



Universidad Nacional
Autónoma de
México

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN ENERGÍA

**“FLUJO DE LÍQUIDOS CONDUCTORES EN
CAMPOS MAGNÉTICOS LOCALIZADOS”**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA

MECÁNICA - TERMOFLUIDOS

PRESENTA:

ALBERTO BELTRÁN MORALES

DIRECTOR DE TESIS:
DR. SERGIO CUEVAS GARCÍA



2006



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. Del Río Portilla Jesús Antonio

Secretario: Dr. Avila Rodríguez Rubén

Vocal: Dr. Cuevas García Sergio

1er. Suplente: Dr. Zenit Camacho José Roberto

2do. Suplente: Dr. Martinell Benito Julio Javier

Lugar donde se realizó la tesis:

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN ENERGÍA

TUTOR DE TESIS:

Dr. Sergio Cuevas García

FIRMA

Agradecimientos

A todos los nuevos amigos de esta aventura llamada maestría en especial a: Bety, Ulises, Fer, Carlos, Amilcar, Memo Barrios, Memo Ovando, Erick y Gaby por tantas cosas que aprendí de ellos.

A mis amigos de siempre Aldo y Moy (aunque ya no podamos convivir).

A toda la gente que de una u otra forma ha influenciado mi formación no solo académica sino también personal a los doctores: Mariano, Yuri, Eduardo, Antonio, Jorge.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y en especial al Centro de Investigación en Energía por permitirme realizar mis estudios de maestría en sus instalaciones.

A **CONACyT** (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología), por brindarme el financiamiento económico para realizar mis estudios de maestría.

Al Dr. Francisco Solorio por todas las facilidades para realizar la maestría en el CIE.

En especial al Dr. Sergio Cuevas García por darme la oportunidad de trabajar con él, por todo su apoyo, tiempo y consejos.

Dedicatoria

A Valeria, por el nuevo significado que le dio a mi vida.

A Dulce por toda la paciencia y amor durante este trabajo.

A mi mamá por el apoyo incondicional que siempre me ha dado.

Contenido

Resumen	v
1. Introducción	1
2. Formulación	7
2.1. Ecuaciones de balance de la dinámica de fluidos	8
2.2. Ecuaciones del campo electromagnético	9
2.3. Ecuaciones fundamentales de la MHD	10
2.4. Ecuaciones Adimensionales	12
3. Modelo Puramente Bidimensional	15
3.1. Campo Magnético Aplicado	16
3.2. Ecuaciones Bidimensionales	18
3.3. Método numérico	19
3.3.1. Condiciones de Frontera	20
3.3.2. Solución Numérica	20
3.3.3. Parámetros globales de flujo	21
3.3.4. Resolución de la malla, paso en tiempo y localización del obstáculo	22
3.3.5. Descripción cualitativa del flujo	23
3.4. Resultados	26
3.4.1. Flujo estacionario	26
3.4.2. Flujo en Transición	34
3.4.3. Desprendimiento periódico de vórtices	38
3.5. Descripción de los parámetros globales de flujo	47
4. Modelo Cuasi-Bidimensional con fricción	51
4.1. Modelo matemático	52
4.1.1. Determinación de la función f	54
4.2. Resultados	58
4.2.1. Parámetros globales	67
4.3. Modelo con corriente inyectada	69
Conclusiones	73
Bibliografía	75

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio numérico de un flujo cuasi-bidimensional de una capa delgada de un líquido eléctricamente conductor a través de un campo magnético localizado, denominado “obstáculo magnético”. El objetivo principal del estudio es entender como se modifica la dinámica del flujo debido a la interacción de las fuerzas inerciales, viscosas y electromagnéticas. El interés en éste tipo de flujos radica en que proporcionan una manera no intrusiva de agitar fluidos, lo cual es de importancia para el mejoramiento de la transferencia de calor en diversas aplicaciones prácticas.

El trabajo se divide en cuatro capítulos. En el capítulo 1, se da una visión general del contexto y de los trabajos que respaldan las principales ideas presentadas en este estudio, así como una idea general del problema a tratar. En el capítulo 2 se presentan las ecuaciones de balance hidrodinámicas así las ecuaciones del campo electromagnético. Posteriormente, se obtienen las ecuaciones completas de la magnetohidrodinámica, y se normalizan para obtener un sistema adimensional. En el capítulo 3 se plantean las suposiciones que permiten modelar de manera bidimensional el flujo de una capa delgada de fluido en presencia de un campo magnético localizado que ocupa una pequeña fracción del dominio total del flujo. El sistema de ecuaciones bidimensionales se resuelve numéricamente con sus respectivas condiciones iniciales y de frontera. Se utiliza un esquema numérico de diferencias finitas para números de Reynolds 50, 100, 150 y 200, y números de Hartmann en el rango de $1 \leq Ha \leq 100$.

Considerando efectos inerciales se muestra que en flujo sobre un campo magnético localizado se generan vórtices y eventualmente inestabilidades similares a las que se observan en el flujo sobre obstáculos sólidos. En particular, se encuentra un desprendimiento periódico de vórtices similar a la calle de von Kármán.

Una mejora al modelo es propuesta en el capítulo 4, en donde se considera el efecto de la capa límite que se crea debido a la presencia del fondo sólido del recipiente. Dicho efecto se introduce a través de un término de fricción lineal conocido como fricción de Hartmann-Rayleigh. Debido a la localización del campo magnético aplicado, este término modela tanto el frenado de Hartmann dentro de la zona de campo intenso, como la fricción viscosa de Rayleigh en zonas donde el campo es despreciable. Además, se discute el efecto de la fricción de Hartmann-Rayleigh en el surgimiento de inestabilidades en el flujo. Concluimos el capítulo 4 con un modelo que incluye el efecto de inyectar una corriente eléctrica directa a la capa de fluido. Se presentan las ecuaciones bajo una nueva adimensionalización y se discuten algunas comparaciones con experimentos que han sido realizados bajo estas condiciones.

Capítulo 1

Introducción

El estudio de flujos alrededor de obstáculos sólidos ha sido la fuente de muchos avances fundamentales en la hidrodinámica. Desde sus inicios, el desarrollo de la teoría de capa límite estuvo ligada al entendimiento de la física que describe al flujo de fluidos interactuando con obstáculos sólidos. De hecho, tópicos tales como estabilidad, intermitencia y transición a la turbulencia tienen en este problema sus ejemplos clásicos.

En el flujo de un fluido viscoso alrededor de un cuerpo sólido, se forma una capa delgada en la vecindad del cuerpo (capa límite) donde las fuerzas inerciales son del mismo orden de magnitud que las viscosas. El comportamiento de la capa límite depende de las condiciones del flujo, caracterizadas por el número de Reynolds, $Re = UL/\nu$, donde U y L son la velocidad y la longitud característica del problema, respectivamente, y ν es la viscosidad cinemática del fluido.

Para Re pequeños la capa límite permanece adherida al cuerpo; conforme el Re aumenta tiende a separarse y formar vórtices o remolinos simétricos que permanecen estacionarios en tanto no se modifiquen las condiciones de flujo; valores mayores de Re , causan que los vórtices aumenten su tamaño y el flujo deje de ser simétrico respecto a la línea central. Si Re excede un valor crítico, los vórtices se desprenden del objeto en forma periódica y alternada para formar un flujo no estacionario pero altamente estructurado, dando lugar a lo que se conoce como la calle de vórtices de von Kármán. Cuando Re toma valores aún mayores, el flujo periódico desaparece formándose una estela turbulenta.

El flujo sobre obstáculos sólidos es uno de los problemas más estudiados de la dinámica de fluidos (Zdrakovich 1997) ya que, además de las múltiples aplicaciones en las que aparece, presenta un comportamiento físico extremadamente rico. La existencia de efectos viscosos importantes dentro de la capa límite ocasiona la generación de vorticidad en el fluido. La vorticidad es entonces transportada por el flujo, tanto difusiva como convectivamente, aunque para Re grandes el transporte convectivo es el dominante (efecto no lineal). La generación de vorticidad es relevante en diversas aplicaciones, en particular, en aquellas donde se desea incrementar la transferencia de calor. En el flujo sobre obstáculos sólidos, el mezclado del fluido se presenta con mayor intensidad precisamente en la estela.

Este tipo de flujos se observa no sólo en el laboratorio sino también en el océano o

la atmósfera. Los flujos oceánicos o atmosféricos se caracterizan por la existencia de una superficie libre y un fondo rígido y por el hecho que la dimensión transversal del flujo, por ejemplo, el tamaño de una isla, es mucho mayor que la dimensión vertical, digamos, la profundidad del agua. Los flujos que satisfacen estas características se denominan de aguas someras o poco profundas y en ellos la fricción en el fondo incrementa la estabilidad del flujo.

En este contexto uno puede preguntarse cuál sería el efecto de aplicar un campo magnético al flujo de un fluido conductor sobre un obstáculo sólido. La pregunta no tiene un interés puramente académico pues existen aplicaciones tecnológicas tales como el procesamiento electromagnético de materiales (Moffat y Proctor 1982) o los mantos de los reactores de fusión nuclear (Abdou et al. 2001) donde se presentan flujos de metales líquidos o sales fundidas bajo campos magnéticos muy intensos. En tales sistemas se ha propuesto la introducción de obstáculos sólidos que ayuden a incrementar la transferencia de calor (Mück et al. 2000). En estas aplicaciones es muy importante conocer con detalle la dinámica del flujo y la transferencia de calor. Estos problemas caen en el ámbito de la *magnetohidrodinámica*, que es la dinámica de fluidos eléctricamente conductores en campos magnéticos.

El efecto de un campo magnético uniforme sobre el flujo alrededor de obstáculos sólidos ha llamado la atención de muchos investigadores desde los primeros trabajos de Stewartson (1956) y Ludford (1960). Kolesnikov y Tsinober (1972) observaron que los vórtices formados debido a un arreglo de obstáculos cilíndricos en presencia de un campo magnético intenso, alinean sus ejes en la dirección del campo. Recientemente, Mück et al. (2000) estudiaron numéricamente el flujo magnetohidrodinámico alrededor de un cilindro de base cuadrada localizado en un ducto rectangular aislado. Investigaron la formación y transporte de vórtices bajo la influencia de un campo magnético uniforme alineado con el eje del cilindro. Este flujo también fue estudiado experimentalmente por Frank et al. (2001), quienes, además estudiaron la dependencia temporal del desprendimiento de vórtices. Estos estudios han confirmado la bien conocida tendencia de este tipo de flujos MHD a ser cuasi-bidimensionales. Los vórtices en la estela detrás del obstáculo evolucionan hasta tener sus ejes alineados con el campo, mientras que son disipados en las capas límite debido a un efecto de frenado magnético¹.

Un problema de gran interés en la actualidad es la manera en que un campo magnético uniforme interacciona con la turbulencia generada en un fluido eléctricamente conductor, dado que la presencia del campo introduce una dirección preferencial en el espacio y modifica tanto la dinámica como los procesos de transporte dentro del flujo. Esto da lugar a efectos interesantes, como la posibilidad de laminarizar un flujo inicialmente turbulento, de manera que el campo actúa como un agente externo que permite controlar la aparición de turbulencia. Pero quizás la característica más notable de la interacción de un campo con un flujo turbulento es la tendencia a bidimensionalizar la turbulencia; el mecanismo que está detrás de este fenómeno es la supresión de las componentes del vector vorticidad perpendiculares al campo magnético. Físicamente, tal supresión puede entenderse debido a la disipación óhmica de corrientes inducidas en varios circuitos inmersos en el fluido y que rotan con él.

La desestabilización de un flujo MHD y la aparición de vórtices pueden tener lugar aún en ausencia de obstáculos sólidos. Se ha demostrado teórica y experimentalmente que la existencia de no uniformidades en las condiciones electromagnéticas del flujo, pueden promover la generación de capas cortantes internas y la aparición

¹Debido a circuitos de corriente transversales al flujo.

de inestabilidades, cuando los efectos inerciales no son despreciables. En este sentido, las no uniformidades electromagnéticas actúan como “obstáculos” para el flujo. Un ejemplo interesante de este tipo de flujos es el estudiado teóricamente por Bühler (1996). Él analizó un flujo cuasi-bidimensional entre dos paredes paralelas eléctricamente aislantes bajo un campo magnético uniforme e intenso. Las paredes presentan no uniformidad en su conductividad eléctrica, ya que en ambas paredes se insertaron tiras de un material altamente conductor en la dirección principal del flujo. La inhomogeneidad en la conductividad de las paredes actúa como un obstáculo y da lugar a una inestabilidad que ocasiona un flujo dependiente del tiempo similar a la calle de vórtices que se observa en el flujo sobre obstáculos sólidos.

Pero no sólo la inhomogeneidad en la conductividad eléctrica de las paredes puede desestabilizar un flujo MHD. De hecho, un campo magnético no homogéneo también es capaz de hacerlo. El efecto de campos no uniformes en flujos MHD con o sin obstáculos sólidos no ha sido ampliamente estudiado. La mayoría de los estudios relacionados a campos no uniformes, se restringen a flujos en ductos en donde el campo varía en la dirección del flujo, como en el caso del flujo a la entrada o salida de los polos de un imán (Lavrentév et al. 1990, Sterl 1990, Ting et al. 1993, Sellers y Walker 1999).

Las capas cortantes en flujos MHD también pueden ser promovidas por gradientes localizados de campo magnético. Tal es el caso de un flujo uniforme que encuentra una región donde existe un campo magnético no homogéneo, como el producido por un imán dipolar permanente. El campo actúa de manera similar a un obstáculo sólido, desviando al flujo incidente y formando una estela detrás de la zona de campo magnético. En este sentido podemos visualizar al campo magnético localizado como un obstáculo para el flujo, es decir, un *obstáculo magnético*. En un experimento realizado por Shercliff (1965), una capa delgada de mercurio se localiza entre los polos de un imán. Conforme el imán se mueve manualmente, se observa la formación de vórtices en la zona afectada por el campo magnético. Por otro lado, Honji (1991) y Honji y Haraguchi (1995) llevaron a cabo experimentos sobre el flujo inducido por la interacción de un campo magnético localizado en movimiento con una corriente eléctrica inyectada a través de una delgada capa de agua salada. En el experimento de Honji (1991), dos imanes permanentes fueron colocados uno arriba del otro externamente, de tal forma que la capa de fluido (contenida en una cuba) estuviera entre los polos del campo magnético. Los imanes eran movidos a velocidad constante a lo largo del eje central de la cuba, mientras se imponía una corriente eléctrica estacionaria sobre la capa de fluido, perpendicular al movimiento de los imanes. Dependiendo de la velocidad del par de imanes y de la corriente eléctrica impuesta, Honji observó una estela en movimiento oscilatorio, creada a partir de la región influenciada por el campo. En el estudio experimental de Honji y Haraguchi (1995) se empleó un imán localizado en el fondo de la cuba, y se enfocó la atención en la estela cercana formada por el movimiento de éste. Se observaron pares de vórtices simétricos estacionarios en un rango limitado del número de Reynolds y de intensidades de la fuerza de Lorentz; conforme ésta aumentaba, el par de vórtices simétricos se colapsaba para formar un flujo periódico no estacionario. Recientemente Afanasyev y Korabel (2006), empleando un dispositivo similar, realizaron un estudio experimental más extenso en una delgada capa de fluido estratificado. Consideraron el flujo producido por un imán así como también por dos imanes con polaridad invertida y separados por una distancia pequeña. En el caso de un imán, observaron la formación inicial de vórtices dipolares y su subsecuente desprendimiento en la forma de una calle de vórtices. Para dos imanes, se observó una calle de vórtices invertida, consistente de vórtices cuadrupolares interconectados. En dicho

trabajo el tamaño finito de la región donde es aplicada la fuerza, es una condición necesaria para la formación de la calle de vórtices. Sin embargo, los autores abordaron el problema desde el punto de vista del efecto hidrodinámico de fuerzas localizadas, ya que su interés está centrado en el flujo producido por cuerpos que se autoimpulsan (siendo la distancia entre imanes la longitud del cuerpo). Por tal motivo, en dicho estudio no se realiza una descripción magnetohidrodinámica del flujo. En un estudio numérico reciente (Cuevas et al. 2006a), se demostró que es posible obtener una calle de vórtices aún en ausencia de una corriente inyectada, cuando interacciona un flujo uniforme con un campo magnético localizado, en condiciones tales que los efectos inerciales dominan sobre la fricción en el fondo del recipiente. En tal caso, son las corrientes eléctricas inducidas por el movimiento las que producen la fuerza de Lorentz que se opone al flujo. Es decir, al penetrar el fluido la zona afectada por el campo, se inducen corrientes eléctricas cuya dirección es tal que la fuerza de Lorentz resultante de la interacción de las corrientes y el campo se opone al movimiento del fluido dentro del campo. Al resolver las ecuaciones de la MHD, se mostró numéricamente que los flujos resultantes son muy similares a los que se observan en el flujo sobre obstáculos sólidos. De hecho, dependiendo de la relación entre la magnitud de las fuerzas inerciales y magnéticas, puede observarse la aparición de vórtices estacionarios en la región cercana al campo magnético intenso. Cuando las fuerzas magnéticas son suficientemente intensas, los vórtices se desprenden periódicamente dando lugar a la formación de una calle de vórtices, similar a la que se presenta en el flujo sobre un cilindro.

En un trabajo analítico posterior (Cuevas et al. 2006b), el flujo en un obstáculo magnético fue estudiado en condiciones donde los efectos viscosos dominan sobre los inerciales, es decir, a bajos números de Reynolds, encontrando también una similitud con los flujos sobre obstáculos sólidos.

En este trabajo se estudia la generación de vorticidad por fuerzas de Lorentz localizadas en un flujo sin obstáculos sólidos, situación que se justifica por la evidencia experimental que muestra la posibilidad de obtener en el laboratorio flujos cuasi-bidimensionales (Honji 1991, Honji y Haraguchi 1995, Afanasyev y Korabel 2005). Se utiliza un enfoque numérico para analizar un flujo bidimensional de un fluido incompresible, viscoso y eléctricamente conductor a través de un campo magnético localizado, producido por una superficie cuadrada magnetizada, cuya área es una fracción pequeña del dominio total del flujo. En nuestro caso consideramos al imán fijo y al fluido en movimiento, de modo que, mediante una transformación Galileana podemos pasar al caso de un imán que se desplaza con velocidad constante, mientras que, la capa de fluido se encuentra en reposo.

Considerando efectos inerciales en el análisis, se muestra que el flujo a través del obstáculo magnético, puede desarrollar estructuras de vórtices y eventualmente inestabilidades similares a aquéllas presentes en flujos sobre obstáculos sólidos. En una pequeña zona, donde el flujo uniforme encuentra un campo magnético no despreciable, las corrientes eléctricas interactúan con el campo, dando lugar a una fuerza de Lorentz no uniforme que frena al fluido y genera vorticidad.

El presente estudio extiende el trabajo de Cuevas et al. (2006a) en diferentes aspectos: a) Se considera la existencia de una sola superficie magnetizada localizada en el fondo del recipiente, debajo de una delgada capa de fluido conductor teniendo entonces una superficie libre en la parte superior. Esta descripción es más acorde a los experimentos mencionados. b) Se considera un rango más amplio de números de Reynolds; c) Se analizan casos donde la fricción debida a la presencia de capas límite en el fondo del recipiente (fricción de Hartmann-Rayleigh) no es despreciable y se investigan sus efectos sobre la aparición de inestabilidades en el flujo. d) Se analiza

el efecto de inyectar una corriente directa en la capa de fluido, transversalmente a la dirección del flujo principal. Esto da la posibilidad de realizar simulaciones cercanas a los experimentos mencionados. e) Se analiza el comportamiento de un parámetro global adicional, a saber, el déficit de velocidad, que permite hacer una descripción más completa del comportamiento de los patrones de flujo.

En el siguiente capítulo, se presenta la formulación detallada del problema a tratar, estableciendo las ecuaciones básicas que gobiernan el movimiento de un fluido eléctricamente conductor en un campo magnético, es decir, las ecuaciones de la magnetohidrodinámica. Así mismo se adimensionalizan dichas ecuaciones y se presentan los parámetros adimensionales relevantes en el flujo.

Capítulo 2

Formulación

Consideremos el flujo de una capa delgada de fluido incompresible, viscoso y eléctricamente conductor, confinada inferiormente por una pared sólida rígida, eléctricamente aislante y en la parte superior por una superficie libre también aislante. El flujo se encuentra bajo la influencia de un campo magnético aplicado no homogéneo, $\mathbf{B}^0 = \mathbf{B}^0(x, y, z)$, producido por una placa rectangular aislante magnetizada y uniformemente polarizada en la dirección normal. La placa magnetizada se encuentra embebida en la pared del fondo del recipiente que contiene al fluido. Dicha placa puede considerarse como un dipolo magnético finito, de modo que modela adecuadamente el campo producido por un imán permanente. Como veremos más adelante, existe una expresión analítica para el campo producido por esta placa (McCaig 1977). De esta forma, aunque existe un campo tridimensional, la contribución principal del campo aplicado proviene de la componente normal a la capa de fluido, que se encuentra en la dirección z . Debido al rápido decaimiento con la distancia, el campo es intenso únicamente en una pequeña zona localizada, que supondremos alejada tanto de la región de entrada y salida del flujo como de las fronteras laterales. A la entrada, se impone un flujo estacionario unidireccional con velocidad uniforme en la dirección x , tal como se muestra en la Figura 2.1.

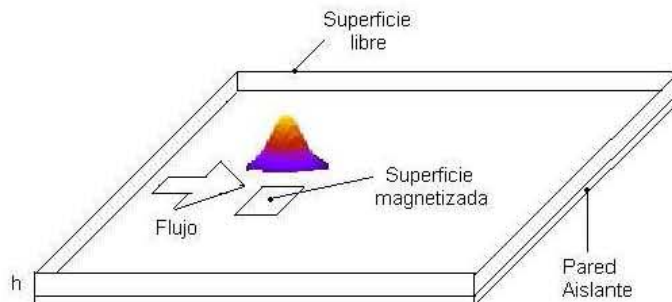


Figura 2.1: Flujo sobre un obstáculo magnético.

Lejos de la región de campo intenso el flujo permanece sin perturbación. El flujo del líquido conductor dentro del campo aplicado induce una corriente eléctrica, la que a su vez, genera un campo magnético inducido \mathbf{b} , de tal forma que el campo total está dado por $\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{b}$. Dado que las fronteras que confinan al fluido se suponen eléctricamente aislantes, la corriente inducida forma circuitos cerrados dentro del fluido. Algunos circuitos de corriente se forman transversales al flujo y se cierran a través de las capas límite cercanas al fondo del recipiente y a la superficie libre, denominadas capas de Hartmann, formadas debido a la componente normal del campo, principalmente en la zona donde éste es intenso. Debido a la existencia de circuitos de corriente transversales, se presenta un efecto de frenado magnético, que se denomina frenado de Hartmann, el cual tiende a estabilizar el flujo. Sin embargo, también se forman circuitos de corriente en el plano de la capa de fluido (plano $x-y$); estos últimos interactúan con el campo magnético, dando lugar a una fuerza de Lorentz no uniforme, responsable de frenar al fluido y crear vorticidad. El efecto global es que el campo magnético localizado actúa como un *obstáculo* para el flujo. A diferencia de obstáculos sólidos que ocupan una región definida en el espacio, el obstáculo magnético ejerce una influencia apreciable no solamente en la zona cubierta por la superficie magnetizada, sino más allá de sus límites. Por lo tanto, el obstáculo magnético se identifica como la zona donde todas las variables de flujo experimentan una variación significativa; es importante notar que el tamaño del obstáculo y en consecuencia la extensión de la región donde el flujo es sustancialmente alterado, no está determinada únicamente por las dimensiones de la superficie magnetizada, sino también depende, para un fluido dado, de la intensidad del campo magnético y de la velocidad del flujo de entrada.

A continuación se presentan las ecuaciones que rigen el comportamiento del fenómeno.

2.1. Ecuaciones de balance de la dinámica de fluidos

Si consideramos al fluido como un medio continuo podemos utilizar una descripción de campo de manera que las variables relevantes del problema (densidad de masa, velocidad, presión, temperatura, etc.) están definidas por los valores locales que toman en cada punto del espacio-tiempo. Dichas variables de campo satisfacen ciertas ecuaciones básicas surgidas de balances generales de masa, momentum y energía. La forma específica de las ecuaciones de balance depende del tipo de fluido bajo consideración, es decir, de las características del medio. Esta información se da a través de las ecuaciones constitutivas que describen la respuesta del fluido ante la presencia de inhomogeneidades ocasionadas por gradientes de velocidad, temperatura, concentración y otros. En forma diferencial, para el caso de un fluido newtoniano incompresible, tenemos que el principio de conservación de masa permite establecer la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

donde \mathbf{u} es el vector velocidad.

Del balance de la cantidad de movimiento lineal se obtiene la ecuación de Navier-Stokes

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (2.2)$$

donde t es el tiempo, P es la presión, ρ es la densidad del fluido, η es la viscosidad dinámica y \mathbf{f} es el vector que representa a la fuerza de cuerpo; en particular cuando

un fluido eléctricamente conductor interacciona con un campo electromagnético, la fuerza importante es la de Lorentz; en la siguiente sección se abordará la incorporación de las variables del campo electromagnético.

El balance de energía térmica en el fluido se establece mediante la primera Ley de la Termodinámica, lo que da lugar a la ecuación de transferencia de calor

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right) = k \nabla^2 T + \phi, \quad (2.3)$$

donde T es el campo de temperatura del fluido, C_p es el calor específico a presión constante, k es la conductividad térmica y ϕ representa una fuente de disipación que incluye tanto los efectos ocasionados por la fricción viscosa como otros adicionales (disipación de Joule).

2.2. Ecuaciones del campo electromagnético

El efecto de un campo electromagnético sobre un fluido conductor se manifiesta principalmente mediante el surgimiento de fuerzas de cuerpo en el medio y el intercambio de energía entre el campo y el fluido. Por lo tanto, el considerar la interacción electromagnética lleva a que las ecuaciones ordinarias de la mecánica de fluidos (2.1)-(2.3) sean insuficientes para lograr una descripción adecuada del problema. Para lograrlo debemos incluir las ecuaciones del campo electromagnético que comprenden a las ecuaciones de Maxwell, la ecuación de Lorentz para la fuerza y las ecuaciones constitutivas que caracterizan a los campos en distintos medios. A continuación se muestran las ecuaciones macroscópicas de Maxwell en forma diferencial para un medio homogéneo, isotrópico y lineal.

La primera ecuación establece la relación entre el flujo de campo eléctrico a través de una superficie y la densidad de carga (ley de Gauss), es decir,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon}, \quad (2.4)$$

donde \mathbf{E} es el vector de campo eléctrico, ρ_e es la densidad de carga y ε es la permitividad eléctrica del medio.

La segunda ecuación de Maxwell, establece la inexistencia monopolos magnéticos (las líneas de campo magnético son cerradas):

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.5)$$

donde \mathbf{B} es el vector de inducción magnética.

La tercera ecuación, conocida como la ley de inducción de Faraday, establece la relación entre la variación temporal de la inducción magnética y las variaciones en el espacio del campo eléctrico:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.6)$$

Finalmente, la ecuación de Ampère-Maxwell establece la posibilidad de generar campos magnéticos mediante corrientes eléctricas o a través de la variación temporal de campos eléctricos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.7)$$

donde μ es la permeabilidad magnética del medio y \mathbf{j} es el vector densidad de corriente eléctrica. El segundo término del lado derecho se conoce como la corriente de desplazamiento de Maxwell.

En general, μ y ε pueden depender del estado termodinámico del medio; sin embargo, para la gran mayoría de los problemas tratados en MHD estas cantidades pueden considerarse constantes. En particular, al trabajar con fluidos conductores (v.g. metales líquidos, gases y electrolitos) es posible tomar como una buena aproximación $\mu = \mu_0$, donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío. En algunos gases (o plasmas), la permitividad eléctrica es aproximadamente igual a la del vacío; sin embargo, esta condición no se satisface en general para líquidos conductores.

Para un medio continuo con densidad de carga ρ_e y densidad de corriente eléctrica \mathbf{j} , la fuerza de Lorentz está dada por

$$\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2.8)$$

donde los dos términos del lado derecho de la ecuación expresan las contribuciones eléctrica y magnética de dicha fuerza, respectivamente. En el caso no relativista, se puede considerar como una buena aproximación que la ecuación (2.8) es invariante ante un cambio de sistema de referencia inercial.

Por otra parte, al igual que para las ecuaciones de la dinámica de fluidos, es necesario proporcionar una ecuación constitutiva que establezca la relación entre la densidad de corriente eléctrica y los campos eléctrico y magnético. La ecuación más común, válida para líquidos y gases conductores, es la llamada ley de Ohm, que para un medio conductor isotrópico en reposo se expresa como

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.9)$$

donde σ es la conductividad eléctrica del medio, la cual, en una buena aproximación puede suponerse constante. Si el conductor se mueve dentro de un campo magnético la ley de Ohm se modifica. En el sistema de laboratorio, es decir, el sistema respecto al cual el fluido se desplaza con velocidad \mathbf{u} , y en la aproximación no relativista, toma la forma

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \rho_e \mathbf{u}. \quad (2.10)$$

El término $\rho_e \mathbf{u}$ de la ecuación (2.10) se denomina la corriente de convección. A su vez, el término $\mathbf{E}_r = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ se denomina el campo eléctrico efectivo (Davidson 2001).

2.3. Ecuaciones fundamentales de la MHD

El acoplamiento de las ecuaciones de la mecánica de fluidos con las ecuaciones del campo electromagnético entraña algunas dificultades. Las primeras son ecuaciones clásicas, no relativistas, y por ende son invariantes ante transformaciones Galileanas. Por su parte las ecuaciones del campo electromagnético son ecuaciones relativistas y por tanto invariantes ante transformaciones de Lorentz. Es claro que la mezcla de ecuaciones con distintas propiedades de invariancia podría dar lugar a una descripción errónea del fenómeno en consideración. Esto se puede resolver utilizando lo que se conoce como la aproximación MHD que consiste básicamente en restringir los fenómenos estudiados a aquellos en donde:

1. la velocidad del fluido es mucho menor que la velocidad de la luz;

2. los flujos tienen lugar en campos magnéticos cuasi-estacionarios o a bajas frecuencias;
3. los campos eléctricos son del orden de magnitud de la fuerza electromotriz (fem) inducida por el movimiento del fluido en el campo electromagnético.

