UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

Límites inversos y una generalización

Antonio Peláez Morales

Instituto de Matemáticas, UNAM

Agosto de 2006

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres por ayudarme a iniciar esta aventura de conocer un poco de matemáticas y al mismo tiempo dedicarles este trabajo.

A la novia por todo su apoyo, amor, comprensión...

A mi tutor Sergio Macías por ayudarme a realizar este trabajo y por la paciencia que tuvo para leer todas las versiones.

A cada uno de mis profesores de la BUAP y de la UNAM que han incrementado mi gusto por las matemáticas.

A cada uno de mis sinodales por el tiempo que dedicaron en la lectura de esta tesis y por sus sugerencias para mejorarlo.

Índice general

Introducción

El presente trabajo se desarrolla dentro del área de la Teoría de los Continuos. Para los fines de este trabajo, un **continuo** es un espacio topológico T_2 que es compacto y conexo.

El presente trabajo está inspirado en el artículo [Mh] del Profesor W. Mahavier, en el que define un límite inverso usando subconjuntos cerrados del cuadrado unitario $[0,1] \times [0,1]$.

Aquí, definimos una **sucesión inversa de subconjuntos cerrados** como una sucesión doble $\{X_n, A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (que abreviamos escribiendo $\{X_n, A_n\}$) de espacios topológicos X_n y subconjuntos cerrados A_n de $X_{n+1} \times X_n$ que se proyectan suprayectivamente en su primera coordenada. El **límite inverso generalizado** de la sucesión $\{X_n, A_n\}$ es el conjunto de puntos $x \in \prod\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ tales que $(x_{n+1}, x_n) \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, a éste espacio lo denotamos por $\underleftarrow{\text{Lím}} A_n$.

Recordemos que una **sucesión inversa** de espacios topológicos X_n es una sucesión doble $\{X_n, f_n\}$, donde cada $f_n : X_{n+1} \to X_n$ es una función continua. El **límite inverso** de la sucesión inversa $\{X_n, f_n\}$ es el conjunto de puntos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ tales que $x_n = f_n(x_{n+1})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Al límite inverso de $\{X_n, f_n\}$ lo denotamos por $\varprojlim \{X_n, f_n\}$ o por X_∞.

En el caso de que los espacios X_n sean T_2 se tiene que las gráficas de las funciones f_n son cerradas en $X_{n+1} \times X_n$. Con esto, tenemos que si los espacios X_n son T_2 entonces la sucesión inversa $\{X_n, f_n\}$ se puede ver como una sucesión inversa de subconjuntos cerrados $\{X_n, A_n\}$, donde A_n es la gráfica de f_n.

Lo que analizamos en este trabajo es la relación entre los conceptos antes mencionados, especialmente buscamos condiciones para extender resultados válidos para sucesiones inversas al caso de sucesiones inversas de subconjuntos cerrados y sus límites.

El trabajo está dividido en cinco capítulos. En el primer capítulo acordamos la notación y revisamos algunas propiedades de productos de espacios, así como propiedades de hiperespacios y de espacios cociente, especialmente la forma de inducir funciones entre espacios que se encuentran en cada una de estas clases.

El Capítulo 2 está dedicado a revisar algunos resultados referentes a sistemas inversos (un sistema inverso es una generalización del concepto de sucesión inversa cambiando el conjunto de índices $\mathbb{N}$ por un conjunto dirigido) y sus límites inversos. En 2.2.17, damos un prueba diferente a la que se puede encontrar en [En, 3.7.12] del hecho de que si $\mathfrak{l} = \{l_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una función entre sistemas inversos, donde cada l_α es perfecta, y l_Λ es la función inducida por $\mathfrak{l}$ entre los respectivos límites inversos, entonces l_Λ también es perfecta.

En el Capítulo 3 se define lo que es una sucesión inversa de subconjuntos cerrados y su límite inverso generalizado. El Profesor W. Mahavier, en su artículo *"Inverse limits with subsets of* $[0,1] \times [0,1]$*"* muestra que se pueden obtener espacios totalmente disconexos como límites inversos generalizados y da condiciones para obtener la conexidad. En 3.1.9, probamos que con la condición dada en [Mh, Theorem 5] también se obtiene la conexidad del límite inverso generalizado $\underleftarrow{\text{Lím}} A_n$, donde $A_n \subseteq X_{n+1} \times X_n$ y cada X_n es un continuo. En la sección 3.2 describimos varios ejemplos de espacios que se obtienen como límites inversos generalizados y, en 3.2.5, construimos, para cada número natural m, un continuo de la forma $\underleftarrow{\text{Lím}} A_n$, donde $A_n \subseteq [0,1] \times [0,1]$, cuya dimensión es m. En 3.3.1 mostramos cómo inducir funciones de un espacio topológico Y en un límite inverso generalizado, lo cual nos ayuda a probar que el producto de límites inversos generalizados y la suspensión de un límite inverso generalizado también son límites inversos generalizados (vea 3.3.3 y 3.3.13, respectivamente). En 3.3.5, damos condiciones para inducir funciones entre límites inversos generalizados y en 3.3.11 damos una condición suficiente para que estas funciones sean perfectas. En 3.4.1, probamos que el producto fibrado de una cantidad numerable e infinita de funciones es un límite inverso generalizado.

En el Capítulo 4 definimos el concepto de sistema inverso de subconjuntos cerrados y su límite inverso generalizado. Damos condiciones, en 4.1.8, para que el límite inverso generalizado sea compacto y, en 4.1.9, para que no sea vacío. En 4.2.1 mostramos cómo inducir funciones de un espacio topológico Y en un límite inverso generalizado y en 4.2.3 damos una caracterización de los límites inversos generalizados. Al igual que en el caso numerable, probamos, en 4.2.4, que el producto de límites inversos generalizados es un límite inverso generalizado. Por último, en 4.2.5, damos condiciones para inducir funciones entre límites inversos generalizados.

En el Capítulo 5 probamos un resultado referente a sistemas inversos y tres resultados relacionados con sucesiones inversas. En la Sección 5.2 abordamos el tema de unicidad de hiperespacios y, usando límites inversos, probamos, en 5.2.23, que los continuos periféricamente metrizables que son hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacios 2^X y $\mathcal{C}_n(X)$ únicos. En 5.3.16 probamos que, bajo ciertas condiciones, el límite inverso de una sucesión inversa de abanicos sobre el conjunto de Cantor tiene la propiedad del punto fijo. En 5.3.22, damos una condición para que el límite inverso de una sucesión inversa de n-odos y funciones de ligadura monótonas sea un n-odo. En 5.4.7, damos una caracterización de los puntos extremos de los continuos tipo arco.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo revisaremos los conceptos de topología producto, hiperespacio y topología cociente, así como la notación que usaremos más adelante.

A lo largo del presente trabajo, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ denotarán a los conjuntos de los números naturales y de los números reales, respectivamente. Por **espacio** entenderemos un espacio topológico. Un espacio **degenerado** es un espacio con a lo más un punto. Un **arco** es cualquier espacio homeomorfo a $I = [0, 1]$, una **curva cerrada simple** es cualquier espacio homeomorfo a $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \| x \| = 1\}$. Con el símbolo $\blacksquare$ indicaremos que ha concluido una demostración.

1.1. Topología producto

Dada una familia $\mathcal{A} = \{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de espacios, denotaremos por $\prod \mathcal{A}$ al producto cartesiano de la familia $\mathcal{A}$ y por p_α a la **proyección** de $\prod \mathcal{A}$ sobre X_α. Dado un punto $x \in \prod \mathcal{A}$ lo escribiremos como $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, donde $x_\alpha = p_\alpha(x)$.

La topología asignada a $\prod \mathcal{A}$ es la **topología producto**, la cual tiene como subbase a la familia:

$$\{p_\alpha^{-1}[U_\alpha] : \alpha \in \Lambda \text{ y } U_\alpha \text{ es abierto en } X_\alpha\}.$$

De este modo, cada proyección p_α es continua y una función $f : Z \to \prod \mathcal{A}$ es continua si y sólo si $p_\alpha \circ f$ es continua para cada $\alpha \in \Lambda$ (vea [En, 2.3.6]).

1.1.1 Definición. Sean $\mathcal{A} = \{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una familia de espacios y $X = \prod \mathcal{A}$. Si $f_\alpha : Z \to X_\alpha$ es una función continua para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces la función $f : Z \to X$ definida por $f(z) = (f_\alpha(z))_{\alpha\in\Lambda}$ es tal que $f_\alpha = p_\alpha \circ f$ para cada $\alpha \in \Lambda$ (vea Figura 1.1) y, por tanto, es continua. Además, si $h : Z \to X$ es una función tal que $f_\alpha = p_\alpha \circ h$ para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces $p_\alpha \circ h = f_\alpha = p_\alpha \circ f$ para cada $\alpha \in \Lambda$ y, por tanto, $h = f$. La función f definida previamente es el **producto diagonal de la familia** $\{f_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & X \arrow[d, "p_\alpha"] \\
 & X_\alpha
\end{tikzcd}$$

Figura 1.1:

1.1.2 Definición. Sean $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ y $\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ dos familias de espacios, $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, $Y = \prod\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ y $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ una función continua, para cada $\alpha \in \Lambda$. El **producto de la familia** $\{f_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es la función:

$$\prod\{f_\alpha : \alpha \in \Lambda\} : X \to Y,$$

definida por $\prod\{f_\alpha : \alpha \in \Lambda\}\left((x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\right) = (f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}$, entonces $f_\alpha \circ p_\alpha = q_\alpha \circ \prod\{f_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, donde q_α es la proyección de Y sobre Y_α (vea Figura 1.2).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_\alpha"'] & Y \arrow[d, "q_\alpha"] \\
X_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"'] & Y_\alpha
\end{tikzcd}$$

Figura 1.2: En este diagrama $f = \prod\{f_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$.

1.2. Hiperespacios

Un **hiperespacio** de un espacio X es una familia de subconjuntos de X. El primer hiperespacio con el que trataremos es 2^X, la familia de subconjuntos cerrados no vacíos de X, con la **topología de Vietoris** $\mathcal{T}$, que tiene como base a la familia de conjuntos de la forma:

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \{C \in 2^X : C \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n \text{ y } C \cap U_i \neq \emptyset \text{ para } 1 \leq i \leq n\},$$

donde $U_1, \ldots, U_n$ son abiertos de X (vea [Na2, (0.11)]).

Otros hiperespacios que consideraremos son los siguientes:

$$\mathcal{K}(X) = \{C \in 2^X : C \text{ es compacto}\},$$

para $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{C}_n(X) = \{C \in \mathcal{K}(X) : C \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$$

y

$$\mathcal{F}_n(X) = \{C \in 2^X : C \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

Observemos que si X es compacto, entonces $\mathcal{K}(X) = 2^X$.

En el siguiente lema mostramos una subbase para $\mathcal{T}$, lo cual nos será muy útil para probar algunos resultados subsecuentes.

1.2.1 Lema. Sean X un espacio y $\mathcal{T}$ la topología de Vietoris en 2^X. Entonces la familia:

$$\mathcal{B} = \{\langle U \rangle : U \text{ es abierto en } X\} \cup \{\langle X, U \rangle : U \text{ es abierto en } X\}$$

es una subbase de $\mathcal{T}$.

Demostración. Observemos que $\langle X, U \rangle = \{C \in 2^X : C \cap U \neq \emptyset\}$. Entonces $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \langle U_1 \cup \cdots \cup U_n \rangle \cap \langle X, U_1 \rangle \cap \cdots \cap \langle X, U_n \rangle$. De aquí, cada abierto básico de $\mathcal{T}$ es intersección de una subfamilia finita de $\mathcal{B}$ y, por tanto, $\mathcal{B}$ es una subbase de $\mathcal{T}$.

■

1.2.2 Definición. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios T_2. La **función inducida entre los hiperespacios $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{K}(Y)$** es la función $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ definida por $\mathcal{K}(f)(C) = f[C]$. A las funciones $\mathcal{K}(f)|_{\mathcal{C}_n(X)}$ y $\mathcal{K}(f)|_{\mathcal{F}_n(X)}$, las denotamos por $\mathcal{C}_n(f)$ y $\mathcal{F}_n(f)$, respectivamente. En el caso en que X y Y sean compactos a la función $\mathcal{K}(f)$ la denotamos por 2^f.

1.2.3 Proposición. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios T_2. Entonces la función $\mathcal{K}(f)$ es continua.

Demostración. Primero observemos que las inclusiones $f[C] \subseteq U$ y $C \subseteq f^{-1}[U]$ son equivalentes. Entonces las proposiciones $f[C] \in \langle U \rangle$ y $C \in \langle f^{-1}[U] \rangle$, también lo son.

Veamos que $\mathcal{K}(f)^{-1}\left[\langle U \rangle \cap \mathcal{K}(Y)\right] = \langle f^{-1}[U] \rangle \cap \mathcal{K}(X)$.

Un conjunto C pertenece a $\mathcal{K}(f)^{-1}\left[\langle U \rangle \cap \mathcal{K}(Y)\right]$ si y sólo si $C \in \mathcal{K}(X)$ y $f[C] = \mathcal{K}(f)(C) \in \langle U \rangle$, lo cual, por la observación anterior, es equivalente a tener $C \in \langle f^{-1}[U] \rangle \cap \mathcal{K}(X)$.

De manera análoga, se tiene que $\mathcal{K}(f)^{-1}\left[\langle Y, U \rangle \cap \mathcal{K}(Y)\right] = \langle X, f^{-1}[U] \rangle \cap \mathcal{K}(X)$.

Por 1.2.1 y las igualdades anteriores, la función $\mathcal{K}(f)$ es continua. ∎

El siguiente teorema nos dice que la compacidad se preserva al tomar hiperespacios.

1.2.4 Teorema. Si X es compacto, entonces 2^X es compacto.

Demostración. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos familias de abiertos en X con la propiedad de que $\{\langle U \rangle : U \in \mathcal{A}\} \cup \{\langle X, U \rangle : U \in \mathcal{B}\}$ cubre a 2^X.

Si $X = \bigcup \mathcal{B}$, por la compacidad de X, existen $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{B}$ tales que $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$. No es difícil ver entonces que $2^X = \langle X, U_1 \rangle \cup \cdots \cup \langle X, U_n \rangle$.

Si $X \setminus \bigcup \mathcal{B} \neq \emptyset$, tenemos que $X \setminus \bigcup \mathcal{B} \in 2^X$ y, por tanto, existe $U \in \mathcal{A}$ tal que $X \setminus \bigcup \mathcal{B} \in \langle U \rangle$. Como $\{U\} \cup \mathcal{B}$ cubre al compacto X, existen $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{B}$ tales que $X = U \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n$, no es difícil ver en este caso que $2^X = \langle U \rangle \cup \langle X, U_1 \rangle \cup \cdots \cup \langle X, U_n \rangle$.

Entonces, por 1.2.1 y el lema de Alexander (vea [CV, (6.A.10)]), el hiperespacio 2^X es compacto. ∎

Ahora consideraremos hiperespacios de espacios métricos. En 1.2.5, mostraremos que si X es un espacio métrico, entonces el hiperespacio $\mathcal{K}(X)$ es metrizable. Por [CV, (1.C.10)], podemos suponer que todos los espacios métricos tienen métricas acotadas, digamos por 1.

Sea (X, d) un espacio métrico. Para $x \in X$ y $C \in 2^X$ sea:

$$d(x, C) = \text{ínf}\{d(x, c) : c \in C\}.$$

Dados $\varepsilon > 0$ y $C \in 2^X$, sea:

$$B_d(C;\varepsilon) = \{x \in X : d(x,C) < \varepsilon\}.$$

Si $C = \{x\}$, al conjunto $B_d(C;\varepsilon)$ lo escribimos como $B_d(x;\varepsilon)$.

La función $\mathcal{H} : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\mathcal{H}(C,D) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : C \subseteq B_d(D;\varepsilon) \text{ y } D \subseteq B_d(C;\varepsilon)\}, \tag{1.1}$$

es una métrica en $\mathcal{K}(X)$ (vea [Na1, 4.2]), llamada la **métrica de Hausdorff**.

En el caso en que X sea un espacio métrico tenemos dos topologías para $\mathcal{K}(X)$, a saber: la topología generada por $\mathcal{H}$ y la topología como subespacio de $(2^X,\mathcal{T})$. En el siguiente teorema veremos que estas dos topologías coinciden.

1.2.5 Teorema. Si X es un espacio métrico, entonces la topología inducida por $\mathcal{H}$, que denotaremos por $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$, y la topología de Vietoris $\mathcal{T}$, restringida a $\mathcal{K}(X)$, coinciden.

Demostración. Primero probaremos que $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ está contenida en $\mathcal{T}$ restringida a $\mathcal{K}(X)$. Para esto mostraremos que, si $C \in \mathcal{K}(X)$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $\mathcal{U}$ en $\mathcal{T}$ tal que $C \in \mathcal{U} \cap \mathcal{K}(X) \subseteq B_{\mathcal{H}}(C;\varepsilon)$.

Sean $C \in \mathcal{K}(X)$ y $\varepsilon > 0$. Como C es compacto, existen $c_1, c_2, \ldots, c_n \in C$ tales que $C \subseteq \bigcup \left\{B_d(c_i; \frac{\varepsilon}{2}) : 1 \leq i \leq n\right\}$. Sea:

$$\mathcal{U} = \langle B_d(C;\varepsilon)\rangle \cap \langle X, B_d(c_1;\tfrac{\varepsilon}{2})\rangle \cap \cdots \cap \langle X, B_d(c_n;\tfrac{\varepsilon}{2})\rangle$$

y veamos que $\mathcal{U} \cap \mathcal{K}(X) \subseteq B_{\mathcal{H}}(C;\varepsilon)$.

Sea $E \in \mathcal{U} \cap \mathcal{K}(X)$. Claramente, se tiene que $E \subseteq B_d(C;\varepsilon)$. Para ver que $C \subseteq B_d(E;\varepsilon)$, observemos que si $c \in C$, entonces $d(c,c_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ para algún $i \in \{1,\ldots,n\}$ y, como $E \cap B_d(c_i;\frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$, tenemos que $d(c_i,e) < \frac{\varepsilon}{2}$ para algún $e \in E$. Por lo anterior se tiene que $d(c,e) < \varepsilon$ y, por tanto, $d(c,E) < \varepsilon$. De esta manera, resulta que $C \subseteq B_d(E;\varepsilon)$, entonces $\mathcal{H}(C,E) < \varepsilon$ y, por tanto, $E \in B_{\mathcal{H}}(C;\varepsilon)$.

Para mostrar que la restricción de $\mathcal{T}$ a $\mathcal{K}(X)$ está contenida en $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$, por 1.2.1, es suficiente mostrar que si U es abierto en X entonces $\langle U\rangle \cap \mathcal{K}(X)$ y $\langle X,U\rangle \cap \mathcal{K}(X)$ pertenecen a $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$.

Sean U un subconjunto abierto de X y $C \in \langle U\rangle \cap \mathcal{K}(X)$. Por [En, 4.1.14] y la compacidad de C, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(C;\varepsilon) \subseteq U$. Entonces $B_{\mathcal{H}}(C;\varepsilon) \subseteq \langle U\rangle \cap \mathcal{K}(X)$.

Sean U un subconjunto abierto de X y $C \in \langle X,U\rangle \cap \mathcal{K}(X)$. Sean $c \in C \cap U$ y $\varepsilon = d(c, X \setminus U) > 0$. Veamos que $B_{\mathcal{H}}(C;\varepsilon) \subseteq \langle X,U\rangle$. Para $E \in B_{\mathcal{H}}(C;\varepsilon)$, se tiene que $C \subseteq B_d(E;\varepsilon)$. Supongamos que $E \cap U = \emptyset$, entonces $E \subseteq X \setminus U$ y, en consecuencia, $\varepsilon \leq d(c, E)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $E \cap U \neq \emptyset$ lo cual quiere decir que $E \in \langle X, U\rangle$ y, por consiguiente, $B_{\mathcal{H}}(C;\varepsilon) \subseteq \langle X, U\rangle \cap \mathcal{K}(X)$.

■

No es difícil probar que si X es metrizable, entonces $\mathcal{C}_n(X)$ y $\mathcal{F}_n(X)$ son cerrados en $(2^X, \mathcal{T})$, con lo cual tenemos el siguiente:

1.2.6 Corolario. Si X es un espacio métrico compacto, entonces 2^X es un espacio métrico compacto y, por tanto, $\mathcal{C}_n(X)$ y $\mathcal{F}_n(X)$ también lo son.

Demostración. Recordemos que si X es compacto, entonces $\mathcal{K}(X) = 2^X$. Además, por 1.2.4, sabemos que 2^X es compacto y, por 1.2.5, que es metrizable.

■

De [IN, 14.9] y [IN, 15.12], obtenemos el siguiente:

1.2.7 Teorema. Si X es un espacio métrico compacto y conexo, entonces los hiperespacios 2^X, $\mathcal{C}_n(X)$ y $\mathcal{F}_n(X)$ son espacios métricos compactos y conexos.

1.3. Topología cociente

Para una relación de equivalencia E en un espacio X denotaremos por X/E al conjunto de clases de equivalencia $[x]$ de E y por π a la función de X sobre X/E que asigna a cada punto $x \in X$ la clase de equivalencia $[x] \in X/E$. Si x y y están relacionados mediante la relación E, entonces escribimos xEy. En el caso en que E sea un subconjunto cerrado de X, también denotaremos por E a la relación de equivalencia que induce a la partición $\{E\} \cup \{\{x\} : x \in X \setminus E\}$. La topología asignada a X/E es la **topología cociente**:

$$\{\mathcal{U} \subseteq X/E : \pi^{-1}[\mathcal{U}] \text{ es abierto en } X\}.$$

A X/E, con la topología cociente, se le llama un **espacio cociente** de X, y a π se le llama la **función natural cociente** (o **función cociente**) de X sobre X/E. De este modo, la función π es continua y una función $f : X/E \to Y$ es continua si y sólo si $f \circ \pi$ es continua (vea [En, 2.4.2]).

1.3.1 Teorema. Sean $f : X \to Y$ una función continua y E y F relaciones de equivalencia en X y Y, respectivamente. Supongamos que aEb implica que $f(a)Ff(b)$. Entonces existe una única función continua $\widetilde{f} : X/E \to Y/F$ tal que $\sigma \circ f = \widetilde{f} \circ \pi$, donde σ es la función cociente de Y sobre Y/F (vea Figura 1.3).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[d, "\sigma"] \\
X/E \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & Y/F
\end{tikzcd}$$

Figura 1.3:

Demostración. Si $[a] = [b]$, tenemos que aEb, lo cual implica que $f(a)Ff(b)$ y, por tanto, $[f(a)] = [f(b)]$. De este modo, podemos definir la función $\widetilde{f} : X/E \to Y/F$ por $\widetilde{f}([x]) = [f(x)]$.

Como $\sigma \circ f = \widetilde{f} \circ \pi$, se tiene que $\widetilde{f}$ es una función continua (vea [En, 2.4.2]).

Para probar la unicidad de $\widetilde{f}$, supongamos que $h : X/E \to Y/F$ es una función continua tal que $\sigma \circ f = h \circ \pi$, entonces $h([x]) = h \circ \pi(x) = \sigma \circ f(x) = [f(x)] = \widetilde{f}([x])$ y, por tanto, $\widetilde{f} = h$.

$\blacksquare$

1.3.2 Teorema. Sean $f : X \to Y$ y $h : Y \to Z$ dos funciones continuas y E, F y G relaciones de equivalencia en X, Y y Z, respectivamente. Si aEb implica que $f(a)Ff(b)$ y aFb implica que $h(a)Gh(b)$, entonces aEb implica que $(h \circ f(a))G(h \circ f(b))$ y $\widetilde{h \circ f} = \widetilde{h} \circ \widetilde{f}$.

Demostración. Sean π_1, π_2 y π_3 las funciones cociente de X sobre X/E, de Y sobre Y/F y de Z sobre Z/G, respectivamente.

Por el Teorema 1.3.1, tenemos que $\widetilde{h} \circ \widetilde{f} \circ \pi_1 = \widetilde{h} \circ \pi_2 \circ f = \pi_3 \circ h \circ f$. Además, por la unicidad de $\widetilde{h \circ f}$, concluimos que $\widetilde{h} \circ \widetilde{f} = \widetilde{h \circ f}$.

$\blacksquare$

Capítulo 2

Límites inversos

Es este capítulo, damos la definición y propiedades de límites inversos de espacios sobre conjuntos dirigidos. Incluimos más resultados de los que necesitaremos para que el lector tenga la oportunidad de familiarizarse con esta herramienta.

En 2.2.17, probamos que si $\mathfrak{l} = \{l_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una función entre sistemas inversos, donde cada l_α es perfecta, y l_Λ es la función inducida por $\mathfrak{l}$, entre los respectivos límites inversos, entonces l_Λ también es perfecta, dando una prueba que hasta nuestro entender no ha aparecido en la literatura.

2.1. Propiedades y ejemplos

En la presente sección revisamos algunas propiedades de los límites inversos.

Comencemos recordando que una relación $\leq$ en un conjunto Λ es un **orden parcial** si

a) $\alpha \leq \alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$

b) si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha$, entonces $\alpha = \beta$, y

c) si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \gamma$, entonces $\alpha \leq \gamma$.

Decimos que un orden parcial $\leq$ **dirige** a un conjunto no vacío Λ si para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Lambda$, existe $\gamma \in \Lambda$ tal que $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$. En tal caso el par $(\Lambda, \leq)$ se llama **conjunto dirigido**. Un subconjunto Σ de un conjunto dirigido Λ es **cofinal** en Λ si para cada $\alpha \in \Lambda$, existe $\gamma \in \Sigma$ tal que $\alpha \leq \gamma$.

2.1.1 Observación. En la mayor parte de este trabajo, usaremos tercias $\{\mathcal{X}, \mathcal{F}, \Lambda\}$, donde Λ es un conjunto dirigido por la relación $\leq$, $\mathcal{X}$ es una familia de espacios $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ y $\mathcal{F} = \left\{f_\alpha^\beta : \alpha, \beta \in \Lambda \text{ con } \alpha \leq \beta\right\}$ es una familia de funciones continuas $f_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$. A la tercia $\{\mathcal{X}, \mathcal{F}, \Lambda\}$ la abreviamos escribiendo $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$.

2.1.2 Definición. Un **sistema inverso** de espacios es una tercia $S = \left\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\right\}$ (vea 2.1.1); donde Λ es un conjunto dirigido por la relación $\leq$, $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una familia de espacios y, para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Lambda$ con $\alpha \leq \beta$, $f_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$ es una función continua tal que:

(i) f_α^α es la función identidad en X_α, y

(ii) $f_\alpha^\gamma = f_\alpha^\beta \circ f_\beta^\gamma$ cuando $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Las funciones f_α^β se llaman **funciones de ligadura** y los espacios X_α se llaman **espacios coordenados** del sistema. Si $\Lambda = \mathbb{N}$, el sistema $\{X_n, f_n^m, \mathbb{N}\}$ se llama **sucesión inversa** y se escribe como $\{X_n, f_n\}$, donde $f_n : X_{n+1} \to X_n$; en este caso $f_n^m = f_n \circ f_{n+1} \circ \ldots \circ f_{m-1}$.

Si $X_\alpha = X$ para cada $\alpha \in \Lambda$, a $\left\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\right\}$ lo escribimos como $\left\{X, f_\alpha^\beta, \Lambda\right\}$ ($\{X, f_n\}$ si $\Lambda = \mathbb{N}$). Si, además, $f_\alpha^\beta = f$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$, a $\left\{X, f_\alpha^\beta, \Lambda\right\}$ lo escribimos como $\{X, f, \Lambda\}$ ($\{X, f\}$ si $\Lambda = \mathbb{N}$).

2.1.3 Definición. El **límite inverso** del sistema inverso $S = \left\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\right\}$ es el conjunto de puntos $x \in \prod \{X_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$ tales que $p_\alpha(x) = f_\alpha^\beta \circ p_\beta(x)$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$. Al límite inverso de S lo denotamos por $\varprojlim S$ o por X_Λ (X_∞ si $\Lambda = \mathbb{N}$) y a la restricción de la proyección p_α a X_Λ por f_α^Λ (f_n^∞ si $\Lambda = \mathbb{N}$), es decir, $f_\alpha^\Lambda = p_\alpha|_{X_\Lambda}$.

2.1.4 Observación. Para cualesquiera $\alpha \leq \beta$, tenemos que:

$$f_\alpha^\Lambda = f_\alpha^\beta \circ f_\beta^\Lambda$$

(vea Figura 2.1).

Como primer resultado veremos una forma de inducir funciones de un espacio en un límite inverso.

$$\begin{tikzcd} & X_\Lambda \arrow[dl, "f_\alpha^\Lambda"'] \arrow[dr, "f_\beta^\Lambda"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\ X_\alpha & & X_\beta \arrow[ll, "f_\alpha^\beta"] \end{tikzcd}$$

Figura 2.1:

2.1.5 Definición. Sean $S = \left\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\right\}$ un sistema inverso y Y un espacio. Una **función de** Y **en** S es una familia $\mathfrak{h} = \{h_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de funciones continuas $h_\alpha : Y \to X_\alpha$ tales que $h_\alpha = f_\alpha^\beta \circ h_\beta$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$ (vea Figura 2.2).

2.1.6 Teorema. Si $\mathfrak{h} = \{h_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una función de un espacio Y en un sistema inverso $S = \left\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\right\}$, entonces existe una única función continua $h : Y \to X_\Lambda$ tal que $h_\alpha = f_\alpha^\Lambda \circ h$ para cada $\alpha \in \Lambda$ (vea Figura 2.3). A la función h se le llama **función inducida por** $\mathfrak{h}$.

Demostración. Sea $h : Y \to \prod\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ el producto diagonal de la familia $\mathfrak{h}$ (vea1.1.1). Como $f_\alpha^\beta \circ p_\beta(h(y)) = f_\alpha^\beta(h_\beta(y)) = h_\alpha(y) = p_\alpha(h(y))$, tenemos que $h(y) \in X_\Lambda$ y, por tanto, $h : Y \to X_\Lambda$. Notemos que $h_\alpha = f_\alpha^\Lambda \circ h$ para cada $\alpha \in \Lambda$.

Además, si $g : Y \to X_\Lambda$ es una función tal que $h_\alpha = f_\alpha^\Lambda \circ g$ para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces:

$$p_\alpha \circ g(y) = f_\alpha^\Lambda \circ g(y) = h_\alpha(y) = f_\alpha^\Lambda \circ h(y) = p_\alpha \circ h(y)$$

y, por tanto, $h = g$.

■

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "h_\alpha"'] \arrow[dr, "h_\beta"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\ X_\alpha & & X_\beta \arrow[ll, "f_\alpha^\beta"] \end{tikzcd}$$

Figura 2.2:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "h_\alpha"'] & & X_\Lambda \arrow[dl, "f_\alpha^\Lambda"] \\ & X_\alpha & \end{tikzcd}$$

Figura 2.3:

2.1.7 Observación. Sea $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso. Por 2.1.4, tenemos que la familia $\mathfrak{f} = \{f_\alpha^\Lambda : \alpha \in \Lambda\}$ es una función de X_Λ en S. Entonces, por 2.1.6, existe una única función continua $f : X_\Lambda \to X_\Lambda$ tal que $f_\alpha^\Lambda = f_\alpha^\Lambda \circ f$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Como la función identidad $id : X_\Lambda \to X_\Lambda$ tiene tal propiedad, podemos concluir que $f = id$.

La propiedad enunciada en 2.1.6 caracteriza a $\{X_\Lambda, f_\alpha^\Lambda, \Lambda\}$, lo cual enunciamos en el teorema siguiente:

2.1.8 Teorema. Sean $\mathfrak{h} = \{h_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una función de un espacio Y en un sistema inverso $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ y $h : Y \to X_\Lambda$ la función inducida por $\mathfrak{h}$ ($h_\alpha = f_\alpha^\Lambda \circ h$ para cada $\alpha \in \Lambda$). Si $\{Y, \mathfrak{h}\}$ tiene la propiedad:

($*$) Si Z es un espacio y $\mathfrak{q} = \{q_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una función de Z en S, entonces existe una única función continua $q : Z \to Y$ tal que $q_\alpha = h_\alpha \circ q$ para cada $\alpha \in \Lambda$.

Entonces h es un homeomorfismo.

Demostración. Por 2.1.7, sabemos que la única función continua $g : X_\Lambda \to X_\Lambda$ tal que $f_\alpha^\Lambda = f_\alpha^\Lambda \circ g$ para cada $\alpha \in \Lambda$ es la función identidad en X_Λ. De manera análoga, por ($*$), la única función continua $g : Y \to Y$ tal que $h_\alpha = h_\alpha \circ g$ para cada $\alpha \in \Lambda$ es la función identidad en Y.

Por ($*$), existe una función continua $q : X_\Lambda \to Y$ tal que $f_\alpha^\Lambda = h_\alpha \circ q$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Observemos que $f_\alpha^\Lambda \circ (h \circ q) = h_\alpha \circ q = f_\alpha^\Lambda$ y que $h_\alpha \circ (q \circ h) = f_\alpha^\Lambda \circ h = h_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Entonces, por la observación del párrafo anterior, se tiene que $h \circ q$ y $q \circ h$ son las funciones identidad en X_Λ y Y, respectivamente. Por tanto, la función h es un homeomorfismo. ■

2.1.9 Proposición. Si $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso y Σ es un subconjunto cofinal en Λ, entonces el límite inverso X_Σ del sistema inverso $S' = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Sigma\}$ es homeomorfo a X_Λ. Además, la función $g : X_\Lambda \to X_\Sigma$ definida por $g((x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}) = (x_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$ es un homeomorfismo tal que $f_\alpha^\Lambda = f_\alpha^\Sigma \circ g$ para cada $\alpha \in \Sigma$.

Demostración. Dado $\alpha \in \Lambda$, sea $\gamma \in \Sigma$ tal que $\alpha \leq \gamma$ y definamos $h_\alpha = f_\alpha^\gamma \circ f_\gamma^\Sigma$. Veamos que h_α está bien definida: sea $\eta \in \Sigma$ tal que $\alpha \leq \eta$ y supongamos que $\gamma \leq \eta$, entonces $f_\alpha^\eta \circ f_\eta^\Sigma = f_\alpha^\gamma \circ f_\gamma^\eta \circ f_\eta^\Sigma = f_\alpha^\gamma \circ f_\gamma^\Sigma$, si γ y η no se pueden comparar existe $\lambda \in \Sigma$ tal que $\gamma \leq \lambda$ y $\eta \leq \lambda$, el argumento anterior prueba que $f_\alpha^\gamma \circ f_\gamma^\Sigma = f_\alpha^\lambda \circ f_\lambda^\Sigma = f_\alpha^\eta \circ f_\eta^\Sigma$. Observemos que $h_\alpha = f_\alpha^\Sigma$ para cada $\alpha \in \Sigma$.

Claramente, la familia $\mathfrak{h} = \{h_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una función de X_Σ en S y la familia $\mathfrak{g} = \{f_\alpha^\Lambda : \alpha \in \Sigma\}$ es una función de X_Λ en S'. Sean $h : X_\Sigma \to X_\Lambda$ la función inducida por $\mathfrak{h}$ ($h_\alpha = f_\alpha^\Lambda \circ h$ para cada $\alpha \in \Lambda$) y $g : X_\Lambda \to X_\Sigma$ la función inducida por $\mathfrak{g}$ ($f_\alpha^\Lambda = f_\alpha^\Sigma \circ g$ para cada $\alpha \in \Sigma$).

No es difícil ver que $f_\alpha^\Sigma = f_\alpha^\Sigma \circ (g \circ h)$ para cada $\alpha \in \Sigma$ y que $f_\alpha^\Lambda = f_\alpha^\Lambda \circ (h \circ g)$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Entonces, por 2.1.7, se tiene que $h \circ g$ y $g \circ h$ son las funciones identidad en X_Λ y X_Σ, respectivamente. Por tanto, g es un homeomorfismo.

De la demostración de 2.1.6, vemos que $g : X_\Lambda \to X_\Sigma$ está definida por $g((x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}) = (x_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$.

■

La proposición anterior, tratándose de un homeomorfismo entre límites inversos, también se puede probar usando 2.1.8, pero preferimos exhibir el homeomorfismo $g : X_\Lambda \to X_\Sigma$ que usaremos, en varias ocaciones, más adelante.

Como caso particular del resultado anterior tenemos el siguiente:

2.1.10 Corolario. Si $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso y $\eta \in \Lambda$, entonces el conjunto $\Sigma = \{\alpha \in \Lambda : \eta \leq \alpha\}$ es cofinal en Λ, X_Λ es homeomorfo a $X_\Sigma = \varprojlim\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Sigma\}$ y $f_\eta^\Lambda = f_\eta^\Sigma \circ g$, donde $g : X_\Lambda \to X_\Sigma$ es un homeomorfismo.

En 2.1.6, no basta que cada h_α sea suprayectiva para que h los sea, como se muestra en el siguiente:

2.1.11 Ejemplo. Dado $n \in \mathbb{N}$, sean $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $f_n : X_{n+1} \to X_n$ definido por $f_n(n+1) = n$ y $f_n(m) = m$ si $m \leq n$. Las funciones $h_n : \mathbb{N} \to X_n$ definidas por $h_n(m) = n$ si $n \leq m$ y $h_n(m) = m$ si $m \leq n$ son tales que

$h_n = f_n \circ h_{n+1}$, lo cual indica que la familia $\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una función de $\mathbb{N}$ en $\{X_n, f_n\}$. Sea $h : \mathbb{N} \to X_\infty$ la función inducida por $\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$. La función h no es suprayectiva puesto que $(n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_\infty \setminus h[\mathbb{N}]$.

Una condición suficiente para que una función inducida sea suprayectiva se da en el Teorema 2.1.14.

Un límite inverso, siendo subespacio de un producto, tiene como base a la familia de intersecciones de X_Λ con abiertos básicos del producto. Esta base, como veremos en el teorema siguiente, tiene un forma más simple.

