f(X_s) = 0. \tag{3.16}$$

Entonces

$$\pi_s^0 = \frac{\mathscr{A}V(X_s) - \frac{U_s}{M_s}\nabla V(s, U_s, Z_s)\mu_M(s, M_s) + f(X_s)}{r\beta_s}. \tag{3.17}$$

Si usamos la definición de $\delta(s, U_s, M_s)$ en (3.8) y

$$\begin{aligned} V(X_t) &= \pi_0^0\beta_t + \pi_0^1 M_t \\ &= \frac{\mathscr{A}V(X_t) - \frac{U_t}{M_t}\nabla V(t, U_t, Z_t)\mu_M(t, M_t) + f(X_t)}{r\beta_t}\beta_t \\ &+ \frac{U_t}{M_t}\nabla V(t, U_t, Z_t)M_t \end{aligned} \tag{3.18}$$

obtenemos la ecuación fundamental de precios para el valor de mercado de la opción de cambio generalizada

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}(r - \delta^i)U^i\frac{\partial V}{\partial u_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma\sigma^T)_{i,j}\frac{\partial^2 V}{\partial U_i \partial U_j} - rV + f = 0. \tag{3.19}$$

3. Consideremos $w \in W$ en (3.12), entonces debería haber switcheo cuando no es óptimo switchear, por lo que

$$V(\theta^-, U_{\theta^-}, Z_{\theta^-}) \geq V(\theta, U_\theta, Z_\theta) - H(U_{\theta^-}, Z_\theta) = \mathscr{M}V. \tag{3.20}$$

Por lo tanto implica que la ecuación (3.12) sería menor o igual a cero y esto nos daría cómo consecuencia que la ecuación fundamental de precio sería una desigualdad

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}(r-\delta^i)U^i\frac{\partial V}{\partial u_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma\sigma^T)_{i,j}\frac{\partial^2 V}{\partial U_i \partial U_j} - rV + f \leq 0. \tag{3.21}$$

Pero cómo la estrategia reduce el valor de la opción de cambio generalizada, la firma podría hacerlo mejor invirtiendo en el portafolio replicado.

Por otro lado, si

$$\mathscr{M}V > V$$

para un tiempo θ de intervención, en un mercado perfecto otras firmas desearían obtener la opción de cambio generalizada y aplicar de forma inmediata un control de impulso. Pero cómo esta es una oportunidad de arbitrage

$$\mathscr{M}V_{\theta^-} - V_{\theta^-} > 0,$$

deberíamos tener para el valor de mercado de la opción de cambio generalizada que los impulsos de control se realizan de forma óptina. Entonces tenemos la condición

$$V(\theta_j, U_{\theta_j}, Z_{\theta_j}) - V(\theta_j^-, U_{\theta_j^-}, Z_{\theta_j^-}) - H(U_{\theta_j^-}, Z_{\theta_j}) = 0 \quad \forall j : \theta \leq T \tag{3.22}$$

nos da la igualdad en (3.12). Tambien tenemos que la ecuaci ón fundamental de precio en la región de continuación (la región en la cuál no es óptimo intervenir en el sistema)se sigue cumpliendo.

En conclusión, lo que hemos hecho hasta el momento con argumentos de mercado, es relacionar al problema de encontrar el valor de mercado de una opción de cambio generalizada con un problema de control de impulso via la ecuación fundamental de precio o en terminos de control, la ecuación de Hamilton Jacobi Bellman asociado al correspondiente problema de control.

3.4.2. Estimación de Parámetros

En esta sección plantearemos el problema de estimación de parametros cómo un problema de control óptimo. Para poder dar condiciones necesarias para la existencia de un control tendríamos que utilizar tecnicas discretas de control óptimo.

