



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**REPRESENTACIONES DE GRUPOS EN  
HOMOLOGÍAS DE  
COMPLEJOS SIMPLICIALES**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICO**

**P R E S E N T A**

**DANIEL ROBLES LÓPEZ**



Tutor: Dr. Rodolfo San Agustín Chi  
Asesor: Dr. Rafael Villarroel Flores

2006



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Robles

López

Daniel

+52 (55) 55 37 92 43

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

095189239

---

2. Datos del tutor

Dr.

Rodolfo

San Agustín

Chi

---

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Rafael

Villarroel

Flores

---

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Carlos

Prieto

De Castro

---

4. Datos del sinodal 3

Dr.

Francisco

Larrión

Riveroll

---

6. Datos del sinodal 4

Dr.

José Luís

Cisneros

Molina

---

7. Datos del trabajo escrito

Representaciones de grupos en homología de complejos simpliciales

64p

2006

---

# Agradecimientos

A mi madre, a mi padre y a mis hermanas; he sido afortunado en contar con ustedes. A todas aquellas personas que en algún momento me han apoyado. A mis amigos y compañeros, gracias por lo que hemos compartido. Agradezco toda su atención respeto y generosidad.

A mis profesores, los que me guiaron con su conocimiento del mundo y de la matemática, permitiéndome así tener una perspectiva propia. A Rafael Villarroel, mi asesor de tesis.

A la UNAM por haberme abierto sus puertas ¡Por mi raza hablará el espíritu!

EL DÍA MÁS IRREMEDIABLEMENTE PERDIDO  
ES AQUEL EN QUE UNO NO SE RÍE  
NICOLÁS CHAMFORT

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Representaciones . . . . .	1
1.2. Álgebras y módulos sobre álgebras . . . . .	3
1.3. Álgebra de grupo y $\mathbb{F}G$ -módulos . . . . .	5
1.3.1. $G$ -módulos de permutaciones . . . . .	7
1.4. Caracteres . . . . .	7
1.5. Producto interno de caracteres y condiciones de ortogonalidad . . . . .	10
<b>2. Operaciones de <math>G</math>-módulos</b>	<b>13</b>
2.1. Producto tensorial ( $V \otimes W$ ) . . . . .	13
2.1.1. Carácter del producto tensorial . . . . .	14
2.2. Potencia simétrica ( $Sym^n V$ ) . . . . .	17
2.3. Potencia exterior ( $\wedge^n V$ ) . . . . .	18
2.4. Restricción a un subgrupo ( $V \downarrow_H^G$ ) . . . . .	18
2.4.1. Carácter de la restricción a un subgrupo . . . . .	18
2.5. Módulo inducido ( $W \uparrow_H^G$ ) . . . . .	19

2.5.1. Carácter del módulo inducido . . . . .	20
<b>3. Tablas de caracteres de grupos de orden menor</b>	<b>21</b>
3.1. Tablas de caracteres de $C_2$ y $S_3$ . . . . .	21
3.2. Tabla de caracteres de $S_4$ . . . . .	22
3.3. Tablas de caracteres de $C_2 \times C_2$ y de $A_4$ . . . . .	24
3.4. Tabla de caracteres de $D_4$ . . . . .	25
3.5. $\mathbb{C}X^n$ como suma de módulos simples . . . . .	27
<b>4. Particiones y grupos simétricos</b>	<b>31</b>
4.1. Particiones y diagramas de Young . . . . .	31
4.2. $\lambda$ -tableros de Young . . . . .	32
4.3. $\lambda$ -tabloides . . . . .	34
4.4. Módulos de Specht . . . . .	34
<b>5. Homología de complejos simpliciales</b>	<b>43</b>
5.1. Complejos simpliciales . . . . .	43
5.2. Homología simplicial . . . . .	44
5.3. Aplicación: complejos de apareamiento . . . . .	46
<b>A. Acción de <math>S_4</math> en las bases de los módulos <math>V_4</math>, <math>V'_4</math> y <math>W</math></b>	<b>59</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>63</b>

# Índice de figuras

1.1. Tabla de caracteres. . . . .	12
2.1. Tabla de caracteres de $G \times H$ . . . . .	16
2.2. Tabla de Caracteres de $S_3 \times C_2$ . . . . .	17
3.1. Tabla de Caracteres de $C_2$ . . . . .	21
3.2. Tabla de Caracteres de $S_3$ . . . . .	22
3.3. Primera tabla de caracteres parcial de $S_4$ . . . . .	23
3.4. Segunda tabla de caracteres parcial de $S_4$ . . . . .	23
3.5. Tercera tabla de caracteres parcial de $S_4$ . . . . .	23
3.6. Tabla de Caracteres de $S_4$ . . . . .	24
3.7. Tabla de Caracteres de $C_2 \times C_2$ . . . . .	24
3.8. Tabla de Caracteres de $A_4$ . . . . .	25
3.9. Tabla de Caracteres del grupo de Cayley. . . . .	26
3.10. Tabla de Caracteres parcial de $D_4$ . . . . .	26
3.11. Tabla de Caracteres de $D_4$ . . . . .	27
4.1. Diagramas de Young bajo acción de $S_n$ con $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ . . . . .	33
4.2. Tableros de Young. . . . .	33

---

4.3.	Tableros estándar correspondientes a las particiones de $S_4$ . . . . .	38
4.4.	Acción de $S_4$ sobre las bases de $V_4$ , $V'_4$ y $W$ . . . . .	39
4.5.	Tableros estándar correspondientes a las particiones de $S_5$ . . . . .	41
5.1.	Complejo de apareamiento $M_4$ . . . . .	47
5.2.	Tabla de Caracteres de $S_4$ y caracteres de $C_0(M_4)$ y $C_1(M_4)$ . . . . .	48
5.3.	Complejo de apareamiento $M_5$ . . . . .	50
5.4.	Tabla de Caracteres de $S_5$ y caracteres de $C_0(M_5)$ y $C_1(M_5)$ . . . . .	52
5.5.	Caracteres de $S_5$ restringidos a $S_3 \times C_2$ y carácter de $V_0$ . . . . .	52
5.6.	Caracteres de $S_5$ restringidos a $D_4$ y carácter de $V_1$ . . . . .	53

# Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo analizar la estructura de  $G$ -módulos de homología de complejos simpliciales en los cuales actúa un grupo  $G$  finito. Con ello en mente, se muestra en primera instancia un procedimiento para conocer los  $G$ -módulos de dimensión finita, dotándonos de una herramienta para obtener información y realizar así una clasificación de ellos. Siendo importante el uso de los módulos simples.

En el capítulo 1 se revisa la teoría básica de representaciones de grupos; siendo lo más relevante el teorema de Maschke, el lema de Schur y las propiedades de caracteres. Todo ello forma la base para los capítulos siguientes. A partir de tales conceptos se analizarán las propiedades de módulos de grupos.

Posteriormente se definirán operaciones sobre módulos. El capítulo 2 presenta la forma de obtener módulos construidos a partir de módulos ya conocidos. Estos son: el producto tensorial de dos módulos, la potencia simétrica y la potencia exterior de un módulo; todos ellos reciben una acción natural a partir de la acción de  $V$ . Después se muestran algunas tablas de caracteres que nos ayudarán a construir los ejemplos para los capítulos 4 y 5.

Para lograr construir homología en base a representaciones de grupos se utilizarán los conceptos del capítulo 4; en el cual se observan proposiciones importantes sobre la acción de los grupos simétricos sobre estructuras llamadas particiones. Se podrá con ello construir a los módulos simples de tales grupos para finalmente observar cómo se conforma la homología de un complejo simplicial. Todo ello como resultado de lo mostrado en el capítulo 1.

Habiendo definido lo que es un complejo simplicial, es sencillo definir su homología en base a sus cadenas elementales. Aplicando los resultados del capítulo 4 podemos descomponer dicha homología en los módulos simples, definidos en la primera parte de éste trabajo.

Para finalizar, en el capítulo 5 se presentan ejemplos sencillos en los cuales se aprecia la finalidad de las herramientas mostradas a lo largo de todas las secciones.

En pocas palabras, para construir la homología de un complejo simplicial se siguen los siguientes pasos:

- Se considera un  $S_n$  conjunto  $X$ .
- En base a las representaciones de grupos y dada una base, se definen los caracteres de  $S_n$  y se toman los caracteres simples.
- Consideramos los módulos simples correspondientes a los caracteres simples. Existen tantos como las clases de conjugación en  $S_n$ . Una forma de ayudarnos a encontrar los caracteres simples de un grupo es construyendo su tabla de caracteres.
- Dado que todo módulo se puede expresar como suma directa de módulos simples, con la ayuda del producto interno de caracteres y las relaciones de ortogonalidad de los caracteres simples se determina la composición de dicha expresión (salvo isomorfismo). El teorema de reciprocidad de Frobenius también nos ayuda a identificar submódulos componentes de un módulo.
- Considerando la teoría de diagramas y tableros de Young que se observa en el Capítulo 4, se construyen los módulos simples para  $S_n$  (Módulos de Specht).
- Dado un complejo simplicial bajo la acción de  $S_n$ , se toma en cuenta el complejo simplicial orientado correspondiente y se toma el espacio vectorial (módulo) que se obtiene de sus cadenas elementales, se definen morfismos frontera entre ellos y se construye la homología simplicial.
- Se determina cuál es la homología (reducida) en términos de los módulos simples de  $S_n$  con la ayuda del cuarto punto en esta lista.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Representaciones

En adelante consideraremos a  $G$  un grupo finito,  $\mathbb{F}$  un campo y  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$  de dimensión finita  $n$ . Denotaremos al grupo de las transformaciones lineales invertibles de  $V$  en  $V$  como  $GL(V)$ , si  $V = \mathbb{F}^n$ , al grupo lo escribiremos como  $GL(n, \mathbb{F})$ . Si tenemos una transformación lineal  $T \in GL(V)$ , ésta tiene una matriz asociada que denotaremos como  $M$ .

**Definición 1.1.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ , llamamos al morfismo  $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{F})$  una *representación de  $G$  sobre  $\mathbb{F}$* . Decimos que el *grado* de  $\rho$  es el entero  $n$  (denotado como  $\text{gr } \rho = n$ ). O más generalmente, si  $V$  es un  $\mathbb{F}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$ , un morfismo  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  es una representación de  $G$  de grado  $n$ .

A una representación le llamamos *fiel* si ésta es inyectiva.

*Notación 1.2.* En el contexto de transformaciones lineales, denotaremos a  $\rho(g)$  simplemente como  $g$  siempre y cuando no haya confusión entre los elementos del grupo y las representaciones de ellos.

Consideremos a la transformación identidad  $\text{Id}_{GL(V)}$  de un espacio vectorial. Llamamos *representación trivial* al morfismo  $G \rightarrow \text{Id}_{GL(V)}$ , que manda todo elemento de  $G$  a  $\text{Id}_{GL(V)}$ .

Un morfismo  $\varphi$  entre dos representaciones de  $G$ ,  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  y  $\sigma : G \rightarrow GL(W)$ , es una transformación lineal  $\varphi : V \rightarrow W$  tal que  $\varphi g = g\varphi$

para todo  $g \in G$ . Es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta para todo  $g \in G$ .

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W. \end{array}$$

Si tenemos que  $\rho : G \rightarrow GL(m, \mathbb{F})$  y  $\sigma : G \rightarrow GL(n, \mathbb{F})$  son representaciones de  $G$  sobre  $\mathbb{F}$ , decimos que *la representación  $\rho$  es equivalente a  $\sigma$*  si  $n = m$  y existe una matriz  $T$  de  $n \times n$  tal que para toda  $g \in G$ ,

$$\sigma g = T^{-1}(\rho g)T.$$

Con lo cual es sencillo observar que la equivalencia entre representaciones es una *relación de equivalencia*.

A continuación se dan algunas ideas interesantes por sí mismas. Éstas son resultados importantes que se analizarán posteriormente en la sección 1.2 y parte del capítulo 2. Ello nos proveerá de un método para la construcción de módulos de una manera sencilla a partir de estructuras simples ya conocidas. Denotaremos al espacio vectorial trivial como  $\mathbf{0} = \{0\}$ .

Sea  $U$  subespacio vectorial de  $V$  que es invariante bajo  $\rho g$  para toda  $g \in G$ , entonces el morfismo  $\hat{\rho} : G \rightarrow GL(U)$  es una *subrepresentación* de  $\rho$ ; o bien,  $U$  *admite a  $G$*  o  $U$  es  *$G$ -invariante*.

**Definición 1.3** (Representación simple). Si  $V \neq \mathbf{0}$  y los únicos subespacios  $G$ -invariantes de  $V$  son  $\mathbf{0}$  y  $V$ , entonces se dice que  $\rho$  es representación simple ([Col], página 3).

Si tenemos a los espacios vectoriales  $V$  y  $W$  con  $\dim V = k$  y  $\dim W = l$ ,  $g \in G$  y definimos  $T_V : G \rightarrow GL(V)$  y  $T_W : G \rightarrow GL(W)$  de tal forma que  $T_V(g) \in GL(V)$  y  $T_W(g) \in GL(W)$  tienen asociadas a las matrices

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & r_{kk} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1l} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{l1} & s_{l2} & \dots & s_{ll} \end{pmatrix}$$

respectivamente, definimos la *suma directa* de la transformación  $T_V(g)$  con la transformación  $T_W(g)$  como la transformación  $T_V(g) \oplus T_W(g) \in GL(V \oplus W)$  que tiene

asociada a la matriz

$$R \oplus S = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & r_{kk} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1l} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & s_{l1} & s_{l2} & \dots & s_{ll} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Ésta operación es importante, pues se utilizará posteriormente para la suma directa de módulos

## 1.2. Álgebras y módulos sobre álgebras

Ligado a una representación, tenemos el concepto de módulo. Dado un grupo, veremos la conexión que existe entre un módulo y la representación de él.

**Definición 1.5.** Sean  $\mathbb{F}$  un campo,  $A$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$ , que a su vez es un anillo con uno distinto de cero; de tal forma que la suma en  $A$  como espacio vectorial coincida con la suma de  $A$  como anillo. Si además  $\forall \gamma \in \mathbb{F}$ ,  $a, b \in A$  tenemos que

$$(\gamma a)b = \gamma(ab) = a(\gamma b)$$

entonces decimos que  $A$  es una  $\mathbb{F}$ -álgebra.

*Ejemplo 1.6.* Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$ . El espacio  $L(V)$  de las transformaciones lineales de  $V$  en  $V$  forman una  $\mathbb{F}$ -álgebra con las operaciones usuales en  $L(V)$ .  $\square$

Si  $A$  y  $B$  son álgebras y  $T : A \rightarrow B$  es una transformación lineal tal que preserva el producto del álgebra y  $T(1_A) = 1_B$  (si  $1_A$  y  $1_B$  son las unidades respectivas de los anillos), decimos que  $T$  es un *morfismo de álgebras*.

Nótese que los teoremas de isomorfismo de anillos también son válidos si se aplican para el caso de álgebras.

Si  $V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$ , a un morfismo de anillos con uno  $\rho : A \rightarrow L(V)$  le llamamos *representación* del álgebra  $A$  en  $V$  sobre  $\mathbb{F}$ .

Si  $\rho : A \rightarrow L(V)$  es una representación del álgebra  $A$ , entonces tenemos una acción de  $A$  en  $V$  dada por  $av = \rho(a)(v)$ , que tiene las siguientes propiedades si  $a, b \in A, v, w \in V, \gamma \in \mathbb{F}$ :

- $(a + b)v = av + bv$
- $a(v + w) = av + aw$
- $a(bv) = (ab)v$
- $1_A v = v$
- $a(\gamma v) = \gamma(av) = (\gamma a)v$ .

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$  y  $A$  una  $\mathbb{F}$ -álgebra. Decimos que  $V$  es un *módulo* sobre  $A$  si existe una función  $\phi : A \times V \rightarrow V$ , de tal forma que se denota a  $\phi(a, v)$  simplemente como  $av$  y se tienen las propiedades descritas anteriormente —propiedades de módulos—. En el caso del párrafo anterior,  $V$  es un  $A$ -módulo. Ésta notación es utilizada a menos que la expresión requiera ser mas específica.

De ésta forma se observa que a cualquier representación de  $A$  le corresponde un  $A$ -módulo y viceversa; si  $V$  es un  $A$ -módulo —por una acción dada—, le corresponde una representación  $\rho : A \rightarrow L(V)$ . Diremos entonces que  $\rho$  y  $V$  están asociados. De ésta forma  $\phi$  es inducida por la acción de  $A$  y  $\rho$  es inducida por la definición de  $\phi$ .

Un  $A$ -módulo fiel  $V$  es aquel en el que el elemento  $1_A \in A$  es el único elemento  $a \in A$  para el cual  $av = v \forall v \in V$  ([Jam], página 44); y en éste caso vemos a  $A$  como un grupo de matrices.

*Ejemplo 1.7.* Sea  $A$  un álgebra,  $A$  actúa sobre sí misma bajo la acción de la multiplicación. De ésta forma  $A$  es a la vez un  $A$ -módulo, y lo denotamos como  ${}_A A$  para diferenciarlo de su definición propia de álgebra. A dicho módulo le llamamos el *módulo regular de  $A$* . □

A un subespacio  $U \subseteq V$  que es invariante bajo el álgebra  $A$  lo llamamos *submódulo* de  $V$ , al cual se le relaciona una subrepresentación de la representación asociada a  $V$ .

Un  $\mathbb{F}$ -álgebra simple  $A$  es tal que tiene como únicos *ideales* a  $A$  y  $\mathbf{0}$ .

**Definición 1.8.** Sea  $A$  un álgebra,  $V$  un  $A$ -módulo no trivial. Decimos que  $V$  es un módulo simple (o *irreducible*) si tiene como únicos submódulos a  $V$  y  $\mathbf{0}$ ; a su

representación también se le denominará *simple*.  $V$  es un módulo semisimple si  $V$  es suma directa de módulos simples.

### 1.3. Álgebra de grupo y $\mathbb{F}G$ -módulos

A partir de ahora, con la finalidad de analizar algunas propiedades de  $G$ , consideraremos módulos sobre un caso particular de álgebra que se construye a partir de  $G$ : el *álgebra de grupo*. Ésta tiene cualidades tomadas a partir de la definición de los anillos de grupo, pues es un caso particular de ellos.

**Definición 1.9** (Anillo de grupo). Sea  $G$  un grupo y sea  $R$  un anillo conmutativo con unidad. Entonces el *anillo de grupo*  $RG$  consiste en el conjunto de sumas formales

$$\sum_{g \in G} a_g g, \quad (a_g \in R) \quad (1.10)$$

junto con las operaciones suma y producto de éstos elementos, siguiendo las propiedades del anillo. Para más detalles sobre éstas operaciones, véanse [Col], página 6 y [Jam], página 55.

De ésta manera, si  $R$  es un campo  $\mathbb{F}$ , entonces  $\mathbb{F}G$  tiene la estructura de un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$ .  $\mathbb{F}G$  cumple las propiedades de módulos, además de las propiedades de la proposición 6.4 de [Jam] para cualesquiera  $r, s, t \in \mathbb{F}G$ . Llamamos entonces a  $\mathbb{F}G$  el *álgebra de grupo sobre  $\mathbb{F}$* .

Ahora podemos construir módulos sobre el álgebra de grupo — $\mathbb{F}G$ -módulos— y tenemos las siguientes proposiciones.

**Teorema 1.11** (Maschke; [Col], teorema 4). *Sea  $G$  un grupo finito,  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ , y sea  $V$  un  $\mathbb{F}G$ -módulo. Si  $U$  es  $\mathbb{F}G$ -submódulo de  $V$ , entonces existe un  $\mathbb{F}G$ -submódulo  $W$  de  $V$  tal que*

$$V = U \oplus W.$$

□

**Corolario 1.12.** *Para cualquier  $\mathbb{F}G$ -módulo  $V$  existen  $\mathbb{F}G$ -submódulos simples  $U_1, U_2, \dots, U_k$  tales que*

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k.$$

*Demostración.* Dado que la dimensión de  $V$  es finita, el resultado se obtiene al aplicar el teorema de Maschke de manera inductiva.  $\square$

Los siguientes enunciados son de gran importancia, pues nos ayudan a comprender a los módulos comparados con sus submódulos simples.