2.1.12 Teorema. Si $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso, entonces la familia:

$$\mathcal{B} = \left\{(f_\alpha^\Lambda)^{-1}[U_\alpha] : \alpha \in \Lambda \text{ y } U_\alpha \text{ es un abierto en } X_\alpha\right\}$$

es una base para X_Λ.

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, U_{α_i} un abierto en X_{α_i} para $1 \leq i \leq n$, y:

$$\begin{aligned} W &= \left(\bigcap\{p_{\alpha_i}^{-1}[U_{\alpha_i}] : 1 \leq i \leq n\}\right) \cap X_\Lambda = \bigcap\{p_{\alpha_i}^{-1}[U_{\alpha_i}] \cap X_\Lambda : 1 \leq i \leq n\} \\ &= \bigcap\{(f_{\alpha_i}^\Lambda)^{-1}[U_{\alpha_i}] : 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Elegimos $\alpha \in \Lambda$ tal que $\alpha_i \leq \alpha$ para $1 \leq i \leq n$ y definamos $U_\alpha = \bigcap\{(f_{\alpha_i}^\alpha)^{-1}[U_{\alpha_i}] : 1 \leq i \leq n\}$, entonces:

$$\begin{aligned} (f_\alpha^\Lambda)^{-1}[U_\alpha] &= (f_\alpha^\Lambda)^{-1}\left[\bigcap\{(f_{\alpha_i}^\alpha)^{-1}[U_{\alpha_i}] : 1 \leq i \leq n\}\right] \\ &= \bigcap\{(f_\alpha^\Lambda)^{-1}[(f_{\alpha_i}^\alpha)^{-1}[U_{\alpha_i}]] : 1 \leq i \leq n\} \\ &= \bigcap\{(f_{\alpha_i}^\alpha \circ f_\alpha^\Lambda)^{-1}[U_{\alpha_i}] : 1 \leq i \leq n\} \\ &= \bigcap\{(f_{\alpha_i}^\Lambda)^{-1}[U_{\alpha_i}] : 1 \leq i \leq n\} = W. \end{aligned}$$

Por lo cual, $\mathcal{B}$ es una base para X_Λ. ■

2.1.13 Teorema. Sean $\mathfrak{h} = \{h_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una función de un espacio Y en un sistema inverso $\left\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\right\}$ y $h : Y \to X_\Lambda$ la función inducida por $\mathfrak{h}$ ($h_\alpha = f_\alpha^\Lambda \circ h$). Si cada h_α es suprayectiva, entonces $h[Y]$ es denso en X_Λ.

Demostración. Sean $\alpha \in \Lambda$ y U_α un abierto no vacío de X_α. Notemos que, como cada h_α es suprayectiva y $h_\alpha = f_\alpha^\Lambda \circ h$, entonces $(f_\alpha^\Lambda)^{-1}[U_\alpha] \neq \emptyset$. Por 2.1.12, es suficiente probar que $(f_\alpha^\Lambda)^{-1}[U_\alpha] \cap h[Y] \neq \emptyset$. Como h_α es suprayectiva y $U_\alpha \neq \emptyset$, existe $y \in Y$ tal que $f_\alpha^\Lambda \circ h(y) = h_\alpha(y) \in U_\alpha$ y, en consecuencia, $h(y) \in (f_\alpha^\Lambda)^{-1}[U_\alpha] \cap h[Y]$. ■

Como consecuencia inmediata de 2.1.13, se tiene:

2.1.14 Teorema. Sean $\mathfrak{h} = \{h_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una función de un espacio compacto Y en un sistema inverso $\left\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\right\}$ de espacios T_2 y $h : Y \to X_\Lambda$ la función inducida por $\mathfrak{h}$ ($h_\alpha = f_\alpha^\Lambda \circ h$). Si cada h_α es suprayectiva, entonces h es una función cerrada y suprayectiva.

En los tres resultados siguientes, así como en otras partes de este trabajo, usamos la caracterización, expresada en 2.1.8, de X_Λ.

2.1.15 Proposición. Sean Λ un conjunto dirigido, $\{X_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$ una familia de subespacios de un espacio X tales que $X_\beta \subseteq X_\alpha$ si $\alpha \leq \beta$, y $f_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$ la inclusión de X_β en X_α si $\alpha \leq \beta$. Entonces $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso y existe un homeomorfismo $h : \bigcap\{X_\gamma : \gamma \in \Lambda\} \to X_\Lambda$ tal que $f_\alpha^\Lambda = i_\alpha \circ h^{-1}$, donde i_α es la inclusión de $\bigcap\{X_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$ en X_α.

Demostración. Claramente f_α^α es la identidad en X_α y $f_\alpha^\gamma = f_\alpha^\beta \circ f_\beta^\gamma$ si $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, entonces $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso.

Sean $Y = \bigcap\{X_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$ e $\mathfrak{i} = \{i_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, donde $i_\alpha : Y \to X_\alpha$ es la inclusión de Y en X_α. Como $i_\alpha = f_\alpha^\beta \circ i_\beta$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$, tenemos que $\mathfrak{i}$ es una función de Y en S. Sea $h : Y \to X_\Lambda$ la función inducida por $\mathfrak{i}$ ($i_\alpha = f_\alpha^\Lambda \circ h$).

Probaremos que $\{Y, \mathfrak{i}\}$ tiene la propiedad $(*)$ de 2.1.8.

Sean Z un espacio y $\mathfrak{q} = \{q_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una función de Z en S.

Para cada $z \in Z$, probaremos que $q_\alpha(z) = q_\beta(z)$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Lambda$. Si $\alpha \leq \beta$, tenemos que $q_\alpha(z) = f_\alpha^\beta \circ q_\beta(z) = q_\beta(z)$ (f_α^β es la inclusión de X_β en X_α), si α y β no se pueden comparar entonces elegimos $\gamma \in \Lambda$ tal que $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$, el argumento anterior prueba que $q_\alpha(z) = q_\gamma(z) = q_\beta(z)$. Entonces podemos definir $q : Z \to Y$ por $q(z) = q_\alpha(z)$.

No es difícil ver que $q_\alpha = i_\alpha \circ q$ para cada $\alpha \in \Lambda$.

Si $r : Z \to Y$ es una función continua tal que $q_\alpha = i_\alpha \circ r$ para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces $r(z) = i_\alpha \circ r(z) = q_\alpha(z) = q(z)$, es decir, $r = q$.

Así, por 2.1.8, la función h es un homeomorfismo y, por tanto, $f_\alpha^\Lambda = i_\alpha \circ h^{-1}$.

■

En la siguiente proposición, veremos que el producto de una familia $\mathcal{A}$ de espacios es homeomorfo al límite inverso de un sistema inverso cuyos espacios coordenados son productos de subfamilias finitas de $\mathcal{A}$.

2.1.16 Proposición. Sean $\{Y_t : t \in T\}$ una familia de espacios y Λ la familia de subconjuntos finitos (resp. numerables) de T. En Λ, definimos la relación $\alpha \leq \beta$ si $\alpha \subseteq \beta$. Notemos que $(\Lambda, \leq)$ es un conjunto dirigido. Para cada $\alpha \in \Lambda$, sea $X_\alpha = \prod\{Y_t : t \in \alpha\}$ y, para $\alpha \leq \beta$, sea $f_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$ la proyección de X_β sobre X_α. Entonces, $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso y X_Λ es homeomorfo a $\prod\{Y_t : t \in T\}$.

Demostración. Claramente f_α^α es la identidad en X_α y $f_\alpha^\gamma = f_\alpha^\beta \circ f_\beta^\gamma$ si $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, entonces $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso.

Sean $Y = \prod\{Y_t : t \in T\}$ y $\mathfrak{h} = \{h_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, donde $h_\alpha : Y \to X_\alpha$ es la proyección de Y sobre X_α. Observemos que $h_\alpha = f_\alpha^\beta \circ h_\beta$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$, lo cual quiere decir que $\mathfrak{h}$ es una función de Y en S. Sea $h : Y \to X_\Lambda$ la función inducida por $\mathfrak{h}$ ($h_\alpha = f_\alpha^\Lambda \circ h$).

Probaremos que $\{Y, \mathfrak{h}\}$ tiene la propiedad $(*)$ de 2.1.8.

Sean Z un espacio y $\mathfrak{q} = \{q_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una función de Z en S. La familia de funciones $\{q_{\{t\}} : t \in T\}$ induce una función continua $q : Z \to Y$ tal que $q_{\{t\}} = h_{\{t\}} \circ q$, entonces $q_\alpha = h_\alpha \circ q$ para cada $\alpha \in \Lambda$.

Si $r : Z \to Y$ es una función tal que $q_\alpha = h_\alpha \circ r$ para cada $\alpha \in \Lambda$, en particular, se tiene que $q_{\{t\}} = h_{\{t\}} \circ r$ y, por tanto, r coincide con q. Así, por 2.1.8, la función h es un homeomorfismo.

■

La siguiente proposición se refiere a productos de límites inversos, en él veremos que el producto de límites inversos es homeomorfo a un límite inverso.

2.1.17 Proposición. Sea A un conjunto no vacío y supongamos que, para cada $a \in A$, $S(a) = \{X(a)_\alpha, f(a)_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso con límite inverso $X(a)_\Lambda$. Sean $X_\alpha = \prod\{X(a)_\alpha : a \in A\}$, con proyecciones $p(\alpha)_a$, y $f_\alpha^\beta = \prod\{f(a)_\alpha^\beta : a \in A\} : X_\beta \to X_\alpha$ ($f(a)_\alpha^\beta \circ p(\beta)_a = p(\alpha)_a \circ f_\alpha^\beta$ según 1.1.2). Entonces $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso y X_Λ es homeomorfo a $\prod\{X(a)_\Lambda : a \in A\}$.

Demostración. Como cada $f(a)_\alpha^\alpha$ es la identidad en $X(a)_\alpha$, tenemos que f_α^α es la identidad en X_α. Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$ y supongamos que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, entonces:

$$\begin{aligned} p(\alpha)_a \circ f_\alpha^\beta \circ f_\beta^\gamma &= f(a)_\alpha^\beta \circ p(\beta)_a \circ f_\beta^\gamma = f(a)_\alpha^\beta \circ f(a)_\beta^\gamma \circ p(\gamma)_a \\ &= f(a)_\alpha^\gamma \circ p(\gamma)_a = p(\alpha)_a \circ f_\alpha^\gamma, \end{aligned}$$

lo cual quiere decir que $f_\alpha^\gamma = f_\alpha^\beta \circ f_\beta^\gamma$ y, por tanto, S es un sistema inverso.

Para cada $\alpha \in \Lambda$, sea $f(a)_\alpha^\Lambda$ la proyección de $X(a)_\Lambda$ en $X(a)_\alpha$.

Sean $Y = \prod \{X(a)_\Lambda : a \in A\}$ y, para cada $a \in A$, p_a la proyección de Y en $X(a)_\Lambda$. Para cada $\alpha \in \Lambda$, la familia de funciones $\{f(a)_\alpha^\Lambda \circ p_a : a \in A\}$ induce una función continua $h_\alpha : Y \to X_\alpha$ tal que $f(a)_\alpha^\Lambda \circ p_a = p(\alpha)_a \circ h_\alpha$ para cada $a \in A$. Como

$$\begin{aligned} p(\alpha)_a \circ f_\alpha^\beta \circ h_\beta = f(a)_\alpha^\beta \circ p(\beta)_a \circ h_\beta = f(a)_\alpha^\beta \circ f(a)_\beta^\Lambda \circ p_a = f(a)_\alpha^\Lambda \circ p_a \\ = p(\alpha)_a \circ h_\alpha, \end{aligned}$$

tenemos que $h_\alpha = f_\alpha^\beta \circ h_\beta$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$, lo cual quiere decir que $\mathfrak{h} = \{h_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una función de Y en S. Sea $h : Y \to X_\Lambda$ la función inducida por $\mathfrak{h}$ ($h_\alpha = f_\alpha^\Lambda \circ h$).

Probaremos que $\{Y, \mathfrak{h}\}$ tiene la propiedad $(*)$ de 2.1.8.

Sean Z un espacio y $\mathfrak{q} = \{q_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una función de Z en S. Para cualesquiera $a \in A$ y $\alpha \in \Lambda$, sea $q(a)_\alpha = p(\alpha)_a \circ q_\alpha$. Como

$$\begin{aligned} f(a)_\alpha^\beta \circ q(a)_\beta = f(a)_\alpha^\beta \circ p(\beta)_a \circ q_\beta = p(\alpha)_a \circ f_\alpha^\beta \circ q_\beta = p(\alpha)_a \circ q_\alpha \\ = q(a)_\alpha \end{aligned}$$

para cualesquiera $\alpha \leq \beta$, tenemos que la familia $\mathfrak{q}(a) = \{q(a)_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una función de Z en $S(a)$. Sea $q(a)_\Lambda : Z \to X(a)_\Lambda$ la función inducida por $\mathfrak{q}(a)$ ($q(a)_\alpha = f(a)_\alpha^\Lambda \circ q(a)_\Lambda$).

La familia de funciones $\{q(a)_\Lambda : a \in A\}$ induce una función continua $q : Z \to Y$ tal que $q(a)_\Lambda = p_a \circ q$ para cada $a \in A$. Como

$$p(\alpha)_a \circ h_\alpha \circ q = f(a)_\alpha^\Lambda \circ p_a \circ q = f(a)_\alpha^\Lambda \circ q(a)_\Lambda = q(a)_\alpha = p(\alpha)_a \circ q_\alpha,$$

tenemos que $q_\alpha = h_\alpha \circ q$ para cada $\alpha \in \Lambda$.

Sea $r : Z \to Y$ una función continua tal que $q_\alpha = h_\alpha \circ r$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Para probar que $q = r$, mostraremos que $p_a \circ q = p_a \circ r$, lo cual equivale a probar que $f(a)_\alpha^\Lambda \circ p_a \circ q = f(a)_\alpha^\Lambda \circ p_a \circ r$. Esto último se obtiene de la igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} f(a)_\alpha^\Lambda \circ p_a \circ q = f(a)_\alpha^\Lambda \circ q(a)_\Lambda = q(a)_\alpha = p(\alpha)_a \circ q_\alpha = p(\alpha)_a \circ h_\alpha \circ r \\ = f(a)_\alpha^\Lambda \circ p_a \circ r. \end{aligned}$$

Entonces, por 2.1.8, la función h es un homeomorfismo. ■

En el teorema siguiente veremos que la intersección a pares de ciertos subconjuntos de un límite inverso también es un límite inverso.

2.1.18 Teorema. Sean $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso y $Y_\alpha, Z_\alpha \subseteq X_\alpha$ tales que $\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\ |_{Y_\beta}, \Lambda\}$ y $\{Z_\alpha, f_\alpha^\beta\ |_{Z_\beta}, \Lambda\}$ son sistemas inversos. Si $W_\alpha = Y_\alpha \cap Z_\alpha$, entonces la familia $S(Y \cap Z) = \left\{W_\alpha, f_\alpha^\beta\ |_{W_\beta}, \Lambda\right\}$ es un sistema inverso y

$$Y_\Lambda \cap Z_\Lambda = \varprojlim S(Y \cap Z).$$

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \Lambda$ tales que $\alpha \leq \beta$. Como $f_\alpha^\beta[Y_\beta \cap Z_\beta] \subseteq f_\alpha^\beta[Y_\beta] \cap f_\alpha^\beta[Z_\beta] \subseteq Y_\alpha \cap Z_\alpha$, tenemos que $f_\alpha^\beta\ |_{W_\beta}$ es una función de W_β en W_α. Claramente $S(Y \cap Z)$ satisface (i) y (ii) de 2.1.2 y, por tanto, es un sistema inverso.

Veamos que $Y_\Lambda \cap Z_\Lambda \subseteq \varprojlim S(Y \cap Z)$. Sea $x \in Y_\Lambda \cap Z_\Lambda$. Según 2.1.3, el punto $x \in (\prod\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}) \cap (\prod\{Z_\alpha : \alpha \in \Lambda\})$ y $p_\alpha(x) = f_\alpha^\beta \circ p_\beta(x)$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$, entonces $x \in \prod\{W_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ y, por tanto, $x \in \varprojlim S(Y \cap Z)$.

Para ver la otra contención, elegimos $x \in \varprojlim S(Y \cap Z)$. Entonces $x \in \prod\{W_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ y $p_\alpha(x) = f_\alpha^\beta \circ p_\beta(x)$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$. De aquí, obtenemos que $x \in \prod\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ y que $x \in \prod\{Z_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. Por tanto, $x \in Y_\Lambda \cap Z_\Lambda$.

■

El resultado siguiente nos muestra que los subconjuntos cerrados de un límite inverso se obtienen como límites inversos de subconjuntos cerrados de los espacios factores.

2.1.19 Teorema. Si $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso y A es un subconjunto de X_Λ, entonces la familia $S\left(\overline{A}\right) = \left\{\overline{f_\alpha^\Lambda[A]}, f_\alpha^\beta\ |_{\overline{f_\beta^\Lambda[A]}}, \Lambda\right\}$ es un sistema inverso y

$$\overline{A} = \varprojlim S\left(\overline{A}\right) = \left(\prod\left\{\overline{f_\alpha^\Lambda[A]} : \alpha \in \Lambda\right\}\right) \cap X_\Lambda.$$

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \Lambda$ tales que $\alpha \leq \beta$. Como $f_\alpha^\beta\left[\overline{f_\beta^\Lambda[A]}\right] \subseteq \overline{f_\alpha^\beta[f_\beta^\Lambda[A]]} = \overline{f_\alpha^\Lambda[A]}$, tenemos que $f_\alpha^\beta\ |_{\overline{f_\beta^\Lambda[A]}}$ es una función de $\overline{f_\beta^\Lambda[A]}$ en $\overline{f_\alpha^\Lambda[A]}$. Claramente $S\left(\overline{A}\right)$ satisface (i) y (ii) de 2.1.2 y, por tanto, es un sistema inverso.

Es claro que $\varprojlim S\left(\overline{A}\right) \subseteq \left(\prod\left\{\overline{f_\alpha^\Lambda[A]} : \alpha \in \Lambda\right\}\right) \cap X_\Lambda$ y, como $f_\alpha^\Lambda\left[\overline{A}\right] \subseteq \overline{f_\alpha^\Lambda[A]}$, se tiene que $\overline{A} \subseteq \varprojlim S\left(\overline{A}\right)$.

Sea $x \in \left(\prod\left\{\overline{f_\alpha^\Lambda[A]} : \alpha \in \Lambda\right\}\right) \cap X_\Lambda$, probaremos que $x \in \overline{A}$. Sean $\alpha \in \Lambda$ y U_α un abierto en X_α tales que $x \in (f_\alpha^\Lambda)^{-1}[U_\alpha]$. Como $x_\alpha \in \overline{f_\alpha^\Lambda[A]} \cap U_\alpha$, existe $a \in A \cap (f_\alpha^\Lambda)^{-1}[U_\alpha]$, entonces, por 2.1.12, $x \in \overline{A}$.

■

Como una consecuencia de 2.1.18 y 2.1.19 tenemos el siguiente:

2.1.20 Teorema. Si $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso y A y B son subconjuntos de X_Λ, entonces:

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \varprojlim \left\{\overline{f_\alpha^\Lambda[A]} \cap \overline{f_\alpha^\Lambda[B]}, f_\alpha^\beta \mid_{\overline{f_\beta^\Lambda[A]} \cap \overline{f_\beta^\Lambda[B]}}, \Lambda\right\}.$$

El Teorema 2.1.19 es fundamental para la prueba de los dos resultados siguientes:

2.1.21 Teorema. Sean $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso y A un subconjunto de X_Λ. Si $\overline{A} \neq X_\Lambda$, entonces existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $\overline{f_\beta^\Lambda[A]} \neq X_\beta$ para cada $\beta \geq \alpha$.

Demostración. Supongamos que la conclusión es falsa, entonces el conjunto $\Sigma = \{\alpha \in \Lambda : \overline{f_\alpha^\Lambda[A]} = X_\alpha\}$ es cofinal en Λ. Sea $g : X_\Lambda \to X_\Sigma$ definida por $g((x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}) = (x_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$. Notemos que g es un homeomorfismo y que $\overline{f_\alpha^\Sigma[g[A]]} = \overline{f_\alpha^\Lambda[A]} = X_\alpha$, por 2.1.9.

En consecuencia, por 2.1.19, tenemos que $\overline{g[A]} = X_\Sigma$ y, por tanto, $\overline{A} = X_\Lambda$.

■

2.1.22 Teorema. Sean $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso y A y B subconjuntos de X_Λ. Si $\overline{A} \setminus \overline{B} \neq \emptyset$, entonces existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $\overline{f_\beta^\Lambda[A]} \setminus \overline{f_\beta^\Lambda[B]} \neq \emptyset$ para cada $\beta \geq \alpha$.

Demostración. Supongamos que la conclusión es falsa, entonces el conjunto $\Sigma = \{\alpha \in \Lambda : \overline{f_\alpha^\Lambda[A]} \subseteq \overline{f_\alpha^\Lambda[B]}\}$ es cofinal en Λ. Sea $g : X_\Lambda \to X_\Sigma$ definida por $g((x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}) = (x_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$. Notemos que g es un homeomorfismo y que $\overline{f_\alpha^\Sigma[g[A]]} = \overline{f_\alpha^\Lambda[A]} \subseteq \overline{f_\alpha^\Lambda[B]} = \overline{f_\alpha^\Sigma[g[B]]}$, por 2.1.9.

En consecuencia, por 2.1.19, tenemos que $\overline{g[A]} \subseteq \overline{g[B]}$ y, por tanto, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

■

2.2. Funciones inducidas entre límites inversos

Como una aplicación inmediata de 2.1.6, en el teorema siguiente damos condiciones para inducir funciones de un límite inverso a otro.

2.2.1 Definición. Sean $S = \left\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\right\}$ y $S' = \{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$ dos sistemas inversos. Una **función de** S **en** S' es una familia $\mathfrak{l} = \{l_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de funciones continuas $l_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ tales que $l_\alpha \circ f_\alpha^\beta = g_\alpha^\beta \circ l_\beta$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$ (vea Figura 2.4).

$$\begin{tikzcd}
X_\alpha \arrow[d, "l_\alpha"'] & X_\beta \arrow[l, "f_\alpha^\beta"'] \arrow[d, "l_\beta"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
Y_\alpha & Y_\beta \arrow[l, "g_\alpha^\beta"]
\end{tikzcd}$$

Figura 2.4:

2.2.2 Teorema. Si $\mathfrak{l} = \{l_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una función de un sistema inverso $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ en un sistema inverso $S' = \{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$, entonces existe una única función continua $l_\Lambda : X_\Lambda \to Y_\Lambda$ tal que $l_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda = g_\alpha^\Lambda \circ l_\Lambda$ para cada $\alpha \in \Lambda$ (Vea figura 2.5). A la función l_Λ se le llama **función inducida por** $\mathfrak{l}$.

Demostración. Como $g_\alpha^\beta \circ l_\beta \circ f_\beta^\Lambda = l_\alpha \circ f_\alpha^\beta \circ f_\beta^\Lambda = l_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$, tenemos que la familia $\left\{l_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda : \alpha \in \Lambda\right\}$ es una función de X_Λ en S'. Entonces, por 2.1.6, existe una única función continua $l_\Lambda : X_\Lambda \to Y_\Lambda$ tal que $l_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda = g_\alpha^\Lambda \circ l_\Lambda$ para cada $\alpha \in \Lambda$. ■

Como un ejemplo del resultado anterior, consideremos una sucesión inversa de la forma $S = \{X, f\}$. Sean $S' = S$ y, para $n \in \mathbb{N}$, $l_n = f$. Claramente, la familia $\{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una función de S en S' (vea Figura 2.6). A la función inducida por $\{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ se le llama **homeomorfismo de corrimiento** y se denota por $\widehat{f}$. La inversa de $\widehat{f}$ esta definida como $(\widehat{f}\,)^{-1}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

$$
\begin{tikzcd}
X_\Lambda \arrow[r, "f_\alpha^\Lambda"] \arrow[d, "l_\Lambda"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_\alpha \arrow[d, "l_\alpha"] \\
Y_\Lambda \arrow[r, "g_\alpha^\Lambda"'] & Y_\beta
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.5:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "f"] \\
X & X \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.6:

De 2.1.4, tenemos que $f_n^\infty = f \circ f_{n+1}^\infty$ y, por 2.2.2, se tiene que $f \circ f_{n+1}^\infty = f_{n+1}^\infty \circ \widehat{f}$, entonces:

$$f_n^\infty = f \circ f_{n+1}^\infty = f^m \circ f_{n+m}^\infty, \tag{2.1}$$

$$f_n^\infty = f_{n+1}^\infty \circ \widehat{f} = f_{n+m}^\infty \circ \widehat{f}^m \tag{2.2}$$

y

$$f_{n+m}^\infty = f_n^\infty \circ (\widehat{f}\,)^{-m}. \tag{2.3}$$

Si ponemos $n = k - m$ $(k \geq m+1)$, entonces (2.1) y (2.2) se convierten en:

$$f_{k-m}^\infty = f^m \circ f_k^\infty = f_k^\infty \circ \widehat{f}^m. \tag{2.4}$$

Ahora veremos que la preimagen de un subconjunto cerrado bajo una función inducida entre límites inversos también es un límite inverso.

2.2.3 Proposición. Sean $\mathfrak{l} = \{l_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una función de un sistema inverso $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ en un sistema inverso $S' = \{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$ $(l_\alpha \circ f_\alpha^\beta = g_\alpha^\beta \circ l_\beta)$ y $l_\Lambda : X_\Lambda \to Y_\Lambda$ la función inducida por $\mathfrak{l}$ $(l_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda = g_\alpha^\Lambda \circ l_\Lambda)$. Si B es un subconjunto de Y_Λ, entonces la familia $S^{-1}\left(\overline{B}\right) = \left\{ l_\alpha^{-1}\left[\overline{g_\alpha^\Lambda[B]}\right], f_\alpha^\beta\,|_{l_\beta^{-1}\left[\overline{g_\beta^\Lambda[B]}\right]}, \Lambda \right\}$ es un sistema inverso y $l_\Lambda^{-1}\left[\,\overline{B}\,\right] = \varprojlim S^{-1}\left(\overline{B}\right)$. Si $\overline{B} = \{y\}$, a $S^{-1}(\{y\})$ lo escribimos como $S^{-1}(y)$.

Demostración. Como $l_\alpha\left[f_\alpha^\beta\left[l_\beta^{-1}\left[\overline{g_\beta^\Lambda[B]}\right]\right]\right] = g_\alpha^\beta\left[l_\beta\left[l_\beta^{-1}\left[\overline{g_\beta^\Lambda[B]}\right]\right]\right] \subseteq g_\alpha^\beta\left[\overline{g_\beta^\Lambda[B]}\right] \subseteq \overline{g_\alpha^\Lambda[B]}$, se tiene que $f_\alpha^\beta\left[l_\beta^{-1}\left[\overline{g_\beta^\Lambda[B]}\right]\right] \subseteq l_\alpha^{-1}\left[\overline{g_\alpha^\Lambda[B]}\right]$, entonces $f_\alpha^\beta\,|_{l_\beta^{-1}\left[\overline{g_\beta^\Lambda[B]}\right]}$ es un función de $l_\beta^{-1}\left[\overline{g_\beta^\Lambda[B]}\right]$ en $l_\alpha^{-1}\left[\overline{g_\alpha^\Lambda[B]}\right]$. Claramente $S^{-1}\left(\overline{B}\right)$ satisface (i) y (ii) de 2.1.2 y, por tanto, es un sistema inverso.

Para ver que $l_\Lambda^{-1}\left[\,\overline{B}\,\right] = \varprojlim S^{-1}\left(\overline{B}\right)$, observemos que un punto de la forma $l_\Lambda(x)$ pertenece a $\overline{B}$ si y sólo si $g_\alpha^\Lambda \circ l_\Lambda(x) \in \overline{g_\alpha^\Lambda\left[\,B\,\right]}$ para cada $\alpha \in \Lambda$, por 2.1.19. Además, tener $g_\alpha^\Lambda \circ l_\Lambda(x) \in \overline{g_\alpha^\Lambda\left[\,B\,\right]}$ es equivalente a tener $l_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda(x) \in \overline{g_\alpha^\Lambda\left[\,B\,\right]}$ que, a su vez, equivale a tener $f_\alpha^\Lambda(x) \in l_\alpha^{-1}\left[\overline{g_\alpha^\Lambda[B]}\right]$. ■

2.2.4 Lema. Sean Λ un conjunto dirigido tal que $\eta \leq \alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$ y $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso. Entonces la familia $S' = \{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$, donde $Y_\alpha = f_\eta^\alpha[X_\alpha]$ y g_α^β es la inclusión de Y_β en Y_α, es un sistema inverso y la familia $\mathfrak{l} = \{f_\eta^\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una función de S en S'. Además, se tiene que $f_\eta^\Lambda = i_\eta \circ h^{-1} \circ l_\Lambda$, donde i_η es la inclusión de $\bigcap\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ en Y_η, $h : \bigcap\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \to Y_\Lambda$ es un homeomorfismo y l_Λ es la función inducida por $\mathfrak{l}$.

Demostración. Claramente, $S' = \{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso y $\mathfrak{l} = \{f_\eta^\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una función de S en S'. Sea $l_\Lambda : X_\Lambda \to X_\Lambda$ la función inducida por $\mathfrak{l}$ ($f_\eta^\Lambda = f_\eta^\alpha \circ f_\alpha^\Lambda = g_\alpha^\Lambda \circ l_\Lambda$).

Por 2.1.15, existe un homeomorfismo $h : \bigcap\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \to Y_\Lambda$ tal que $g_\alpha^\Lambda = i_\alpha \circ h^{-1}$, donde i_α es la inclusión de $\bigcap\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ en Y_α. De donde se tiene que $f_\eta^\Lambda = i_\eta \circ h^{-1} \circ l_\Lambda$.

■

En 2.2.5 damos condiciones para que la función inducida l_Λ sea un homeomorfismo y, en 2.2.6, damos condiciones para que cualquier función proyección f_η^Λ sea un homeomorfismo.

2.2.5 Teorema. Sean $\mathfrak{l} = \{l_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una función de un sistema inverso $\left\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\right\}$ en un sistema inverso $\{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$ ($l_\alpha \circ f_\alpha^\beta = g_\alpha^\beta \circ l_\beta$) y $l_\Lambda : X_\Lambda \to Y_\Lambda$ la función inducida por $\mathfrak{l}$ ($l_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda = g_\alpha^\Lambda \circ l_\Lambda$). Si cada l_α es un homeomorfismo, entonces l_Λ también lo es.

Demostración. No es difícil ver que $l_\alpha^{-1} \circ g_\alpha^\beta = f_\alpha^\beta \circ l_\beta^{-1}$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$, lo cual quiere decir que $\mathfrak{l}^{-1} = \{l_\alpha^{-1} : \alpha \in \Lambda\}$ es una función de S' en S. Sea $l'_\Lambda : Y_\Lambda \to X_\Lambda$ la función inducida por $\mathfrak{l}^{-1}$ ($l_\alpha^{-1} \circ g_\alpha^\Lambda = f_\alpha^\Lambda \circ l'_\Lambda$).

Como $g_\alpha^\Lambda \circ (l_\Lambda \circ l'_\Lambda) = l_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda \circ l'_\Lambda = l_\alpha \circ l_\alpha^{-1} \circ g_\alpha^\Lambda = g_\alpha^\Lambda$ y $f_\alpha^\Lambda \circ (l'_\Lambda \circ l_\Lambda) = l_\alpha^{-1} \circ g_\alpha^\Lambda \circ l_\Lambda = l_\alpha^{-1} \circ l_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda = f_\alpha^\Lambda$, tenemos, por 2.1.7, que $l_\Lambda \circ l'_\Lambda$ y $l'_\Lambda \circ l_\Lambda$ son las funciones identidad en Y_Λ y X_Λ, respectivamente. Por tanto, l_Λ es un homeomorfismo.

■

2.2.6 Corolario. Si $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso cuyas funciones de ligadura son homeomorfismos, entonces las proyecciones f_η^Λ también son homeomorfismos.

Demostración. Sea $\eta \in \Lambda$. Por 2.1.10, podemos suponer que $\eta \leq \alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Por 2.2.4, sabemos que $\mathfrak{l} = \{f_\eta^\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una función de S en el sistema inverso $S' = \{X_\eta, id_\eta, \Lambda\}$, donde id_η es la función identidad en X_η, y que $f_\eta^\Lambda = h^{-1} \circ l_\Lambda$, donde $h : X_\eta \to Y_\Lambda$ es un homeomorfismo y l_Λ es la función inducida por $\mathfrak{l}$. Además, por 2.2.5, tenemos que l_Λ es un homeomorfismo, entonces la proyección f_η^Λ también es un homeomorfismo.

■

2.2.7 Notación. Dados un sistema inverso $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ y $\alpha, \beta \in \Lambda$, con $\alpha \leq \beta$, denotamos por $K_{\alpha\beta}$ al conjunto de puntos $x \in \prod\{X_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$ tales que $p_\alpha(x) = f_\alpha^\beta \circ p_\beta(x)$ y por K_β al conjunto $\bigcap\{K_{\alpha\beta} : \alpha \leq \beta\}$.

Si cada X_α es T_2, tenemos que cada $K_{\alpha\beta}$ es un subconjunto cerrado de $\prod\{X_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$ (vea [Wi, 13.13]). Entonces los conjuntos K_β también son cerrados en $\prod\{X_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$. Esto nos ayudará a demostrar los dos resultados siguientes:

2.2.8 Lema. El límite inverso de un sistema inverso $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ de espacios T_2 es un subconjunto cerrado de $\prod\{X_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$.

Demostración. Basta observar que $X_\Lambda = \bigcap\{K_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in \Lambda \text{ y } \alpha \leq \beta\}$. ■

2.2.9 Teorema. El límite inverso de un sistema inverso $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ de espacios compactos T_2 es un subconjunto compacto de $\prod\{X_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$. Además, si cada $X_\alpha \neq \emptyset$, entonces el espacio $X_\Lambda \neq \emptyset$.

Demostración. Para ver que X_Λ es compacto observemos que, por el lema anterior, X_Λ es un subconjunto cerrado del espacio compacto $\prod\{X_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$.

Supongamos que cada $X_\alpha \neq \emptyset$ y veamos que cada $K_\beta \neq \emptyset$. Sea $\beta \in \Lambda$. Para $\alpha \not< \beta$, sea $x_\alpha \in X_\alpha$ y para $\alpha < \beta$, sea $x_\alpha = f_\alpha^\beta(x_\beta)$, entonces el punto $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ pertenece a K_β.

Como $K_\beta \subseteq K_\alpha$ si $\alpha \leq \beta$ y Λ es un conjunto dirigido, se tiene que la familia de cerrados $\{K_\beta : \beta \in \Lambda\}$ tiene la propiedad de la intersección finita y, por tanto, el espacio $X_\Lambda = \bigcap\{K_\beta : \beta \in \Lambda\} \neq \emptyset$. ■

Los dos resultados siguientes son consecuencia de 2.2.9 y otros resultados previos.

2.2.10 Teorema. Sean $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de espacios T_2 y A y B subconjuntos compactos de X_Λ. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $f_\beta^\Lambda[A] \cap f_\beta^\Lambda[B] = \emptyset$ para cada $\beta \geq \alpha$.

Demostración. Supongamos que la conclusión es falsa. Entonces el conjunto $\Sigma = \{\alpha \in \Lambda : f_\alpha^\Lambda[A] \cap f_\alpha^\Lambda[B] \neq \emptyset\}$ es cofinal en Λ. Sea $g : X_\Lambda \to X_\Sigma$

definida por $g((x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}) = (x_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$. Notemos que g es un homeomorfismo y que $f_\alpha^\Sigma[g[A]] \cap f_\alpha^\Sigma[g[B]] = f_\alpha^\Lambda[A] \cap f_\alpha^\Lambda[B] \neq \emptyset$, por 2.1.9.

Por 2.1.20, sabemos que:

$$g[A] \cap g[B] = \varprojlim \left\{ f_\alpha^\Sigma[g[A]] \cap f_\alpha^\Sigma[g[B]], f_\alpha^\beta \mid_{f_\beta^\Sigma[g[A]]\cap f_\beta^\Sigma[g[B]]}, \Sigma \right\}$$

y, por 2.2.9, que es distinto del vacío. Por tanto, $A \cap B \neq \emptyset$. ■

2.2.11 Lema. Sean $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de espacios T_2, $S' = \{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de espacios T_1, $\mathfrak{l} = \{l_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una función de S en S' y $l_\Lambda : X_\Lambda \to Y_\Lambda$ la función inducida por $\mathfrak{l}$ ($l_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda = g_\alpha^\Lambda \circ l_\Lambda$). Si cada l_α es suprayectiva y $l_\alpha^{-1}(y)$ es compacto para cualesquiera $\alpha \in \Lambda$ y $y \in Y_\alpha$, entonces l_Λ es suprayectiva.

Demostración. Dado $y \in Y_\Lambda$, sea $S^{-1}(y) = \left\{ l_\alpha^{-1}(y_\alpha), f_\alpha^\beta \mid_{l_\beta^{-1}(y_\beta)}, \Lambda \right\}$. Como $S^{-1}(y)$ es un sistema inverso de espacios compactos T_2 no vacíos, tenemos, por 2.2.9, que el espacio $\varprojlim S^{-1}(y)$ es compacto y distinto del vacío. Además, por 2.2.3, sabemos que $l_\Lambda^{-1}(y) = \varprojlim S^{-1}(y)$. Entonces, existe un punto $x \in \varprojlim S^{-1}(y)$ tal que $l_\Lambda(x) = y$ y, por tanto, l_Λ es suprayectiva. ■

De 2.2.11, es inmediato el resultado siguiente:

2.2.12 Teorema. Sean $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de espacios compactos T_2, $S' = \{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de espacios T_1, $\mathfrak{l} = \{l_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una función de S en S' y $l_\Lambda : X_\Lambda \to Y_\Lambda$ la función inducida por $\mathfrak{l}$ ($l_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda = g_\alpha^\Lambda \circ l_\Lambda$). Si cada l_α es suprayectiva, entonces l_Λ es suprayectiva.