Esta aproximación lleva a diversas simplificaciones, entre las que se encuentra el despreciar la corriente de desplazamiento de Maxwell en la ecuación (2.7). Esta es una aproximación que comúnmente se hace en cualquier problema de electromagnetismo donde no intervienen oscilaciones de alta frecuencia. Físicamente lo que se está despreciando es el proceso de acumulación o redistribución de cargas eléctricas. La aproximación MHD lleva también a establecer la invariancia del campo magnético en los distintos sistemas de referencia. Asimismo, se encuentra que el término $\rho_e \mathbf{E}$ en la ecuación (2.8) es de un orden de magnitud mucho menor (es decir, de orden u^2/c^2 , donde c es la velocidad de la luz) que el término magnético $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ por lo que el primero resulta despreciable. De manera similar, se establece que la corriente de convección $\rho_e \mathbf{u}$ es despreciable en esta aproximación respecto de la corriente de conducción \mathbf{j} , que se toma como la corriente total. Con estas simplificaciones las ecuaciones (2.5) y (2.6) no cambian, mientras que la ecuación (2.7) se expresa en la forma

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (2.11)$$

Para la ley de Ohm dada por (2.10) tenemos ahora

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.12)$$

De la ecuación (2.11) se sigue la condición $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ que es equivalente a despreciar la corriente de desplazamiento. En esta aproximación es apropiado ignorar la ecuación de Gauss para el campo eléctrico (2.4), ya que el campo \mathbf{E} está completamente determinado por las ecuaciones rotacionales y la ley de Ohm. En sí misma, la distribución de cargas no es de interés en la MHD, sin embargo es importante notar que no se está afirmando que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Por otra parte, al despreciar la corriente de desplazamiento las ecuaciones (2.5), (2.6), (2.11) y (2.12) pierden su invariancia ante transformaciones de Lorentz, conservando únicamente su invariancia Galileana. Estas ecuaciones, junto con la ecuación de continuidad (2.1) y la de Navier-Stokes donde la fuerza de Lorentz es la fuerza de cuerpo relevante

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2.13)$$

forman un conjunto de ecuaciones que determinan el comportamiento dinámico y electromagnético del fluido. El comportamiento térmico está descrito por la ecuación de transferencia de calor

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right) = k \nabla^2 T + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} + \phi_v. \quad (2.14)$$

donde el término \mathbf{j}^2/σ denota la disipación de Joule presente en el fluido y por simplicidad ϕ_v la fuente de disipación viscosa, que explícitamente involucra términos cuadráticos de los gradientes de velocidad.

La solución de un problema particular implica encontrar todas las variables de campo involucradas (velocidad, presión, temperatura, campo eléctrico, campo magnético, densidad de corriente, etc.) como función de la posición y del tiempo,

partiendo de las ecuaciones de balance más las correspondientes ecuaciones electromagnéticas, aunado esto a condiciones iniciales y a la frontera adecuadas. Aquí, es importante mencionar que la MHD trasciende a la mecánica de fluidos ordinaria debido a los efectos de acción a distancia introducidos a través de la interacción electromagnética. Esto implica que, en principio, tanto los campos eléctrico y magnético como las corrientes y distribuciones de carga deben determinarse no sólo en la región donde se encuentra el fluido conductor, sino en las paredes que lo contienen y en el espacio circundante. Finalmente, debe notarse que por considerar un fluido incompresible, la ecuación (2.14) está desacoplada del resto de las ecuaciones, de modo que el campo de temperaturas puede determinarse una vez que se conocen los campos de velocidad y densidad de corriente eléctrica.

Si expresamos el campo \mathbf{E} en términos de \mathbf{B} por medio de las ecuaciones (2.11) y (2.12) y lo sustituimos en la ecuación (2.6) haciendo uso de (2.5), se obtiene una ecuación para el campo magnético, conocida como la *ecuación de inducción*, es decir,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \lambda \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2.15)$$

donde $\lambda = 1/\mu_0\sigma$ se conoce como la difusividad magnética del medio.

Esta ecuación expresa que, al igual que el calor o la cantidad de movimiento, el campo magnético \mathbf{B} obedece una ecuación de transporte. La ecuación (2.15) establece dos mecanismos mediante los cuales el campo magnético se propaga o transporta dentro del medio conductor, a saber, un mecanismo convectivo y uno difusivo, expresados por el primer y segundo términos del lado derecho de la ecuación, respectivamente. De hecho, el campo magnético puede presentar un comportamiento disipativo o bien “elástico”, dependiendo esencialmente de la conductividad eléctrica del medio (Davidson 2001). Desarrollando el primer término del lado derecho de la ecuación anterior, la ecuación de inducción puede expresarse también de la forma

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \lambda \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.16)$$

Evidentemente el hecho de que aparezca la velocidad en la ecuación (2.16) indica el acoplamiento existente entre esta cantidad y el campo magnético y por tanto (2.16) debe resolverse junto con las ecuaciones de continuidad (2.1) y Navier-Stokes (2.13). El carácter de \mathbf{B} depende fuertemente de la importancia relativa de los cuatro términos de la ecuación (2.16).

2.4. Ecuaciones Adimensionales

Dado que la ecuación de calor (ecuación (2.14)) queda desacoplada de las ecuaciones que rigen la dinámica del flujo, tema de interés en este trabajo, dicha ecuación no será contemplada en lo que resta.

Con el fin de realizar más adelante un estudio paramétrico del flujo y poder establecer las aproximaciones adecuadas al problema, es conveniente expresar el sistema de ecuaciones adimensionalmente.

En forma adimensional, las ecuaciones (2.1) y (2.13) quedan

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{Ha^2}{Re} \mathbf{j} \times \mathbf{B}^0 + \frac{Ha^2}{Re} Rm \mathbf{j} \times \mathbf{b}, \quad (2.18)$$

donde la velocidad \mathbf{u} , la presión P , la densidad de corriente eléctrica \mathbf{j} , el campo magnético inducido \mathbf{b} y el aplicado \mathbf{B}^0 han sido normalizados por U , ρU^2 , $\sigma U B_{max}$, $Rm B_{max}$ y B_{max} respectivamente, donde U es la velocidad a la entrada del dominio de integración y B_{max} es la máxima intensidad del campo magnético. A su vez las coordenadas x , y y z , se normalizan con la longitud característica L , que será definida más adelante, mientras que el tiempo esta normalizado por L/U . En la ecuación (2.18) se ha hecho la suposición $\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + Rm\mathbf{b}$.

Además definimos a los parámetros adimensionales

$$\begin{aligned} Ha &= B_{max} L \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}, \\ Re &= \frac{UL}{\nu}, \\ Rm &= \mu \sigma UL, \end{aligned} \quad (2.19)$$

como los números de Hartmann, Reynolds y Reynolds magnético, respectivamente. El cuadrado del número de Hartmann da una estimación de las fuerzas magnéticas comparadas con las viscosas, mientras que tanto Re como Rm se expresan como el producto de una velocidad y una longitud característica, entre una difusividad del medio. En el caso hidrodinámico la difusividad es la viscosa de modo que Re da una estimación de la importancia del transporte de cantidad de movimiento por convección (o arrastre) comparado con el transporte por difusión viscosa. De manera analoga, Rm estima la importancia del transporte del campo magnético por efectos convectivos comparado con el transporte de esa cantidad por efectos difusivos. Ha y Re pueden combinarse para formar el parámetro de interacción $N = Ha^2/Re$, que representa la relación entre las fuerzas magnéticas y las inerciales.

Escribiendo ahora en forma adimensional las ecuaciones del campo electro-magnético en la aproximación MHD (Moreau 1990) tenemos

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}, \quad (2.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad (2.21)$$

donde el campo eléctrico esta normalizado por UB_{max} . Utilizando nuevamente la expresión $\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + Rm\mathbf{b}$, la ecuación de inducción (2.16) toma la forma

$$Rm \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{b} + (\mathbf{B}^0 \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}^0 + Rm(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} - Rm(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} \quad (2.22)$$

Las ecuaciones (2.17), (2.18), (2.20b) y (2.22) representan un sistema cerrado de ecuaciones que describe la dinámica del flujo. Sin embargo, con objeto de simplificar la solución, se hará la suposición $Rm \ll 1$, que es equivalente a decir que el campo magnético inducido es mucho menor que el campo aplicado ($\mathbf{b} \ll \mathbf{B}^0$), aproximación válida para la mayoría de los flujos con metales líquidos, sales fundidas y electrolitos tanto en la industria como en el laboratorio. Bajo esta aproximación, que desprecia los términos $O(Rm)$, las ecuaciones que gobiernan el flujo MHD toman la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{Ha^2}{Re} \mathbf{j} \times \mathbf{B}^0, \quad (2.24)$$

$$\nabla^2 \mathbf{b} + (\mathbf{B}^0 \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}^0 = 0. \quad (2.25)$$

Nótese que el término $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}^0$ será distinto de cero siempre que exista un campo magnético no uniforme. Implícitamente, el campo inducido satisface las ecuaciones

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{b} = \mathbf{j}. \quad (2.26)$$

En la práctica, la ley de Ampere (2.26b) da una expresión para calcular la corriente eléctrica una vez que \mathbf{b} está determinado. Esta ecuación también garantiza que la divergencia de la densidad de corriente eléctrica sea cero, es decir, $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. Además, el campo magnético aplicado debe satisfacer las ecuaciones magnetostáticas, a saber,

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^0 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B}^0 = 0. \quad (2.27)$$

lo que asegura el carácter solenoidal e irrotacional de \mathbf{B}^0 .

Hasta este momento tenemos las ecuaciones vectoriales que rigen el comportamiento del fenómeno, donde los vectores pueden ser tridimensionales, resta hacer suposiciones que nos permitan modelar de manera correcta la aproximación cuasi-bidimensional, tema a tratar en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Modelo Puramente Bidimensional

Estrictamente, el flujo de una delgada capa de un fluido eléctricamente conductor a través de un obstáculo magnético presenta un comportamiento tridimensional, atribuible principalmente a la existencia de capas límite en la frontera sólida inferior. De hecho, se presentan dos tipos de capas límite, una es la llamada capa de Hartmann, formada dentro de la zona del obstáculo magnético y la otra es la clásica capa límite viscosa, presente en la región donde el campo magnético es despreciable. Por lo tanto, en principio debería implementarse una solución tridimensional al problema. En la literatura existen algunos estudios numéricos en donde se han simulado flujos MHD tridimensionales en dominios restringidos (Mutschke et al. 1997; Mück et al. 2000). Sin embargo, el flujo a través de un obstáculo magnético difiere significativamente de este tipo de estudios, dado que no está confinado ni en la dirección x ni en la y ; lo anterior requiere de una clara formulación de las condiciones de frontera en “infinito” (ver detalles en la siguiente sección). Además, en nuestro caso es posible aplicar una aproximación cuasi-bidimensional que retiene las características más importantes del flujo y permite realizar un tratamiento numérico mucho menos costoso computacionalmente hablando.

La cuasi-bidimensionalización de un flujo se presenta bajo muy diversas circunstancias, descritas ampliamente en la literatura. Por ejemplo, se sabe que la acción de un campo magnético intenso es capaz de suprimir las perturbaciones del movimiento en la dirección del campo. Pero también existen otros mecanismos que tienden a bidimensionalizar el flujo, inhibiendo las perturbaciones tridimensionales; dichos mecanismos pueden ser la fuerza de gravedad en un flujo estratificado (Voropayev, Afanasyev y Filippov 1991), la fuerza de Coriolis en un fluido homogéneo en rotación (Zavala Sansón, van Heijst y Backx 2001) o la tensión superficial en una película de jabón (Couder y Basdevant 1986). Además, en un flujo confinado en una delgada capa de fluido (confinamiento geométrico) también se tiene un flujo cuasi-bidimensional (como en el flujo de Hele-Shaw). En la aproximación cuasi-bidimensional, comúnmente el problema se formula en términos de las variables del núcleo del flujo que son independientes de la coordenada normal.

En nuestro caso consideramos dos regiones distintas de flujo, la zona del obstáculo magnético y la zona exterior, donde el campo magnético aplicado es despreciable. En la primera zona, la longitud característica en el plano $x - y$, es decir, el plano donde tiene lugar el flujo, está dada por la dimensión lateral de la superficie magnetizada. Aquí, las perturbaciones en la dirección normal tienden a ser inhibidas por la acción del campo magnético intenso, lo que promueve un flujo cuasi-bidimensional. Este mecanismo es el responsable de la bidimensionalización en flujos MHD a través de ductos bajo campos magnéticos intensos. En el análisis de este tipo de flujos es común separar al flujo en dos regiones, el núcleo y las capas límite (e.g. Müller y Bühler 2001). En el caso de la zona exterior, la bidimensionalización se debe al confinamiento del flujo en una capa delgada de fluido. En esta región, la escala de longitud en el plano $(x - y)$ está dada por el tamaño de las estructuras de flujo (vórtices) que se forman en la estela detrás del obstáculo magnético. En realidad, dicha escala de longitud es mucho más grande que la dimensión característica del obstáculo magnético, dado que los vórtices tienden a expandirse conforme nos alejamos del obstáculo. De aquí que las condiciones de confinamiento geométrico aseguren la cuasi-bidimensionalidad del flujo.

En este trabajo, el análisis del flujo en campos magnéticos localizados se llevará a cabo utilizando dos aproximaciones. Como primera aproximación, supondremos que el efecto de la capa límite formada en la pared del fondo es despreciable, es decir, no se considera la fricción debida al contacto de la capa de fluido con la pared del fondo. Esta situación aunque pareciera idealizada no está demasiado alejada de la realidad, como se muestra en el trabajo de Afanasyev y Korabel (2006), en donde son utilizadas dos capas delgadas de fluido de igual espesor y distinta densidad, mitigando en forma considerable la fricción del fondo. La segunda aproximación, considera la influencia de la pared del fondo a través de un término de fricción que toma en cuenta tanto los efectos magnéticos cerca del obstáculo, como los efectos puramente viscosos en regiones alejadas del mismo. Esta aproximación será presentada en el capítulo 4.

3.1. Campo Magnético Aplicado

Como mencionamos anteriormente, el campo magnético aplicado que utilizaremos en el problema, es producido por una placa magnetizada eléctricamente aislante de sección rectangular, uniformemente polarizada en la dirección normal a la placa.

El campo magnético producido por esta placa es entonces el de un dipolo finito con su momento dipolar apuntando en la dirección normal (dirección z). Afortunadamente, existe una expresión analítica exacta para este campo magnético (McCaig 1977). Ya que consideramos que la placa magnetizada está embebida en la pared del fondo, podemos suponer como una muy buena aproximación que la componente normal del campo magnético es la dominante dentro de la capa delgada de líquido, de manera que podemos despreciar las componentes en las direcciones x y y . El considerar sólo la componente normal del campo aplicado simplifica enormemente la formulación numérica del problema. De hecho, ésta es una suposición muy común en el análisis de flujos en campos magnéticos no homogéneos (Talmage y Walker 1988; Sterl 1990; Lavrent'ev et al. 1990; Ting et al. 1993; Sellers y Walker 1999).

En términos dimensionales, colocando el sistema de coordenadas en el centro de una placa rectangular cuyos lados tienen una longitud de $X_0 = 2a$ y $Y_0 = 2b$, la componente normal del campo producido por la placa que se extiende sobre el plano $Z = Z_0$ está dada por (McCaig 1977):

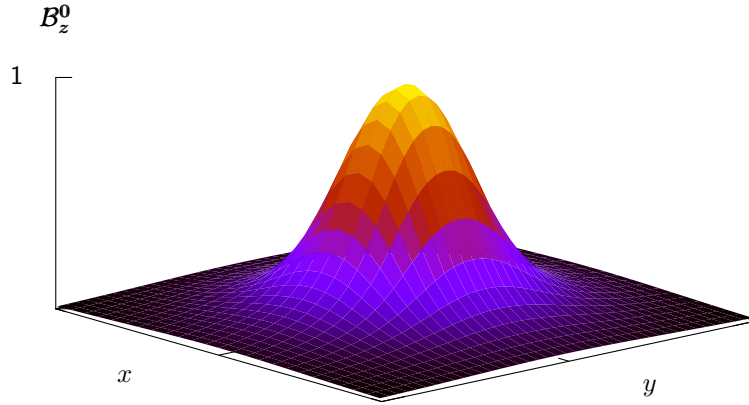


Figura 3.1: Campo magnético aplicado.

$$\begin{aligned}
 B_z^0 = \gamma \ B_{max} \left\{ \right. & \tan^{-1} \left(\frac{(X+a)(Y+b)}{(Z-Z_0)[(X+a)^2 + (Y+b)^2 + (Z-Z_0)^2]^{1/2}} \right) \\
 & + \tan^{-1} \left(\frac{(X-a)(Y-b)}{(Z-Z_0)[(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-Z_0)^2]^{1/2}} \right) \\
 & - \tan^{-1} \left(\frac{(X+a)(Y-b)}{(Z-Z_0)[(X+a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-Z_0)^2]^{1/2}} \right) \\
 & \left. - \tan^{-1} \left(\frac{(X-a)(Y+b)}{(Z-Z_0)[(X-a)^2 + (Y+b)^2 + (Z-Z_0)^2]^{1/2}} \right) \right\} \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

donde B_z^0 es el campo magnético aplicado dimensional y γ es una constante de normalización.

La ecuación (3.1) proporciona la componente normal de un dipolo de tamaño finito y es una buena aproximación del campo magnético no uniforme producido por un imán permanente. Por simplicidad supondremos que la placa magnetizada tiene forma cuadrada, esto es, $2a = 2b = L$. Por lo tanto, L se toma como la escala de longitud geométrica usada para adimensionalizar las variables de flujo. Ya que la placa magnetizada se encuentra en el fondo de la capa de líquido, supondremos que está localizada en $Z = 0$. También se supondrá que el campo magnético aplicado es una función independiente de la coordenada z . La variación del campo en la dirección normal es pequeña dado que el espesor de la capa de fluido es pequeño comparado con la longitud del dominio del flujo en las direcciones x y y . Dicha variación es notable únicamente muy cerca del fondo. Por lo tanto en el núcleo de la capa de fluido la dependencia en z puede despreciarse. La Figura 3.1 muestra la distribución adimensional de la componente normal del campo en la capa de líquido.

La constante de normalización en la ecuación (3.1) ha sido fijada de manera que la máxima intensidad de campo en la región central sea igual a uno. B_z^0 exhibe

un rápido decaimiento conforme la distancia al centro crece: decae de 0.6 en el límite de la placa magnetizada a 0.03 cuando la distancia al centro es dos veces la longitud lateral de la superficie cuadrada. Es importante notar que los efectos de borde debido a la forma cuadrada de la superficie magnetizada son suavizados en el núcleo del flujo.

Debemos señalar que mientras la expresión tridimensional del campo producida por la placa magnetizada satisface exactamente las ecuaciones magnetostáticas (2.27), manteniendo únicamente la componente normal del campo, la condición de irrotacionalidad (2.27b) no se satisface. Sin embargo, el mantener dicha componente es consistente con el hecho de que es ella la que determina la dinámica del flujo. En realidad, las componentes del campo magnético en las direcciones x y y son muy débiles comparadas con la componente normal, y su influencia en el flujo es pequeña. La distribución de campo magnético considerada, proporciona una buena aproximación de un campo no homogéneo y nos lleva a resultados razonables.

3.2. Ecuaciones Bidimensionales

Suponiendo el movimiento del fluido en una "hoja" del plano $x-y$, tenemos que el campo de velocidad es de la forma $\mathbf{u} = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ y el de presiones $P = P(x, y)$. Una vez definidas la velocidad y el campo magnético aplicado, a partir de las ecuaciones (2.23)-(2.24), obtenemos un sistema de ecuaciones bidimensionales:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla_{\perp}^2 u + \frac{Ha^2}{Re} j_y B_z^0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla_{\perp}^2 v - \frac{Ha^2}{Re} j_x B_z^0, \quad (3.4)$$

donde el subíndice \perp denota la proyección del operador ∇ en el plano $x-y$. Como es de esperar, los términos de las componentes de la fuerza de Lorentz en las ecuaciones (3.3) y (3.4), sólo incluyen las corrientes inducidas en el plano de flujo.

Dado que la única componente del campo aplicado está en la dirección z , la ecuación de inducción (2.25) en esta aproximación bidimensional queda de la forma

$$\nabla_{\perp}^2 b_z - u \frac{\partial B_z^0}{\partial x} - v \frac{\partial B_z^0}{\partial y} = 0. \quad (3.5)$$

De la ley de Ampere (2.26b), las componentes de la densidad de corriente eléctrica están dadas por

$$j_x = \frac{\partial b_z}{\partial y}, \quad j_y = -\frac{\partial b_z}{\partial x}. \quad (3.6)$$

La ecuación anterior muestra que el campo magnético inducido actúa como una función de corriente para la densidad de corriente eléctrica.

Esta aproximación de flujo bidimensional puede ser validada mediante cálculos tridimensionales y mediciones experimentales. A este último respecto, los estudios experimentales de Honji (1995), Honji y Haraguchi (1995) y Afanasyev y Korabel (2006), desarrollados en una delgada capa de electrolito, pueden ser indicadores de que es posible llevar a cabo una simulación razonable de este tipo de fenómenos mediante una aproximación bidimensional.

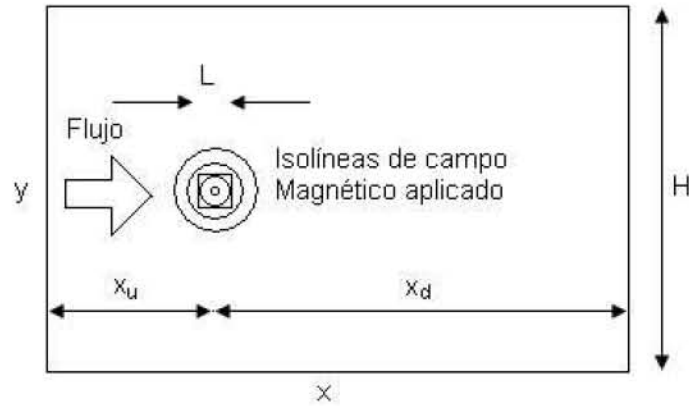


Figura 3.2: Parámetros geométricos y configuración del flujo.

Finalmente, resta establecer condiciones de frontera para la velocidad en el núcleo y el campo magnético inducido. Suponemos que muy lejos del obstáculo se impone un flujo estacionario uniforme en la dirección x . Con el origen de coordenadas localizado en la esquina inferior izquierda de la Figura 3.2, las condiciones de frontera para las componentes de velocidad son

$$u \rightarrow 1 \quad v \rightarrow 0, \quad x, y \rightarrow \pm\infty. \quad (3.7)$$

Es de esperar que la intensidad del campo magnético inducido sea grande en la zona donde el campo aplicado es intenso, y conforme nos alejamos de ésta zona, el campo inducido decrece y se anula en infinito; por lo tanto

$$b_z \rightarrow 0 \quad x, y \rightarrow \pm\infty. \quad (3.8)$$

En la siguiente sección estas condiciones se adaptan con objeto de su implementación numérica.

En la Figura 3.2 se muestran los parámetros geométricos y la configuración del flujo bidimensional. El centro del obstáculo magnético, es decir, el punto de mayor intensidad de campo magnético, se localiza en la dirección vertical en $H/2$ y en la horizontal a una distancia X_u de la entrada y X_d de la salida del dominio; también se observa que las isolíneas de campo magnético aplicado forman círculos concéntricos tanto dentro como fuera de la superficie magnetizada. Los valores de X_u y X_d se miden en unidades de la longitud característica L . H es la separación entre fronteras laterales que determina el parámetro de bloqueo, $\beta = 1/H$, que nos da una idea del efecto de las fronteras laterales sobre el patrón de flujo.

3.3. Método numérico

Para resolver el problema, se ha implementado una solución numérica. En esta sección, se explica en forma resumida el método numérico y las pruebas realizadas para evaluar su desempeño.

3.3.1. Condiciones de Frontera

El flujo principal se supone en la dirección x , y a la entrada se impone un flujo uniforme de la forma

$$u = 1, \quad v = 0. \quad (3.9)$$

En estudios numéricos que involucran el desprendimiento de vórtices, la formulación de la condición de frontera para la salida del flujo ocupa una atención especial, con objeto de evitar errores numéricos. En la literatura de flujos sobre cilindros, las condiciones de frontera más comunes son las de Neumann y las convectivas. Varios análisis numéricos han determinado el desempeño de estas condiciones para diferentes situaciones de flujo (Zdrakovich 1997; Bruneau y Fabrie 1994; Sohankar, Norberg y Davidson 1998, 1999). Aunque las condiciones de frontera convectivas han mostrado la posibilidad de reducir la distancia entre el obstáculo y la salida del flujo sin afectar el patrón global de flujo, las condiciones de Neumann funcionan bien para distancias aguas abajo del flujo, X_d , suficientemente largas. En este trabajo se emplean condiciones de frontera de Neumann a la salida:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (3.10)$$

mientras que en las fronteras laterales se imponen condiciones de tipo simétricas, simulando paredes sin fricción:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v = 0. \quad (3.11)$$

Sin embargo, las pruebas numéricas no muestran un cambio apreciable, si son empleadas condiciones de no deslizamiento en las fronteras, considerando las dimensiones del dominio del flujo empleadas para la solución numérica, esto debido a la pequeña zona ocupada por el obstáculo, en comparación con el dominio del flujo (ver siguiente sección).

Finalmente suponemos que el campo inducido es cero para distancias suficientemente alejadas de la superficie magnetizada:

$$b_z|_S = 0, \quad (3.12)$$

donde el subíndice S denota las fronteras del dominio de integración.

3.3.2. Solución Numérica

La solución numérica se desarrolló usando una formulación basada en las variables primitivas, la velocidad y la presión, así como el campo inducido como variable electromagnética. Para resolver las ecuaciones que gobiernan el flujo (3.2)-(3.5) se empleó un método de diferencias finitas sobre una malla ortogonal equidistante, bajo las condiciones de frontera (3.9)-(3.12), suponiendo un fluido en reposo como condición inicial. Se hizo una discretización espacial de segundo orden para un arreglo de malla escalonada, mientras que, para la discretización temporal se usó el método de Euler. En la integración temporal se consideraron pasos pequeños en el tiempo. Las componentes de velocidad u y v fueron definidas en los puntos medios de las superficies vertical y horizontal de la celda computacional, respectivamente, mientras que la presión y el campo magnético inducido fueron definidos en el centro de la celda, tal como se muestra en la Figura 3.3.

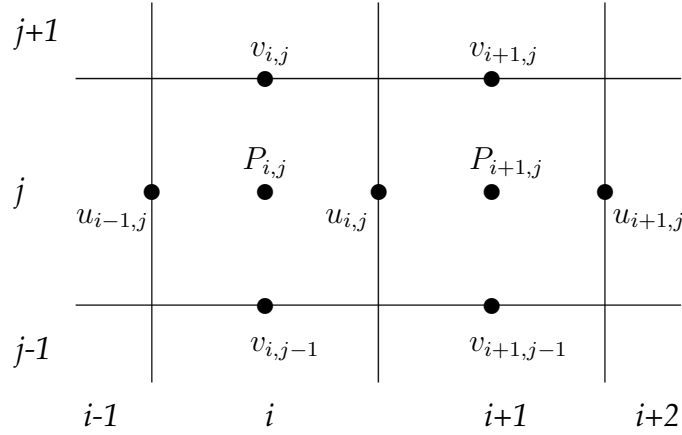


Figura 3.3: Arreglo de la malla computacional.

Los términos difusivos se discretizaron usando diferencias centrales, mientras que para los términos convectivos, se utilizó una mezcla de diferencias centrales y celda donante, como la implementada en Hirt, Nichols y Romero (1975). La solución temporal de las ecuaciones fué basada en el procedimiento descrito en Griebel, Dornseifer y Neunhoffer (1998), el cual se extendió para considerar flujos MHD. La discretización temporal de las ecuaciones de momento (3.3) y (3.4) fue explícita en las velocidades e implícita en la presión:

$$u^{(n+1)} = F - \delta t \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v^{(n+1)} = G - \delta t \frac{\partial P}{\partial y},$$

donde

$$F = u^{(n)} + \delta t \left[\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{Ha^2}{Re} j_y B_z^0 \right],$$

$$G = v^{(n)} + \delta t \left[\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(v^2)}{\partial y} - \frac{Ha^2}{Re} j_x B_z^0 \right],$$

La ecuación de continuidad se satisface resolviendo una ecuación de Poisson para la presión p^{n+1} al tiempo t_{n+1} . Este algoritmo corresponde al método de proyección de Chorin (Chorin 1968). Dicha ecuación se resuelve por el método de Gauss-Seidel sujeta a condiciones homogéneas de Neumann en la frontera, simulando condiciones para un flujo muy alejado del obstáculo (velocidad constante), comúnmente usadas en el análisis de flujos a través de obstáculos sólidos en dominios sin fronteras. La ecuación de Poisson fue iterada hasta alcanzar valores para la divergencia del campo de velocidad del orden de 10^{-5} . La ecuación para el campo magnético inducido (3.5) fue resuelta en t_{n+1} usando el mismo método. En lo que corresponde a las componentes de la densidad de corriente eléctrica, éstas se calculan de la ecuación (3.6), de modo que la condición de divergencia cero se satisface a través de la identidad $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) = 0$.

3.3.3. Parámetros globales de flujo

Con objeto de caracterizar el desempeño del esquema numérico bajo distintas condiciones, se analiza el comportamiento de tres parámetros globales del flujo.

Dada la similitud con el flujo sobre obstáculos sólidos, se usa el coeficiente base de presión, C_{pb} , el número de Strouhal, S_t y el déficit de velocidad R , para caracterizar el flujo. El coeficiente base de presión se define como (Blackburn y Henderson 1999)

$$C_{pb} = 1 + \frac{P_{180} - P_0}{P_d}, \quad (3.13)$$

donde P_{180} y P_0 son las presiones en puntos aguas arriba y aguas abajo sobre la superficie del obstáculo respectivamente, y P_d es la presión dinámica debida al flujo libre incidente sobre el obstáculo $\rho U^2/2$. Dado que en nuestro problema no se tiene un obstáculo sólido, consideramos a P_{180} y P_0 como las presiones en el eje central del dominio, en los puntos aguas arriba y aguas abajo del obstáculo magnético, sobre el perímetro formado por la proyección de la placa magnetizada en el plano del movimiento. De hecho, se ha encontrado que en el flujo sobre obstáculos sólidos, C_{pb} o su negativo (conocido como el coeficiente base de succión) responde en forma sensible a las inestabilidades del flujo en los diferentes regímenes de flujo (Williamson 1996). El número de Strouhal se usa comunmente para caracterizar el desprendimiento de vórtices y se define como

$$S_t = \frac{fL}{U}, \quad (3.14)$$

donde f es la frecuencia de desprendimiento. En este estudio, el número de Strouhal se determinó de los valores fluctuantes de vorticidad en la estela detrás del obstáculo.