**Lema 1.13** (Schur). *Sea  $A$  una  $\mathbb{C}$ -álgebra:*

1. *Si  $V$  y  $W$  son  $A$ -módulos simples y  $\varphi : V \rightarrow W$  es un homomorfismo de  $A$ -módulos, entonces  $\varphi$  es un isomorfismo ó  $\varphi v = 0 \forall v \in V$ .*
2. *Si  $V$  es  $A$ -módulo simple  $\varphi : V \rightarrow V$  es un homomorfismo de  $A$ -módulos, entonces  $\varphi$  es un múltiplo escalar del endomorfismo identidad  $\text{Id}_V$*

([Fu2], página 7, [Jam], página 78).  $\square$

**Teorema 1.14.** *Si tenemos que  $U$  es  $\mathbb{F}G$ -submódulo simple de  $V$  y*

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k \quad (1.15)$$

*es una expresión de  $V$  en suma directa de  $\mathbb{F}G$ -submódulos simples de  $V$  —como resultado del teorema de Mascke—, entonces  $U \cong U_i$  para algún  $i \in \{1, \dots, k\}$  ([Fu2], página 7).  $\square$*

*Notación 1.16.* Si  $U$  es un  $A$ -módulo, denotaremos al espacio que consiste en  $k$  sumas directas de  $U$  como

$$\bigoplus_{i=1}^k U = kU.$$

*Notación 1.17.* Denotaremos con  $S(A)$  a la familia de clases de módulos simples bajo isomorfismo y para cualquier grupo  $G$  definimos

$$Z(H) = \{h \in H \mid hg = gh \text{ para toda } g \in H\}.$$

En particular si  $G = A$ , un álgebra, tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 1.18.**  $\#S(A) = \dim Z(A)$   $\square$

*Notación 1.19.* Para el objetivo del presente trabajo sólo consideraremos el caso en el que  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  de éste punto en adelante; aunque algunas propiedades y definiciones (como las del capítulo 2) son validas para ciertos campos distintos a  $\mathbb{C}$ . Habiendo convenido dicha situación, ahora nos referiremos a los  $\mathbb{C}G$ -módulos simplemente como  $G$ -módulos.

### 1.3.1. $G$ -módulos de permutaciones

Consideremos ahora el caso en que  $G$  es un subgrupo de  $S_n$ , el grupo de permutaciones del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Sea  $V$  un espacio  $n$ -dimensional sobre el campo  $\mathbb{C}$ , cuya base es  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  y defínase para  $i \in \{1, \dots, n\}$  y para cada permutación  $g \in G$

$$gv_i = v_{gi}.$$

Entonces  $\forall g \in G$  se satisface que  $gv_i \in V$  y  $1v_i = v_i$ , además de las propiedades de  $G$ -módulos. Llamamos entonces a  $V$  un *módulo de permutaciones para  $G$*  sobre  $\mathbb{C}$  y decimos que  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  es la *base natural de  $V$* . De ésta manera  $\beta$  es un  $G$ -conjunto. En general si tomamos un  $G$ -conjunto  $X$ , denotamos como  $\mathbb{C}X$  al espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$  que tiene como base a  $X$ .

En éste caso observemos que la matriz  $[g]_\beta$  tiene una única entrada en cada renglón o en cada columna; y esta entrada es 1 para toda  $g \in G$ . Tales matrices se llaman *matrices de permutación*, y no son más que las matrices asociadas a las transformaciones elementales de cambio de renglones para matrices de  $n \times n$ .

*Ejemplo 1.20.* Sea  $G = S_n$ ,  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  como la base del espacio vectorial —expansión lineal de  $X$ —  $\mathbb{C}X$ . □

*Notación 1.21.* Para un espacio vectorial  $V$ , denotaremos a  $g(v)$  simplemente como  $gv \forall g \in G, v \in V$ .

Supongamos que  $V = \mathbb{C}X$  es un  $G$ -módulo de permutaciones. Es decir,  $X$  es base de  $V$ . Entonces —por construcción—  $\rho(g)$  tiene en su diagonal principal tantas entradas con el escalar 1 como puntos fijos de  $g$  hay en  $X$ .

## 1.4. Caracteres

La teoría de caracteres nos ayudará ahora a construir  $G$ -módulos a partir de  $G$ -módulos simples y también para diferenciar entre ellos. A continuación discutiremos algunas propiedades para obtener tales resultados.

Comenzamos ésta sección considerando una función  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$  que toma un valor constante para cada *clase de conjugación* de  $G$  la llamamos *función de clase*, es decir; una función de clase  $\varphi$  es tal que  $\varphi(g) = \varphi(hgh^{-1})$  para cualesquiera  $g, h \in G$ . El conjunto de funciones de clase es un subespacio vectorial del espacio de funciones de  $G$  en  $\mathbb{C}$ .

Podemos definir el producto interno de dos funciones de clase  $\psi$  y  $\theta$  como

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g) \overline{\theta(g)}$$

Considérense a la representación  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ ,  $\beta$  una base de el espacio vectorial  $V$ ,  $[g]_\beta$  como la matriz correspondiente a  $\rho g$  con base  $\beta$  para toda  $g \in G$ .

**Definición 1.22.** Sea  $g \in G$  y  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  una representación de  $G$ . Definimos el carácter de  $g$ , denotado por  $\chi(g)$  como la traza de  $[g]_\beta$ . Es decir,  $\chi(g) := \text{tr}(\rho(g))$ .

Tenemos en general que a cada  $G$ -módulo  $V$  le corresponde un carácter que denotaremos como  $\chi_V$ . Sea  $n$  la dimensión de  $V$ . Diremos que el grado de  $\chi_V$  es  $n$  ([Jam], definición 13.7). Si  $V$  es simple, decimos que  $\chi_V$  es un carácter simple.

*Observación 1.23.* Un carácter es en particular una función de clase. Más aún, se puede demostrar que una función de clase  $\theta : G \rightarrow \mathbb{C}$  es un carácter de  $G$  si y sólo si  $\theta \neq 0$  y  $\langle \theta, \chi \rangle$  es un entero no negativo para todo carácter simple de  $G$ .

Enlistamos algunas propiedades de la traza que utilizaremos después para cualesquiera  $A, B, T \in GL(V)$ :

- $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- $\text{tr}(T^{-1}AT) = \text{tr}(A)$ .

Utilizando resultados de Álgebra lineal  $\chi$  es invariante bajo cambio de base, dado que la traza es invariante bajo cambio de base. Si tenemos que  $\beta'$  es otra base para  $V$ :

$$[g]_{\beta'} = T^{-1}[g]_\beta T \quad \forall g \in G. \quad (1.24)$$

De ésta manera las representaciones equivalentes tienen el mismo carácter ([Jam], página 119). Al carácter del  $G$ -módulo regular lo llamamos el *carácter regular* de  $G$  y lo denotamos como  $\chi_{reg}$ .

Para toda  $g \in G$ , denotamos a  $\overline{\chi(g)}$  como  $\bar{\chi}(g)$ . Además, de las propiedades de la traza tenemos que:

- $\chi(1_G) = \dim(V)$ ,
- $\chi(g)$  es una suma de raíces  $m$ -ésimas de la unidad para algún  $m \in \mathbb{N}$ ,
- $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ ,
- $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$ ,
- $\chi(g) \in \mathbb{R}$  si y sólo si  $g$  es conjugado de  $g^{-1}$ ,
- Si  $V$  y  $W$  son isomorfos, entonces  $\chi_V = \chi_W$ .

Además, si  $\bar{\rho}$  es la representación definida por  $\bar{\rho}(g) = \overline{\rho(g)}$ , donde  $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ , tenemos (por [Jam], 13.15) que

$$\overline{\chi(g)} := \overline{\text{tr}(\rho(g))} = \text{tr}(\overline{\rho(g)}) = \text{tr}(\bar{\rho}(g)) \quad \forall g \in G.$$

Sabemos que  $\overline{\text{tr}(M)} := \text{tr}(\overline{M}) = \text{tr}(\overline{M})$ , donde  $\overline{M}$  denota a la matriz *transpuesta conjugada* de  $M$  ([Fri], páginas 317, 339-341). Luego, por la definición de carácter y las propiedades anteriores,  $\overline{\chi}$  es también un carácter de  $G$ . Además si  $\chi$  es carácter simple de  $G$ , entonces  $\overline{\chi}$  también lo es.

Sea  $V$  un  $G$ -módulo tal que se expresa como (1.15). Entonces se tiene como corolario de la primera propiedad de trazas que el carácter de  $V$  es la suma de los caracteres de los  $G$ -módulos  $U_1, \dots, U_k$  ([Jam], 13.18).

Sean

$$\{U_i\}_{i=1}^k, \quad \{\chi_i\}_{i=1}^k \tag{1.25}$$

una familia completa de  $G$ -módulos simples no isomorfos entre sí —dado el lema 1.13 de Schur— y los caracteres correspondientes respectivamente. El siguiente resultado es importante para los cálculos que se harán posteriormente.

**Proposición 1.26.**

$$\sum_{i=1}^k \dim(U_i)^2 = \sum_{i=1}^k \chi_i(1_G)^2 = |G|.$$

□

**Proposición 1.27** (Sumandos del carácter regular). *Sea  $\{V_i\}_{i=1}^k$  una familia completa de  $G$ -módulos irreducibles no isomorfos entre sí, y sean  $\chi_i$  el carácter de  $V_i$  con  $d_i = \chi_i(1)$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Entonces  $\chi_{\text{reg}} = \sum_{i=1}^k d_i \chi_i$  ([Jam], 13.19). □*

## 1.5. Producto interno de caracteres y condiciones de ortogonalidad

**Definición 1.28.** Denotaremos por  $\langle \chi, \psi \rangle$  al producto interno de dos funciones de clase, el cual se define como:

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)}. \quad (1.29)$$

En caso de que  $\chi$  y  $\psi$  sean caracteres de  $G$ , por las propiedades de caracteres enlistadas anteriormente

$$\langle \chi, \psi \rangle = \langle \psi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}), \quad (1.30)$$

Es sencillo verificar (véase [Jam], página 134) que esta definición cumple las propiedades de ser producto interno. Más aún, si  $\chi$  y  $\psi$  son caracteres simples de  $G$ -módulos no isomorfos entonces se puede demostrar que

$$\begin{aligned} \langle \chi, \chi \rangle &= 1 \\ \langle \chi, \psi \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Esto es, los caracteres simples  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ , de las expresiones (1.25) forman un conjunto ortonormal en el espacio vectorial de funciones de clase. Es decir, con la delta de Kronecker  $\delta_{ij}$

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (1.31)$$

Con lo cual, si  $\psi$  es un carácter (no necesariamente simple) de  $G$ , entonces

$$\begin{aligned} \langle \psi, \chi_i \rangle &:= d_i \in \mathbb{N} \quad \text{para } 1 \leq i \leq k, \\ \psi &= d_1 \chi_1 + \dots + d_k \chi_k, \\ \langle \psi, \psi \rangle &= \sum_{i=1}^k d_i^2. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Por otra parte, decimos que  $\chi$  es *carácter constituyente de  $\psi$*  si  $\langle \psi, \chi \rangle \neq 0$ . Para el caso de las ecuaciones (1.32); si  $d_i$  distinto de cero con  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , el carácter  $\chi_i$  es *carácter constituyente de  $\psi$* .

Por el corolario 1.12 sabemos que cuando tenemos un  $G$ -módulo  $V$ , éste se puede descomponer como suma de módulos simples. Para ello, a continuación se muestra una herramienta que nos ayuda para lograr este fin.

Una vez conocidos los caracteres simples de  $G$ , un proceso para encontrar la expresión (1.15) de un  $\mathbb{C}G$ -módulo  $V$  es el siguiente:

1. Se selecciona una base  $v_1, \dots, v_n$  para  $V$  y consideramos a  $\psi$ , el carácter correspondiente a  $V$ .
2. Sabemos que a cada carácter simple  $\chi_i$  en (1.25) le corresponde el módulo simple  $U_i$  de la familia de módulos en (1.25).

3. Entonces, por las ecuaciones (1.32) tenemos que  $V \cong \bigoplus_{i=1}^k d_i U_i$ , con  $d_i = \langle \psi, \chi_i \rangle$ .

Por lo tanto, si  $\chi$  es carácter de  $V$  y  $\psi$  es carácter de  $W$ , tenemos entonces que  $V$  y  $W$  son isomorfos sí y sólo si  $\chi = \psi$ .

**Proposición 1.33.** Sean  $G$  un grupo,  $g_1, g_2, \dots, g_k$  una colección de representantes de las clases de conjugación de  $G$ . Si denotamos  $\tilde{g}_i = \sum_{h \sim g_i} h \in \mathbb{C}G$  —la suma de los elementos de la clase de conjugación de  $g_i$ —, entonces  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \dots, \tilde{g}_k$  es una base de  $Z(\mathbb{C}G)$ .

**Corolario 1.34.** Si  $G$  es un grupo finito, hay la misma cantidad de  $G$ -módulos simples salvo isomorfismo que de clases de conjugación en  $G$ .

*Demostración.* En la proposición 1.18 observamos que la cantidad de  $G$ -módulos simples es igual a la dimensión de  $Z(\mathbb{C}G)$  y la proposición anterior nos dice que este número es igual a la cantidad de clases de conjugación en  $G$ .  $\square$

Es decir, la cantidad de  $G$ -módulos simples es igual al número de clases de conjugación de  $G$ , y con ello el número de caracteres simples de  $G$  es el de clases de conjugación de  $G$ .

**Definición 1.35** (Tabla de caracteres). Sean  $\chi_1, \dots, \chi_k$  los caracteres simples de  $G$  y  $g_1, \dots, g_k$  representantes de las  $k$  clases de conjugación de  $G$ . La matriz de  $k \times k$  tal que la entrada en el renglón  $i$ , columna  $j$  es  $\chi_i(g_j)$  para  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  es llamada la tabla de caracteres de  $G$ .

	$[g_1]$	$[g_2]$	$\dots$	$[g_j]$	$\dots$	$[g_k]$
$\chi_1$	$\chi_1(g_1)$	$\chi_1(g_2)$	$\dots$	$\chi_1(g_j)$	$\dots$	$\chi_1(g_k)$
$\chi_2$	$\chi_2(g_1)$	$\chi_2(g_2)$	$\dots$	$\chi_2(g_j)$	$\dots$	$\chi_2(g_k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\chi_i$	$\chi_i(g_1)$	$\chi_i(g_2)$	$\dots$	$\chi_i(g_j)$	$\dots$	$\chi_i(g_k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\chi_k$	$\chi_k(g_1)$	$\chi_k(g_2)$	$\dots$	$\chi_k(g_j)$	$\dots$	$\chi_k(g_k)$

Figura 1.1: Tabla de caracteres.

Tenemos así que los renglones están indicados por los caracteres simples, y las columnas están indicadas por las clases de conjugación de  $G$ . Para esta definición, usualmente se da  $\chi_1 \equiv 1$  —la función constante  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(g) = 1 \forall g \in G$ — y  $g_1 = 1_G$ . Fuera de ello, la elección de los índices para el resto de caracteres y de las clases de conjugación es arbitraria. Es decir, usualmente la tabla de caracteres es similar a la que se muestra en la figura 1.1.

Es fácil observar que ésta es una matriz invertible debido a que los caracteres simples son linealmente independientes en el espacio de funciones de clase. De éste hecho y como resultado de las propiedades de caracteres aplicadas a módulos simples, usando la definición de producto interior se puede demostrar que

$$\sum_{i=1}^k \chi_i(g_r) \overline{\chi_i(g_s)} = \delta_{rs} |C_G(g_r)|, \quad (1.36)$$

utilizando propiedades de las clases de conjugación en  $G$  y matrices transpuestas conjugadas. Esto es, tenemos también una ortogonalidad de columnas en la tabla de caracteres.

# Capítulo 2

## Operaciones de $G$ -módulos

El producto cartesiano de  $n$  factores de un módulo  $V$  se denotará como  $V^n := V \times V \times \dots \times V$ . Ahora se muestran los caracteres para los casos del producto tensorial, restricción de módulos y módulo inducido. Tanto la  $n$ -ésima potencia simétrica, como la  $n$ -ésima potencia alternante de un módulo, son únicas respecto a cierta propiedad denominada *universal*.

### 2.1. Producto tensorial ( $V \otimes W$ )

Sean  $V, W$  dos  $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales, sea  $U$  el  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial con base  $V \times W$  y el subespacio

$$I = \langle \{(v + v', w) - (v, w) - (v', w) \mid v, v' \in V, w \in W\} \\ \cup \{(v, w + w') - (v, w) - (v, w') \mid v \in V, w, w' \in W\} \rangle.$$

Al espacio cociente  $U/I$  le llamamos el *producto tensorial* de los espacios  $V$  y  $W$  y lo denotamos como  $V \otimes W$ .

La proyección  $\varphi : V \times W \rightarrow V \otimes W$  es bilineal, y el producto tensorial tiene la propiedad universal con respecto a ella ([Nag], página 47).

### 2.1.1. Carácter del producto tensorial

Sean  $\chi, \psi$  caracteres de  $V$  y  $W$  respectivamente,  $\phi$  carácter de  $V \otimes W$ , entonces

$$\phi = \chi\psi. \quad (2.1)$$

Ello es consecuencia de la forma en que se define una base para  $V \otimes W$  como  $\{v_i \otimes w_j | 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t\}$  con  $\{v_i\}_{i=1}^s$  y  $\{w_j\}_{j=1}^t$  como bases de  $V$  y  $W$  respectivamente. Por lo tanto, el producto de dos caracteres de  $G$  es a su vez, un carácter de  $G$  ([Jam], proposición 19.6).

Obsérvese que la matriz  $A$  en la expresión (2.2) es invertible. Además, si  $\chi$  es carácter fiel de  $G$  que toma  $r$  valores conforme  $g$  varía sobre los elementos de  $G$ . Entonces todo carácter simple de  $G$  constituye a alguna de las siguientes potencias de  $\chi$ :  $\chi^0, \chi^1, \dots, \chi^r$  ([Jam], teorema 19.10). Ello nos ayuda a descomponer las potencias de  $\chi$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \chi(g_1) & \chi^2(g_1) & \dots & \chi^{r-1}(g_1) \\ 1 & \chi(g_2) & \chi^2(g_2) & \dots & \chi^{r-1}(g_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \chi(g_r) & \chi^2(g_r) & \dots & \chi^{r-1}(g_r) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

En vista de lo anterior es importante el hecho de poder descomponer potencias de un carácter  $\chi$  en sumas de caracteres simples. el procedimiento se describe a continuación para el caso de  $\chi^2$ . Para el resto de las potencias no hay mas que aplicar el método de manera inductiva.

Supongamos que la base de  $V$  es  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  y considérense la transformación lineal  $T: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  dada en los elementos de la base de  $V \otimes V$  como  $T(v_i \otimes v_j) = v_j \otimes v_i \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$  y tomemos los  $G$ -submódulos de  $V \otimes V$

$$\begin{aligned} S(V \otimes V) &= \{x \in V \otimes V | Tx = x\}, \\ A(V \otimes V) &= \{x \in V \otimes V | Tx = -x\}, \end{aligned}$$

llamados *parte simétrica* y *parte antisimétrica* de  $V \otimes V$ , cuyas bases son

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \{v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i | i, j \in \{1, \dots, n\}\}, \\ \beta_2 &= \{v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i | i, j \in \{1, \dots, n\}\}, \end{aligned}$$

respectivamente y

$$\begin{aligned} \dim(S(V \otimes V)) &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ \dim(A(V \otimes V)) &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

([Jam], 19.13).

La parte simétrica de  $V \otimes V$  contiene a todos los vectores de la forma  $v \otimes w + w \otimes v$ , mientras la parte antisimétrica de  $V \otimes V$  contiene a todos los vectores de la forma  $v \otimes w - w \otimes v$ .

Con el fin de resolver el problema propuesto de descomponer  $V \otimes V$  en submódulos más pequeños tenemos que

$$V \otimes V = S(V \otimes V) \oplus A(V \otimes V)$$

([Jam] pág. 196-198).

Entonces, si denotamos como  $\chi_S$  al carácter de  $S(V \otimes V)$  y  $\chi_A$  al carácter de  $A(V \otimes V)$  tenemos que

$$\chi^2 = \chi_S + \chi_A,$$

donde

$$\chi_S(g) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) + \chi(g^2)) \quad (2.3)$$

$$\text{y } \chi_A(g) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) - \chi(g^2)) \quad (2.4)$$

([Jam] pág. 196-198).

Así entonces, para descomponer al producto tensorial  $V \otimes V$  como suma de caracteres simples, sólo nos queda buscar los caracteres simples de  $S(V \otimes V)$  y de  $A(V \otimes V)$ .