2.2.13 Corolario. Si $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso de espacios compactos T_2, entonces dado $\eta \in \Lambda$ se tiene:

$$f_\eta^\Lambda [X_\Lambda] = \bigcap \{f_\eta^\alpha[X_\alpha] : \eta \leq \alpha\}.$$

Demostración. Sea $\eta \in \Lambda$. Por 2.1.10, podemos suponer que $\eta \leq \alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Por 2.2.4, sabemos que $\mathfrak{l} = \{f_\eta^\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una función de S en el sistema inverso $S' = \{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$, donde $Y_\alpha = f_\eta^\alpha[X_\alpha]$ y g_α^β es la inclusión de Y_β en Y_α, y que $f_\eta^\Lambda = i_\eta \circ h^{-1} \circ l_\Lambda$, donde i_η es la inclusión de $\bigcap\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ en

Y_η, $h : \bigcap\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \to Y_\Lambda$ es un homeomorfismo y l_Λ es la función inducida por $\mathfrak{l}$. Además, por 2.2.12, tenemos que l_Λ es suprayectiva, entonces:

$$\begin{aligned} f_\eta^\Lambda[X_\Lambda] &= i_\eta \circ h^{-1} \circ l_\Lambda[X_\Lambda] = i_\eta \circ h^{-1}\,[Y_\Lambda] = i_\eta[\bigcap\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}] \\ &= \bigcap\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} = \bigcap\{f_\eta^\alpha[X_\alpha] : \eta \leq \alpha\}. \end{aligned}$$

■

Con esto, es claro el siguiente:

2.2.14 Teorema. Si un sistema inverso $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ de espacios compactos T_2 tiene funciones de ligadura suprayectivas, entonces las proyecciones f_η^Λ también son suprayectivas.

En [Wa] se da un ejemplo de un sistema inverso con funciones de ligadura suprayectivas cuyo límite inverso es vacío, por lo cual la compacidad se vuelve escencial en el resultado anterior.

En 2.2.17 veremos que si cada l_α (como en 2.2.2) es perfecta, entonces la función inducida l_Λ también es una función perfecta. Comencemos pues definiendo este tipo de funciones.

2.2.15 Definición. Sea X un espacio T_2. Una función continua $f : X \to Y$ es **perfecta** si es cerrada y $f^{-1}(y)$ es compacto para cada $y \in Y$.

El siguiente lema nos ayudará a probar 2.2.17.

2.2.16 Lema. Sean $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de espacios T_2, $S' = \{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de espacios T_1, $\mathfrak{l} = \{l_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una función de S en S' ($l_\alpha \circ f_\alpha^\beta = g_\alpha^\beta \circ l_\beta$) y $l_\Lambda : X_\Lambda \to Y_\Lambda$ la función inducida por $\mathfrak{l}$ ($l_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda = g_\alpha^\Lambda \circ l_\Lambda$). Supongamos que $l_\alpha^{-1}(y)$ es compacto para cualesquiera $\alpha \in \Lambda$ y $y \in Y_\alpha$. Si A es un subconjunto de X_Λ, entonces $S'(A) = \left\{l_\alpha\left[\overline{f_\alpha^\Lambda[A]}\right], g_\alpha^\beta\,|_{l_\beta\left[\overline{f_\beta^\Lambda[A]}\right]}, \Lambda\right\}$ es un sistema inverso y $l_\Lambda\left[\,\overline{A}\,\right] = \varprojlim S'(A)$.

Demostración. Como $g_\alpha^\beta\left[l_\beta\left[\overline{f_\beta^\Lambda[A]}\right]\right] = l_\alpha\left[f_\alpha^\beta\left[\overline{f_\beta^\Lambda[A]}\right]\right] \subseteq l_\alpha\left[\overline{f_\alpha^\Lambda[A]}\right]$, tenemos que $S'(A)$ es un sistema inverso.

Sea $x \in \overline{A}$. Por 2.1.19, tenemos que $f_\alpha^\Lambda(x) \in \overline{f_\alpha^\Lambda[A]}$. Entonces $g_\alpha^\Lambda \circ l_\Lambda(x) = l_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda(x) \in l_\alpha\left[\overline{f_\alpha^\Lambda[A]}\right]$ y, por tanto, $l_\Lambda(x) \in \varprojlim S'(A)$. De esta forma llegamos a que $l_\Lambda\left[\,\overline{A}\,\right] \subseteq \varprojlim S'(A)$.

Sean $y \in \varprojlim S'(A)$ y $S^{-1}(y) = \left\{ l_\alpha^{-1}(y_\alpha), f_\alpha^\beta \mid_{l_\beta^{-1}(y_\beta)}, \Lambda \right\}$. Como cada $l_\alpha^{-1}(y_\alpha)$ es compacto, entonces cada $C_\alpha = \overline{f_\alpha^\Lambda[A]} \cap l_\alpha^{-1}(y_\alpha)$ también lo es. Además, cada C_α es distinto del vacío porque $y_\alpha = g_\alpha^\Lambda(y) \in l_\alpha \left[\overline{f_\alpha^\Lambda[A]} \right]$. En consecuencia, por 2.2.9, tenemos que $\varprojlim \left\{ C_\alpha, f_\alpha^\beta \mid_{C_\beta}, \Lambda \right\}$ es distinto del vacío.

Por 2.1.19, sabemos que $\overline{A} = \varprojlim \left\{ \overline{f_\alpha^\Lambda[A]}, f_\alpha^\beta \mid_{\overline{f_\beta^\Lambda[A]}}, \Lambda \right\}$ y, por 2.2.3, que $l_\Lambda^{-1}(y) = \varprojlim S^{-1}(y)$. Entonces, por 2.1.18, tenemos la igualdad $\overline{A} \cap l_\Lambda^{-1}(y) = \varprojlim \left\{ C_\alpha, f_\alpha^\beta \mid_{C_\beta}, \Lambda \right\}$. Como $\varprojlim \left\{ C_\alpha, f_\alpha^\beta \mid_{C_\beta}, \Lambda \right\} \neq \emptyset$, existe $x \in \overline{A} \cap l_\Lambda^{-1}(y)$ y, por tanto, $y \in l_\Lambda \left[\overline{A} \right]$. Con esto, tenemos la otra contención y, por tanto, la igualdad buscada.

■

Recordemos que el límite inverso de un sistema inverso de espacios T_2 es un subconjunto cerrado del producto de los espacios factores (vea 2.2.8). En [En, 3.7.9], se prueba que si cada $l_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ es una función perfecta, entonces la función producto $\prod\{l_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ también es perfecta. Con esto se prueba, en [En, 3.7.12], que si $\mathfrak{l} = \{l_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una función de un sistema inverso $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ de espacios T_2 en un sistema inverso $\{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$, donde cada l_α es perfecta, entonces l_Λ, la función inducida por $\mathfrak{l}$, también es perfecta, ya que l_Λ es la restricción de $\prod\{l_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ al subconjunto cerrado X_Λ. En el teorema siguiente, probamos este resultado de una manera distinta. Hasta nuestro entender, ésta es la primera vez que se presenta esta demostración.

2.2.17 Teorema. Sean $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de espacios T_2, $S' = \{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de espacios T_1, $\mathfrak{l} = \{l_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una función de S en S' y $l_\Lambda : X_\Lambda \to Y_\Lambda$ la función inducida por $\mathfrak{l}$ ($l_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda = g_\alpha^\Lambda \circ l_\Lambda$). Si cada l_α es perfecta, entonces l_Λ también lo es.

Demostración. Sabemos que $l_\Lambda^{-1}(y) = \varprojlim \left\{ l_\alpha^{-1}(y_\alpha), f_\alpha^\beta \mid_{l_\beta^{-1}(y_\beta)}, \Lambda \right\}$, por 2.2.3, el cual es compacto, por 2.2.9. Ahora veamos que l_Λ es una función cerrada.

Sea A un subconjunto de X_Λ. Por 2.1.19, tenemos que:

$$\overline{l_\Lambda[A]} = \varprojlim \left\{ \overline{g_\alpha^\Lambda[l_\Lambda[A]]}, g_\alpha^\beta \mid_{\overline{g_\beta^\Lambda[l_\Lambda[A]]}}, \Lambda \right\}$$

y, por 2.2.16, que:

$$l_\Lambda \left[\overline{A} \right] = \varprojlim \left\{ l_\alpha \left[\overline{f_\alpha^\Lambda[A]} \right], g_\alpha^\beta \mid_{l_\beta \left[\overline{f_\beta^\Lambda[A]} \right]}, \Lambda \right\}.$$

Además, por [En, 1.4.C], sabemos que $\overline{l_\alpha[C]} = l_\alpha\left[\,\overline{C}\,\right]$, para cada subconjunto C de X_α. Entonces:

$$\begin{aligned}\overline{l_\Lambda[A]} &= \varprojlim \left\{\overline{g_\alpha^\Lambda[l_\Lambda[A]]}, g_\alpha^\beta\mid_{\overline{g_\beta^\Lambda[l_\Lambda[A]]}}, \Lambda\right\} = \varprojlim \left\{\overline{l_\alpha[f_\alpha^\Lambda[A]]}, g_\alpha^\beta\mid_{\overline{l_\beta[f_\beta^\Lambda[A]]}}, \Lambda\right\}\\ &= \varprojlim \left\{l_\alpha\left[\overline{f_\alpha^\Lambda[A]}\right], g_\alpha^\beta\mid_{l_\beta\left[\overline{f_\beta^\Lambda[A]}\right]}, \Lambda\right\} = l_\Lambda\left[\,\overline{A}\,\right].\end{aligned}$$

Recurriendo, nuevamente, a [En, 1.4.C], obtenemos que l_Λ es una función cerrada y, por tanto, es perfecta.

■

2.2.18 Corolario. Si un sistema inverso $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ de espacios T_2 tiene funciones de ligadura perfectas entonces las proyecciones f_η^Λ también son perfectas.

Demostración. Sea $\eta \in \Lambda$. Por 2.1.10, podemos suponer que $\eta \leq \alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Por 2.2.4, sabemos que $\mathfrak{l} = \{f_\eta^\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una función de S en el sistema inverso $S' = \{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$, donde $Y_\alpha = f_\eta^\alpha[X_\alpha]$ y g_α^β es la inclusión de Y_β en Y_α, y que $f_\eta^\Lambda = i_\eta \circ h^{-1} \circ l_\Lambda$, donde i_η es la inclusión de $\bigcap\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ en Y_η, $h : \bigcap\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \to Y_\Lambda$ es un homeomorfismo y l_Λ es la función inducida por $\mathfrak{l}$. Notemos que cada Y_α es un subconjunto cerrado de X_η, entonces el conjunto $\bigcap\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ también lo es. Con esto, vemos que la inclusión i_η es una función cerrada. Además, por 2.2.17, tenemos que l_Λ es perfecta, entonces f_η^Λ también es perfecta.

■

2.3. Límites inversos de continuos

En esta sección enfocamos nuestra atención a los sistemas inversos cuyos espacios factores son continuos; en particular cuando son unicoherentes (2.3.17) e indescomponibles (2.3.22). También damos condiciones suficientes para que una función inducida entre límites inversos sea confluente (2.3.8) o monótona (2.3.11).

2.3.1 Definición. Un espacio T_2 es un **continuo** si es compacto y conexo. Un **subcontinuo** de un espacio Y es un continuo que es subespacio de Y.

De [En, 6.1.18], obtenemos el siguiente:

2.3.2 Teorema. Sea $S = \{C_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de subcontinuos de Y. Definamos en S la relación $C_1 \leq C_2$ si $C_2 \subseteq C_1$. Si $\leq$ dirige a S, entonces $\bigcap\{C_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ es un continuo.

2.3.3 Teorema. Si $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso de continuos, entonces X_Λ es un continuo.

Demostración. Sean K_β como en 2.2.7 y $\Lambda_\beta = \Lambda \setminus \{\alpha \in \Lambda : \alpha < \beta\}$. La función $f : \prod\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda_\beta\} \to \prod\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ definida por $f((x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda_\beta}) = (y_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, donde $y_\alpha = f_\alpha^\beta(x_\beta)$ si $\alpha \leq \beta$ y $y_\alpha = x_\alpha$ si $\alpha \in \Lambda_\beta$, es una función continua. No es difícil ver que $f\left[\prod\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda_\beta\}\right] = K_\beta$ y, por tanto, cada K_β es un continuo. Entonces, por 2.3.2, el espacio $X_\Lambda = \bigcap\{K_\beta : \beta \in \Lambda\}$ es un continuo.

■

En 2.1.19, vimos que cualquier subconjunto cerrado de un límite inverso X_Λ es el límite inverso de las cerraduras de sus proyecciones, en particular, esto es válido para cualquier componente de X_Λ. En el siguiente lema mostramos algo más; a saber, que cualquier componente de X_Λ es un límite inverso de componentes de los espacios factores. Esto nos ayudará a probar, en 2.3.8, que la función inducida, entre límites inversos, por una familia de funciones confluentes es una función confluente.

2.3.4 Lema. Sean $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de espacios compactos T_2 y K un subconjunto de X_Λ. Entonces K es una componente de X_Λ si y sólo si $K = \varprojlim \left\{C_\alpha, f_\alpha^\beta |_{C_\beta}, \Lambda\right\}$, donde C_α es una componente de X_α para cada $\alpha \in \Lambda$.

Demostración. Observemos que las componentes de X_α, con $\alpha \in \Lambda \cup \{\Lambda\}$, son continuos.

Supongamos que K es una componente de X_Λ. Para $\alpha \in \Lambda$, sea C_α la componente de X_α que contiene a $f_\alpha^\Lambda[K]$. Como $f_\alpha^\beta[f_\beta^\Lambda[K]] = f_\alpha^\Lambda[K]$, tenemos que $f_\alpha^\beta[C_\beta]$ contiene a $f_\alpha^\Lambda[K]$ y, por tanto, $f_\alpha^\beta[C_\beta] \subseteq C_\alpha$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$. Por 2.3.3, sabemos que el espacio $C = \varprojlim \left\{C_\alpha, f_\alpha^\beta |_{C_\beta}, \Lambda\right\}$ es conexo y, por 2.1.22, que $K \subseteq C$. Por tanto, $K = C$.

Recíprocamente, sea $C = \varprojlim \left\{C_\alpha, f_\alpha^\beta |_{C_\beta}, \Lambda\right\}$, donde C_α es una componente de X_α para cada $\alpha \in \Lambda$. Por 2.3.3, el espacio C es conexo. Sea K la componente de X_Λ que contiene a C. Como $f_\alpha^\Lambda[C] \subseteq f_\alpha^\Lambda[K] \subseteq C_\alpha$, tenemos, por 2.1.22, que $K \subseteq C$ y, por tanto, $K = C$. ■

De 2.3.4, obtenemos el teorema siguiente:

2.3.5 Teorema. Sean $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de espacios compactos T_2 y A y B componentes de X_Λ. Si $A \neq B$, entonces existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $f_\beta^\Lambda[A]$ y $f_\beta^\Lambda[B]$ están en componentes distintas de X_β para cada $\beta \geq \alpha$.

Demostración. Observemos que las componentes de X_α, con $\alpha \in \Lambda \cup \{\Lambda\}$, son continuos.

Por el Lema en 2.3.4, sabemos que $A = \varprojlim \left\{C_\alpha, f_\alpha^\beta\mid_{C_\beta}, \Lambda\right\}$ y que $B = \varprojlim \left\{D_\alpha, f_\alpha^\beta\mid_{D_\beta}, \Lambda\right\}$, donde C_α y D_α son las componentes de X_α que contienen a $f_\alpha^\Lambda[A]$ y $f_\alpha^\Lambda[B]$, respectivamente.

Si la conclusión es falsa, entonces el conjunto $\Sigma = \{\alpha \in \Lambda : C_\alpha = D_\alpha\}$ es cofinal en Λ. Sea $g : X_\Lambda \to X_\Sigma$ definida por $g((x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}) = (x_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$. Notemos que g es un homeomorfismo, por 2.1.9.

No es difícil convencerse de que:

$$g[A] = \varprojlim \left\{C_\alpha, f_\alpha^\beta\mid_{C_\beta}, \Sigma\right\} = \varprojlim \left\{D_\alpha, f_\alpha^\beta\mid_{D_\beta}, \Sigma\right\} = g[B]$$

y, por tanto, $A = B$. ■

Como consecuencia de 2.3.5, obtenemos el siguiente:

2.3.6 Corolario. Sean $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de espacios compactos T_2 y $n \in \mathbb{N}$. Si cada X_α tiene a lo más n componentes, entonces X_Λ tiene a lo más n componentes.

2.3.7 Definición. Una función continua $f : X \to Y$ entre espacios es **confluente** si para cualquier subcontinuo B de Y y cualquier componente K de $f^{-1}[B]$, se tiene que $f[K] = B$.

Notemos que de la definición de función confluente se desprende que este tipo de funciones son suprayectivas.

2.3.8 Teorema. Sean $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ y $S' = \{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$ dos sistemas inversos de espacios compactos T_2, $\mathfrak{l} = \{l_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una función de S en S' ($l_\alpha \circ f_\alpha^\beta = g_\alpha^\beta \circ l_\beta$) y $l_\Lambda : X_\Lambda \to Y_\Lambda$ la función inducida por $\mathfrak{l}$ ($l_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda = g_\alpha^\Lambda \circ l_\Lambda$). Si cada l_α es confluente, entonces l_Λ también lo es.

Demostración. Sean B un subcontinuo de Y_Λ y K una componente de $l_\Lambda^{-1}[B]$. Por 2.2.3, sabemos que $l_\Lambda^{-1}[B] = \varprojlim \left\{ l_\alpha^{-1}\left[g_\alpha^\Lambda[B]\right], f_\alpha^\beta \mid_{l_\beta^{-1}\left[g_\beta^\Lambda[B]\right]}, \Lambda \right\}$ y, por 2.3.4, que $K = \varprojlim \left\{ C_\alpha, f_\alpha^\beta \mid_{C_\beta}, \Lambda \right\}$, donde C_α es una componente de $l_\alpha^{-1}\left[g_\alpha^\Lambda[B]\right]$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Como cada l_α es confluente, tenemos que $l_\alpha[C_\alpha] = g_\alpha^\Lambda[B]$.

Consideremos los sistemas inversos $\left\{ C_\alpha, f_\alpha^\beta \mid_{C_\beta}, \Lambda \right\}$ y $\{g_\alpha^\Lambda[B], f_\alpha^\beta \mid_{g_\beta^\Lambda[B]}, \Lambda\}$ y las funciones $l_\alpha \mid_{C_\alpha}$. Por 2.2.12, tenemos que la función $l_\Lambda \mid_K : K \to B$ es suprayectiva, entonces $l_\Lambda[K] = B$, ya que $B = \varprojlim\{g_\alpha^\Lambda[B], f_\alpha^\beta \mid_{g_\beta^\Lambda[B]}, \Lambda\}$. Por tanto, la función l_Λ es confluente.

■

2.3.9 Corolario. Si un sistema inverso $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ de espacios compactos T_2 tiene funciones de ligadura confluentes, entonces las proyecciones f_η^Λ también son confluentes.

Demostración. Sea $\eta \in \Lambda$. Por 2.1.10, podemos suponer que $\eta \leq \alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Por 2.2.4, sabemos que $\mathfrak{l} = \{f_\eta^\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una función de S en el sistema inverso $S' = \{X_\eta, id_\eta, \Lambda\}$, donde id_η es la función identidad en X_η, y que $f_\eta^\Lambda = h^{-1} \circ l_\Lambda$, donde $h : \bigcap\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \to Y_\Lambda$ es un homeomorfismo y l_Λ es la función inducida por $\mathfrak{l}$. Además, por 2.3.8, tenemos que l_Λ es confluente, entonces f_η^Λ también es confluente.

■

Resultados análogos a 2.3.8 y 2.3.9 se pueden probar para el caso de las funciones monótonas.

2.3.10 Definición. Una función continua $f : X \to Y$ es **monótona** si $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in Y$.

2.3.11 Teorema. Sean $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de espacios compactos T_2, $S' = \{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de espacios T_1, $\mathfrak{l} = \{l_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una función de S en S' y $l_\Lambda : X_\Lambda \to Y_\Lambda$ la función inducida por $\mathfrak{l}$ ($l_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda = g_\alpha^\Lambda \circ l_\Lambda$). Si cada l_α es monótona, entonces l_Λ también lo es.

Demostración. Para $y \in Y_\Lambda$, sea $S^{-1}(y) = \left\{ l_\alpha^{-1}(y_\alpha), f_\alpha^\beta \mid_{l_\beta^{-1}(y_\beta)}, \Lambda \right\}$. Por 2.2.3, sabemos que $l_\Lambda^{-1}(y) = \varprojlim S^{-1}(y)$. Así que, es suficiente probar que el espacio $\varprojlim S^{-1}(y)$ es conexo.

Como cada l_α es monótona, tenemos que $S^{-1}(y)$ es un sistema inverso de continuos. Entonces, por 2.3.3, el espacio $\underleftarrow{\lim} S^{-1}(y)$ es un continuo, con lo cual se termina la demostración.

■

2.3.12 Corolario. Si un sistema inverso $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ de espacios compactos T_2 tiene funciones de ligadura monótonas, entonces las proyecciones f_η^Λ también son monótonas.

Demostración. Sea $\eta \in \Lambda$. Por 2.1.10, podemos suponer que $\eta \leq \alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Por 2.2.4, sabemos que $\mathfrak{l} = \{f_\eta^\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una función de S en el sistema inverso $S' = \{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$, donde $Y_\alpha = f_\eta^\alpha[X_\alpha]$ y g_α^β es la inclusión de Y_β en Y_α, y que $f_\eta^\Lambda = i_\eta \circ h^{-1} \circ l_\Lambda$, donde i_η es la inclusión de $\bigcap\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ en Y_η, $h : \bigcap\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \to Y_\Lambda$ es un homeomorfismo y l_Λ es la función inducida por $\mathfrak{l}$. Además, por 2.3.11, tenemos que l_Λ es monótona, entonces f_η^Λ también es monótona.

■

En 2.3.14, damos condiciones para que un límite inverso sea localmente conexo, para lo cual usaremos el siguiente teorema que enunciamos sin prueba.

2.3.13 Teorema. [En, 6.1.29] Si $f : X \to Y$ es una función monótona y suprayectiva, la cual es cerrada o abierta, entonces para cada subconjunto conexo C de Y, se tiene que $f^{-1}[C]$ es conexo.

2.3.14 Teorema. Sea $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de espacios compactos T_2 y funciones de ligadura suprayectivas. Si cada X_α es localmente conexo y cada f_α^β es monótona, entonces X_Λ es localmente conexo.

Demostración. Sean $x \in X_\Lambda$, $\alpha \in \Lambda$ y U_α un abierto en X_α tales que $x \in (f_\alpha^\Lambda)^{-1}[U_\alpha]$. Como $x_\alpha \in U_\alpha$ y X_α es localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo C_α de X_α tal que $x_\alpha \in C_\alpha \subseteq U_\alpha$. Por 2.2.14, tenemos que la proyección f_α^Λ es suprayectiva y, por 2.3.12, que f_α^Λ es monótona. Entonces, por 2.3.13, el conjunto $(f_\alpha^\Lambda)^{-1}[C_\alpha]$ es un abierto y conexo. Como $x \in (f_\alpha^\Lambda)^{-1}[C_\alpha] \subseteq (f_\alpha^\Lambda)^{-1}[U_\alpha]$, por 2.1.12, concluimos que X_Λ es localmente conexo.

■

En lo que resta de esta sección analizaremos sistemas inversos de continuos unicoherentes y sistemas inversos de continuos indescomponibles.

2.3.15 Definición. Un continuo X es **unicoherente** si para cualesquiera subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$ se tiene que $A \cap B$ es conexo. Decimos que X es **hereditariamente unicoherente** si cada subcontinuo de X es unicoherente.

2.3.16 Ejemplo. El intervalo cerrado I es hereditariamente unicoherente y S^1 no es unicoherente. Entonces, ningún continuo hereditariamente unicoherente contiene curvas cerradas simples.

2.3.17 Teorema. Si $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso de continuos unicoherentes con funciones de ligadura suprayectivas, entonces X_Λ es un continuo unicoherente.

Demostración. Sean A y B subcontinuos de X_Λ tales que $X_\Lambda = A \cup B$. Por 2.2.14, sabemos que las proyecciones f_α^Λ son suprayectivas, entonces $X_\alpha = f_\alpha^\Lambda[A] \cup f_\alpha^\Lambda[B]$. Como cada X_α es unicoherente, tenemos que los espacios $C_\alpha = f_\alpha^\Lambda[A] \cap f_\alpha^\Lambda[B]$ son continuos. Por 2.1.20, sabemos que $A \cap B = \varprojlim \left\{C_\alpha, f_\alpha^\beta|_{C_\beta}, \Lambda\right\}$ y, por 2.3.3, que es un continuo. Por tanto, X_Λ es un continuo unicoherente.

■

2.3.18 Corolario. El límite inverso de un sistema inverso de continuos hereditariamente unicoherentes es un continuo hereditariamente unicoherente.

Demostración. Sea $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de continuos hereditariamente unicoherentes y A un subcontinuo de X_Λ. Por 2.3.3, sabemos que X_Λ es un continuo y, por 2.1.19, que $A = \varprojlim \left\{f_\alpha^\Lambda[A], f_\alpha^\beta|_{f_\beta^\Lambda[A]}, \Lambda\right\}$. Como $f_\alpha^\Lambda[A] = f_\alpha^\beta[f_\beta^\Lambda[A]]$, tenemos que $\left\{f_\alpha^\Lambda[A], f_\alpha^\beta|_{f_\beta^\Lambda[A]}, \Lambda\right\}$ es un sistema inverso de continuos unicoherentes con funciones de ligadura suprayectivas. Entonces, por 2.3.17, A es un continuo unicoherente y, por tanto, X_Λ es un continuo hereditariamente unicoherente.

■

Un continuo **tipo arco** es un espacio homeomorfo al límite inverso de una sucesión inversa $\{I, f_n\}$. Por el resultado anterior, un continuo tipo arco es hereditariamente unicoherente.

2.3.19 Definición. Un continuo es **descomponible** si es la unión de dos de sus subcontinuos propios. Un continuo es **indescomponible** si no es descomponible. Decimos que X es **hereditariamente indescomponible** si cada subcontinuo de X es indescomponible

Una forma de construir continuos indescomponibles es a través de los sistemas inversos indescomponibles que definiremos a continuación.

2.3.20 Definición. Un sistema inverso $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ de continuos es **indescomponible** si para cualesquiera $\alpha < \beta$ y subcontinuos A y B de X_β cuya unión es X_β se tiene que $f_\alpha^\beta[A] = X_\alpha$ o $f_\alpha^\beta[B] = X_\alpha$.

Observemos que, por definición, un sistema inverso indescomponible tiene funciones de ligadura suprayectivas, entonces, por 2.2.14, las proyecciones f_α^Λ son suprayectivas.

2.3.21 Teorema. El límite inverso de un sistema inverso indescomponible (de continuos) es un continuo indescomponible.

Demostración. Sean $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso indescomponible. Por 2.3.3, sabemos que X_Λ es un continuo. Sean A y B subcontinuos propios de X_Λ. Por 2.1.21, existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $f_\alpha^\Lambda[A] \neq X_\alpha \neq f_\alpha^\Lambda[B]$.

Como $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso indescomponible, tenemos que $f_\beta^\Lambda[A] \cup f_\beta^\Lambda[B] \neq X_\beta$ para cada $\beta > \alpha$, de lo contrario se tendría que $f_\alpha^\Lambda[A] = f_\alpha^\beta[f_\beta^\Lambda[A]] = X_\alpha$ o que $f_\alpha^\Lambda[B] = f_\alpha^\beta[f_\beta^\Lambda[B]] = X_\alpha$.

Supongamos que $X_\Lambda = A \cup B$. Por 2.2.14, sabemos que las proyecciones f_β^Λ son suprayectivas, entonces $X_\beta = f_\beta^\Lambda[X_\Lambda] = f_\beta^\Lambda[A] \cup f_\beta^\Lambda[B]$ para cada $\beta > \alpha$, lo cual es una contradicción. De modo que, X_Λ no puede ser la unión de dos de sus subcontinuos propios y, por tanto, es indescomponible. ■

Notemos que, en 2.3.21, no es necesario que los espacios factores de un sistema inverso sean indescomponibles para que su límite lo sea. Esta condición sí es suficiente para los sistemas inversos con funciones de ligadura suprayectivas, como veremos en el siguiente:

2.3.22 Teorema. El límite inverso de un sistema inverso de continuos indescomponibles con funciones de ligadura suprayectivas es un continuo indescomponible.

Demostración. Sea $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de continuos indescomponibles con funciones de ligadura suprayectivas. Por 2.3.3, sabemos que X_Λ es un continuo.

Veamos que $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso indescomponible. Sean $\alpha, \beta \in \Lambda$, con $\alpha < \beta$ y A y B subcontinuos de X_β tales que $X_\beta = A \cup B$.

Como X_β es indescomponible, se tiene que $X_\beta = A$ o $X_\beta = B$. Entonces $f_\alpha^\beta[A] = f_\alpha^\beta[X_\beta] = X_\alpha$ o $f_\alpha^\beta[B] = f_\alpha^\beta[X_\beta] = X_\alpha$. De modo que, $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso indescomponible y, por 2.3.21, X_Λ es indescomponible. ■

Como consecuencia de 2.3.22, tenemos el siguiente:

2.3.23 Corolario. El límite inverso de un sistema inverso de continuos hereditariamente indescomponibles es un continuo hereditariamente indescomponible.

Demostración. Sea $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de continuos hereditariamente indescomponibles y A un subcontinuo de X_Λ. Por 2.3.3, sabemos que X_Λ es un continuo y, por 2.1.19, que $A = \varprojlim \left\{f_\alpha^\Lambda[A], f_\alpha^\beta\mid_{f_\beta^\Lambda[A]}, \Lambda\right\}$. Como $f_\alpha^\Lambda[A] = f_\alpha^\beta[f_\beta^\Lambda[A]]$, tenemos que $\left\{f_\alpha^\Lambda[A], f_\alpha^\beta\mid_{f_\beta^\Lambda[A]}, \Lambda\right\}$ es un sistema inverso de continuos indescomponibles con funciones de ligadura suprayectivas. Entonces, por 2.3.22, A es un continuo indescomponible y, por tanto, X_Λ es un continuo hereditariamente indescomponible. ■

2.4. Espacios cociente y límites inversos

En 2.4.1, damos condiciones para que el cociente de un límite inverso sea un límite inverso.

Para esto, observemos que si $f : X \to Y$ es una función continua y A y B son subconjuntos cerrados de X y Y, respectivamente, tales que $f[A] \subseteq B$, entonces, por 1.3.1, existe una función continua $\widetilde{f} : X/A \to Y/B$ tal que $\sigma \circ f = \widetilde{f} \circ \pi$, donde π y σ son las funciones cociente de X en X/A y de Y en Y/B, respectivamente.

2.4.1 Teorema. Sean $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de espacios T_2 y, para cada $\alpha \in \Lambda$, A_α un subconjunto compacto de X_α. Si $f_\alpha^\beta[A_\beta] \subseteq A_\alpha$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$, entonces las familias $\{A_\alpha, f_\alpha^\beta\mid_{A_\beta}, \Lambda\}$ y $\widetilde{S} = \left\{X_\alpha/A_\alpha, \widetilde{f_\alpha^\beta}, \Lambda\right\}$ son sistemas inversos y el espacio $\varprojlim \widetilde{S}$ es homeomorfo al espacio cociente X_Λ/A_Λ.

Demostración. Para $\alpha \in \Lambda \cup \{\Lambda\}$, sea π_α la función cociente de X_α en X_α/A_α. Por 1.3.2, tenemos que $\widetilde{f_\alpha^\beta} \circ \widetilde{f_\beta^\gamma} = \widetilde{f_\alpha^\gamma}$, entonces $\widetilde{S}$ es un sistema inverso. Claramente, $\{A_\alpha, f_\alpha^\beta \mid_{A_\beta}, \Lambda\}$ es un sistema inverso. Sea g_α la proyección de $\varprojlim \widetilde{S}$ en X_α/A_α.

Divideremos la demostración en 2 casos:

Caso 1: Existe $\eta \in \Lambda$ tal que $A_\alpha = \emptyset$ para cada $\alpha \geq \eta$. El conjunto $\Sigma = \{\alpha \in \Lambda : \eta \leq \alpha\}$ es cofinal en Λ, entonces, por 2.1.10, el espacio $\varprojlim \widetilde{S}$ es homeomorfo a $\varprojlim \left\{X_\alpha/A_\alpha, \widetilde{f_\alpha^\beta}, \Sigma\right\}$ y X_Λ es homeomorfo a $X_\Sigma = \varprojlim\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Sigma\}$. Claramente, el espacio $\varprojlim \left\{X_\alpha/A_\alpha, \widetilde{f_\alpha^\beta}, \Sigma\right\}$ es homeomorfo a $\varprojlim\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Sigma\}$ y $A_\Lambda = \emptyset$. Por tanto, el espacio $\varprojlim \widetilde{S}$ es homeomorfo a X_Λ/A_Λ.

Caso 2: El conjunto $\Sigma = \{\alpha \in \Lambda : A_\alpha \neq \emptyset\}$ es cofinal en Λ. Por 2.1.9, podemos suponer que $A_\alpha \neq \emptyset$ para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces, por 2.2.9, se tiene que $A_\Lambda \neq \emptyset$.

Por 1.3.2, las funciones $\widetilde{f_\alpha^\Lambda} : X_\Lambda/A_\Lambda \to X_\alpha/A_\alpha$ son tales que $\widetilde{f_\alpha^\Lambda} = \widetilde{f_\alpha^\beta} \circ \widetilde{f_\beta^\Lambda}$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$, lo cual quiere decir que la familia $\mathfrak{h} = \left\{\widetilde{f_\alpha^\Lambda} : \alpha \in \Lambda\right\}$ es una función de X_Λ/A_Λ en $\widetilde{S}$. Sea $h : X_\Lambda/A_\Lambda \to \varprojlim \widetilde{S}$ la función inducida por $\mathfrak{h}$ $(\widetilde{f_\alpha^\Lambda} = g_\alpha \circ h)$

Probaremos que $\{X_\Lambda/A_\Lambda, \mathfrak{h}\}$ tiene la propiedad $(*)$ de 2.1.8.

Sean Z un espacio y $\mathfrak{q} = \{q_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una función de X_Λ/A_Λ en $\widetilde{S}$.

Definiremos una función $q : Z \to X_\Lambda/A_\Lambda$ del modo siguiente:

Sea $z \in Z$, probaremos que existe $x_z = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in X_\Lambda$ tal que $\pi_\alpha(x_\alpha) = q_\alpha(z)$ para cada $\alpha \in \Lambda$.

Si $q_\alpha(z) = A_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$, tomamos $x_z = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in A_\Lambda$. Entonces $\pi_\alpha(x_\alpha) = A_\alpha = q_\alpha(z)$.

Si $q_\eta(z) \neq A_\eta$ para algún $\eta \in \Lambda$, sea $\Sigma = \{\alpha \in \Lambda : \eta \leq \alpha\}$. Para cada $\alpha \in \Sigma$, sea $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que $\pi_\alpha(x_\alpha) = q_\alpha(z)$. Si $\alpha \notin \Sigma$, entonces existe $\beta \in \Sigma$ tal que $\alpha \leq \beta$, sea $x_\alpha = f_\alpha^\beta(x_\beta)$.

Para $\alpha, \beta \in \Sigma$, con $\alpha \leq \beta$, tenemos que $\pi_\alpha(x_\alpha) = q_\alpha(z) = \widetilde{f_\alpha^\beta} \circ q_\beta(z) = \widetilde{f_\alpha^\beta}(\pi_\beta(x_\beta)) = \pi_\alpha(f_\alpha^\beta(x_\beta))$. En particular, $\pi_\eta(x_\eta) = \widetilde{f_\eta^\beta} \circ q_\beta(z)$. Entonces $q_\beta(z) \neq A_\beta$ para cada $\beta \in \Sigma$ y $x_\alpha = f_\alpha^\beta(x_\beta)$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \leq \beta$.

Veamos que x_α, cuando $\alpha \notin \Sigma$, está bien definido. Sean $\beta, \beta' \in \Sigma$ tales que $\alpha \leq \beta$ y $\alpha \leq \beta'$ y supongamos que $\beta \leq \beta'$, entonces $f_\alpha^{\beta'}(x_{\beta'}) = f_\alpha^\beta \circ f_\beta^{\beta'}(x_{\beta'}) = f_\alpha^\beta(x_\beta)$. Si β y β' no se pueden comparar, existe $\gamma \in \Sigma$ tal que $\beta \leq \gamma$ y $\beta' \leq \gamma$ y, el argumento anterior prueba que, $f_\alpha^{\beta'}(x_{\beta'}) = f_\alpha^\gamma(x_\gamma) = f_\alpha^\beta(x_\beta)$.

Ahora veamos que $\pi_\alpha(x_\alpha) = q_\alpha(z)$ cuando $\alpha \notin \Sigma$. En este caso $x_\alpha = f_\alpha^\beta(x_\beta)$ para algún $\beta \in \Sigma$ con $\alpha \leq \beta$ y, en consecuencia, tenemos que $\pi_\alpha(x_\alpha) = \pi_\alpha(f_\alpha^\beta(x_\beta)) = \widetilde{f_\alpha^\beta}(\pi_\beta(x_\beta)) = \widetilde{f_\alpha^\beta}(q_\beta(z)) = q_\alpha(z)$.

Claramente el punto $x_z = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ pertenece a X_Λ.

Entonces la función $q : Z \to X_\Lambda/A_\Lambda$ definida por $q(z) = \pi_\Lambda(x_z)$ es tal que $\widetilde{f_\alpha^\Lambda} \circ q(z) = \widetilde{f_\alpha^\Lambda} \circ \pi_\Lambda(x_z) = \pi_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda(x_z) = \pi_\alpha(x_\alpha) = q_\alpha(z)$ para cada $\alpha \in \Lambda$.