Otro parámetro global empleado es el déficit de velocidad (Chen y Jirka 1997), R , que no es otra cosa que la componente u de la velocidad en la dirección x , pesada con la velocidad de entrada. Está dado por la expresión

$$R = \frac{U_m - U_a}{U_m + U_a}, \quad (3.15)$$

donde U_m es la velocidad en la línea central de la dirección del flujo y U_a es la velocidad de entrada impuesta (en nuestro caso $U_a = 1$).

Cuando $R = 0$, significa que tenemos flujo uniforme; si $R = -1$, se tiene que en la estela la velocidad en la línea central del flujo es cero; por otro lado, la condición $R < -1$, implica la existencia de flujo en dirección opuesta al flujo incidente en la línea central, es decir, indica la presencia de recirculaciones. Conforme avanzamos en la estela del flujo, se espera que el valor de R tome valores negativos crecientes, alcance un máximo (negativo) y disminuya hasta llegar a cero para distancias muy largas.

3.3.4. Resolución de la malla, paso en tiempo y localización del obstáculo

En la solución numérica de flujos hidrodinámicos a través de obstáculos sólidos, el uso de mallas no uniformes es bastante común, dada la necesidad de tener una buena resolución cerca del obstáculo sólido y una no tan buena detrás de la estela (e.g. Sohankar et al. 1998, 1999; Blackburn y Henderson 1999). Es necesaria la solución adecuada de las capas límite sobre el obstáculo sólido para una correcta descripción del flujo. Sin embargo, se han usado mallas uniformes con buenos resultados en el problema del flujo alrededor de un cilindro de sección transversal cuadrada bajo un campo magnético uniforme (Mück et al. 2000); así como en el flujo sobre obstáculos magnéticos a través de placas paralelas aislantes, (Cuevas

et al. 2006a). Dada la similitud con este último trabajo, resulta más conveniente emplear una malla ortogonal equidistante; además, recordemos la inexistencia de obstáculos sólidos por lo que no tenemos capas límites delgadas que resolver. Sin embargo, estamos obligados a emplear mallas suficientemente finas para resolver las capas cortantes formadas en la vecindad del obstáculo y en la estela del flujo.

Se exploraron cuatro distintos números de Reynolds 50, 100, 150 y 200. En todos los casos el número de Hartmann se varió en el intervalo $1 \leq Ha \leq 100$. Bajo éstas condiciones, los experimentos numéricos han mostrado estructuras de flujo con distintos tamaños. Las más pequeñas se comparan con la longitud de la placa magnetizada, aunque también se tienen estructuras más grandes en la estela. Dichas estructuras también fueron observadas en los experimentos de Honji y Haraguchi (1995) y Afanasyev y Korabel (2006). Con base en el trabajo reportado por Cuevas et al. (2006a) fueron seleccionados los siguientes parámetros: el factor de bloqueo para la configuración del flujo es 5% ($y = 20$ unidades), la longitud del dominio del flujo en $x = 35$ unidades, celdas de tamaño constante de $\Delta_x = 0.165$ y $\Delta_y = 0.1$ con un tamaño de malla de 212×201 ; en lo que respecta a la integración en tiempo, ésta se hizo considerando un $\Delta = 0.005$; la posición de la placa magnetizada a una distancia $X_u = 10$ de la entrada, quedando una distancia $X_d = 25$ aguas abajo.

Evidentemente, X_u , X_d y H son parámetros relevantes no sólo para efectos hidrodinámicos, sino también por consideraciones magnetohidrodinámicas. En realidad, dichas distancias deben ser suficientemente grandes para que el campo magnético inducido sea cero en las fronteras. A este respecto, el campo inducido decae muy rápido; en el rango de números de Hartmann explorados en este trabajo, varía en valores del orden de 10^{-2} en la zona de máxima intensidad del campo aplicado hasta 10^{-3} a una distancia de 10 unidades en la dirección del flujo, y del orden de 10^{-5} a la misma distancia pero ahora en la dirección transversal al flujo. Por lo tanto, los factores geométricos están determinados principalmente por los requerimientos hidrodinámicos.

3.3.5. Descripción cualitativa del flujo

El flujo sobre un obstáculo magnético guarda cierta similitud con el flujo en un ducto a la entrada y salida de los polos de un imán (Müller y Bühler 2001; Moreau 1990); sin embargo, el tamaño del obstáculo y la ausencia de paredes laterales cambian de manera considerable la estructura del flujo. En este flujo se presentan cuatro diferentes regiones de campo magnético no homogéneo localizadas cerca de los bordes de la placa magnetizada. Las regiones laterales (paralelas al flujo incidente) tienen en la mayoría de los casos efectos secundarios sobre el flujo, mientras que las regiones de entrada y salida (transversales al flujo incidente) son de primordial importancia. Al atravesar el obstáculo, el fluido pasa en una distancia muy corta de una región en la que casi no hay campo magnético a una con $O(1)$ de intensidad y otra vez a una región de campo magnético prácticamente nulo. Pueden observarse diferentes regímenes de flujo dependiendo de los valores del número de Reynolds y Hartmann. Para los números de Reynolds explorados, fueron encontradas tanto soluciones estacionarias como periódicas dependiendo del valor del Ha .

En la región donde la intensidad del campo aplicado es baja, la fuerza electromotriz $\mathbf{u} \times \mathbf{B}^0$ induce un voltaje bajo; donde el campo es más intenso induce un voltaje alto. La diferencia de voltaje genera una corriente eléctrica en la dirección del flujo para $y > 0$ y en la dirección opuesta para $y < 0$. Estas corrientes forman circuitos cerrados aguas arriba y aguas abajo del obstáculo. Cuando el fluido se mueve hacia la salida, la diferencia de potencial se invierte, al igual que la circulación de

corriente.

Aguas arriba del obstáculo la corriente circula en la dirección de las manecillas del reloj, y produce un campo magnético inducido en la dirección contraria al campo aplicado, en concordancia con la Ley de Lenz. Por otro lado, aguas abajo del obstáculo, la circulación de corriente es en sentido antihorario, y el campo magnético inducido apunta en la dirección del campo aplicado. El número y estructura particular de los circuitos de corriente dependen tanto del número de Reynolds como de Hartmann, como se muestra en los resultados numéricos.

Para el flujo en un ducto a la entrada o salida de los polos de un imán, las paredes laterales del ducto, confinan los circuitos de corriente de tal forma que son elongados en la dirección del flujo, intensificando las componentes de la densidad de corriente en dicha dirección. Esto es de particular importancia cuando las paredes laterales son eléctricamente aislantes. Las componentes de la densidad de corriente en la dirección del flujo dan lugar a fuerzas de Lorentz que apuntan hacia las paredes laterales. Lo anterior, provoca la expulsión del flujo volumétrico del centro del ducto hacia las capas límite de las paredes, en donde las velocidades son mayores, formándose un perfil de velocidad en forma de "M" (Müller y Bühler 2001; Moreau 1990). En contraste, para un flujo a través de un obstáculo magnético, donde las paredes laterales están ausentes, los circuitos de corriente tienden a distribuirse en el dominio del flujo. En la región donde el campo magnético es intenso, la corriente cierra a través de las zonas laterales donde el campo magnético es no homogéneo, en consecuencia, dominan las componentes transversales de la densidad de corriente. De hecho, en esta región la densidad de corriente eléctrica es mayor y apunta en la dirección negativa, transversal al flujo.

La densidad de corriente interactúa con el campo magnético del obstáculo, dando lugar a una fuerza de Lorentz no uniforme, oponiéndose al flujo y creando vorticidad. Lo anterior causa un incremento en la presión en la vecindad aguas arriba del obstáculo, mientras que aguas abajo, cae abruptamente. Para $Re < 50$ y números de Hartmann pequeños ($Ha \approx 1 - 10$), el fluido se mueve con velocidad reducida a través de la región de campo magnético intenso, tal como se muestra en la Figura 3.4. Conforme el número de Hartmann aumenta y la oposición de la fuerza de Lorentz es más intensa, el fluido a la entrada tiende a fluir alrededor del obstáculo, y aparece un componente de la velocidad transversal al flujo, formándose una estructura de flujo como la que se observa en la Figura 3.5.

El flujo a través de un obstáculo magnético, muestra algunas regiones características observadas en flujos a través de un obstáculo sólido, por ejemplo, región de flujo retardado aguas arriba del obstáculo, dos regiones laterales de flujo desplazado y acelerado, y una estela aguas abajo del obstáculo (Zdravovich 1997; Oertel 1990). En las zonas laterales la velocidad es mayor que cerca de la zona central, donde la fuerza de oposición es más intensa. Lo anterior ocasiona un "déficit" de velocidad en el centro y la aparición de dos capas cortantes paralelas y alineadas con la dirección principal del flujo, donde existe un máximo y un mínimo de vorticidad. Cuando el número de Hartmann es alrededor de 20, el flujo llega a estancarse en la región de campo intenso, mientras que en regiones alejadas del obstáculo permanece sin ser perturbado. Si el número de Hartmann es suficientemente grande aparecen vórtices, en la vecindad de la estela. Estos vórtices aunque son creados por fuerzas de Lorentz, evolucionan dentro de un campo magnético despreciable. Cuando los efectos convectivos y el frenado magnético son lo suficientemente intensos, la estela puede llegar a desestabilizarse y presentar un comportamiento no estacionario. De hecho, puede observarse un desprendimiento periódico de vórtices similar a la calle de von Kármán en el flujo alrededor de un cilindro como el mostrado en la Figura

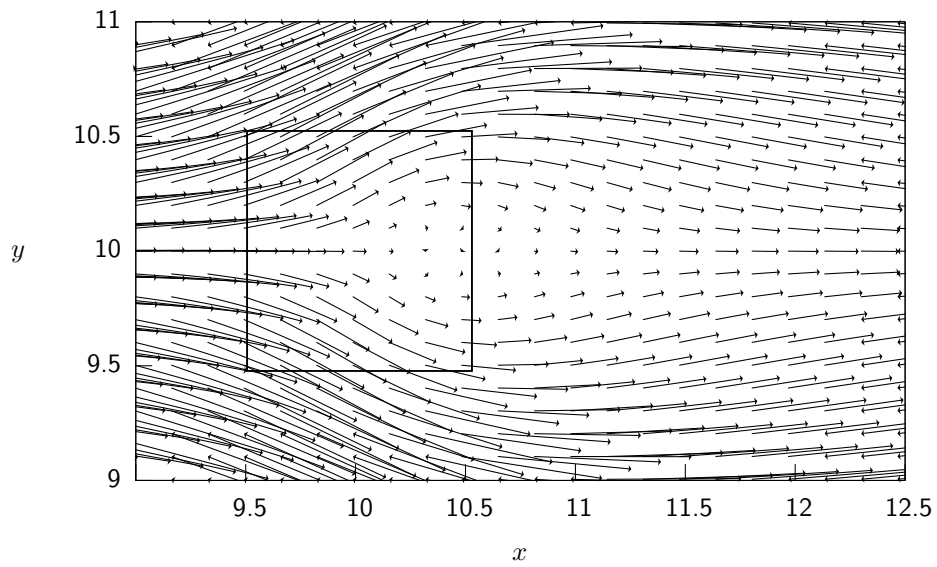


Figura 3.4: Campo de velocidades para $Re = 10$ y $Ha = 11.5$.

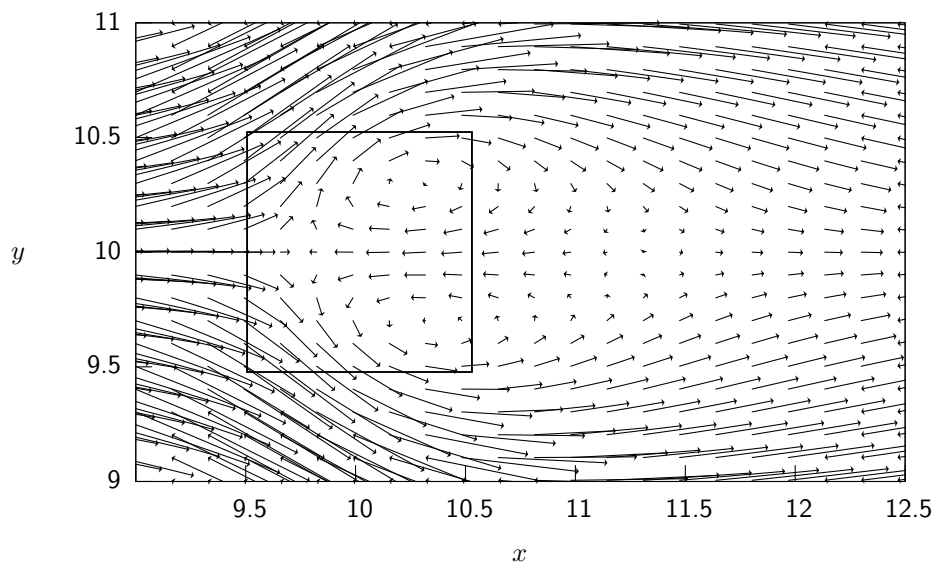


Figura 3.5: Campo de velocidades para $Re = 10$ y $Ha = 15$.

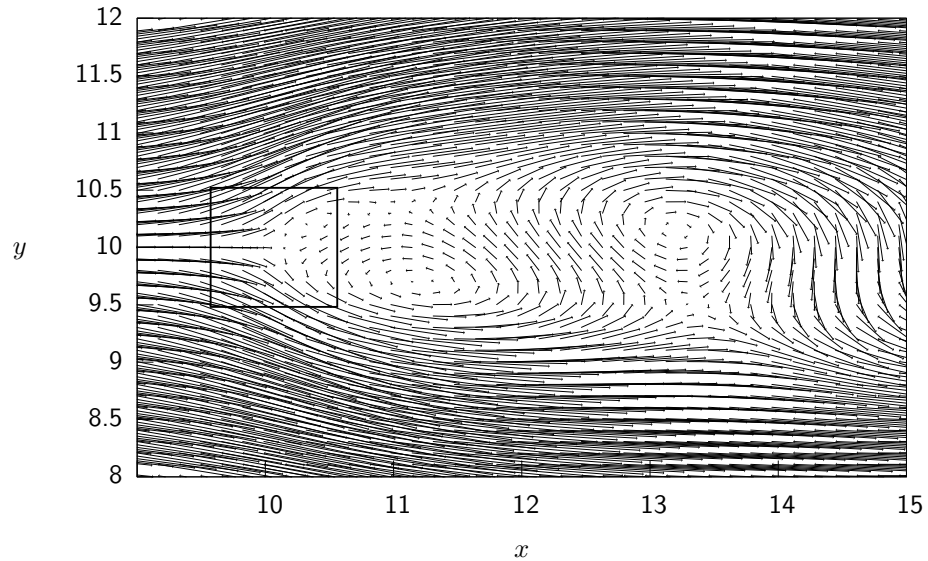


Figura 3.6: Campo de velocidades para $Re = 100$ y $Ha = 27$.

3.6. En la siguiente sección presentaremos algunos de los resultados obtenidos.

3.4. Resultados

Aquí presentamos los resultados para los números de Reynolds explorados: 50, 100, 150 y 200 en el rango de números de Hartmann $1 \leq Ha \leq 100$. Bajo éstas condiciones el flujo laminar puede exhibir tanto soluciones estacionarias como dependientes del tiempo. Para cada número de Reynolds se detectaron tres regímenes distintos para el flujo laminar, dependiendo del número de Hartmann: estacionario, de transición y desprendimiento periódico de vórtices. Primeramente, se presenta una descripción de estos regímenes para $Re = 50$ y $1 \leq Ha \leq 100$, para más adelante discutir las variaciones conforme aumentamos el número de Reynolds.

Los resultados se muestran en un dominio de 35×20 unidades adimensionales y el origen de coordenadas se ha colocado en la esquina inferior izquierda. Por su parte, el centro de la placa magnetizada está localizado en las coordenadas (10,10).

3.4.1. Flujo estacionario

Para el caso de $Re = 50$, este régimen se presenta en el rango $1 \leq Ha < 20$. Después de un estado transitorio, el flujo exhibe un comportamiento estable, independiente del tiempo, caracterizado por la formación de dos circuitos de campo magnético inducido aguas arriba y abajo del obstáculo, además de la formación de una estela de baja velocidad detrás de éste. La Figura 3.7 muestra isolíneas de campo magnético inducido para el caso $Ha = 10$ ($N = 2$). Puede observarse que existe una gran simetría en las isolíneas, lo que muestra que los efectos de convección de campo magnético son despreciables.

El campo magnético inducido toma valores negativos aguas arriba del obstáculo y cambia suavemente a valores positivos aguas abajo. Dentro del obstáculo, la

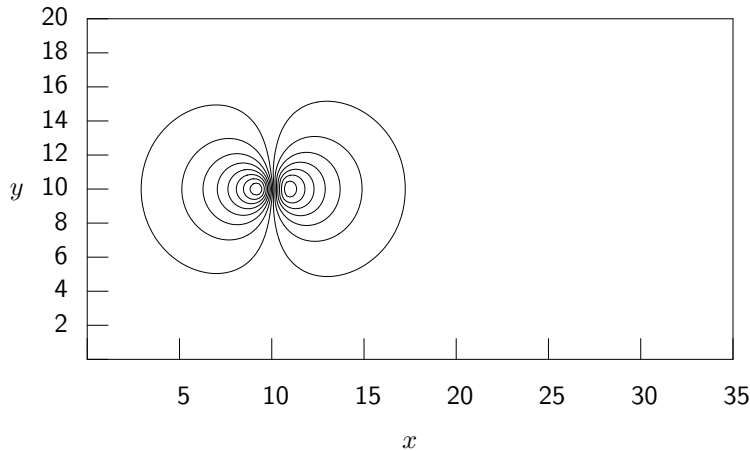


Figura 3.7: Isolíneas de Campo Inducido para $Re = 50$ y $Ha = 10$.

corriente eléctrica se distribuye uniformemente y apunta en la dirección negativa del eje y ; por lo tanto, la interacción con el campo magnético produce una fuerza de Lorentz que se opone al movimiento del fluido. En consecuencia, la presión aumenta aguas arriba conforme nos acercamos al obstáculo y cae en forma repentina aguas abajo, en una distancia del orden de la longitud característica, tal como se muestra en la Figura 3.8.

La Figura 3.9 muestra las isolíneas de vorticidad en la región de flujo. Recordemos que la única componente de la vorticidad está dada por

$$w_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.16)$$

Puede observarse una estela que se extiende a lo largo de toda la región de integración aguas abajo, mientras que su grosor de 5 unidades se mantiene aproximadamente constante.

El efecto de la convección se muestra claramente en las isolíneas de vorticidad aunque se observa una simetría respecto al eje horizontal.

En las Figuras 3.10 y 3.11 se muestran perfiles tanto de la componente axial de la velocidad, u , como de la transversal, v , para distintas posiciones en la dirección x . También se muestran perfiles de vorticidad para los números de Hartmann y Reynolds mencionados (Figuras 3.12 y 3.13). Dichos perfiles se asemejan a los encontrados en el flujo laminar alrededor de un cilindro para números de Reynolds bajos (Zdravovich 1997; Oertel 1990). La componente axial de la velocidad muestra claramente el déficit de velocidad que se presenta en la vecindad del obstáculo debido a la fuerza de Lorentz. La componente de velocidad transversal al flujo es un orden de magnitud más pequeña que aquella en la dirección del flujo, y tiene su valor máximo cerca de los bordes del obstáculo. La presencia de una componente de velocidad transversal al flujo en la región del obstáculo da lugar a un flujo cortante local, cada vez más pronunciado conforme aumenta el número de Hartmann. Sin

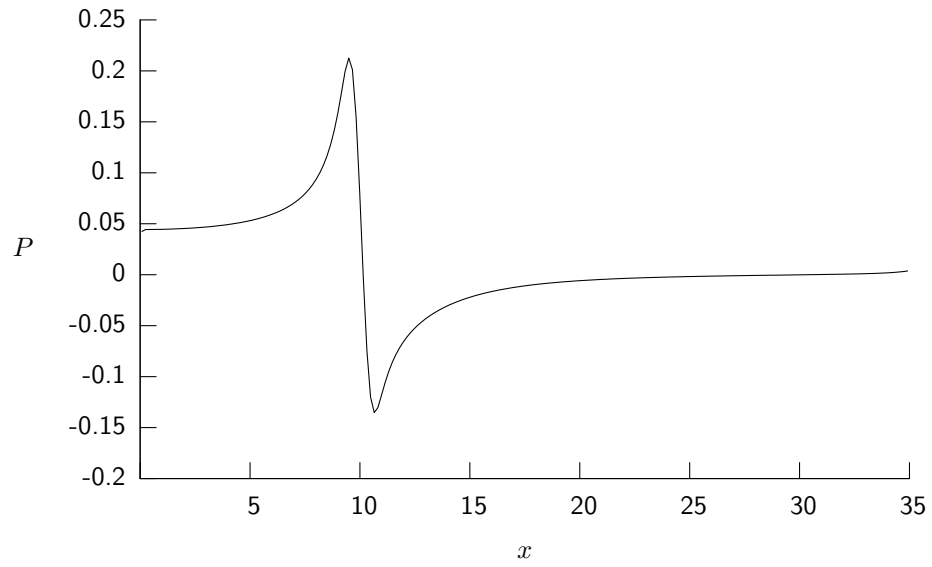


Figura 3.8: Perfil de Presión para el dominio del flujo en $y = 10$ para $Re = 50$ y $Ha = 10$.

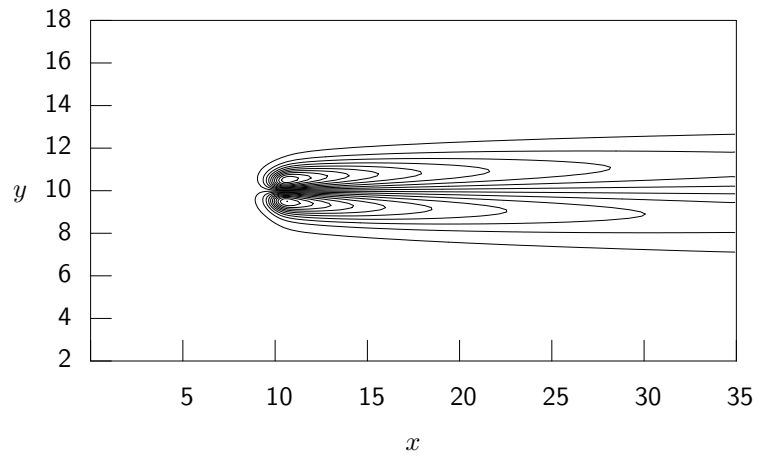


Figura 3.9: Isólinas de Vorticidad para $Re = 50$ y $Ha = 10$.

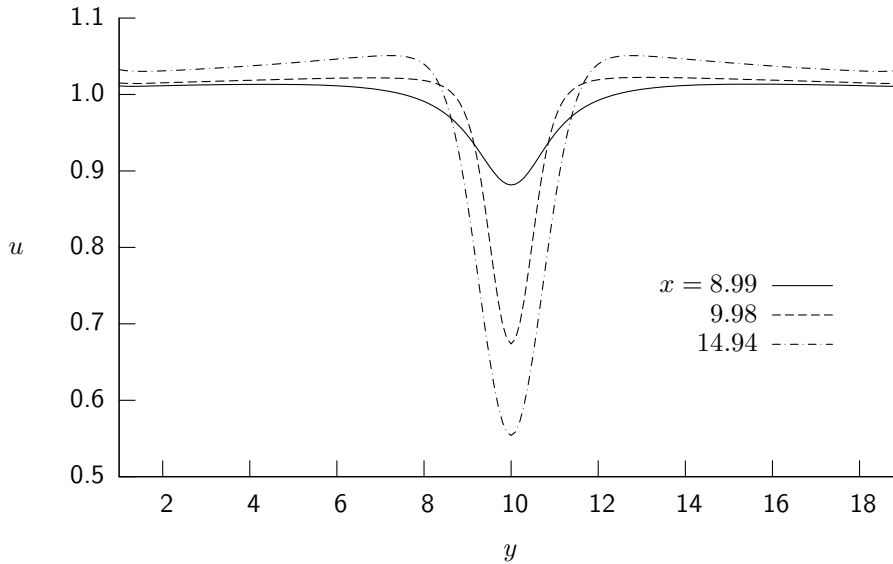


Figura 3.10: Componente u de la velocidad vs. y para $Re = 50$ y $Ha = 10$.

embargo, no se observan regiones de estancamiento ni de recirculación de flujo. Esta es una característica del flujo en este intervalo del número de Hartmann.

Los perfiles de vorticidad de las Figuras 3.12 y 3.13 toman valores negativos y positivos y claramente muestran la formación de la estela. Por otro lado, la magnitud de la vorticidad al final de la estela es ligeramente menor que la mitad del valor máximo, que se encuentra dos unidades aguas abajo del centro del obstáculo.

Los casos anteriores fueron para $Re = 50$ y $Ha = 10$ que corresponde a $N = 2$. Ahora se explorara el caso en que $N = 1$, es decir, cuando la fuerza magnética es del mismo orden de magnitud que la inercial, que se logra con $Re = 100$ y manteniendo el mismo valor del número de Hartmann, $Ha = 10$. Ya que el número Reynolds es incrementado al doble es de esperar que los efectos convectivos sean más notorios.

En la Figura 3.14 se exhibe un comportamiento similar al observado en la Figura 3.7 para el campo magnético inducido. Sin embargo, los efectos convectivos se manifiestan a través de una ligera elongación de las isolíneas en la dirección del flujo.

En lo que respecta a la vorticidad, la Figura 3.15 muestra que ahora la estela tiene un espesor de 4 unidades, ligeramente más estrecha que antes.

Mientras que en la Figura 3.10 ($Re = 50$, $Ha = 10$) se observa que la componente u de la velocidad en la dirección del flujo alcanza un mínimo de 0.55 en $y = 10$ y $x = 14.94$, en la Figura 3.16 observamos que para $Re = 100$ y $Ha = 10$, en la misma posición la velocidad alcanza un mínimo de 0.72. Esto muestra que al aumentar los efectos convectivos manteniendo la intensidad del obstáculo, el fluido es desacelerado en menor grado por lo que existe un déficit de velocidad menor.

Al igual que la componente u , la componente de v de la velocidad tiene una magnitud menor, prácticamente la mitad que para el caso $N = 2$; lo mismo ocurre con las componentes de la vorticidad, como se aprecia en las Figuras 3.17-3.19. Esto indica que el aumento de Re para el mismo valor de Ha , ocasiona una disminución de las capas cortantes que se generan en la vecindad del obstáculo magnético.

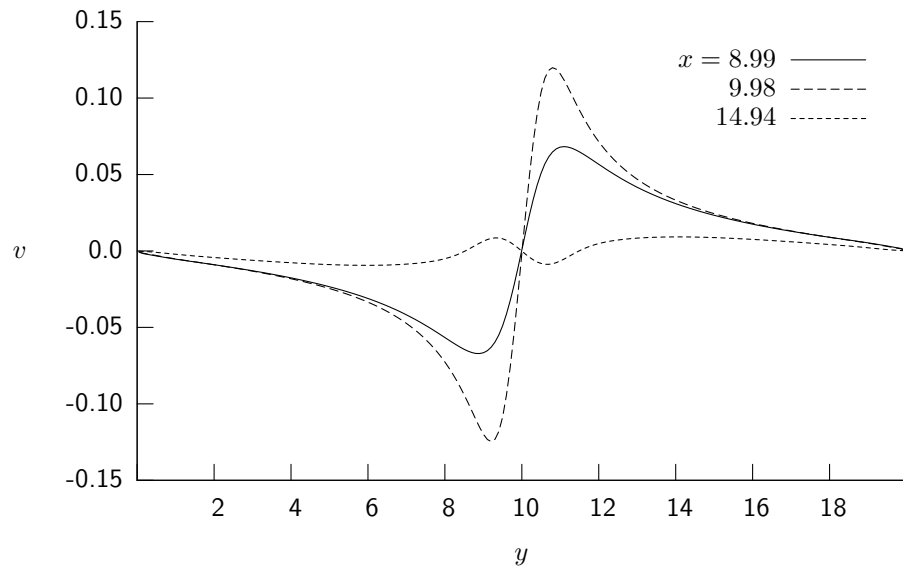


Figura 3.11: Componente v de la velocidad vs. y para $Re = 50$ y $Ha = 10$.

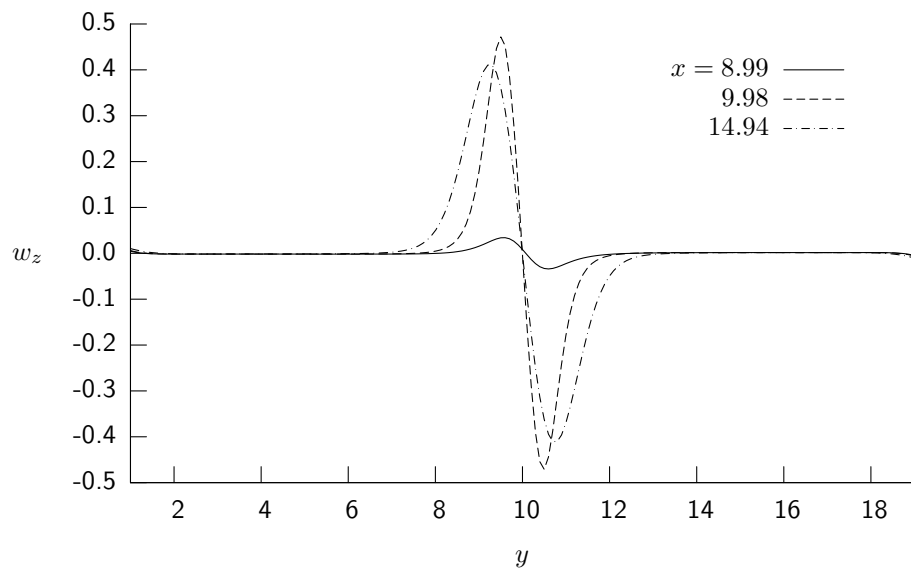


Figura 3.12: Vorticidad vs. y para $Re = 50$ y $Ha = 10$.