## Producto cartesiano bajo la acción sobre el producto tensorial

Consideremos a  $V$  un  $G$ -módulo y  $W$  un  $H$ -módulo —con representaciones  $\rho$  y  $\theta$  respectivamente—. Dados  $g \in G$  y  $h \in H$ , tenemos una transformación lineal  $g \otimes h : V \otimes W \rightarrow V \otimes W$  inducida por las transformaciones  $g : V \rightarrow V$  y  $h : W \rightarrow W$ . De tal forma que para todo  $v \in V$ ,  $w \in W$ ,

$$g \otimes h(v \otimes w) = gv \otimes hw.$$

Tenemos entonces que  $V \otimes W$  recibe la estructura de un  $G \times H$ -módulo, al que denotaremos como  $V \boxtimes W$  y cuya representación se denota como  $\rho \boxtimes \theta : G \times H \rightarrow GL(V \otimes W)$ . Al carácter correspondiente lo escribimos como  $\chi_V \boxtimes \chi_W$ .

**Proposición 2.5.** Sean  $\{V_i\}_{i=1}^r$  la familia de módulos simples de  $G_1$  y  $\{W_i\}_{i=1}^r$  la familia de módulos simples de  $G_2$ . Entonces la familia de  $G_1 \times G_2$ -módulos  $\{V_k \boxtimes W_l\}_{1 \leq k \leq r, 1 \leq l \leq r}$  es la de los  $G_1 \times G_2$ -módulos simples.

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{V_k \boxtimes W_l}, \chi_{V_k \boxtimes W_l} \rangle &= \frac{1}{|G_1 \times G_2|} \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \overline{\chi_{V_k \boxtimes W_l}(g_1, g_2)} \chi_{V_k \boxtimes W_l}(g_1, g_2) \\
&= \frac{1}{|G_1| |G_2|} \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \overline{\chi_{V_k}(g_1)} \chi_{V_k}(g_1) \overline{\chi_{W_l}(g_2)} \chi_{W_l}(g_2) \\
&= \left( \frac{1}{|G_1|} \sum_{g_1 \in G_1} \overline{\chi_{V_k}(g_1)} \chi_{V_k}(g_1) \right) \left( \frac{1}{|G_2|} \sum_{g_2 \in G_2} \overline{\chi_{W_l}(g_2)} \chi_{W_l}(g_2) \right) \\
&= \langle \chi_{V_k}, \chi_{V_k} \rangle \langle \chi_{W_l}, \chi_{W_l} \rangle = 1.
\end{aligned}$$

Además, por cálculos similares, si  $(k, l) \neq (k', l')$ , entonces  $\langle \chi_{V_k \boxtimes W_l}, \chi_{V_{k'} \boxtimes W_{l'}} \rangle = 0$ ; por lo que los módulos de la forma  $V_k \boxtimes W_l$  descritos anteriormente son no isomorfos entre sí.

Supongamos que  $\dim V_k = d_k$  y  $\dim W_l = e_l$ . De ésta manera,  $\dim V_k \boxtimes W_l = d_k e_l$ , y

$$\sum_{k, l} (d_k e_l)^2 = \sum_{k, l} (d_k)^2 (e_l)^2 = \sum_k d_k^2 \sum_l e_l^2 = |G_1| |G_2| = |G_1 \times G_2|$$

□

Supongamos que  $\{g_i\}_{i=1}^r$  es el conjunto de los representantes de las clases de conjugación de  $G$  y que  $\{h_j\}_{j=1}^s$  es el conjunto de los representantes de las clases de conjugación en  $H$ . Si tenemos a los caracteres irreducibles de  $G$  y  $H$  dados por los conjuntos  $\{\psi_i\}_{i=1}^r$  y  $\{\chi_j\}_{j=1}^s$  respectivamente, entonces la tabla de caracteres de  $G \times H$  se puede construir como en la figura 2.1.

Clase	$[(g_1, h_1)]$	$[(g_1, h_2)]$	...	$[(g_2, h_1)]$	$[(g_2, h_2)]$	...	$[(g_r, h_s)]$
$\phi_1 = \psi_1 \boxtimes \chi_1$	$\psi_1(g_1)\chi_1(h_1)$	$\psi_1(g_1)\chi_1(h_2)$	...	$\psi_1(g_2)\chi_1(h_1)$	$\psi_1(g_2)\chi_1(h_2)$	...	$\psi_1(g_r)\chi_1(h_s)$
$\phi_2 = \psi_1 \boxtimes \chi_2$	$\psi_1(g_1)\chi_2(h_1)$	$\psi_1(g_1)\chi_2(h_2)$	...	$\psi_1(g_2)\chi_2(h_1)$	$\psi_1(g_2)\chi_2(h_2)$	...	$\psi_1(g_r)\chi_2(h_s)$
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋱	⋮
$\phi_s = \psi_1 \boxtimes \chi_s$	$\psi_1(g_1)\chi_s(h_1)$	$\psi_1(g_1)\chi_s(h_2)$	...	$\psi_1(g_2)\chi_s(h_1)$	$\psi_1(g_2)\chi_s(h_2)$	...	$\psi_1(g_r)\chi_s(h_s)$
$\phi_{s+1} = \psi_2 \boxtimes \chi_1$	$\psi_2(g_1)\chi_1(h_1)$	$\psi_2(g_1)\chi_1(h_2)$	...	$\psi_2(g_2)\chi_1(h_1)$	$\psi_2(g_2)\chi_1(h_2)$	...	$\psi_2(g_r)\chi_1(h_s)$
$\phi_{s+2} = \psi_2 \boxtimes \chi_2$	$\psi_2(g_1)\chi_2(h_1)$	$\psi_2(g_1)\chi_2(h_2)$	...	$\psi_2(g_2)\chi_2(h_1)$	$\psi_2(g_2)\chi_2(h_2)$	...	$\psi_2(g_r)\chi_2(h_s)$
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋱	⋮
$\phi_{2s} = \psi_2 \boxtimes \chi_s$	$\psi_2(g_1)\chi_s(h_1)$	$\psi_2(g_1)\chi_s(h_2)$	...	$\psi_2(g_2)\chi_s(h_1)$	$\psi_2(g_2)\chi_s(h_2)$	...	$\psi_2(g_r)\chi_s(h_s)$
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋱	⋮
$\phi_{rs} = \psi_r \boxtimes \chi_s$	$\psi_r(g_1)\chi_s(h_1)$	$\psi_r(g_1)\chi_s(h_2)$	...	$\psi_r(g_2)\chi_s(h_1)$	$\psi_r(g_2)\chi_s(h_2)$	...	$\psi_r(g_r)\chi_s(h_s)$

Figura 2.1: Tabla de caracteres de  $G \times H$ .

*Ejemplo 2.6.* Consideremos el grupo cíclico de dos elementos  $C_2$ . Para construir la tabla de caracteres de  $S_3 \times C_2$ , consideremos a la transposición (45) en lugar de la (12) como

generador de  $C_2$  y sea  $\pi = (\sigma, \tau) \in S_3 \times C_2$ . Dada la elección de (45) como generador de  $C_2$ , podemos escribir  $\pi = \sigma\tau \in S_5$  sin que se preste a confusión, pues  $\sigma$  y  $\tau$  son siempre ajenos, salvo el caso en que  $\sigma = (1) = \tau$ , pero aún así, no es ambiguo referirnos a  $((1), (1))$  como  $(1)(1) = (1)$ . Tenemos entonces la figura 2.2.

# Elementos	1	1	3	3	2	2
Clase	[(1)]	[(45)]	[(12)]	[(12)(45)]	[(123)]	[(123)(45)]
$\phi_1 = \psi_1 \boxtimes \zeta_1$	1	1	1	1	1	1
$\phi_2 = \psi_1 \boxtimes \zeta_2$	1	-1	1	-1	1	-1
$\phi_3 = \psi_2 \boxtimes \zeta_1$	1	1	-1	-1	1	1
$\phi_4 = \psi_2 \boxtimes \zeta_2$	1	-1	-1	1	1	-1
$\phi_5 = \psi_3 \boxtimes \zeta_1$	2	2	0	0	-1	-1
$\phi_6 = \psi_3 \boxtimes \zeta_2$	2	-2	0	0	-1	1

Figura 2.2: Tabla de Caracteres de  $S_3 \times C_2$

□

## 2.2. Potencia simétrica ( $Sym^n V$ )

**Definición 2.7.** Sean  $V, W$  espacios vectoriales sobre un campo  $\mathbb{C}$ . Una función multilinear  $f : V^n \rightarrow W$  es *simétrica* si

$$f(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(i)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = f(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n) \quad \forall \sigma \in S_n.$$

**Definición 2.8** (Potencia simétrica de  $V$ ). Dado  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$  y  $n \geq 1$ , la  $n$ -ésima potencia simétrica de  $V$ , denotada por  $Sym^n V$ , es un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial junto con una función simétrica  $s : V^n \rightarrow Sym^n V$  tal que si  $W$  es un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial y  $s' : V^n \rightarrow W$  es una función simétrica, existe una única transformación lineal  $l : Sym^n V \rightarrow W$  tal que  $l \circ s = s'$ .

Si  $s : V^n \rightarrow Sym^n V$  es la función simétrica de la definición anterior, denotaremos a  $s(v_1, v_2, \dots, v_n)$  simplemente como  $v_1 v_2 \cdots v_n$ . Entonces si  $\{w_1, w_2, \dots, w_r\}$  es una base de  $V$ , se tiene que  $\{w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n} : 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n \leq r\}$  es una base de  $Sym^n V$ . El carácter de  $Sym^2 V$  es el de la ecuación (2.3).

*Ejemplo 2.9.* Sea  $\beta = \{w_1, w_2, w_3\}$  una base de  $V$ . Una base para  $Sym^2 V$  es

$$\{w_1 w_1, w_1 w_2, w_1 w_3, w_2 w_2, w_2 w_3, w_3 w_3\}.$$

□

### 2.3. Potencia exterior ( $\wedge^n V$ )

**Definición 2.10.** Sean  $V, W$  espacios vectoriales sobre un campo  $\mathbb{C}$ . Una función multilineal  $f : V^n \rightarrow W$  es *alternante* si

$$f(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(i)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = (\text{sgn } \sigma) f(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n) \quad \forall \sigma \in S_n.$$

**Definición 2.11** (Potencia exterior). Dado  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$  y  $n \geq 1$ , definimos la  $n$ -ésima *potencia exterior* de  $V$ , denotada por  $\wedge^n V$ , como un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial junto con una función alternante  $a : V^n \rightarrow \wedge^n V$  tal que si  $W$  es un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial y  $a' : V^n \rightarrow W$  es una función alternante, existe una única transformación lineal  $l : \wedge^n V \rightarrow W$  tal que  $l \circ a = a'$ .

Si  $n \geq 3$   $a : V^n \rightarrow \wedge^n V$  es la función alternante de la definición anterior, denotaremos a  $a(v_1, v_2, \dots, v_n)$  como  $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n$ . Entonces si  $\{w_1, w_2, \dots, w_r\}$  es una base de  $V$ , se tiene que  $\{w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \dots \wedge w_{i_n} : 1 < i_1 < i_2 < \dots < i_n < r\}$  es una base de  $\wedge^n V$ . El carácter de  $\wedge^2 V$  es el de la ecuación (2.4).

*Ejemplo 2.12.* Sea  $\beta = \{w_1, w_2, w_3\}$  una base de  $V$ . Una base para  $Sym^2 V$  es

$$\{w_1 \wedge w_2, w_1 \wedge w_3, w_2 \wedge w_3\}.$$

□

Observando lo visto en la sección 2.1, se puede demostrar que la parte simétrica de  $V \otimes V$  es isomorfa a  $Sym^2 V$  y que la parte antisimétrica de  $V \otimes V$  es isomorfa a  $\wedge^2 V$ . Con ello podemos calcular las dimensiones de  $Sym^2 V$  y de  $\wedge^2 V$ .

### 2.4. Restricción a un subgrupo ( $V \downarrow_H^G$ )

Para las siguientes secciones, consideraremos a  $H$  un subgrupo de  $G$ ,  $W$  (submódulo de  $V$ ) un  $H$ -módulo. Para evitar confusiones, se utiliza  $\langle, \rangle_H$  para denotar el producto interno de caracteres en  $H$  y  $\langle, \rangle_G$  para los caracteres en  $G$ .

Si  $V$  es  $G$ -módulo, denotamos la restricción de  $V$  a  $H$  (como  $H$ -módulo) como  $V \downarrow_H^G$ .

#### 2.4.1. Carácter de la restricción a un subgrupo

Éste caso es el mas sencillo de los que revisamos aquí. Para restringir un carácter de  $G$  a un subgrupo  $H$  de  $G$ , simplemente se aplica el carácter a los elementos de  $H$ .

Es decir, sea  $\chi$  un carácter de  $G$ , denotamos al carácter de la restricción a  $H$  como  $\chi \downarrow_H^G := \chi|_H$ .

Tenemos entonces por las propiedades de caracteres que si  $\{\psi_i\}_{i=1}^l$  es el conjunto de los caracteres simples de  $H$  (como la familia en (1.25)),

$$\chi \downarrow_H^G = d_1\psi_1 + \dots + d_l\psi_l$$

para algunos elementos  $d_i \in \mathbb{N}$  con  $i \in \{1, \dots, l\}$

## 2.5. Módulo inducido ( $W \uparrow_H^G$ )

Para ésta sección, supondremos que  $[G : H] = s$  y

$$T = \{t_1, t_2, \dots, t_s\} \tag{2.13}$$

es tal que contiene a un sólo representante de cada *clase lateral izquierda*. Entonces tenemos que  $G = \bigcup_{i=1}^s t_i H$ . A un conjunto definido como  $T$  lo llamamos una *transversal izquierda* de  $H$  en  $G$ .

**Definición 2.14** (Módulo inducido). Sean  $V$  un  $G$ -módulo,  $W$  un subespacio de  $V$  tal que  $H = \{g \in G | gW = W\}$  (de forma que  $W$  es un  $H$ -módulo). Decimos que el  $G$ -módulo  $V$  es *inducido* por el  $H$ -módulo  $W$  si  $V = \bigoplus_{i=1}^s t_i W$  como espacio vectorial.

**Definición 2.15** (Segunda definición de módulo inducido). Sea  $H$  un subgrupo de  $G$  y  $V = \bigoplus_{i=1}^s W_i$  es un  $G$ -módulo en el que  $G$  actúa transitivamente en  $\{1, 2, \dots, s\}$  según el mapeo  $g : w_i \mapsto w_j$ , donde  $H = \text{Stab}_G(i)$ . Con lo que  $W_i$  es un  $H$ -módulo para  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ . Entonces para  $i$  fijo, decimos que  $V$  es inducido por  $W_i$  y lo denotamos como  $V = W_i \uparrow_H^G$ .

**Teorema 2.16** (Transitividad de la inducción de módulos). *Supongamos que  $H_1, H_2, G$  son grupos tales que  $H_1 \leq H_2 \leq G$  y  $U$  es un  $H_1$ -módulo. Entonces*

$$\left( U \uparrow_{H_1}^{H_2} \right) \uparrow_{H_2}^G = U \uparrow_{H_1}^G .$$

□

*Notación 2.17.* A efecto de simplificar, escribiremos  $U \uparrow_{H_1}^{H_2} \uparrow_{H_2}^G := \left( U \uparrow_{H_1}^{H_2} \right) \uparrow_{H_2}^G$ .

El resultado del teorema 2.16 lo podemos expresar entonces de forma más sencilla como

$$U \uparrow_{H_1}^{H_2} \uparrow_{H_2}^G = U \uparrow_{H_1}^G .$$

### 2.5.1. Carácter del módulo inducido

**Definición 2.18.** Sea  $\theta : H \rightarrow \mathbb{C}$  una función. Se denota a la función *inducida* por  $\theta$  como  $\theta \uparrow_H^G : G \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por

$$\theta \uparrow_H^G (g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1}gx \in H}} \theta(x^{-1}gx).$$

Sea  $\theta$  un carácter de  $H \leq G$ . Al conocer los valores que toma  $\theta$  sobre  $H$ , el teorema 2.19 que se muestra a continuación —de reciprocidad de Frobenius— nos permite conocer los valores del carácter inducido dado que los caracteres son funciones de clase, y lo denotamos como  $\theta \uparrow_H^G$  ([Jam], página 231).

**Teorema 2.19** (Reciprocidad de Frobenius). *Sean  $H \leq G$ ,  $\theta : H \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$  funciones de clase. Entonces*

$$\langle \theta \uparrow_H^G, \phi \rangle_G = \langle \theta, \phi \downarrow_H^G \rangle_H.$$

□

Si  $\theta$  es un carácter de  $H$  y  $\chi$  es un carácter irreducible de  $G$ , entonces por el teorema 2.19, tenemos como corolario que  $\theta \uparrow_H^G$  es también un carácter, dado que  $\langle \theta, \chi \downarrow_H^G \rangle_H \geq 0$ , dado que es un producto interno de caracteres. A partir de ello, dado un  $H$ -módulo  $W$  queremos encontrar un  $G$ -módulo  $V$  tal que  $\chi_V = \chi_W \uparrow_H^G$ . Entonces  $\chi_V = \chi_W \uparrow_H^G$ .

El siguiente teorema nos muestra la existencia del módulo inducido, y como corolario del teorema 2.21 se tiene la unicidad de éste salvo isomorfismo.

**Teorema 2.20.** *Dados  $H \leq G$  y  $W$  un  $H$ -módulo, existe un  $G$ -módulo  $V$  inducido por  $W$ .* □

**Teorema 2.21.** *Sea  $H \leq G$ ,  $W$  un  $H$ -módulo,  $V'$  un  $G$ -módulo y  $\phi : W \rightarrow V'$  un morfismo de  $H$ -módulos. Sea  $V$  el módulo obtenido por el teorema 2.20, entonces existe un único morfismo de  $G$ -módulos  $\Psi : V \rightarrow V'$  que extiende a  $\phi$ .* □

# Capítulo 3

## Tablas de caracteres de grupos de orden menor

Toda permutación  $\sigma \in S_n$  puede ser expresada de manera única como producto de ciclos *ajenos* —que no tienen números en común— salvo el orden de aparición de los ciclos ([Rot], Teoremas 1.1 y 1.2).

En adelante denotaremos como  $C_k$  al grupo cíclico compuesto por  $k$  elementos.

### 3.1. Tablas de caracteres de $C_2$ y $S_3$

El grupo cíclico  $C_2$  tiene como elementos a (1) y (12) y tiene sólo dos clases de conjugación determinadas por ellos. De éste modo las columnas de su tabla de caracteres se indicarán por los elementos en  $C_2$ .

Elemento	(1)	(12)
$\zeta_1$	1	1
$\zeta_2$	1	-1

Figura 3.1: Tabla de Caracteres de  $C_2$ .

Las clases de conjugación de  $S_3$  son las siguientes:

$$\begin{aligned} [(1)] &= \{(1)\} \\ [(12)] &= \{(12), (13), (23)\} \\ [((123))] &= \{(123), (132)\} \end{aligned}$$

# Elementos	1	3	2
Clase	[(1)]	[(12)]	[(123)]
$\psi_1$	1	1	1
$\psi_2$	1	-1	1
$\psi_3$	2	0	-1

Figura 3.2: Tabla de Caracteres de  $S_3$ .

### 3.2. Tabla de caracteres de $S_4$

En base a la sección 2.1 podemos revisar la tabla de caracteres de  $S_4$  ya que uno de sus módulos simples es un producto tensorial entre dos de sus módulos simples.

Las clases de conjugación de  $S_4$  estarán dadas por las estructuras cíclicas

$$(1), \quad (12), \quad (123), \quad (1234), \quad (12)(34). \quad (3.1)$$

Si  $g \in S_4$ , denotamos a su clase de conjugación como  $[g]$ , entonces tenemos que las cardinalidades de las clases son las siguientes:

$$\begin{aligned} |[ (1) ]| &= 1, \\ |[ (12) ]| &= \frac{1}{2} \binom{4!}{2!} = 6, \\ |[ (123) ]| &= \frac{1}{3} \binom{4!}{1!} = 8, \\ |[ (1234) ]| &= \frac{1}{4} \binom{4!}{0!} = 6, \\ |[ (12)(34) ]| &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \binom{4!}{2!} \frac{1}{2} \binom{2!}{0!} \right) = 3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Supongamos que  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5$  son los caracteres que corresponden a los módulos simples  $\mathbb{C}_4, \widehat{\mathbb{C}}_4, V_4, V'_4 = V_4 \otimes \widehat{\mathbb{C}}_4$  y  $W$  respectivamente.  $W$  es un módulo que se deduce de las propiedades que se darán a continuación para obtener  $\chi_5$ .

Una versión preliminar de la tabla de caracteres de  $S_4$  se encuentra en la figura 3.3.