Veamos que q es continua. Sean $z \in Z$ y $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de X_Λ/A_Λ tales que $q(z) \in \mathcal{U}$.

Como $\pi_\Lambda^{-1}(q(z))$ es compacto en X_Λ, existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Lambda$ y abiertos U_i de X_{α_i} tales que $\pi_\Lambda^{-1}(q(z)) \subseteq \bigcup\{(f_{\alpha_i}^\Lambda)^{-1}[U_i] : 1 \leq i \leq n\} \subseteq \pi_\Lambda^{-1}[\mathcal{U}]$. Sean $\alpha' \in \Lambda$ tal que $\alpha_i \leq \alpha'$ y $U' = \bigcup\{(f_{\alpha_i}^{\alpha'})^{-1}[U_i] : 1 \leq \ n\}$. Entonces $\pi_\Lambda^{-1}(q(z)) \subseteq (f_{\alpha'}^\Lambda)^{-1}[U'] \subseteq \pi_\Lambda^{-1}[\mathcal{U}]$.

Si $q(z) = A_\Lambda$, tenemos, por el Corolario 2.2.13, que $\bigcap\{f_{\alpha'}^\alpha[A_\alpha] : \alpha \in \Lambda$ y $\alpha' \leq \alpha\} = f_{\alpha'}^\Lambda[A_\Lambda] \subseteq U'$ y, por [En, 3.1.5], que existe $\alpha \geq \alpha'$ tal que $f_{\alpha'}^\Lambda[A_\Lambda] \subseteq f_{\alpha'}^\alpha[A_\alpha] \subseteq U'$. Sea $U_\alpha = (f_{\alpha'}^\alpha)^{-1}[U']$, entonces $A_\alpha \subseteq U_\alpha$ y $\pi_\Lambda^{-1}(q(z)) \subseteq (f_\alpha^\Lambda)^{-1}[U_\alpha] \subseteq \pi_\Lambda^{-1}[\mathcal{U}]$.

Si $q(z) \neq A_\Lambda$, se tiene que $q_\alpha(z) \neq A_\alpha$ para algún $\alpha \geq \alpha'$. Sea $U_\alpha = (f_{\alpha'}^\alpha)^{-1}[U'] \setminus A_\alpha$, entonces $A_\alpha \cap U_\alpha = \emptyset$ y $\pi_\Lambda^{-1}(q(z)) \subseteq (f_\alpha^\Lambda)^{-1}[U_\alpha] \subseteq \pi_\Lambda^{-1}[\mathcal{U}]$.

En los dos casos anteriores, el conjunto $\pi_\alpha[U_\alpha]$ es abierto en X_α/A_α puesto que $\pi_\alpha^{-1}[\pi_\alpha[U_\alpha]] = U_\alpha$.

Como el abierto $q_\alpha^{-1}[\pi_\alpha[U_\alpha]]$ en Z contiene a z y

$$\begin{aligned}
q[q_\alpha^{-1}[\pi_\alpha[U_\alpha]]] &= q\left[\left(\widetilde{f_\alpha^\Lambda} \circ q\right)^{-1}[\pi_\alpha[U_\alpha]]\right] = q\left[q^{-1}\left[\left(\widetilde{f_\alpha^\Lambda}\right)^{-1}[\pi_\alpha[U_\alpha]]\right]\right] \\
&\subseteq \left(\widetilde{f_\alpha^\Lambda}\right)^{-1}[\pi_\alpha[U_\alpha]] = \pi_\Lambda\left[\pi_\Lambda^{-1}\left[\left(\widetilde{f_\alpha^\Lambda}\right)^{-1}[\pi_\alpha[U_\alpha]]\right]\right] \\
&= \pi_\Lambda\left[\left(\widetilde{f_\alpha^\Lambda} \circ \pi_\Lambda\right)^{-1}[\pi_\alpha[U_\alpha]]\right] = \pi_\Lambda\left[\left(\pi_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda\right)^{-1}[\pi_\alpha[U_\alpha]]\right] \\
&= \pi_\Lambda\left[\left(f_\alpha^\Lambda\right)^{-1}[\pi_\alpha^{-1}[\pi_\alpha[U_\alpha]]]\right] = \pi_\Lambda\left[\left(f_\alpha^\Lambda\right)^{-1}[U_\alpha]\right] \subseteq \mathcal{U},
\end{aligned}$$

podemos concluir que q es continua.

No es difícil ver que q es única con la propiedad de que $q_\alpha = \widetilde{f_\alpha^\Lambda} \circ q$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Entonces, por 2.1.8, la función h es un homeomorfismo. ∎

El **cono** de un espacio X es el espacio cociente:

$$Cono(X) = (X \times I)/(X \times \{1\}).$$

Dada una función continua $f : X \to Y$, denotamos por $Cono(f)$ a la función:

$$\widetilde{f \times id_I} : Cono(X) \to Cono(Y).$$

Así, si $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es sistema inverso, entonces la familia $Cono(S) = \{Cono(X_\alpha), Cono(f_\alpha^\beta), \Lambda\}$ es un sistema inverso y, por 2.4.1, podemos enunciar el siguiente:

2.4.2 Corolario. Si $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de espacios compactos T_2 entonces el espacio $\varprojlim Cono(S)$ es homeomorfo al espacio cociente $Cono(\varprojlim S)$.

Aplicando 2.4.1 al corolario anterior se puede mencionar un resultado similar con la suspensión de $\varprojlim S$.

Capítulo 3

Límites inversos generalizados

En [Mh], el profesor W. Mahavier definió un límite inverso utilizando subconjuntos cerrados de $I \times I$. Entre otros resultados, probó que estos nuevos espacios no siempre son conexos, aunque los conjuntos cerrados lo sean, y dió condiciones suficientes para obtener la conexidad.

En este capítulo generalizamos la definición presentada por W. Mahavier a subconjuntos cerrados de productos $X \times Y$ de espacios y hacemos una comparación con algunas propiedades que cumplen los límites inversos que ya estudiamos en el Capítulo 2.

3.1. Definición y propiedades

En cualquier producto $X \times Y$, denotamos por π_1 y π_2 a las proyecciones de $X \times Y$ sobre X y de $X \times Y$ sobre Y, respectivamente. En este capítulo y en el siguiente, cada vez que digamos que A es un subconjunto cerrado de $X \times Y$ entenderemos que A es cerrado en $X \times Y$ y, además, que $X = \pi_1[A]$.

3.1.1 Observación. En este capítulo usamos sucesiones dobles $\{X_n, A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que abreviamos escribiendo $\{X_n, A_n\}$.

3.1.2 Definición. Una **sucesión inversa de subconjuntos cerrados** es una sucesión doble $\{X_n, A_n\}$ (vea 3.1.1) de espacios X_n y subconjuntos cerrados A_n de $X_{n+1} \times X_n$. El **límite inverso generalizado** de la sucesión $\{X_n, A_n\}$, al cual denotamos por $\underleftarrow{\text{Lím}} A_n$, es el conjunto de puntos $x \in \prod \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ tales que $(x_{n+1}, x_n) \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observemos que si $A_n = A$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $A \subseteq X_{n+1} \times X_n$ y que $A \subseteq X_n \times X_{n-1}$ y, en consecuencia, que $X_{n+1} = \pi_1[A] = X_n$. En este caso, a $\{X_n, A_n\}$ lo escribimos como $\{X, A\}$, donde cada $X_n = X$, y a $\underleftarrow{\text{Lím}}A_n$ como $\underleftarrow{\text{Lím}}A$.

Dado $m \in \mathbb{N}$, sea $P'_m : \prod\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \to X_{m+1} \times X_m$ la proyección definida por $P'_m(x) = (x_{m+1}, x_m)$. Denotemos por P_m a la restricción de P'_m a $\underleftarrow{\text{Lím}}A_n$.

Abusando de la notación, usaremos π_1 y π_2 para denotar a las proyecciones de $X_{n+1} \times X_n$ en X_{n+1} y de $X_{n+1} \times X_n$ en X_n, respectivamente.

3.1.3 Observación. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$\pi_1 \circ P_n = \pi_2 \circ P_{n+1}.$$

(vea Figura 3.1).

$$\begin{tikzcd}
\underleftarrow{\text{Lím}}A_n \arrow[r, "P_n"] \arrow[d, "P_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_{n+1} \times X_n \arrow[d, "\pi_1"] \\
X_{n+2} \times X_{n+1} \arrow[r, "\pi_2"'] & X_{n+1}
\end{tikzcd}$$

Figura 3.1:

De aquí en adelante, identificaremos a una función $f : X \to Y$ con su gráfica, así que la consideramos como un subconjunto de $X \times Y$. Observemos que $\pi_1[f] = X$.

3.1.4 Teorema. Si $\{X_n, f_n\}$ es una sucesión inversa de espacios T_2, entonces cada f_n es un subconjunto cerrado de $X_{n+1} \times X_n$ y $\underleftarrow{\text{Lím}}f_n = \underleftarrow{\text{lím}}\{X_n, f_n\}$.

Demostración. Como cada X_n es T_2, tenemos que cada f_n es un subconjunto cerrado de $X_{n+1} \times X_n$ (vea [Ku, Theorem 2, pág. 142]).

Por otra parte, $(x_{n+1}, x_n) \in f_n$ es equivalente a tener $x_n = f_n(x_{n+1})$, entonces $x \in \underleftarrow{\text{Lím}}f_n$ es equivalente a $x \in \underleftarrow{\text{lím}}\{X_n, f_n\}$. ■

3.1.5 Teorema. Sea $\{X_n, A_n\}$ una sucesión inversa de subconjuntos cerrados. Si cada X_n es compacto, entonces el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}} A_n$ también lo es. Además, si cada $X_n \neq \emptyset$, entonces el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}} A_n \neq \emptyset$.

Demostración. Primero veamos que $\underleftarrow{\text{Lím}} A_n = \bigcap \{(P'_n)^{-1}[A_n] : n \in \mathbb{N}\}$. Para esto, observemos que $x \in \bigcap \{(P'_n)^{-1}[A_n] : n \in \mathbb{N}\}$ si y sólo si $(x_{n+1}, x_n) = P'_n(x) \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ que, a su vez, es equivalente a tener $x \in \underleftarrow{\text{Lím}} A_n$. Entonces el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}} A_n$ es cerrado en $\prod \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ y, por tanto, compacto.

Ahora, supongamos que cada $X_n \neq \emptyset$.

Dado $m \in \mathbb{N}$, sea:

$$C_m = \left\{x \in \prod \{X_n : n \in \mathbb{N}\} : (x_{n+1}, x_n) \in A_n \text{ para cada } n \leq m\right\}.$$

Observemos que $C_m = \bigcap \{(P'_n)^{-1}[A_n] : n \leq m\}$, entonces cada C_m es cerrado en $\prod \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$. Además, $C_{m+1} \subseteq C_m$ y $\underleftarrow{\text{Lím}} A_n = \bigcap \{C_m : m \in \mathbb{N}\}$.

Veamos que cada $C_m \neq \emptyset$. Hallaremos un punto $x \in C_m$ definiendo sus coordenadas x_n. Para $n > m$, sea $x_n \in X_n$. Como $\pi_1[A_m] = X_{m+1}$, existe $(x_{m+1}, x_m) \in A_m$. De manera análoga, existe $(x_m, x_{m-1}) \in A_{m-1}$, etc. El punto x, construido de esta forma, pertence a C_m.

Entonces la familia de cerrados $\{C_m : m \in \mathbb{N}\}$ está anidada, así que tiene la propiedad de la intersección finita y, por tanto, el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}} A_n \neq \emptyset$. ■

3.1.6 Lema. Sea $\{X_n, A_n\}$ una sucesión inversa de subconjuntos cerrados tales que $\pi_2[A_n] = X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces:

(a) $P_m\left[\underleftarrow{\text{Lím}} A_n\right] = A_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

(b) Si A_m es disconexo, para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces $\underleftarrow{\text{Lím}} A_n$ es disconexo.

Demostración. Primero probemos (a). Sean $m \in \mathbb{N}$ y $(x_{m+1}, x_m) \in A_m$. Como $\pi_1[A_{m-1}] = X_m$, existe $(x_m, x_{m-1}) \in A_{m-1}$. De manera análoga, existe $(x_{m-1}, x_{m-2}) \in A_{m-2}$, etc. Como $\pi_2[A_{m+1}] = X_{m+1}$, existe $(x_{m+2}, x_{m+1}) \in A_{m+1}$. Del mismo modo, existe $(x_{m+3}, x_{m+2}) \in A_{m+2}$, etc. Claramente, el punto $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \underleftarrow{\text{Lím}} A_n$ y $P_m(x) = (x_{m+1}, x_m)$. La otra contención es clara.

Para probar (b), supongamos que $A_m = E \cup F$, donde E y F son subconjuntos cerrados disjuntos no vacíos de A_m. Por (a), tenemos que los subconjuntos cerrados disjuntos $P_m^{-1}[E]$ y $P_m^{-1}[F]$ no son vacíos y que $\underset{\longleftarrow}{\text{Lím}} A_n = P_m^{-1}[E] \cup P_m^{-1}[F]$. Por tanto, el espacio $\underset{\longleftarrow}{\text{Lím}} A_n$ es disconexo. ■

En [Mh, Example 2], Mahavier construye un espacio disconexo de la forma $\underset{\longleftarrow}{\text{Lím}} A$, donde $A \subseteq I \times I$ es un continuo, y en [Mh, Theorem 5] da condiciones suficientes para que el espacio $\underset{\longleftarrow}{\text{Lím}} A$ sea conexo. En 3.1.9, extendemos este último resultado al caso donde cada $A_n \subseteq X_{n+1} \times X_n$ y cada X_n es un continuo, para lo cual necesitamos un par de lemas.

3.1.7 Lema. Sean X y Y dos espacios compactos T_2 y A un subconjunto cerrado de $X \times Y$. Si $(\{x\} \times Y) \cap A$ es conexo para cada $x \in X$ y B es un subcontinuo de X, entonces el conjunto compacto $\{(x, y) \in A : x \in B\} = (B \times Y) \cap A$ es un subcontinuo de $X \times Y$.

Demostración. Como $(B \times Y) \cap A$ es cerrado en $B \times Y$, es suficiente probar el lema para $B = X$, es decir, es suficiente probar que A es conexo.

Sean E y F dos subconjuntos cerrados de A distintos del vacío tales que $A = E \cup F$, entonces $X = \pi_1[A] = \pi_1[E] \cup \pi_1[F]$. Como X es conexo, existe $x \in \pi_1[E] \cap \pi_1[F]$, lo cual indica que $(\{x\} \times Y) \cap A \cap E \neq \emptyset$ y $(\{x\} \times Y) \cap A \cap F \neq \emptyset$. Por tanto, $E \cap F \neq \emptyset$, ya que $(\{x\} \times Y) \cap A$ es conexo y $(\{x\} \times Y) \cap A \subseteq E \cup F$.

Lo anterior nos dice que A es conexo y, por tanto, un subcontinuo de $X \times Y$. ■

3.1.8 Lema. Sean $\mathcal{A} = \{X_1, X_2, \ldots, X_{m+1}\}$ una familia finita de continuos y, para $1 \leq n \leq m$, A_n un subconjunto cerrado de $X_{n+1} \times X_n$. Si $(\{x\} \times X_n) \cap A_n$ es conexo para cada $x \in X_{n+1}$, entonces el espacio:

$$D_m = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) \in \prod \mathcal{A} : (x_{n+1}, x_n) \in A_n \text{ para cada } n \leq m\}$$

es un subcontinuo de $\prod \mathcal{A}$.

Demostración. Por inducción sobre m. Por 3.1.7, el lema es válido para $m = 1$.

Sea $m > 1$ y supongamos que el lema es válido para $k < m$. Denotemos por q a la $(m+1)$-ésima proyección $q : \prod \mathcal{A} \to X_{m+1}$. Es claro que D_m es un subconjunto cerrado de $\prod \mathcal{A}$ y, por tanto, es compacto.

Sean E y F subconjuntos cerrados de D_m no vacíos tales que $D_m = E \cup F$. Como $X_{m+1} = q[E] \cup q[F]$, existe $x \in q[E] \cap q[F]$. Sean $Y_n = X_n$ para $n < m$, $Y_m = \pi_2 [(\{x\} \times X_m) \cap A_m]$, $\mathcal{B} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$, $B_n = A_n$ para $n < m-1$ y $B_{m-1} = (Y_m \times Y_{m-1}) \cap A_{m-1}$. Por hipótesis inductiva, el espacio:

$$D_{m-1} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \prod \mathcal{B} : (x_{n+1}, x_n) \in B_n \text{ para cada } n \leq m-1\}$$

es un subcontinuo de $\prod \mathcal{B}$.

Veamos que $q^{-1}(x) \cap D_m = D_{m-1} \times \{x\}$. Si $a \in q^{-1}(x) \cap D_m$, tenemos que $a_{m+1} = x$ y $(a_{n+1}, a_n) \in A_n$ para cada $n \leq m$; en particular para $n < m-1$, $(a_{n+1}, a_n) \in A_n = B_n$. Como $(x, a_m) \in A_m$, se tiene que $a_m \in Y_m$. Entonces $(a_m, a_{m-1}) \in B_{m-1}$ y, por tanto, $a \in D_{m-1} \times \{x\}$, la otra contención es clara.

De la igualdad anterior y, como $x \in q[E] \cap q[F]$, tenemos que $D_{m-1} \times \{x\} \cap E \neq \emptyset$ y $D_{m-1} \times \{x\} \cap F \neq \emptyset$. Entonces $E \cap F \neq \emptyset$, puesto que $D_{m-1} \times \{x\}$ es conexo y $D_{m-1} \times \{x\} \subseteq E \cup F$.

Lo anterior nos indica que D_m es conexo y, por tanto, un subcontinuo de $\prod \mathcal{A}$.

■

3.1.9 Teorema. Sean $\{X_n, A_n\}$ una sucesión inversa de subconjuntos cerrados, donde cada X_n es un continuo. Si $(\{x\} \times X_n) \cap A_n$ es conexo para cada $x \in X_{n+1}$, entonces el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}} A_n$ es un continuo.

Demostración. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea:

$$C_m = \{x \in \prod \{X_n : n \in \mathbb{N}\} : (x_{n+1}, x_n) \in A_n \text{ para cada } n \leq m\}.$$

Claramente $C_{m+1} \subseteq C_m$ y $\underleftarrow{\text{Lím}} A_n = \bigcap \{C_m : m \in \mathbb{N}\}$. Sea D_m como en 3.1.8, entonces cada $C_m = D_m \times \prod \{X_n : n \geq m+2\}$. Como cada X_n es un continuo, tenemos, por 3.1.8, que cada C_m es un continuo. Entonces, por 2.3.2, deducimos que el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}} A_n$ es un continuo.

■

3.2. Ejemplos

En esta sección presentamos algunos espacios de la forma:

$$\underleftarrow{\text{Lím}} A_n.$$

Dados $A \subseteq X \times Y$ y $B \subseteq Y \times Z$ sea:

$$B \circ A = \{(x, z) \in X \times Z : \text{existe } y \in Y \text{ tal que } (x, y) \in A, (y, z) \in B\}.$$

Observemos que $B \circ A$ extiende la definición de composición de funciones. Si $X = Y$, entonces escribimos $A^{n+1} = A \circ A^n$. Por 2.1.10, sabemos que si $\{X, f_n\}$ es una sucesión inversa, entonces los espacios $\varprojlim\{X, f_n\}$ y $\varprojlim\{X, (f_n)^2\}$ son homeomorfos. En el ejemplo siguiente veremos que 2.1.10, no se extiende a sucesiones inversas de subconjuntos cerrados.

3.2.1 Ejemplo. Sea:

$$D = \left\{\left(x, \tfrac{1}{2} - x\right) \in I \times I : 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2}\right\} \cup \left\{\left(x, \tfrac{1}{2} + x\right) \in I \times I : 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2}\right\} \cup \left\{\left(x, x - \tfrac{1}{2}\right) \in I \times I : \tfrac{1}{2} \leq x \leq 1\right\} \cup \left\{\left(x, \tfrac{3}{2} - x\right) \in I \times I : \tfrac{1}{2} \leq x \leq 1\right\}$$

(vea Figura 3.2; las líneas continuas representan al conjunto D y las líneas punteadas indican que D está contenido en $I \times I$).

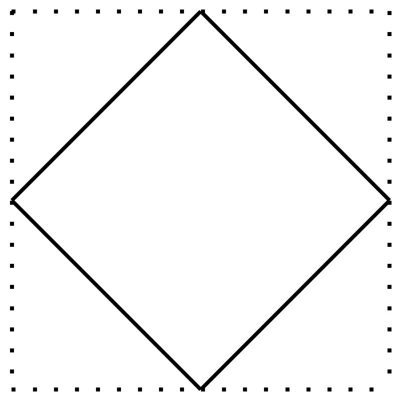

Figura 3.2: El conjunto D.

Observemos que los conjuntos de Cantor:

$$\mathcal{C}_1 = \left\{\left(\tfrac{1}{2}, x_2, \tfrac{1}{2}, x_4, \ldots\right) : x_{2n} \in \{0, 1\}\right\}$$

y

$$\mathcal{C}_2 = \left\{\left(x_1, \tfrac{1}{2}, x_3, \tfrac{1}{2}, \ldots\right) : x_{2n-1} \in \{0, 1\}\right\}$$

están contenidos en el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}} D$.

Dados $x = \left(\frac{1}{2}, x_2, \frac{1}{2}, x_4, \ldots\right) \in \mathcal{C}_1$ y $x' = \left(x_1, \frac{1}{2}, x_3, \frac{1}{2}, \ldots\right) \in \mathcal{C}_2$, sean I_n el intervalo determinado por $\frac{1}{2}$ y x_n y $f_n = D \cap (I_{n+1} \times I_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por 3.1.4, sabemos que $I_{x\,x'} = \underleftarrow{\text{Lím}} f_n = \varprojlim\{I, f_n\}$ y, por 2.2.6, que es un arco. Notemos que el arco $I_{x\,x'}$ tiene a x y a x' por extremos y está contenido en el espacio $\underleftarrow{\mathrm{Lím}}D$.

Si $a \in \underleftarrow{\mathrm{Lím}}D$, tenemos que $a_n \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ o $a_n \notin \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ para ninguna $n \in \mathbb{N}$. En el primer caso $a \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

Supongamos que $a_n \notin \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ para ninguna $n \in \mathbb{N}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in \{0, 1\}$ tal que a_n pertenece a I_n, el intervalo determinado por $\frac{1}{2}$ y x_n. Entonces $a \in I_{x\,x'}$ donde $x = \left(\frac{1}{2}, x_2, \frac{1}{2}, x_4, \ldots\right)$ y $x' = \left(x_1, \frac{1}{2}, x_3, \frac{1}{2}, \ldots\right)$.

Con lo anterior, vemos que $\underleftarrow{\mathrm{Lím}}D$ es la unión de conos sobre el conjunto de Cantor $\mathcal{C}_1$, con vértice cada punto de $\mathcal{C}_2$.

Por otra parte, no es difícil ver que:

$$D^2 = \{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 1 - x) : 0 \leq x \leq 1\}$$

(vea Figura 3.3).

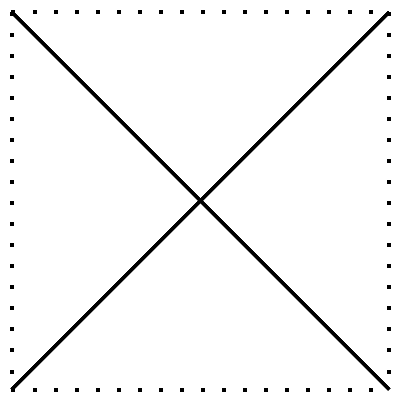

Figura 3.3: El conjunto D^2.

Por [Mh, Example 4], el espacio $\underleftarrow{\mathrm{Lím}}D^2$ es el cono sobre un conjunto de Cantor, el cual no es homeomorfo a $\underleftarrow{\mathrm{Lím}}D$. Así que 2.1.10 no se puede extender a límites inversos generalizados.

Se sabe que si $f_n : I \to I$ es un homeomorfismo, entonces el espacio $\underleftarrow{\mathrm{lím}}\{I, f_n\}$ es un arco (vea 2.2.6). En el ejemplo siguiente construimos un arco de la forma $\underleftarrow{\mathrm{Lím}}\Gamma$ donde $\Gamma \subseteq I \times I$ no es una función.

3.2.2 Ejemplo. Sea:

$$\Gamma = (\{0\} \times I) \cup (I \times \{1\})$$

(vea Figura 3.4).

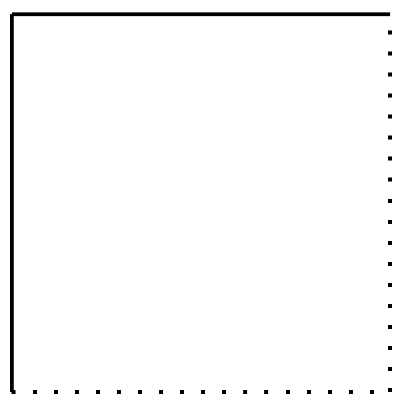

Figura 3.4: El conjunto Γ.

Observemos que $(0,0,\ldots),(1,1,\ldots) \in \underleftarrow{\text{Lím}}\Gamma$ y, por 3.1.9, que $\underleftarrow{\text{Lím}}\Gamma$ es un continuo. Sean $x \in \underleftarrow{\text{Lím}}\Gamma \setminus \{(0,0,\ldots),(1,1,\ldots)\}$ y $m = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 1\}$. Como $(x_{m+1}, x_m) \in \Gamma$, tenemos que $x_{m+1} = 0 = x_{m+k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces $x = (1,\ldots,1,x_m,0,0,\ldots)$ con $x_m \in [0,1)$.

Si $x_m \in (0,1)$, los conjuntos $U = (P_m)^{-1}[[0,x_m)]$ y $V = (P_m)^{-1}[(x_m,1]]$ son subconjuntos abiertos disjuntos de $\underleftarrow{\text{Lím}}\Gamma$ que contienen a $(0,0,\ldots)$ y a $(1,1,\ldots)$, respectivamente.

Como en el caso de x, cada punto a de $\underleftarrow{\text{Lím}}\Gamma \setminus \{x,(0,0,\ldots),(1,1,\ldots)\}$ es de la forma $a = (1,\ldots,1,a_k,0,0,\ldots)$ con $a_k \in [0,1)$. Si $k < m$, se tiene que $a_m = 0$ y, por tanto, $a \in U$. Si $m < k$, tenemos que $a_m = 1$ y, en consecuencia, $a \in V$. Por último, si $k = m$, entonces $a_m \neq x_m$ y, por tanto, $a \in U \cup V$. De modo que $\underleftarrow{\text{Lím}}\Gamma \setminus \{x\} = U \cup V$.

Si $x_m = 0$, tenemos que $m > 1$ y los conjuntos $U = (P_{m-1})^{-1}[[0,1)]$ y $V = (P_m)^{-1}[(0,1]]$ son subconjuntos abiertos disjuntos de $\underleftarrow{\text{Lím}}\Gamma$ que contienen a $(0,0,\ldots)$ y $(1,1,\ldots)$, respectivamente. Además, cada punto a de $\underleftarrow{\text{Lím}}\Gamma \setminus \{x,(0,0,\ldots),(1,1,\ldots)\}$ es de la forma $a = (1,\ldots,1,a_k,0,0,\ldots)$ con $a_k \in [0,1)$. Si $k \leq m-1$, se tiene que $a_{m-1} < 1$ y, por tanto, $a \in U$. Si $m < k$, tenemos que $a_m = 1$ y, en consecuencia, $a \in V$. Por último, si $k = m$, entonces $a_m > x_n = 0$ y, por tanto, $a \in V$. De modo que $\underleftarrow{\text{Lím}}\Gamma \setminus \{x\} = U \cup V$.

Por [Na1, 6.17], $\underleftarrow{\text{Lím}}\Gamma$ es un arco.

Observemos que, en el ejemplo anterior, Γ es un arco y el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}}\Gamma$ también es un arco. En 3.2.6, mostramos un ejemplo de un arco $K \subseteq I \times I$ tal que el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}}K$ no es un arco.

A continuación presentamos un subcontinuo Λ' de $I \times I$ que es un límite de funciones continuas $f_n : I \to I$, en el hiperespacio $2^{I\times I}$, y cuyo límite inverso generalizado no es un limite inverso de funciones.

3.2.3 Ejemplo. Sea:

$$\Lambda' = \{(x, x) \in I \times I : 0 \leq x \leq 1\} \cup \left(\left\{\tfrac{1}{2}\right\} \times I\right)$$

(vea Figura 3.5).

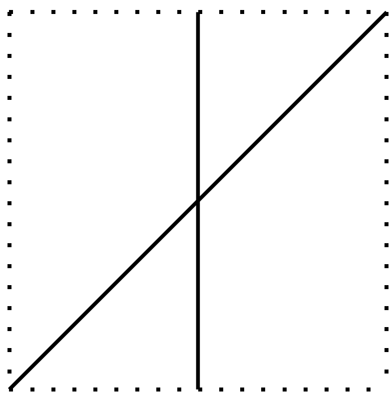

Figura 3.5: El conjunto Λ'.

Observemos que, por 3.1.9, el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}}\Lambda'$ es un continuo y, para cada $\varepsilon > 0$, existe una función continua $f \subseteq I \times I$ tal que $\mathcal{H}(\Lambda', f) < \varepsilon$, donde $\mathcal{H}$ es la métrica de Hausdorff en $2^{I\times I}$ (vea (1.1), pág. 5).

Observemos que las sucesiones constantes pertenecen a $\underleftarrow{\text{Lím}}\Lambda'$. Sean $x \in \underleftarrow{\text{Lím}}\Lambda'$ tal que $x_1 \neq x_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $m = \text{mín}\{n : x_1 \neq x_n\}$. Como $x_m \neq x_{m-1}$ y $(x_m, x_{m-1}) \in \Lambda'$, tenemos que $x_m = \frac{1}{2} = x_{m+k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $x_{m-k} = x_1$ para cada $k < m$. Entonces los arcos:

$$\left\{\left(x, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \ldots\right) \in I^\infty : 0 \leq x \leq 1\right\}$$

y

$$\{(x, x, x, \ldots) \in I^\infty : 0 \leq x \leq 1\}$$

están contenidos en $\underleftarrow{\text{Lím}}\Lambda'$ y se intersectan en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right)$, el cual no es extremo de ninguno de los dos arcos. De aquí, deducimos que $\underleftarrow{\text{Lím}}\Lambda'$ contiene un triodo y, por tanto, no es límite inverso de arcos y funciones continuas (vea [Na1, 12.4]).

En el ejemplo siguiente, no sólo los conjuntos $(\{x\} \times X_n) \cap A_n$ son conexos. A diferencia del ejemplo anterior, también los conjuntos $(X_{n+1} \times \{x\}) \cap A_n$ son conexos.

3.2.4 Ejemplo. Sean:

$$E = \left(\{0\} \times \left[0, \tfrac{1}{2}\right]\right) \cup \left(\left[0, \tfrac{1}{2}\right] \times \left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right) \cup \left(\left\{\tfrac{1}{2}\right\} \times \left[\tfrac{1}{2}, 1\right]\right) \cup \left(\left[\tfrac{1}{2}, 1\right] \times \{1\}\right)$$

(vea Figura 3.6) y

$$E_1 = E \cap \left[0, \tfrac{1}{2}\right] \times \left[0, \tfrac{1}{2}\right].$$

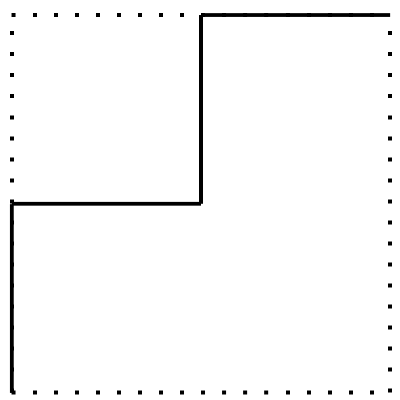

Figura 3.6: El conjunto E.

Observemos que para cada $\varepsilon > 0$, existe un homeomorfismo $f \subseteq I \times I$ tal que $\mathcal{H}(E, f) < \varepsilon$, donde $\mathcal{H}$ es la métrica de Hausdorff en $2^{I \times I}$ (vea (1.1), pág. 5). Además, por 3.1.9, el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}}E$ es un continuo y, por 3.2.2, el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}}E_1$ es un arco.

El arco $\left\{\left(x, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots\right) \in I^{\infty} : \frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\} \subseteq \underleftarrow{\text{Lím}}E$ intersecta a $\underleftarrow{\text{Lím}}E_1$ en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots\right)$ que no es extremo de $\underleftarrow{\text{Lím}}E_1$. Entonces $\underleftarrow{\text{Lím}}E$ contiene un triodo y, por tanto, no es límite inverso de arcos y funciones continuas (vea [Na1, 12.4]).

En [Mh], Mahavier propone que los espacios de la forma $\underleftarrow{\text{Lím}}A$, donde $A \subseteq I \times I$, son de dimensión 1 o contienen un cubo de Hilbert. En el teorema siguiente, construimos, para cada número natural m, un continuo de dimensión m y de la forma $\underleftarrow{\text{Lím}}A$, donde $A \subseteq I \times I$. Esto resuelve, en forma negativa, a la conjetura antes mencionada.

3.2.5 Teorema. Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe un continuo $C \subseteq I \times I$ tal que la dimensión de $\underleftarrow{\text{Lím}}C$ es m.

Demostración. Para $m = 1$, el conjunto $C = \{(x, x) : x \in I\}$ es tal que $\underleftarrow{\text{Lím}}C$ es un arco y, por tanto, tiene dimensión 1.

Veamos el caso $m > 1$. Para $k \in \{0, 1, \ldots, 2m-2\}$, sea $I_k = \left[\frac{k}{2m-1}, \frac{k+1}{2m-1}\right]$. Denotemos por $\text{int}I_k$ al interior de I_k respecto de I. Sea:

$$\begin{aligned} C = {} & (\{0\} \times (I_0 \cup I_1)) \cup ((I_{2m-3} \cup I_{2m-2}) \times \{1\}) \\ & \cup \left(\bigcup\{I_{2k} \times I_{2k+2} : k = 0, 1, \ldots, m-2\}\right) \\ & \cup \left(\bigcup\left\{\left\{\left(x, x + \tfrac{2}{2m-1}\right) : x \in I_{2k+1}\right\} : k = 0, 1, \ldots, m-3\right\}\right) \subseteq I \times I \end{aligned}$$

(vea Figura 3.7).

Notemos que $\underleftarrow{\text{Lím}}C$ es un continuo, por 3.1.9.

Para $x \in \underleftarrow{\text{Lím}}C$, se tiene:

(1) si $x_n < \frac{2}{2m-1}$, entonces $x_{n+k} = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$,

(2) si $x_n > \frac{2m-3}{2m-1}$, entonces $x_{n-k} = 1$ para cada $k < n$,

(3) si $x_n \in I_{2k} \setminus \{1\}$, con $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, entonces $x_{n+1} \in I_{2k-2}$,

(4) si $x_n \in \text{int}(I_{2k+1})$, con $k \in \{1, 2, \ldots, m-2\}$, entonces $x_{n+1} \in \text{int}(I_{2k-1})$ y $x_{n+1} = x_n - \frac{2}{2m-1}$.

Por lo anterior, tenemos las igualdades y contenciones siguientes:

a) $P_1^{-1}[\{0\} \times I_0] = I_0 \times \{0\} \times \{0\} \times \cdots$,

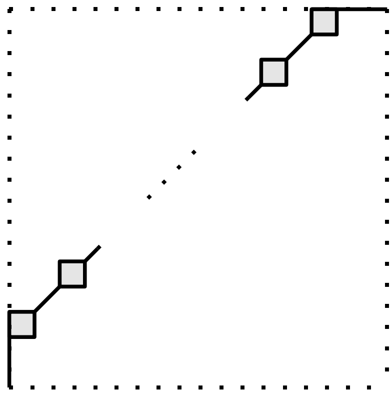

Figura 3.7: El conjunto C.

b) para $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, $P_1^{-1}[I_{2k-2} \times I_{2k}] = I_{2k} \times I_{2k-2} \times \cdots \times I_2 \times I_0 \times \{0\} \times \{0\} \times \cdots$,

c) para $n > 1$, $P_n^{-1}[I_{2m-4} \times I_{2m-2}] = \{1\} \times \{1\} \times \cdots \times \{1\} \times I_{2m-2} \times I_{2m-4} \times \cdots \times I_2 \times I_0 \times \{0\} \times \{0\} \times \cdots$,

d) $P_1^{-1}[\{0\} \times \mathrm{int}(I_1)] = \mathrm{int}(I_1) \times \{0\} \times \{0\} \times \cdots$,

e) para $k \in \{1, 2, \ldots, m-2\}$, $P_1^{-1}[\mathrm{int}(I_{2k-1}) \times \mathrm{int}(I_{2k+1})] \subseteq I_{2k+1} \times I_{2k-1} \times \cdots \times I_3 \times I_1 \times \{0\} \times \{0\} \times \cdots$, y

f) para $n \in \mathbb{N}$, $P_n^{-1}[\mathrm{int}(I_{2m-3}) \times \{1\}] \subseteq \{1\} \times \{1\} \times \cdots \times \{1\} \times I_{2m-3} \times I_{2m-5} \times \cdots \times I_3 \times I_1 \times \{0\} \times \{0\} \times \cdots$.