Sea el problema de Cauchy

$$
\begin{aligned}
y' &= f(t, y, u) \\
y(t_0) &= y_0,
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

y sea

$$T = \{(t_i, y_i) \in [t_0.t_f] \times \mathbb{R}^n \mid y_i = \phi(t_i; t_0, w, u) + \epsilon_i,\ i = 1, \cdots, m\}$$

una tabla de valores observados de la solución al problema de Cauchy. Nuestro problema, es poder encontrar una u tal que $g(u)$ sea mínimo con

$$
\begin{aligned}
g(u) &= \frac{1}{2}\|Y - F(u)\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \|y_i - \phi(t_i; t_0, y_0, u)\|^2_{W_i},
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

donde definimos F cómo

$$F(u) = \begin{bmatrix} \phi(t_1; t_0, y_0, u) \\ \vdots \\ \phi(t_m; t_0, y_0, u) \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \tag{3.25}$$

el primero representando la matíz de valores exactos al tiempo t_i y el segundo es la matíz de valores observados. Sea

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & w_{ij} & \vdots \\ w_{m1} & \cdots & w_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

y consideremos $W_i = (w_{i1}, \cdots, w_{in})$ y construimos la matríz cuadrada con diagonal W_i. La forma cuadrática asociada sería

$$\begin{aligned}
\|y_i - \phi(t_i; t_0, y_0, u)\|^2_{W_i} &= \\
\|\epsilon_i(t_i; t_0, y_0, u, y_i)\|^2_{W_i} &= (\epsilon_i^1, \cdots, \epsilon_i^n) \begin{pmatrix} w_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & w_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_i^1 \\ \vdots \\ \epsilon_i^n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{n} w_{ij} (\epsilon_i^j)^2
\end{aligned}$$

con $w_{ij} \geq 0$ que son los pesos o relevancia dada a cada error. $\phi(t; t_0, y_0, u)$ solución de (3.23). Podemos interpretar el problema (3.24) de la siguiente forma: intentamos estimar el error mínimo que podemos cometer en una medición con respecto a un fenómeno observable, tomando en cuenta que podemos mejorar la medición (via la función u).

3.4.3. Valuación de Opciones

En esta sección presentaremos la celebrada fórmula de Black & Scholes (1973) para la valuación de una opción europea.

Para este modelo consideraremos 2 activos, un con riesgo y el otro libre de riesgo. Sea P_0 el precio del activo libre de riesgo con

$$P_0(t) = p_0 \exp(rt) \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.27}$$

Y sea P_1 el precio del activo con riego dado por

$$dP_1(t) = rP_1(t)dt + \sigma P_1(t) dB_t \tag{3.28}$$

Para tener la opción de comprar una acción al tiempo T a precio q, el proceso de valuación sería

$$X_t = \mathbb{E}[\exp(-r(T-t))(P_1(T) - q)^+ | \mathscr{F}_t]; \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.29}$$

Para poder expresar la ecuación anterior en una forma más explícita, observemos que

$$v(x,t) = \begin{cases} x\Phi(w_+(T-t,x)) - q\exp(-r(t-t))\Phi(w_-)(T-t,x); & 0 \leq t \leq T,\ x \geq 0 \\ (x-q)^+ & t = T,\ x \geq 0 \end{cases}$$

con

$$w_\pm(t,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\left[\log\frac{x}{q} + t\left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)\right], \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp(\frac{-z^2}{2})\,\mathrm{d}z,$$

es solución al problema de valor inicial

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + rv = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rx\frac{\partial v}{\partial x}; \quad [0,T)\times(0,\infty)$$
$$v(T,x) = (x-q)^+; \quad x \geq 0$$

se puede demostrar que la función v admite una representación estocastica, y por la propiedad de Markov se puede ver que

$$X_t = v(t, P_1(t))$$

Observación 3.4.1 *Hay que señalar lo siguiente:*

1. *B_t es otro movimiento browniano con respecto a otra medida de probabilidad que es absolutamentecontinua con respecto a la medida que hemos trabajado.*

2. *La representación estocástica se refiere al equivalente a la fórmula de Feynman-Kac.*

Se puede consultar [Fo99] para más detales.

3.4.4. Otro Problema de Valuación

Este ejemplo fue tomado de [KnMeZe99]. Consideramos un modelo de inversión con una sola cómodidad, y suponiendo que existe un activo en comercio generando el correspondiente mercado.

Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado, que satisfaga las condiciones usuales de continuidad por la derecha y que contenga sus conjuntos $\mathbb{P}$-nulos. Denotamos a $\mathscr{T}$ a todos los $\mathscr{F}_t$-tiempos de paro, a $\mathscr{V}$ a la familia de procesos con variación finita y càdlàg, y a $\mathscr{C}$ al conjunto de los procesos progresivamente medibles U con valores en un subconjunto compacto $\mathscr{U}$ en $\mathbb{R}$.