Como  $\chi_4$  es el carácter de  $V \otimes \widehat{\mathbb{C}}$ , entonces por las propiedades mostradas en la subsección 2.1.1 tenemos que

$$\chi_4 = \chi_2 \cdot \chi_3.$$

Pudiendo aumentar así la tabla de caracteres de la figura 3.3 a la de la figura 3.4

# Elementos	1	6	8	6	3
Clase	[(1)]	[(12)]	[(123)]	[(1234)]	[(12)(34)]
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	-1	1	-1	1
$\chi_3$	3	1	0	-1	-1
$\chi_4$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$\chi_5$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$

Figura 3.3: Primera tabla de caracteres parcial de  $S_4$ .

# Elementos	1	6	8	6	3
Clase	[(1)]	[(12)]	[(123)]	[(1234)]	[(12)(34)]
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	-1	1	-1	1
$\chi_3$	3	1	0	-1	-1
$\chi_4$	3	-1	0	1	-1
$\chi_5$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$

Figura 3.4: Segunda tabla de caracteres parcial de  $S_4$ .

Sean  $= \chi_i((1)) = d_{s_i} \forall i \in 1, 2, 3, 4$ . Por la proposición 1.26 sabemos que

$$\sum_{i=1}^4 d_{s_i}^2 = 1 + 1 + 9 + 9 + b_1^2 = |S_4| = 24.$$

Entonces  $b_1^2 = 4$ , con lo cual  $b_1 = 2$  o  $b_1 = -2$ . Como  $\chi_5((1))$  es la dimensión del módulo  $W$ ,  $\chi_5((1)) > 0$ . Tenemos así que  $b_1 = 2$ . Lo que nos deja la figura 3.5.

# Elementos	1	6	8	6	3
Clase	[(1)]	[(12)]	[(123)]	[(1234)]	[(12)(34)]
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	-1	1	-1	1
$\chi_3$	3	1	0	-1	-1
$\chi_4$	3	-1	0	1	-1
$\chi_5$	2	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$

Figura 3.5: Tercera tabla de caracteres parcial de  $S_4$ .

Si denotamos las columnas de la tabla de caracteres como  $c_1, c_2, c_3, c_4$  y  $c_5$  respectivamente y utilizando las relaciones de ortogonalidad de columnas —ecuación (1.36)—

tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\langle c_1, c_2 \rangle &= 1 - 1 + 3 - 3 + 2b_2 = 2b_2 = 0 \\ \langle c_1, c_3 \rangle &= 1 + 1 + 0 + 0 + 2b_3 = 2 + 2b_3 = 0 \\ \langle c_1, c_4 \rangle &= 1 - 1 - 3 + 3 + 2b_4 = 2b_4 = 0 \\ \langle c_1, c_5 \rangle &= 1 + 1 - 3 - 3 + 2b_5 = -4 + 2b_5 = 0,\end{aligned}$$

con lo cual se deduce que

$$\begin{aligned}b_2 &= 0 \\ b_3 &= -1 \\ b_4 &= 0 \\ b_5 &= 2.\end{aligned}$$

y la tabla de caracteres de  $S_4$  es la de la figura 3.6.

# Elementos Clase	1 [(1)]	6 [(12)]	8 [(123)]	6 [(1234)]	3 [(12)(34)]
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	-1	1	-1	1
$\chi_3$	3	1	0	-1	-1
$\chi_4$	3	-1	0	1	-1
$\chi_5$	2	0	-1	0	2

Figura 3.6: Tabla de Caracteres de  $S_4$ .

### 3.3. Tablas de caracteres de $C_2 \times C_2$ y de $A_4$

Siguiendo el procedimiento para tomar el producto cartesiano bajo la acción como producto tensorial en la sección 2.1 construimos la tabla de caracteres de  $C_2 \times C_2$ .

Elemento	((1), (1))	((1), (12))	((12), (1))	((12), (12))
$\theta_1$	1	1	1	1
$\theta_2$	1	-1	-1	1
$\theta_3$	1	1	-1	-1
$\theta_4$	1	-1	1	-1

Figura 3.7: Tabla de Caracteres de  $C_2 \times C_2$ .

Consideremos que  $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ . Haciendo los cálculos pertinentes se puede comprobar que las clases de conjugación de  $A_4$  son [(1)], [(123)], [(132)], y [(12)(34)]. Entonces la tabla de caracteres de  $A_4$  se muestra en la figura 3.8.

# Elementos	1	4	4	3
Clase	[(1)]	[(123)]	[(132)]	[(12)(34)]
$\eta_1$	1	1	1	1
$\eta_2$	3	0	0	-1
$\eta_3$	1	$\omega$	$\omega^2$	1
$\eta_4$	1	$\omega^2$	$\omega$	1

Figura 3.8: Tabla de Caracteres de  $A_4$ .

### 3.4. Tabla de caracteres de $D_4$

Las clases de conjugación de  $D_4$  son

$$\begin{aligned}
 [(1)]_{D_4} &= \{(1)\}, \\
 [(13)]_{D_4} &= \{(13), (24)\}, \\
 [(1234)]_{D_4} &= \{(1234), (1432)\}, \\
 [(12)(34)]_{D_4} &= \{(12)(34), (14)(23)\}, \\
 [(13)(24)]_{D_4} &= \{(13)(24)\}.
 \end{aligned}$$

El grupo conmutador de  $D_4$ ,  $D'_4$  es el generado por

$$[(13)(24)]_{D_4} = \{(1), (13)(24)\}.$$

Sea  $H = D_4/D'_4$ . Se puede comprobar que

$$H = \{D'_4 | = e_D, (13)D'_4, (1234)D'_4, (12)(34)D'_4\}.$$

De ésta manera  $|H| = 4$ , con lo cual  $H \cong C_4$  o es el grupo de Cayley  $H \cong C_2 \times C_2$ .

Claramente los elementos  $(13)D'_4$  y  $(12)(34)D'_4$  son de orden 2. Además

$$((1234)D'_4)((1234)D'_4) = ((1234)(1234)D'_4) = (13)(24)D'_4 = 1_D,$$

con lo cual todos los elementos distintos de  $e_D$  son de orden dos. Por lo tanto  $H \cong C_2 \times C_2$ , pues no tiene elemento de orden 4 que genere a  $C_4$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad que

$$\begin{aligned}
 ((1), (1)) &\simeq D'_4 \\
 ((1), (12)) &\simeq (13)D'_4 \\
 ((12), (1)) &\simeq (1234)D'_4 \\
 ((12), (12)) &\simeq (12)(34)D'_4.
 \end{aligned}$$

Elemento	$D'_4$	$(13)D'_4$	$(1234)D'_4$	$(12)(34)D'_4$
$\nu_1$	1	1	1	1
$\nu_2$	1	-1	-1	1
$\nu_3$	1	1	-1	-1
$\nu_4$	1	-1	1	-1

Figura 3.9: Tabla de Caracteres del grupo de Cayley.

Entonces, a partir de la figura 3.7 obtenemos la tabla de caracteres de  $D$  que se muestra en la figura 3.9.

Sabemos que los caracteres simples de  $H$  son de dimensión 1 y se corresponden con los caracteres de dimensión 1 de  $D_4$  de forma biunívoca de tal forma que cualquiera de éstos caracteres de  $D_4$  evaluados en un elemento  $g$  toma el mismo valor que el carácter correspondiente bajo la transformación natural evaluado en  $gD_4$ . Con ello en mente, la tabla de caracteres de  $D_4$  es la de la figura 3.10 bajo el proceso de inflación de un carácter, que en éste caso consiste en que los caracteres aplicados a la clase de  $(12)(34)$  son iguales a los de la clase de 1, dado que éste es el elemento que genera la clase de la unidad (en éste caso  $D'_4$ , véase la figura 3.9) para la representación del grupo de Cayley como se está considerando.

# Elementos	1	2	2	2	1
Clase	$[(1)]_{D_4}$	$[(13)]_{D_4}$	$[(1234)]_{D_4}$	$[(12)(34)]_{D_4}$	$[(13)(24)]_{D_4}$
$\nu_1$	1	1	1	1	1
$\nu_2$	1	-1	-1	1	1
$\nu_3$	1	1	-1	-1	1
$\nu_4$	1	-1	1	-1	1
$\nu_5$	2	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$

Figura 3.10: Tabla de Caracteres parcial de  $D_4$ .

Sabemos que  $\nu_5(1) = 2$  por la proposición 1.26 que nos dice que

$$\sum_{i=1}^5 \nu_i^2(1) = |D_4| = 8, \quad (3.3)$$

y dado que  $\sum_{i=1}^4 \nu_i^2(1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ , la única manera de obtener la ecuación 3.3 es que  $\nu_5^2(1) = 4$ . Como  $\nu_5(1) \geq 1$ , entonces el resultado se sigue.

De la tabla 3.10, llamemos  $u_i$  al  $i$ -ésimo vector columna. Así las relaciones de ortogo-

nalidad dadas por la ecuación (1.36) nos dan:

$$\begin{aligned} \langle u_2, u_1 \rangle &= 1 - 1 + 1 - 1 + 2\alpha_2 = 2\alpha_2 = 0 \\ \langle u_3, u_1 \rangle &= 1 - 1 - 1 + 1 + 2\alpha_3 = 2\alpha_3 = 0 \\ \langle u_4, u_1 \rangle &= 1 + 1 - 1 - 1 + 2\alpha_4 = 2\alpha_4 = 0 \\ \langle u_5, u_1 \rangle &= 1 + 1 + 1 + 1 + 2\alpha_5 = 4 + 2\alpha_5 = 0 \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_5 &= -2 \end{aligned}$$

para finalmente obtener la tabla de caracteres de  $D_4$ .

Elementos	(1)	(24) (13)	(1432) (1234)	(14)(23) (12)(34)	(13)(24)
	$\nu_1$	1	1	1	1
$\nu_2$	1	-1	-1	1	1
$\nu_3$	1	1	-1	-1	1
$\nu_4$	1	-1	1	-1	1
$\nu_5$	2	0	0	0	-2

Figura 3.11: Tabla de Caracteres de  $D_4$ .

### 3.5. $\mathbb{C}X^n$ como suma de módulos simples

A continuación se muestra la construcción del producto cartesiano de  $n$  copias del módulo de permutaciones  $\mathbb{C}X^n$ . Éste se expresará como suma de módulos simples de  $S_n$  con la finalidad de analizar la acción de  $S_n$  sobre él.

Consideremos al grupo de permutaciones de cuatro elementos actuando sobre  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ .

La tabla de caracteres de  $S_4$  es la que se muestra en la figura 3.6. En ella se observa la

lista completa de caracteres simples de  $S_4$ , además

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{C} &= \chi_1((1)) = 1 \\ \dim \widehat{\mathbb{C}} &= \chi_2((1)) = 1 \\ \dim V &= \chi_3((1)) = 3 \\ \dim V' &= \chi_4((1)) = 3 \\ \dim W &= \chi_5((1)) = 2. \end{aligned}$$

Tomemos

$$X^n = X \times \dots \times X = \{(i_1, \dots, i_n) | j \in \{1, \dots, n\}, i_j \in \{1, 2, 3, 4\}\}, \quad (3.4)$$

el producto de  $n$  copias de  $X$ ,  $g \in S_4$ ,  $x = (i_1, \dots, i_n)$ .  $S_4$  actúa de la siguiente manera

$$gx = g(i_1, \dots, i_n) = (gi_1, \dots, gi_n).$$

A  $X^1$  simplemente lo denotaremos como  $X$ . Construimos  $X^{n+1}$  a partir de  $X^n$  y  $X$  de tal forma que

$$X^{n+1} = X^n \times X = \{(i_1, \dots, i_n, i_{n+1}) | (i_1, \dots, i_n) \in X^n, i_n \in \{1, 2, 3, 4\}\},$$

de aquí que por cada elemento que se tiene en  $X^n$ , se construyen 4 elementos en  $X^{n+1}$ .

Por último, mostraremos que

$$\mathbb{C}X^n = (d_{n_1} \mathbb{C}) \oplus (d_{n_2} \widehat{\mathbb{C}}) \oplus (d_{n_3} V) \oplus (d_{n_4} V') \oplus (d_{n_5} W) \quad (3.5)$$

con

$$\begin{aligned} d_{n_1} &= \langle \chi_{\mathbb{C}X^n}, \chi_1 \rangle = \frac{1}{24}(4^n + 6 \cdot 2^n + 8) \\ d_{n_2} &= \langle \chi_{\mathbb{C}X^n}, \chi_2 \rangle = \frac{1}{24}(4^n - 6 \cdot 2^n + 8) \\ d_{n_3} &= \langle \chi_{\mathbb{C}X^n}, \chi_3 \rangle = \frac{1}{24}(3 \cdot 4^n + 6 \cdot 2^n) \\ d_{n_4} &= \langle \chi_{\mathbb{C}X^n}, \chi_4 \rangle = \frac{1}{24}(3 \cdot 4^n - 6 \cdot 2^n) \\ d_{n_5} &= \langle \chi_{\mathbb{C}X^n}, \chi_5 \rangle = \frac{1}{24}(2 \cdot 4^n - 8). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por inducción sobre  $n$ , si  $n = 1$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbb{C}X}((1)) &= 4 \\ \chi_{\mathbb{C}X}((12)) &= 2 \\ \chi_{\mathbb{C}X}((123)) &= 1 \\ \chi_{\mathbb{C}X}((1234)) &= 0 \\ \chi_{\mathbb{C}X}((12)(34)) &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

y

$$\begin{aligned} d_{1_1} &= \langle \chi_{\mathbb{C}X}, \chi_1 \rangle = \frac{1}{24}(4^1 + 6 \cdot 2^1 + 8) = \frac{24}{24} = 1 \\ d_{1_2} &= \langle \chi_{\mathbb{C}X}, \chi_2 \rangle = \frac{1}{24}(4^1 - 6 \cdot 2^1 + 8) = \frac{0}{24} = 0 \\ d_{1_3} &= \langle \chi_{\mathbb{C}X}, \chi_3 \rangle = \frac{1}{24}(3 \cdot 4^1 + 6 \cdot 2^1) = \frac{24}{24} = 1 \\ d_{1_4} &= \langle \chi_{\mathbb{C}X}, \chi_4 \rangle = \frac{1}{24}(3 \cdot 4^1 - 6 \cdot 2^1) = \frac{0}{24} = 0 \\ d_{1_5} &= \langle \chi_{\mathbb{C}X}, \chi_5 \rangle = \frac{1}{24}(2 \cdot 4^1 - 8) = \frac{0}{24} = 0 \end{aligned}$$

que, en efecto, nos dice que

$$\mathbb{C}X \cong \mathbb{C} \oplus V$$

como ya se sabía.

Supongamos que se cumplen las condiciones para  $n = k$  en (3.5) y (3.7), y sea  $x = (i_1, \dots, i_k) \in X^k$ ; del cual, por la expresión 3.4 se obtienen 4 elementos en  $X^{k+1}$ , a saber,  $(i_1, \dots, i_k, 1)$ ,  $(i_1, \dots, i_k, 2)$ ,  $(i_1, \dots, i_k, 3)$  y  $(i_1, \dots, i_k, 4)$ . Sea  $\sigma \in S_4$  dada, entonces

- Si  $\sigma = (1)$  fija a  $x$ , entonces  $\sigma$  fija a  $(i_1, \dots, i_k, i_{k+1})$  para  $i_{k+1} \in \{1, 2, 3, 4\}$
- Si  $\sigma = (12)$  fija a  $x$ , entonces  $\sigma$  fija a  $(i_1, \dots, i_k, 3)$  y a  $(i_1, \dots, i_k, 4)$
- Si  $\sigma = (123)$  fija a  $x$ , entonces  $\sigma$  fija a  $(i_1, \dots, i_k, 4)$
- Si  $\sigma = (1234)$ , entonces  $\sigma$  no fija a ningún elemento en  $X^{k+1}$
- Si  $\sigma = (12)(34)$ , entonces  $\sigma$  no fija a ningún elemento en  $X^{k+1}$ .

Entonces, por lo anterior y por las ecuaciones (3.5) y (3.7) tenemos que

- $\sigma = (1)$  fija a todos los elementos en  $X^{k+1}$ , que son  $4^{k+1}$  elementos
- $\sigma = (12)$  fija a  $2^{k+1}$
- $\sigma = (123)$  fija a 1 elemento
- $\sigma = (1234)$  no fija a ningún elemento en  $X^{k+1}$
- $\sigma = (12)(34)$  no fija a ningún elemento en  $X^{k+1}$ .

Si se tiene una  $\rho$  con la misma estructura cíclica que  $\sigma$ , se puede sustituir  $\rho$  en los enunciados anteriores para obtener el mismo resultado con respecto a ésta nueva  $\rho$ .



# Capítulo 4

## Particiones y grupos simétricos

### 4.1. Particiones y diagramas de Young

A partir de ahora, consideraremos a  $n$  un entero positivo fijo.

**Definición 4.1** (Partición). Una partición de  $n$  es un vector

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k), \quad (4.2)$$

tal que  $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1$ , y ésto lo escribimos como  $\lambda \vdash n$ .

A toda partición  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  se le asocia un *diagrama de Young* (*cuadrícula de Young* o *diagrama de Ferrer*), formado por  $k$  renglones alineados por la izquierda de tal forma que se tienen  $\lambda_i$  cuadros en el  $i$ -ésimo renglón. La partición conjugada de  $\lambda$  es  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l)$ , donde  $\mu_i$  es el número de componentes de la partición  $\lambda$  que son mayores o iguales que  $i$ . Al cuadro que se encuentra en el renglón  $i$  y en la columna  $j$  del diagrama le asignamos coordenadas  $(i, j)$  de la misma manera que lo hacemos en las entradas de las matrices.

Consideremos la expresión de un elemento de  $S_n$  como producto de ciclos ajenos ordenados por *longitud* de mayor a menor. Si tenemos la partición  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  de  $n$ , para  $S_n$  tenemos una correspondencia entre la partición y la clase de conjugación

$$[(1 \dots \lambda_1)(\lambda_1 + 1 \dots \lambda_2) \cdots (\lambda_{k-1} + 1 \dots \lambda_k)].$$

*Ejemplo 4.3.* En  $S_8$ , la estructura cíclica que corresponde a la clase del tablero de Young

$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 6 & 7 & 5 & \\ \hline 8 & & & \\ \hline \end{array}$  es la clase

$$[(1234)(567)] \leftrightarrow [(4, 3, 1)].$$

□

Como consecuencia, dado que cada partición está relacionada con un diagrama de Young, tenemos también que los diagramas de Young se corresponden con las clases de conjugación de  $S_n$ . Más adelante veremos que existen  $S_n$ -módulos que se corresponden con las particiones de  $n$ . La figura 4.1 muestra los diagramas de Young que corresponden a las diferentes estructuras cíclicas en  $S_n$ , para  $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ . En ella consideraremos en general que  $V$  es el  $G$ -módulo que corresponde a la partición  $\lambda$ ; denotaremos como  $V'$  al que corresponde a  $\lambda'$ , la partición conjugada. Más adelante veremos que  $\mathbb{C}_n$ ,  $\widehat{\mathbb{C}}_n$ ,  $V_n$ ,  $V'_n$  serán los  $S_n$ -submódulos simples que corresponden a las siguientes representaciones respectivamente: Trivial, alternante, estándar y transpuesta conjugada de la estándar ( $V_n \otimes \widehat{\mathbb{C}}$ ). En el caso de  $n = 5$  los subíndices utilizados para  $W_1$ ,  $W_2$  y  $W'_2$  no especifican nada en particular.

## 4.2. $\lambda$ -tableros de Young

Dado el diagrama de Young de una partición  $\lambda$ , a cada cuadro de ella le asignamos un número de entre  $1, \dots, n$  sin que éstos se repitan. A la figura resultante le llamamos  $\lambda$ -tablero de Young, y lo denotamos como  $T_\lambda$ . Claramente existen  $n!$  tableros de Young para cualquier partición  $\lambda$ .

Dadas dos particiones de  $n$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  y  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)$ , tenemos las siguientes relaciones de orden entre ellas:

**Orden lexicográfico (“ $\prec$ ”)**  $\lambda \prec \mu$ , si para algún  $i$ ,  $\lambda_j = \mu_j$  para  $j < i$  y  $\lambda_i < \mu_i$ .

**Orden de dominación (“ $\triangleleft$ ”)**  $\mu$  domina a  $\lambda$  si  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i \leq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i$  para todo  $i \leq \max(r, s)$   $\lambda \triangleleft \mu$ . Éste es un orden parcial.

En los  $\lambda$ -tableros de Young correspondientes a distintas particiones de un natural fijo  $n$ , también podemos definir un orden. Sean  $T_\lambda$  y  $T_\mu$  dos  $\lambda$ -tableros de Young. Diremos que  $T_\lambda < T_\mu$  si:

- $\lambda \prec \mu$ , de no ser así,  $\lambda = \mu$ . Si  $x \in \{1, 2, \dots, n\}$  es el mayor número que no está en la misma casilla en  $T_\lambda$  y  $T_\mu$ :
- el índice de la columna de  $x$  en  $T_\lambda$  es mayor que el índice de la columna de  $x$  en  $T_\mu$ , de no ser así,
- la columna de  $x$  en  $T_\lambda$  es igual a la columna de  $x$  en  $T_\mu$  y el índice del renglón de  $x$  en  $T_\lambda$  es menor al índice del renglón de  $x$  en  $T_\mu$ .