Mostraremos que:

$$\begin{aligned}
\underleftarrow{\mathrm{Lím}} C = \{(1,1,\ldots)\} &\cup P_1^{-1}[\{0\} \times I_0] \cup P_1^{-1}[\{0\} \times \mathrm{int}(I_1)] \\
&\cup \left(\bigcup \left\{ P_1^{-1}[I_{2k-2} \times I_{2k}] : k = 1, 2, \ldots, m-1 \right\}\right) \\
&\cup \left(\bigcup \left\{ P_1^{-1}[\mathrm{int}(I_{2k-1}) \times \mathrm{int}(I_{2k+1})] : k = 1, 2, \ldots, m-2 \right\}\right) \\
&\cup \left(\bigcup \{ P_n^{-1}[I_{2m-4} \times I_{2m-2}] : n \in \mathbb{N} \}\right) \\
&\cup \left(\bigcup \{ P_n^{-1}[\mathrm{int}(I_{2m-3}) \times \{1\}] : n \in \mathbb{N} \}\right).
\end{aligned}$$

Sean $x \in \underleftarrow{\mathrm{Lím}} C \setminus \{(1,1,\ldots)\}$ y $n_0 = \mathrm{mín}\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 1\}$.

Primero consideremos el caso $n_0 = 1$. Si $x_1 \in \mathrm{int}(I_{2k+1})$ para algún $k \in \{0, 1, 2, \ldots, m-2\}$, tenemos, por (4) y (1), que $x \in P_1^{-1}[\mathrm{int}(I_{2k-1}) \times \mathrm{int}(I_{2k+1})]$

si $k > 0$ o $x \in P_1^{-1}[\{0\} \times \operatorname{int}(I_1)]$ si $k = 0$. Si $x_1 \in I_{2k}$ para algún $k \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$, tenemos, por (3) y (1), que $x \in P_1^{-1}[I_{2k-2} \times I_{2k}]$ si $k > 0$ o $x \in P_1^{-1}[\{0\} \times I_0]$ si $k = 0$.

Veamos ahora el caso $n_0 > 1$. Como $(x_{n_0}, 1) \in C$, tenemos que $\frac{2m-4}{2m-1} \leq x_{n_0}$. Si $x_{n_0} \in \operatorname{int}(I_{2m-3})$, se tiene, por (4), que $x \in P_{n_0-1}^{-1}[\operatorname{int}(I_{2m-3}) \times \{1\}]$. Si $x_{n_0} \in I_{2m-2}$, tenemos, por (3), que $x \in P_{n_0}^{-1}[I_{2m-4} \times I_{2m-2}]$. Por último, si $x_{n_0} \in I_{2m-4}$, entonces $x \in P_{n_0-1}^{-1}[I_{2m-4} \times I_{2m-2}]$.

Como los abiertos $P_1^{-1}[\{0\} \times \operatorname{int}(I_1)]$, $P_1^{-1}[\operatorname{int}(I_{2k-1}) \times \operatorname{int}(I_{2k+1})]$ con $k \in \{1, 2, \ldots, m-2\}$, y $P_n^{-1}[\operatorname{int}(I_{2m-3}) \times \{1\}]$ son conjuntos F_σ en $\underleftarrow{\text{Lím}}C$, entonces, por [Na3, 7.1], tenemos que $\dim\left(\underleftarrow{\text{Lím}}C\right) \leq m$. Además, por b), el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}}C$ contiene subespacios de dimensión m y, por tanto, $\dim\left(\underleftarrow{\text{Lím}}C\right) = m$.

■

Recordemos que el límite inverso de un sistema inverso de continuos hereditariamente unicoherentes es un continuo hereditariamente unicoherente (vea 2.3.18). Para terminar esta sección presentamos un ejemplo de un arco K, que es hereditariamente unicoherente, contenido en $I \times I$ tal que su límite inverso generalizado no es hereditariamente unicoherente y tiene dimensión infinita.

3.2.6 Ejemplo. Sea:

$$K = (\{0\} \times I) \cup (I \times \{0\})$$

(vea Figura 3.8).

Por 3.1.9, el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}}K$ es un continuo. Como $I \times \{0\} \times I \times \{0\} \cdots \subseteq \underleftarrow{\text{Lím}}K$, tenemos que la dimensión de $\underleftarrow{\text{Lím}}K$ es infinita aún cuando $\dim(K) = 1$. El conjunto K es hereditariamente unicoherente pero $\underleftarrow{\text{Lím}}K$ no lo es, puesto que contiene copias de I^n y, por tanto, de circunferencias.

3.3. Funciones inducidas

En la presente sección, damos una condición para definir funciones de un espacio a un límite inverso generalizado, lo cual nos permite inducir funciones entre este tipo de espacios. Además, mostramos que el producto de límites inversos generalizados y la suspensión de un límite inverso generalizado son límites inversos generalizados.

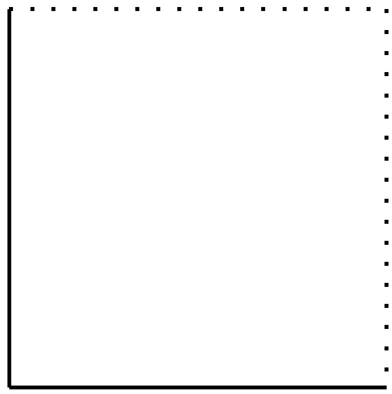

Figura 3.8: El conjunto K.

3.3.1 Teorema. Sean $\{X_n, A_n\}$ una sucesión inversa de subconjuntos cerrados, Y un espacio y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $H_n : Y \to A_n$ una función continua. Si $\pi_1 \circ H_n = \pi_2 \circ H_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (vea Figura 3.9), entonces existe una única función continua $H : Y \to \underleftarrow{\mathrm{Lím}} A_n$ tal que $H_n = P_n \circ H$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (vea Figura 3.10). A la función H se le llama **función inducida por** $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$.

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "H_n"] \arrow[d, "H_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A_n \arrow[d, "\pi_1"] \\
A_{n+1} \arrow[r, "\pi_2"'] & X_{n+1}
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.9:

Demostración. Por 1.1.1, la función $H : Y \to \prod \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ definida por $H(y) = (\pi_2 \circ H_n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ es continua. Además, como:

$$P'_n(H(y)) = (\pi_2 \circ H_{n+1}(y), \pi_2 \circ H_n(y)) = (\pi_1 \circ H_n(y), \pi_2 \circ H_n(y)) = H_n(y),$$

tenemos que $H[Y] \subseteq \underleftarrow{\mathrm{Lím}} A_n$ y $H_n = P_n \circ H$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para probar

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "H_n"'] & \underleftarrow{\text{Lím}} A_n \arrow[d, "P_n"] \\ & A_n \end{tikzcd}$$

Figura 3.10:

la unicidad de H, supongamos que una función $H' : Y \to \underleftarrow{\text{Lím}} A_n$ es tal que $H_n = P_n \circ H'$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces la n-ésima coordenada de $H'(y)$ es $\pi_2 \circ P_n \circ H'(y) = \pi_2 \circ H_n(y)$, lo cual nos indica que $H = H'$.

■

3.3.2 Observación. Si ponemos $Y = \underleftarrow{\text{Lím}} A_n$ y $H_n = P_n$, por 3.1.3, se satisface la hipótesis en 3.3.1, entonces existe una única función continua $H : \underleftarrow{\text{Lím}} A_n \to \underleftarrow{\text{Lím}} A_n$ tal que $P_n = P_n \circ H$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como la función identidad $id : \underleftarrow{\text{Lím}} A_n \to \underleftarrow{\text{Lím}} A_n$ tiene tal propiedad, podemos concluir que $H = id$.

El siguiente teorema se refiere a productos de límites inversos generalizados, el cual extiende la versión numerable de 2.1.17.

3.3.3 Teorema. Sean B un conjunto no vacío y $\{X(b)_n, A(b)_n\}$ una sucesión inversa de subconjuntos cerrados para cada $b \in B$. Dados $b \in B$ y $n \in \mathbb{N}$, sea $P(b)_n$ la proyección de $\underleftarrow{\text{Lím}} A(b)_n$ en $A(b)_n$. Sean $X_n = \prod\{X(b)_n : b \in B\}$ con proyecciones π_b^n, $Y_n = \prod\{X(b)_{n+1} \times X(b)_n : b \in B\}$ con proyecciones σ_b^n. Por último, sea $h_n : Y_n \to X_{n+1} \times X_n$ el homeomorfismo tal que $\pi_i \circ h_n$ es la función inducida por $\{\pi_i \circ \sigma_b^n : b \in B\}$ ($\pi_1 \circ \sigma_b^n = \pi_b^{n+1} \circ \pi_1 \circ h_n$ y $\pi_2 \circ \sigma_b^n = \pi_b^n \circ \pi_2 \circ h_n$). Entonces $X_{n+1} = \pi_1[h_n [\prod \{A(b)_n : b \in B\}]]$ y el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}}\, h_n [\prod \{A(b)_n : b \in B\}]$ es homeomorfo a $Y = \prod \left\{ \underleftarrow{\text{Lím}} A(b)_n : b \in B \right\}$.

Demostración. No es difícil ver que $X_{n+1} = \pi_1[h_n [\prod \{A(b)_n : b \in B\}]]$.

Denotemos por q_b a la proyección de Y sobre $\underleftarrow{\text{Lím}} A(b)_n$ y por P_n a la proyección de $\underleftarrow{\text{Lím}}\, h_n [\prod \{A(b)_n : b \in B\}]$ en $h_n [\prod \{A(b)_n : b \in B\}]$. Sea

$H_n = h_n \circ k_n$, donde $k_n : Y \to Y_n$ es la función inducida por la familia $\{P(b)_n \circ q_b : b \in B\}$ $(P(b)_n \circ q_b = \sigma_b^n \circ k_n)$. Observemos que $k_n[Y] \subseteq \prod \{A(b)_n : b \in B\}$, entonces $H_n[Y] \subseteq h_n [\prod \{A(b)_n : b \in B\}]$.

Como:

$$\begin{aligned} \pi_b^{n+1} \circ \pi_2 \circ H_{n+1} &= \pi_b^{n+1} \circ \pi_2 \circ h_{n+1} \circ k_{n+1} = \pi_2 \circ \sigma_b^{n+1} \circ k_{n+1} \\ &= \pi_2 \circ P(b)_{n+1} \circ q_b = \pi_1 \circ P(b)_n \circ q_b \\ &= \pi_1 \circ \sigma_b^n \circ k_n = \pi_b^{n+1} \circ \pi_1 \circ h_n \circ k_n \\ &= \pi_b^{n+1} \circ \pi_1 \circ H_n, \end{aligned}$$

tenemos que $\pi_1 \circ H_n = \pi_2 \circ H_{n+1}$. Entonces, por 3.3.1, existe una función continua $H : Y \to \varprojlim h_n [\prod \{A(b)_n : b \in B\}]$ tal que $H_n = P_n \circ H$.

Dado $b \in B$, sea $H(b)_n = \sigma_b^n \circ h_n^{-1} \circ P_n$. No es difícil ver que $\pi_1 \circ H(b)_n = \pi_2 \circ H(b)_{n+1}$, entonces, por 3.3.1, existe una función continua $H_b : \varprojlim h_n [\prod \{A(b)_n : b \in B\}] \to \varprojlim A(b)_n$ tal que $\sigma_b^n \circ h_n^{-1} \circ P_n = P(b)_n \circ H_b$. Por tanto, existe una función continua $H' : \varprojlim h_n [\prod \{A(b)_n : b \in B\}] \to Y$ tal que $H_b = q_b \circ H'$.

Como:

$$\begin{aligned} P(b)_n \circ q_b \circ H' \circ H = P(b)_n \circ H_b \circ H &= \sigma_b^n \circ h_n^{-1} \circ P_n \circ H = \\ &= \sigma_b^n \circ h_n^{-1} \circ h_n \circ k_n = \sigma_b^n \circ k_n \\ &= P(b)_n \circ q_b, \end{aligned}$$

tenemos que $H' \circ H$ es la identidad en Y.

Como $H_b \circ H = q_b \circ H' \circ H = q_b$, tenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_b^n \circ h_n^{-1} \circ P_n \circ H \circ H' &= P(b)_n \circ H_b \circ H \circ H' = P(b)_n \circ q_b \circ H' \\ &= P(b)_n \circ H_b = \sigma_b^n \circ h_n^{-1} \circ P_n, \end{aligned}$$

y, por tanto, $P_n \circ H \circ H' = P_n$. Entonces, por 3.3.2, $H \circ H'$ es la identidad en $\varprojlim h_n [\prod \{A(b)_n : b \in B\}]$. Con lo cual queda probado que H es un homeomorfismo.

■

El teorema 3.3.1 y el lema siguiente nos permitirán inducir funciones entre límites inversos generalizados.

3.3.4 Lema. Para $n \in \mathbb{N}$, sea $L_n : A_n \to B_n$ una función continua entre subconjuntos cerrados de $X_{n+1} \times X_n$ y $Y_{n+1} \times Y_n$, respectivamente. Son equivalentes las proposiciones siguientes:

(a) $\pi_1 \circ L_n((x,v)) = \pi_2 \circ L_{n+1}((u,x))$ cuando $(u,x) \in A_{n+1}$ y $(x,v) \in A_n$.

(b) Si $x \in X_{n+1} \cap \pi_2[A_{n+1}]$, entonces existe $y \in Y_{n+1}$ tal que $L_n[\{x\} \times X_n \cap A_n] \subseteq \{y\} \times Y_n$ y $L_{n+1}[X_{n+2} \times \{x\} \cap A_{n+1}] \subseteq Y_{n+2} \times \{y\}$.

Demostración. Primero probemos que (a) implica (b). Sea $x \in X_{n+1} \cap \pi_2[A_{n+1}]$, entonces existe $(a,x) \in A_{n+1}$.

Sea $y = \pi_2 \circ L_{n+1}((a,x))$. Tomemos $(u,x) \in A_{n+1}$ y $(x,v) \in A_n$. Por hipótesis, tenemos que $\pi_1 \circ L_n((x,v)) = \pi_2 \circ L_{n+1}((u,x)) = \pi_2 \circ L_{n+1}((a,x)) = y$. Por tanto, $L_n[\{x\} \times X_n \cap A_n] \subseteq \{y\} \times Y_n$ y $L_{n+1}[X_{n+2} \times \{x\} \cap A_{n+1}] \subseteq Y_{n+2} \times \{y\}$.

Ahora probemos que (b) implica (a). Sean $(u,x) \in A_{n+1}$ y $(x,v) \in A_n$. Como $x \in X_{n+1} \cap \pi_2[A_{n+1}]$, tenemos, por hipótesis, que existe $y \in Y_{n+1}$ tal que $L_n[\{x\} \times X_n \cap A_n] \subseteq \{y\} \times Y_n$ y $L_{n+1}[X_{n+2} \times \{x\} \cap A_{n+1}] \subseteq Y_{n+2} \times \{y\}$. Por tanto, $\pi_1 \circ L_n((x,v)) = y = \pi_2 \circ L_{n+1}((u,x))$. ■

3.3.5 Teorema. Sean $\{X_n, A_n\}$ y $\{Y_n, B_n\}$ dos sucesiones inversas de subconjuntos cerrados y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $L_n : A_n \to B_n$ una función continua. Supongamos que $\pi_1(L_n(x,v)) = \pi_2(L_{n+1}(u,x))$ para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$, $(u,x) \in A_{n+1}$ y $(x,v) \in A_n$. Entonces existe una única función continua $L : \underleftarrow{\mathrm{Lím}} A_n \to \underleftarrow{\mathrm{Lím}} B_n$ tal que $L_n \circ P_n = Q_n \circ L$, donde Q_n es la proyección de $\underleftarrow{\mathrm{Lím}} B_n$ en B_n (vea Figura 3.11). A la función L se le llama **función inducida por** $\{L_n : n \in \mathbb{N}\}$.

$$\begin{tikzcd}
\underleftarrow{\mathrm{Lím}} A_n \arrow[r, "L"] \arrow[d, "P_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \underleftarrow{\mathrm{Lím}} B_n \arrow[d, "Q_n"] \\
A_n \arrow[r, "L_n"'] & B_n
\end{tikzcd}$$

Figura 3.11:

Demostración. Claramente, la familia $\{L_n \circ P_n : \underleftarrow{\mathrm{Lím}} A_n \to B_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisface la igualdad $\pi_1 \circ L_n \circ P_n = \pi_2 \circ L_{n+1} \circ P_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por 3.3.1, existe una única función continua $L : \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n$ tal que $L_n \circ P_n = Q_n \circ L$.

■

3.3.6 Teorema. Sean $S = \{X_n, f_n\}$ y $S' = \{Y_n, g_n\}$ dos sucesiones inversas de espacios T_2 y $\mathfrak{l} = \{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ una función de S en S' ($l_n \circ f_n = g_n \circ l_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$). Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos $L_n : f_n \to g_n$ por $L_n((x, f_n(x))) = (l_{n+1}(x), l_n(f_n(x))) = (l_{n+1}(x), g_n(l_{n+1}(x)))$. Entonces la función inducida por $\mathfrak{l}$ coincide con la función inducida por $\{L_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración. Sea $l_\infty : \varprojlim \{X_n, f_n\} \to \varprojlim \{Y_n, g_n\}$ la función inducida por $\mathfrak{l}$. Recordemos que l_∞ está definida por $l_\infty((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (l_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. No es difícil ver que se satisfacen las hipótesis de 3.3.5 y que la función $L : \varprojlim f_n \to \varprojlim g_n$, garantizada por 3.3.5, está definida por $L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\pi_2(L_n(x_{n+1}, x_n)))_{n\in\mathbb{N}} = (l_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Por tanto, $L = h$.

■

Ahora presentamos dos subespacios de $I \times I$ cuyos límites inversos generalizados son homeomorfos.

3.3.7 Ejemplo. Sean:

$$\Gamma = (\{0\} \times I) \cup (I \times \{1\})$$

(vea Figura 3.4) y

$$J = (I \times \{0\}) \cup (\{1\} \times I)$$

(vea Figura 3.12).

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos $L_n : \Gamma \to J$ por $L_n((x, y)) = (1 - x, 1 - y)$. Cada L_n es un homeomorfismo con inverso definido por $L_n^{-1}((x, y)) = (1-x, 1-y)$.

Observemos que $L_{n+1}[I \times \{y\} \cap \Gamma] \subseteq I \times \{1 - y\}$ y $L_n[\{y\} \times I \cap \Gamma] \subseteq \{1 - y\} \times I$ para cada $y \in I$. Entonces, por 3.3.4 y 3.3.5, existen funciones continuas $L : \varprojlim \Gamma \to \varprojlim J$ y $L' : \varprojlim J \to \varprojlim \Gamma$ tales que $Q_n \circ L = L_n \circ P_n$ y $P_n \circ L' = L_n^{-1} \circ Q_n$.

Como:

$$P_n \circ L' \circ L = L_n^{-1} \circ Q_n \circ L = L_n^{-1} \circ L_n \circ P_n = P_n$$

y

$$Q_n \circ L \circ L' = L_n \circ P_n \circ L' = L_n \circ L_n^{-1} \circ Q_n = Q_n,$$

se tiene, por 3.3.2, que $L' \circ L = id_{\varprojlim \Gamma}$ y $L \circ L' = id_{\varprojlim J}$. Por tanto, los espacios $\varprojlim \Gamma$ y $\varprojlim J$ son homeomorfos.

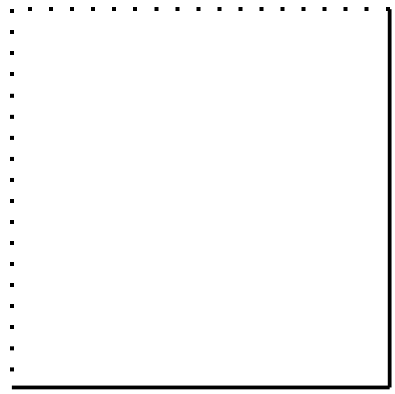

Figura 3.12: El conjunto J.

En el ejemplo anterior, las funciones L_n son homeomorfismos. Esta condición no es suficiente para que la función inducida $L : \underleftarrow{\text{Lím}} A_n \to \underleftarrow{\text{Lím}} B_n$ sea un homeomorfismo (vea 3.3.9).

En general, no basta que cada L_n sea suprayectiva para que la función inducida por $\{L_n : n \in \mathbb{N}\}$ lo sea, como lo mostraremos en los dos ejemplos siguientes:

3.3.8 Ejemplo. Sean:

$$\begin{aligned} S_1 = &\big(\{e^{i0}\} \times \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}\big) \cup \big(\{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\} \times \{e^{i\pi}\}\big) \\ &\cup \big(\{e^{i\pi}\} \times \{e^{i\theta} : \pi \leq \theta \leq 2\pi\}\big) \cup \big(\{e^{i\theta} : \pi \leq \theta \leq 2\pi\} \times \{e^{i2\pi}\}\big) \\ &\subseteq S^1 \times S^1 \end{aligned}$$

(vea Figura 3.13) y

$$S_2 = ([-1,1] \times \{-1,1\}) \cup (\{-1,1\} \times [-1,1]) \subseteq [-1,1] \times [-1,1]$$

(vea Figura 3.14).

La función $L_n : S_1 \to S_2$ definida por $L_n((e^{i\theta}, e^{i\phi})) = (\cos(\theta), \cos(\phi))$ es un homeomorfismo y, para cada $e^{i\theta} \in S^1$, se satisfacen las contenciones siguientes:

$$L_{n+1}[(S^1 \times \{e^{i\theta}\}) \cap S_1] \subseteq [-1,1] \times \{\cos(\theta)\}$$

y

$$L_n[(\{e^{i\theta}\} \times S^1) \cap S_1] \subseteq \{\cos(\theta)\} \times [-1,1].$$

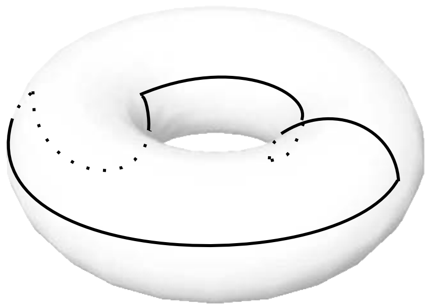

Figura 3.13: El conjunto S_1.

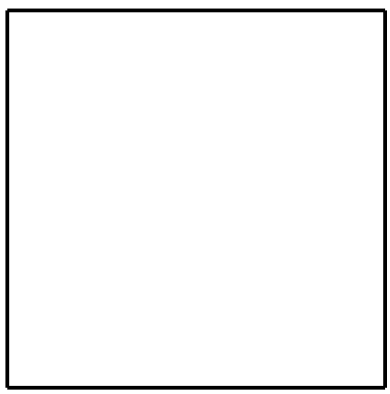

Figura 3.14: El conjunto S_2.

Entonces, por 3.3.4 y 3.3.5, existe una función continua $L : \varprojlim S_1 \to \varprojlim S_2$ tal que $Q_n \circ L = L_n \circ P_n$.

Observemos que $(0, 1, 0, 1, \ldots) \in \varprojlim S_2$. Supongamos que $x \in \varprojlim S_1$ es tal que $L(x) = (0, 1, 0, 1, \ldots)$, entonces:

$$(1, 0) = Q_1 \circ L(x) = L_1 \circ P_1(x) = L_1((x_2, x_1))$$

y

$$(1, 0) = Q_3 \circ L(x) = L_3 \circ P_3(x) = L_3((x_4, x_3)).$$

De modo que $(x_2, x_1) = (x_4, x_3) = L_1^{-1}((1, 0)) = (e^{i0}, e^{i\frac{\pi}{2}})$. Pero $(x_3, x_2) = (e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i0}) \notin S_1$, lo cual contradice que $x \in \varprojlim S_1$. Por tanto L no es suprayectiva.

En el ejemplo siguiente, las funciones $L_n : A \to B$ son homeomorfismos pero la función inducida por $\{L_n : n \in \mathbb{N}\}$ no es suprayectiva (compare con 2.2.5).

3.3.9 Ejemplo. Sean:

$$K = (\{0\} \times I) \cup (I \times \{0\})$$

(vea Figura 3.8) y

$$G = \left(\{0\} \times \left[\tfrac{1}{2}, 1\right]\right) \cup \left\{\left(x, \tfrac{1}{2} - x\right) : 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2}\right\} \cup \left(\left[\tfrac{1}{2}, 1\right] \times \{0\}\right)$$

(vea Figura 3.15).

Dado $n \in \mathbb{N}$, definamos $L_{2n-1} : G \to K$ y $L_{2n} : G \to K$ por:

$$L_{2n-1}((x, y)) = \begin{cases} (0, 2y - 1) & \text{si } x = 0 \\ (x, 0) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

y

$$L_{2n}((x, y)) = \begin{cases} (2x - 1, 0) & \text{si } y = 0 \\ (0, y) & \text{si } y > 0. \end{cases}$$

Si $y \in I$, tenemos:

$$L_{2n}\left[(I \times \{y\}) \cap G\right] \subseteq I \times \{y\}$$

y

$$L_{2n-1}\left[(\{y\} \times I) \cap G\right] \subseteq \{y\} \times I.$$

Si $y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, entonces:

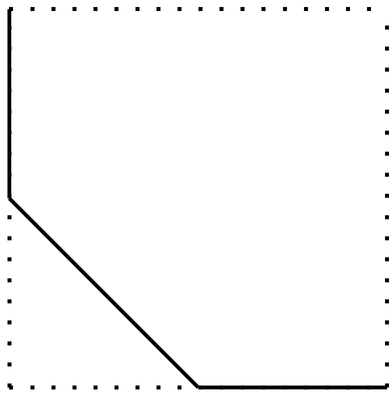

Figura 3.15: El conjunto G.

$$L_{2n+1}\left[(I \times \{y\}) \cap G\right] \subseteq I \times \{2y-1\}$$

y

$$L_{2n}\left[(\{y\} \times I) \cap G\right] \subseteq \{2y-1\} \times I.$$

Por último, si $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, se tiene:

$$L_{2n+1}\left[(I \times \{y\}) \cap G\right] \subseteq I \times \{0\}$$

y

$$L_{2n}\left[(\{y\} \times I) \cap G\right] \subseteq \{0\} \times I.$$

Entonces, por 3.3.4 y 3.3.5, existe una función continua $L : \underleftarrow{\text{Lím}} G \to \underleftarrow{\text{Lím}} K$ tal que $Q_n \circ L = L_n \circ P_n$.

Observemos que $\left(0, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots\right) \in \underleftarrow{\text{Lím}} K$. Supongamos que $x \in \underleftarrow{\text{Lím}} G$ es tal que $L(x) = \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots\right)$. Entonces:

$$\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) = Q_1 \circ L(x) = L_1 \circ P_1(x) = L_1((x_2, x_1))$$

y

$$(0,0) = Q_3 \circ L(x) = L_3 \circ P_3(x) = L_3((x_4, x_3)).$$

De modo que $(x_2, x_1) = L_1^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $(x_4, x_3) = L_3^{-1}((0,0)) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Pero $(x_3, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin G$, lo cual contradice que $x \in \underleftarrow{\text{Lím}} G$. Por tanto L no es suprayectiva.

Recordemos que una función continua $f : X \to Y$ definida en un espacio T_2 es perfecta si es cerrada y $f^{-1}(y)$ es compacto para cada $y \in Y$ (vea 2.2.15). De 2.2.17, se deduce que: si $\mathfrak{l} = \{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una función entre sucesiones inversas, donde cada l_n es perfecta, entonces la función inducida por $\mathfrak{l}$ es perfecta. En 3.3.11, mostramos el análogo a 2.2.17, para límites inversos generalizados.

3.3.10 Lema. Sean $\{X_n, A_n\}$ una sucesión inversa de subconjuntos cerrados y Λ_A el conjunto de puntos $a \in \prod \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ tales que $\pi_1(a_n) = \pi_2(a_{n+1})$. Entonces el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}} A_n$ es homeomorfo a Λ_A.

Demostración. La función $f_A : \underleftarrow{\text{Lím}} A_n \to \Lambda_A$ definida por $f_A(x) = (P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene como inversa a la función $g_A : \Lambda_A \to \underleftarrow{\text{Lím}} A_n$ definida por $g_A(a) = (\pi_2(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$. ∎

3.3.11 Teorema. Sean $\{X_n, A_n\}$ y $\{Y_n, B_n\}$ dos sucesiones inversas de subconjuntos cerrados y $\{L_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de funciones continuas $L_n : A_n \to B_n$ tales que $\pi_1 \circ L_n((x, v)) = \pi_2 \circ L_{n+1}((u, x))$ si $(u, x) \in A_{n+1}$ y $(x, v) \in A_n$. Si cada X_n es T_2 y cada L_n es una función perfecta, entonces $L : \underleftarrow{\text{Lím}} A_n \to \underleftarrow{\text{Lím}} B_n$, la función inducida por $\{L_n : n \in \mathbb{N}\}$, también es perfecta.

Demostración. Por [En, 3.7.9], la función:

$$\prod \{L_n : n \in \mathbb{N}\} : \prod \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \to \prod \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$$

es perfecta.

Como cada X_n es T_2, tenemos que Λ_A es un subconjunto cerrado de $\prod \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces la función $\prod \{L_n : n \in \mathbb{N}\} |_{\Lambda_A}$ es perfecta.

Veamos que $\prod \{L_n : n \in \mathbb{N}\} [\Lambda_A] \subseteq \Lambda_B$. Sea $a \in \Lambda_A$. Como $a_n \in A_n$ y $\pi_1(a_n) = \pi_2(a_{n+1})$, tenemos que $\pi_1 \circ L_n(a_n) = \pi_2 \circ L_{n+1}(a_{n+1})$. Por tanto, el punto $\prod \{L_n : n \in \mathbb{N}\} (a) = (L_n(a_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda_B$.

Entonces $\prod \{L_n : n \in \mathbb{N}\} |_{\Lambda_A}: \Lambda_A \to \Lambda_B$ es perfecta. No es difícil ver que $L = g_B \circ \prod \{L_n : n \in \mathbb{N}\} |_{\Lambda_A} \circ f_A$ (vea Figura 3.16) y, por tanto, la función $L : \underleftarrow{\text{Lím}} A_n \to \underleftarrow{\text{Lím}} B_n$ es perfecta. ∎

Para concluir esta sección, mostraremos que la suspensión de un límite inverso generalizado es un límite inverso generalizado.

3.3.12 Definición. Sea $J = [-1, 1]$. La **suspensión** de un espacio X es el espacio cociente:

$$Sus(X) = (X \times J)/\{X \times \{-1\}, X \times \{1\}\},$$

$$\begin{tikzcd}
\underleftarrow{\mathrm{Lím}} A_n \arrow[r, "L"] \arrow[d, "f_A"'] & \underleftarrow{\mathrm{Lím}} B_n \\
\Lambda_A \arrow[r, "G"'] & \Lambda_B \arrow[u, "g_B"']
\end{tikzcd}$$

Figura 3.16: En este diagrama la función $G = \prod \{L_n : n \in \mathbb{N}\} |_{\Lambda_A}$.

de $X \times J$. A la función cociente de $X \times J$ sobre $Sus(X)$ la denotamos por π_X.

Recordemos que para una función continua $f : X \to Y$ y relaciones de equivalencia E y F en X y Y, respectivamente. Si aEb implica que $f(a)Ff(b)$, entonces existe una única función continua $\widetilde{f} : X/E \to Y/F$ tal que $\sigma \circ f = \widetilde{f} \circ \pi$, donde π es la función cociente de X sobre X/E y σ es la función cociente de Y sobre Y/F, (vea Sección 1.3).

Dado un espacio X, denotamos por E_X a la relación que determina la partición:

$$\{X \times \{-1\}, X \times \{1\}\} \cup \{\{(x,t)\} : x \in X \text{ y } -1 < t < 1\}$$

de $X \times J$.

Sea $f : X \to Y$ una función continua y observemos que si $(a,t)E_X(b,s)$, entonces $(f(a),t)E_Y(f(b),s)$. Por tanto, existe una función continua $Sus(f) : Sus(X) \to Sus(Y)$ tal que $\pi_Y \circ (f \times id_J) = Sus(f) \circ \pi_X$.

Las funciones:

$$Sus(\pi_1) : Sus(X \times Y) \to Sus(X)$$

y

$$Sus(\pi_2) : Sus(X \times Y) \to Sus(Y)$$

inducen la función:

$$Sus(\pi_1) \times Sus(\pi_2) : Sus(X \times Y) \to Sus(X) \times Sus(Y),$$

la cual es un encaje.

3.3.13 Teorema. Sean $\{X_n, A_n\}$ una sucesión inversa de subconjuntos cerrados, donde cada X_n es compacto T_2 y distinto del vacío. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea:

$$h_n = Sus(\pi_1) \times Sus(\pi_2) : Sus(X_{n+1} \times X_n) \to Sus(X_{n+1}) \times Sus(X_n).$$

Entonces $Sus(X_{n+1}) = \pi_1 [h_n [Sus(A_n)]]$ y $Sus(\varprojlim A_n)$ es homeomorfo a $\varprojlim h_n [Sus(A_n)]$.

Demostración. Para probar que $Sus(X_{n+1}) = \pi_1 [h_n [Sus(A_n)]]$, tomemos $\pi_{X_{n+1}}((x_{n+1}, t)) \in Sus(X_{n+1})$. Como $X_{n+1} = \pi_1[A_n]$, entonces existe $(x_{n+1}, x_n) \in A_n$. Además:

$$\begin{aligned} \pi_1 \circ h_n(\pi_{X_{n+1}\times X_n}(((x_{n+1}, x_n), t))) &= Sus(\pi_1)(\pi_{X_{n+1}\times X_n}(((x_{n+1}, x_n), t))) \\ &= \pi_{X_{n+1}} \circ (\pi_1 \times id_J)(((x_{n+1}, x_n), t)) \\ &= \pi_{X_{n+1}}((x_{n+1}, t)). \end{aligned}$$

Esta serie de igualdades prueba que $Sus(X_{n+1}) \subseteq \pi_1 [h_n [Sus(A_n)]]$, la otra contención es clara.

Sean $Y = Sus(\varprojlim A_n)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $H_n = h_n \circ Sus(P_n)$ y Q_n la proyección de $\varprojlim h_n [Sus(A_n)]$ en $h_n [Sus(A_n)]$.

Como $h_n \circ Sus(P_n) = Sus(\pi_1 \circ P_n) \times Sus(\pi_2 \circ P_n)$, tenemos que $\pi_1 \circ H_n = \pi_2 \circ H_{n+1}$, entonces, por 3.3.1, existe una función continua $H : Y \to \varprojlim h_n [Sus(A_n)]$ tal que $H_n = Q_n \circ H$.

Por 3.1.5, el espacio $\varprojlim A_n$ es compacto T_2 distinto del vacío. No es difícil ver que H es inyectiva y que Y es compacto T_2.

Veamos que H es suprayectiva. Sea $\widehat{y} = ([(y_n, t_n)])_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim h_n [Sus(A_n)]$. Entonces $([(y_{n+1}, t_{n+1})], [(y_n, t_n)]) = h_n([((a_n, b_n), s_n)]) = ([(a_n, s_n)], [(b_n, s_n)])$, con $(a_n, b_n) \in A_n$. Por tanto, $t_{n+1} = t_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si $t_1 \in \{-1, 1\}$, entonces la pareja (a, t_1), con $a \in \varprojlim A_n$, es tal que $H([(a, t_1)]) = \widehat{y}$.

Si $-1 < t_1 < 1$, tenemos que $y_{n+1} = a_n$ y $y_n = b_n$, entonces $(y_{n+1}, y_n) \in A_n$ y, por tanto, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim A_n$. Claramente, $H([(y, t_1)]) = \widehat{y}$.

Por tanto, H es un suprayectiva y, en consecuencia, es un homeomorfismo.

■

3.4. Productos fibrados

Esta sección está dedicada únicamente a presentar el teorema 3.4.1, referente a productos fibrados, concepto introducido por el profesor B. Pasynkov en los años 60's del siglo pasado.

Sean $f : X \to Z$ y $g : Y \to Z$ funciones, definimos el **producto fibrado de f y g**, el cual denotamos por $f \times_F g$, como el espacio:

$$\{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}.$$

Más generalmente, si $f_n : X_n \to Z$ es una función para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el **producto fibrado de** $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, el cual denotamos por $\prod_F f_n$, como el espacio $\{x \in \prod X_n : f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1})$ para cada $n \in \mathbb{N}\}$.

3.4.1 Teorema. Si Z es un espacio T_2 y $f_n : X_n \to Z$ es una función continua y suprayectiva para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces cada producto fibrado $f_{n+1} \times_F f_n$ es un subespacio cerrado de $X_{n+1} \times X_n$, que satisface $\pi_1[f_{n+1} \times_F f_n] = X_{n+1}$, y $\underleftarrow{\text{Lím}}(f_{n+1} \times_F f_n) = \prod_F f_n$.

Demostración. Consideremos las funciones $f_{n+1} \circ \pi_1, f_n \circ \pi_2 : X_{n+1} \times X_n \to Z$. Por [En, 1.5.4], tenemos que el conjunto:

$$\begin{aligned} G &= \{(x, y) \in X_{n+1} \times X_n : f_{n+1} \circ \pi_1((x, y)) = f_n \circ \pi_2((x, y))\} \\ &= \{(x, y) \in X_{n+1} \times X_n : f_{n+1}(x) = f_n(y)\} \\ &= f_{n+1} \times_F f_n \end{aligned}$$

es cerrado en $X_{n+1} \times X_n$.

Sea $x \in X_{n+1}$, por la suprayectividad de f_n y f_{n+1}, existe $y \in X_n$ tal que $f_{n+1}(x) = f_n(y)$ y, por tanto, $(x, y) \in f_{n+1} \times_F f_n$. Con lo cual queda probado que $\pi_1[f_{n+1} \times_F f_n] = X_{n+1}$.

Ahora veamos que $\underleftarrow{\text{Lím}}(f_{n+1} \times_F f_n) = \prod_F f_n$. Si $x \in \underleftarrow{\text{Lím}}(f_{n+1} \times_F f_n)$, tenemos que $(x_{n+1}, x_n) \in f_{n+1} \times_F f_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $f_{n+1}(x_{n+1}) = f_n(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y, en consecuencia, $x \in \prod_F f_n$. Observemos que las implicaciones anteriores son equivalencias, con lo cual se tiene la igualdad deseada.