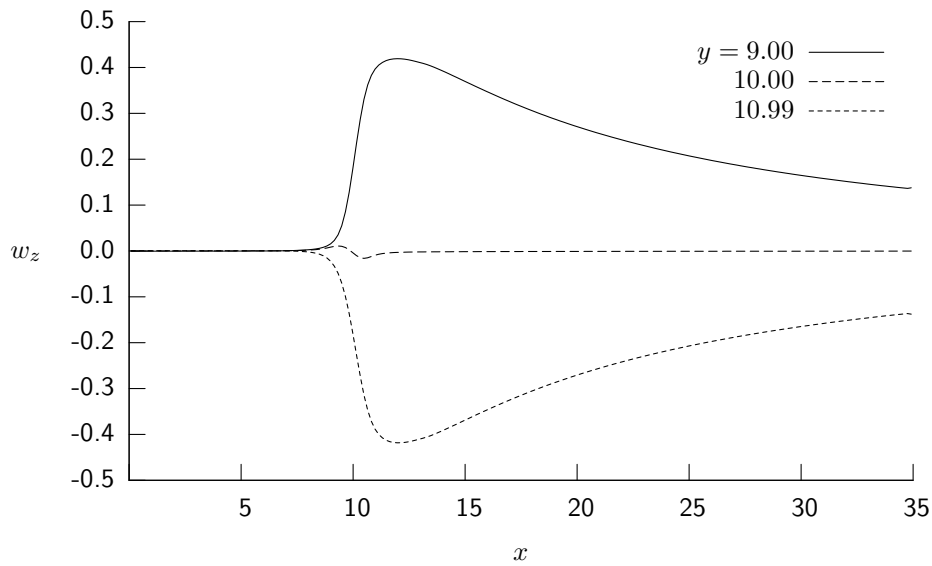


Figura 3.13: Vorticidad vs. x para $Re = 50$ y $Ha = 10$.

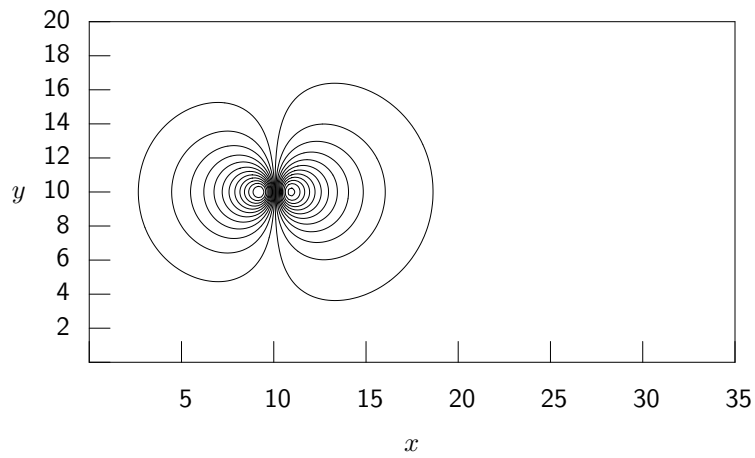


Figura 3.14: Isolíneas de Campo Inducido para $Re = 100$ y $Ha = 10$.

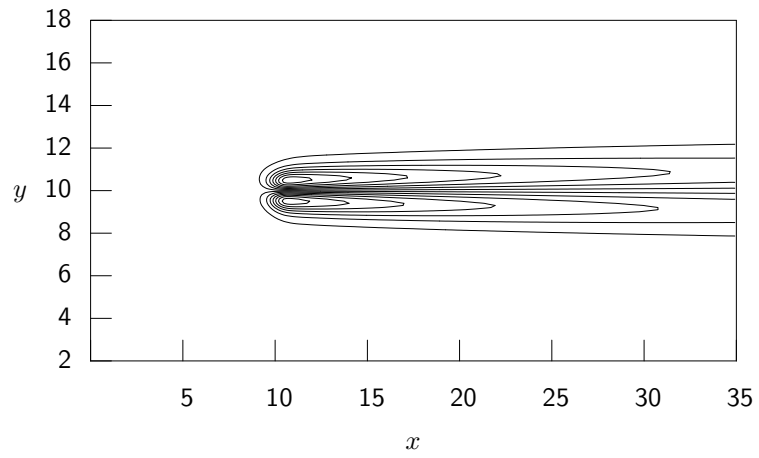


Figura 3.15: Isolíneas de Vorticidad para $Re = 100$ y $Ha = 10$.

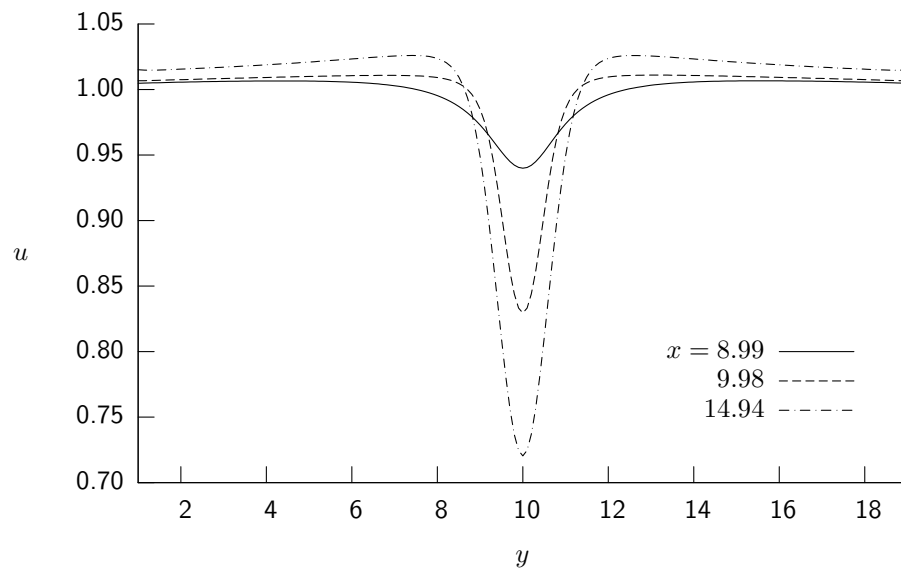


Figura 3.16: Componente u de la velocidad vs. y para $Re = 100$ y $Ha = 10$.

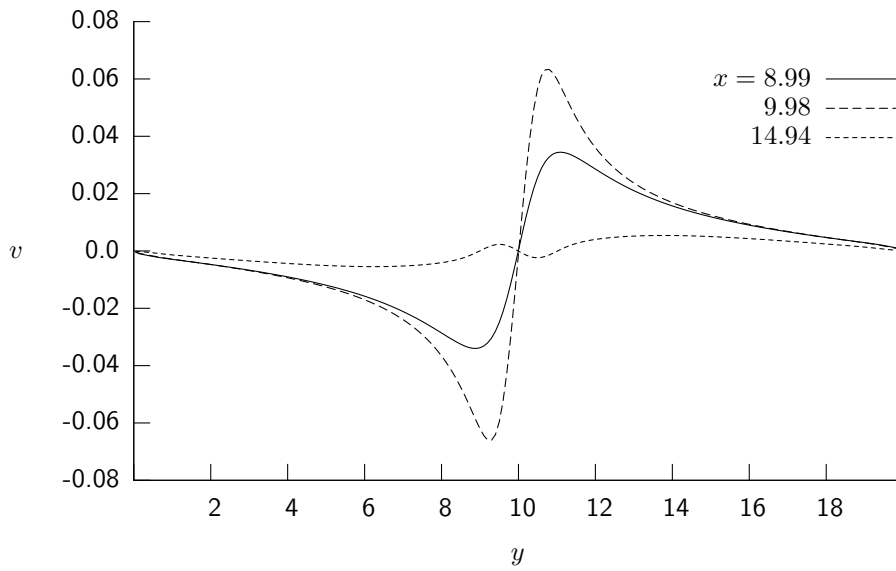


Figura 3.17: Componente v de la velocidad vs. y para $Re = 100$ y $Ha = 10$.

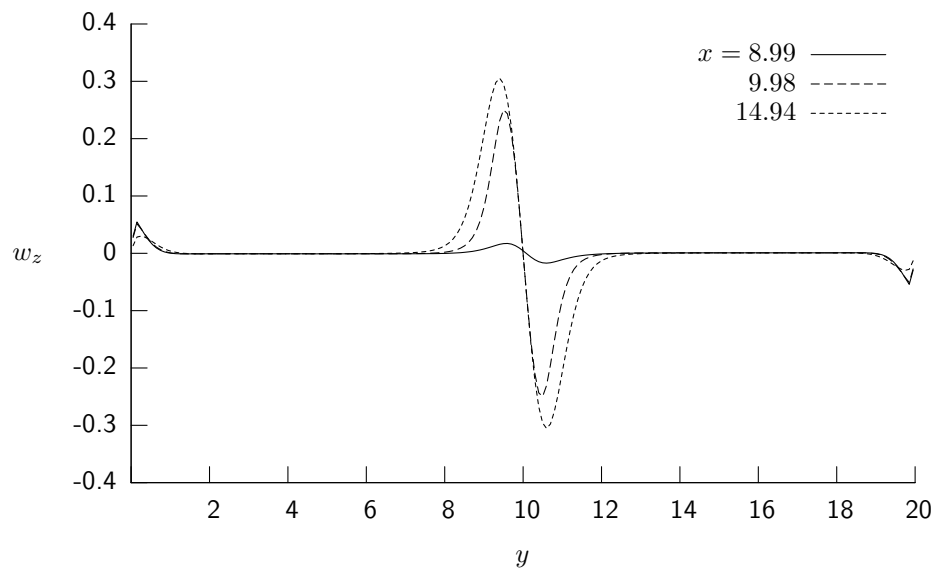


Figura 3.18: Vorticidad vs. y para $Re = 100$ y $Ha = 10$.

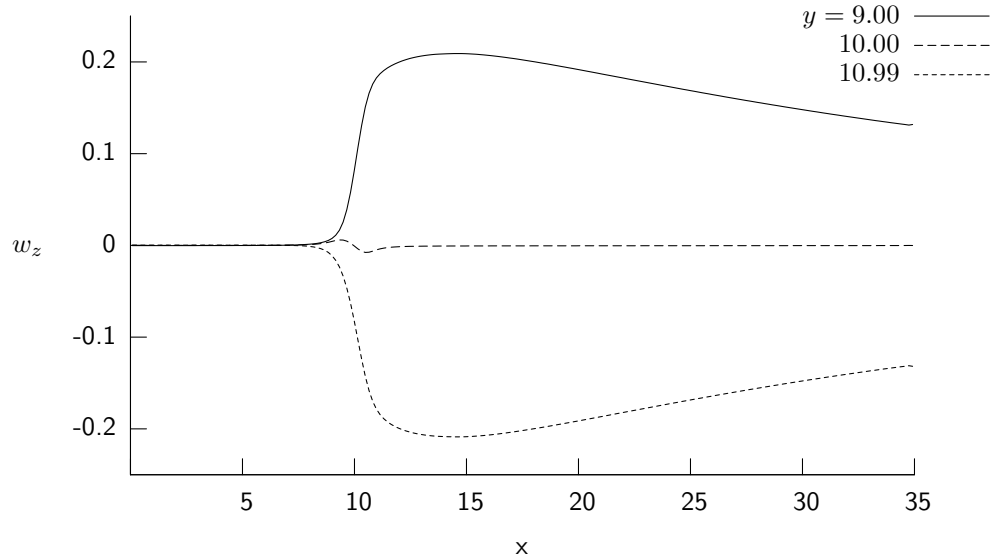


Figura 3.19: Vorticidad vs. x para $Re = 100$ y $Ha = 10$.

3.4.2. Flujo en Transición

En este régimen se presenta la transición entre un flujo estacionario y un flujo con desprendimiento periódico de vórtices.

Para el caso en que $Re = 50$, la transición de flujo ocurre en el rango $20 \leq Ha < 30$. En este régimen el flujo desarrolla de manera incipiente un comportamiento periódico en el tiempo, caracterizado principalmente por la formación de vórtices alargados en la dirección del flujo y que eventualmente se desprenden en forma alternada. La Figura 3.20 muestra la vorticidad para distintos valores del número de Hartmann como una función del tiempo, medida en el punto marcado por \mathbf{X} , cinco unidades aguas abajo del centro del obstáculo, sobre la línea media horizontal y durante 400 unidades de tiempo adimensional. Para cada gráfica de vorticidad se presenta al lado derecho su respectivo campo de velocidades que muestra únicamente la región donde el flujo se perturba mayormente por la presencia del obstáculo, los campos de velocidades corresponden a $t = 400$. Se observa que para $Ha = 25$ ($N = 12.50$), el campo de velocidades muestra dos puntos de estancamiento sobre la línea media en la dirección axial y la presencia de recirculaciones. Se observa la formación de una estela compuesta de un vórtice superior y uno inferior, alargados en la dirección del flujo y que giran en sentido horario y antihorario, respectivamente. Dichos vórtices se localizan una unidad de longitud aguas abajo del centro del obstáculo, y sus dimensiones son de 7 unidades de longitud y 0.7 de grosor cada uno, aproximadamente. Este flujo presenta un comportamiento estacionario; a pesar de la formación de vórtices las capas cortantes formadas en la región del obstáculo no alcanzan a desestabilizar al flujo, debido a la acción disipativa de la viscosidad. El campo de velocidades formado nos permite suponer la existencia de un balance entre las fuerzas presentes en el flujo, es decir, inercial, magnética y viscosa. Al aumentar ligeramente el número de Hartmann, $Ha = 25.5$ ($N = 13$), comienza a observarse una ligera oscilación en la estela, presente de manera más notoria a

partir de 175 unidades de tiempo adimensional. El campo de velocidades muestra que a pesar del incremento de la fuerza magnética, la interacción de ésta con las fuerzas inerciales y viscosas no es suficiente para desestabilizar al flujo, mostrando un comportamiento muy similar al caso anterior.

Para $Ha = 26$ ($N = 13.52$) es más clara la oscilación, aumentando ligeramente la amplitud hacia el final del intervalo de tiempo analizado. Esto se debe a que la fuerza magnética presenta una mayor oposición a la inercia del flujo. A su vez, la fuerza viscosa ya no es la suficiente como para atenuar las perturbaciones en las capas cortantes más gruesas presentes en la región del obstáculo. Esto se refleja en una ligera falta de simetría en el campo de velocidades con respecto a la línea horizontal al final de la estela, en donde alcanza a observarse una muy ligera perturbación en el par de vórtices alargados en la dirección del flujo. Para este número de Hartmann se tiene el valor crítico que determina la oscilación permanente de la estela en el tiempo. En $Ha = 27$ ($N = 14.58$) se muestra un aumento considerable en la amplitud de la oscilación; inicialmente la amplitud de la oscilación es prácticamente nula, pero conforme transcurre el tiempo la amplitud va en aumento, alcanzando al final del intervalo un valor de casi el triple que para el caso anterior. En estas condiciones, el campo de velocidades muestra desprendimiento periódico de vórtices, los cuales recorren una distancia aproximada de 6 unidades a lo largo de la estela antes de desaparecer.

Podemos afirmar que para el número de Reynolds analizado ($Re = 50$) el régimen transitorio finaliza aproximadamente cuando $Ha < 30$. Sin embargo, para dar una visión más completa del surgimiento de la inestabilidad, mostraremos algunos resultados para un número de Hartmann mayor.

En la Figura 3.21 observamos que al seguir aumentando el número de Hartmann hasta un valor de $Ha = 30$ ($N = 18$) la oscilación se mantiene a una amplitud que después de un estado transitorio, tiende a un valor constante de 0.6 aproximadamente, 4 veces mayor que para $Ha = 27$. En este caso los vórtices generados se desarrollan y desprenden alcanzando un tamaño mayor que para casos anteriores; la distancia recorrida por los vórtices una vez que se han desprendido es aproximadamente de 3 unidades adimensionales para después desaparecer debido a la acción de la viscosidad. Para un valor de $Ha = 40$ ($N = 32$) la amplitud de la oscilación es prácticamente constante durante todo el tiempo con un valor de 0.6, presentando un transitorio muy pequeño. El desprendimiento de vórtices es casi simultáneo a su formación, como se observa en el campo de velocidades, mientras que la distancia recorrida por los vórtices es ligeramente mayor a 2.5 unidades adimensionales. En este caso toda la estela formada por el flujo se encuentra claramente oscilando.

Una manera conveniente de caracterizar los diversos patrones de flujo, en particular la aparición de recirculaciones y el surgimiento de inestabilidades, es a través del déficit de velocidad, R , definido en la ecuación (3.15). En la Figura 3.22 se muestran curvas de déficit de velocidad para $Re = 50$ y cuatro distintos números de Ha ; es claro que el mayor déficit de velocidad se presenta en la zona cercana al centro del obstáculo magnético.

Para valores de Ha en el rango del régimen estacionario, $Ha = 15$, se observa que el mínimo para el déficit de velocidad no alcanza el valor de -1 , lo que nos indica que no existen recirculaciones. Por otra parte, cuando estamos en el intervalo de flujo en transición como es el caso de $Ha = 20$ y $Ha = 25$, $R < -1$, lo que indica la presencia de recirculaciones. Situación que podemos confirmar observando la Figura 3.20, donde el campo de velocidades muestra dos vórtices alargados. La curva correspondiente a $Ha = 30$, también presenta recirculaciones, pero además muestra un comportamiento oscilatorio que muestra la aparición de la inestabilidad

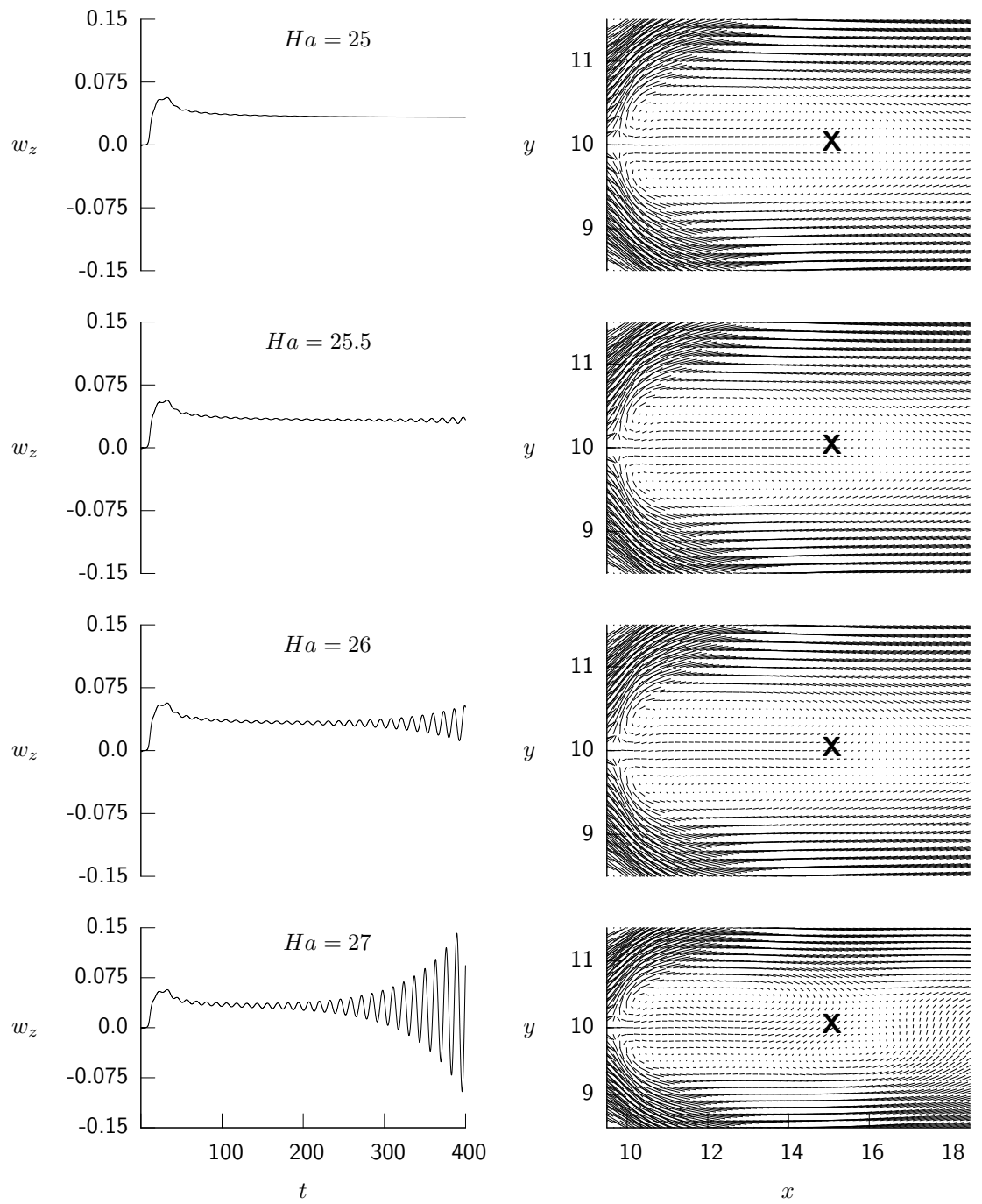


Figura 3.20: Vorticidad vs. t y campo de velocidades para $Re = 50$ y distintos Ha .

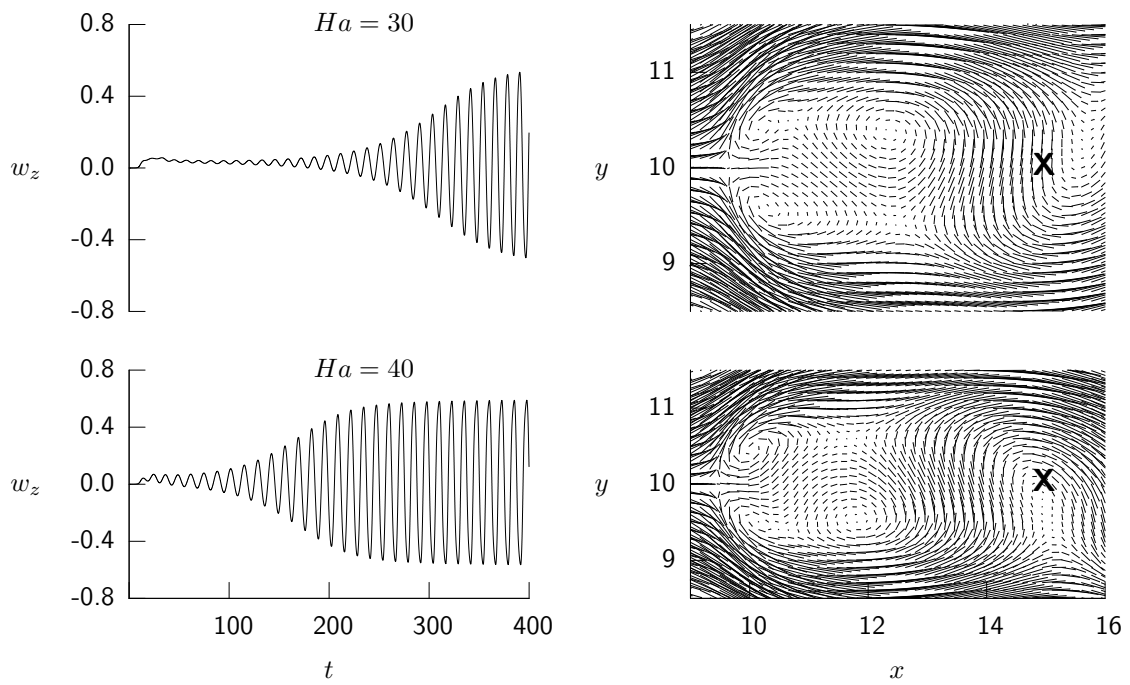


Figura 3.21: Vorticidad vs. t y campo de velocidades para $Re = 50$.

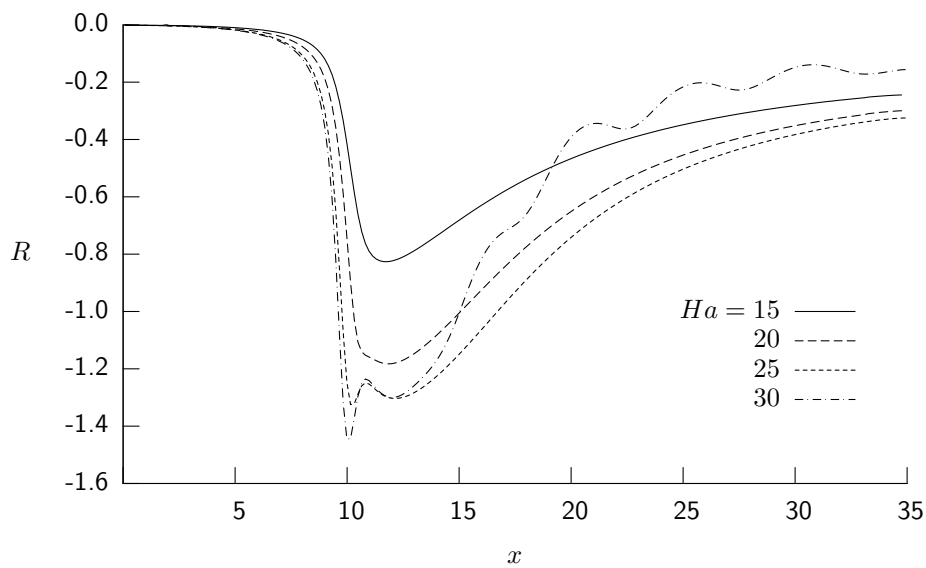


Figura 3.22: Déficit de velocidad vs. x para distintos valores del número de Ha ($Re = 50$).

en el flujo. Dichas aseveraciones se corroboran al observar el campo de velocidades y la grafica de vorticidad correspondientes (Figura 3.21).

Al duplicar el número de Reynolds, es decir $Re = 100$, la transición del flujo ocurre en el intervalo de $22 \leq Ha \leq 26$. Al igual que para el caso $Re = 50$, se observa la formación de dos vórtices alargados en la dirección del flujo. Dependiendo de la intensidad de la fuerza magnética, (es decir, del número de Hartmann) dichos vórtices pueden llegar a desprenderse y formar estructuras de flujo como las mostradas anteriormente.

En la Figura 3.23 se observan graficas de vorticidad y campos de velocidad para distintos números de Hartmann. En el caso $Ha = 22.5$, que corresponde a un valor de $N = 5.06$ (el más pequeño mostrado hasta ahora) apenas alcanza a distinguirse en el campo de velocidades una estela muy tenue. Cuando $Ha = 25.3$ ($N = 6.40$), la grafica de vorticidad indica que ya al final del intervalo de tiempo de integración se presenta una pequeña oscilación, que no se percibe en el campo de velocidades; si ahora $Ha = 26$ ($N = 6.76$), después de 300 unidades de tiempo adimensional la amplitud de oscilación de la vorticidad es considerable. Dicha oscilación es posible observarla en el campo de velocidades. Este valor de Ha se identifica como el valor crítico para el que la estela oscila en forma permanente, lo que caracteriza el surgimiento de la inestabilidad. El valor de Ha_{crit} es el mismo que para el caso de $Re = 50$, no obstante el valor de N es menor para este caso. Al aumentar a $Ha = 27$ ($N = 7.29$), la amplitud de la oscilación, después de un estado transitorio, alcanza un valor constante de 0.70 (mayor que para el caso $Re = 50$), mientras que en el campo de velocidad se observa desprendimiento de vórtices.

Los casos de números de Ha mayores se muestran en la Figura 3.24. La vorticidad para $Ha = 30$ ($N = 9$) muestra que el estado transitorio tiene una duración corta y la oscilación se presenta a partir de 150 unidades de tiempo adimensional, mucho antes que para el caso de $Re = 50$. Los vórtices que se desprenden, se desplazan hasta una distancia de cuatro unidades aguas abajo del centro del obstáculo. Cuando $Ha = 40$ ($N = 16$), la amplitud de oscilación de la vorticidad es constante y permanece así durante todo el tiempo de integración.

Las curvas de déficit de velocidad para $Re = 100$ se muestran en la Figura 3.25. Observamos que cuando $Ha = 25$ existen recirculaciones en el flujo, tal como se muestra en el campo de velocidades de la Figura 3.23, mientras que la curva de $Ha = 30$, además de tener su mínimo por debajo de -1 , presenta oscilaciones indicando la presencia de la inestabilidad. Lo anterior se confirma al observar las graficas de vorticidad y de campo de velocidades correspondientes.

En el caso de números de Re mayores (150 y 200), la vorticidad, el déficit de velocidad y las estructuras de flujo muestran un comportamiento similar. Cabe resaltar que la transición del flujo se da cuando $Ha = 26.5$ ($N = 4.68$) para $Re = 150$ y $Ha = 29$ ($N = 4.20$) para $Re = 200$. Estos resultados nos permiten construir en principio una curva de estabilidad la cual se muestra en la Figura 3.26. Arriba de dicha curva la oscilación de la estela es permanente, mientras que por debajo no existen oscilaciones. Mientras mayor es la inercia del flujo mayor es la magnitud de la fuerza magnética necesaria para desestabilizar al flujo.

Lo anterior es más fácilmente observable en la Figura 3.27 donde se muestra Ha_{crit} como función del número de Reynolds.