Supondremos que el precio de la cómodidad es solución a la EDE

$$dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad X_0 = x > 0, \tag{3.30}$$

donde b, σ son constantes. Sea la tasa de producción un proceso en $\mathscr{C}$. Si para alguna $u \in \mathbb{U}$, $U_s = u$ para toda s en un intervalo $[t, t+\Delta t]$, entonces la inversión produce una cantidad de la cómodidad igual a $u\Delta t$ a lo largo de este tiempo. Supongamos que la tasa de producción puede cambiarse de forma instantanea sin incurrir en costo alguno en el conjunto de valores admisibles. Un tiempo de retiro es un tiempo de paro $\tau \in \mathscr{T}$. También supongamos que al tiempo de abandono, la inversión se descarta, y por tanto, ya no sirve invertir. El conjunto de estrategias admisibles Π es una familia de parejas (U, τ) tal que $U \in \mathscr{C}$ y $\tau \in \mathscr{T}$. Si el manejo permite una estrategia admisible $(U, \tau) \in \Pi$, la inversión tiene cómo función un pago acumulativo dado por

$$C_t^{U,\tau} = \int_0^{t\wedge\tau} \bar{h}(X_t, U_t)\mathrm{d}t + KI_{\tau\leq t}. \tag{3.31}$$

Supongamos que $K < 0$, y $-K$ se interpreta cómo el costo en el que incurrimos por abandonar la inversión. También supondremos que la función $\bar{h} :]0, \infty[\times \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ es semicontinua superiormente, y h se define cómo

$$h(x) = \max_{u\in U} \bar{h}(x, u), \tag{3.32}$$

entonces h es creciente y $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$.

Para una inversión como la antes descrita, la función de valor correspondiente sería

$$\begin{aligned} v_{(b,\sigma,\delta)}(x) &= \sup_{U,\tau\in\Pi} \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau} \exp(-\delta t)\bar{h}(X_t, U_t\mathrm{d}t) + \exp(-\delta\tau)K\right] \\ &= \sup_{U,\tau\in\Pi} \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \exp(-\delta t)\mathrm{d}C_t^{(U,\tau)}\right], \end{aligned}$$

donde δ es un parámetro dado. Supongamos que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \exp(-\delta t)\,|h(X_t)|\,\mathrm{d}t\right] < \infty \tag{3.33}$$

.

Nuestra meta es poder discutir bajo que condiciones v satisface una ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman que sería

$$-\frac{1}{2}\sigma x^2 w''(x) - bxw'(x) + \delta w(x) - h(x) \geq 0, \tag{3.34}$$

$$w(x) \geq K \tag{3.35}$$

$$\left[-\frac{1}{2}\sigma x^2 w''(x) - bxw'(x) + \delta w(x) - h(x)\right][w(x) - K] = 0, \tag{3.36}$$

con $x \in]0, \infty[$. Se puede demostrar que la ecuación anterior no admite una solución clásica, y tendremos que hacer nuestro análisis en un espacio de Sovolev $W^{2,p}_{loc}(]0.\infty[)$ para alguna $p \in [1, \infty]$. Para este caso, tambien podríamos demostrar que existe un representante continuo con derivada continua y $w'' \in L^p_{loc}$. Para ver detalle de estos resultados, se pueden consultar [Fo99], [LiLo01], [E02].

Teorema 3.4.1 *Supongamos que (3.33) se cumple y (3.34), (3.35),(3.36) tiene una solución* $w \in W^{2,p}_{loc}(]0,\infty[)$ *para alguna* $p \in]0,\infty[$*, tal que*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left[\exp(-\delta t) X_s w'(X_s)\right]^2 \mathrm{d}s\right] < \infty, \quad \forall t \geq 0,$$

y

$$\lim_{t\to\infty} \exp(-\delta t)\mathbb{E}\,|w(X_t)| = 0.$$

Entonces $v_{b,\sigma,\delta}(x) = w(x)$*, para toda* $x \in]0,\infty[$*, y la estrategía óptima esta dada por*

$$\tilde{U}_t = u(X_t), \qquad \tilde{\tau} = \inf\{t \geq 0 \,:\, X_t \in \mathscr{J}\},$$

donde u *satisface* $h(x) = \bar{h}(x, u(x))$ *y* $\mathscr{J} = \{x \in]0,\infty[:\, w(x) = K\}$.