■

Capítulo 4

Límites inversos generalizados sobre conjuntos dirigidos

En el capítulo anterior analizamos algunas propiedades de sucesiones inversas de subconjuntos cerrados. Lo que haremos en este capítulo es extender dicha definición cambiando el conjunto de índices $\mathbb{N}$ por un conjunto dirigido Λ.

A menos que se indique algo diferente, usaremos las mismas convenciones del capítulo anterior.

4.1. Definición y propiedades

4.1.1 Observación. En este capítulo usamos tercias $\{\mathcal{X}, \mathcal{A}, \Lambda\}$, donde Λ es un conjunto dirigido por la relación $\leq$, $\mathcal{X}$ es una familia de espacios $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ y $\mathcal{A} = \{A_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in \Lambda \text{ con } \alpha \leq \beta\}$ es una familia de conjuntos. A la tercia $\{\mathcal{X}, \mathcal{A}, \Lambda\}$ la abreviamos escribiendo $\{X_\alpha, A_{\alpha\beta}, \Lambda\}$.

4.1.2 Definición. Un **sistema inverso de subconjuntos cerrados** es una tercia $\{X_\alpha, A_{\alpha\beta}, \Lambda\}$ (vea 4.1.1); donde Λ es un conjunto dirigido por la relación $\leq$, $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una familia de espacios y, para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Lambda$ con $\alpha \leq \beta$, $A_{\alpha\beta}$ es un subconjunto cerrado de $X_\beta \times X_\alpha$ tales que:

(i) $A_{\alpha\alpha}$ es la diagonal $\{(x, x) : x \in X_\alpha\}$ en X_α, y

(ii) $A_{\alpha\gamma} = A_{\alpha\beta} \circ A_{\beta\gamma}$ cuando $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Los espacios X_α se llaman **espacios coordenados** del sistema.

Observemos que si $\Lambda = \mathbb{N}$, obtenemos las sucesión inversa $\{X_n, A_n\}$ donde $A_n \subseteq X_{n+1} \times X_n$; en este caso $A_{nm} = A_n \circ A_{n+1} \circ \ldots \circ A_{m-1}$.

Dada una familia de espacios $\{X_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$ denotaremos por $p'_{\alpha\beta}$ a la proyección de $\prod \{X_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$ sobre $X_\beta \times X_\alpha$.

4.1.3 Definición. El **límite inverso generalizado** del sistema inverso de subconjuntos cerrados $\{X_\alpha, A_{\alpha\beta}, \Lambda\}$, al cual denotaremos por $\underleftarrow{\mathrm{Lím}} A_{\alpha\beta}$, es el conjunto de puntos $x \in \prod \{X_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$ tales que $p'_{\alpha\beta}(x) \in A_{\alpha\beta}$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$.

Si $A = A_{\alpha\beta}$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$, a $\underleftarrow{\mathrm{Lím}} A_{\alpha\beta}$ lo escribimos como $\underleftarrow{\mathrm{Lím}} A$.

Denotaremos por $p_{\alpha\beta}$ a la restricción de $p'_{\alpha\beta}$ a $\underleftarrow{\mathrm{Lím}} A_{\alpha\beta}$.

4.1.4 Observación. Para cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$ con $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, tenemos:

$$\pi_1 \circ p_{\alpha\beta} = \pi_2 \circ p_{\beta\gamma}.$$

(vea Figura 4.1)

$$\begin{tikzcd}
\underleftarrow{\mathrm{Lím}} A_{\alpha\beta} \arrow[r, "p_{\alpha\beta}"] \arrow[d, "p_{\beta\gamma}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A_{\alpha\beta} \arrow[d, "\pi_1"] \\
A_{\beta\gamma} \arrow[r, "\pi_2"'] & X_\beta
\end{tikzcd}$$

Figura 4.1:

4.1.5 Teorema. Si $\left\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\right\}$ es un sistema inverso de espacios T_2, entonces $\left\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\right\}$ es un sistema inverso de subconjuntos cerrados y los conjuntos $\underleftarrow{\mathrm{Lím}} f_\alpha^\beta$ y $\underleftarrow{\mathrm{lím}} \left\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\right\}$ son iguales.

Demostración. Como cada X_α es T_2, tenemos que cada f_α^β es un subconjunto cerrado de $X_\beta \times X_\alpha$ (vea [Ku, Theorem 2, pág. 142]). Claramente, se satisface que $\pi_1[f_\alpha^\beta] = X_\beta$. Como $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso, entonces se satisfacen (i) y (ii) de 4.1.2 y, por tanto, $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso de subconjuntos cerrados.

Para ver que $\underleftarrow{\text{Lím}} f_\alpha^\beta$ y $\underleftarrow{\text{lím}}\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ son iguales, observemos que decir $(x_\beta, x_\alpha) \in f_\alpha^\beta$ es equivalente a decir $x_\alpha = f_\alpha^\beta(x_\beta)$. Entonces $x \in \underleftarrow{\text{Lím}} f_\alpha^\beta$ es equivalente a $x \in \underleftarrow{\text{lím}}\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$.

■

4.1.6 Proposición. Sea $\{X_\alpha, A_{\alpha\beta}, \Lambda\}$ un sistema inverso de subconjuntos cerrados. Entonces:

$$\underleftarrow{\text{Lím}} A_{\alpha\beta} = \bigcap \left\{ (p'_{\alpha\beta})^{-1}[A_{\alpha\beta}] : \alpha, \beta \in \Lambda \text{ y } \alpha \leq \beta \right\}.$$

Demostración. Observemos que un punto x pertenece al espacio $\underleftarrow{\text{Lím}} A_{\alpha\beta}$ si y sólo si $p'_{\alpha\beta}(x) \in A_{\alpha\beta}$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Lambda$ con $\alpha \leq \beta$. Como esta última condición equivale a $x \in \bigcap \left\{ (p'_{\alpha\beta})^{-1}[A_{\alpha\beta}] : \alpha, \beta \in \Lambda \text{ y } \alpha \leq \beta \right\}$, se tiene la igualdad deseada.

■

De manera análoga se prueba lo siguiente:

4.1.7 Proposición. Sea $\{X_\alpha, A_{\alpha\beta}, \Lambda\}$ un sistema inverso de subconjuntos cerrados. Dado $\beta \in \Lambda$, definimos:

$$C_\beta = \left\{ x \in \prod\{X_\gamma : \gamma \in \Lambda\} : p'_{\alpha\eta}(x) \in A_{\alpha\eta} \text{ para } \alpha, \eta \in \Lambda \text{ con } \alpha \leq \eta \leq \beta \right\}.$$

Entonces:

$$C_\beta = \bigcap \left\{ (p'_{\alpha\eta})^{-1}[A_{\alpha\eta}] : \alpha, \eta \in \Lambda \text{ y } \alpha \leq \eta \leq \beta \right\}.$$

De la dos proposiciones anteriores, deducimos que cada C_β, así como $\underleftarrow{\text{Lím}} A_{\alpha\beta}$, son subconjuntos cerrados de $\prod\{X_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$. Con ésto, obtenemos el siguiente:

4.1.8 Teorema. Si $\{X_\alpha, A_{\alpha\beta}, \Lambda\}$ es un sistema inverso de subconjuntos cerrados y cada X_α es un espacio compacto, entonces el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}} A_{\alpha\beta}$ es compacto.

En general, no sabemos si el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}} A_{\alpha\beta}$ no es vacío cuando cada X_α es compacto y no es vacío. Pero si Λ es un número ordinal, dicha implicación es cierta, como veremos a continuación:

4.1.9 Teorema. Si $\{X_\alpha, A_{\alpha\beta}, \kappa\}$ es un sistema inverso de subconjuntos cerrados, donde κ es un ordinal y cada X_α es un espacio compacto, entonces $p_\beta[C_\beta] = X_\beta$ para cada $\beta \in \kappa$, donde p_β es la proyección de $\prod \{X_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$ sobre X_β. En particular, si cada $X_\alpha \neq \emptyset$, entonces el espacio $\varprojlim A_{\alpha\beta} \neq \emptyset$.

Demostración. No es difícil ver que $C_0 = \prod \{X_\gamma : \gamma \in \kappa\}$. Así que el resultado es válido para $\beta = 0$.

Sean $\beta \in \kappa$, con $0 < \beta$, y $x_\beta \in X_\beta$. Construiremos un punto $y \in C_\beta$ definiendo sus coordenadas del modo siguiente:

Para $\gamma > \beta$, sea y_γ algún punto en X_γ y $y_\beta = x_\beta$.

Como $\pi_1[A_{0\beta}] = X_\beta$, existe $y_0 \in X_0$ tal que $(y_\beta, y_0) \in A_{0\beta}$.

Sea $\gamma \leq \beta$ $(0 < \gamma)$ y supongamos que se han hallado puntos $y_\alpha \in X_\alpha$, para $\alpha < \gamma$, tales que:

a) $(y_\beta, y_\alpha) \in A_{\alpha\beta}$ y

b) $(y_\alpha, y_{\alpha'}) \in A_{\alpha'\alpha}$ para cualesquiera $\alpha' \leq \alpha < \gamma$.

Supongamos que $\gamma = \alpha + 1$. Como $(y_\beta, y_\alpha) \in A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\gamma} \circ A_{\gamma\beta}$, existe $y_\gamma \in X_\gamma$ tal que $(y_\beta, y_\gamma) \in A_{\gamma\beta}$ y $(y_\gamma, y_\alpha) \in A_{\alpha\gamma}$. Además, como $(y_\alpha, y_{\alpha'}) \in A_{\alpha'\alpha}$ para $\alpha' \leq \alpha$, tenemos que $(y_\gamma, y_{\alpha'}) \in A_{\alpha'\gamma} = A_{\alpha'\alpha} \circ A_{\alpha\gamma}$.

Veamos el caso donde γ es un ordinal límite. Para $\alpha < \gamma$, tenemos que $(y_\beta, y_\alpha) \in A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\gamma} \circ A_{\gamma\beta}$, entonces existe $y_\gamma^\alpha \in X_\gamma$ tal que $(y_\beta, y_\gamma^\alpha) \in A_{\gamma\beta}$ y $(y_\gamma^\alpha, y_\alpha) \in A_{\alpha\gamma}$. Por la compacidad de X_γ, la red $\{y_\gamma^\alpha : \alpha < \gamma\}$ tiene un punto de adherencia y_γ. No es difícil ver que (y_β, y_γ) es un punto de adherencia de $\{(y_\beta, y_\gamma^\alpha) : \alpha < \gamma\}$ y, por tanto, $(y_\beta, y_\gamma) \in A_{\gamma\beta}$. Para $\alpha' \leq \alpha < \gamma$, tenemos que $(y_\alpha, y_{\alpha'}) \in A_{\alpha'\alpha}$, entonces $(y_\gamma^\alpha, y_{\alpha'}) \in A_{\alpha'\gamma} = A_{\alpha'\alpha} \circ A_{\alpha\gamma}$. No es difícil ver que $(y_\gamma, y_{\alpha'})$ es un punto de adherencia de $\{(y_\gamma^\alpha, y_{\alpha'}) : \alpha < \gamma\}$ y, por tanto, $(y_\gamma, y_{\alpha'}) \in A_{\alpha'\gamma}$.

En ambos casos, podemos encontrar un punto $y_\gamma \in X_\gamma$ tal que a) y b) se satisfacen para $\alpha \leq \gamma$. El punto y, construido de esta forma, está en C_β y es tal que $p_\beta(y) = x_\beta$. Por tanto, $X_\beta \subseteq p_\beta[C_\beta]$. La otra contención es clara.

Para ver la segunda parte del Teorema, supongamos que cada $X_\alpha \neq \emptyset$. No es difícil ver que $C_\beta \subseteq C_\eta$ si $\eta \leq \beta$. Entonces la familia de cerrados $\{C_\beta : \beta \in \Lambda\}$ tiene la propiedad de la intersección finita y, por tanto, el espacio $\varprojlim A_{\alpha\beta} = \bigcap \{C_\beta : \beta \in \Lambda\}$ no es vacío. ■

Terminamos esta sección con el siguiente:

4.1.10 Problema. Encontrar condiciones necesarias y/o suficientes para que el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}}A_{\alpha\beta}$ sea un continuo.

Lo que creemos es que si los espacios X_α son continuos hereditariamente unicoherentes y los conjuntos $(\{x\} \times X_\alpha) \cap A_{\alpha\beta}$ son continuos, entonces el espacio $\underleftarrow{\text{Lím}}A_{\alpha\beta}$ es un continuo.

4.2. Funciones inducidas

En la presente sección, extendemos algunos de los resultados de la Sección 3.3; damos una condición para inducir funciones de un espacio al límite inverso generalizado de un sistema inverso de subconjuntos cerrados y presentamos un teorema referente a productos de estos nuevos espacios.

4.2.1 Teorema. Sean $\{X_\alpha, A_{\alpha\beta}, \Lambda\}$ un sistema inverso de subconjuntos cerrados y Y un espacio. Si $\mathfrak{H} = \{H_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in \Lambda \text{ con } \alpha \leq \beta\}$ es una familia de funciones continuas $H_{\alpha\beta} : Y \to A_{\alpha\beta}$ tales que $\pi_1 \circ H_{\alpha\beta} = \pi_2 \circ H_{\beta\gamma}$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ (vea Figura 4.2), entonces existe una única función continua $H : Y \to \underleftarrow{\text{Lím}}A_{\alpha\beta}$ tal que $H_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} \circ H$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$ (vea Figura 4.3). A la función H se le llama **función inducida por $\mathfrak{H}$.**

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "H_{\alpha\beta}"] \arrow[d, "H_{\beta\gamma}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A_{\alpha\beta} \arrow[d, "\pi_1"] \\
A_{\beta\gamma} \arrow[r, "\pi_2"'] & X_\beta
\end{tikzcd}$$

Figura 4.2:

Demostración. Por 1.1.1. la función $H : Y \to \prod\{X_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$ definida por $H(y) = (\pi_2(H_{\alpha\alpha}(y)))_{\alpha\in\Lambda}$ es continua.

Veamos que $H(y) \in \underleftarrow{\text{Lím}}A_{\alpha\beta}$. Sean $\alpha, \beta \in \Lambda$ con $\alpha \leq \beta$, queremos probar que $p_{\alpha\beta}(H(y)) \in A_{\alpha\beta}$, lo cual obtenemos por la serie de igualdades:

$$\begin{aligned} p_{\alpha\beta}(H(y)) &= (\pi_2(H_{\beta\beta}(y)), \pi_2(H_{\alpha\alpha}(y))) = (\pi_1(H_{\alpha\beta}(y)), \pi_1(H_{\alpha\alpha}(y))) \\ &= (\pi_1(H_{\alpha\beta}(y)), \pi_2(H_{\alpha\beta}(y))) = H_{\alpha\beta}(y) \in A_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "H_{\alpha\beta}"'] & \underleftarrow{\text{Lím}}A_{\alpha\beta} \arrow[d, "p_{\alpha\beta}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
 & A_{\alpha\beta}
\end{tikzcd}$$

Figura 4.3:

Por lo anterior, $H_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} \circ H$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Lambda$ y, claramente, H es la única con esta propiedad.

■

4.2.2 Observación. Si ponemos $Y = \underleftarrow{\text{Lím}}A_{\alpha\beta}$ y $H_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}$, por 4.1.4, se satisface la hipótesis en 4.2.1, entonces existe una única función continua $H : \underleftarrow{\text{Lím}}A_{\alpha\beta} \to \underleftarrow{\text{Lím}}A_{\alpha\beta}$ tal que $p_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} \circ H$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Lambda$. Como la función identidad $id : \underleftarrow{\text{Lím}}A_{\alpha\beta} \to \underleftarrow{\text{Lím}}A_{\alpha\beta}$ tiene tal propiedad, podemos concluir que $H = id$.

La propiedad enunciada en 4.2.1 caracteriza a $\underleftarrow{\text{Lím}}A_{\alpha\beta}$, lo cual enunciamos en el teorema siguiente (compare con 2.1.8).

4.2.3 Teorema. Sean $\{X_\alpha, A_{\alpha\beta}, \Lambda\}$ un sistema inverso de subconjuntos cerrados, Y un espacio y $\mathfrak{H} = \{H_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in \Lambda \text{ con } \alpha \leq \beta\}$ una familia de funciones continuas $H_{\alpha\beta} : Y \to A_{\alpha\beta}$ tales que $\pi_1 \circ H_{\alpha\beta} = \pi_2 \circ H_{\beta\gamma}$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Sea $H : Y \to \underleftarrow{\text{Lím}}A_{\alpha\beta}$ la función inducida por $\mathfrak{H}$ ($H_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} \circ H$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Lambda$). Si $\{Y, \mathfrak{H}\}$ tiene la propiedad:

(∗) Si Z es un espacio y $\mathfrak{Q} = \{Q_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in \Lambda \text{ con } \alpha \leq \beta\}$ es una familia de funciones continuas $Q_{\alpha\beta} : Z \to A_{\alpha\beta}$ tales que $\pi_1 \circ Q_{\alpha\beta} = \pi_2 \circ Q_{\beta\gamma}$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, entonces existe una única función continua $Q : Z \to Y$ tal que $Q_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} \circ Q$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$.

Entonces H es un homeomorfismo.

Demostración. Primero observemos que, por 4.2.2, la única función continua $g : \underleftarrow{\text{Lím}}A_{\alpha\beta} \to \underleftarrow{\text{Lím}}A_{\alpha\beta}$ tal que $p_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} \circ g$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Lambda$

es la función identidad en $\varprojlim A_{\alpha\beta}$. De manera análoga, por $(*)$, la única función continua $g : Y \to Y$ tal que $H_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} \circ g$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Lambda$ es la función identidad en Y.

Por $(*)$, existe una función continua $P : \varprojlim A_{\alpha\beta} \to Y$ tal que $p_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} \circ P$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Lambda$.

Observemos que $p_{\alpha\beta} \circ (H \circ P) = H_{\alpha\beta} \circ P = p_{\alpha\beta}$ y $H_{\alpha\beta} \circ (P \circ H) = p_{\alpha\beta} \circ H = H_{\alpha\beta}$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Lambda$, entonces, por la observación al principio de la demostración, H es un homeomorfismo.

$\blacksquare$

En 2.1.17, vimos que el producto de límites inversos es homeomorfo a un límite inverso. En el siguiente teorema extendemos 2.1.17 para el caso de límites inversos generalizados (compare con 3.3.3).

4.2.4 Teorema. Sea B un conjunto no vacío y supongamos que, para cada $b \in B$, $S(b) = \left\{X_\alpha^b, A_{\alpha\beta}^b, \Lambda\right\}$ es un sistema inverso de subconjuntos cerrados cuyo límite inverso generalizado es $\varprojlim A_{\alpha\beta}^b$. Para cada $\alpha \in \Lambda$, sea $X_\alpha = \prod\{X_\alpha^b : b \in B\}$ con proyecciones π_α^b. Dados $\alpha \leq \beta$, sean $Y_{\alpha\beta} = \prod\{X_\beta^b \times X_\alpha^b : b \in B\}$ con proyecciones $\sigma_{\alpha\beta}^b$ y $g_{\alpha\beta} : Y_{\alpha\beta} \to X_\beta \times X_\alpha$ el homeomorfismo tal que $\pi_i \circ g_{\alpha\beta}$ es la función inducida por la familia $\{\pi_i \circ \sigma_{\alpha\beta}^b : b \in B\}$ ($\pi_1 \circ \sigma_{\alpha\beta}^b = \pi_\beta^b \circ \pi_1 \circ g_{\alpha\beta}$ y $\pi_2 \circ \sigma_{\alpha\beta}^b = \pi_\alpha^b \circ \pi_2 \circ g_{\alpha\beta}$). Entonces $\left\{X_\alpha, g_{\alpha\beta}\left[\prod\left\{A_{\alpha\beta}^b : b \in B\right\}\right], \Lambda\right\}$ es un sistema inverso de subconjuntos cerrados y $\varprojlim g_{\alpha\beta}\left[\prod\left\{A_{\alpha\beta}^b : b \in B\right\}\right]$ es homeomorfo a $Y = \prod\left\{\varprojlim A_{\alpha\beta}^b : b \in B\right\}$.

Demostración. Dado $b \in B$, sea q_b la proyección de Y en $\varprojlim A_{\alpha\beta}^b$ y, para $\alpha \leq \beta$, sea $p_{\alpha\beta}^b$ la proyección $\varprojlim A_{\alpha\beta}^b$ en $A_{\alpha\beta}^b$. Para $\alpha \leq \beta$, sea $H_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \circ k_{\alpha\beta}$, donde $k_{\alpha\beta} : Y \to Y_{\alpha\beta}$ es la función inducida por la familia $\left\{p_{\alpha\beta}^b \circ q_b : b \in B\right\}$ ($p_{\alpha\beta}^b \circ q_b = \sigma_{\alpha\beta}^b \circ k_{\alpha\beta}$). Observemos que $k_{\alpha\beta}[Y] \subseteq \prod\left\{A_{\alpha\beta}^b : b \in B\right\}$, entonces $H_{\alpha\beta}[Y] \subseteq g_{\alpha\beta}\left[\prod\left\{A_{\alpha\beta}^b : b \in B\right\}\right]$.

Como $\pi_1[A_{\alpha\beta}^b] = X_\beta^b$, tenemos que $\pi_1\left[g_{\alpha\beta}\left[\prod\left\{A_{\alpha\beta}^b : b \in B\right\}\right]\right] = X_\beta$. Además, como los conjuntos cerrados $A_{\alpha\alpha}^b$ son las diagonales en $X_\alpha^b \times X_\alpha^b$, entonces $g_{\alpha\alpha}\left[\prod\left\{A_{\alpha\alpha}^b : b \in B\right\}\right]$ es la diagonal en $X_\alpha \times X_\alpha$. De manera análoga, las igualdades $A_{\alpha\gamma}^b = A_{\alpha\beta}^b \circ A_{\beta\gamma}^b$, implican que:

$$g_{\alpha\gamma}\left[\prod\left\{A_{\alpha\gamma}^b : b \in B\right\}\right] = g_{\alpha\beta}\left[\prod\left\{A_{\alpha\beta}^b : b \in B\right\}\right] \circ g_{\beta\gamma}\left[\prod\left\{A_{\beta\gamma}^b : b \in B\right\}\right].$$

Por tanto, la familia $\left\{X_\alpha, g_{\alpha\beta}\left[\prod\left\{A_{\alpha\beta}^b : b \in B\right\}\right], \Lambda\right\}$ es un sistema inverso de subconjuntos cerrados.

Para $\alpha \leq \beta$, sea $p_{\alpha\beta}$ la proyección de $\varprojlim g_{\alpha\beta}\left[\prod\left\{A^b_{\alpha\beta} : b \in B\right\}\right]$ en $g_{\alpha\beta}\left[\prod\left\{A^b_{\alpha\beta} : b \in B\right\}\right]$.

Veamos que, para $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, se cumple la igualdad $\pi_1 \circ H_{\alpha\beta} = \pi_2 \circ H_{\beta\gamma}$. Es suficiente probar que $\pi^b_\beta \circ \pi_1 \circ H_{\alpha\beta} = \pi^b_\beta \circ \pi_2 \circ H_{\beta\gamma}$ para cada $b \in B$, lo cual obtenemos de las igualdades:

$$\begin{aligned}\pi^b_\beta \circ \pi_2 \circ H_{\beta\gamma} &= \pi^b_\beta \circ \pi_2 \circ g_{\beta\gamma} \circ k_{\beta\gamma} = \pi_2 \circ \sigma^b_{\beta\gamma} \circ k_{\beta\gamma} = \pi_2 \circ p^b_{\beta\gamma} \circ q_b \\ &= \pi_1 \circ p^b_{\alpha\beta} \circ q_b = \pi_1 \circ \sigma^b_{\alpha\beta} \circ k_{\alpha\beta} = \pi^b_\beta \circ \pi_1 \circ g_{\alpha\beta} \circ k_{\alpha\beta} \\ &= \pi^b_\beta \circ \pi_1 \circ H_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

Como $\pi_1 \circ H_{\alpha\beta} = \pi_2 \circ H_{\beta\gamma}$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, por 4.2.1, existe una función continua $H : Y \to \varprojlim g_{\alpha\beta}\left[\prod\left\{A^b_{\alpha\beta} : b \in B\right\}\right]$ tal que $H_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} \circ H$.

Dados $b \in B$ y $\alpha \leq \beta$, sea $f_{\alpha\beta} = \sigma^b_{\alpha\beta} \circ g^{-1}_{\alpha\beta} \circ p_{\alpha\beta}$. No es difícil ver que $\pi_2 \circ f_{\beta\gamma} = \pi_1 \circ f_{\alpha\beta}$. Entonces, por 4.2.1, existe una función continua $f_b : \varprojlim g_{\alpha\beta}\left[\prod\left\{A^b_{\alpha\beta} : b \in B\right\}\right] \to \varprojlim A^b_{\alpha\beta}$ tal que $\sigma^b_{\alpha\beta} \circ g^{-1}_{\alpha\beta} \circ p_{\alpha\beta} = p^b_{\alpha\beta} \circ f_b$ y, por tanto, una función continua $f : \varprojlim g_{\alpha\beta}\left[\prod\left\{A^b_{\alpha\beta} : b \in B\right\}\right] \to Y$ tal que $f_b = q_b \circ f$.

Como:

$$\begin{aligned}p^b_{\alpha\beta} \circ q_b \circ f \circ H &= p^b_{\alpha\beta} \circ f_b \circ H = \sigma^b_{\alpha\beta} \circ g^{-1}_{\alpha\beta} \circ p_{\alpha\beta} \circ H = \sigma^b_{\alpha\beta} \circ g^{-1}_{\alpha\beta} \circ H_{\alpha\beta} \\ &= \sigma^b_{\alpha\beta} \circ g^{-1}_{\alpha\beta} \circ g_{\alpha\beta} \circ k_{\alpha\beta} = \sigma^b_{\alpha\beta} \circ k_{\alpha\beta} = p^b_{\alpha\beta} \circ q_b,\end{aligned}$$

tenemos que $q_b = q_b \circ f \circ H$ y, por tanto, $f \circ H$ es la función identidad en Y.

Además, como $q_b = q_b \circ f \circ H = f_b \circ H$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\sigma^b_{\alpha\beta} \circ g^{-1}_{\alpha\beta} \circ p_{\alpha\beta} \circ H \circ f &= p^b_{\alpha\beta} \circ f_b \circ H \circ f = p^b_{\alpha\beta} \circ q_b \circ f = p^b_{\alpha\beta} \circ f_b \\ &= \sigma^b_{\alpha\beta} \circ g^{-1}_{\alpha\beta} \circ p_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

lo cual implica que $p_{\alpha\beta} \circ H \circ f = p_{\alpha\beta}$. Entonces, por 4.2.2, $H \circ f$ es la identidad en $\varprojlim g_{\alpha\beta}\left[\prod\left\{A^b_{\alpha\beta} : b \in B\right\}\right]$. Con lo cual queda probado que H es un homeomorfismo.

■

En 3.3.13, vimos que si $\{X_n, A_n\}$ es una sucesión inversa de subconjuntos cerrados, donde cada X_n es compacto T_2 y distinto del vacío, entonces existe una sucesión inversa de subconjuntos cerrados cuyo límite inverso generalizado es homeomorfo a $Sus(\varprojlim A_n)$. Para el caso no numerable, haciendo unas claras modificaciones de la prueba de 3.3.13, podemos ver que la suspensión de $\underleftarrow{\text{Lím}}A_{\alpha\beta}$, cuando cada X_α es compacto T_2, también es un límite inverso generalizado.

El Teorema 4.2.1 nos permite inducir funciones entre espacios de la forma $\underleftarrow{\text{Lím}}A_{\alpha\beta}$ (compare con 3.3.5).

4.2.5 Teorema. Sean $\{X_\alpha, A_{\alpha\beta}, \Lambda\}$ y $\{Y_\alpha, B_{\alpha\beta}, \Lambda\}$ dos sistemas inversos de subconjuntos cerrados y $\mathfrak{L} = \{L_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in \Lambda \text{ con } \alpha \leq \beta\}$ una familia de funciones continuas $L_{\alpha\beta} : A_{\alpha\beta} \to B_{\alpha\beta}$. Si para cualesquiera $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, $(u, x) \in A_{\beta\gamma}$ y $(x, v) \in A_{\alpha\beta}$ se tiene que $\pi_1 \circ L_{\alpha\beta}((x, v)) = \pi_2 \circ L_{\beta\gamma}((u, x))$, entonces existe una única función continua $L_\Lambda : \underleftarrow{\text{Lím}}A_{\alpha\beta} \to \underleftarrow{\text{Lím}}B_{\alpha\beta}$ tal que $L_{\alpha\beta} \circ p_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta} \circ L_\Lambda$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$ (vea Figura 4.4), donde $q_{\alpha\beta}$ es la proyección de $\underleftarrow{\text{Lím}}B_{\alpha\beta}$ en $B_{\alpha\beta}$. A la función L_Λ se le llama **función inducida por $\mathfrak{L}$**.

$$\begin{tikzcd}
\underleftarrow{\text{Lím}}A_{\alpha\beta} \arrow[r, "L_\Lambda"] \arrow[d, "p_{\alpha\beta}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \underleftarrow{\text{Lím}}B_{\alpha\beta} \arrow[d, "q_{\alpha\beta}"] \\
A_{\alpha\beta} \arrow[r, "L_{\alpha\beta}"'] & B_{\alpha\beta}
\end{tikzcd}$$

Figura 4.4:

Demostración. Claramente, la familia $\{L_{\alpha\beta} \circ p_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in \Lambda \text{ y } \alpha \leq \beta\}$ satisface que $\pi_1 \circ L_{\alpha\beta} \circ p_{\alpha\beta} = \pi_2 \circ L_{\beta\gamma} \circ p_{\beta\gamma}$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, entonces, por 4.2.1, existe una única función continua $L_\Lambda : \underleftarrow{\text{Lím}}A_{\alpha\beta} \to \underleftarrow{\text{Lím}}B_{\alpha\beta}$ tal que $L_{\alpha\beta} \circ p_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta} \circ L_\Lambda$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$. ■

4.2.6 Teorema. Sean $S = \left\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\right\}$ y $S' = \left\{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\right\}$ dos sistemas inversos de espacios T_2, $\mathfrak{l} = \{l_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una función de S en S' ($l_\alpha \circ f_\alpha^\beta = g_\alpha^\beta \circ l_\beta$) y $l_\Lambda : \varprojlim \left\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\right\} \to \varprojlim \left\{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\right\}$ la función inducida por $\mathfrak{l}$ ($l_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda = g_\alpha^\Lambda \circ l_\Lambda$). Definimos $L_{\alpha\beta} : f_\alpha^\beta \to g_\alpha^\beta$ por $L_{\alpha\beta}((x, f_\alpha^\beta(x))) = (l_\beta(x), l_\alpha(f_\alpha^\beta(x)))$. Entonces para cualesquiera $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, $(u, x) \in f_\beta^\gamma$ y $(x, v) \in f_\alpha^\beta$, se tiene que $\pi_1 \circ L_{\alpha\beta}((x,v)) = \pi_2 \circ L_{\beta\gamma}((u,x))$ y la función $L_\Lambda : \varprojlim f_\alpha^\beta \to \varprojlim g_\alpha^\beta$ garantizada por 4.2.5 coincide con l_Λ.

Demostración. La función $L_{\alpha\beta}$ está bien definida puesto que:

$$L_{\alpha\beta}((x, f_\alpha^\beta(x))) = (l_\beta(x), l_\alpha(f_\alpha^\beta(x))) = (l_\beta(x), g_\alpha^\beta(l_\beta(x))).$$

Es claro que:

$$\pi_1 \circ L_{\alpha\beta}((f_\beta^\gamma(x), f_\alpha^\beta(f_\beta^\gamma(x))) = \pi_1 \circ L_{\alpha\beta}((f_\beta^\gamma(x), f_\alpha^\gamma(x))) = \pi_2 \circ L_{\beta\gamma}((x, f_\beta^\gamma(x)))$$

para cualesquiera $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Sea $L_\Lambda : \varprojlim f_\alpha^\beta \to \varprojlim g_\alpha^\beta$ la función inducida por $\{L_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in \Lambda\}$. Recordemos que L_Λ está definida por:

$$\begin{aligned} L_\Lambda(x) &= (\pi_2(L_{\alpha\alpha} \circ p_{\alpha\alpha}(x)))_{\alpha\in\Lambda} = (\pi_2(L_{\alpha\alpha}(x_\alpha, x_\alpha)))_{\alpha\in\Lambda} \\ &= (\pi_2((l_\alpha(x_\alpha), l_\alpha(x_\alpha))))_{\alpha\in\Lambda} = (l_\alpha(x_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}. \end{aligned}$$

Por 2.2.2, vemos que l_Λ y L_Λ son iguales. ∎

Capítulo 5

Límites inversos y otras propiedades

En el Capítulo 2 revisamos algunas propiedades de los sistemas inversos y sus límites. En este último capítulo usamos sistemas inversos para probar, en 5.2.23, que los continuos periféricamente metrizables que son hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacios 2^X y $\mathcal{C}_n(X)$ únicos. Además, probamos tres resultados (5.3.16, 5.3.22 y 5.4.7) que se refieren a sucesiones inversas; es decir, cuando el conjunto de índices Λ de un sistema inverso $\left\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\right\}$ es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

5.1. Hiperespacios y límites inversos

En la Sección 1.2, analizamos propiedades de algunos hiperespacios, en particular, vimos que cada función $f : X \to Y$ entre espacios T_2 induce una función entre los hiperespacios $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{K}(Y)$. En el siguiente teorema, mostramos que cada sistema inverso $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ induce un sistema inverso de los hiperespacios $\mathcal{K}(X_\alpha)$ cuyo límite es un hiperespacio de X_Λ.

5.1.1 Teorema. Si $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso de espacios T_2, entonces la familia $\mathcal{K}(S) = \{\mathcal{K}(X_\alpha), \mathcal{K}(f_\alpha^\beta), \Lambda\}$ es un sistema inverso y el espacio $\varprojlim \mathcal{K}(S)$ es homeomorfo al hiperespacio $\mathcal{K}\left(\varprojlim S\right)$.

Demostración. Claramente $\mathcal{K}(f_\alpha^\alpha)$ es la función identidad en $\mathcal{K}(X_\alpha)$ y $\mathcal{K}(f_\alpha^\gamma) = \mathcal{K}(f_\alpha^\beta) \circ \mathcal{K}(f_\beta^\gamma)$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Entonces $\mathcal{K}(S)$ es un sistema inverso. Sea g_α la proyección de $\varprojlim \mathcal{K}(S)$ en $\mathcal{K}(X_\alpha)$.

Las funciones $\mathcal{K}(f_\alpha^\Lambda) : \mathcal{K}\left(\varprojlim S\right) \to \mathcal{K}(X_\alpha)$ son tales que $\mathcal{K}(f_\alpha^\Lambda) = \mathcal{K}(f_\alpha^\beta) \circ \mathcal{K}(f_\beta^\Lambda)$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$, lo cual quiere decir que la familia $\mathfrak{h} = \left\{\mathcal{K}(f_\alpha^\Lambda) : \alpha \in \Lambda\right\}$ es una función de $\mathcal{K}\left(\varprojlim S\right)$ en $\mathcal{K}(S)$. Sea $h : \mathcal{K}\left(\varprojlim S\right) \to \varprojlim \mathcal{K}(S)$ la función inducida por $\mathfrak{h}$ ($\mathcal{K}(f_\alpha^\Lambda) = g_\alpha \circ h$).

Probaremos que $\left\{\mathcal{K}\left(\varprojlim S\right), \mathfrak{h}\right\}$ tiene la propiedad $(*)$ de 2.1.8.

Sean Z un espacio y $\mathfrak{q} = \{q_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una función de Z en $\mathcal{K}(S)$. Para $z \in Z$, la familia $S(z) = \left\{q_\alpha(z), f_\alpha^\beta \mid q_\beta(z), \Lambda\right\}$ es un sistema inverso de espacios compactos T_2 no vacíos y con funciones de ligadura suprayectivas. Por 2.2.9, el espacio $\varprojlim S(z)$ es compacto y no es vacío. Observemos que el espacio $\varprojlim S(z)$ está contenido en $X_\Lambda = \varprojlim S$. Definamos $q : Z \to \mathcal{K}(X_\Lambda)$ por $q(z) = \varprojlim S(z)$.

Por 2.2.14, deducimos que $q_\alpha = \mathcal{K}(f_\alpha^\Lambda) \circ q$ para cada $\alpha \in \Lambda$.

Veamos que la función q es continua. De la demostración de 1.2.3, sabemos que:

$$\mathcal{K}(f_\alpha^\Lambda)^{-1}\left[\langle U_\alpha\rangle \cap \mathcal{K}(X_\alpha)\right] = \langle (f_\alpha^\Lambda)^{-1}[U_\alpha]\rangle \cap \mathcal{K}(X_\Lambda)$$

y que:

$$\mathcal{K}(f_\alpha^\Lambda)^{-1}\left[\langle X_\alpha, U_\alpha\rangle \cap \mathcal{K}(X_\alpha)\right] = \langle X_\Lambda, (f_\alpha^\Lambda)^{-1}[U_\alpha]\rangle \cap \mathcal{K}(X_\Lambda).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} q_\alpha^{-1}\left[\langle U_\alpha\rangle \cap \mathcal{K}(X_\alpha)\right] &= (\mathcal{K}(f_\alpha^\Lambda) \circ q)^{-1}\left[\langle U_\alpha\rangle \cap \mathcal{K}(X_\alpha)\right] \\ &= q^{-1}[\mathcal{K}(f_\alpha^\Lambda)^{-1}\left[\langle U_\alpha\rangle \cap \mathcal{K}(X_\alpha)\right]] \\ &= q^{-1}[\langle (f_\alpha^\Lambda)^{-1}[U_\alpha]\rangle \cap \mathcal{K}(X_\Lambda)] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} q_\alpha^{-1}\left[\langle X_\alpha, U_\alpha\rangle \cap \mathcal{K}(X_\alpha)\right] &= (\mathcal{K}(f_\alpha^\Lambda) \circ q)^{-1}\left[\langle X_\alpha, U_\alpha\rangle \cap \mathcal{K}(X_\alpha)\right] \\ &= q^{-1}[\mathcal{K}(f_\alpha^\Lambda)^{-1}\left[\langle X_\alpha, U_\alpha\rangle \cap \mathcal{K}(X_\alpha)\right]] \\ &= q^{-1}[\langle X_\Lambda, (f_\alpha^\Lambda)^{-1}[U_\alpha]\rangle \cap \mathcal{K}(X_\Lambda)]. \end{aligned}$$

Por 1.2.1 y las igualdades anteriores, tenemos que q es continua.