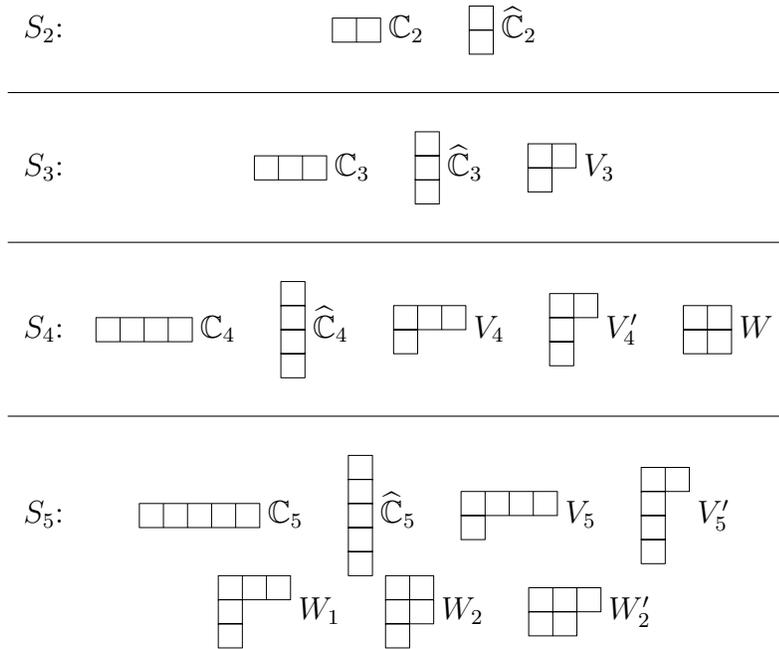


Figura 4.1: Diagramas de Young bajo acción de  $S_n$  con  $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ .

Ejemplo 4.4.  $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ , donde la primera desigualdad es dada por el primer criterio enlistado (orden lexicográfico), la siguiente es por el segundo criterio, la tercera es dada por el tercer criterio.  $\square$

Definimos entonces los siguientes subgrupos de  $S_n$ :

$$\begin{aligned} R(T_\lambda) &:= \{g \in S_n | g \text{ deja invariantes los renglones de } T_\lambda\} \\ C(T_\lambda) &:= \{g \in S_n | g \text{ deja invariantes las columnas de } T_\lambda\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Consideremos a las particiones  $\lambda$  y  $\mu$  tales que  $\lambda$  no domina estrictamente a  $\mu$  con  $T_\lambda$ ,  $T_\mu$  tableros correspondientes a  $\lambda$  y  $\mu$  respectivamente. Dada la definición de orden entre

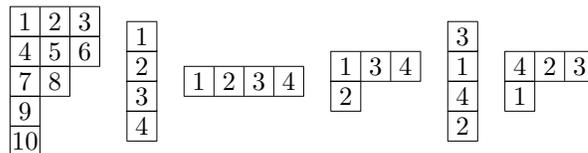


Figura 4.2: Tableros de Young.

dos tableros se puede demostrar que:

1. Hay dos enteros distintos  $i, j$  que están en la misma columna de  $T_\lambda$  y en el mismo renglón de  $T_\mu$ , o bien:
2.  $\lambda = \mu$  y existen  $\sigma \in R(T_\mu)$ ,  $\tau \in C(T_\lambda)$  tales que  $\sigma T_\mu = \tau T_\lambda$ .

**Definición 4.6** (Tablero estándar). Un  $\lambda$ -tablero es *estándar* si la numeración asignada forma una sucesión creciente en cada renglón de izquierda a derecha y en cada columna de arriba a abajo.

**Corolario 4.7.** Si  $T_\lambda < T_\mu$ , donde  $T_\lambda$  y  $T_\mu$  son tableros estándares, entonces existen dos enteros distintos  $i, j$  que están en la misma columna de  $T_\lambda$  y en el mismo renglón de  $T_\mu$ .  $\square$

**Proposición 4.8.** Si  $T_\lambda$  es un tablero estándar,  $\sigma \in R(T_\lambda)$ ,  $\tau \in C(T_\lambda)$ , entonces  $T_\lambda \leq \sigma T_\lambda$  y  $\tau T_\lambda \leq T_\lambda$ .  $\square$

### 4.3. $\lambda$ -tabloides

**Definición 4.9.** Dos  $\lambda$ -tableros  $T_\lambda$  y  $T'_\lambda$  son *equivalentes* si los números asignados en sus correspondientes renglones son los mismos.

Se puede mostrar que la relación de la definición anterior es una relación de equivalencia y que la acción de  $S_n$  preserva la relación. Es decir, si  $\sigma \in S_n$ ,  $T_\lambda$  y  $T'_\lambda$  son equivalentes, entonces  $\sigma T_\lambda$  y  $\sigma T'_\lambda$  son equivalentes.

**Definición 4.10.** A la clase de equivalencia de  $T_\lambda$  la llamamos un  $\lambda$ -*tabloide* y lo denotamos como  $\{T_\lambda\}$ .

Vemos que  $S_n$  actúa en los tabloides correspondientes de las particiones de  $n$  de tal forma que si  $\lambda \vdash n$  y  $T_\lambda$  es un  $\lambda$ -tablero, la acción está dada por

$$\sigma\{T_\lambda\} = \{\sigma T_\lambda\};$$

y obsérvese también que  $\{T_\lambda\} = R(T_\lambda)T_\lambda$ .

### 4.4. Módulos de Specht

Si  $\lambda$  es como en la expresión (4.2), consideremos a

$$S_\lambda := S_{\{1,2,\dots,\lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1,\lambda_1+2,\dots,\lambda_1+\lambda_2\}} \times \cdots \times S_{\{n-\lambda_k+1,n-\lambda_k+2,\dots,n\}}.$$

Visto de otra forma,

$$S_\lambda \cong S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \cdots \times S_{\lambda_k}. \quad (4.11)$$

Considérese la colección completa de  $\lambda$ -tabloides es la familia

$$\mathcal{T} = \{\{T_i\}\}_{i=1}^s \quad (4.12)$$

**Definición 4.13.** Sea  $M^\lambda = \mathbb{C}\mathcal{T}$ .  $M^\lambda$  es llamado el *módulo de permutaciones correspondiente a  $\lambda$* .

Para una partición  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \vdash n$ , definimos  $\lambda!$  como

$$\lambda! = \lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_k! \quad (4.14)$$

Decimos que una acción de  $G$  sobre  $X$  es *transitiva* si para toda  $x \in X$  existe  $g \in G$ ,  $y \in X$  tal que  $gy = x$ . En general, si tenemos que  $V$  es un  $A$ -módulo y  $v \in V$ , entonces  $Av = \{av | a \in A\}$  es submódulo de  $V$ . En caso de que exista  $v \in V$  tal que  $Av = V$ , se dice que  $V$  es *cíclico* y que  $V$  es generado por  $v$ . Dada una partición  $\lambda \vdash n$ , el grupo  $S_n$  actúa transitivamente en el conjunto de  $\lambda$ -tableros, con estabilizador  $S_\lambda$ .

De la misma manera, si  $G$  actúa transitivamente en  $X$ , entonces  $\mathbb{C}X \cong \mathbb{C} \uparrow_{G_x}^G$  para alguna  $x \in X$ , donde  $G_x$  denota al estabilizador de  $x$ .

Dado que la acción es transitiva en  $M^\lambda$ ,  $\dim M^\lambda = \frac{n!}{\lambda!}$ .

**Proposición 4.15.** Dada una partición  $\lambda \vdash n$ , implica que  $M^\lambda$  es cíclico, generado por algún  $\lambda$ -tabloide dado. Además  $\dim M^\lambda = \frac{n!}{\lambda!}$ .  $\square$

Si  $\lambda \vdash n$ , dado un  $\lambda$ -tablero  $T$ , definimos

$$b_T = \sum_{\tau \in C(T)} (\text{sgn } \tau) \tau \in \mathbb{C}S_n \quad (4.16)$$

$$v_T = \sum_{\tau \in C(T)} (\text{sgn } \tau) \tau \{T\} = b_T \{T\} \in M^\lambda. \quad (4.17)$$

Además (lema 2.3.3 [Sag]), si  $\sigma \in S_n$ , entonces

$$\begin{aligned} b_{\sigma T} &= \sigma b_T \sigma^{-1} \\ v_{\sigma T} &= \sigma v_T. \end{aligned} \quad (4.18)$$

**Definición 4.19** (Módulo de Specht). Para cualquier partición  $\lambda \vdash n$ , el correspondiente *módulo de Specht*,  $S^\lambda$ , es el submódulo de  $M^\lambda$  generado por los elementos  $v_{T_{\lambda_i}}$ , donde  $T_{\lambda_i}$  está en la familia  $\mathcal{T}$  definida en (4.12), de los tabloides de  $\lambda$  ([Sag]).

**Proposición 4.20.**  $S^\lambda$  es cíclico, generado por un elemento  $v_{T_\lambda}$ .  $\square$

Utilizaremos ahora los resultados de las proposiciones 1 y 2 del capítulo 7 de [Fu1], que se enuncian a continuación. La demostración de los lemas (1,2 y 3) del mismo capítulo, correspondientes a las proposiciones 4.21 y 4.22 se basa en la observación de detalles de la acción de  $S_n$  sobre los tableros, en combinación con los órdenes definidos aquí anteriormente.

**Proposición 4.21.** Para toda  $\lambda \vdash n$ ,  $S^\lambda$  es un módulo irreducible de  $S_n$ . Cualquier módulo irreducible de  $S_n$  es isomorfo a uno y sólo uno de los módulos  $S^\lambda$  ([Fu1], página 87).  $\square$

**Proposición 4.22.** Los elementos  $v_{T_\lambda}$ , con  $T_\lambda$   $\lambda$ -tablero estándar, forman una base para  $S^\lambda$ .  $\square$

*Ejemplo 4.23.* En general para  $S_n$ , si tenemos las dos particiones de  $n$ ,  $\lambda_1 = (n)$  y  $\lambda_1 = (1, \dots, 1)$ , y  $P$  es el tablero estándar para  $\lambda_1$  se obtiene que

$$C(T_{\lambda_1}) = C(P),$$

con lo cual

$$\begin{aligned} b_P &= (1) \in S_n, \\ v_P &= \{P\}, v_{T_{\lambda_1}} &= \sum_{\tau \in C_P} \text{sgn}(\tau) \tau \{P\} = 0, \\ S^{\lambda_1} &= \mathbb{C}\{P\} \cong \mathbb{C}. \end{aligned}$$

De forma similar, si  $Q$  es el tablero estándar para  $\lambda_2$ ,

$$\begin{aligned} C(Q) &= S_n, \\ v_Q &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \sigma \{Q\}. \end{aligned}$$

Supongamos que  $\pi \in S_n$  tal que  $\pi\sigma = \tau$ , entonces

$$\begin{aligned} \pi v_Q &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \pi \sigma \{Q\}, \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\pi^{-1}\tau) \tau \{Q\}, \\ &= \text{sgn}(\pi^{-1}) \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) \tau \{Q\}, \\ &= \text{sgn}(\pi) v_Q. \end{aligned}$$

Así, para todo  $T$  tablero de  $\lambda_2$  sucede que  $v_T = \pm v_Q$ , con lo cual  $\dim(S^{\lambda_2}) = 1$  y

$$S^{\lambda_2} = \mathbb{C}\{v_Q\}$$

con la acción en la base de  $S^Q$  definida para cualquier  $\sigma \in S_n$  como

$$\sigma\{v_Q\} = \text{sgn}(\sigma)\{v_Q\},$$

que corresponde a la representación *alternante*. □

*Ejemplo 4.24.* Los tableros estándar asociados a las distintas particiones de 4, que corresponden a los módulos irreducibles de  $S_4$  son los que se muestran en la figura 4.3. Por la proposición 4.22 tenemos que

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{C} &= 1, \\ \dim \widehat{\mathbb{C}} &= 1, \\ \dim V_4 &= 3, \\ \dim V'_4 &= 3, \\ \dim W &= 2. \end{aligned}$$

La construcción de las bases para los módulos  $\mathbb{C}$  y  $\widehat{\mathbb{C}}$  a partir de éstos tableros se muestra en el ejemplo 4.23 cuando  $n = 4$ . Para el resto de los casos mostramos los cálculos a continuación.

Consideremos los siguientes subgrupos de  $S_4$ :

$$\begin{aligned} C(R_1) &= \{(1), (14)\}, \\ C(R_2) &= \{(1), (13)\}, \\ C(R_3) &= \{(1), (12)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(S_1) &= \{(1), (13), (14), (34), (134), (143)\}, \\ C(S_2) &= \{(1), (12), (14), (24), (124), (142)\}, \\ C(S_3) &= \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(T_1) &= \{(1), (13), (24), (13)(24)\}, \\ C(T_2) &= \{(1), (12), (34), (12)(34)\}; \end{aligned}$$

y así de la definición de la base de un módulo irreducible, verificando equivalencias de los

$\mathbb{C}$ :	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} P$	$\lambda = (5)$
$\widehat{\mathbb{C}}$ :	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} Q$	$\lambda = (1, 1, 1, 1)$
$V_4$ :	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} R_1$ $\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} R_2$ $\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} R_3$	$\lambda = (3, 1)$
$V'_4$ :	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} S_1$ $\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} S_2$ $\begin{array}{ c c } \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} S_3$	$\lambda = (2, 1, 1)$
$W$ :	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} T_1$ $\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} T_2$	$\lambda = (2, 2)$

Figura 4.3: Tableros estándar correspondientes a las particiones de  $S_4$ .

tabloides correspondientes obtenemos:

$$\begin{aligned} v_{R_1} &= \{R_1\} - (12)\{R_3\}, \\ v_{R_2} &= \{R_2\} - (12)\{R_3\}, \\ v_{R_3} &= \{R_3\} - (12)\{R_3\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{S_1} &= \{S_1\} - (12)\{S_2\} - (14)\{S_1\} - (34)\{S_1\} + (124)\{S_2\} + (12)\{S_3\}, \\ v_{S_2} &= \{S_2\} - (12)\{S_2\} - (14)\{S_2\} - (24)\{S_2\} + (124)\{S_2\} + (132)\{S_3\}, \\ v_{S_3} &= \{S_3\} - (12)\{S_3\} - (13)\{S_3\} - (23)\{S_3\} + (14)\{S_1\} + (132)\{S_3\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{T_1} &= \{T_1\} - (12)\{T_2\} - (34)\{T_2\} + (14)\{T_2\}, \\ v_{T_2} &= \{T_2\} - (12)\{T_2\} - (34)\{T_2\} + (14)\{T_1\}. \end{aligned}$$

Consideremos a los representantes de las clases de conjugación en  $S_4$  mostradas en la ecuación (3.1), y respectivas cardinalidades en (3.2) (utilizados en su tabla de caracteres), los cuales actúan como se muestra a continuación en los elementos de las bases definidas anteriormente. Nótese que cada elemento de la base correspondiente está determinado por uno y sólo un tabloide  $\{T\}$ , proveniente de un tablero estándar  $T$ . Así que una vez calculadas dichas acciones, para encontrar la expresión como combinación lineal —respecto a la base— de cada uno de los elementos  $v$ , calculados, uno se puede fijar en los tabloides provenientes de los tableros estándar. De ésta forma, si en la expresión de  $v$  aparece el tabloide  $\{T\}$

$(-\{T\})$ , significa que  $v_T$  ( $-v_T$ ) es parte de la combinación lineal de  $v$ . Como se muestra en la figura 4.4.

Como consecuencia de ello, observamos a las representaciones  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $\rho_3$  en  $V_4$ ,  $V'_4$  y  $W$  respectivamente, dadas por su definición en sus bases como

$$\begin{aligned} \rho_1(12) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, & \rho_1(123) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \rho_1(1234) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, & \rho_1(12)(34) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2(12) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \rho_2(123) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \rho_2(1234) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & \rho_2(12)(34) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_1(12) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, & \rho_1(123) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \rho_1(1234) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \rho_1(12)(34) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (12)v_{R_1} &= v_{R_1} - v_{R_3} & (123)v_{R_1} &= v_{R_1} - v_{R_3} \\ (12)v_{R_2} &= v_{R_2} - v_{R_3} & (123)v_{R_2} &= -v_{R_3} \\ (12)v_{R_3} &= -v_{R_3} & (123)v_{R_3} &= v_{R_2} - v_{R_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1234)v_{R_1} &= -v_{R_3} & (12)(34)v_{R_1} &= v_{R_2} - v_{R_3} \\ (1234)v_{R_2} &= v_{R_1} - v_{R_3} & (12)(34)v_{R_2} &= v_{R_1} - v_{R_3} \\ (1234)v_{R_3} &= v_{R_2} - v_{R_3} & (12)(34)v_{R_3} &= -v_{R_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (12)v_{S_1} &= v_{S_1} - v_{S_2} + v_{S_3} & (123)v_{S_1} &= -v_{S_2} \\ (12)v_{S_2} &= -v_{S_2} & (123)v_{S_2} &= v_{S_1} - v_{S_2} + v_{S_3} \\ (12)v_{S_3} &= -v_{S_3} & (123)v_{S_3} &= v_{S_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1234)v_{S_1} &= v_{S_2} & (12)(34)v_{S_1} &= -v_{S_1} + v_{S_2} - v_{S_3} \\ (1234)v_{S_2} &= v_{S_3} & (12)(34)v_{S_2} &= -v_{S_3} \\ (1234)v_{S_3} &= v_{S_1} - v_{S_2} + v_{S_3} & (12)(34)v_{S_3} &= -v_{S_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (12)v_{T_1} &= v_{T_1} - v_{T_2} & (123)v_{T_1} &= -v_{T_2} \\ (12)v_{T_2} &= -v_{T_2} & (123)v_{T_2} &= v_{T_1} - v_{T_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1234)v_{T_1} &= -v_{T_1} & (12)(34)v_{T_1} &= v_{T_1} \\ (1234)v_{T_2} &= -v_{T_1} + v_{T_2} & (12)(34)v_{T_2} &= v_{T_2}. \end{aligned}$$

Figura 4.4: Acción de  $S_4$  sobre las bases de  $V_4$ ,  $V'_4$  y  $W$

Entonces

$$\begin{aligned}\chi_{V_4}((1)) &= 3, \\ \chi_{V_4}((12)) &= 1, \\ \chi_{V_4}((1234)) &= -1, \\ \chi_{V_4}((123)) &= 0, \\ \chi_{V_4}((12)(34)) &= -1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_{V_4'}((1)) &= 3, \\ \chi_{V_4'}((12)) &= -1, \\ \chi_{V_4'}((1234)) &= 1, \\ \chi_{V_4'}((123)) &= 0, \\ \chi_{V_4'}((12)(34)) &= -1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_W((1)) &= 2, \\ \chi_W((12)) &= 0, \\ \chi_W((1234)) &= 1, \\ \chi_W((123)) &= 0, \\ \chi_W((12)(34)) &= 2.\end{aligned}$$

□

*Ejemplo 4.25.* Las clases de conjugación de  $S_5$  se muestran a continuación, así como sus cardinalidades.

$$[(1)], [(12)], [(123)], [(1234)], [(12345)], [(12)(34)] \text{ y } [(123)(45)],$$

$$\begin{aligned}||[(1)]|| &= 1, \\ ||[(12)]|| &= \frac{1}{2} \binom{5!}{3!} = 10, \\ ||[(123)]|| &= \frac{1}{3} \binom{5!}{2!} = 20, \\ ||[(1234)]|| &= \frac{1}{4} \binom{5!}{1!} = 30, \\ ||[(12345)]|| &= \frac{1}{5} \binom{5!}{0!} = 24, \\ ||[(12)(34)]|| &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \binom{5!}{3!} \frac{1}{2} \binom{3!}{1!} \right) = 15, \\ ||[(123)(45)]|| &= \frac{1}{3} \binom{5!}{2!} \frac{1}{2} \binom{2!}{0!} = 20.\end{aligned}$$

Los tableros estándar asociados a las distintas particiones, que corresponden a los módulos

irreducibles de  $S_5$  aparecen en la figura 4.5; de donde obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \dim \mathbb{C} &= 1, & \dim W_1 &= 6, \\
 \dim \widehat{\mathbb{C}} &= 1, & \dim W_2 &= 5, \\
 \dim V_5 &= 4, & \dim W'_2 &= 5. \\
 \dim V'_5 &= 4,
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

□

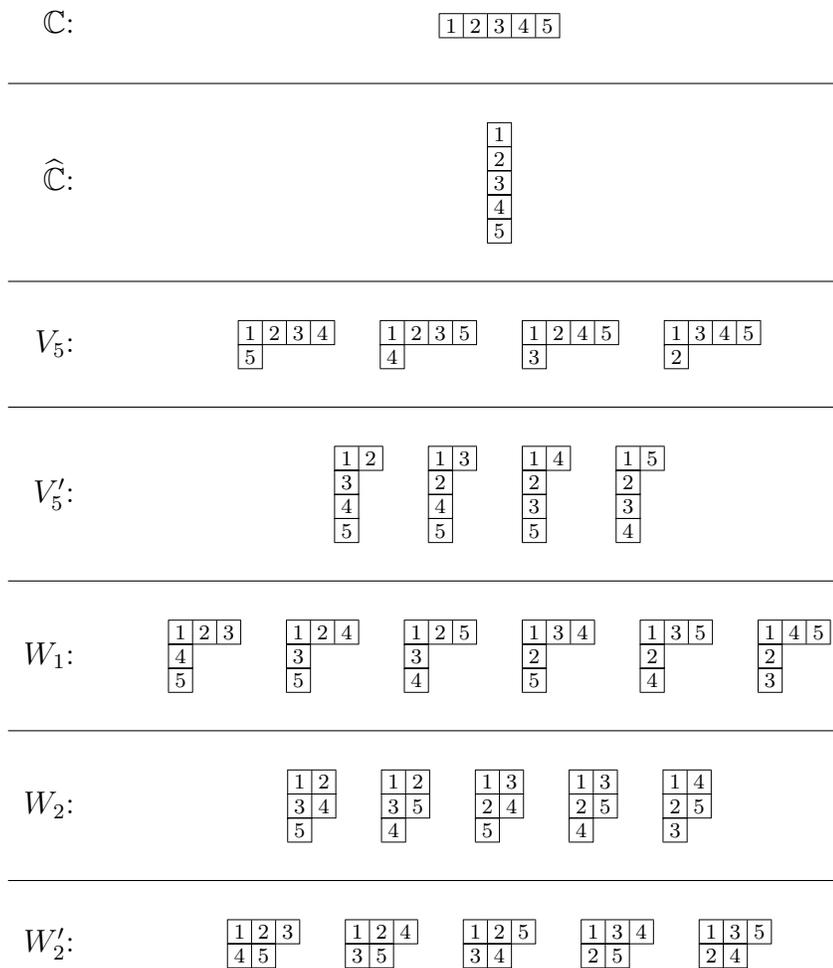


Figura 4.5: Tableros estándar correspondientes a las particiones de  $S_5$ .



