

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE UNA
AVALANCHA GRANULAR

ESPERANZA CRYSTAL LINARES GUERRERO

FACULTAD DE INGENIERÍA
INGENIERÍA MECÁNICA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
DIRECTOR DE TESIS: DR. ROBERTO ZENIT CAMACHO
CODIRECTORA DE TESIS: DRA. CELINE GOUJON

15 de agosto de 2006



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Quiero agradecer a Dios por todas las personas maravillosas que ha puesto en mi camino.

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México y al Instituto de Investigaciones en Materiales por haberme abierto sus puertas. Agradezco también al programa de becas PAPIIT por el apoyo económico para la realización de esta tesis.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mis asesores de tesis, el Dr. Roberto Zenit y la Dra. Celine Goujon, por todas sus enseñanzas, por su predisposición permanente e incondicional en aclarar mis dudas y por la amistad y el gran apoyo que me han brindado durante la realización de este trabajo.

Agradezco a los miembros del jurado: Dr. Guillermo Pullos, Dr. José Luis Macías, Dra. María del Rocío Chicharro y al Dr. Francisco Solorio por su contribución significativa en la revisión de esta tesis y por los consejos dados para mejorarla.

En especial agradezco a mi querida familia, por todo el apoyo y amor que me han brindado. A mis padres por todo su amor, estímulo, comprensión y motivación. A mi hermana por ser una bellísima persona. A mi hermanito quien nunca deja de sorprenderme. Agradezco a mis tías: Ruth, Cruz, Lulú, Alicia, Irma y Minerva por todo lo que me han dado, las quiero mucho. A mi querido abuelo por toda su sabiduría.

Quiero expresar un gran sentimiento de gratitud hacia la familia Almada Pérez, por todas las atenciones y su gran apoyo. Gracias Iván por todo tu amor, apoyo incondicional, paciencia y colaboración para el desarrollo de esta tesis.

Muchas gracias a todas las personas del Instituto de Investigaciones en Materiales por hacer que mi estancia fuera muy placentera: Bernardo, Carlos, Francisco, Vladimir, Jonatan, Felipe y Miguel.

A mis compañeros y amigos de la facultad quienes siempre me ayudaron: René, Misael, Oziel, Zéus, Natroshi, Gabriel, Angel David y Juanito. Sin ustedes la carrera no hubiera sido tan divertida.

Esta tesis se la dedico a mi madre.

Índice general

1. Introducción	7
1.1. Motivación	7
1.2. Antecedentes	11
1.2.1. Avalanchas de extenso recorrido	11
1.2.2. Segregación	23
1.3. Objetivos	27
2. Simulación numérica	29
2.1. Técnica de Elemento Discreto para flujo granular	29
2.2. Fuerzas entre partículas	30
2.2.1. Fuerzas de contacto	30
2.2.2. Fuerzas gravitacionales	36
2.3. Ecuaciones de movimiento	36
2.4. Determinación de los parámetros de contacto	37
2.4.1. Contacto de Hertz	39
2.5. Descripción del algoritmo	42
3. Planteamiento del problema	45
3.1. Descripción de los experimentos numéricos	45
3.1.1. Parámetros de simulación	50
3.1.2. Características del flujo bidisperso	52
4. Resultados y Análisis	55
4.1. Resultados	55
4.1.1. Mínimo en la variación global del coeficiente de fricción	55
4.1.2. Variación global de la energía cinética	59
4.2. Análisis	64

4.2.1. Distribución de las partículas	64
4.2.2. Segregación en la avalancha	75
4.2.3. Velocidad angular en la base de la avalancha	77
5. Conclusiones	83
5.1. Resumen de resultados	83
5.2. Trabajo futuro	85
A. Código del elemento discreto	93
A.1. setup.c	93
A.2. Desim2Dinit.c	100
A.3. DEsim2D.c	103
B. Programas de análisis en Matlab ®	107
B.1. Campos-final	107
B.2. Campos	109
B.3. Capa	111
C. Artículos y Presentaciones	113
C.1. The 2005 APS Division of Fluid Dynamics 58th Annual Meeting	114
C.2. Increased mobility of bidisperse granular avalanches	116

Resumen

En esta tesis se llevaron a cabo simulaciones numéricas de avalanchas de materiales granulares. Por avalancha granular entendemos el movimiento de una masa constituida por un material granular (sistemas de partículas sólidas). En particular se estudió el efecto que tiene la dispersión del tamaño de las partículas en el recorrido de la avalancha.