3.4.3. Desprendimiento periódico de vórtices

En esta sección se presenta un análisis de la evolución en el tiempo de la vorticidad, el campo de velocidad y el campo inducido para el caso de $Re = 100$ y

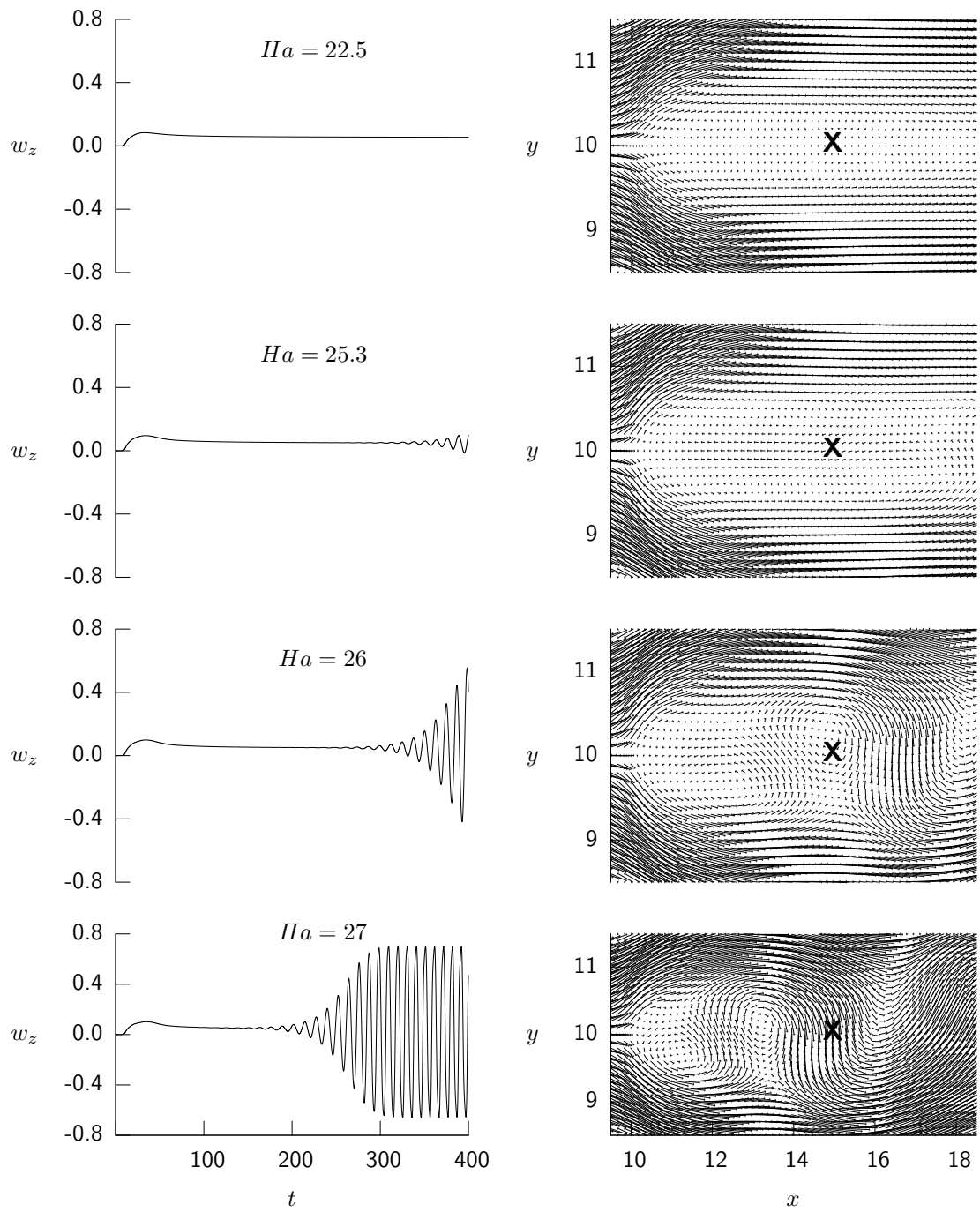


Figura 3.23: Vorticidad vs. t y campo de velocidades para $Re = 100$ y distintos Ha .

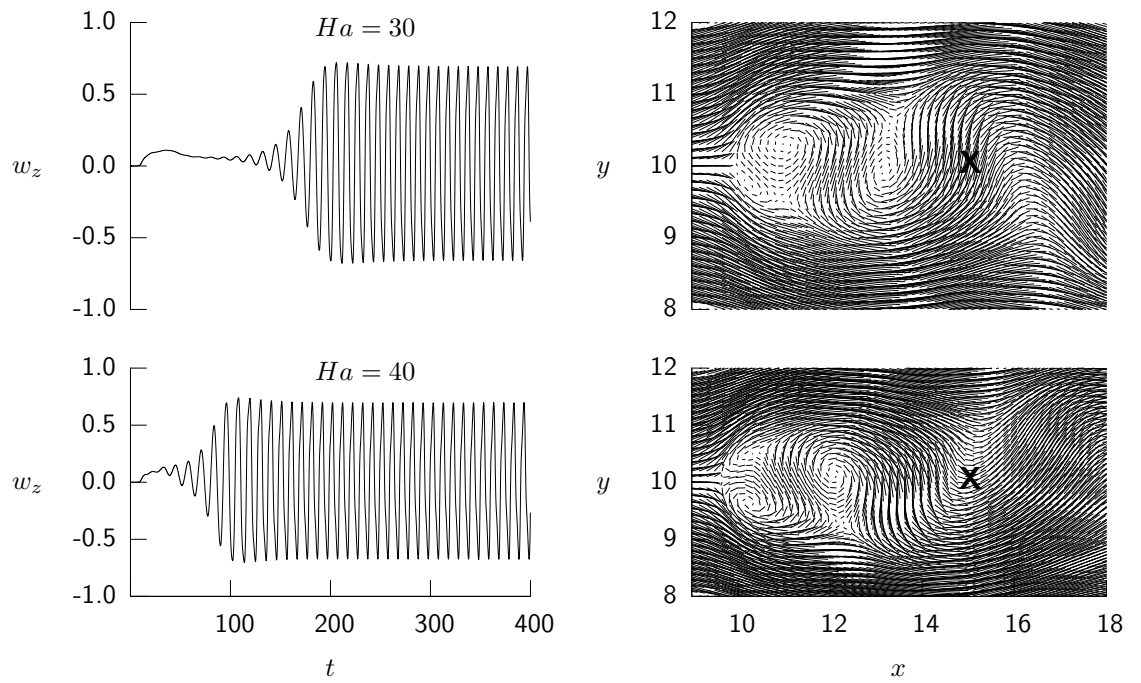


Figura 3.24: Vorticidad vs. t y campo de velocidades para $Re = 100$.

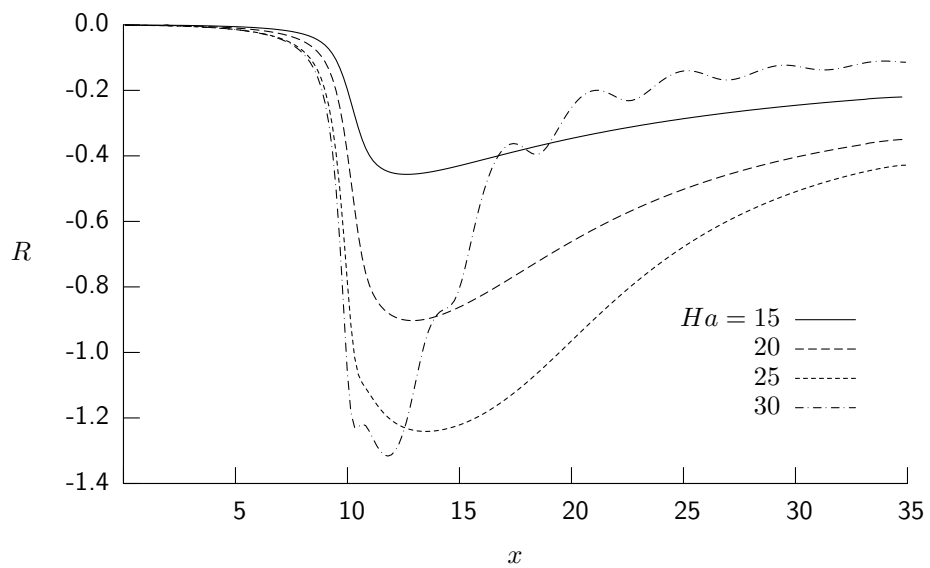
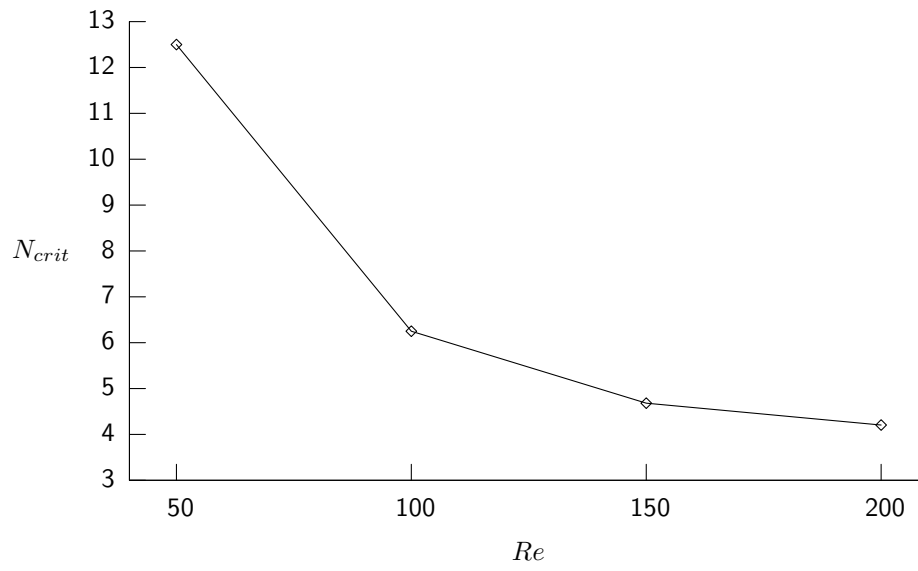
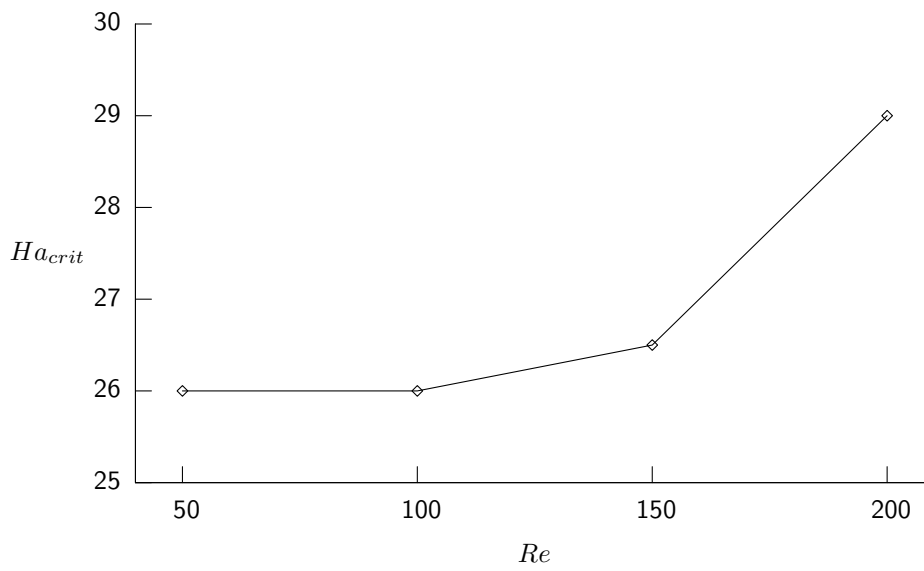


Figura 3.25: Déficit de velocidad vs. x para distintos valores del número de Ha ($Re = 100$).

Figura 3.26: N_{crit} vs. Re .Figura 3.27: Ha_{crit} vs. Re .

$Ha = 30$. Dicho caso según se ve en la Figura 3.24, presenta desprendimiento de vórtices. Además, está dentro del intervalo $26 < Ha \leq 100$ en el que se observa desprendimiento para todos los números de Reynolds analizados. Como se verá más adelante, las variaciones en la frecuencia de desprendimiento de los vórtices (número de Strouhal) no son grandes al variar el número de Hartmann. Consideramos entonces este caso como referencia para la descripción del desprendimiento periódico de vórtices.

En las Figuras 3.28 y 3.29 se muestra la evolución temporal de la estela desde su formación incipiente hasta el establecimiento del desprendimiento periódico de vórtices. Inicialmente, se promueve la formación de capas cortantes en ambos lados de la zona del obstáculo, que se mantienen paralelas y alineadas en la dirección del flujo incidente. Esto origina la formación de máximos y mínimos de vorticidad unas cuantas unidades aguas abajo del centro del obstáculo. Conforme transcurre el tiempo, las capas cortantes se vuelven inestables, dicha inestabilidad se manifiesta por la aparición de oscilaciones transversales en el eje medio horizontal a lo largo de la estela. La inestabilidad aparece por primera vez aproximadamente 10 unidades aguas abajo del centro del obstáculo, en donde tanto el campo magnético inducido como el aplicado son despreciables. Lo anterior significa que la inestabilidad está relacionada con la forma específica del perfil de velocidad formado por el campo magnético en la zona del obstáculo.

Al transcurrir el tiempo la estela se alarga en la dirección del flujo, una distancia del orden de 10 unidades, mientras que su grosor permanece casi constante. Existe una gran similitud con la estela formada aguas abajo de un cilindro cuando incide un flujo uniforme sobre él. Sin embargo, el flujo alrededor de un cilindro se vuelve inestable debido a un complejo mecanismo que involucra gradientes de presión adversos en las capas límites viscosas y a interacciones con la estela cercana. Es importante notar que en el flujo sobre obstáculos magnéticos, aunque la inestabilidad en realidad es resultado del perfil de velocidad, no es directamente afectada por el campo magnético. Por lo tanto, tal como sucede en el caso del flujo sobre cilindros, tenemos que la inestabilidad evoluciona en ausencia de campo magnético.

Una vez analizada la estela de vorticidad del flujo, procederemos a hacer lo mismo para el caso de los campos de velocidad obtenidos para los mismos valores de Re y Ha . En la Figura 3.30 se muestran campos de velocidad instantáneos para distintos intervalos de tiempo en que el flujo incide sobre el obstáculo.

Para tiempos iniciales ($t = 15$) el flujo alcanza a desviarse ligeramente en la zona del obstáculo, un tiempo posterior ($t = 25$) aparecen un par de vórtices alargados rotando en sentidos encontrados aguas abajo de la zona del obstáculo. Dichos vórtices alcanzan una longitud aproximada de 5 unidades en la dirección del flujo, con un grosor de 0.5 cada uno. Conforme transcurre el tiempo ($t = 37.5$) los vórtices se elongan para desprenderse viajando en la dirección del flujo sin sufrir deformaciones, es ahora cuando la estela tiene su mayor longitud. Para un tiempo posterior ($t = 225$) aparece el desprendimiento de vórtices en forma alternada, la longitud de la estela se reduce dado que los vórtices se “mueren” a una distancia de 3 unidades aguas abajo del centro del obstáculo.

La Figura 3.31 muestra isolíneas instantáneas de campo magnético inducido, para distintos instantes de tiempo. Se observa que conforme transcurre el tiempo la zona afectada por el campo inducido es mayor, mostrando al inicio dos circuitos uno aguas arriba y otro aguas abajo del centro del obstáculo. El circuito aguas abajo es positivo mientras que aguas arriba es negativo. Para tiempos mayores, el circuito aguas abajo se estrangula para formar dos circuitos internos pequeños, de un tamaño ligeramente mayor a la superficie magnetizada.

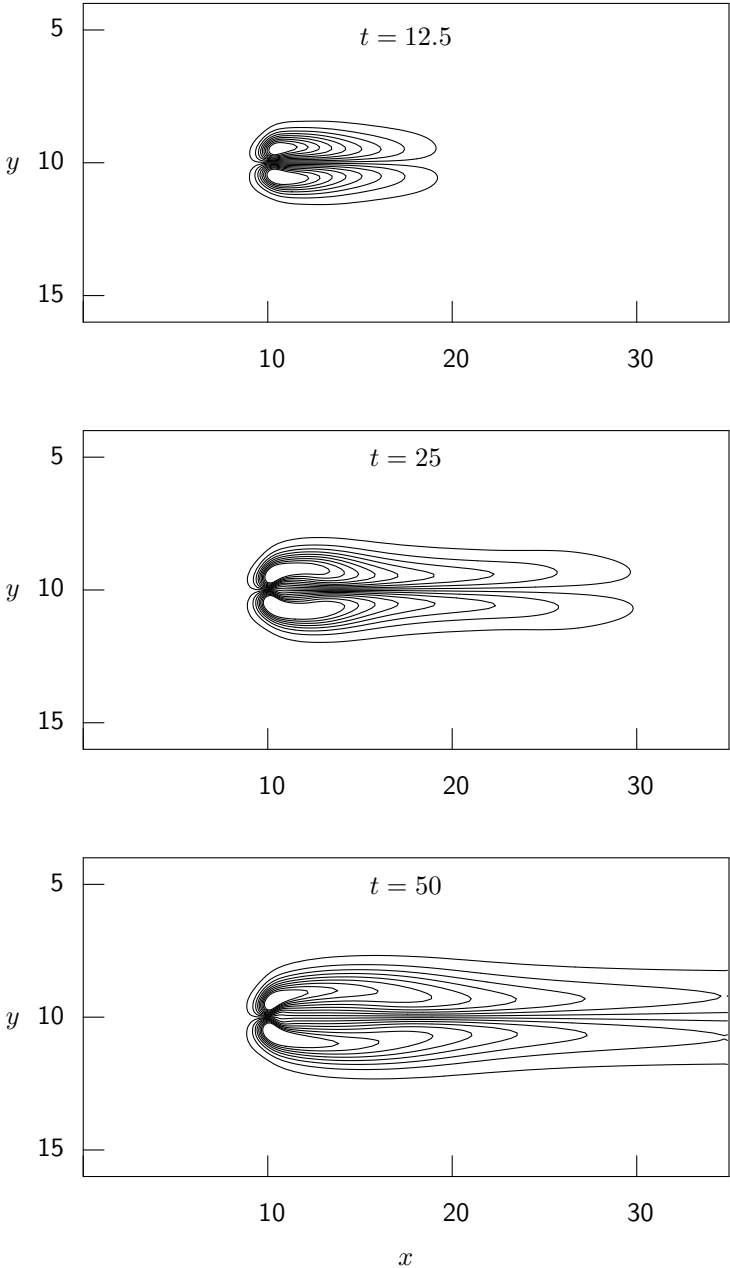


Figura 3.28: Islíneas de vorticidad instantánea. $Re = 100$, $Ha = 30$.

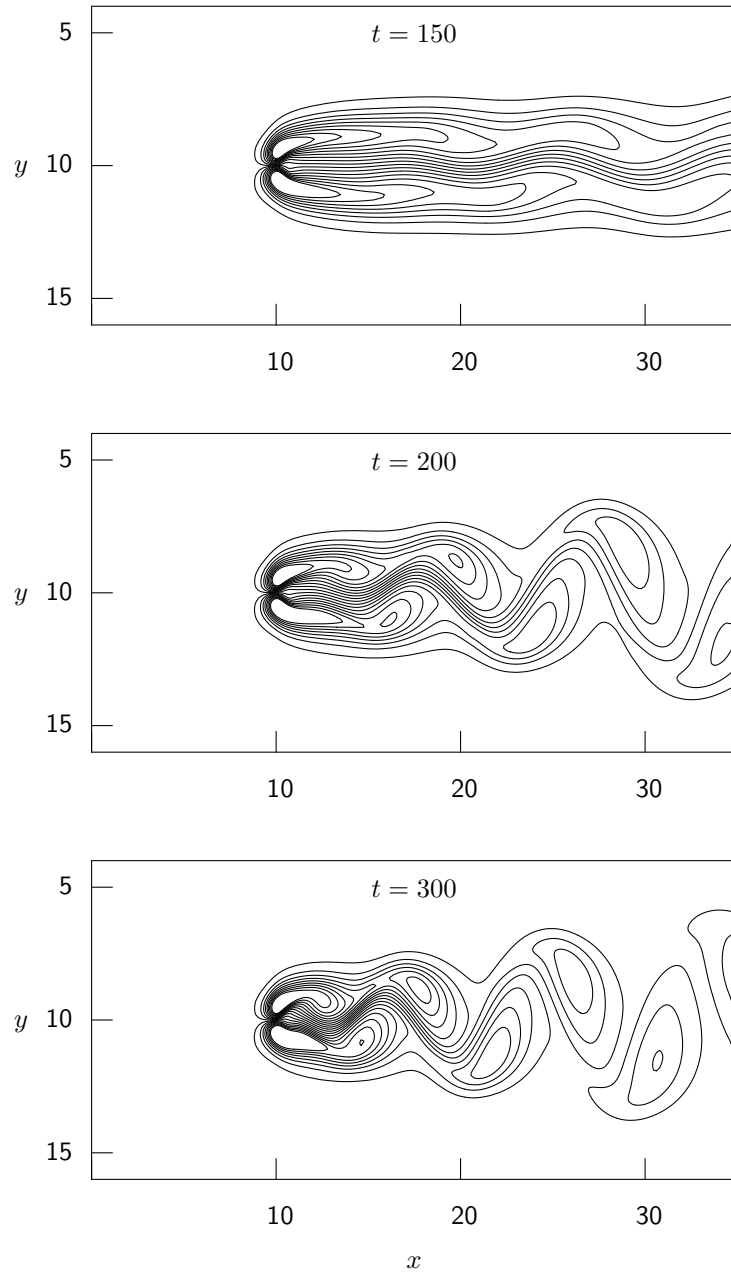


Figura 3.29: Isolíneas de vorticidad instantánea. $Re = 100$, $Ha = 30$.

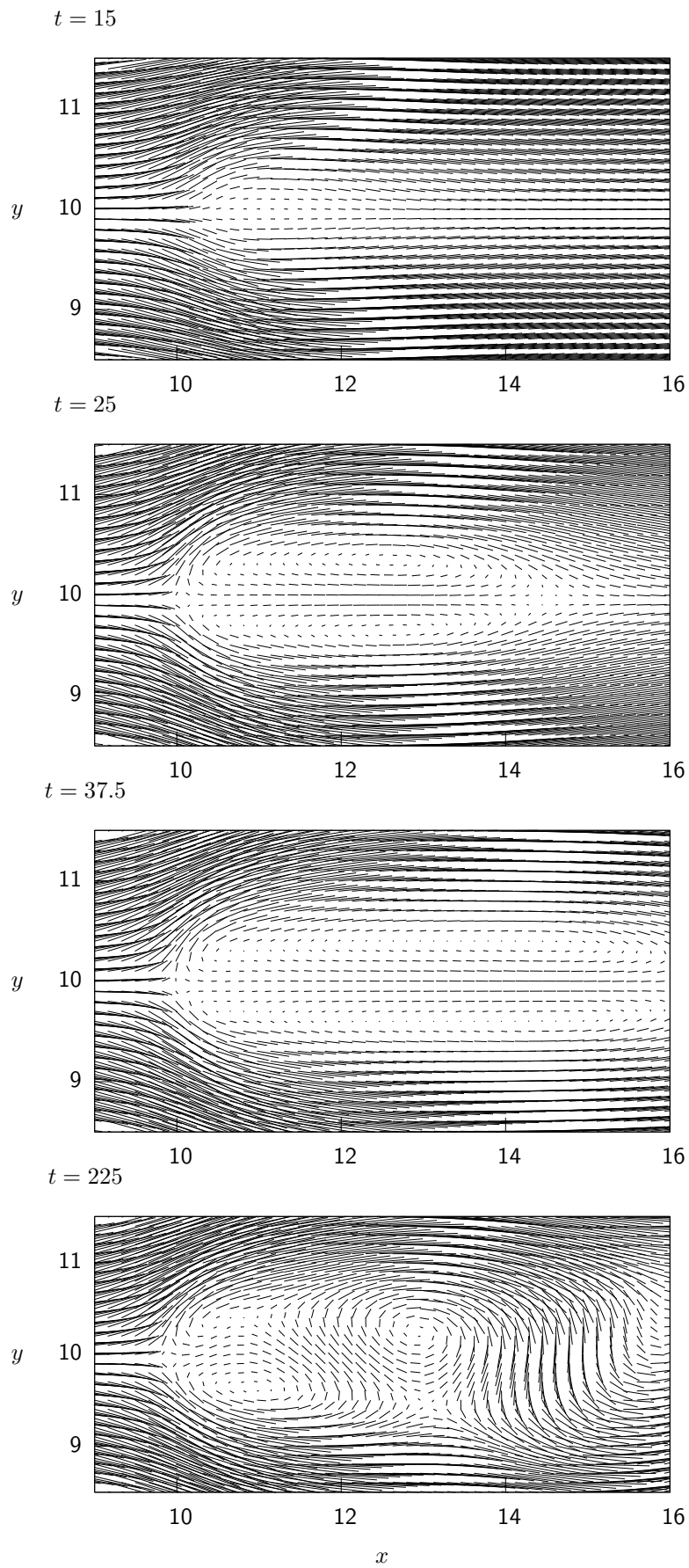


Figura 3.30: Campos de velocidad instantáneos para distintos tiempos.

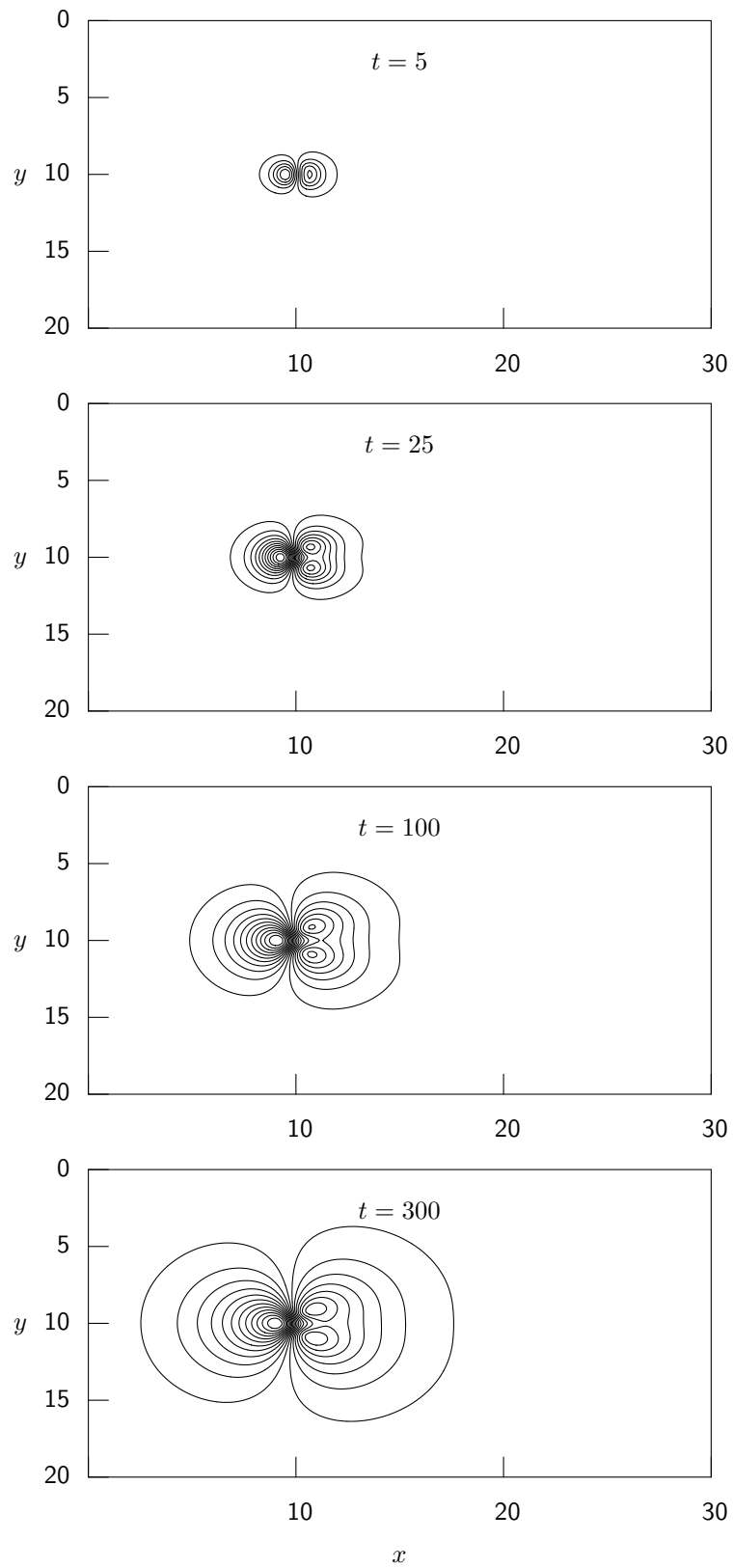
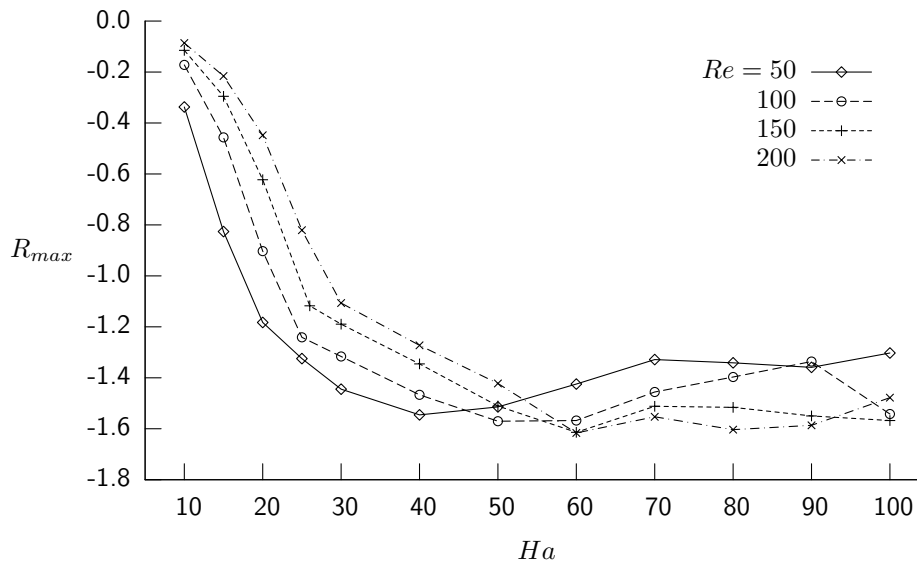


Figura 3.31: Isolíneas instantáneas de campo inducido. $Re = 100$, $Ha = 30$.

Figura 3.32: R_{max} vs. Ha .