# Capítulo 5

## Homología de complejos simpliciales

Ahora se utilizarán los resultados presentados hasta éste punto para la construcción de la homología de un complejo simplicial en base a las acciones de  $S_n$  sobre éste último. Para ello expresaremos los módulos correspondientes como suma de módulos simples.

### 5.1. Complejos simpliciales

**Definición 5.1.** Sea el conjunto de  $n + 1$  elementos

$$\mathcal{V} = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}, \quad (5.2)$$

tal que  $\Delta$  es una colección de conjuntos en  $\mathcal{P}(\mathcal{V})$  (*potencia* de  $\mathcal{V}$ ) tal que si  $B$  está en  $\Delta$ , entonces cualquier subconjunto de  $B$  también está en  $\Delta$ .

**Definición 5.3.** Al conjunto  $B$  lo llamamos una *cara* de  $\Delta$  o un *simplejo* de  $\Delta$ . Si  $B$  tiene  $p + 1$  elementos, decimos que  $B$  es un *p-simplejo* de  $\Delta$  y que su dimensión es  $p$ . A la familia de  $p$ -simplejos la denotamos  $\Delta_p$ .

La dimensión de un complejo simplicial  $\Delta$  es  $n$  si  $n$  es el máximo de las dimensiones de los simplejos de  $\Delta$ , lo cual denotamos como  $\dim \Delta = n$ .

Supongamos que  $\Delta$  es un complejo simplicial como el de la definición 5.1, considerémos al  $p$ -simplejo  $s = \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$  junto con una *ordenación* de sus elementos, a la cual denotamos como

$$(s) = (v_0, v_1, \dots, v_p) \quad (5.4)$$

y nos referimos a ella como un *p-simplejo orientado*. Decimos que dos *p*-simplejos orientados del simplejo  $s$  son iguales si —las ordenaciones de  $s$ — difieren por una permutación par. De lo contrario, diremos que los *p*-simplejos orientados tienen orientación opuesta.

*Ejemplo 5.5.* Consideremos al 3-simplejo  $\{v_1, v_2, v_3\}$ . Sus ordenaciones  $(v_1, v_2, v_3)$  y  $(v_3, v_1, v_2)$  son iguales. Es decir,  $(v_1, v_2, v_3) = (v_3, v_1, v_2)$  como simplejos orientados. Por otra parte,  $(v_1, v_2, v_3)$  y  $(v_1, v_3, v_2)$  tienen orientación opuesta y por lo tanto son distintos como 3-simplejos orientados.

□

Dado que no hay confusión dentro de uno u otro contexto, utilizaremos la letra  $s$  para referirnos ya sea a un *p*-simplejo en  $\Delta$  o bien a un *p*-simplejo orientado de  $\Delta$ .

Al conjunto de *p*-simplejos orientados de  $\Delta$  lo denotamos como  $\overrightarrow{\Delta}_p$ , y definimos a  $\overrightarrow{\Delta}$  como

$$\bigcup_{i=1}^n \overrightarrow{\Delta}_p.$$

**Definición 5.6.** Una *p*-cadena en  $\Delta$  es una función  $c : \overrightarrow{\Delta}_p \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

1.  $c(s) = -c(s')$  si  $s$  y  $s'$  tienen orientaciones opuestas y
2.  $c(s) = 0$  para casi todo *p*-simplejo orientado en  $\overrightarrow{\Delta}_p$ .

En nuestro caso, dado que aquí sólo se estudian los complejos simpliciales cuyo conjunto de vértices es finito; la segunda condición de la definición no se aplica.

Consideraremos la suma de *p*-cadenas como la suma de funciones; el  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial resultante es llamado el *espacio de p-cadenas (orientadas)* de  $\Delta$  y lo denotamos como  $C_p(\Delta)$ .

## 5.2. Homología simplicial

**Definición 5.7.** Sea  $s \in \overrightarrow{\Delta}_p$ , la *cadena elemental* correspondiente a  $s$  es la función  $c_s : \overrightarrow{\Delta}_p \rightarrow \mathbb{C}$  definida como

$$c_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = s \\ -1 & \text{si } t \text{ tiene orientación opuesta a } s \\ 0 & \text{si } t \neq s, t \neq s' \end{cases} .$$

*Notación 5.8.* Nuevamente, dado que no se presta a confusión, abusaremos de la notación utilizada para los elementos de  $\overrightarrow{\Delta}_p$ , al referirnos también a la cadena elemental  $c_s$  como  $s$ , pues  $c_s$  está determinada de manera única por  $s$ . Entonces, si  $s$  y  $s'$  son  $p$ -simplejos orientados de  $\Delta$  con orientaciones opuestas entre sí; escribiremos  $s' = -s$  —visto como  $p$ -cadenas elementales—.

**Lema 5.9.** *Una base para  $C_p(\Delta)$  —como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial— se puede obtener tomando una orientación por cada  $p$ -simplejo en  $\Delta$  y usando las  $p$ -cadenas elementales correspondientes como elementos de la base.*

*Demostración.* La prueba es sencilla. Dado que cualquier  $p$ -cadena puede ser escrita como combinación lineal de los elementos de la base sugerida en el lema; y si la cadena es igual a cero, entonces todo coeficiente de la combinación lineal debe ser cero.  $\square$

**Definición 5.10.** El  $p$ -ésimo operador frontera es el morfismo  $\partial_p : C_p(\Delta) \rightarrow C_{p-1}(\Delta)$  tal que si  $s = (v_0, v_1, \dots, v_p) \in \overrightarrow{\Delta}_p$  y  $p > 0$ ,

$$\partial_p(s) = \partial_p(v_0, v_1, \dots, v_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_p).$$

Como  $C_p(\Delta)$  es trivial para  $p < 0$ , el operador  $\partial_p$  se define como el homomorfismo trivial para  $p \leq 0$ . Se puede demostrar que  $\partial_p$  está bien definido con respecto a la elección de representantes de clase.

*Ejemplo 5.11.* En un complejo simplicial de dimensión al menos 3, para un 1-simplejo, calculamos

$$\partial_1(v_0, v_1) = v_1 - v_0,$$

para un 2-simplejo tenemos

$$\partial_2(v_0, v_1, v_2) = (v_1, v_2) - (v_0, v_2) + (v_0, v_1).$$

El cálculo para un 3-simplejo está dado por

$$\partial_3(v_0, v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3) - (v_0, v_2, v_3) + (v_0, v_1, v_3) - (v_0, v_1, v_2).$$

$\square$

**Lema 5.12.**  $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$  ([Mun], página 30).  $\square$

En otros términos, el lema anterior quiere decir que  $\text{Im } \partial_p \subseteq \ker \partial_{p-1}$ . A  $\ker \partial_p$  le llamamos el *espacio de  $p$ -ciclos*.  $\text{Im } \partial_{p+1}$  es llamado el *espacio de  $p$ -fronteras*. A dichos espacios se les denota con  $Z_p(\Delta)$  y  $B_p(\Delta)$  respectivamente. Se tiene que  $B_p(\Delta) \subseteq Z_p(\Delta)$ . Definimos entonces

$$H_p(\Delta) := Z_p(\Delta)/B_p(\Delta),$$

al cual llamamos la  $p$ -ésima homología sobre  $\mathbb{C}$  de  $\Delta$ .

**Definición 5.13.** Definimos ahora al operador  $\varepsilon : C_0(\Delta) \rightarrow \mathbb{C}$  de tal forma que si (5.2) es el conjunto de vértices de  $\Delta$  y  $v = \sum_{i=0}^n a_i v_i$  es la expresión de  $v$  como combinación lineal de la base de  $C_0(\Delta)$ ,  $\varepsilon(v) = \sum_{i=0}^n a_i$ .

**Definición 5.14.** Definimos la homología reducida  $\tilde{H}_p(\Delta)$  en dos casos:

- Si  $p \neq 0$ ,  $\tilde{H}_p(\Delta) = H_p(\Delta)$ .
- Si  $p = 0$ ,  $\tilde{H}_p(\Delta) = \ker \varepsilon / B_p(\Delta)$ , i.e.  $\tilde{H}_0(\Delta) = \ker \varepsilon / B_0(\Delta)$

### 5.3. Aplicación: complejos de apareamiento

**Definición 5.15.** Consideremos a la *gráfica completa* de  $l$  vértices  $K_l$ ; dichos vértices son etiquetados como  $a_1, a_2, \dots, a_l$  y la expresión  $\overline{a_i a_j}$  denotará a la arista que une al vértice  $a_i$  con el vértice  $a_j$ . Llamaremos *complejo de apareamiento* de orden  $l$  al complejo simplicial  $M_l$  de dimensión 1 tal que

1. Su conjunto de vértices (5.2) consta de las aristas en la gráfica  $K_l$ .
2. Si  $v_i = \overline{a_p, a_q}$  y  $v_j = \overline{a_r, a_s}$  están en  $\mathcal{V}$ ,  $\{v_i, v_j\}$  es un 1-simplejo de  $M_l$  si  $v_i$  y  $v_j$  son ajenas.

Ahora concluimos con dos ejemplos en los cuales se utilizarán todos los resultados presentados hasta éste punto, de tal manera que se podrá observar su importancia como herramienta para caracterizar ciertas propiedades de los objetos sobre los cuales se pueda hacer actuar a  $S_n$ . Por simplicidad, en éste caso tomaremos  $n = 4$ .

*Ejemplo 5.16.* Considérese a la *gráfica*  $K_4$ ; construiremos el complejo de  $M_4$  (figura 5.1) dado por el conjunto de vértices

$$\mathcal{V} = \{\overline{12}, \overline{14}, \overline{13}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{34}\},$$

que es el conjunto de aristas de la gráfica  $K_4$ . La familia de 1-simplejos estará dada por el siguiente conjunto:

$$\{\{\overline{12}, \overline{34}\}, \{\overline{13}, \overline{24}\}, \{\overline{14}, \overline{23}\}\}.$$

Es decir,

$$M_4 = \{\{\overline{12}\}, \{\overline{14}\}, \{\overline{13}\}, \{\overline{23}\}, \{\overline{24}\}, \{\overline{34}\}, \{\overline{12}, \overline{34}\}, \{\overline{13}, \overline{24}\}, \{\overline{14}, \overline{23}\}\}.$$

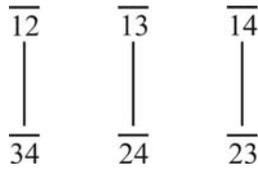


Figura 5.1: Complejo de apareamiento  $M_4$

Tomando la notación de  $p$ -cadenas elementales tenemos los grupos de cadenas

$$\begin{aligned} C_0(M_4) &= \langle \{(\overline{12}), (\overline{14}), (\overline{13}), (\overline{23}), (\overline{24}), (\overline{34})\} \rangle \\ C_1(M_4) &= \langle \{(\overline{12}, \overline{34}), (\overline{13}, \overline{24}), (\overline{14}, \overline{23})\} \rangle. \end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned} a_1 &= \overline{12}, & a_4 &= \overline{23}, & b_1 &= (\overline{12}, \overline{34}) \\ a_2 &= \overline{13}, & a_5 &= \overline{24}, & b_2 &= (\overline{13}, \overline{24}) \\ a_3 &= \overline{14}, & a_6 &= \overline{34}, & b_3 &= (\overline{14}, \overline{23}). \end{aligned}$$

Consideremos a  $\beta_0 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$  y  $\beta_1 = \{b_1, b_2, b_3\}$  como las bases de  $C_0(M_4)$  y  $C_1(M_4)$  respectivamente — $\dim C_0(M_4) = 6$  y  $\dim C_1(M_4) = 3$ —. Obsérvese que  $C_0(M_4)$  es un módulo de permutaciones, puesto que los elementos de su base —como simplejos en abstracto— tienen una sola orientación. Se tienen los siguientes resultados:

$$\begin{array}{cccc} (12)a_1 = a_1 & (123)a_1 = a_4 & (1234)a_1 = a_4 & (12)(34)a_1 = a_1 \\ (12)a_2 = a_4 & (123)a_2 = a_1 & (1234)a_2 = a_5 & (12)(34)a_2 = a_5 \\ (12)a_3 = a_5 & (123)a_3 = a_5 & (1234)a_3 = a_1 & (12)(34)a_3 = a_4 \\ (12)a_4 = a_2 & (123)a_4 = a_2 & (1234)a_4 = a_6 & (12)(34)a_4 = a_3 \\ (12)a_5 = a_3 & (123)a_5 = a_6 & (1234)a_5 = a_2 & (12)(34)a_5 = a_2 \\ (12)a_6 = a_6 & (123)a_6 = a_3 & (1234)a_6 = a_3 & (12)(34)a_6 = a_6 \\ \\ (12)b_1 = b_1 & (123)b_1 = -b_3 & (1234)b_1 = -b_3 & (12)(34)b_1 = b_1 \\ (12)b_2 = -b_3 & (123)b_2 = b_1 & (1234)b_2 = -b_2 & (12)(34)b_2 = -b_2 \\ (12)b_3 = -b_2 & (123)b_3 = -b_2 & (1234)b_3 = b_1 & (12)(34)b_3 = -b_3. \end{array}$$

Entonces tenemos las representaciones  $\theta_1$  y  $\theta_2$  de  $S_4$  en  $C_0(M_4)$  y en  $C_1(M_4)$  respectivamente como se muestran a se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} \theta_2(12) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \theta_2(123) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \theta_2(1234) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \theta_2(12)(34) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_1(12) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & \theta_1(123) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \theta_1(1234) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \theta_1(12)(34) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};\end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned}\chi_{C_0(M_4)}((1)) &= 6, & \chi_{C_0(M_4)}((123)) &= 0, \\ \chi_{C_0(M_4)}((12)) &= 2, & \chi_{C_0(M_4)}((12)(34)) &= 2, \\ \chi_{C_0(M_4)}((1234)) &= 0, \\ \chi_{C_1(M_4)}((1)) &= 3, & \chi_{C_1(M_4)}((123)) &= 0, \\ \chi_{C_1(M_4)}((12)) &= 1, & \chi_{C_1(M_4)}((12)(34)) &= -1, \\ \chi_{C_1(M_4)}((1234)) &= -1,\end{aligned}$$

Añadiendo estos dos últimos caracteres a la tabla de caracteres de la figura 3.6 tenemos la figura 5.2, de la cual se puede observar que  $\chi_{C_1(M_4)} = \chi_3$  y además

$$\begin{aligned}\langle \chi_{C_0(M_4)}, \chi_1 \rangle &= \frac{1}{24} ((1)(1 \cdot 6) + (6)(1 \cdot 2) + (8)(1 \cdot 0) + (6)(1 \cdot 0) + (3)(1 \cdot 2)) = \frac{1}{24}(6 + 12 + 6) = 1, \\ \langle \chi_{C_0(M_4)}, \chi_3 \rangle &= \frac{1}{24} ((1)(3 \cdot 6) + (6)(1 \cdot 2) + (8)(0 \cdot 0) + (6)(-1 \cdot 0) + (3)(-1 \cdot 2)) = \frac{1}{24}(18 + 12 - 6) = 1.\end{aligned}$$

# Elementos	1	6	8	6	3
Clase	[(1)]	[(12)]	[(123)]	[(1234)]	[(12)(34)]
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	-1	1	-1	1
$\chi_3$	3	1	0	-1	-1
$\chi_4$	3	-1	0	1	-1
$\chi_5$	2	0	-1	0	2
$\chi_{C_0(M_4)}$	6	2	0	0	2
$\chi_{C_1(M_4)}$	3	1	0	-1	-1

Figura 5.2: Tabla de Caracteres de  $S_4$  y caracteres de  $C_0(M_4)$  y  $C_1(M_4)$

Por lo tanto, como  $\dim C_0(M_4) = 6$ , y por la tabla 5.2, que nos muestra las dimensiones de los módulos que componen a  $C_0(M_4)$ ,

$$C_0(M_4) \cong \mathbb{C} \oplus V_4 \oplus W, \quad (5.17)$$

$$C_1(M_4) \cong V_4. \quad (5.18)$$

Dada la definición 5.10, para  $i \in \mathbb{N}^*$  tenemos que  $\text{Im } \partial_{i+1} \subseteq \ker \partial_i$  e  $\text{Im } \partial_1 \subseteq \ker \varepsilon$ . De modo que

$$\begin{aligned} \partial_1 : C_1(M_4) &\rightarrow C_0(M_4) \\ \varepsilon : C_0(M_4) &\rightarrow \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Supongamos que  $\widehat{\partial}_2$ ,  $\widehat{\partial}_1$  y  $\widehat{\varepsilon}$  son los morfismos inducidos bajo los isomorfismos en las expresiones (5.17) y (5.17). Véase el siguiente diagrama:

$$0 \xrightarrow{\widehat{\partial}_2} V_4 \xrightarrow{\widehat{\partial}_1} \mathbb{C} \oplus V_4 \oplus W \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}} \mathbb{C}$$

Por el lema de Schur 1.13,  $\text{Im } \widehat{\partial}_1 = V_4$  ó  $\text{Im } \widehat{\partial}_1 = \{0\}$ . Mas por definición de  $\partial_1$ ,  $\text{Im } \partial_1 \neq 0$  y así  $\text{Im } \widehat{\partial}_1 \neq 0$ . Entonces

$$\text{Im } \widehat{\partial}_1 = V_4.$$

Como  $\widehat{\varepsilon}$  no puede ser isomorfo a  $V_4$  —pues  $V_4$  no está en la imagen  $\mathbb{C}$ —, por definición de  $\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} \text{Im } \widehat{\varepsilon} &= \mathbb{C}, \text{ y} \\ \ker \widehat{\varepsilon} &= V_4 \oplus W. \end{aligned}$$

Además  $\ker \widehat{\partial}_1 = \{0\}$  e  $\text{Im } \widehat{\partial}_2 = \{0\}$ .