Se realizaron simulaciones numéricas en dos dimensiones utilizando el método de elemento discreto siguiendo el modelo de partícula suave. Los experimentos numéricos consideran una avalancha constituida por una mezcla de dos tamaños de discos, originalmente ubicados sobre un plano inclinado. El coeficiente de fricción para los contactos entre partícula-partícula y partícula-pared se mantiene fijo y es igual a 0.5. La avalancha granular evoluciona con el tiempo hasta que vuelve a un estado de reposo. La posición del centro de masa al inicio y al final de la avalancha es localizado, de tal forma que el avance de la avalancha puede ser medido, L_{cm} . Varias simulaciones fueron realizadas manteniendo el área de la masa constante, variando solamente el porcentaje de granos pequeños y la relación de diámetros.

Los resultados muestran que la magnitud del coeficiente de fricción global, definido como H_{cm}/L_{cm} , de la avalancha disminuye con el porcentaje de discos pequeños, alcanzando un mínimo para un determinado porcentaje. Este porcentaje disminuye con la relación de diámetros de igual manera que el valor del coeficiente de fricción global. Estos resultados indican que el coeficiente de fricción global es afectado por el porcentaje de pequeñas partículas. Más aún, se observa la formación de una capa de pequeños discos en la base de la avalancha, la cual se le identifica como la fuente de la “lubricación”.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Los materiales granulares son de interés debido a que aparecen en un amplio rango de fenómenos naturales y aplicaciones industriales. Poseen además, características físicas peculiares. Dependiendo de la situación, un material granular se puede comportar como sólido (resistiendo esfuerzos cortantes) o como fluido (tomando la forma del recipiente que los contiene). Esta naturaleza dual hace que el comportamiento mecánico de los materiales granulares sea poco comprendido por la ciencia actual.

Un material granular es aquél que está formado por partículas sólidas macroscópicas, dispersas en un fluido o en vacío [1]. La transferencia de momentum y energía en un flujo granular ocurre a través de contactos partícula-partícula y la presencia de un fluido intersticial tiene una influencia secundaria.

Los flujos granulares tienen una gran importancia en la industria ya que la producción mundial de granos y polvos es aproximadamente de diez mil millones de toneladas [2]. Aproximadamente el 10 % de la producción mundial de energía se usa para procesarlos.

En la naturaleza también se tiene un gran número de fenómenos naturales que involucran a los materiales granulares. Ejemplos de ello son los corrimientos de tierra, la formación de anillos planetarios, la erosión, la sedimentación de ríos, los flujos volcánicos, la formación de dunas de arena, por mencionar

algunos.

Las avalanchas son eventos geológicos comunes de suma importancia debido a sus potenciales consecuencias en la seguridad y la vida humana. Una avalancha se puede definir como el movimiento de una masa granular cuesta abajo cuyo inicio puede ser el resultado de un temblor, vibraciones causadas por maquinarias, tráfico o incluso relámpagos.

En particular, un fenómeno que ha sido de gran interés son las avalanchas de “extenso recorrido”. Estas avalanchas representan una clase espectacular de eventos geológicos. Empezando en la parte más alta de una montaña, la avalancha desciende de manera arrolladora hasta llegar al suelo del valle y puede recorrer muchas veces la distancia de caída inicial medida desde la horizontal del suelo.

Una masa de rocas cuesta abajo frecuentemente se mueve a grandes velocidades sobre pendientes poco pronunciadas alcanzando largas distancias inesperadas. La famosa caída de rocas de Elm en Suiza, 1881, produjo una avalancha que sepultó a un pueblo y mató a 115 personas. Después de la catastrófica corriente de escombros Albert Heim [3] afirmó que no conocía de un ejemplo similar a éste. Heim refirió a la caída de rocas como “*Sturzstrom*”. La palabra “*Strom*”, la cual se puede traducir como corriente, fue enfatizada porque Heim creía que la corriente de escombros fluía como un líquido. Repetidamente refirió la semejanza geométrica de los flujos de lava y glaciares, pero se dió cuenta de las grandes diferencias de sus mecanismos. La movilidad aparente de las grandes caídas de rocas y la tendencia a esparcirse de sus escombros también impresionaron a Kent [4], quien también supuso que éstas fluían como un líquido.