3.5. Descripción de los parámetros globales de flujo

De las gráficas de déficit de velocidad 3.22 y 3.25 se puede determinar la presencia de recirculaciones en el flujo. Otra manera de obtener información relevante a partir del parámetro R , es calculando el valor máximo del déficit de velocidad (es decir, el más negativo) para los números de Hartmann explorados y para cada uno de los números de Reynolds utilizados. Así vemos que para $Re = 50$ y $Ha = 20$ se tiene la presencia de recirculaciones en el flujo ($R_{max} < -1$), mientras que para el mismo valor de Ha , pero $Re = 100$ no existen recirculaciones ($R_{max} > -1$). También podemos observar que para los cuatro números de Reynolds analizados, se tienen recirculaciones para $Ha \geq 30$. La posición de R_{max} cambia con el Ha , llegando a estar incluso a 4.5 unidades aguas abajo del centro del obstáculo, esto para $Re = 150$ y $Ha = 25$.

Williamson (1996) reporta que el coeficiente base de succión, que es el negativo del coeficiente base de presión definido en la ecuación (3.13) es de utilidad para identificar distintos regímenes de flujo. La Figura 3.33 muestra el $-C_{pb}$ como función del Ha para los cuatro números de Re explorados en este trabajo. Se observa que para los cuatro casos, $-C_{pb}$ crece con Ha hasta alcanzar un valor máximo a partir del cual presenta una disminución monótona. Los puntos de inflexión de las curvas (i.e. los máximos) se desplazan hacia valores mayores de Ha conforme Re crece. De esta forma, para $Re = 50, 100, 150$ y 200 , los puntos de inflexión están aproximadamente en $Ha = 20, 30, 40$ y 50 , respectivamente. Dichos puntos separan dos comportamientos dinámicos diferentes. Para valores de Ha menores a donde se presenta el punto de inflexión, la fuerza de Lorentz no tiene componente transversal y presenta una oposición uniforme al flujo en toda la región del obstáculo; por lo tanto, la caída de presión en el perímetro de la placa magnetizada (dado que ahí es donde se calculó el $-C_{pb}$) es una curva suave que incrementa con el número de Ha . Para valores del Ha mayores a donde se presenta el punto de

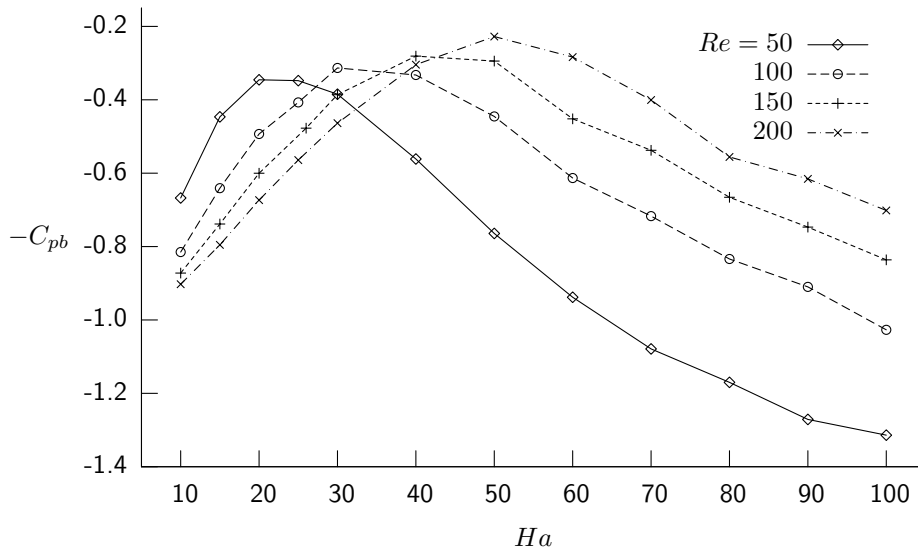


Figura 3.33: C_{pb} vs. Ha .

inflexión, el par de circuitos de corriente internos (ver Figura 3.31), provoca la aparición de una componente transversal de la fuerza de Lorentz, que origina un comportamiento no monotónico de la caída de presión en la zona donde se localiza la superficie magnetizada; la presión aumenta localmente en el límite aguas abajo de la superficie magnetizada, causando un decremento del $-C_{pb}$. En cierta forma, el parámetro $-C_{pb}$ puede caracterizarse físicamente como una medida de la "rigidez" del obstáculo magnético. Para valores de Ha menores a aquél donde se alcanza el máximo, el flujo es capaz de penetrar el obstáculo, mientras que para valores mayores de Ha el flujo rodea el obstáculo.

Ahora veremos cómo se comporta la diferencia entre la presión máxima que existe aguas arriba del obstáculo y la mínima aguas abajo, ambas sobre la línea media central. La Figura 3.34 muestra dicha diferencia denotada por ΔP_{max} , como función de Ha para los distintos Re . Se observa un comportamiento monótono conforme aumenta Ha , debido al aumento de la intensidad del freno magnético sobre el fluido. La separación entre los puntos de mayor y menor presión también aumenta con Ha , estando cerca de la proyección de los bordes de la placa magnetizada cuando Ha es menor que donde se localizan los puntos de inflexión de las curvas de $-C_{pb}$, mientras que si los valores son mayores, el punto de menor presión es desplazado aguas abajo, siendo la separación entre el máximo y el mínimo de hasta 5.2 unidades (esto para el caso $Re = 100$ y $Ha = 100$). Aunque las Figuras 3.33 y 3.34 representan valores instantáneos, $-C_{pb}$ y ΔP_{max} muestran una variación despreciable con el tiempo.

Tal como ocurre en el flujo sobre obstáculos sólidos, al aumentar el Re también incrementa el número de Strouhal asociado con el desprendimiento de vórtices. En la Figura 3.35 se presenta S_t como función de Ha para distintos valores de Re . Observamos que el comportamiento de todas las curvas es muy parecido; también es clara la débil dependencia con Ha , situación que concuerda con lo observado en otros flujos MHD donde se presenta el desprendimiento de vórtices (Bühler 1996; Mück et al. 2000; Afanasyev y Koravel 2006). Para los cuatro casos, se observa que

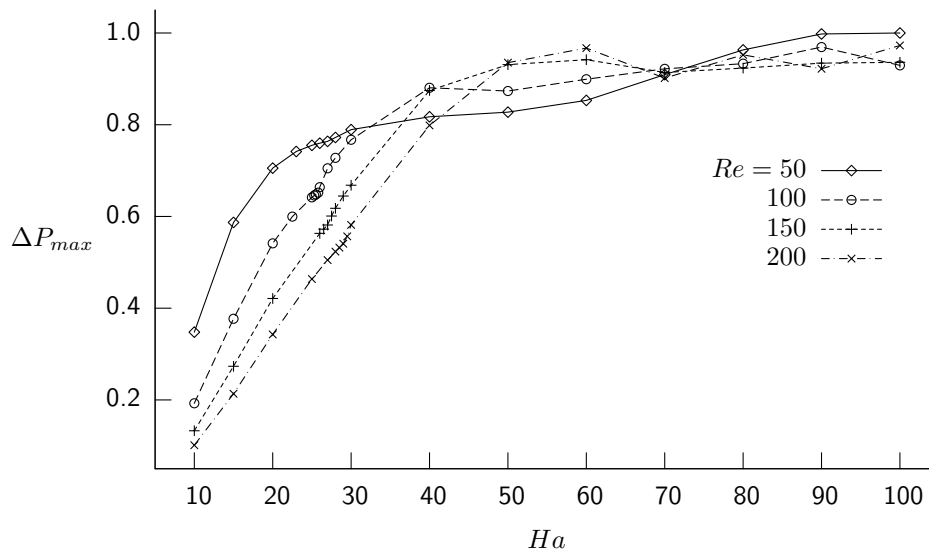
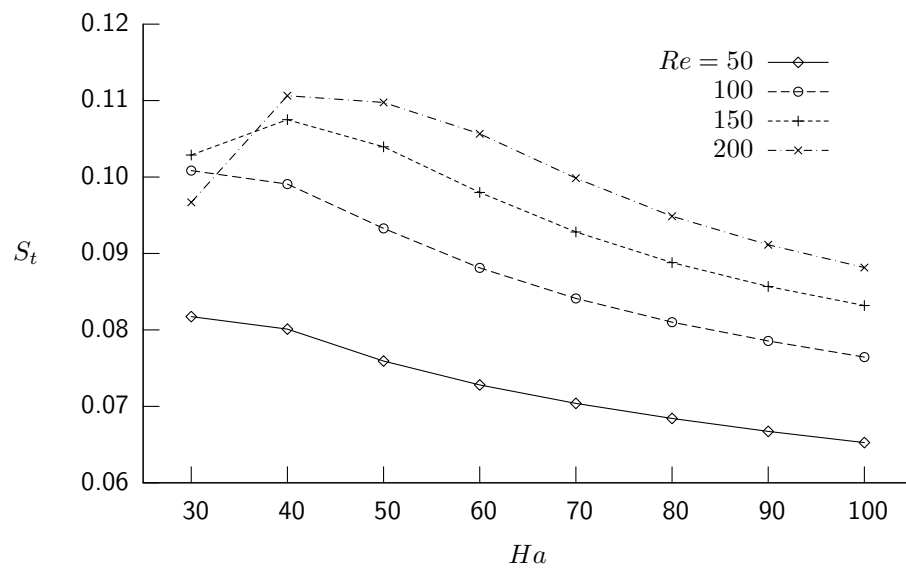


Figura 3.34: dP_{max} vs. Ha .

las curvas alcanzan un máximo a partir del cual decrecen suavemente. El máximo valor observado es de 0.11 y corresponde al caso de $Re = 200$ y $Ha = 40$. Dicho valor es menor que los valores reportados por Sohankar et al. (1998) (0.150 y 0.167, respectivamente) en simulaciones bidimensionales de flujos sobre cilindros cuadrados. Es importante notar sin embargo que aquí el Re está basado en la longitud lateral de la superficie magnetizada, que ha sido tomada como la longitud característica del obstáculo. Sin embargo, el tamaño efectivo del obstáculo depende del número de Hartmann (Cuevas et al. 2006), ya que determina la extensión que el flujo logra penetrar el obstáculo.

Figura 3.35: Número de Strouhal vs. Ha .

Capítulo 4

Modelo Cuasi-Bidimensional con fricción

Como se mencionó al inicio del capítulo anterior, en el flujo de una delgada capa de líquido a través de un campo magnético localizado, los efectos tridimensionales se deben esencialmente a las capas límites presentes en la pared del fondo del recipiente. La superficie libre, a su vez, puede introducir efectos tridimensionales muy complejos cuando se presenta desprendimiento de fluido. En este trabajo, supondremos que las condiciones de flujo son tales que la superficie libre permanece inalterada, satisfaciéndose en todo momento la condición de esfuerzo cortante nulo en dicha superficie. La capa límite más común en flujos MHD es la capa de Hartmann, formada en paredes donde existen componentes del campo magnético aplicado en la dirección normal a la pared. En presencia de un campo magnético intenso, las capas de Hartmann son muy delgadas ($O(Ha^{-1})$), y las variables de flujo presentan una ligera variación a lo largo de las líneas de campo magnético. Bajo estas condiciones es razonable reducir el problema tridimensional a una formulación cuasi-bidimensional en términos de las variables del núcleo del flujo; tal aproximación, originalmente establecida por Sommeria y Moreau (1982) en el contexto de flujos turbulentos a través de ductos con paredes aislantes bajo campos magnéticos uniformes, se ha aplicado con éxito a flujos MHD en canales. Esto se logra mediante la integración (promedio) de las ecuaciones MHD a lo largo de las líneas de campo magnético (e.g. Bühler 1996; Smolentsev 1997). En estos casos, un campo magnético uniforme se extiende sobre toda la región del flujo y el modelo de flujo cuasi-bidimensional retiene los efectos tridimensionales a través de una fricción magnética conocida como el frenado de Hartmann, y un término de fuerza magnética sobre el núcleo del flujo. Este enfoque también ha sido aplicado a flujos bajo campos magnéticos no uniformes. Lavrent'ev et al. (1990) analizaron de esta forma el flujo de un fluido estacionario eléctricamente conductor a través de un canal bajo un campo magnético intenso, el cual variaba en la dirección del eje del canal. El efecto tridimensional debido a la presencia de las capas de Hartmann se

introdujó a partir de un perfil de velocidad local de Hartmann ¹. Esta suposición fue justificada tanto experimental (Bocheninskii et al. 1971) como teóricamente (Kal-yutik, Lavrentév y Serebryakov 1986), demostrando que incluso para números de Hartmann bajos, la velocidad longitudinal se aproxima al perfil local de Hartmann.

El promedio de las ecuaciones de movimiento en la dirección normal también ha sido utilizada para el estudio de flujos en aguas someras en ausencia de campos magnéticos, con el fin de obtener modelos cuasi-bidimensionales. En los trabajos de Satijn et al. (2001) y Clercx, van Heijst y Zoetewij (2003) se modela el flujo de una delgada capa de fluido, donde la fricción viscosa en el fondo se parametriza a través de un término lineal, conocido comúnmente como la fricción de Rayleigh. En el trabajo de Cuevas et al. (2006a) se utilizó un modelo cuasi-bidimensional para analizar el flujo a través de un obstáculo magnético. En tal caso, al igual que en el problema tratado en este trabajo, se presentan dos capas límite distintas en la región de flujo: una capa de Hartmann en la región donde el campo magnético es intenso y una capa viscosa ordinaria en regiones donde el campo magnético es despreciable. Para retener los efectos de ambas capas en el modelo, utilizamos una aproximación cuasi-bidimensional que supone que el transporte de momento en la dirección normal es principalmente difusivo.

4.1. Modelo matemático

En esta sección presentaremos el modelo matemático que rige el comportamiento de una delgada capa de fluido bajo un campo magnético localizado, tomando en cuenta el efecto de las capas límite presentes en el fondo del recipiente. En este modelo introducimos una dependencia de las componentes de velocidad u y v con la coordenada normal al flujo, z , es decir,

$$\mathbf{u} = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), 0). \quad (4.1)$$

Las ecuaciones de cantidad movimiento, al sustituir el campo de velocidades (4.1), toman la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{Ha^2}{Re} j_y B_z^0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{Ha^2}{Re} j_x B_z^0. \quad (4.3)$$

Al derivar con respecto a x la ecuación (4.3) y con respecto a y la (4.2) y restarlas, se obtiene la ecuación de vorticidad:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) - \frac{Ha^2}{Re} \left(\frac{\partial(j_x B_z^0)}{\partial x} + \frac{\partial(j_y B_z^0)}{\partial y} \right) \quad (4.4)$$

donde recordamos que

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

¹El perfil de Hartmann es una solución exacta de las ecuaciones de la MHD, y es el análogo al perfil de Poiseuille para el caso de un flujo entre planos infinitos sujeto a un campo magnético uniforme normal a los planos (ver, por ejemplo Müller y Bühler 2001)

El último término de la ecuación (4.4) puede desarrollarse de la forma

$$\frac{\partial(j_x B_z^0)}{\partial x} + \frac{\partial(j_y B_z^0)}{\partial y} = -B_z^0 \frac{\partial j_z}{\partial z} + j_x \frac{\partial B_z^0}{\partial x} + j_y \frac{\partial B_z^0}{\partial y},$$

ya que por conservación de corriente eléctrica:

$$\frac{\partial j_z}{\partial z} = - \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} \right).$$

Finalmente reescribimos la ecuación (4.4) como

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) + \frac{Ha^2}{Re} \left(B_z^0 \frac{\partial j_z}{\partial z} - j_x \frac{\partial B_z^0}{\partial x} - j_y \frac{\partial B_z^0}{\partial y} \right) \quad (4.5)$$

Definimos el promedio sobre el grosor h de la capa de fluido, para una función arbitraria $f(x, y, z)$ como

$$\bar{f}(x, y, z) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(x, y, z) dz \quad (4.6)$$

donde $\alpha = h/\ell$ es la razón de aspecto, siendo ℓ la escala de longitud relevante para el flujo en el plano $x - y$.

Suponemos ahora que el transporte de momentum en la dirección normal es puramente "difusivo", por lo que, las componentes de velocidad y la vorticidad pueden expresarse como

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \bar{u}(x, y, t) f(x, y, z), \\ v(x, y, z, t) &= \bar{v}(x, y, t) f(x, y, z), \\ \omega(x, y, z, t) &= \bar{\omega}(x, y, t) f(x, y, z), \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde \bar{u} y \bar{v} son las componentes de la velocidad en la dirección x y y respectivamente, pero promediadas en la dirección normal y $\bar{\omega}$ es la componente normal de la vorticidad también promediada. La función f , nos da la variación del perfil de velocidad en la dirección normal. La dependencia en las coordenadas x y y refleja las diferentes regiones de flujo debido a la localización del campo magnético. Es decir, f debe modelar un flujo de Hartmann en la región de campo magnético intenso y un flujo de Poiseuille ordinario en las regiones alejadas del campo. Además debe satisfacer la condición de normalización

$$\int_0^\alpha U_a f dz = \alpha. \quad (4.8)$$

donde recordamos que U_a es la velocidad del flujo impuesta a la entrada.

La ecuación (4.7) representa una suposición fuerte, pero es una aproximación razonable cuando el campo magnético es intenso o cuando $h \ll \ell$. La escala de longitud es distinta para las dos regiones de flujo presentes. En la vecindad del obstáculo magnético, ℓ es del orden de magnitud de L , la longitud lateral de placa magnetizada. Lejos del obstáculo ℓ es del orden de magnitud de las estructuras vorticosas que se forman en la estela del flujo y comunmente $\ell \gg L$ (Cuevas et al. 2006).

Al sustituir 4.7 en la ecuación (4.5) e integrando de 0 a α tenemos que

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) K = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial y^2} \right) + \frac{\bar{\omega}}{\tau} + \frac{Ha^2}{Re} \left(B_z^0 j_z |_0^\alpha - \bar{j}_x \frac{\partial B_z^0}{\partial x} - \bar{j}_y \frac{\partial B_z^0}{\partial y} \right), \quad (4.9)$$

donde $j_z |_0^\alpha$ es cero dado que la corriente eléctrica no penetra ni arriba ni el fondo ni la superficie libre que se suponen aislantes, por lo tanto

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) K = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial y^2} \right) + \frac{\bar{\omega}}{\tau} - \frac{Ha^2}{Re} \left(j_x \frac{\partial B_z^0}{\partial x} + j_y \frac{\partial B_z^0}{\partial y} \right), \quad (4.10)$$

donde el factor K corresponde a la integral $K = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f^2 dz$ y $\tau^{-1} = \frac{1}{\alpha Re} \frac{\partial f}{\partial z} |_0^\alpha$.

Observamos que en la ecuación (4.10) aparece en el término convectivo el parámetro K y del lado derecho de la ecuación un término extra $\bar{\omega}/\tau$, que esta relacionado con la fricción de Hartmann-Rayleigh.

Podemos expresar las ecuaciones de movimiento promediadas en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) K = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla_\perp^2 u - \frac{u}{\tau} + \frac{Ha^2}{Re} j_y B_z^0, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) K = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla_\perp^2 v - \frac{v}{\tau} - \frac{Ha^2}{Re} j_x B_z^0. \quad (4.13)$$

Por simplicidad, en las ecuaciones (4.11)-(4.13) se ha eliminado la línea sobre las componentes u y v . Resta determinar la forma funcional de f y dar las expresiones explícitas de K y τ .

4.1.1. Determinación de la función f

Físicamente, la función f no es otra cosa que el perfil de velocidad en la dirección normal. La determinación de esta función se hace de una manera aproximada, para lo que hacemos las siguientes suposiciones:

1. La única componente de la velocidad está en la dirección x y depende sólo de z ($u = f(z)$)
2. Sólo se tiene gradiente de presión en x y es constante.
3. La componente x de la fuerza de Lorentz es la única a considerar.

De esta forma la ecuación de movimiento a resolver es (ver ecuación 4.12):

$$\frac{1}{Re} \frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{Ha^2}{Re} j_y B_z^0 - \frac{df}{dx} = 0, \quad (4.14)$$

que podemos escribir de la forma

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + Ha^2 j_y B_z^0 = Re \frac{dP}{dx}. \quad (4.15)$$

De manera que, tenemos una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, lineal y no homogénea. De hecho, esta ecuación es la que corresponde al perfil de Hartmann.

La función f debe satisfacer las condiciones de frontera de no deslizamiento en la pared del fondo y de esfuerzo nulo en la superficie libre

$$f(0) = 0, \quad \frac{df(h)}{dz} = 0, \quad (4.16)$$

La densidad de corriente eléctrica inducida está dada por la ley de Ohm

$$\mathbf{j} = -\nabla\phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}^0, \quad (4.17)$$

donde ϕ es el potencial eléctrico.

De modo que la ecuación de movimiento queda de la forma

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + Ha^2 (B_z^0)^2 f = Re \frac{dP}{dx} \quad (4.18)$$

Resolviendo la ecuación (4.18) bajo las condiciones de frontera (4.16) y normalizándola (4.8), finalmente la función f tiene la forma

$$f = \frac{\alpha \mathcal{H}a}{\alpha \mathcal{H}a - \tanh(\alpha \mathcal{H}a)} \left[(1 - e^{\mathcal{H}az}) + e^{\alpha \mathcal{H}a} \frac{\sinh(\mathcal{H}az)}{\cosh(\alpha \mathcal{H}a)} \right] \quad (4.19)$$

donde $\mathcal{H}a(x, y) = Ha B_z^0(x, y)$ define el número local de Hartmann. Dada la simetría el perfil de velocidad es la mitad del perfil local de Hartmann. Nótese que la función f adquiere una dependencia con x y y a través del campo magnético aplicado $B_z^0(x, y)$. En la Figura 4.1 se muestra el perfil de velocidad (4.19) como una función de la coordenada normal z para cuatro distintas distancias al origen en la dirección x ($y = 0$). Aquí $x = 0$ es el centro del imán, a diferencia de las simulaciones.

Como puede observarse, cuando la intensidad del campo es máxima el perfil de velocidad es parecido al de Hartmann, es decir, se tiene un perfil plano en el núcleo del flujo y un gradiente de velocidad pronunciado al acercarse al fondo. Conforme nos alejamos de la zona de campo intenso el perfil de velocidad se vuelve parabólico; de hecho, para distancias mayores a $x = 1.5$, el perfil ya no cambia.

Una vez definida f podemos calcular la expresión para K , desarrollando la integral encontramos que explícitamente toma la forma

$$K = \frac{\alpha \mathcal{H}a}{2} \frac{\left[\alpha \mathcal{H}a \left(2 + \frac{1}{\cosh^2(\alpha \mathcal{H}a)} \right) - 3 \tanh(\alpha \mathcal{H}a) \right]}{(\tanh(\alpha \mathcal{H}a) - \alpha \mathcal{H}a)^2}. \quad (4.20)$$

Como se ve K depende tanto de la altura de la capa de fluido, α , como de los números de Hartmann local y global. En la Figura 4.2 se muestra la dependencia de K con α (para un valor fijo de Ha y de $y = 0$), hay que notar que los valores varían entre 1.02 y 1.20, y que dicha variación se da únicamente en la zona de campo magnético intenso.

Si ahora mantenemos fijo el valor de α y variamos el número de Hartmann (ver Figura 4.3), igual que para el caso anterior se observa que K tiende a un valor

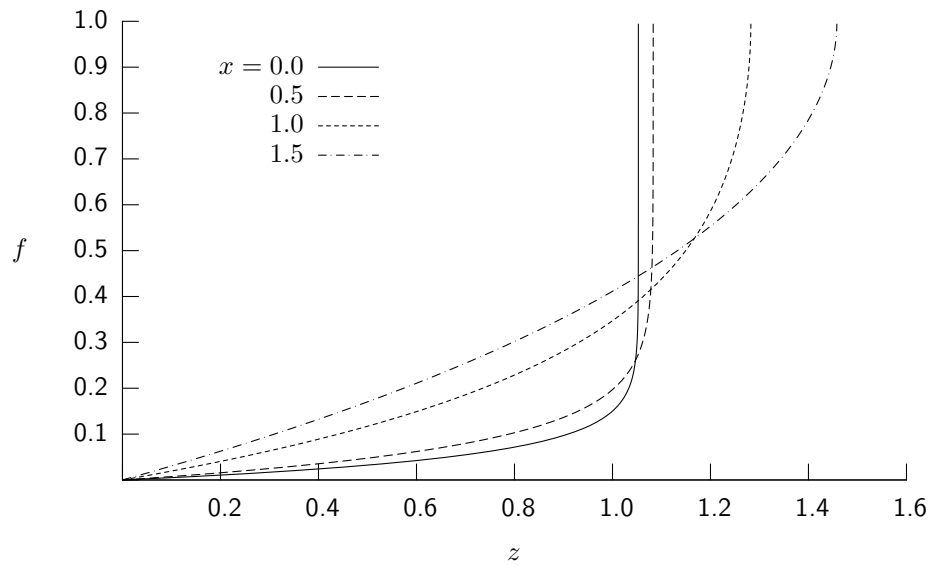


Figura 4.1: f vs. z para distintas posiciones en x , ($Ha = 30$).

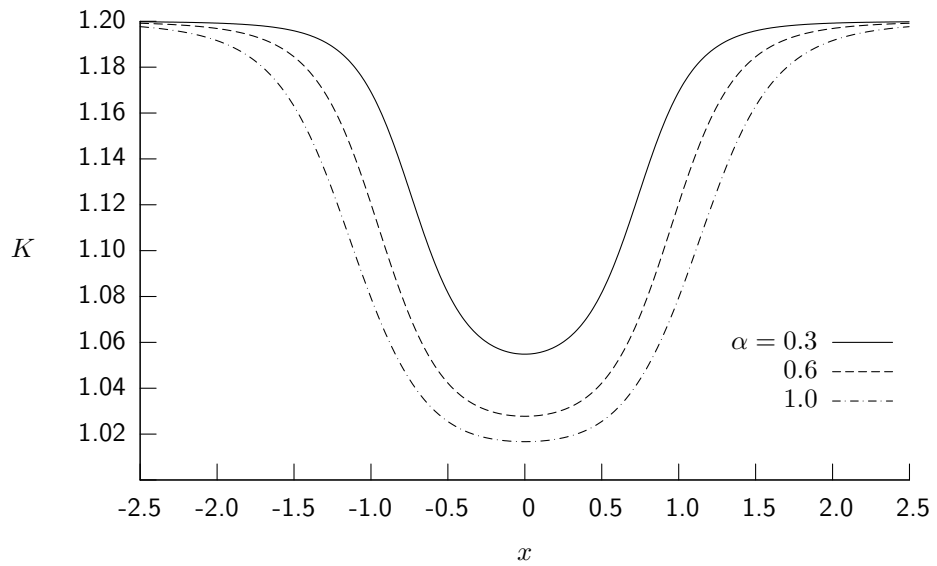


Figura 4.2: K vs. α , para $Ha = 30$.

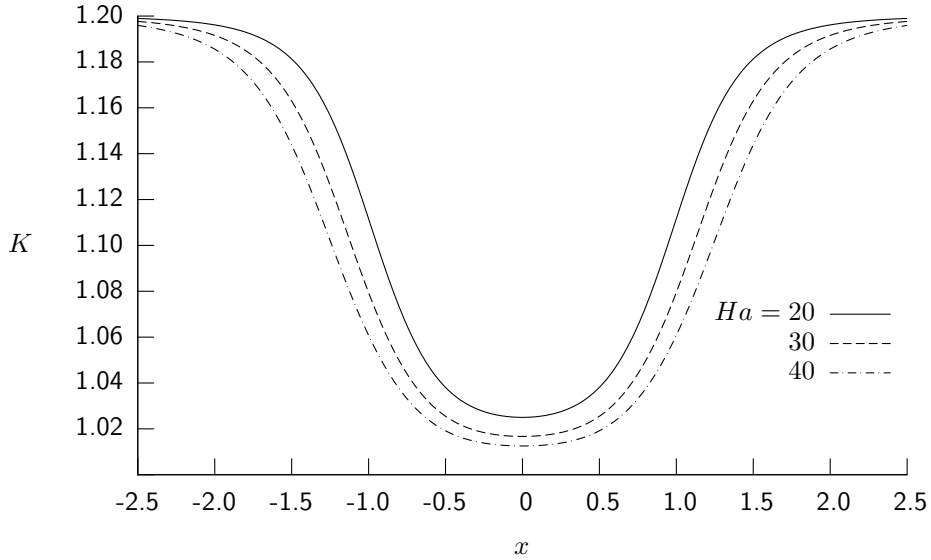


Figura 4.3: K vs. Ha , para $\alpha = 1$.

de 1.2 y solamente en la zona del campo intenso dicho valor cae hasta casi 1. Sin embargo, la variación con respecto al número de Hartmann no es muy pronunciada.

Además de los efectos viscosos en el núcleo del flujo representados por el segundo término del lado derecho de las ecuaciones (4.12) y (4.13), existe un segundo efecto que toma en cuenta la fricción de Hartmann-Rayleigh (tercer término del lado derecho) que se debe a la existencia de capas límite en la pared del fondo. Este término lineal involucra la escala de tiempo característico, τ , para el decaimiento de la vorticidad debido a la fricción de Hartmann-Rayleigh. El inverso de dicha escala de tiempo está dado por

$$\tau^{-1} = \frac{1}{\alpha Re} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \Big|_0^\alpha = \frac{\mathcal{H}a^2}{Re} \frac{\tanh(\alpha \mathcal{H}a)}{\alpha \mathcal{H}a - \tanh(\alpha \mathcal{H}a)}. \quad (4.21)$$

Hay que destacar que para $\mathcal{H}a \gg 1$ la ecuación (4.21) se reduce a la forma común del coeficiente de frenado de Hartmann, $\tau^{-1} = \mathcal{H}a/\alpha Re$. En realidad τ es la relación del tiempo típico inercial ℓ/U y de una escala de tiempo típico para el frenado de Hartmann, $(h/B_{max})(\rho/\sigma\nu)^{1/2}$. Por lo tanto si $\mathcal{H}a \rightarrow 0$ (que ocurre en la región alejada del obstáculo magnético), mediante una expansión de Taylor se obtiene que $\tau^{-1} = \lambda\ell/U$ donde $\lambda = 3\nu/h^2$ es el inverso del tiempo de difusión viscoso. Este límite corresponde a la fricción viscosa en la aproximación Hele-Shaw (Bühler 1996).