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_0(M_4) &= Z_0(M_4)/B_0(M_4) = \ker \widehat{\varepsilon} / \text{Im } \widehat{\partial}_1 = (V_4 \oplus W)/V_4 = W, \\ \widetilde{H}_1(M_4) &= H_1(M_4) \\ &= Z_1(M_4)/B_1(M_4) = \ker \widehat{\partial}_1 / \text{Im } \widehat{\partial}_2 = \{0\}/\{0\} = \{0\}. \end{aligned}$$

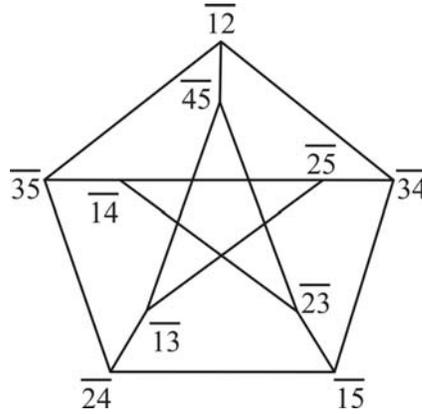
□

*Ejemplo 5.19.* Considérese al complejo de apareamiento  $M_5$  (figura 5.3), que está dado por el conjunto —de aristas de la gráfica  $K_5$ — de vértices

$$\mathcal{V} = \{\overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}, \overline{34}, \overline{35}, \overline{45}\},$$

Entonces la familia de 1-simplejos estará dada por el siguiente conjunto:

$$\begin{aligned} &\{\{\overline{12}, \overline{34}\}, \{\overline{12}, \overline{35}\}, \{\overline{12}, \overline{45}\}, \\ &\{\overline{13}, \overline{24}\}, \{\overline{13}, \overline{25}\}, \{\overline{13}, \overline{45}\}, \\ &\{\overline{14}, \overline{23}\}, \{\overline{14}, \overline{25}\}, \{\overline{14}, \overline{35}\}, \\ &\{\overline{15}, \overline{23}\}, \{\overline{15}, \overline{24}\}, \{\overline{15}, \overline{34}\}, \\ &\{\overline{23}, \overline{45}\}, \{\overline{24}, \overline{35}\}, \{\overline{25}, \overline{34}\}\}. \end{aligned}$$

Figura 5.3: Complejo de apareamiento  $M_5$ 

Tomemos a los elementos

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \overline{12}, & a_6 &= \overline{24}, & b_1 &= (\overline{12}, \overline{34}), & b_6 &= (\overline{13}, \overline{45}), & b_{11} &= (\overline{15}, \overline{24}) \\
 a_2 &= \overline{13}, & a_7 &= \overline{25}, & b_2 &= (\overline{12}, \overline{35}), & b_7 &= (\overline{14}, \overline{23}), & b_{12} &= (\overline{15}, \overline{34}) \\
 a_3 &= \overline{14}, & a_8 &= \overline{34}, & b_3 &= (\overline{12}, \overline{45}), & b_8 &= (\overline{14}, \overline{25}), & b_{13} &= (\overline{23}, \overline{45}) \\
 a_4 &= \overline{15}, & a_9 &= \overline{35}, & b_4 &= (\overline{13}, \overline{24}), & b_9 &= (\overline{14}, \overline{35}), & b_{14} &= (\overline{24}, \overline{35}) \\
 a_5 &= \overline{23}, & a_{10} &= \overline{45}, & b_5 &= (\overline{13}, \overline{25}), & b_{10} &= (\overline{15}, \overline{23}), & b_{15} &= (\overline{25}, \overline{34}).
 \end{aligned}$$

Entonces tenemos los siguientes cálculos:

$$\begin{array}{cccccc}
 (12)a_1 = a_1 & (123)a_1 = a_5 & (1234)a_1 = a_5 & (12345)a_1 = a_5 & (12)(45)a_1 = a_1 & (123)(45)a_1 = a_5 \\
 (12)a_2 = a_5 & (123)a_2 = a_1 & (1234)a_2 = a_6 & (12345)a_2 = a_6 & (12)(45)a_2 = a_5 & (123)(45)a_2 = a_1 \\
 (12)a_3 = a_6 & (123)a_3 = a_6 & (1234)a_3 = a_1 & (12345)a_3 = a_7 & (12)(45)a_3 = a_7 & (123)(45)a_3 = a_7 \\
 (12)a_4 = a_7 & (123)a_4 = a_7 & (1234)a_4 = a_7 & (12345)a_4 = a_1 & (12)(45)a_4 = a_6 & (123)(45)a_4 = a_6 \\
 (12)a_5 = a_2 & (123)a_5 = a_2 & (1234)a_5 = a_8 & (12345)a_5 = a_8 & (12)(45)a_5 = a_2 & (123)(45)a_5 = a_2 \\
 (12)a_6 = a_3 & (123)a_6 = a_8 & (1234)a_6 = a_2 & (12345)a_6 = a_9 & (12)(45)a_6 = a_4 & (123)(45)a_6 = a_9 \\
 (12)a_7 = a_4 & (123)a_7 = a_9 & (1234)a_7 = a_9 & (12345)a_7 = a_2 & (12)(45)a_7 = a_3 & (123)(45)a_7 = a_8 \\
 (12)a_8 = a_8 & (123)a_8 = a_3 & (1234)a_8 = a_3 & (12345)a_8 = a_{10} & (12)(45)a_8 = a_9 & (123)(45)a_8 = a_4 \\
 (12)a_9 = a_9 & (123)a_9 = a_4 & (1234)a_9 = a_{10} & (12345)a_9 = a_3 & (12)(45)a_9 = a_8 & (123)(45)a_9 = a_3 \\
 (12)a_{10} = a_{10} & (123)a_{10} = a_{10} & (1234)a_{10} = a_4 & (12345)a_{10} = a_4 & (12)(45)a_{10} = a_{10} & (123)(45)a_{10} = a_{10}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 (13)b_1 = -b_7 & (123)b_1 = -b_7 & (1234)b_1 = -b_7 & (12345)b_1 = b_{13} \\
 (13)b_2 = -b_{10} & (123)b_2 = -b_{10} & (1234)b_2 = b_{13} & (12345)b_2 = -b_7 \\
 (13)b_3 = b_{13} & (123)b_3 = b_{13} & (1234)b_3 = -b_{10} & (12345)b_3 = -b_{10} \\
 (13)b_4 = b_4 & (123)b_4 = b_1 & (1234)b_4 = -b_4 & (12345)b_4 = b_{14} \\
 (13)b_5 = b_5 & (123)b_5 = b_2 & (1234)b_5 = b_{14} & (12345)b_5 = -b_4 \\
 (13)b_6 = b_6 & (123)b_6 = b_3 & (1234)b_6 = -b_{11} & (12345)b_6 = -b_{11} \\
 (13)b_7 = -b_1 & (123)b_7 = -b_4 & (1234)b_7 = b_1 & (12345)b_7 = b_{15} \\
 (13)b_8 = -b_{15} & (123)b_8 = b_{14} & (1234)b_8 = b_2 & (12345)b_8 = -b_5 \\
 (13)b_9 = -b_{12} & (123)b_9 = -b_{11} & (1234)b_9 = b_3 & (12345)b_9 = -b_8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
(13)b_{10} = -b_2 & (123)b_{10} = -b_5 & (1234)b_{10} = b_{15} & (12345)b_{10} = b_1 \\
(13)b_{11} = -b_{14} & (123)b_{11} = b_{15} & (1234)b_{11} = -b_5 & (12345)b_{11} = b_2 \\
(13)b_{12} = -b_9 & (123)b_{12} = -b_8 & (1234)b_{12} = -b_8 & (12345)b_{12} = b_3 \\
(13)b_{13} = b_3 & (123)b_{13} = b_6 & (1234)b_{13} = -b_{12} & (12345)b_{13} = -b_{12} \\
(13)b_{14} = -b_{11} & (123)b_{14} = -b_{12} & (1234)b_{14} = b_6 & (12345)b_{14} = -b_9 \\
(13)b_{15} = -b_8 & (123)b_{15} = -b_9 & (1234)b_{15} = -b_9 & (12345)b_{15} = b_6 \\
\\
(12)(34)b_1 = b_1 & (13)(24)b_1 = -b_1 & (123)(45)b_1 = -b_{10} & \\
(12)(34)b_2 = b_3 & (13)(24)b_2 = -b_{12} & (123)(45)b_2 = -b_7 & \\
(12)(34)b_3 = b_2 & (13)(24)b_3 = -b_{15} & (123)(45)b_3 = b_{13} & \\
(12)(34)b_4 = -b_4 & (13)(24)b_4 = b_4 & (123)(45)b_4 = b_2 & \\
(12)(34)b_5 = -b_{11} & (13)(24)b_5 = b_6 & (123)(45)b_5 = -b_1 & \\
(12)(34)b_6 = b_{14} & (13)(24)b_6 = b_5 & (123)(45)b_6 = b_3 & \\
(12)(34)b_7 = -b_7 & (13)(24)b_7 = -b_7 & (123)(45)b_7 = -b_5 & \\
(12)(34)b_8 = -b_{10} & (13)(24)b_8 = b_{13} & (123)(45)b_8 = b_{15} & \\
(12)(34)b_9 = b_{13} & (13)(24)b_9 = -b_{10} & (123)(45)b_9 = -b_8 & \\
(12)(34)b_{10} = -b_8 & (13)(24)b_{10} = -b_9 & (123)(45)b_{10} = -b_4 & \\
(12)(34)b_{11} = -b_5 & (13)(24)b_{11} = -b_{14} & (123)(45)b_{11} = b_{14} & \\
(12)(34)b_{12} = b_{15} & (13)(24)b_{12} = -b_2 & (123)(45)b_{12} = -b_{11} & \\
(12)(34)b_{13} = b_9 & (13)(24)b_{13} = b_8 & (123)(45)b_{13} = b_6 & \\
(12)(34)b_{14} = b_6 & (13)(24)b_{14} = -b_{11} & (123)(45)b_{14} = -b_9 & \\
(12)(34)b_{15} = b_{12} & (13)(24)b_{15} = -b_3 & (123)(45)b_{15} = -b_{12} & .
\end{array}$$

De ello se deducen los caracteres asociados a  $C_0(M_5)$  y  $C_1(M_5)$  mostrados en la parte final de la figura 5.4. Además, de forma análoga al ejemplo 4.24 se obtiene la tabla de caracteres de  $S_5$  que aparece en la primera parte de la figura 5.4. Obsérvese que al aplicar la fórmula del carácter de la segunda potencia alternante de  $V_5$  se obtiene el cuarto carácter enlistado  $\chi_{\wedge^2 V_5}$  en ella. En base a ello:

$$\left. \begin{array}{l}
\langle \chi_{C_0(M_5), \xi_1} \rangle = \frac{1}{120}(10 + 40 + 20 + 0 + 0 + 30 + 20) = 1, \\
\langle \chi_{C_0(M_5), \xi_2} \rangle = \frac{1}{120}(10 - 40 + 20 + 0 + 0 + 30 - 20) = 0, \\
\langle \chi_{C_0(M_5), \xi_3} \rangle = \frac{1}{120}(40 + 80 + 20 + 0 + 0 + 0 - 20) = 1, \\
\langle \chi_{C_0(M_5), \xi_4} \rangle = \frac{1}{120}(40 - 80 + 20 + 0 + 0 + 0 + 20) = 0, \\
\langle \chi_{C_0(M_5), \xi_5} \rangle = \frac{1}{120}(60 + 0 + 0 + 0 + 0 - 60 + 0) = 0, \\
\langle \chi_{C_0(M_5), \xi_6} \rangle = \frac{1}{120}(50 + 40 - 20 + 0 + 0 + 30 + 20) = 1, \\
\langle \chi_{C_0(M_5), \xi_7} \rangle = \frac{1}{120}(50 - 40 - 20 + 0 + 0 + 30 - 20) = 0,
\end{array} \right| \left. \begin{array}{l}
\langle \chi_{C_1(M_5), \xi_1} \rangle = \frac{1}{120}(15 + 30 + 0 - 30 + 0 - 15 + 0) = 0, \\
\langle \chi_{C_1(M_5), \xi_2} \rangle = \frac{1}{120}(15 - 30 + 0 + 30 + 0 - 15 + 0) = 0, \\
\langle \chi_{C_1(M_5), \xi_3} \rangle = \frac{1}{120}(60 + 60 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0) = 1, \\
\langle \chi_{C_1(M_5), \xi_4} \rangle = \frac{1}{120}(60 - 60 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0) = 0, \\
\langle \chi_{C_1(M_5), \xi_5} \rangle = \frac{1}{120}(90 + 0 + 0 + 0 + 0 + 30 + 0) = 1, \\
\langle \chi_{C_1(M_5), \xi_6} \rangle = \frac{1}{120}(75 + 30 + 0 + 30 + 0 - 15 + 0) = 1, \\
\langle \chi_{C_1(M_5), \xi_7} \rangle = \frac{1}{120}(75 - 30 + 0 - 30 + 0 - 15 + 0) = 0.
\end{array} \right.$$

Utilizando el teorema de la reciprocidad de Frobenius, podemos obtener el mismo resultado con menor número de cálculos. Obsérvese en  $S_5$  que  $[(12)] = [(13)] = [(45)]$ ,  $[(12)(34)] = [(12)(45)] = [(13)(24)]$ , y los valores en las respectivas restricciones son los mismos para cada clase considerada en  $S_5$ .

Consideremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
V_0 &= \langle \{\overline{45}\} \rangle \\
V_1 &= \langle \{(\overline{13}, \overline{24})\} \rangle \\
H_0 &= \text{Stab}(\overline{45}) = \langle \{(1), (12), (123), (45), (12)(45), (123)(45)\} \rangle \cong S_3 \times C_2, \\
H_1 &= \{g \in G \mid gv \in V_2 \quad \forall v \in V_2\} = D_4.
\end{aligned}$$

# Elementos	1	10	20	30	24	15	20
Clase	[(1)]	[(12)]	[(123)]	[(1234)]	[(12345)]	[(12)(34)]	[(123)(45)]
$\chi_C = \xi_1$	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{\widehat{C}} = \xi_1$	1	-1	1	-1	1	1	-1
$\chi_{V_5} = \xi_1$	4	2	1	0	-1	0	-1
$\chi_{V'_5} = \xi_1$	4	-2	1	0	-1	0	1
$\chi_{\Lambda^2 V_5} = \chi_{W_1} = \xi_1$	6	0	0	0	1	-2	0
$\chi_{W_2} = \xi_1$	5	1	-1	-1	0	1	1
$\chi_{W'_2} = \xi_1$	5	-1	-1	1	0	1	-1
$\chi_{C_0(M_5)}$	10	4	1	0	0	2	1
$\chi_{C_1(M_5)}$	15	3	0	-1	0	-1	0

Figura 5.4: Tabla de Caracteres de  $S_5$  y caracteres de  $C_0(M_5)$  y  $C_1(M_5)$ 

Al revisar la acción de  $S_3 \times C_2$  en  $V_0$  y la acción de  $D_4$  en  $V_1$ , y por la definición 2.15 se puede verificar que

$$\begin{aligned}\chi_{V_0} &= \phi_1 \\ \chi_{V_1} &= \nu_3 \\ C_0(M_5) &= V_0 \uparrow_{S_3 \times C_2}^{S_5} \\ C_1(M_5) &= V_1 \uparrow_{D_4}^{S_5}.\end{aligned}$$

Las figuras 5.5 y 5.6 muestran las evaluaciones de  $\xi_i$  restringidas a  $S_3 \times C_2$  y  $D_4$ .

# Elementos	1	1	3	3	2	2
Clase	[(1)]	[(45)]	[(12)]	[(12)(45)]	[(123)]	[(123)(45)]
$\xi_1$	1	1	1	1	1	1
$\xi_2$	1	-1	-1	1	1	-1
$\xi_3$	4	2	2	0	1	-1
$\xi_4$	4	-2	-2	0	1	1
$\xi_5$	6	0	0	-2	0	0
$\xi_6$	5	1	1	1	-1	1
$\xi_7$	5	-1	-1	1	-1	-1
$\phi_1$	1	1	1	1	1	1

Figura 5.5: Caracteres de  $S_5$  restringidos a  $S_3 \times C_2$  y carácter de  $V_0$

Elementos	(24)		(1432)	(14)(23)	
	(1)	(13)	(1234)	(12)(34)	(13)(24)
$\xi_1$	1	1	1	1	1
$\xi_2$	1	-1	-1	1	1
$\xi_3$	4	2	0	0	0
$\xi_4$	4	-2	0	0	0
$\xi_5$	6	0	0	-2	-2
$\xi_6$	5	1	-1	1	1
$\xi_7$	5	-1	1	1	1
$\nu_3$	1	1	-1	-1	1

Figura 5.6: Caracteres de  $S_5$  restringidos a  $D_4$  y carácter de  $V_1$ 

De modo que

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{C_0(M_5)}, \xi_1 \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0 \uparrow_{S_3 \times C_2}^{S_5}}, \xi_1 \rangle_{S_5} = \langle \phi_1, \xi_1 \downarrow_{S_3 \times C_2} \rangle_{S_3 \times C_2} = \frac{1}{12}(1 + 1 + 3 + 3 + 2 + 2) = 1 \\
\langle \chi_{C_0(M_5)}, \xi_2 \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0 \uparrow_{S_3 \times C_2}^{S_5}}, \xi_2 \rangle_{S_5} = \langle \phi_1, \xi_2 \downarrow_{S_3 \times C_2} \rangle_{S_3 \times C_2} = \frac{1}{12}(1 - 1 - 3 + 3 + 2 - 2) = 0 \\
\langle \chi_{C_0(M_5)}, \xi_3 \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0 \uparrow_{S_3 \times C_2}^{S_5}}, \xi_3 \rangle_{S_5} = \langle \phi_1, \xi_3 \downarrow_{S_3 \times C_2} \rangle_{S_3 \times C_2} = \frac{1}{12}(4 + 2 + 6 + 0 + 2 - 2) = 1 \\
\langle \chi_{C_0(M_5)}, \xi_4 \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0 \uparrow_{S_3 \times C_2}^{S_5}}, \xi_4 \rangle_{S_5} = \langle \phi_1, \xi_4 \downarrow_{S_3 \times C_2} \rangle_{S_3 \times C_2} = \frac{1}{12}(4 - 2 - 6 + 0 + 2 + 2) = 0 \\
\langle \chi_{C_0(M_5)}, \xi_5 \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0 \uparrow_{S_3 \times C_2}^{S_5}}, \xi_5 \rangle_{S_5} = \langle \phi_1, \xi_5 \downarrow_{S_3 \times C_2} \rangle_{S_3 \times C_2} = \frac{1}{12}(6 + 0 + 0 - 6 + 0 + 0) = 0 \\
\langle \chi_{C_0(M_5)}, \xi_6 \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0 \uparrow_{S_3 \times C_2}^{S_5}}, \xi_6 \rangle_{S_5} = \langle \phi_1, \xi_6 \downarrow_{S_3 \times C_2} \rangle_{S_3 \times C_2} = \frac{1}{12}(5 + 1 + 3 + 3 - 2 + 2) = 1 \\
\langle \chi_{C_0(M_5)}, \xi_7 \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0 \uparrow_{S_3 \times C_2}^{S_5}}, \xi_7 \rangle_{S_5} = \langle \phi_1, \xi_7 \downarrow_{S_3 \times C_2} \rangle_{S_3 \times C_2} = \frac{1}{12}(5 - 1 - 3 + 3 - 2 - 2) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{C_1(M_5)}, \xi_1 \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{D_4}^{S_5}}, \xi_1 \rangle_{S_5} = \langle \nu_3, \xi_1 \downarrow_{D_4} \rangle_{D_4} = \frac{1}{8}(1 + 2 - 2 - 2 + 1) = 0 \\
\langle \chi_{C_1(M_5)}, \xi_2 \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{D_4}^{S_5}}, \xi_2 \rangle_{S_5} = \langle \nu_3, \xi_2 \downarrow_{D_4} \rangle_{D_4} = \frac{1}{8}(1 - 2 + 2 - 2 + 1) = 0 \\
\langle \chi_{C_1(M_5)}, \xi_3 \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{D_4}^{S_5}}, \xi_3 \rangle_{S_5} = \langle \nu_3, \xi_3 \downarrow_{D_4} \rangle_{D_4} = \frac{1}{8}(4 + 4 + 0 + 0 + 0) = 1 \\
\langle \chi_{C_1(M_5)}, \xi_4 \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{D_4}^{S_5}}, \xi_4 \rangle_{S_5} = \langle \nu_3, \xi_4 \downarrow_{D_4} \rangle_{D_4} = \frac{1}{8}(4 - 4 + 0 + 0 + 0) = 0 \\
\langle \chi_{C_1(M_5)}, \xi_5 \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{D_4}^{S_5}}, \xi_5 \rangle_{S_5} = \langle \nu_3, \xi_5 \downarrow_{D_4} \rangle_{D_4} = \frac{1}{8}(6 + 0 + 0 + 4 - 2) = 1 \\
\langle \chi_{C_1(M_5)}, \xi_6 \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{D_4}^{S_5}}, \xi_6 \rangle_{S_5} = \langle \nu_3, \xi_6 \downarrow_{D_4} \rangle_{D_4} = \frac{1}{8}(5 + 2 + 2 - 2 + 1) = 1 \\
\langle \chi_{C_1(M_5)}, \xi_7 \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{D_4}^{S_5}}, \xi_7 \rangle_{S_5} = \langle \nu_3, \xi_7 \downarrow_{D_4} \rangle_{D_4} = \frac{1}{8}(5 - 2 - 2 - 2 + 1) = 0.
\end{aligned}$$

Con éstos datos se obtiene que

$$C_0(M_5) \cong \mathbb{C} \oplus V_5 \oplus W_2 \quad (5.20)$$

$$C_1(M_5) \cong V_5 \oplus W_1 \oplus W_2 = V_5 \oplus \wedge^2 V_5 \oplus W_2. \quad (5.21)$$

Para el operador frontera  $\partial_i$  dado por la definición 5.10 y el operador  $\varepsilon$ , tenemos que  $\text{Im } \partial_1 \subseteq \ker \varepsilon$ . De donde los únicos operadores distintos de cero son:

$$\partial_1 : C_1(M_5) \rightarrow C_0(M_5)$$

$$\varepsilon : C_0(M_5) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Supongamos que  $\widehat{\partial}_2$ ,  $\widehat{\partial}_1$  y  $\widehat{\varepsilon}$  son los morfismos inducidos bajo los isomorfismos de las expresiones (5.20) y (5.21). Tenemos entonces el siguiente diagrama:

$$0 \xrightarrow{\widehat{\partial}_2} V_5 \oplus \wedge^2 V_5 \oplus W_2 \xrightarrow{\widehat{\partial}_1} \mathbb{C} \oplus V_5 \oplus W_2 \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}} \mathbb{C}$$

Para concluir el ejemplo, utilizaremos el siguiente teorema sobre *espacios topológicos* que se encuentra en la página 43 en [Mun]. La demostración se basa en la *realización geométrica* del complejo simplicial  $\Delta$  denotada por  $|\Delta|$ .