Una “avalancha” ha sido definida como “un término general que cubre una amplia variedad de movimientos de masa ... involucrando ... transporte cuesta abajo, producto de la fuerza gravitacional, de materiales terrosos y rocosos en masa” [5]. Terzaghi [6] especificó que “el término avalancha hace referencia a un desplazamiento rápido”; un movimiento similar pero con una rapidez imperceptible recibe el nombre de deslizamiento [7]. La expresión alemana para avalancha es “*Bergsturz*” que significa caída de montaña. Heim [3] distinguió alrededor de 20 diferentes tipos de avalanchas; aquellas capaces de

generar una corriente de rocas de escombros fueron llamadas “*Felsstürze*” o caída de rocas. Ninguno de los dos términos (“avalancha” o “caída de rocas”) describe enteramente el movimiento de la caída de una gran masa de rocas, porque no sólo se deslizan o caen, sino que como demostró Heim [3], también fluyen.

Heim utilizó varios sinónimos para el flujo de fragmentos de rocas que caen, pero no se ha encontrado un término equivalente en español, por lo que varios geólogos han adoptado los términos en alemán para describir el fenómeno. Heim distinguió a la caída de rocas de la avalancha de rocas: la masa de una caída de rocas está formada por escombros generados por la desintegración de las rocas que caen, mientras que los escombros de una avalancha de rocas están compuestos de rocas sueltas y rocas que se encontraban originalmente encaramadas sobre una cuesta empinada.

Hsü [7] define a las caídas de rocas (*Sturzstrom*) como una corriente de escombros que se mueven rápidamente y que se derivan de la desintegración de la masa de rocas muy grandes que van cayendo; la velocidad de un *Sturzstrom* frecuentemente excede a los 100 km/hr, y su volumen es comúnmente mayor a $1 \times 10^6 \text{ m}^3$ [7]. La caída de rocas de Elm es probablemente el ejemplo que ha sido objeto de la mayoría de los estudios [7]. El evento de Elm ha sido caracterizado por Heim como un “drama de tres actos”: La caída (*Bergsturz*), el salto (*Luftsprung*), y la rompiente (*Brandung*). Un vívido relato de la fase de caída es narrado por un testigo de la catástrofe de Elm, en el cual se da una descripción que hace sugerencia de que la caída de roca se comportó como un cuerpo rígido en la primera etapa del movimiento. El bloque al caer empezó a desintegrarse, las partes fragmentadas se movieron en unísono como un *rebaño de ovejas galopantes*.

En la segunda etapa del Elm, la masa que caía pegó en el piso plano de una cantera y se desintegró completamente. Los escombros fueron desviados y disparados horizontalmente hacia adelante. Heim comparó este fenómeno de saltar con el rocío de una cascada que pega contra una roca. Una vez que el *Sturzstrom* alcanzó el fondo de la pendiente, un brazo de la rompiente fue enviado directamente al norte y se elevó a una altura de 100 m. Sin embargo, la rompiente original bajó al valle y tuvo que desviarse 60° al noroeste. La punta del *Sturzstrom* se movió otros 1.5 km a lo largo del piso casi horizontal del valle.

Heim enfatizó que la rompiente del *Sturzstrom* de Elm no voló, sino que “abrazó” el suelo mientras iba corriendo a lo largo del fondo plano del valle. De hecho, una tubería de agua que originalmente se encontraba enterrada a 1m de profundidad, fue desenterrada por el *Sturzstrom* y fue encontrada mas tarde a mas de 1 km corriente abajo.

En una escala local, Heim infirió un gradiente vertical de velocidades: “En la parte del fondo, los escombros alcanzaron un primer estancamiento. La capa superior de escombros pasó por encima a una gran velocidad”. Su interpretación fue probablemente influenciada en parte por el extraño relato de uno de los habitantes más viejos de la villa quien se encontraba dentro de una de las últimas casas que golpeó el *Sturzstrom*, pero que sobrevivió para narrar la historia (Buss y Heim, 1881, p. 40):

Estaba parado en la puerta de la cocina, que era también la puerta de la casa, y escuché y vi con temor como la montaña se venía abajo. Pensé que mi esposa estaba en la puerta de la casa de mi hijo, quien vivía a un lado, y quise ir a buscarla. Pero entonces, la casa retumbó, y fui alcanzado por el viento y me hizo deslizar hacia la cocina. De repente me di cuenta de que estaba paralizado, no sé cómo, pero estaba enterrado hasta el cuello, de pie, entre los trastos rotos y las rocas. No podía mover mis brazos y piernas y era torturado por la ansiedad extrema de mi esposa. Después de una larga y horrible espera finalmente escuché la voz de mi hijo. “¿Hay alguien aquí?” “Oh, si, Sepp” grité, “estoy aquí”. Estaba aliviado de que alguien más estuviera vivo. Después mi hijo me desenterró.