Conclusiones

En este trabajo se expusieron los elementos básicos de la teoría de control desde dos perspectivas ya señaladas anteriormente, y podemos notar que el tema es muy extenso y complejo.

Los aspectos positivos que se cubren son los siguientes:

1. Los dos enfoques siguen las mismas ideas y se vinculan mediante los principios de verificación.

2. Es notable que el tema abarca muchas disciplinas y en cada una de ellas es una herramienta fundamental en la resolución de problemas de alta relevancia.

3. Aunque la parte técnica es de distinta naturaleza, los teoremas de existencia y unicidad, la fórmula de Dynkin, la fórmula de Itô, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, motivan a trabajar indistintamente en problemas deterministas y estocásticos, dando una visión más amplia en el momento de tratar de abordar un problema.

Hay que mencionar que el nombre de la ecuación HJB no es coincidencia pues hay toda una teoría dedicada al estudio de este tipo de ecuaciones. Este punto es positivo por lo antes mencionado y negativo porque no pudimos profundizar en ésta.

Por otro lado, el trabajo tiene desventajas y son las siguientes:

1. Por abarcar dos enfoques, no pudimos revisar aspectos muy relevantes en cada uno de estos.

2. La dificultad de los problemas en muchos casos, suele ser alta y cómo en toda teoría, puede que no se tengan disponibles herramientas que puedan ayudar a atacar el problema en cuestión.

3. Por el punto anterior, no pudimos trabajar algunos ejemplos de interes a fondo.

Bibliografía

[Ap04] Applebaum, David : *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Cambridge studies in advanced Mathematics; 93. Cambride University Press, Cambridge, 2004.

[Ca93] Carmo, Manfredo P. do: *Riemannian geometry*, Mathemathics: Theory & Applications, Birkhäuser, Boston, Mass., 1993.

[E02] Evans, Lawrence C. : *Partial Differencial Equations* Graduated Studies in Mathemathics, Vol.19,AMS, Providence, Rhode Island, 2002.

[FR75] Fleming, Wendell H., Rishel, Raymond W. : *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Applications of mathematics; 1. Springer-Verlag, New York, 1975

[FS92] Fleming, Wendell H., Soner, H. Mete : *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions* , Applications of mathematics; 25. Springer-Verlag, New York, 1992.

[Fo99] Folland, Gerald B. : *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, New York 2da edition,inc.1999.

[I02] Ize, Jorge : *Cálculo de variaciones*, Serie FENOMEC, 2002.

[LiLo01] Lieb, Elliot H., Loss, Michael: *Analysis*, Graduated Studies in Mathemathics, Vol.14, AMS , Providence, Rhode Island, 2001.

[KSh91] Kamien, Morton I., Schwartz, Nancy L. : *Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management* , Advanced textbooks in economics; 31. North-Holland, Amsterdam-New York, second edition, 1991.

[KS91] Karatzas, Ioannis, Shreve, Steven E. :*Brownian Motion and Stochastic Calculus*,volume 113 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[KnMeZe99] Knudsen, Thomas S., Meister, Bernhard, Zervos, Mihail : *On the relationship of the dynamic programming approach and the contingent claim approach to asset valuation*, Finance and Stochastics; No.3, pag. 433-449, 1999, Springer- Verlag 1999.

[MPTML02] Medvinsky, Alexander B., Petrovskii, Sergei V., Tikhonova, Irene A., Malchow, Horst, Li, Bai-Lian : *Spatiotemporal Complexity of Plankton and Fish Dynamics* , SIAM Review; Vol. 44, No.3, pp. 311-370, 2002.

[Øk00] Øksendal, Bernt : *Stochastic Differential Equations*, Universitext. Springer-Verlag, New York, fifth edition, 2000.

[V02] Vollert, Alexander : *A Stochastic Framework for Real Options in Strategic Valuation* , Birkhäuser, Germany, 2002.