*Teorema 5.22.* *El grupo  $\widetilde{H}_0$  es abeliano libre, y*

$$\widetilde{H}_0(\Delta) \oplus \mathbb{Z} \simeq H_0(\Delta).$$

*Así  $\widetilde{H}_0(\Delta) = 0$  si  $|\Delta|$  es conexo. Si  $|\Delta|$  es desconexo, sea  $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$  tal que contiene un sólo elemento de cada componente conexa de  $|\Delta|$ ; sea  $\alpha_0 \in I$  fijo. Entonces las clases de homología de las cadenas  $v_\alpha - v_{\alpha_0}$  forman una base para  $\widetilde{H}_0(\Delta)$ .  $\square$*

Dado que  $\ker \widehat{\varepsilon} \neq \{0\}$  por definición, utilizando el lema de Schur 1.13, implica que  $\ker \widehat{\varepsilon} = V_5 \oplus W_2$ . También, por el lema de Schur  $\ker \widehat{\partial}_1 = \wedge^2 V_5$ .

Por el teorema 5.22,

$$\ker \widehat{\varepsilon} / \text{Im } \partial_1 = \{0\}.$$

Entonces  $\text{Im } \widehat{\partial}_1 = \ker \widehat{\varepsilon}$ . Es decir,

$$\text{Im } \widehat{\partial}_2 = \{0\},$$

$$\text{Im } \widehat{\partial}_1 = V_5 \oplus W_2,$$

$$\text{Im } \widehat{\varepsilon} = \mathbb{C}, \text{ y,}$$

$$\ker \widehat{\partial}_1 = \wedge^2 V_5,$$

$$\ker \widehat{\varepsilon} = V_5 \oplus W_2.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\tilde{H}_0(M_5) &= Z_0(M_5)/B_0(M_5) = \ker \hat{\varepsilon} / \text{Im } \hat{\partial}_1 = (V_5 \oplus W_2) / (V_5 \oplus W_2) = \{0\}, \\ \tilde{H}_1(M_5) &= H_1(M_5) \\ &= Z_1(M_5)/B_1(M_5) = \ker \hat{\partial}_1 / \text{Im } \hat{\partial}_2 = \wedge^2 V_5 / \{0\} = \wedge^2 V_5.\end{aligned}$$

□



# Conclusiones

Los resultados presentados nos muestran un ejemplo de entre tantos, en el cual el álgebra homológica —por su capacidad de clasificar— nos ayuda a comprender propiedades según sea el objeto de nuestro estudio. Su aplicación en otras áreas de la matemática es notable. Como es el caso de la topología algebraica, por ejemplo; con la clasificación de superficies. Una fuente interesante en términos generales sobre el tema la podemos encontrar en [Wei].

Dado su poder como herramienta, su aplicación la podemos encontrar como parte importante en investigaciones de relevancia para la matemática reciente. Es por ello que es conveniente tener cierta noción sobre su utilización para darse idea sobre distintos criterios que uno puede encontrar en una buena cantidad de modelos existentes.

Sin embargo no siempre resulta fácil calcular los grupos de homología de ciertas estructuras en la matemática, o bien sólo se puede aplicar en ciertos casos específicos. En éste caso ello se logra de manera sencilla en base a la acción de  $\mathcal{S}_n$  sobre los complejos simpliciales para  $n \in \mathbb{N}$  como aquí se ha mostrado. La gran cantidad de cálculos implicada se puede llevar a cabo con la ayuda de una computadora, pues es un algoritmo sencillo de codificar en lenguaje de programación de software.



# Apéndice A

## Acción de $S_4$ en las bases de los módulos $V_4$ , $V'_4$ y $W$

$$(12)v_{R_1} = (12)\{R_1\} - (12)(12)\{R_1\} = v_{R_1} - v_{R_3}$$

$$(12)v_{R_2} = (12)\{R_2\} - (12)(13)\{R_2\} = v_{R_2} - v_{R_3}$$

$$(12)v_{R_3} = (12)\{R_3\} - (12)(14)\{R_3\} = -v_{R_3}$$

$$(123)v_{R_1} = (123)\{R_1\} - (123)(12)\{R_1\} = v_{R_1} - v_{R_3}$$

$$(123)v_{R_2} = (123)\{R_2\} - (123)(13)\{R_2\} = -v_{R_3}$$

$$(123)v_{R_3} = (123)\{R_3\} - (123)(14)\{R_3\} = v_{R_2} - v_{R_3}$$

$$(1234)v_{R_1} = (1234)\{R_1\} - (1234)(12)\{R_1\} = -v_{R_3}$$

$$(1234)v_{R_2} = (1234)\{R_2\} - (1234)(13)\{R_2\} = v_{R_1} - v_{R_3}$$

$$(1234)v_{R_3} = (1234)\{R_3\} - (1234)(14)\{R_3\} = v_{R_2} - v_{R_3}$$

$$(12)(34)v_{R_1} = (12)(34)\{R_1\} - (12)(34)(12)\{R_1\} = v_{R_2} - v_{R_3}$$

$$(12)(34)v_{R_2} = (12)(34)\{R_2\} - (12)(34)(13)\{R_2\} = v_{R_1} - v_{R_3}$$

$$(12)(34)v_{R_3} = (12)(34)\{R_3\} - (12)(34)(14)\{R_3\} = -v_{R_3}$$

$$\begin{aligned}
(12)v_{S_1} &= (12)\{S_1\} - (12)(13)\{S_1\} - (12)(14)\{S_1\} - (12)(34)\{S_1\} + (12)(134)\{S_1\} + (12)(143)\{S_1\} \\
&= \{S_1\} - (132)\{S_1\} - (142)\{S_1\} - (12)(34)\{S_1\} + (1342)\{S_1\} + (1432)\{S_1\} \\
&= \{S_1\} - \{S_2\} - (142)\{S_1\} - (1243)\{S_2\} + (1324)\{S_3\} + \{S_3\} \\
&= v_{S_1} - v_{S_2} + v_{S_3} \\
(12)v_{S_2} &= (12)\{S_2\} - (12)(12)\{S_2\} - (12)(14)\{S_2\} - (12)(24)\{S_2\} + (12)(124)\{S_2\} + (12)(142)\{S_2\} \\
&= (12)\{S_2\} - \{S_2\} - (142)\{S_2\} - (124)\{S_2\} + (24)\{S_2\} + (14)\{S_2\} \\
&= (12)\{S_2\} - \{S_2\} - (132)\{S_3\} - (1234)\{S_1\} + (1324)\{S_3\} + (1324)\{S_1\} \\
&= -v_{S_2} \\
(12)v_{S_3} &= (12)\{S_3\} - (12)(12)\{S_3\} - (12)(13)\{S_3\} - (12)(23)\{S_3\} + (12)(123)\{S_3\} + (12)(132)\{S_3\} \\
&= (12)\{S_3\} - \{S_3\} - (132)\{S_3\} - (123)\{S_3\} + (23)\{S_3\} + (13)\{S_3\} \\
&= (12)\{S_3\} - \{S_3\} - (132)\{S_3\} - (14)\{S_1\} + (142)\{S_1\} + (1324)\{S_1\} \\
&= -v_{S_3} \\
(123)v_{S_1} &= (123)\{S_1\} - (123)(13)\{S_1\} - (123)(14)\{S_1\} - (123)(34)\{S_1\} + (123)(134)\{S_1\} + (123)(143)\{S_1\} \\
&= (12)\{S_2\} - (23)\{S_1\} - (1423)\{S_1\} - (1234)\{S_1\} + (234)\{S_1\} + (14)(23)\{S_1\} \\
&= (12)\{S_2\} - \{S_2\} - (132)\{S_3\} - (1234)\{S_1\} + (1324)\{S_3\} + (1324)\{S_1\} \\
&= -v_{S_2} \\
(123)v_{S_2} &= (123)\{S_2\} - (123)(12)\{S_2\} - (123)(14)\{S_2\} - (123)(24)\{S_2\} + (123)(124)\{S_2\} + (123)(142)\{S_2\} \\
&= \{S_1\} - (13)\{S_2\} - (1423)\{S_2\} - (1243)\{S_2\} + (13)(24)\{S_2\} + (143)\{S_2\} \\
&= \{S_1\} - \{S_2\} - \{S_2\} - (1243)\{S_2\} + (1324)\{S_3\} + \{S_3\} \\
&= -v_{S_2} = v_{S_1} - v_{S_2} + v_{S_3} \\
(123)v_{S_3} &= (123)\{S_3\} - (123)(12)\{S_3\} - (123)(13)\{S_3\} - (123)(23)\{S_3\} + (123)(123)\{S_3\} + (123)(132)\{S_3\} \\
&= (14)\{S_1\} - (13)\{S_3\} - (23)\{S_3\} - (12)\{S_3\} + (132)\{S_3\} + \{S_3\} \\
&= (14)\{S_1\} - (1324)\{S_1\} - (142)\{S_1\} - (12)\{S_3\} + (132)\{S_3\} + \{S_3\} \\
&= -v_{S_3} = v_{S_3} \\
(1234)v_{S_1} &= (1234)\{S_1\} - (1234)(13)\{S_1\} - (1234)(14)\{S_1\} - (1234)(34)\{S_1\} + (1234)(134)\{S_1\} + (1234)(143)\{S_1\} \\
&= (1234)\{S_1\} - (14)(23)\{S_1\} - (234)\{S_1\} - (123)\{S_1\} + (123)\{S_1\} + (23)\{S_1\} \\
&= (1234)\{S_1\} - (1324)\{S_1\} - (1324)\{S_3\} - (12)\{S_2\} + (12)\{S_2\} + \{S_2\} \\
&= v_{S_2} \\
(1234)v_{S_2} &= (1234)\{S_2\} - (1234)(12)\{S_2\} - (1234)(14)\{S_2\} - (1234)(24)\{S_2\} + (1234)(124)\{S_2\} + (1234)(142)\{S_2\} \\
&= (14)\{S_1\} - (134)\{S_2\} - (234)\{S_2\} - (12)(34)\{S_2\} + (13)(24)\{S_2\} + (34)\{S_2\} \\
&= (14)\{S_1\} - (1324)\{S_1\} - (1324)\{S_1\} - (12)\{S_3\} + (1324)\{S_3\} + \{S_3\} \\
&= -v_{S_2} = v_{S_3} \\
(1234)v_{S_3} &= (1234)\{S_3\} - (1234)(12)\{S_3\} - (1234)(13)\{S_3\} - (1234)(23)\{S_3\} + (1234)(123)\{S_3\} + (1234)(132)\{S_3\} \\
&= \{S_1\} - (134)\{S_3\} - (14)(23)\{S_3\} - (124)\{S_3\} + (124)\{S_3\} + (14)\{S_3\} \\
&= \{S_1\} - \{S_2\} - (142)\{S_1\} - (1243)\{S_2\} + (1243)\{S_2\} + \{S_3\} \\
&= -v_{S_3} = v_{S_1} - v_{S_2} + v_{S_3} \\
(12)(34)v_{S_1} &= (12)(34)\{S_1\} - (12)(34)(13)\{S_1\} - (12)(34)(14)\{S_1\} - (12)(34)(34)\{S_1\} + (12)(34)(134)\{S_1\} + (12)(34)(143)\{S_1\} \\
&= (12)(34)\{S_1\} - (1432)\{S_1\} - (1342)\{S_1\} - (12)\{S_1\} + (142)\{S_1\} + (132)\{S_1\} \\
&= (1243)\{S_2\} - \{S_3\} - (1324)\{S_3\} - \{S_1\} + (142)\{S_1\} + \{S_2\} \\
&= -v_{S_1} + v_{S_2} - v_{S_3} \\
(12)(34)v_{S_2} &= (12)(34)\{S_2\} - (12)(34)(12)\{S_2\} - (12)(34)(14)\{S_2\} - (12)(34)(24)\{S_2\} + (12)(34)(124)\{S_2\} + (12)(34)(142)\{S_2\} \\
&= (12)\{S_3\} - (34)\{S_2\} - (1342)\{S_2\} - (1234)\{S_2\} + (234)\{S_2\} + (134)\{S_2\} \\
&= (12)\{S_3\} - \{S_3\} - (132)\{S_3\} - (14)\{S_1\} + (142)\{S_1\} + (1324)\{S_1\} \\
&= -v_{S_2} = -v_{S_3} \\
(12)(34)v_{S_3} &= (12)(34)\{S_3\} - (12)(34)(12)\{S_3\} - (12)(34)(13)\{S_3\} - (12)(34)(23)\{S_3\} + (12)(34)(123)\{S_3\} + (12)(34)(132)\{S_3\} \\
&= (12)\{S_2\} - (34)\{S_2\} - (1432)\{S_3\} - (1243)\{S_3\} + (243)\{S_3\} + (143)\{S_3\} \\
&= (12)\{S_2\} - \{S_2\} - (132)\{S_3\} - (1234)\{S_1\} + (1324)\{S_3\} + (1324)\{S_1\} \\
&= -v_{S_3} = -v_{S_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(12)v_{T_1} &= (12)\{T_1\} - (12)(13)\{T_1\} - (12)(24)\{T_1\} + (12)(13)(24)\{T_1\} \\
&= \{T_1\} - (132)\{T_1\} - (124)\{T_1\} + (1324)\{T_1\} \\
&= \{T_1\} - \{T_2\} - (14)\{T_1\} + (14)\{T_2\} \\
&= v_{T_1} - v_{T_2} \\
(12)v_{T_2} &= (12)\{T_2\} - (12)(12)\{T_2\} - (12)(34)\{T_2\} + (12)(12)(34)\{T_2\} \\
&= (12)\{T_2\} - \{T_2\} - (12)(34)\{T_2\} + (34)\{T_2\} \\
&= (12)\{T_2\} - \{T_2\} - (14)\{T_1\} + (34)\{T_2\} \\
&= -v_{T_2} \\
(123)v_{T_1} &= (123)\{T_1\} - (123)(13)\{T_1\} - (123)(24)\{T_1\} + (123)(13)(24)\{T_1\} \\
&= (12)\{T_2\} - (23)\{T_1\} - (1243)\{T_1\} + (243)\{T_1\} \\
&= (12)\{T_2\} - \{T_2\} - (14)\{T_1\} + (34)\{T_2\} \\
&= -v_{T_2} \\
(123)v_{T_2} &= (123)\{T_2\} - (123)(12)\{T_2\} - (123)(34)\{T_2\} + (123)(12)(34)\{T_2\} \\
&= \{T_1\} - (13)\{T_2\} - (1234)\{T_2\} + (134)\{T_2\} \\
&= \{T_1\} - \{T_2\} - (14)\{T_1\} + (14)\{T_2\} \\
&= v_{T_1} - v_{T_2} \\
(1234)v_{T_1} &= (1234)\{T_1\} - (1234)(13)\{T_1\} - (1234)(24)\{T_1\} + (1234)(13)(24)\{T_1\} \\
&= (12)\{T_2\} - (14)(23)\{T_1\} - (12)(34)\{T_1\} + (1432)\{T_1\} \\
&= (12)\{T_2\} - (14)\{T_2\} - \{T_1\} + (34)\{T_2\} \\
&= -v_{T_1} \\
(1234)v_{T_2} &= (1234)\{T_2\} - (1234)(12)\{T_2\} - (1234)(34)\{T_2\} + (1234)(12)(34)\{T_2\} \\
&= (14)\{T_1\} - (134)\{T_2\} - (123)\{T_2\} + (13)\{T_2\} \\
&= (14)\{T_1\} - (14)\{T_2\} - \{T_1\} + \{T_2\} \\
&= -v_{T_1} + v_{T_2} \\
(12)(34)v_{T_1} &= (12)(34)\{T_1\} - (12)(34)(13)\{T_1\} - (12)(34)(24)\{T_1\} + (12)(34)(13)(24)\{T_1\} \\
&= \{T_1\} - (1432)\{T_1\} - (1234)\{T_1\} + (14)(23)\{T_1\} \\
&= \{T_1\} - (34)\{T_2\} - (12)\{T_2\} + (14)\{T_2\} \\
&= v_{T_1} \\
(12)(34)v_{T_2} &= (12)(34)\{T_2\} - (12)(34)(12)\{T_2\} - (12)(34)(34)\{T_2\} + (12)(34)(12)(34)\{T_2\} \\
&= (14)\{T_1\} - (34)\{T_2\} - (12)\{T_2\} + \{T_2\} \\
&= (14)\{T_1\} - (34)\{T_2\} - (12)\{T_2\} + \{T_2\} \\
&= v_{T_2}.
\end{aligned}$$



# Bibliografía

- [Adk] William A. Adkins, Steven H. Weintraub. *Algebra: an approach via module theory*. Springer-Verlag, 1992.
- [Col] Michael John Collins. *Representations and characters of finite groups*. Cambridge University Press 1990.
- [Cur] Charles W. Curtis, Irving Reiner. *Methods for representation theory with applications to finite groups and orders*. John Wiley & sons, 1981.
- [Dor] Larry Dornhoff. *Group representation theory*. M Dekker, 1971-1972.
- [Fra] John B. Fraleigh. *A first course in abstract algebra (7th. ed.)*. Addison Wesley, 2003.
- [Fri] Stephen H. Friedberg, et. al. *Linear Algebra*. Prentice Hall, 1997.
- [Fu1] William Fulton. *Young tableaux: with applications to representation theory and geometry*. Cambridge University Press, 1997.
- [Fu2] William Fulton, Joe Harris. *Representation theory*. Springer-Verlag, 1991.
- [Goo] K. R. Goodearl. *Partially ordered abelian groups with interpolation*. American Mathematical Society, 1986.
- [Hil] Victor E. Hill IV. *Groups and characters*. Chapman and Hall/CRC, 2000.
- [Isa] Irving Isaacs. *Character theory of finite groups*. Dover, 1994.

- [Jam] Gordon James, Martin Liebeck. *Representations and characters of groups*.  
Cambridge University Press, 1993.
- [Mun] James Raymond Munkres. *Elements of algebraic topology*.  
Addison Wesley, 1984.
- [Nag] Hirosi Nagao, Yukio Tsushima. *Representations of finite groups*.  
Academic Press, 1987.
- [Rot] Joseph J. Rotman *An introduction to the theory of groups*  
Springer-Verlag, 1995.
- [Sag] Bruce E. Sagan. *The symmetric group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*.  
Wadsworth & Brooks.
- [Ser] Jean-Pierre Serre. *Linear representations of finite groups*.  
Springer-Verlag.
- [Wei] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*.  
Cambridge University Press, 1994.