Si las piedras se hubiesen movido como una masa deslizante, hubieran arrollado o empujado la casa con el anciano adentro. En vez de eso, los escombros fluyeron alrededor de él, y no sufrió ninguna lesión mas que el entierro. Este fenómeno cerca de la parte exterior del *Sturzstrom* es similar a una curiosa observación hecha por Sharp y Noble [8] cerca de los límites exteriores de una avalancha de lodo ¹: “Una cabaña fue enterrada por los escombros. ... Cu-

¹A las avalanchas de lodo actualmente se les llama el evento *Lahar*. Este término indonesio describe el flujo de una mezcla fría o caliente de agua y fragmentos de roca que se mueven sobre la pendiente de un volcán y/o sobre la cuenca de un río. Tomado de la página <http://volcanoes.usgs.gov>, (U.S. Geological Survey)

riosamente la construcción parece no haber sido movida o haber sufrido algún daño más que el haber sido enterrada, probablemente por la baja velocidad de impacto y el flujo homogéneo”.

Estas observaciones, permitieron a Heim desarrollar la idea de que el *Sturzstrom* se puede comportar hasta cierto punto como un fluido.

Aunque Heim se enfocó en el estudio de las caídas de rocas, las avalanchas de extensos recorridos abarcan más allá, pues los depósitos de estas avalanchas han sido encontrados en terrenos volcánicos y no volcánicos, tanto en escenarios terrestres como submarinos, y mas aún en la Luna y en Marte.

En resumen, lo que caracteriza a las avalanchas de extensos recorridos es la gran movilidad que presentan: la masa granular recorre longitudes mayores a las calculadas por modelos de fricción simples. En estos eventos, es común encontrar que el recorrido (L_{max}) es 10 veces la altura de caída (H_{max}), conduciendo a un coeficiente de fricción aparente (H_{max}/L_{max}) de 0.1 o menos. Esta alta movilidad hace que estos eventos sean muy peligrosos, pues han arrasado con asentamientos humanos que en un principio se consideraron seguros.

A partir del descubrimiento de avalanchas de extenso recorrido en la Luna y en Marte [9, 10], muchos autores han explorado la posibilidad de que las avalanchas viajen como flujos granulares, sin la necesidad de un fluido intersticial [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17].

De esta manera el mecanismo de los flujos granulares se ha convertido en un importante área de investigación. Sin embargo, a pesar de avances significativos, el entendimiento de los flujos granulares es todavía muy rudimentario para permitir una rigurosa aplicación a los flujos geológicos.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Avalanchas de extenso recorrido

El extenso recorrido de avalanchas es un fenómeno que ha sido estudiado por varios autores y ha intrigado a la ciencia geológica desde su descubrimiento

hecho por Heim [3] en el año de 1881 ².

Para su estudio, la movilidad de una avalancha ha sido descrita comúnmente como la relación de la altura de la cual desciende la avalancha con la distancia que ésta recorre, esto es H/L (Figura 1.1).

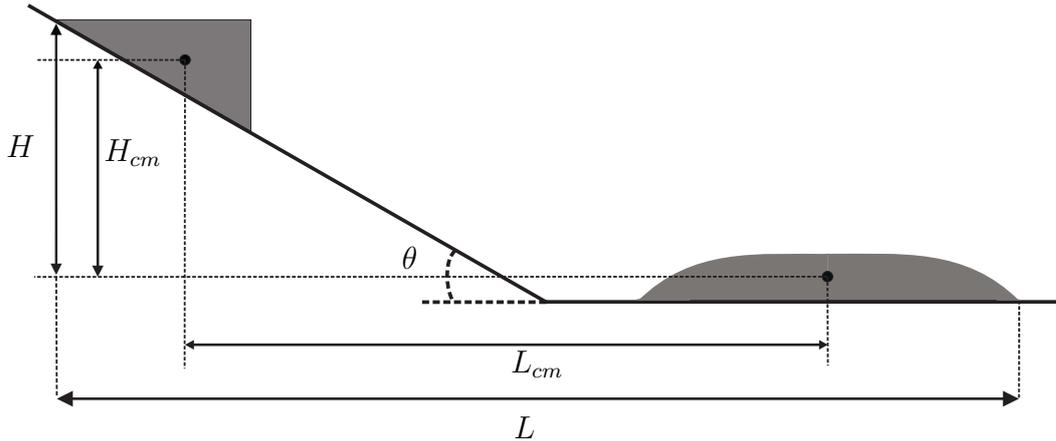


Figura 1.1: Esquema del depósito de una avalancha y la definición de los parámetros H , L , H_{cm} , y L_{cm} .