Si $r : Z \to \mathcal{K}(X_\Lambda)$ es una función continua tal que $q_\alpha = \mathcal{K}(f_\alpha^\Lambda) \circ r$ para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces:

$$\begin{aligned} r(z) &= \varprojlim \left\{f_\alpha^\Lambda[r(z)], f_\alpha^\beta\,|_{f_\beta^\Lambda[r(z)]}, \Lambda\right\} = \varprojlim \left\{\mathcal{K}(f_\alpha^\Lambda)(r(z)), f_\alpha^\beta\,|_{\mathcal{K}(f_\beta^\Lambda)(r(z))}, \Lambda\right\} \\ &= \varprojlim \left\{\mathcal{K}(f_\alpha^\Lambda) \circ r(z), f_\alpha^\beta\,|_{\mathcal{K}(f_\beta^\Lambda)\circ r(z)}, \Lambda\right\} = \varprojlim \left\{q_\alpha(z), f_\alpha^\beta\,|_{q_\beta(z)}, \Lambda\right\} \\ &= \varprojlim S(z) = q(z). \end{aligned}$$

Entonces, por 2.1.8, la función h es un homeomorfismo. ■

Tenemos resultados similares a 5.1.1 para $\mathcal{C}_n(X_\Lambda)$ y $\mathcal{F}_n(X_\Lambda)$.

5.1.2 Teorema. Si $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso de espacios T_2, entonces $\mathcal{C}_n(S) = \left\{\mathcal{C}_n(X_\alpha), \mathcal{C}_n(f_\alpha^\beta), \Lambda\right\}$ y $\mathcal{F}_n(S) = \left\{\mathcal{F}_n(X_\alpha), \mathcal{F}_n(f_\alpha^\beta), \Lambda\right\}$ son sistemas inversos, el espacio $\underleftarrow{\lim}\mathcal{C}_n(S)$ es homeomorfo al hiperespacio $\mathcal{C}_n\left(\underleftarrow{\lim}S\right)$ y el espacio $\underleftarrow{\lim}\mathcal{F}_n(S)$ es homeomorfo al hiperespacio $\mathcal{F}_n\left(\underleftarrow{\lim}S\right)$.

Demostración. Claramente, $\mathcal{C}_n(S)$ y $\mathcal{F}_n(S)$ son sistemas inversos.

Observemos que el homeomorfismo h, del teorema anterior, está definido por $h(C) = \left(\mathcal{K}(f_\alpha^\Lambda)(C)\right)_{\alpha\in\Lambda} = \left(f_\alpha^\Lambda[C]\right)_{\alpha\in\Lambda}$.

Veamos que:

$$h\left[\mathcal{C}_n\left(\underleftarrow{\lim}S\right)\right] = \underleftarrow{\lim}\mathcal{C}_n(S).$$

Si $(D_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \underleftarrow{\lim}\mathcal{C}_n(S)$, tenemos que cada D_α tiene a lo más n componentes y $f_\alpha^\beta[D_\beta] = \mathcal{C}_n(f_\alpha^\beta)(D_\beta) = D_\alpha$. Entonces, por 2.3.6, el espacio $C = \underleftarrow{\lim}\left\{D_\alpha, f_\alpha^\beta\,|_{D_\beta}, \Lambda\right\}$ tiene a lo más n componentes y, por 2.2.14, $f_\alpha^\Lambda[C] = D_\alpha$. Por tanto, $C \in \mathcal{C}_n\left(\underleftarrow{\lim}S\right)$ y $h(C) = \left(f_\alpha^\Lambda[C]\right)_{\alpha\in\Lambda} = (D_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$.

Para probar la otra contención, observemos que si $C \in \mathcal{C}_n\left(\underleftarrow{\lim}S\right)$, entonces cada $f_\alpha^\Lambda[C]$ tiene a lo más n componentes, $\mathcal{C}_n(f_\alpha^\beta)(f_\beta^\Lambda[C]) = f_\alpha^\beta[f_\beta^\Lambda[C]] = f_\alpha^\Lambda[C]$ y $h(C) = \left(f_\alpha^\Lambda[C]\right)_{\alpha\in\Lambda}$. Por tanto, $h(C) \in \underleftarrow{\lim}\mathcal{C}_n(S)$.

Del mismo modo, se obtiene la siguiente igualdad:

$$h\left[\mathcal{F}_n\left(\underleftarrow{\lim}S\right)\right] = \underleftarrow{\lim}\mathcal{F}_n(S).$$

■

Como una consecuencia inmediata a 5.1.1, tenemos el siguiente:

5.1.3 Corolario. Si $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso de espacios compactos T_2, entonces $2^S = \{2^{X_\alpha}, 2^{f_\alpha^\beta}, \Lambda\}$ es un sistema inverso y $\underleftarrow{\lim}2^S$ es homeomorfo a $2^{\underleftarrow{\lim}S}$.

5.2. Unicidad de hiperespacios 2^X y $\mathcal{C}_n(X)$

En [Na2], el profesor Sam Nadler Jr. probó que los continuos métricos que son hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio $\mathcal{C}(X)$ único, y Sergio Macías probó que estos continuos tienen hiperespacios 2^X y $\mathcal{C}_n(X)$ únicos (vea [M1, pág. 416] y [M2, 6.1], respectivamente). Más tarde, I. Lončar probó que los continuos periféricamente metrizables (vea 5.2.16) hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio $\mathcal{C}(X)$ único (vea [Lo, THEOREM 2.4]).

En esta sección probamos, usando las técnicas de I. Lončar, que los continuos periféricamente metrizables que son hereditariamente indescomponibles también tienen hiperespacios 2^X y $\mathcal{C}_n(X)$ únicos.

5.2.1 Definición. Un conjunto dirigido Λ es **σ-completo** si para cada sucesión $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ en Λ existe $\sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \in \Lambda$.

Sean $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso y $\Sigma \subseteq \Lambda$ una **cadena conjuntista** (para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Sigma$ se tiene que $\alpha \leq \beta$ o que $\beta \leq \alpha$) con $\gamma = \sup\Sigma \in \Lambda$. Observemos que la familia $\{f_\alpha^\gamma : \alpha \in \Sigma\}$ es una función de X_γ en $S' = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Sigma\}$ (vea Figura 5.1).

$$
\begin{tikzcd}
 & X_\gamma \arrow[dl, "f_\alpha^\gamma"'] \arrow[dr, "f_\beta^\gamma"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
X_\alpha & & X_\beta \arrow[ll, "f_\alpha^\beta"]
\end{tikzcd}
$$

Figura 5.1:

5.2.2 Definición. Un sistema inverso $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es **continuo** si para cada cadena conjuntista $\Sigma \subseteq \Lambda$, con $\gamma = \sup\Sigma \in \Lambda$, se tiene que la función inducida por $\{f_\alpha^\gamma : \alpha \in \Sigma\}$ es un homeomorfismo.

5.2.3 Teorema. Sea $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso continuo de espacios compactos T_2. Si A es un subconjunto cerrado de X_Λ, entonces el sistema inverso $\{f_\alpha^\Lambda[A], f_\alpha^\beta\,|_{f_\beta^\Lambda[A]}, \Lambda\}$ es continuo.

Demostración. Sean Σ una cadena conjuntista en Λ, con $\gamma = \sup\Sigma \in \Lambda$, y $h_\gamma : X_\gamma \to \varprojlim\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Sigma\}$ la función inducida por $\{f_\alpha^\gamma : \alpha \in \Sigma\}$ ($f_\alpha^\gamma = f_\alpha^\Sigma \circ h_\gamma$). Como S es un sistema inverso continuo, tenemos que h_γ es un homeomorfismo.

Por 2.1.19, tenemos que

$$\begin{aligned} h_\gamma\left[f_\gamma^\Lambda[A]\right] &= \varprojlim\left\{f_\alpha^\Sigma\left[h_\gamma\left[f_\gamma^\Lambda[A]\right]\right], f_\alpha^\beta\mid_{f_\beta^\Sigma\left[h_\gamma\left[f_\gamma^\Lambda[A]\right]\right]}, \Sigma\right\} \\ &= \varprojlim\left\{f_\alpha^\gamma\left[f_\gamma^\Lambda[A]\right], f_\alpha^\beta\mid_{f_\beta^\gamma\left[f_\gamma^\Lambda[A]\right]}, \Sigma\right\} \\ &= \varprojlim\left\{f_\alpha^\Lambda[A], f_\alpha^\beta\mid_{f_\beta^\Lambda[A]}, \Sigma\right\}. \end{aligned}$$

Como el homeomorfismo $h_\gamma\mid_{f_\gamma^\Lambda[A]}: f_\gamma^\Lambda[A] \to \varprojlim\left\{f_\alpha^\Lambda[A], f_\alpha^\beta\mid_{f_\beta^\Lambda[A]}, \Sigma\right\}$ satisface que $f_\alpha^\gamma\mid_{f_\gamma^\Lambda[A]} = f_\alpha^\Sigma \circ h_\gamma\mid_{f_\gamma^\Lambda[A]}$ para cada $\alpha \in \Sigma$, por 2.1.6, deducimos que $h_\gamma\mid_{f_\gamma^\Lambda[A]}$ es la función inducida por $\{f_\alpha^\gamma\mid_{f_\gamma^\Lambda[A]}: \alpha \in \Sigma\}$. Por tanto, el sistema inverso $\{f_\alpha^\Lambda[A], f_\alpha^\beta\mid_{f_\beta^\Lambda[A]}, \Lambda\}$ es continuo. ■

5.2.4 Teorema. Si $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso continuo de espacios T_2, entonces $\mathcal{K}(S) = \{\mathcal{K}(X_\alpha), \mathcal{K}(f_\alpha^\beta), \Lambda\}$, $\mathcal{C}_n(S) = \{\mathcal{C}_n(X_\alpha), \mathcal{C}_n(f_\alpha^\beta), \Lambda\}$ y $\mathcal{F}_n(S) = \{\mathcal{F}_n(X_\alpha), \mathcal{F}_n(f_\alpha^\beta), \Lambda\}$ son sistemas inversos continuos.

Demostración. Probaremos el teorema para $\mathcal{K}(S)$. Sean Σ una cadena conjuntista en Λ, con $\gamma = \sup\Sigma \in \Lambda$, y $h_\gamma : X_\gamma \to \varprojlim\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Sigma\}$ función inducida por $\{f_\alpha^\gamma : \alpha \in \Sigma\}$ ($f_\alpha^\gamma = f_\alpha^\Sigma \circ h_\gamma$).

Como S es un sistema inverso continuo, tenemos que h_γ es un homeomorfismo y, como $f_\alpha^\gamma = f_\alpha^\Sigma \circ h_\gamma$, se tiene que $\mathcal{K}(f_\alpha^\gamma) = \mathcal{K}(f_\alpha^\Sigma) \circ \mathcal{K}(h_\gamma)$.

Denotemos por q_α^Σ a la proyección de $\varprojlim\{\mathcal{K}(X_\alpha), \mathcal{K}(f_\alpha^\beta), \Sigma\}$ en $\mathcal{K}(X_\alpha)$.

De la demostración de 5.1.1, sabemos que existe un homeomorfismo $h : \mathcal{K}\left(\varprojlim\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Sigma\}\right) \to \varprojlim\{\mathcal{K}(X_\alpha), \mathcal{K}(f_\alpha^\beta), \Sigma\}$ tal que $\mathcal{K}(f_\alpha^\Sigma) = q_\alpha^\Sigma \circ h$. Entonces $\mathcal{K}(f_\alpha^\gamma) = \mathcal{K}(f_\alpha^\Sigma) \circ \mathcal{K}(h_\gamma) = q_\alpha^\Sigma \circ h \circ \mathcal{K}(h_\gamma)$.

Sea $g : \mathcal{K}(X_\gamma) \to \varprojlim\{\mathcal{K}(X_\alpha), \mathcal{K}(f_\alpha^\beta), \Sigma\}$ la función inducida por $\{\mathcal{K}(f_\alpha^\gamma) : \alpha \in \Sigma\}$. La función g es la única con la propiedad de que $\mathcal{K}(f_\alpha^\gamma) = q_\alpha^\Sigma \circ g$. Como la función $h \circ \mathcal{K}(h_\gamma)$ tiene dicha propiedad, deducimos que $g = h \circ \mathcal{K}(h_\gamma)$. Por tanto, la función inducida por $\{\mathcal{K}(f_\alpha^\gamma) : \alpha \in \Sigma\}$ es un homeomorfismo y, en consecuencia, $\mathcal{K}(S)$ es un sistema inverso continuo.

Para probar que $\mathcal{C}_n(S)$ y $\mathcal{F}_n(S)$ son sistemas inversos continuos, usamos la demostración anterior cambiando $\mathcal{K}$ por $\mathcal{C}_n$ y $\mathcal{F}_n$, respectivamente, y usamos

5.1.2 en lugar de 5.1.1.

■

5.2.5 Definición. Un sistema inverso $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es **σ-completo** si S es un sistema inverso continuo y Λ es σ-completo.

5.2.6 Teorema. Si $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un sistema inverso σ-completo de espacios T_2, entonces $\mathcal{K}(S) = \{\mathcal{K}(X_\alpha), \mathcal{K}(f_\alpha^\beta), \Lambda\}$, $\mathcal{C}_n(S) = \{\mathcal{C}_n(X_\alpha), \mathcal{C}_n(f_\alpha^\beta), \Lambda\}$ y $\mathcal{F}_n(S) = \{\mathcal{F}_n(X_\alpha), \mathcal{F}_n(f_\alpha^\beta), \Lambda\}$ son sistemas inversos σ-completos.

Demostración. Como Λ es σ-completo, sólo resta probar que $\mathcal{K}(S)$, $\mathcal{C}_n(S)$ y $\mathcal{F}_n(S)$ son sistemas inversos continuos, lo cual se obtiene de 5.2.4. Por tanto, $\mathcal{K}(S)$, $\mathcal{C}_n(S)$ y $\mathcal{F}_n(S)$ son σ-completos.

■

5.2.7 Definición. El **peso** de un espacio X, que denotamos por $\omega(X)$, es el mín$\{\kappa : \mathcal{B}$ es base de X y $\kappa = \mid \mathcal{B} \mid\}$, donde $\mid \mathcal{B} \mid$ denota el cardinal de $\mathcal{B}$.

De [En, 3.12.27. (b)], obtenemos el resultado siguiente:

5.2.8 Teorema. Si X es un espacio T_2, entonces $\omega(\mathcal{K}(X)) = \omega(X)$.

5.2.9 Definición. Un sistema inverso $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un **σ-sistema inverso** si S es σ-completo y $\omega(X_\alpha) \leq \aleph_0$ para cada $\alpha \in \Lambda$.

5.2.10 Teorema. Si $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es un σ-sistema inverso de espacios T_2, entonces $\mathcal{K}(S) = \{\mathcal{K}(X_\alpha), \mathcal{K}(f_\alpha^\beta), \Lambda\}$, $\mathcal{C}_n(S) = \{\mathcal{C}_n(X_\alpha), \mathcal{C}_n(f_\alpha^\beta), \Lambda\}$ y $\mathcal{F}_n(S) = \{\mathcal{F}_n(X_\alpha), \mathcal{F}_n(f_\alpha^\beta), \Lambda\}$ son σ-sistemas inversos.

Demostración. Por 5.2.6, sabemos que $\mathcal{K}(S)$, $\mathcal{C}_n(S)$ y $\mathcal{F}_n(S)$ son σ-completos y, por 5.2.8, que $\omega(\mathcal{K}(X_\alpha)) \leq \aleph_0$. Como $\mathcal{F}_n(X_\alpha) \subseteq \mathcal{C}_n(X_\alpha) \subseteq \mathcal{K}(X_\alpha)$, deducimos que $\omega(\mathcal{F}_n(X_\alpha)), \omega(\mathcal{C}_n(X_\alpha)) \leq \aleph_0$ y, por tanto, $\mathcal{K}(S)$, $\mathcal{C}_n(S)$ y $\mathcal{F}_n(S)$ son σ-sistemas inversos.

■

El siguiente teorema es la versión para σ-sistemas inversos de [Sh, Theorem 15].

5.2.11 Teorema. Sean $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ y $\{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$ dos σ-sistemas inversos de espacios compactos T_2 y funciones de ligadura suprayectivas. Si $l : X_\Lambda \to Y_\Lambda$ es una función continua, entonces existen un subconjunto cofinal Σ en Λ y funciones continuas $l_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ para cada $\alpha \in \Sigma$, tales que $l_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda = g_\alpha^\Lambda \circ l$ y $l_\alpha \circ f_\alpha^\beta = g_\alpha^\beta \circ l_\beta$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$. Además, si $l : X_\Lambda \to Y_\Lambda$ es un homeomorfismo, entonces cada l_α es un homeomorfismo.

5.2.12 Observación. Sean $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ y $\{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$ dos σ-sistemas inversos de espacios compactos T_2 y funciones de ligadura suprayectivas y $l : X_\Lambda \to Y_\Lambda$ una función continua. Sean Σ el subconjunto cofinal en Λ y $l_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ las funciones continuas garantizadas por 5.2.11.

Sean $X_\Sigma = \varprojlim\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Sigma\}$ y $Y_\Sigma = \varprojlim\{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Sigma\}$. Definimos las funciones $g : X_\Lambda \to X_\Sigma$ y $g' : Y_\Lambda \to Y_\Sigma$ por $g((x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}) = (x_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$ y $g'((y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}) = (y_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$. Por 2.1.9, las funciones g y g' son homeomorfismos y $f_\alpha^\Lambda = f_\alpha^\Sigma \circ g$ y $g_\alpha^\Lambda = g_\alpha^\Sigma \circ g'$.

Observemos que la familia $\mathfrak{l} = \{l_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ es una función de $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Sigma\}$ en $\{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Sigma\}$. Sea $l_\Sigma : X_\Sigma \to Y_\Sigma$ la función inducida por $\mathfrak{l}$ ($l_\alpha \circ f_\alpha^\Sigma = g_\alpha^\Sigma \circ l_\Sigma$).

Como $g_\alpha^\Sigma \circ g' \circ l \circ g^{-1} = g_\alpha^\Lambda \circ l \circ g^{-1} = l_\alpha \circ f_\alpha^\Lambda \circ g^{-1} = l_\alpha \circ f_\alpha^\Sigma$, podemos concluir, usando 2.2.2, que $l_\Sigma = g' \circ l \circ g^{-1}$ (vea Figura 5.2).

$$
\begin{tikzcd}
X_\Lambda \arrow[r, "l"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y_\Lambda \arrow[d, "g'"] \\
X_\Sigma \arrow[u, "g^{-1}"] \arrow[r, "l_\Sigma"'] & Y_\Sigma
\end{tikzcd}
$$

Figura 5.2:

5.2.13 Teorema. Sean $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ y $\{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$ dos σ-sistemas inversos de continuos metrizables y funciones de ligadura suprayectivas. Si cada f_α^β es monótona y $\mathcal{C}_n(X_\Lambda)$ es homeomorfo a $\mathcal{C}_n(Y_\Lambda)$, entonces existe un subconjunto cofinal Σ en Λ tal que las funciones g_α^β son monótonas para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Sigma$ ($\alpha \le \beta$).

Demostración. Por 5.1.2, sabemos que el hiperespacio $\mathcal{C}_n(X_\Lambda)$ es homeomorfo a $X = \varprojlim\left\{\mathcal{C}_n(X_\alpha), \mathcal{C}_n(f_\alpha^\beta), \Lambda\right\}$ y que $\mathcal{C}_n(Y_\Lambda)$ es homeomorfo a $Y = \varprojlim\left\{\mathcal{C}_n(Y_\alpha), \mathcal{C}_n(g_\alpha^\beta), \Lambda\right\}$. Sea $l : X \to Y$ un homeomorfismo.

Por 1.2.7, tenemos que los hiperespacios $\mathcal{C}_n(X_\alpha)$ y $\mathcal{C}_n(Y_\alpha)$ son continuos métricos y, por 5.2.10, que $\left\{\mathcal{C}_n(X_\alpha), \mathcal{C}_n(f_\alpha^\beta), \Lambda\right\}$ y $\left\{\mathcal{C}_n(Y_\alpha), \mathcal{C}_n(g_\alpha^\beta), \Lambda\right\}$ son σ-sistemas inversos.

Para $\alpha \in \Lambda$, sean p_α^Λ la proyección de X en $\mathcal{C}_n(X_\alpha)$, q_α^Λ la proyección de Y en $\mathcal{C}_n(Y_\alpha)$ y $Z_\alpha = q_\alpha^\Lambda[Y]$, entonces $Y = \varprojlim \left\{Z_\alpha, \mathcal{C}_n(g_\alpha^\beta)\mid_{Z_\beta}, \Lambda\right\}$, por 2.1.19.

Por 5.2.3, sabemos que el sistema inverso $\left\{Z_\alpha, \mathcal{C}_n(g_\alpha^\beta)\mid_{Z_\beta}, \Lambda\right\}$ es continuo y, por tanto, es un σ-sistema inverso con funciones de ligadura suprayectivas. Además, como cada f_α^β es monótona y suprayectiva, tenemos que cada $\mathcal{C}_n(f_\alpha^\beta)$ es suprayectiva.

Por 5.2.11, existen un subconjunto cofinal Σ en Λ y homeomorfismos $l_\alpha : \mathcal{C}_n(X_\alpha) \to Z_\alpha$ para cada $\alpha \in \Sigma$, tales que $l_\alpha \circ p_\alpha^\Lambda = q_\alpha^\Lambda \circ l$ y $l_\alpha \circ \mathcal{C}_n(f_\alpha^\beta) = \mathcal{C}_n(g_\alpha^\beta)\mid_{Z_\beta} \circ l_\beta$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$.

Por [CIM, Theorem 4], las funciones $\mathcal{C}_n(f_\alpha^\beta)$ son monótonas, entonces las funciones $\mathcal{C}_n(g_\alpha^\beta)\mid_{Z_\beta} = l_\alpha \circ \mathcal{C}_n(f_\alpha^\beta) \circ l_\beta^{-1}$, para $\alpha, \beta \in \Sigma$, también lo son.

Como las funciones g_α^β son suprayectivas, por 2.2.14, obtenemos que $\mathcal{F}_1(Y_\alpha) \subseteq Z_\alpha$. Entonces, por [IN, 15.9 (2)], el conjunto $\bigcup(\mathcal{C}_n(g_\alpha^\beta)\mid_{Z_\beta})^{-1}(\{y\})$ es conexo para cualesquiera $\alpha \leq \beta$ y $y \in Y_\alpha$.

No es difícil ver que $(g_\alpha^\beta)^{-1}(y) = \bigcup(\mathcal{C}_n(g_\alpha^\beta)\mid_{Z_\beta})^{-1}(\{y\})$ y, por tanto, g_α^β es monótona para cualesquiera $\alpha \leq \beta$.

■

5.2.14 Teorema. Sea X un espacio compacto T_2 con $\omega(X) \geq \aleph_1$. Entonces existe un σ-sistema inverso $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ tal que X es homeomorfo a X_Λ.

Demostración. Sea Λ la familia de subconjuntos numerables de $\omega(X)$. En Λ, definimos la relación $\alpha \leq \beta$ si $\alpha \subseteq \beta$. Notemos que $(\Lambda, \leq)$ es un conjunto dirigido σ-completo. Por 2.1.16, sabemos que $I^{\omega(X)}$ es homeomorfo al límite inverso del sistema inverso $\{I^\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$, donde g_α^β es la proyección de I^β sobre I^α. De la prueba de 2.1.16, deducimos que el sistema inverso $\{I^\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$ es continuo y, por tanto, un σ-sistema inverso.

Además, por [En, 2.3.23], X se puede encajar en $I^{\omega(X)}$, entonces podemos suponer que $X \subseteq I^{\omega(X)}$. Por 5.2.3, sabemos que $\left\{g_\alpha^\Lambda[X], g_\alpha^\beta\mid_{g_\beta^\Lambda[X]}, \Lambda\right\}$ es un σ-sistema inverso y, por 2.1.19, que $X = \varprojlim \left\{g_\alpha^\Lambda[X], g_\alpha^\beta\mid_{g_\beta^\Lambda[X]}, \Lambda\right\}$, con lo cual se termina la demostración.

■

5.2.15 Observación. Notemos que, en el teorema anterior, el conjunto dirigido Λ sólo depende de $\omega(X)$ y los espacios X_α son subconjuntos de **cubos de Hilbert** (espacios homeomorfos a $\prod\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde cada $I_n = I$). En particular, si dos espacios compactos T_2 tienen el mismo peso, entonces los σ-sistemas inversos, garantizados por 5.2.14, se pueden elegir de modo que los conjuntos de índices coincidan. Notemos que los espacios X_α son compactos y métricos.

5.2.16 Definición. Un espacio X es **periféricamente metrizable** si tiene una base $\mathcal{B}$ tal que la frontera de cada elemento de $\mathcal{B}$ es metrizable.

5.2.17 Teorema. [Lo, THEOREM 3.7] Sea $S = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ un sistema inverso de espacios compactos T_2 y funciones de ligadura suprayectivas. Entonces:

(1) Existe un sistema inverso $M(S) = \{M_\alpha, m_\alpha^\beta, \Lambda\}$ de espacios compactos T_2 y funciones de ligadura monótonas y suprayectivas tal que $\varprojlim S$ es homeomorfo a $\varprojlim M(S)$.

(2) Si S es σ-completo, entonces $M(S)$ es σ-completo.

(3) Si cada X_α es metrizable y $\varprojlim S$ es localmente conexo o un continuo periféricamente metrizable, entonces cada M_α es metrizable.

5.2.18 Definición. Sean X continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $\Gamma_X \in \{2^X, \mathcal{C}_n(X)\}$. Decimos que X tiene **hiperespacio Γ_X único** si satisface:

- Si Y es un continuo y Γ_Y es homeomorfo a Γ_X, entonces Y es homeomorfo a X.

En la definición anterior, el hiperespacio $\Gamma_Y = 2^Y$ si $\Gamma_X = 2^X$ y $\Gamma_Y = \mathcal{C}_n(Y)$ si $\Gamma_X = \mathcal{C}_n(X)$. Además, si $f : X \to Y$ es una función continua entre espacios T_2, denotamos por Γ_f a la función inducida entre los hiperespacios Γ_X y Γ_Y.

Como consecuencia inmediata de [Na2, (0.60)] y [Na2, (1.61)] obtenemos:

5.2.19 Teorema. Los continuos métricos que son hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio $\mathcal{C}(X)$ único en la clase de los continuos metrizables.

Los siguientes dos teoremas nos dicen que los continuos métricos que son hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio Γ_X único en la clase de los continuos metrizables.

5.2.20 Teorema. [M1, pág. 416] Sean X un continuo métrico hereditariamente indescomponible y Y un continuo métrico tal que 2^Y es homeomorfo a 2^X. Entonces X es homeomorfo a Y.

5.2.21 Teorema. [M2, 6.1] Sean $n \in \mathbb{N}$ y X un continuo métrico hereditariamente indescomponible. Si Y es un continuo métrico tal que $\mathcal{C}_n(Y)$ es homeomorfo a $\mathcal{C}_n(X)$, entonces X y Y son homeomorfos.

5.2.22 Observación. De las pruebas de [Na2, (0.60)], [M2, 6.1] y [M1, pág. 416] se tiene, además, que: si X es un continuo métrico hereditariamente indescomponible, Y es un continuo métrico y $f : \Gamma_X \to \Gamma_Y$ es un homeomorfismo, entonces $f[\mathcal{F}_1(X)] = \mathcal{F}_1(Y)$.

El teorema siguiente nos dice que los continuos periféricamente metrizables que son hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio Γ_X único.

5.2.23 Teorema. Sean X un continuo periféricamente metrizable hereditariamente indescomponible y Y un continuo. Si $\Gamma_X \in \{2^X, \mathcal{C}_n(X)\}$ es homeomorfo a Γ_Y, entonces X y Y son homeomorfos. Además, si $f : \Gamma_X \to \Gamma_Y$ es un homeomorfismo, entonces $f[\mathcal{F}_1(X)] = \mathcal{F}_1(Y)$.

Demostración. Supongamos que Γ_X es homeomorfo a Γ_Y y sea $f : \Gamma_X \to \Gamma_Y$ un homeomorfismo. Como $\mathcal{F}_1(X) \subseteq \Gamma_X \subseteq \mathcal{K}(X) = 2^X$, tenemos, por 5.2.8, que $\omega(\Gamma_X) = \omega(X)$. De manera análoga, se tiene que $\omega(\Gamma_Y) = \omega(Y)$ y, por tanto, $\omega(Y) = \omega(X)$.

Por 5.2.14 y la observación 5.2.15, existen σ-sistemas inversos $\{X_\alpha, f_\alpha^\beta, \Lambda\}$ y $\{Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Lambda\}$ de continuos metricos tales que X es homeomorfo a X_Λ y Y es homeomorfo a Y_Λ.

Si $g : X \to X_\Lambda$ es un homeomorfismo, entonces el homeomorfismo $\Gamma_g : \Gamma_X \to \Gamma_{X_\Lambda}$ es tal que $\Gamma_g[\mathcal{F}_1(X)] = \mathcal{F}_1(X_\Lambda)$. Por tanto, podemos suponer que $X = X_\Lambda$ y $Y = Y_\Lambda$.

Por 2.1.19, podemos suponer que las funciones f_α^β y g_α^β son suprayectivas. Como cada X_α es métrico y X_Λ es periféricamente metrizable, por 5.2.17, podemos suponer que las funciones f_α^β son monótonas. Por 2.2.14, las proyecciones f_α^Λ son suprayectivas y, por 2.3.12, son monótonas, entonces los continuos métricos X_α son hereditariamente indescomponibles.

Si $\Gamma_X = 2^X$, las funciones $\Gamma_{f_\alpha^\beta}$ y $\Gamma_{g_\alpha^\beta}$ son suprayectivas.

Si $\Gamma_X = \mathcal{C}_n(X)$, por 5.2.13, podemos suponer que las funciones g_α^β son monótonas. Entonces, por 2.3.13, obtenemos que las funciones $\Gamma_{f_\alpha^\beta}$ y $\Gamma_{g_\alpha^\beta}$ son suprayectivas.

En cualquier caso, los sistemas inversos $\left\{\Gamma_{X_\alpha}, \Gamma_{f_\alpha^\beta}, \Lambda\right\}$ y $\left\{\Gamma_{Y_\alpha}, \Gamma_{g_\alpha^\beta}, \Lambda\right\}$ tienen funciones de ligadura suprayectivas.

Por 1.2.7 y 5.2.10, tenemos que $\left\{\Gamma_{X_\alpha}, \Gamma_{f_\alpha^\beta}, \Lambda\right\}$ y $\left\{\Gamma_{Y_\alpha}, \Gamma_{g_\alpha^\beta}, \Lambda\right\}$ son σ-sistemas inversos de continuos métricos.

De las demostraciones de 5.1.1 y 5.1.2, sabemos que las funciones $h : \Gamma_X \to \varprojlim \left\{\Gamma_{X_\alpha}, \Gamma_{f_\alpha^\beta}, \Lambda\right\}$ y $h' : \Gamma_Y \to \varprojlim \left\{\Gamma_{Y_\alpha}, \Gamma_{g_\alpha^\beta}, \Lambda\right\}$ definidas por $h(C) = \left(f_\alpha^\Lambda[C]\right)_{\alpha\in\Lambda}$ y $h'(C) = \left(g_\alpha^\Lambda[C]\right)_{\alpha\in\Lambda}$ son homeomorfismos.

Sea $l = h' \circ f \circ h^{-1} : \varprojlim \left\{\Gamma_{X_\alpha}, \Gamma_{f_\alpha^\beta}, \Lambda\right\} \to \varprojlim \left\{\Gamma_{Y_\alpha}, \Gamma_{g_\alpha^\beta}, \Lambda\right\}$ (vea Figura 5.3).

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \Gamma_Y \arrow[d, "h'"] \\
\varprojlim \left\{\Gamma_{X_\alpha}, \Gamma_{f_\alpha^\beta}, \Lambda\right\} \arrow[u, "h^{-1}"] \arrow[r, "l"'] & \varprojlim \left\{\Gamma_{Y_\alpha}, \Gamma_{g_\alpha^\beta}, \Lambda\right\}
\end{tikzcd}$$

Figura 5.3:

Entonces, por 5.2.11, existen un subconjunto cofinal Σ en Λ y homeomorfismos $l_\alpha : \Gamma_{X_\alpha} \to \Gamma_{Y_\alpha}$ para cada $\alpha \in \Sigma$, tales que $l_\alpha \circ p_\alpha^\Lambda = q_\alpha^\Lambda \circ l$ y $l_\alpha \circ \Gamma_{f_\alpha^\beta} = \Gamma_{g_\alpha^\beta} \circ l_\beta$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta$, donde $p_\alpha^\Lambda : \varprojlim \left\{\Gamma_{X_\alpha}, \Gamma_{f_\alpha^\beta}, \Lambda\right\} \to \Gamma_{X_\alpha}$ y $q_\alpha^\Lambda : \varprojlim \left\{\Gamma_{Y_\alpha}, \Gamma_{g_\alpha^\beta}, \Lambda\right\} \to \Gamma_{Y_\alpha}$ son las proyecciones. Por 5.2.12, podemos suponer que $\Sigma = \Lambda$.

Por la Observación 5.2.22, tenemos que X_α y Y_α son homeomorfos y que $l_\alpha[\mathcal{F}_1(X_\alpha)] = \mathcal{F}_1(Y_\alpha)$.

Los homeomorfismos $l_\alpha |_{\mathcal{F}_1(X_\alpha)}: \mathcal{F}_1(X_\alpha) \to \mathcal{F}_1(Y_\alpha)$ inducen un homeomorfismo $l' : \varprojlim \left\{\mathcal{F}_1(X_\alpha), \mathcal{F}_1(f_\alpha^\beta), \Lambda\right\} \to \varprojlim \left\{\mathcal{F}_1(Y_\alpha), \mathcal{F}_1(g_\alpha^\beta), \Lambda\right\}$ tal que

$l\,|_{\varprojlim\{\mathcal{F}_1(X_\alpha),\mathcal{F}_1(f_\alpha^\beta),\Lambda\}} = l'$. De aquí, obtenemos que:

$$\begin{aligned} f[\mathcal{F}_1(X_\Lambda)] &= (h')^{-1}\circ h'\circ f\circ h^{-1}[\varprojlim\left\{\mathcal{F}_1(X_\alpha),\mathcal{F}_1(f_\alpha^\beta),\Lambda\right\}] \\ &= (h')^{-1}\circ l[\varprojlim\left\{\mathcal{F}_1(X_\alpha),\mathcal{F}_1(f_\alpha^\beta),\Lambda\right\}] \\ &= (h')^{-1}[\varprojlim\left\{\mathcal{F}_1(Y_\alpha),\mathcal{F}_1(g_\alpha^\beta),\Lambda\right\}] \\ &= \mathcal{F}_1(Y_\Lambda). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{F}_1(X_\Lambda)$ y X_Λ son homeomorfos, al igual que $\mathcal{F}_1(Y_\Lambda)$ y Y_Λ, concluimos que X y Y son homeomorfos.

■

5.3. Sucesiones inversas de abanicos

Los resultados principales de esta sección son los Teoremas en 5.3.16 y en 5.3.22. El primero de éstos es una extensión del teorema principal de [Ma], donde M. M. Marsh prueba que, bajo ciertas condiciones, el límite inverso de una sucesión inversa $\{A, f_n\}$ de abanicos tiene la propiedad del punto fijo. En 5.3.22, damos una condición para que el límite inverso de una sucesión inversa de n-odos con funciones de ligadura monótonas y suprayectivas sea un n-odo.

5.3.1 Definición. Una **cadena** (resp. **cadena circular**) en un espacio X es una familia finita $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ de subconjuntos abiertos de X tales que $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i-j| \leq 1$ (resp. $|i-j| \leq 1$ o $|i-j| = n-1$).

5.3.2 Definición. Una familia de conjuntos $\mathcal{C}$ es **coherente** si cada subfamilia propia $\mathcal{G}$ de $\mathcal{C}$ contiene un elemento que intersecta a algún elemento de $\mathcal{C} \setminus \mathcal{G}$.

5.3.3 Definición. Una familia finita coherente $\mathcal{C}$ de subconjuntos abiertos de un espacio X es una **cadena arbolada** si ninguna subfamilia de $\mathcal{C}$ es una cadena circular. Un **eslabón de empalme** de una cadena arbolada $\mathcal{C}$ es un elemento de $\mathcal{C}$ que intersecta a por lo menos otros tres elementos de $\mathcal{C}$.

5.3.4 Definición. Los elementos de una cadena, cadena circular o una cadena arbolada en X se llaman **eslabones**. Si X es metrizable y el diámetro de cada eslabón de una cadena $\mathcal{C}$ (resp. cadena circular, cadena arbolada) es menor que ε, entonces $\mathcal{C}$ se llama **ε-cadena** (resp. **ε-cadena circular**, **ε-cadena arbolada**).

5.3.5 Notación. Dado un conjunto A en un espacio métrico, denotamos por $\text{diám}(A)$ al diámetro de A.

5.3.6 Definición. Una función continua y suprayectiva $f : X \to Y$ entre espacios métricos es una **ε-función** si $\text{diám}\left(f^{-1}(y)\right) < \varepsilon$ para cada $y \in Y$.