Como se ve, la ecuación (4.21) depende tanto de α como del número de Hartmann local y global. En la Figura 4.4 se observa como varía τ^{-1} en la dirección x ($y = 0$) para distintos valores de α . Claramente se observa que la fricción se incrementa en la vecindad del obstáculo magnético, mientras que lejos de él toma un valor cortante correspondiente a la fricción viscosa. Así mismo observamos que la fricción se incrementa al disminuir el grosor de la capa de fluido.

En la Figura 4.5 se muestra τ^{-1} como una función de x para distintos números de Hartmann. Observamos que el efecto de incrementar Ha es aumentar la fricción

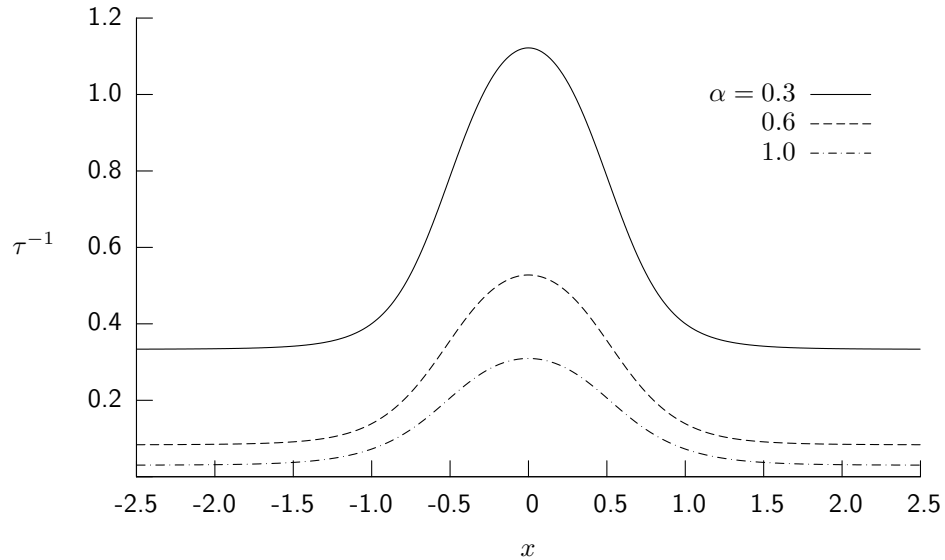


Figura 4.4: Fricción de Hartmann-Rayleigh vs. α ($Ha = 30$).

en la zona del obstáculo.

El carácter simétrico de las ecuaciones (4.20) y (4.21), no debe extrañarnos dado que ambas dependen de la expresión del campo aplicado, B_z^0 , que es claramente simétrica.

Las ecuaciones (4.11)-(4.13) mantienen la dependencia en el tiempo asociada con los efectos inerciales. Bajo esta aproximación la dinámica del flujo está determinada por la interacción de la componente normal del campo aplicado con los circuitos de corriente eléctrica en planos paralelos a la pared del fondo así como por la fricción de Hartmann-Rayleigh en la capa límite. En este trabajo, a diferencia de Cuevas et al. (2006a), consideraremos condiciones donde los efectos inerciales no necesariamente dominan sobre la fricción de Hartmann-Rayleigh. Dichas condiciones se presentan cuando las escalas de tiempo para el frenado de Hartmann y la difusión viscosa son de igual magnitud que la escala de tiempo inercial. Como veremos a continuación, el principal efecto de la fricción de Hartmann-Rayleigh es un efecto disipativo y por lo tanto, tiende a estabilizar el flujo. Su inclusión puede ocasionar la desaparición de oscilaciones (inestabilidades) en ciertos casos donde éstas se observan en ausencia de fricción. En principio, se espera que, para poder desestabilizar al flujo cuando existe fricción sea necesario modificar el balance de fuerzas inerciales, viscosas y magnéticas. Ésta y otras características se mostrarán en la siguiente sección que aborda los resultados obtenidos de la solución numérica.

4.2. Resultados

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos utilizando el modelo cuasi-bidimensional, expuesto en la sección anterior, que considera los efectos introducidos en el flujo debido a la presencia de las capas límite adheridas al fondo del recipiente que contiene al fluido. Cualitativamente, los resultados obteni-

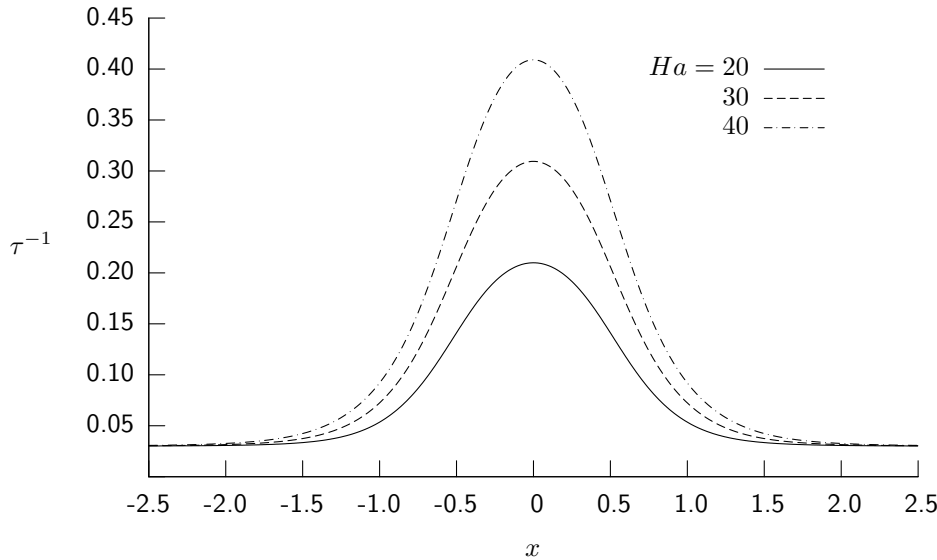


Figura 4.5: Fricción de Hartmann-Rayleigh vs. x ($\alpha = 1$).

dos son muy parecidos a los reportados en el capítulo 3 para el flujo en ausencia de fricción. Sin embargo, las condiciones físicas en las que se observan los distintos regímenes de flujo son distintas. De hecho, aunque se analizaron los mismos cuatro valores del número de Reynolds para $Re = 50$ y 100 no se detectó la aparición de la inestabilidad para ninguno de los valores del número de Hartmann en el rango estudiado ($1 \leq Ha \leq 100$), encontrándose únicamente un flujo estacionario. Por su parte, para $Re = 150$ y 200 se observaron los mismos regímenes de flujo discutidos en el capítulo 3 (es decir, estacionario, transición y desprendimiento periódico de vórtices), pero para valores distintos de los parámetros físicos.

Por ejemplo, para el caso de $Re = 150$, el régimen estacionario se presenta en el intervalo de $1 \leq Ha < 38$. En la Figura 4.6 se muestran isolíneas instantáneas de vorticidad para el caso de $Re = 150$ y $Ha = 36$ ($N = 8.64$), que presentan una gran simetría axial en la vorticidad.

Las isolíneas de campo magnético inducido se muestran en la Figura 4.7, donde se observa la presencia de 2 circuitos de corriente aguas abajo del obstáculo, responsables de la presencia de una componente transversal de la fuerza de Lorentz.

Por su parte la presión se ve afectada claramente por la fricción del fondo. En la Figura 4.8, que muestra la presión como función de la coordenada axial, se observa que la presión tiene un comportamiento decreciente aguas arriba y abajo del obstáculo magnético.

En la Figura 4.9 se muestra la componente u de la velocidad contra la coordenada transversal al flujo. Al igual que para el caso sin fricción, se observa un déficit de velocidad en la zona del obstáculo, siendo máximo dicho déficit a lo largo de la línea central $y = 10$. Es claro que de $x = 8.99$ a $x = 9.98$, la velocidad del flujo disminuye en forma muy rápida en tan sólo una unidad de longitud, mientras que de $x = 9.98$ a $x = 14.94$, la disminución es más lenta hasta que u se vuelve negativa, es decir, aparece flujo en reversa. Por su parte la componente v de la velocidad es un orden de magnitud menor que u , tal como se observa en la Figura 4.10, aunque

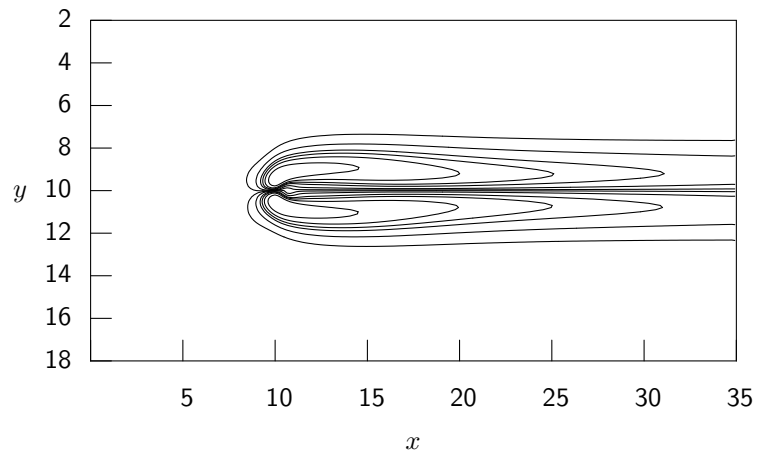


Figura 4.6: Isolíneas instantáneas de Vorticidad para $Re = 150$ y $Ha = 36$.

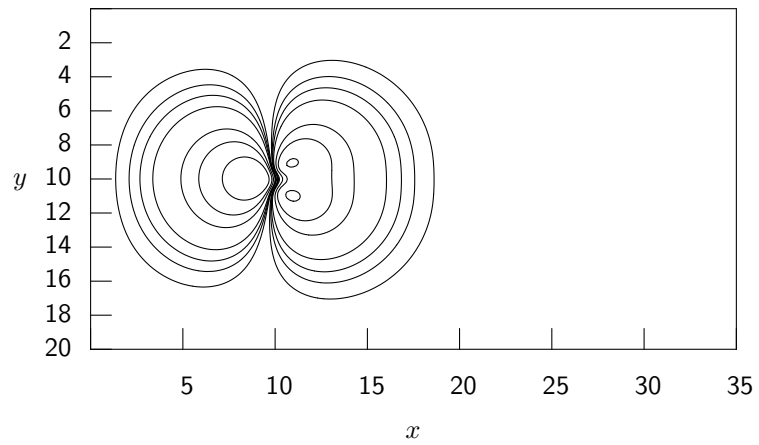


Figura 4.7: Isolíneas instantáneas de campo inducido para $Re = 150$ y $Ha = 36$.

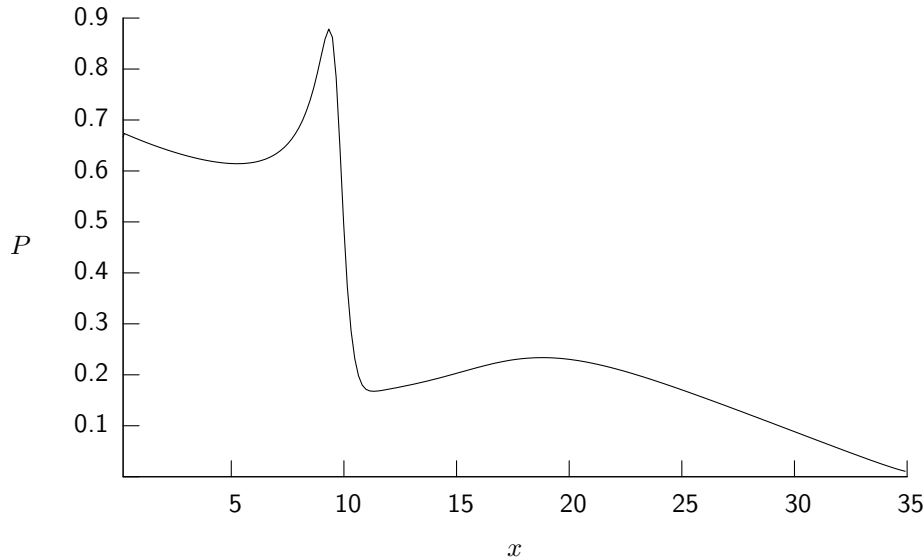


Figura 4.8: Presión vs. x para $Re = 150$ y $Ha = 36$.

la magnitud de dicha componente es prácticamente tres veces mayor que cualquiera de los dos casos sin fricción vistos en el capítulo anterior.

Los perfiles de vorticidad se muestran en las Figuras 4.11 y 4.12. El efecto de la fricción se manifiesta esencialmente en que al final de la estela la vorticidad toma un tercio del máximo valor, que se localiza una unidad aguas abajo del centro del obstáculo, siendo la disminución mayor que en ausencia de fricción.

Para el caso $Re = 150$, la transición de flujo se presenta en el rango $38 \leq Ha \leq 40$, es decir, para valores mayores de Ha que en ausencia de fricción. La Figura 4.13 muestra la vorticidad para distintos valores del número de Hartmann como una función del tiempo. Asimismo se presentan los campos de velocidad correspondientes. Es claro que cuando $Ha = 39$ ($N = 10.14$) la perturbación no desaparece, siendo entonces éste el valor crítico en que ocurre la desestabilización de la estela.

Cuando la amplitud de la perturbación ya no cambia se observa claramente el desprendimiento de vórtices en forma alternada los cuales viajan hasta 4 unidades aguas abajo del centro del obstáculo tal como se ve en la Figura 4.14. Se encontró que los vórtices viajan una distancia menor que en el caso sin fricción, antes de ser disipados.

En la Figura 4.15 se observa que los valores críticos a los que desestabiliza el flujo son distintos al caso sin fricción. De hecho, con las mismas condiciones son mayores ya que el flujo debe vencer también la fricción debida al fondo sólido. En la Figura 4.16 se muestra el número de Hartmann crítico como función del número de Reynolds. Claramente se observa que para encontrar la inestabilidad para un Re dado (150 ó 200), Ha debe tomar valores mayores que para el caso sin fricción. Como es de esperarse, el efecto de la fricción de Hartmann-Rayleigh es retardar la aparición de la inestabilidad.

En lo referente al déficit de velocidad, éste presenta el mismo comportamiento que para el caso sin fricción tal como se muestra en la Figura 4.17

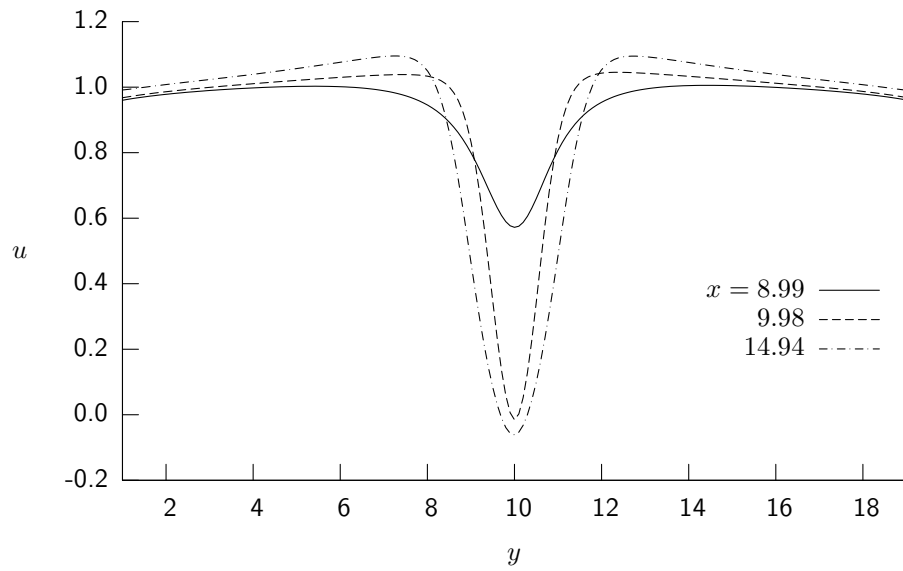


Figura 4.9: Componente u de la velocidad para $Re = 150$ y $Ha = 36$.

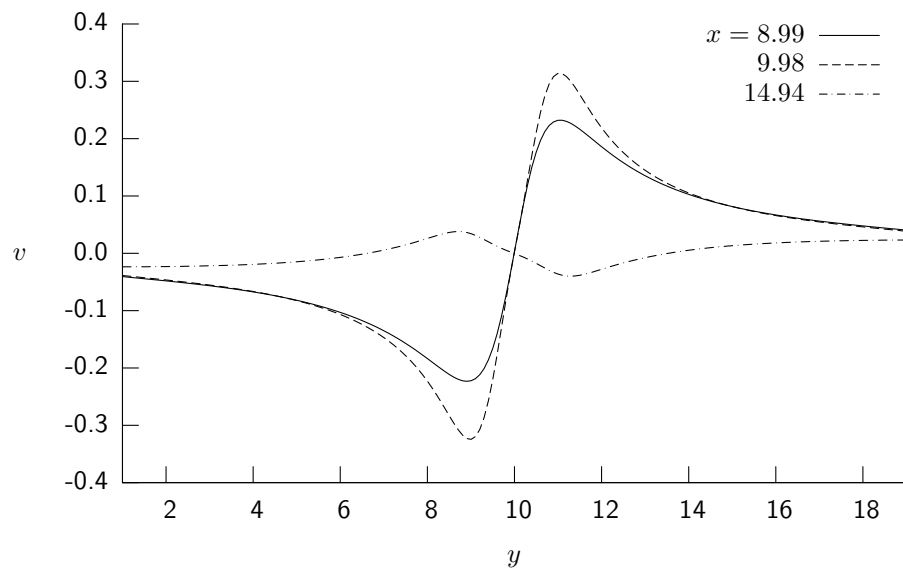


Figura 4.10: Componente v de la velocidad para $Re = 150$ y $Ha = 36$.

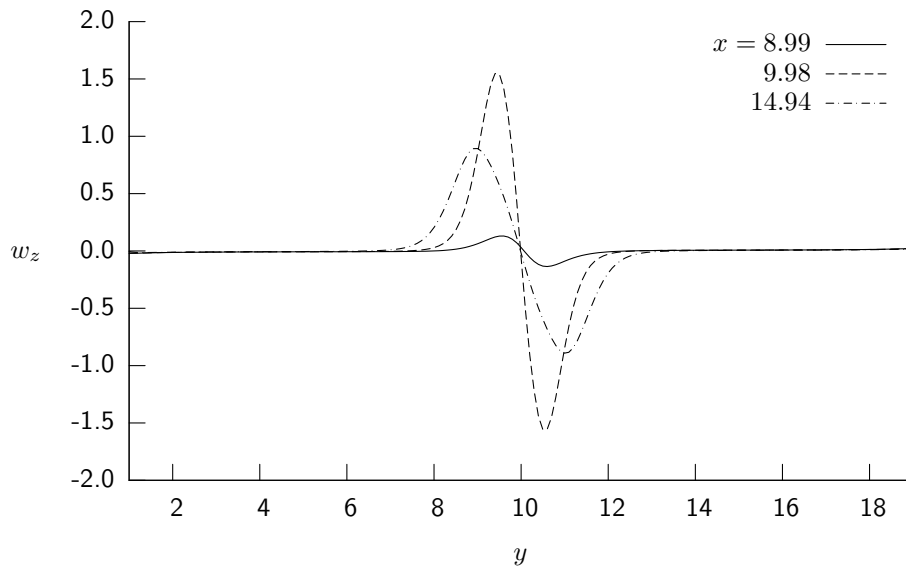


Figura 4.11: Vorticidad vs. y para $Re = 150$, $Ha = 36$.

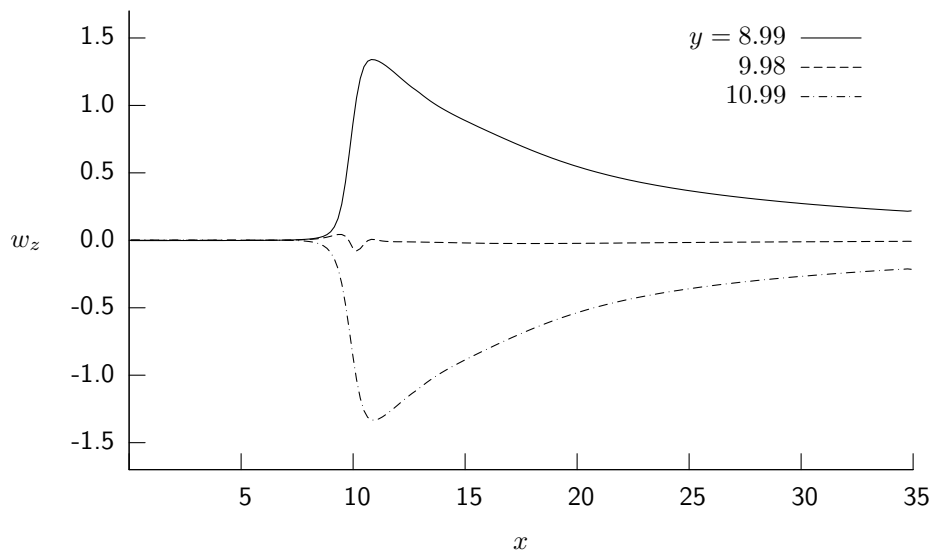


Figura 4.12: Vorticidad vs. x para $Re = 150$, $Ha = 36$.

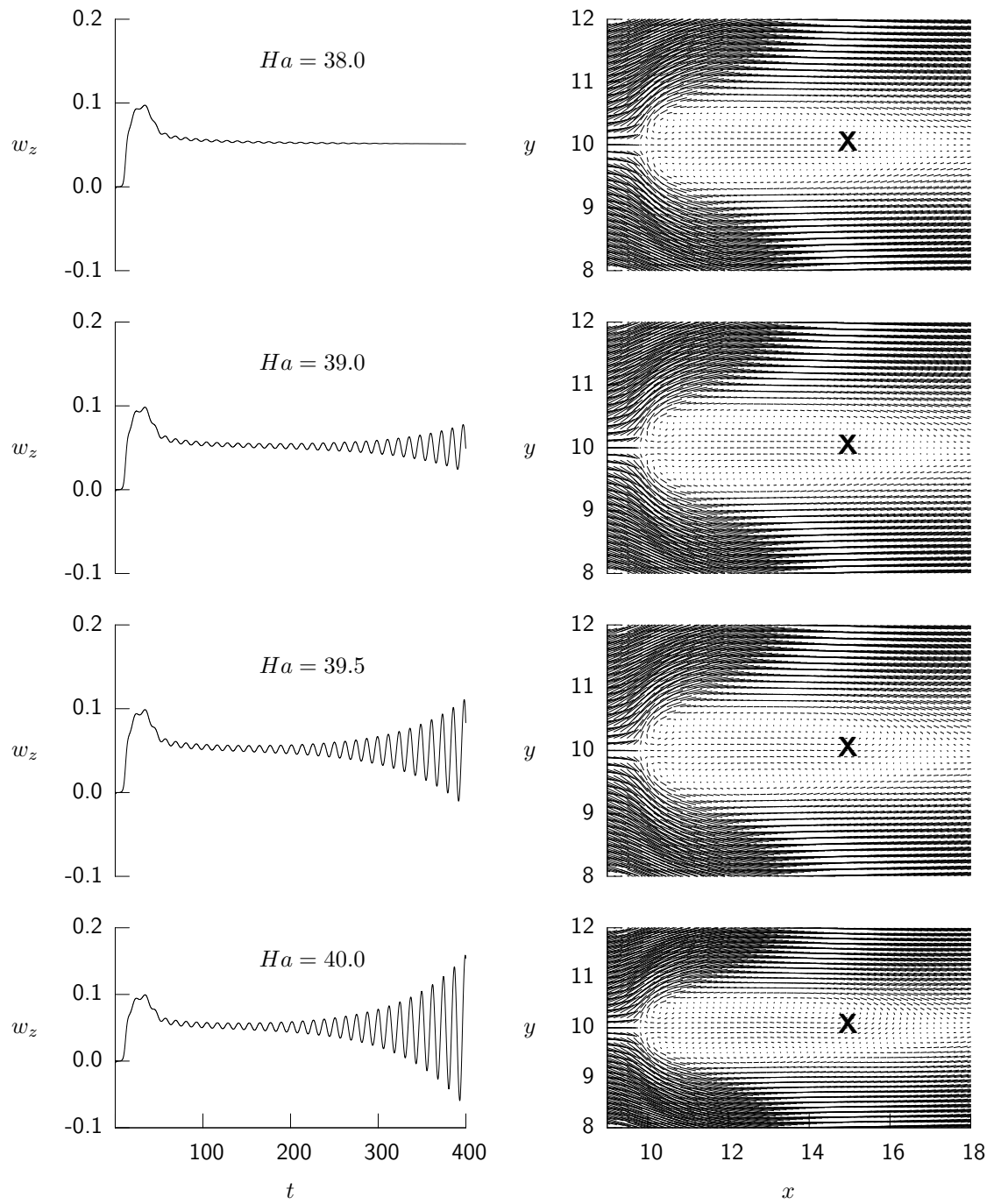


Figura 4.13: Vorticidad vs. t y campo de velocidades para $Re = 150$ y distintos Ha .

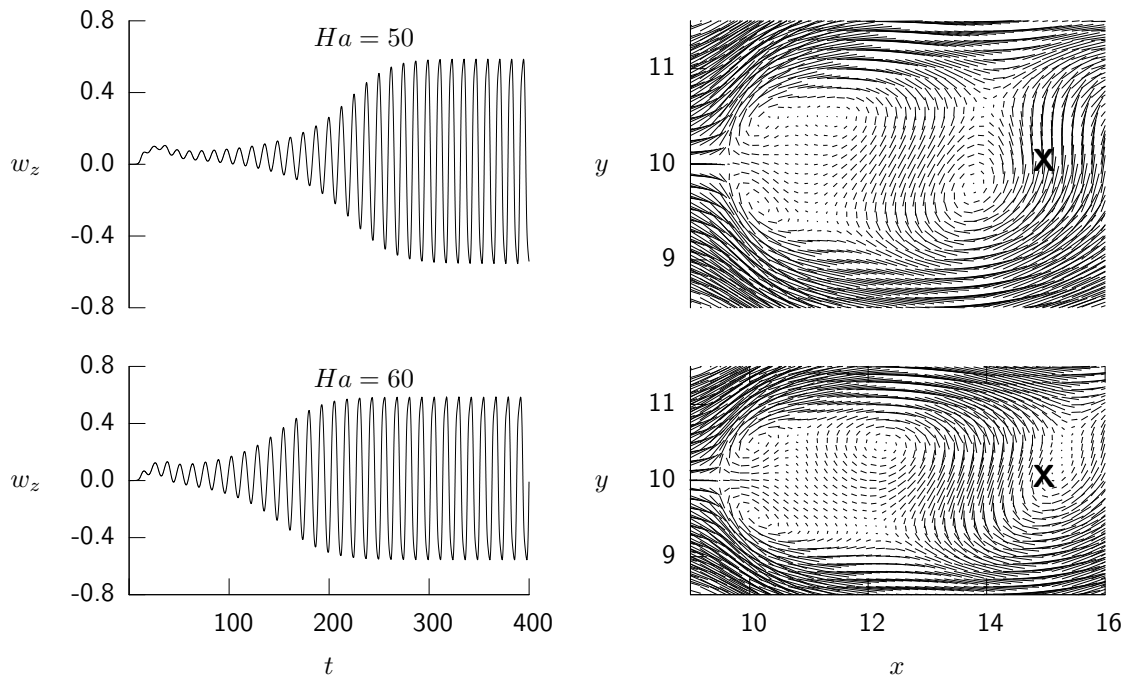


Figura 4.14: Vorticidad vs. t y campo de velocidades para $Re = 150$.

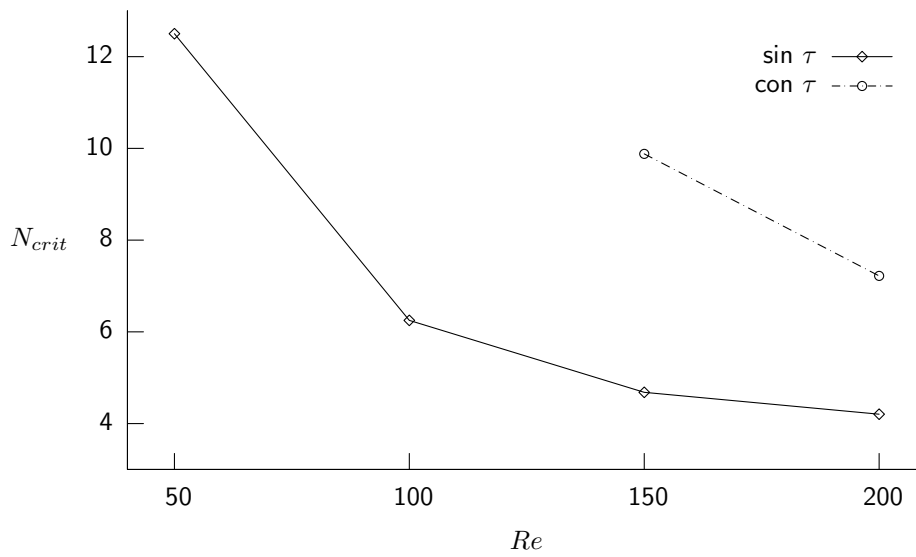


Figura 4.15: N crítico para los cuales desestabiliza el flujo.

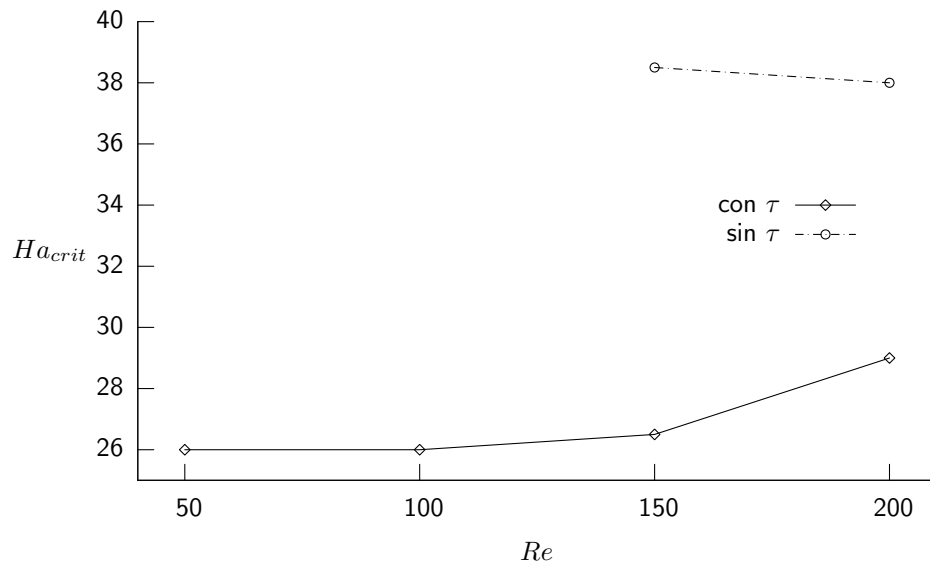


Figura 4.16: Ha crítico para los cuales desestabiliza el flujo.