En 5.3.8, probaremos que si $\{X_n, f_n\}$ es una sucesión inversa de espacios métricos con límite inverso X_∞, entonces las proyecciones $p_m^\infty : X_\infty \to p_m^\infty[X_\infty]$ son $2^{-(m-1)}$-funciones. La métrica con la que trabajaremos en X_∞ es la métrica que definiremos en el siguiente teorema para $\prod \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ restringida a X_∞.

Recordemos que, por [CV, (1.C.10)], podemos suponer que todos los espacios métricos tienen métricas acotadas por 1. Entonces, por [En, 4.2.2], obtenemos el siguiente:

5.3.7 Teorema. Si $\{(X_n, d_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de espacios métricos, entonces $X = \prod \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es metrizable con la métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por:

$$d\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} d_n\left(x_n, y_n\right).$$

5.3.8 Proposición. Si $\{X_n, f_n\}$ es una sucesión inversa de espacios métricos (X_n, d_n), entonces para cada $m \in \mathbb{N}$, la proyección $p_m^\infty : X_\infty \to p_m^\infty[X_\infty]$ es una $2^{-(m-1)}$-función.

Demostración. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $a \in p_m^\infty[X_\infty]$. Si $x, y \in (p_m^\infty)^{-1}(a)$, tenemos que $a = x_m = y_m$. Además, si $n < m$, entonces $x_n = f_{nm}(x_m) = f_{nm}(y_m) = y_n$. De la definición de d obtenemos que:

$$d(x,y) = \sum_{n\geq m+1} \frac{1}{2^n} d_n\left(x_n, y_n\right) \leq \frac{1}{2^m} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m},$$

de modo que $\text{diám}\left((p_m^\infty)^{-1}(a)\right) < 2^{-(m-1)}$ y, por tanto, p_m^∞ es una $2^{-(m-1)}$-función. ∎

En el caso de que el dominio de una ε-función f sea compacto, no sólo las fibras de f (los conjuntos $f^{-1}(y)$) tienen diámetro menor a ε. Como veremos en el lema siguiente, las preimagenes de conjuntos con diámetro menor a una constante positiva también tienen diámetro menor a ε.

5.3.9 Lema. Si $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ es una ε-función entre espacios métricos compactos, entonces existe $\delta > 0$ tal que diám$(f^{-1}[Z]) < \varepsilon$ si diám$(Z) < \delta$, donde $Z \subseteq Y$.

Demostración. Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $Z_n \subseteq Y$ tal que diám$(Z_n) < \frac{1}{n}$ y diám$(f^{-1}[Z_n]) \geq \varepsilon$. Supongamos, además, que X es compacto.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que cada Z_n es cerrado, entonces cada $f^{-1}[Z_n]$ es compacto y, por tanto, existen $x_n, y_n \in f^{-1}[Z_n]$ tales que $d(x_n, y_n) \geq \varepsilon$.

Por la compacidad de X, podemos suponer que $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ convergen, digamos a x y y, respectivamente. Como $d(x_n, y_n) \geq \varepsilon$, tenemos que $d(x, y) \geq \varepsilon$ y, como diám$(Z_n) < \frac{1}{n}$ y $f(x_n), f(y_n) \in Z_n$, podemos asegurar que $f(x) = f(y)$, entonces diám$(f^{-1}(f(x))) \geq \varepsilon$. Por tanto, f no es una ε-función. ∎

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es el siguiente:

5.3.10 Corolario. Si $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ es una ε-función entre espacios métricos compactos, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\rho(f(x), f(y)) \geq \delta$ si $d(x, y) \geq \varepsilon$.

El resultado en 5.3.9 falla si X no es compacto, como veremos en el ejemplo siguiente:

5.3.11 Ejemplo. Sea $X = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x\}$. La función $f : X \to [0, \infty)$ definida por $f((x, x^2)) = x$ es una biyección y, por tanto, es una ε-función para cada $\varepsilon > 0$.

Sean $\varepsilon, \delta > 0$. Veamos que existe un conjunto Z de diámetro menor o igual a δ tal que diám$(f^{-1}[Z]) \geq \varepsilon$.

Sea $x > \frac{\varepsilon}{2\delta}$. El intervalo $Z = [x, x+\delta]$ tiene diámetro igual a δ. Observemos que $u = (x, x^2), v = (x+\delta, (x+\delta)^2) \in f^{-1}[Z]$. Como $\| v - u \| \geq (x+\delta)^2 - x^2 = 2x\delta + \delta^2 \geq 2x\delta > \varepsilon$, concluimos que diám$(f^{-1}[Z]) \geq \varepsilon$.

Otra consecuencia de 5.3.9, es:

5.3.12 Lema. Sean $f : X \to Y$ una ε-función entre espacios métricos compactos y $\delta > 0$ tal que diám$(f^{-1}[Z]) < \varepsilon$ si diám$(Z) < \delta$. Si $\mathcal{C}$ es una δ-cadena (resp. δ-cadena circular, δ-cadena arbolada) en Y, entonces la familia $f^{-1}[\mathcal{C}] = \{f^{-1}[C] : C \in \mathcal{C}\}$ es una ε-cadena (resp. ε-cadena circular, ε-cadena arbolada).

Demostración. Observemos que la existencia de δ está garantizada por 5.3.9 que asegura que cada elemento de $f^{-1}[\mathcal{C}]$ tiene diámetro menor a ε. El hecho de que $f^{-1}[\mathcal{C}]$ sea una cadena, de cualquiera de los tipos mencionados, se obtiene observando que, como f es suprayectiva, $f^{-1}[C] \cap f^{-1}[D] \neq \emptyset$ si y sólo $C \cap D \neq \emptyset$.

■

5.3.13 Definición. Un espacio X tiene la **propiedad del punto fijo** si para cada función continua $f : X \to X$, existe un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$ (x es un **punto fijo** de f).

En 5.3.16, probaremos que el límite inverso de una sucesión inversa de abanicos $\{A, f_n\}$ tiene la propiedad del punto fijo. Lo que haremos ahora es definir el espacio A que usaremos en 5.3.16.

5.3.14 Construcción. Dado un punto $a \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, denotamos por L_a al conjunto

$$\{ta : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Sean B un subconjunto finito de

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \| (x, y) \| = 1 \text{ y } y > 0\}$$

y $\mathfrak{C}$ el conjunto de Cantor contenido en $I \times \{-1\}$.

Para $D \subseteq B$, sean:

$$T^D = \bigcup\{L_a : a \in \mathfrak{C} \cup D\},$$

$$A = T^B$$

y

$$T = T^{\emptyset}.$$

5.3.15 Lema. Sea A como en 5.3.14. Para cada número positivo δ, existe una δ-cadena arbolada $\mathcal{D}$ en A que cubre a A. Además, si $b \in B \cup \mathfrak{C}$, $\mathcal{D}$ se puede elegir de modo que contenga una cadena $\mathcal{D}' = \{D_0, \ldots, D_n\}$ que cubra a L_b y tal que:

(i) D_0 es el único eslabón de empalme de $\mathcal{D}$,

(ii) $(0, 0) \in D_0$,

(iii) $D \cap L_b = \emptyset$ para cada $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'$ y

(iv) Si $b \in B$, entonces $T^{B \setminus \{b\}} \cap D_i = \emptyset$ para cada $i > 0$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{3}{n} < \delta$. Para $k \in \{0, 1, \ldots, n-2, n-1\}$, sean:

$$G_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{k}{n} <\| (x, y) \|< \tfrac{k+2}{n}\right\}$$

y

$$F_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\tfrac{k+2}{n} < y < -\tfrac{k}{n}\right\}.$$

De la construcción del conjunto de Cantor (vea [Na1, 7.5]), existen subintervalos cerrados $I_1, I_2, \ldots, I_m$ de $I \times \{-1\}$, disjuntos a pares y con diámetro menor a $\frac{2}{n}$, tales que $\mathfrak{C} \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_m$. Observemos que cada conjunto $\mathfrak{C} \cap I_l$ es un conjunto abierto y cerrado en $\mathfrak{C}$.

Para $l \in \{1, \ldots, m\}$, sea:

$$T_l = \bigcup \{L_a : a \in \mathfrak{C} \cap I_l\}.$$

Sea $D_0 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \| (x, y) \|< \frac{1}{n}\right\} \cap A$, entonces la familia:

$$\begin{aligned}\mathcal{D} = \{D_0\} &\cup \{G_k \cap L_b : k \in \{0, 1, \ldots, n-2, n-1\} \text{ y } b \in B\}\\ &\cup \{F_k \cap T_l : k \in \{0, 1, \ldots, n-2, n-1\} \text{ y } l \in \{1, \ldots, m\}\}\end{aligned}$$

es una cadena arbolada que tiene a D_0 como su único eslabón de empalme y $(0, 0) \in D_0$. Observemos que los elementos de $\mathcal{D}$ tienen diámetro menor o igual a $\sqrt{\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{n^2}} < \delta$. Por tanto, $\mathcal{D}$ es una δ-cadena arbolada que, claramente, cubre a A.

Si $b \in B$, definimos $D_{k+1} = G_k \cap L_b$ para $k \in \{0, 1, \ldots, n-2, n-1\}$.

Si $b \in I_l$, entonces definimos $D_{k+1} = F_k \cap T_l$ para $k \in \{0, 1, \ldots, n-2, n-1\}$.

Entonces la cadena:

$$\mathcal{D}' = \{D_0, D_1, \ldots, D_n\},$$

junto con $\mathcal{D}$, satisfacen (i), (ii), (iii) y (iv). ■

5.3.16 Teorema. Consideremos los espacios construidos en 5.3.14 y supongamos que $\{A, f_n\}$ es una sucesión inversa con funciones de ligadura suprayectivas que satisfacen:

(1) $f_n((0, 0)) = (0, 0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$,

(2) para cada $c \in \mathfrak{C}$, existe $c' \in \mathfrak{C}$ tal que $f_n[L_c] \subseteq L'_c$ y

(3) para cualquier $b \in B$, se tiene que $f_n[L_b] \subseteq T^{\{b\}}$.

Entonces A_∞ tiene la propiedad del punto fijo.

Demostración. Primero observemos que, por (2):

$$f_n[T] \subseteq T \tag{5.1}$$

y si un punto $x \in A_\infty$ tiene su coordenada $x_k \in L_b \setminus \{(0,0)\}$ para algún $b \in B$, entonces, por (3) y (5.1):

$$x_n \in L_b \setminus \{(0,0)\} \text{ para cada } n \geq k. \tag{5.2}$$

Por (1), el punto $a = ((0,0))_{n \in \mathbb{N}}$ ($a_n = (0,0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$) pertenece a A_∞.

Supongamos que existe una función continua $f : A_\infty \to A_\infty$ tal que $f(x) \neq x$ para cada $x \in A_\infty$, entonces, por la compacidad de A_∞, existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(x, f(x)) \geq \varepsilon$ para cada $x \in A_\infty$. Como $f(a) \neq a$, se tiene que $f_k^\infty(f(a)) \neq (0,0)$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Consideremos el caso en que $f_k^\infty(f(a)) \in L_b \setminus \{(0,0)\}$ para alguna $b \in B$. Por la continuidad de $f_k^\infty \circ f$, existe $\varepsilon' > 0$, con $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$, tal que:

$$\text{si } d(x,a) < \varepsilon', \text{ entonces } f_k^\infty(f(x)) \in L_b \setminus \{(0,0)\}. \tag{5.3}$$

Por 5.3.8, existe $m \geq k$ tal que f_m^∞ es una ε'-función.

Veamos que:

$$f_m^\infty \circ f[(f_m^\infty)^{-1}((0,0))] \subseteq L_b \setminus \{(0,0)\}. \tag{5.4}$$

Sea $x \in (f_m^\infty)^{-1}((0,0))$. Como $x, a \in (f_m^\infty)^{-1}((0,0))$ y f_m^∞ es una ε'-función, tenemos que $d(x,a) < \varepsilon'$. Entonces, por (5.3), $f_k^\infty(f(x)) \in L_b \setminus \{(0,0)\}$ y, por (5.2), se tiene que $f_m^\infty(f(x)) \in L_b \setminus \{(0,0)\}$, con lo cual se tiene la contención deseada.

Por 5.3.9, existe $\delta > 0$ tal que $\text{diám}((f_m^\infty)^{-1}[Z]) < \varepsilon'$ si $\text{diám}(Z) < \delta$. Por 5.3.15, existe una δ-cadena arbolada $\mathcal{D}$ en A que cubre a A y contiene una cadena $\mathcal{D}' = \{D_0, \ldots, D_l\}$ que cubre a L_b y tal que:

(i) D_0 es el único eslabón de empalme de $\mathcal{D}$,

(ii) $(0,0) \in D_0$,

(iii) $D \cap L_b = \emptyset$ para cada $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'$ y

(iv) $T^{B\setminus\{b\}} \cap D_i = \emptyset$ para cada $i > 0$.

Sean $\mathcal{C} = \{(f_m^\infty)^{-1}[D] : D \in \mathcal{D}\}$, $C_i = (f_m^\infty)^{-1}[D_i]$ y $\mathcal{C}' = \{C_0, \ldots, C_l\}$. Por 5.3.12, $\mathcal{C}$ es una ε'-cadena arbolada.

Por (ii) y (5.4), tenemos que $(f_m^\infty)^{-1}((0,0)) \subseteq C_0 \cap (f_m^\infty \circ f)^{-1}[L_b \setminus \{(0,0)\}]$. Llamemos U a este último conjunto. Sean V un abierto en A_∞ tal que $(f_m^\infty)^{-1}((0,0)) \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$, $q \in C_l$ y K la componente de $A_\infty \setminus V$ que contiene a q. Entonces, por [En, 6.1.25], existe $y \in \mathrm{Fr}(V) \cap K$.

Veamos que $K \subseteq \bigcup\{C_i : 0 \leq i \leq l\}$. Sea $x \in K$ y supongamos que $x \notin \bigcup\{C_i : 0 \leq i \leq l\}$. Entonces $x_m \in D$ para algún $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'$. La condición (iii) indica que $x_m \in L_{b'}$ para algún $b' \in B \setminus \{b\}$ y, por (iv), tenemos que $q_m \in L_b$. Entonces $(0,0) \in f_m^\infty[K]$, lo cual contradice que $K \subseteq A_\infty \setminus V \subseteq A_\infty \setminus (f_m^\infty)^{-1}((0,0))$. Por tanto, $K \subseteq \bigcup\{C_i : 0 \leq i \leq l\}$.

Sean:

$$R = \{x \in K : \text{si } x \in C_i \text{ y } f(x) \in C_j \text{ entonces } i \leq j\}$$

y

$$S = \{x \in K : \text{si } x \in C_i \text{ y } f(x) \in C_j \text{ entonces } j \leq i \text{ o } C_j \notin \mathcal{C}'\}.$$

Veamos que $y \in R$. Supongamos que $y \in C_i$ y $f(y) \in C_j$. Como $y \in U$ tenemos que $y \in C_0$ y $f_m^\infty \circ f(y) \in L_b \setminus \{(0,0)\} \subseteq \bigcup\{D_i : 0 \leq i \leq l\}$. Entonces $i \in \{0,1\}$ y $j > 1$ ya que $C_0 \cup C_1$ tiene diámetro menor a ε. Por tanto, $y \in R$. Claramente $q \in S$.

Ahora veamos que R es abierto. Sea $x \in R$ y supongamos que $x \in C_i$. Como $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(x, f(x)) \geq \varepsilon$, entonces $f(x) \in C_j$ con $i + 2 \leq j$. No es difícil ver que el conjunto abierto $C_i \cap f^{-1}[\bigcup\{C_h : j \leq h \leq l\}]$ contiene a x y está contenido en R y, por tanto, R es abierto. De manera análoga, se demuestra que S es abierto.

Claramente $K = R \cup S$ y $R \cap S = \emptyset$ porque $d(x, f(x)) \geq \varepsilon$ para cada $x \in A_\infty$. Pero ésto contradice la conexidad de K.

Como el caso $f_k^\infty(f(a)) \in L_b \setminus \{(0,0)\}$ para alguna $b \in B$ nos llevó a una contradicción, entonces $f_k^\infty(f(a)) \in T \setminus \{(0,0)\}$. Por (1) y el caso anterior, podemos suponer que $f_n^\infty(f(a)) \in T \setminus \{(0,0)\}$ para cada $n \geq k$. Dado $n \geq k$, sea $c_n \in \mathfrak{C}$ tal que $f_n^\infty(f(a)) \in L_{c_n}$. Entonces $f_n[L_{c_{n+1}}] \subseteq L_{c_n}$. Sea $K = \underleftarrow{\mathrm{Lím}}\{L_{c_n}, f_n|_{L_{c_{n+1}}}\}$ y repetimos el argumento del primer caso.

Sean $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ y $m \geq k$ tales que f_m^∞ es una ε'-función. Construimos, como en el primer caso, la δ-cadena arbolada $\mathcal{D}$ y la cadena $\mathcal{D}'$ en A que satisfacen (i), (ii) y (iii). Definimos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ como antes, entonces $K \subseteq \bigcup \mathcal{C}'$.

Sean:

$$R = \{x \in K : \text{si } x \in C_i \text{ y } f(x) \in C_j \text{ entonces } i \leq j\}$$

y

$$S = \{x \in K : \text{si } x \in C_i \text{ y } f(x) \in C_j \text{ entonces } j \leq i \text{ o } C_j \notin \mathcal{C}'\}.$$

Observemos que $a \in R$ y cualquier punto de $C_l \cap K$ pertenece a S. Como en el primer caso, R y S son abiertos, $R \cap S = \emptyset$ y $K = R \cup S$, lo cual contradice la conexidad de K.

La contradicción se obtiene de suponer la existencia de f, de modo que tal función no existe y, por tanto, A_∞ tiene la propiedad del punto fijo. ■

Un n**-odo simple** es cualquier espacio homeomorfo a $\bigcup\{L_a : a \in B\}$, donde B es un subconjunto de S^1 con n puntos. En 5.3.22, probaremos que, bajo ciertas condiciones, el límite inverso de n-odos con funciones de ligadura monótonas es un n-odo, para lo cual usaremos un teorema de M. Brown que se refiere a funciones que son casi homeomorfismo.

5.3.17 Definición. Una función continua $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ entre espacios métricos es un **casi homeomorfismo** si para cada $\varepsilon > 0$ existe un homeomorfismo $f_\varepsilon : X \to Y$ tal que $\rho(f(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$ para cada $x \in X$.

Ejemplos de funciones que son casi homeomorfismo son las funciones monótonas y suprayectivas entre arcos, como se muestra en el siguiente:

5.3.18 Lema. Cada función monótona y suprayectiva entre intervalos es casi homeomorfismo.

Demostración. Sea $f : [a, b] \to [c, d]$ una función monótona y suprayectiva y supongamos que $f(a) = c$. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n}(d-c) < \varepsilon$ y definimos $y_0 = c$, $y_1 = c+\frac{d-c}{n}$,$\ldots$, $y_{n-1} = c+\frac{(n-1)(d-c)}{n}$, $y_n = d$. Sean $x_0 = a$, $x_n = b$ y $x_k \in f^{-1}(y_k)$ para $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Observemos que si $x \in [x_k, x_{k+1}]$, entonces $f(x) \in [y_k, y_{k+1}]$.

Sea $f_\varepsilon : [a, b] \to [c, d]$ definida por

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} y_k & \text{si } x = x_k \\ \text{lineal} & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{5.5}$$

Claramente f_ε es un homeomorfismo y, por la elección de n, tenemos que $d(f(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$ para cada $x \in X$. La demostración es análoga si $f(a) = d$. ■

Como una consecuencia de 5.3.18 y [Br, THEOREM 4] tenemos el siguiente:

5.3.19 Corolario. El límite inverso de arcos con funciones de ligadura monótonas y suprayectivas es un arco.

5.3.20 Lema. [Na1, 8.22] Si Y es un espacio T_2 que no es degenerado y f es una función continua y monótona de I sobre Y, entonces Y es un arco.

5.3.21 Lema. Sea f una función continua y monótona de un continuo hereditariamente unicoherente X en un continuo Y. Si J es un subcontinuo de X, entonces $f\mid_J \colon J \to Y$ es una función monótona.

Demostración. Como $(f\mid_J)^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap J$ y X es hereditariamente unicoherente, tenemos que $(f\mid_J)^{-1}(y)$ es conexo. Por tanto, $f\mid_J$ es monótona. ■

5.3.22 Teorema. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea B_n un subconjunto finito de S^1 con más de dos puntos y $A_n = \bigcup\{L_a : a \in B_n\}$. Si $\{A_n, f_n\}$ es una sucesión inversa con funciones de ligadura monótonas y suprayectivas y $f_n[L_a]$ no es degenerado para ninguna $n \in \mathbb{N}$ ni ninguna $a \in B_{n+1}$, entonces A_∞ es homeomorfo a A_1.

Demostración. Primero mostraremos que $f_n((0,0)) = (0,0)$. Supongamos que $f_n((0,0)) \in L_{a_0} \setminus \{(0,0)\}$ para algún $a_0 \in B_n$ y observemos que $f_n^{-1}(f_n((0,0)))$ es un conjunto conexo que contiene a $(0,0)$. Sean $a_2, a_3 \in B_n \setminus \{a_0\}$ y a_1 un punto en el segmento que une $f_n((0,0))$ con $(0,0)$ distinto de $f_n((0,0))$ y de $(0,0)$. Por 2.3.13, el conjunto $J = f_n^{-1}[L_{a_1} \cup L_{a_2} \cup L_{a_3}]$ es un continuo que claramente no intersecta a $f_n^{-1}(f_n((0,0)))$ y, por tanto, esta contenido en $L_{b_1} \setminus \{(0,0)\}$ para algún $b_1 \in B_{n+1}$. Por 5.3.21, la función $f_n\mid_J \colon J \to L_{a_1} \cup L_{a_2} \cup L_{a_3}$ es monótona, entonces, por 5.3.20, el conjunto $L_{a_1} \cup L_{a_2} \cup L_{a_3}$ es un arco, lo cual es una contradicción. Por tanto, tenemos que $f_n((0,0)) = (0,0)$.

Ahora probaremos que para cada $a \in B_{n+1}$, existe $c_a \in B_n$ tal que:

$$f_n^{-1}[L_{c_a}] = f_n^{-1}((0,0)) \cup L_a.$$

Sea $a \in B_{n+1}$. Como $f_n[L_a]$ no es degenerado, existe $c_a \in B_n$ tal que $f_n[L_a] \cap (L_{c_a} \setminus \{(0,0)\}) \neq \emptyset$. Supongamos que $f_n[L_a] \cap (L_d \setminus \{(0,0)\}) \neq \emptyset$ para alguna $d \in B_n \setminus \{c_a\}$. Sean $x, x' \in L_a$ tales que $f_n(x) \in L_{c_a} \setminus \{(0,0)\}$ y $f_n(x') \in L_d \setminus \{(0,0)\}$. Entonces entre x y x' hay un elemento de $f_n^{-1}((0,0))$. Esto contradice la conexidad de $f_n^{-1}((0,0))$ ya que x o x' lo desconectan. En consecuencia, $f_n[L_a] \subseteq L_{c_a}$ y, por tanto, $f_n^{-1}((0,0)) \cup L_a \subseteq f_n^{-1}[L_{c_a}]$.

Para ver la otra contención, observemos que $f_n^{-1}((0,0))$ es un conjunto conexo que contiene a $(0,0)$ y que no intersecta a $f_n^{-1}[L_{c_a} \setminus \{(0,0)\}]$. Además, por 2.3.13, el conjunto $f_n^{-1}[L_{c_a} \setminus \{(0,0)\}]$ es conexo, entonces $f_n^{-1}[L_{c_a} \setminus \{(0,0)\}] \subseteq L_a \setminus \{(0,0)\}$ ya que $f_n[L_a] \cap (L_{c_a} \setminus \{(0,0)\}) \neq \emptyset$.

Con lo anterior tenemos que $f_n[L_a] = L_{c_a}$, para cada $a \in B_{n+1}$. Además, si a y a' son dos puntos distintos de B_{n+1}, se tiene que c_a y $c_{a'}$ también son distintos. Entonces, por la suprayectividad de f_n, deducimos que B_{n+1} y B_n tienen la misma cantidad de elementos.

Ahora mostraremos que cada f_n es casi homeomorfismo. Sea $\varepsilon > 0$. Por 5.3.21, cada función $f_n |_{L_a}\colon L_a \to f_n[L_a]$ es monótona. De la demostración de 5.3.18, existen homeomorfismos $f_\varepsilon^a : L_a \to f_n[L_a]$ tales que $f_\varepsilon^a((0,0)) = (0,0)$ y $d(f_n(x), f_\varepsilon^a(x)) < \varepsilon$ para cada $x \in L_a$.

Por [En, 2.1.13], la función $f_\varepsilon : A_{n+1} \to A_n$ definida por $f_\varepsilon(x) = f_\varepsilon^a(x)$, si $x \in L_a$, es continua. Además, como f_ε es biyectiva, por [En, 2.1.15], obtenemos que es un homeomorfismo. Claramente, se tiene que $d(f_n(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$ para cada $x \in A_{n+1}$. Por tanto f_n es un casi homeomorfismo.

Entonces, por [Br, THEOREM 4], A_∞ es homeomorfo a A_1. ■

5.4. Puntos extremos en límites inversos de arcos

El resultado principal de esta sección se encuentra en 5.4.7, donde damos una caracterización de los puntos extremos de los continuos tipo arco (límites inversos de sucesiones inversas de arcos $\{I, f_n\}$). Este resultado es una generalización de [BM, Theorem 1.4] a límites inversos arbitrarios de arcos.

5.4.1 Definición. Sean X un espacio y $A, B, K \subseteq X$. Decimos que K **separa a** A **y** B **en** X si $X \setminus K$ no es conexo, $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$, donde U y V son abiertos disjuntos de $X \setminus K$ tales que $X \setminus K = U \cup V$. Si $K = \{p\}$, decimos que p **separa a** A **y** B **en** X en lugar de $\{p\}$ separa a A y B en X.

5.4.2 Definición. Sean $f : [c,d] \to [a,b]$ una función continua y suprayectiva, $p \in [c,d]$ y $\varepsilon > 0$. Decimos que f **está** ε**-torcida con respecto a** p si p no separa a $f^{-1}[[a, a+\varepsilon]]$ y $f^{-1}[[b-\varepsilon, b]]$ en $[c,d]$.

5.4.3 Lema. Sean $p \in [c,d]$ y $\varepsilon > 0$. Si $f : [c,d] \to [a,b]$ no está ε-torcida con respecto a p entonces existe un único subintervalo K de $[c,d]$ tal que:

(i) $p \in K$

(ii) $f[K] = [a, b]$

(iii) $f\mid_K : K \to [a, b]$ no está ε-torcida con respecto a p y

(iv) K es irreducible con respecto a (i), (ii) y (iii).

Demostración. Como p separa a $f^{-1}[[a, a+\varepsilon]]$ y $f^{-1}[[b-\varepsilon, b]]$ en $[c, d]$, sucede que $f^{-1}[[a, a+\varepsilon]] \subseteq [c, p)$ y $f^{-1}[[b-\varepsilon, b]] \subseteq (p, d]$ o que $f^{-1}[[a, a+\varepsilon]] \subseteq (p, d]$ y $f^{-1}[[b-\varepsilon, b]] \subseteq [c, p)$.

Supongamos el primer caso y sean $s = \text{máx} f^{-1}(a)$, $t = \text{mín} f^{-1}(b)$ y $K = [s, t]$. Claramente $p \in K$ y, como $f(s) = a$ y $f(t) = b$, se tiene que $f[K] = [a, b]$. Además, $(f\mid_K)^{-1}[[a, a+\varepsilon]] \subseteq [s, p)$ y $(f\mid_K)^{-1}[[b-\varepsilon, b]] \subseteq (p, t]$, lo cual nos indica que (iii) también se satisface. No es difícil ver que cualquier subconjunto propio de K, por la elección de s y t, no satisface (ii).

La prueba es similar si $f^{-1}[[a, a+\varepsilon]] \subseteq (p, d]$ y $f^{-1}[[b-\varepsilon, b]] \subseteq [c, p)$. ■

5.4.4 Observación. En la prueba del lema anterior tenemos que:

$$f^{-1}[\{a, b\}] \cap (s, t) = \emptyset.$$

5.4.5 Teorema. Sean $G : I' \to J'$ y $H : J' \to L'$ funciones entre intervalos cerrados, $I \subseteq I'$ y $J \subseteq J'$ subintervalos tales que $H \circ G[I] = H[J] = L = [a, b]$, $g = G\mid_I$, $h = H\mid_J$, $p \in I$ tal que $q = g(p) \in J$ y $\varepsilon > 0$. Si $H \circ g : I \to L$ y $h : J \to L$ no están ε-torcidas con respecto a p y q, respectivamente, y $K_0 = [s, t] \subseteq I$ y $K_1 = [u, v] \subseteq J$ son como en el Lema 5.4.3, entonces $g[K_0] = K_1$. Además, existen subintervalos $A_0, B_0 \subseteq K_0$ y $A_1, B_1 \subseteq K_1$ tales que:

(i) $K_0 = A_0 \cup B_0$ y $K_1 = A_1 \cup B_1$,

(ii) $p \in A_0 \cap B_0$ y $q \in A_1 \cap B_1$,

(iii) $A_i \setminus B_i \neq \emptyset$ y $B_i \setminus A_i \neq \emptyset$ y

(iv) $g[A_0] = A_1$ y $g[B_0] = B_1$.

Demostración. Primero veamos que $g[K_0] \subseteq K_1$. Sea $z \in [s,t]$ y supongamos que $g(z) < u < q = g(p)$ (o $g(z) > v > g(p)$). Entonces, por el teorema del valor intermedio, existe $x \in (s,t)$ tal que $g(x) = u$ (o $g(x) = v$). Por tanto, $x \in (H \circ g)^{-1}[\{a,b\}]$ lo cual, por 5.4.4, no puede suceder.

Para ver la otra contención, observemos que $g(s), g(t) \in K_1 \cap h^{-1}[\{a,b\}]$. Por 5.4.4, tenemos que $(g(s) \leq u$ o $v \leq g(s))$ y $(g(t) \leq u$ o $v \leq g(t))$. Como $g(s) = g(t) \in \{u,v\}$ implica que $s,t \in (H \circ g)^{-1}(a)$ o $s,t \in (H \circ g)^{-1}(b)$, lo cual contradice la hipótesis sobre $H \circ g$, concluimos que $g(s) \neq g(t)$ y, por tanto, $K_1 \subseteq g[K_0]$.

Ahora veamos la segunda parte del teorema.

Sean $N, N' \in \{(h\mid_{K_1})^{-1}[[a,a+\varepsilon]], (h\mid_{K_1})^{-1}[[b-\varepsilon,b]]\}$ tales que $N \subseteq [u,q)$ y $N' \subseteq (q,v]$, y $M, M' \in \{(h \circ g\mid_{K_0})^{-1}[[a,a+\varepsilon]], (h \circ g\mid_{K_0})^{-1}[[b-\varepsilon,b]]\}$ tales que $M \subseteq [s,p)$ y $M' \subseteq (p,t]$. Observemos que $g[M \cup M'] \subseteq N \cup N'$.

Sean $m = \text{máx} M$, $m' = \text{mín} M'$, $n = \text{máx} N$ y $n' = \text{mín} N'$. Como $g(m) \in N$ o $g(m) \in N'$, tenemos que $g(m) \leq n$ o $n' \leq g(m)$. Supongamos que $g(m) < n < q = g(p)$. Entonces existe $x \in (m,p)$ tal que $g(x) = n$ y, por tanto, $x \in M$. Como esto contradice la elección de m, tenemos que $g(m) \geq n$. De manera análoga, la desigualdad $n' < g(m)$ no se cumple. Por tanto, $g(m) = n$ o $g(m) = n'$.

Supongamos que $g(m) = n$ y veamos que $g[[m,t]] = [n,v]$.

Sea $x \in (m,t]$ y supongamos que $g(x) < n < g(p)$. Por el teorema del valor intermedio, existe un punto $z \in (m,t) \cap g^{-1}(n)$. Como $h \circ g(z) = h \circ g(m)$, tenemos que $z \in M$, lo cual contradice la elección de m. Por tanto, $g[[m,t]] = [n,v]$. De manera análoga, si $g(m) = n'$, tenemos que $g[[m,t]] = [u,n']$.

Con $A_0 = [s,m']$, $B_0 = [m,t]$, y $A_1 = [u,n']$ y $B_1 = [n,v]$ si $g(m) = n$, o $A_1 = [n,v]$ y $B_1 = [u,n']$ si $g(m) = n'$, se satisface la conclusión del teorema. ■

5.4.6 Definición. Un punto p en un continuo tipo arco X es un **punto extremo de** X si para cualesquiera subcontinuos A y B de X, con $p \in A \cap B$, se tiene que $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

5.4.7 Teorema. Sean $\{I, f_n\}$ una sucesión inversa, $X = \varprojlim\{I, f_n\}$ y $p \in X$. Entonces p es un punto extremo de X si y sólo si para cualesquiera $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y cualquier subintervalo J_n de I tal que $p_n \in \text{int} J_n$, existe $m > n$ tal que para cada subintervalo J_m de I tal que $p_m \in J_m$ y $f_n^m[J_m] = J_n$, se tiene que $f_n^m : J_m \to J_n$ está ε-torcida con respecto a p_m.

Demostración. Si p no es un punto extremo de X, entonces existen subcontinuos A y B de X tales que $p \in A \cap B$, $A \setminus B \neq \emptyset$ y $B \setminus A \neq \emptyset$. Por 2.1.22, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_m^\infty[A] \setminus f_m^\infty[B] \neq \emptyset$ y $f_m^\infty[B] \setminus f_m^\infty[A] \neq \emptyset$ para cada $m \geq n$.

Como $p_m \in f_m^\infty[A] \cap f_m^\infty[B]$ para cada $m \geq n$, cada conjunto $J_m = f_m^\infty[A] \cup f_m^\infty[B]$ es un intervalo, sea $J_m = [a_m, b_m]$ y supongamos que $a_n \in f_n^\infty[A] \setminus f_n^\infty[B]$ y $b_n \in f_n^\infty[B] \setminus f_n^\infty[A]$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $[a_n, a_n+\varepsilon] \cap f_n^\infty[B] = \emptyset$ y $[b_n-\varepsilon, b_n] \cap f_n^\infty[A] = \emptyset$. Entonces $p_n \in \operatorname{int} J_n$, $f_n^m[J_m] = J_n$ para cada $m \geq n$ y $f_n^m : J_m \to J_n$ no está ε-torcida con respecto a p_m puesto que $(f_n^m)^{-1}[[a_n, a_n + \varepsilon]] \subseteq f_m^\infty[A] \setminus f_m^\infty[B]$ y $(f_n^m)^{-1}[[b_n - \varepsilon, b_n]] \subseteq f_m^\infty[B] \setminus f_m^\infty[A]$.

Ahora supongamos que existen $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y un subintervalo J_n de I con $p_n \in \operatorname{int} J_n$, tales que para cualquiera $m > n$ existe un subintervalo J_m de I con $p_m \in J_m$ y $f_n^m[J_m] = J_n$, pero que $f_n^m : J_m \to J_n$ no está ε-torcida con respecto a p_m. Sean $K_m \subseteq J_m$ y $A_m, B_m \subseteq K_m$ como en el Teorema 5.4.5, entonces $f_m[A_{m+1}] = A_m$ y $f_m[B_{m+1}] = B_m$. Sean $A = \varprojlim\{A_m, f_m\}$ y $B = \varprojlim\{B_m, f_m\}$, entonces $p \in A \cap B$ y $A \setminus B \neq \emptyset$ y $B \setminus A \neq \emptyset$ y, por tanto, p no es punto extremo.

■

Bibliografía

[BM] M. Barge, J. Martin, *Endpoints of inverse limit spaces and dynamics*, in: Continua, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 170(1995), Dekker, New York, 165-182.

[Br] M. Brown, *Some applications of an approximation theorem for inverse limits*, Proc. Amer. Math. Soc., 11(1960), 478-483.

[CIM] J. J. Charatonik, A. Illanes and S. Macías, *Induced mappings on the hyperspace* $\mathcal{C}_n(X)$ *of a continuun* X, Houston J. Math. 28(2002), 781-805.

[CV] C. O. Christenson, W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1977.

[En] R. Engelking, *General topology*, Heldermann Verlag, Berlín, 1989.

[IN] A. Illanes and S. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamental and Recents Advances*, Pure and Applied Mathematics, 1999.

[Ku] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. 1, Academic Press, New York, 1966.

[Lo] I. Lončar, *Non-metric rim-metrizable continua and unique hyperspace*, Publications de l´Institut Mathématique, 73(87)(2003), 97-113.

[M1] S. Macías, *Hereditarily indecomposable continua have unique hyperspace* 2^X, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 5:3(1999), 415-418.

[M2] S. Macías, *On the hyperspaces* $C_n(X)$ *of a continuum* X*, II*, Topology Proceedings, 25(2000), spring, 255-276.

[Mh] W. S. Mahavier, *Inverse limits with subsets of* $[0,1] \times [0,1]$, Topology and Its Applications, 141(2004), 225-231.

[Ma] M. M. Marsh, *A fixed point theorem for inverse limits of fans*, Proc. Amer. Math. Soc., 91(1984), 139-142.

[Na1] S. B. Nadler, Jr., *Contiuum Theory An Introduction*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[Na2] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1978.

[Na3] S. B. Nadler, Jr., *Dimension Theory: An Introduction with exercises*, Aportaciones Matemáticas SMM, México, 2002.

[Pu] E. Puzio, *Limits mappings and projections of inverse systems*, Fund. Math., 80(1973), 57-73.

[Sh] E. V. Shchepin, *Functors and uncountable powers of compacta*, Russian Math. Surveys, 36:3(1981), 1-71.

[Wa] W. C. Waterhouse, *An empty inverse limit*, Proc. Amer. Math. Soc., 36(1972), 618.

[Wi] S. Willard, *General topology*, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass., 1970.

Índice alfabético