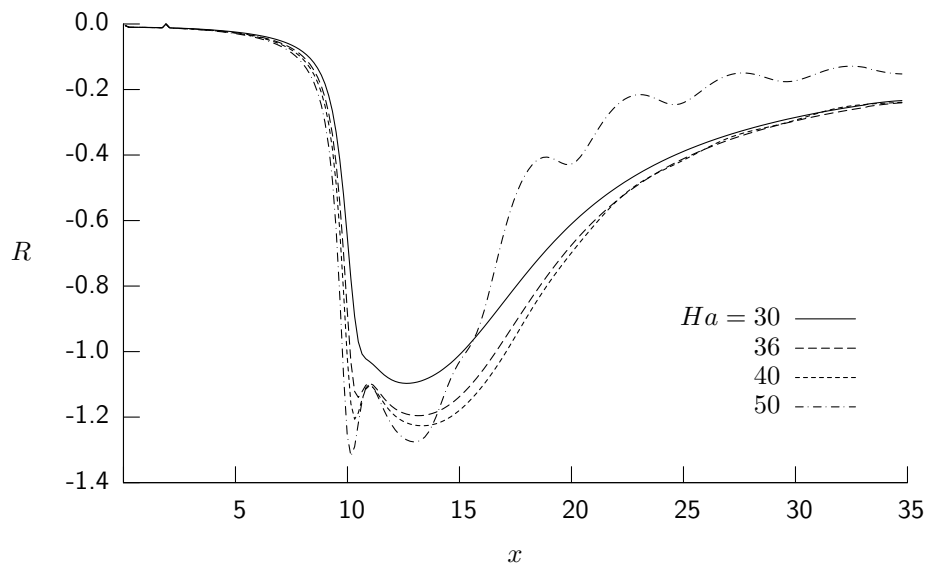


Figura 4.17: Déficit de velocidad vs. x para $Re = 150$ y distintos valores de Ha .

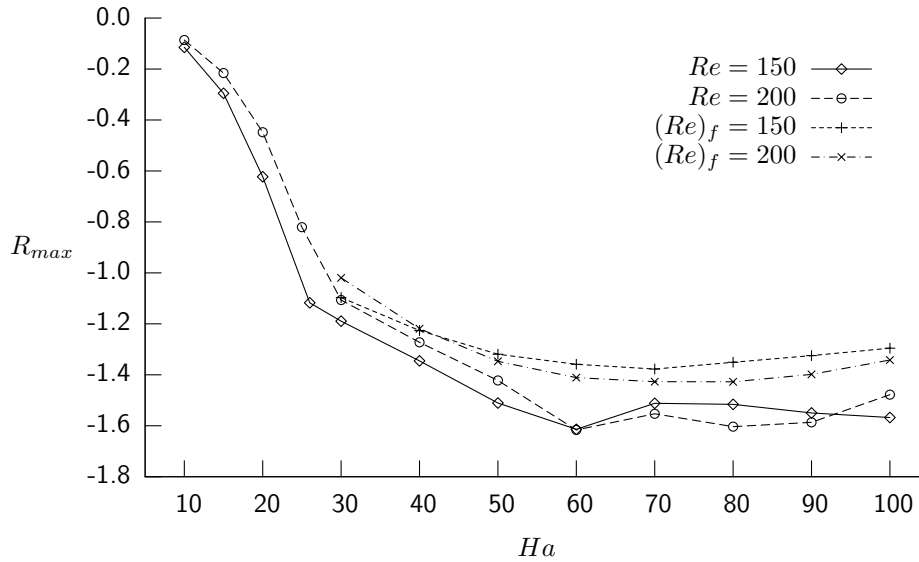


Figura 4.18: R_{max} vs. Ha , $(Re)_f$ denota los casos donde la fricción de Hartmann-Rayleigh no es despreciable, $\alpha = 1$.

4.2.1. Parámetros globales

El déficit de velocidad presenta el mismo comportamiento cualitativo que para el caso sin fricción, como se muestra en la Figura 4.17. Sin embargo, se observa que la oscilación aparece para Ha mayores. La Figura 4.18 muestra la variación del déficit de velocidad máximo contra Ha para los casos con y sin fricción para $Re = 150$ y 200 . Las curvas para los casos con fricción se encuentran por arriba de los casos sin fricción lo que significa que la presencia de recirculaciones en el flujo disminuye ligeramente con la fricción. Se observa que para $Ha < 30$, R_{max} crece abruptamente con el número de Hartmann, mientras que para $Ha > 30$ la variación de R_{max} con Ha es poco pronunciada.

En la Figura 4.19 se muestra el parámetro $-C_{pb}$ como función de Ha , para los casos con y sin fricción. Este parámetro poco se ve afectado por la fricción. Los puntos de inflexión se recorren muy ligeramente hacia valores mayores de Ha . Puede decirse que la "rigidez" del obstáculo se mantiene en presencia de fricción.

En la Figura 4.20, se muestra la diferencia entre la presión máxima y la mínima en la línea media axial como función de Ha , comparando los casos con y sin fricción. Cuando $Re = 150$, se observa que la curva correspondiente al caso con fricción está ligeramente por arriba de la curva para el caso sin fricción. Sin embargo, cuando $Re = 200$ esta relación se invierte. Tal comportamiento se explica tomando en cuenta que la fricción es menos intensa mientras mayor es el número de Reynolds. Por tanto, un número de Reynolds mayor lleva a una caída de presión menor.

En la Figura 4.21 se muestra el número de Strouhal como función de Ha , en ausencia y en presencia de fricción. Como ya se mencionó, la fricción inhibe la aparición de la inestabilidad para $Re = 50$ y 100 por lo que solo se muestran los casos $Re = 150$ y 200 . Para $Re = 150$, la inestabilidad no aparece hasta $Ha = 50$, mientras que en el caso sin fricción la vorticidad presenta una oscilación permanente

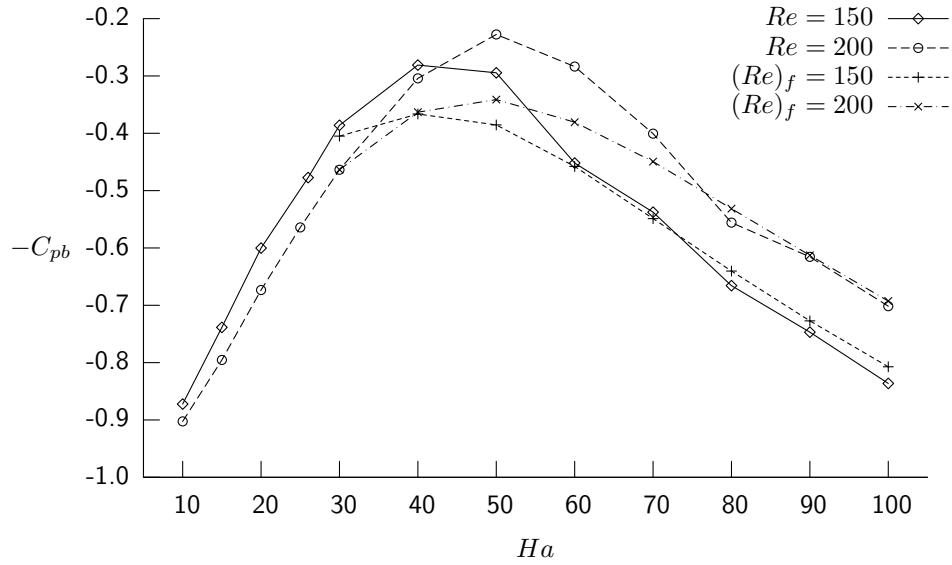


Figura 4.19: C_{pb} vs. Ha , $(Re)_f$ denota los casos donde la fricción de Hartmann-Rayleigh no es despreciable, $\alpha = 1$.

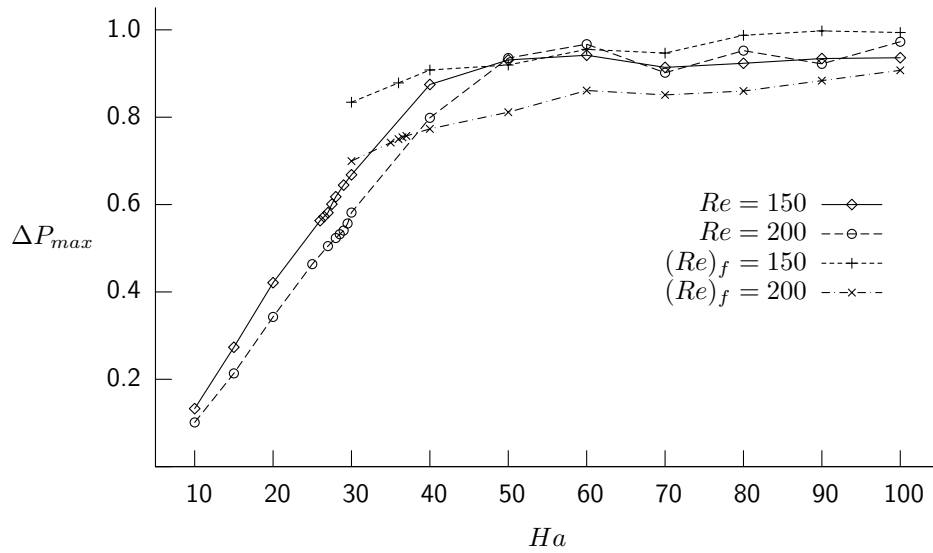
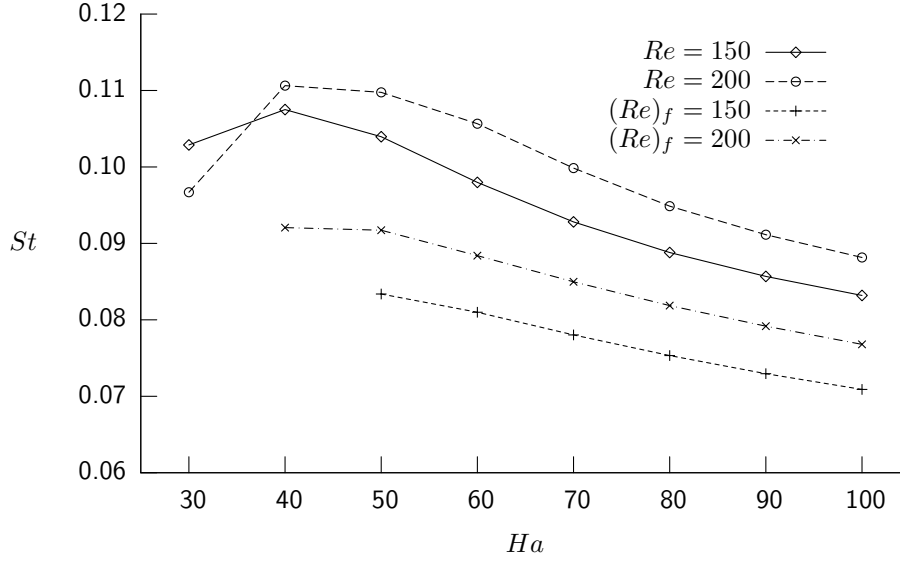


Figura 4.20: ΔP_{max} vs. Ha , $(Re)_f$ denota los casos donde la fricción de Hartmann-Rayleigh no es despreciable, $\alpha = 1$.

Figura 4.21: Número de Strouhal vs. Ha

incluso para $Ha = 30$. Por su parte, para $Re = 200$ la fricción retrasa el disparo de la inestabilidad hasta $Ha = 40$, comparado con $Ha = 30$ en ausencia de fricción. El otro efecto importante de la fricción de Hartmann-Rayleigh es la disminución de la frecuencia de desprendimiento de los vórtices, es decir, del número de Strouhal.

4.3. Modelo con corriente inyectada

En esta última sección consideraremos de manera preliminar el flujo a través del campo magnético localizado en presencia de una corriente eléctrica directa, inyectada a la capa de fluido en la dirección negativa del eje y . Bajo estas condiciones las ecuaciones que rigen el comportamiento del flujo, se modifican de tal manera que tomen en cuenta la fuerza adicional debida a la interacción de la corriente inyectada con el campo magnético localizado. En términos adimensionales las ecuaciones gobernantes toman la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) K = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla_{\perp}^2 u - \frac{u}{\tau} + \frac{Ha^2}{Re} I (j_y B_z^0 - B_z^0), \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) K = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla_{\perp}^2 v - \frac{v}{\tau} - \frac{Ha^2}{Re} I j_x B_z^0, \quad (4.24)$$

$$\nabla_{\perp}^2 b_z - u \frac{\partial B_z^0}{\partial x} - v \frac{\partial B_z^0}{\partial y} = 0, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial y} = I j_x, \quad -\frac{\partial b_z}{\partial x} = I j_y, \quad (4.26)$$

donde las densidades de corriente eléctrica tanto inducida como inyectada, han sido normalizadas por la magnitud de la corriente eléctrica inyectada J_0 . Las variables restantes han sido normalizadas tal como se hizo en la sección 2.4. Adicionalmente al número de Hartmann y Reynolds, aparece un nuevo parámetro adimensional $I = J_0/\sigma UB_{max}$ que representa un cociente de la corriente inyectada entre la corriente inducida. Los parámetros K y τ^{-1} conservan la forma dada por las ecuaciones (4.20) y (4.21), pero ahora el número local de Hartmann esta dado por $\mathcal{H}a(x, y) = HaB_z^0(x, y)\sqrt{I}$.

El sistema de ecuaciones (4.22)-(4.26) fue resuelto numéricamente usando las condiciones de frontera de la sección 3.3.1 y algunos parámetros cercanos a aquellos usados en el experimento de Honji y Haraguchi (1995). No es posible una comparación a detalle con el experimento dado que la información proporcionada es incompleta. Estimamos que el número de Hartmann usado en el experimento es $Ha \approx 0.9$, el espesor adimensional de la capa de fluido es $\alpha = 0.167$ y el parámetro de bloqueo β es de 14%. Estos parámetros se utilizaron para analizar dos casos diferentes: a) $Re = 700$, $I = 605$, y b) $Re = 1000$, $I = 1136$. Dado que $I \gg 1$ se tiene una fuerza de Lorentz considerable a pesar de que el número de Hartmann utilizado es mucho más pequeño que el usado en los casos anteriores analizados. La Figura 4.22 muestra para ambos casos la vorticidad sobre la línea central a 5 unidades aguas abajo del punto de máxima intensidad de campo magnético como una función del tiempo. Al lado derecho se muestra el correspondiente campo de velocidades. En el caso a) fueron encontrados vórtices dipolares estacionarios, mientras que en el caso b), los resultados numéricos muestran un desprendimiento periódico de vórtices en la estela detrás del obstáculo magnético con un número de Strouhal igual a 0.05. Patrones de flujo similares fueron encontrados en los experimentos de Honji y Haraguchi (1995); sin embargo, con la información que se tiene no es posible hacer una comparación cuantitativa. A pesar esto la simulación numérica es capaz de reproducir las principales características del experimento. Para realizar una evaluación completa del modelo numérico son necesarios datos experimentales adicionales.

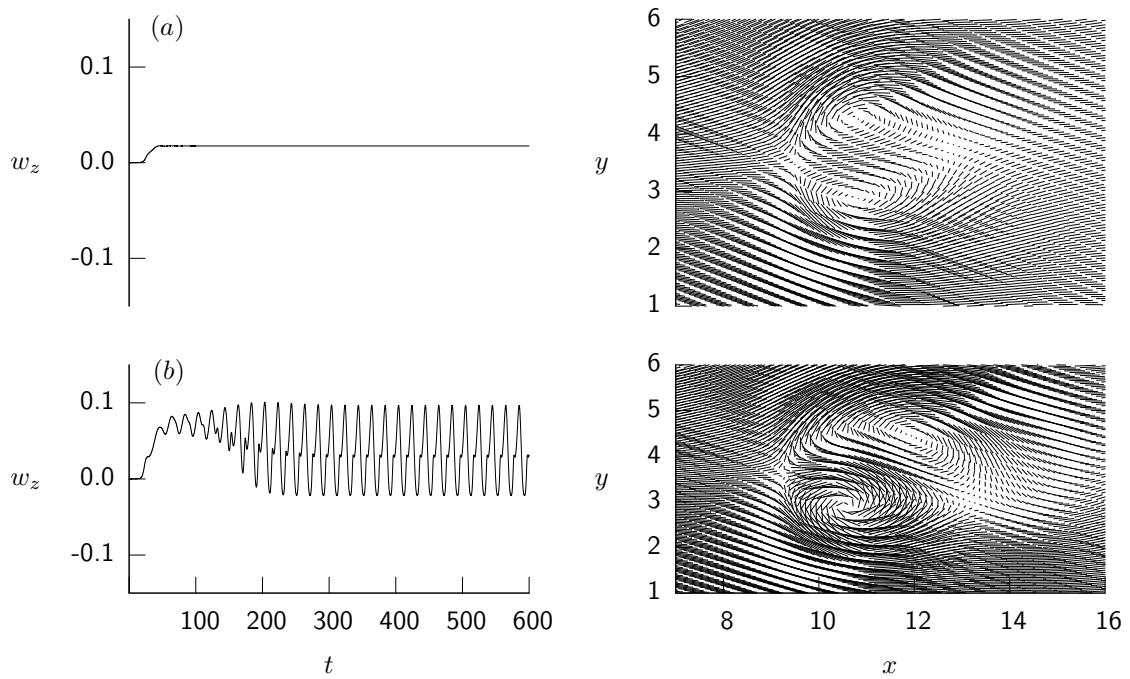


Figura 4.22: Vorticidad contra tiempo medida en la línea central 5 unidades aguas abajo del centro del obstáculo magnético para $Ha = 0.9$ y $\alpha = 0.167$. Del lado derecho se muestra el campo de velocidades correspondiente en la vecindad del obstáculo. (a) $Re = 700$, $I = 605$; (b) $Re = 1000$, $I = 1135$.

Conclusiones

En el presente trabajo se realizó un estudio numérico con el fin de analizar el flujo de una delgada capa de líquido conductor en presencia de un campo magnético localizado. Básicamente se consideraron dos modelos distintos. El primero fue un modelo puramente bidimensional que ignora la presencia de capas límite adheridas en el fondo del contenedor de fluido. En el segundo modelo, se utilizó un enfoque cuasi-bidimensional para incluir el efecto de las capas límite mencionadas a través de un término de fricción lineal en las ecuaciones de movimiento.

Los resultados muestran la posibilidad de generar vórtices tanto en estado estacionario como no estacionario mediante la interacción de líquidos conductores con campos magnéticos localizados espacialmente. Un aspecto clave del estudio fue la consideración de efectos no inerciales y la existencia de no uniformidades electromagnéticas dadas a través de gradientes de campo magnético aplicado. Los resultados numéricos han mostrado que el flujo a través de un obstáculo magnético presenta muchas similitudes con el flujo alrededor de obstáculos sólidos, encontrándose formación estacionaria de vórtices así como desprendimiento periódico de vórtices en la estela formada detrás del obstáculo magnético, de una manera análoga a la que se observa en la calle de vórtices de von Kármán.

Así mismo, analizamos el efecto de la fricción de Hartmann-Rayleigh en la aparición de inestabilidades en el flujo. En ausencia de fricción, los regímenes de flujo están únicamente determinados por la interacción de fuerzas inerciales, magnéticas y viscosas en el núcleo del flujo. Bajo ciertas condiciones, las capas cortantes creadas por la fuerza de Lorentz opuesta al flujo de entrada en la vecindad del obstáculo, pueden volverse inestables. De hecho, el mecanismo responsable de la inestabilidad es el déficit de velocidad a través de las capas cortantes, que acentúa los puntos de inflexión en el perfil de velocidades. En este contexto, la fricción de Hartmann-Rayleigh actúa como un factor de estabilidad, retrasando la aparición de inestabilidades a valores de números de Hartmann mayores para un número de Reynolds dado. En algunos casos la fricción de Hartmann-Rayleigh puede inhibir completamente la aparición de inestabilidades en el flujo. La fricción de Hartmann-Rayleigh se manifiesta en una reducción del número de Strouhal, comparado con los casos donde la fricción es despreciable. Este estudio tiene relevancia directa en aplicaciones de transferencia de calor, ya que la vorticidad generada por la interacción electromagnética puede mejorar sustancialmente los mecanismos de transporte de energía de una manera no intrusiva.

Queda aún mucho trabajo por delante. En particular, es necesario ampliar el trabajo numérico para analizar de manera más detallada los flujos en presencia de

corriente eléctrica inyectada, pues bajo estas condiciones es más factible la comparación con resultados experimentales. Así mismo, queda pendiente la solución numérica de la ecuación de energía y la evaluación de estos flujos en el mejoramiento de la transferencia de calor. Por su parte, el desarrollo de un proyecto experimental que permita reproducir los flujos estudiados numéricamente, plantea un reto a futuro. Los estudios numéricos y experimentales pueden utilizarse como enfoques complementarios para obtener un mejor entendimiento de los flujos en campos magnéticos localizados.

Bibliografía

- Abdou, M. A., Ying, A., Morley, N., Gulec, A., Smolentsev, S. et al. 2001 On the exploration of innovative concepts for fusion chamber technology. *Fusion Engng Design* **54**, 181-247.
- Afanasyev, Y. D., Korabel, V. N. 2006 Wakes and Vortex streets generated by translating force and force doublet: laboratory experiments. *J. Fluid Mech.* **553**, 119-141.
- Alpher, A., Hurwitz, H., Johnson, R. H. y White, D. R. 1960 Some studies of free surface mercury magnetohydrodynamics. *Rev. Mod. Phys.* **32**, 758-769.
- Bocheninskii, V. P., Branover, G. G., Tananaev, A. V. y Cheryaev, Yu. P. 1971 An experimental study of the resistance to the flow of an electroconductive fluid in plane insulated channels in the presence of a transverse magnetic field, with consideration given to the end effect and the roughness of the walls. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza* **4**, 10-21.
- Blackburn, H. M. y Henderson, R. D. 1999 A study of two dimensional flow past an oscillating cylinder. *J. Fluid Mech.* **385**, 255-286.
- Bruneau, Ch. H. y Fabrie, P. 1994 Effective downstream boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equations. *Intl J. Numer Methods Fluids* **19**, 693-705.
- Bühler, L. 1996 Instabilities in quasi-two-dimensional magnetohydrodynamics flows. *J. Fluid Mech.* **326**, 125-150.
- Burr, U., Barleon, L., Müller, U. y Tsinober, A. 2000 Turbulent transport of momentum and heat in magnetohydrodynamic rectangular duct flow with strong side wall jets. *J. Fluid Mech.* **406**, 247-279.
- Chen, D. y Jirka, H. G. 1997 Absolute and convective instabilities of plane turbulent wakes in a shallow water layer. *J. Fluid Mech.* **338** 157-172.
- Chorin, A. 1968 Numerical solutions of the Navier-Stokes equations. *Math. Comput.* **22**, 745-762.
- Clercx, H. J. H., Van Heijst, G. J. F. y Zoetewij 2003 Quasi-two-dimensional turbulence in shallow fluid layers: The role of bottom friction and fluid layer depth. *Phys. Rev E* **67**, 066303.

- Couder, Y. y Basdevant, C. 1968 Experimental and numerical study of vortex couples in two dimensional flows. *J. Fluid Mech.* **173**, 224-251.
- Cuevas, S., Smolentsev, S., Abdou, M. A. 2006 On the flow past a magnetic obstacle. *J. Fluid Mech.* **553**, 227-252.
- Cuevas, S., Smolentsev, S., Abdou, M. A. 2006 Vorticity generation in the creeping flow past a magnetic obstacle. *Phys. Rev E* (enviado)
- Davidson, P. A. 2001 Introduction to magnetohydrodynamics flows. *Cambridge*
- Frank, M., Barleon, L. y Müller, U. 2001 Visual analysis of two dimensional magnetohydrodynamics *Phys. Fluids* **13**, 2287-2295.
- Griebel, M., Dornseifer T. y Neunhoeffler T. 1998 *Numerical Simulation in Fluid Dynamics*. SIAM.
- Hirt, C., Nichols, B. y Romero, N. 1975 SOLA- A numerical solution algorithm for transient fluid flows. *Tech. Rep.* LA-5852. Los Alamos, NM: Los Alamos Nat. Lab.
- Honji, H. 1991 Wavy Wake Formation in the Absence of Sumerged Bodies in Electrolyzed Salt Water. *J. Phys. Soc. Japan* **60**, 1161-1164.
- Honji, H. y Haraguchi Y. 1995 Electrolytically Induced Quasi-Two Dimensional Vortex Pairs. *J. Phys. Soc. Japan* **64**, 2274-2277.
- Kalyutic, A. I., Lavrent'ev, I. V. y Serebryakov, V. V. 1986 The development of the flow for an electroconductive fluid in a magnetic field. *Magnetohydrodynamics* **2**, 11-14.
- Kolesnikov, Y. y Tsinober, A. 1972 Two dimensional turbulent flow behind a circular cylinder. *Magnetohydrodynamics* **3**(1), 300-307.
- Lavrent'ev, I. V., Molokov, S. Yu., Sidorenkov, S. I. y Shishko, A. R. 1990 Stokes flow in a rectangular magnetohydrodynamic channel with nonconducting walls within a nonuniform magnetic field at large Hartmann numbers. *Magnetohydrodynamics* **26**(3), 328-338.
- Ludford, G. S. S. 1960 The effect of a very strong magnetic cross-field on steady motion through a slightly conducting fluid. *J. Fluid Mech.* **10**, 141-155.
- McCaig, M. 1977 *Permanent magnets in theory and practice*. Wiley.
- Moffat, H.K. y Proctor, M.R.E. (Eds) 1982 Metallurgical Applications of Magnetohydrodynamics. *The Metals Society*, London.
- Moreau, R. 1990 *Magnetohydrodynamics*. Kluwer.
- Mück, B., Günter, C., Müller, U. y Bühler, L. 2000 Three Dimensional MHD Flows in rectangular ducts with internal obstacles. *J. Fluid Mech.* **418**, 265-295.
- Müller, U. y Bühler, L. 2001 *Magnetofluidynamics in Channels and Containers*. Springer.
- Mutschke, G., Gerbeth, G., Sahtrov, V. y Tomboulides, A. 1997 Two- and three-dimensional instabilities of the cylinder wake in an aligned magnetic field. *Phys. Fluids* **9**, 3114-3116.

- Oertel, H. 1990 Wakes behind blunt bodies. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 539-564.
- Reed, C. B. y Picologlou, B. F. 1989 Side wall flow instabilities in liquid-metal flow under blanket relevant conditions. *Fusion Technol.* **15**, 705-715.
- Satjin, M. P., Cense, A. W., Verzicco, R., Clercx, H. J. H. y Van Heijst, G. J. F. 2001 Three-dimensional structure and decay properties of vortices in shallow fluid layers. *Phys. Fluids*, **13**, 1932-1945.
- Sellers, C.C. y Walker, J. S. 1999 Liquid-metal flow in an electrically insulated rectangular duct with a non-uniform magnetic field. *Intl J. Engng Sci.* **37**, 541-552.
- Shercliff, J. A. 1965 *Magnetohydrodynamics*. A film produced by Educational Services Inc. Watertown, Massachusetts, USA.
- Smolentsev, S. 1997 Averaged model in MHD duct flow calculations. *Magnetohydrodynamics* **33**(1), 42-47.
- Sohankar, A., Norberg, C. y Davidson, L. 1998 Low-Reynolds-number flow around a square cylinder at incidence: Study of blockage, onset of vortex shedding and outlet boundary condition. *Intl J. Numer Meth. Fluids* **26**, 39-56.
- Sohankar, A., Norberg, C. y Davidson, L. 1999 Simulation of three dimensional flow around a square cylinder at moderate Reynolds numbers. *Phys. Fluids* **11**, 288-306.
- Sommeria, J. y Moreau, R. 1982 Why, how and when, MHD turbulence becomes two-dimensional. *J. Fluid Mech.* **118**, 507-518.
- Sterl, A. 1990 Numerical simulation of liquid-metal MHD flows in rectangular ducts. *J. Fluid Mech.* **216**, 161-191.
- Stewartson, K. 1956 Motion of a sphere through a conducting fluid in the presence of a strong magnetic field. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **52**, 301-316.
- Talmage, G. y Walker, J. S. 1998 Three-dimensional laminar MHD flow in ducts with thin metal walls and strong magnetic fields. In *Liquid Metal Flows: Magnetohydrodynamics and Applications* (ed. H. Branover, M. Mond y Y. Unger) Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 111, pp. 3-25. AIAA.
- Thess, A. y Zikanov, O. 2004 On the transition from two-dimensional to three-dimensional MHD turbulence. In *Studying Turbulence using Numerical Simulation Data Bases. Proc. Summer Program at the Center for Turbulence Research, Stanford University and NASA Ames*, pp. 63-74.
- Ting, A., Hua, T. Q., Walker, J. S. y Picologlou, B. F. 1993 Liquid-metal flow in a rectangular duct with thin metal walls and with non-uniform magnetic field. *Intl J. Engng Sci.* **31**, 357-372.
- Walker, J. S. y Picologlou, B. F. 1995 Liquid-metal flow in an insulated rectangular expansion with strong transverse magnetic field. *J. Fluid Mech.* **309**, 111-126.
- Voropayev, S. I., Afanasyev, Y. D. y Filippov, I. A. 1991 Horizontal jets and vortex dipoles in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **227**, 543-566.

- Williamson, C. K. H. 1996 Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **28**, 477-.
- Zavala Sansón, L., Van Heijst, G. J. F. y Backx, N. A. 2001 Ekman decay of a dipolar vortex in a rotating fluid. *Phys. Fluids* **13**, 440-451.
- Zdravovich, M. M. 1997 *Flow around Circular Cylinders. Vol. 1: Fundamentals.* Oxford.