Esta relación es equivalente a un coeficiente de fricción global. Estos parámetros son los más fáciles de medir [18] y son probablemente estimados con menos de un 20 % de error relativo en la mayoría de los casos de avalanchas reales. La relación H/L para avalanchas de gran magnitud es aproximadamente 0.1, dando como resultado una aparente reducción de la fricción efectiva, ya que el coeficiente de fricción de las rocas que forman la masa de la avalancha es típicamente de 0.6 [19]. Sin embargo, en muchos análisis físicos de avalanchas los parámetros de interés no son H y L , sino H_{cm} y L_{cm} , la pérdida de altura y la distancia recorrida por el centro de masa respectivamente. Estos parámetros, en cambio, son difíciles y hasta cierto punto imposibles de medir en una avalancha real. Una cuestión interesante es el si los bajos coeficientes de fricción (H/L) documentados en diversas avalanchas son debido a que se tomaron en cuenta H y L en vez de H_{cm} y L_{cm} . Ésta es esencialmente la idea de Davies [12],

²Años después (en 1932), Heim se dio cuenta de que este fenómeno había sido visto con anterioridad por Ebel en 1749 después del desprendimiento de rocas del Diablerets y por Meyer en 1807 en Goldau.

Avalancha	H/L	H_{cm}/L_{cm}
Volcán Lastarria (Chile)	~ 0.15	0.15-0.20
Blackhawk	~ 0.13	0.20-0.17
Elm	~ 0.3	~ 0.42
Mount St. Helens	0.09	0.25-0.12
Shasta	0.07	0.15-0.07
Nevado de Colima	0.04	0.13-0.06

Cuadro 1.1: Comparación entre H/L y H_{cm}/L_{cm} para diversos depósitos de avalanchas [18].

quien sugirió que los bajos valores de la relación H/L observados eran debido a la propagación de la avalancha y que el coeficiente de fricción era “normal”, representado por H_{cm}/L_{cm} . Se puede poner a prueba la hipótesis de Davies calculando el grosor del perfil necesario para que la relación H_{cm}/L_{cm} sea igual al coeficiente de fricción “normal” (~ 0.6). Por ejemplo, para avalanchas con una relación H/L igual a 0.1, L_{cm} debería ser seis veces menor a L a fin de tener $H_{cm}/L_{cm} = 0.6$, si se considera que $H \sim H_{cm}$. Haciendo cálculos para diversos casos documentados de avalanchas, se obtiene que H_{cm}/L_{cm} es menor a 0.6. Más aún, esta relación es cercana e incluso en algunos casos igual a H/L . Ver cuadro 1.1

Por lo tanto, los bajos valores de la relación H/L no pueden ser explicados por el esparcimiento friccional de la masa con un coeficiente de fricción normal, dado que el centro de masa viaja más allá de lo previsto por un modelo de fricción simple. Más aún, los centros de masa recorren mayores distancias para avalanchas de mayor magnitud. Este último punto puede ser ilustrado por la avalancha gigante del Nevado de Colima, la cual viajó 120 km antes de entrar al océano pacífico, con una relación H/L estimada de 0.04 [20]. Si se estima que el centro de masa viajó 35 km, se tendría aún una relación de H_{cm}/L_{cm} aproximadamente de 0.1, siendo una relación menor a las relaciones de H_{cm}/L_{cm} y H/L para avalanchas más pequeñas. Sin embargo, investigaciones recientes [21], muestran que este evento inició como una avalancha que viajó aproximadamente 35 km y después represó el río Naranjo en donde formó un lago que posteriormente colapsó y formó un “*flujo de escombros*”³

³Flujos de escombros en inglés es *debris flow*. Cabe hacer notar que este término es diferente al término *debris avalanches*, en el primero la movilidad es mayor que en el segundo

Cuando se grafica la relación H/L en función del volumen, para diversas avalanchas, la relación H/L muestra una tendencia a disminuir con el volumen (Figura 1.2). Esto significa que a mayor volumen se tiene un mayor recorrido de la avalancha para una misma altura inicial. Davies [12] propuso que el recorrido de una avalancha para una misma altura inicial es esencialmente controlado por su propagación, por lo tanto de su volumen.

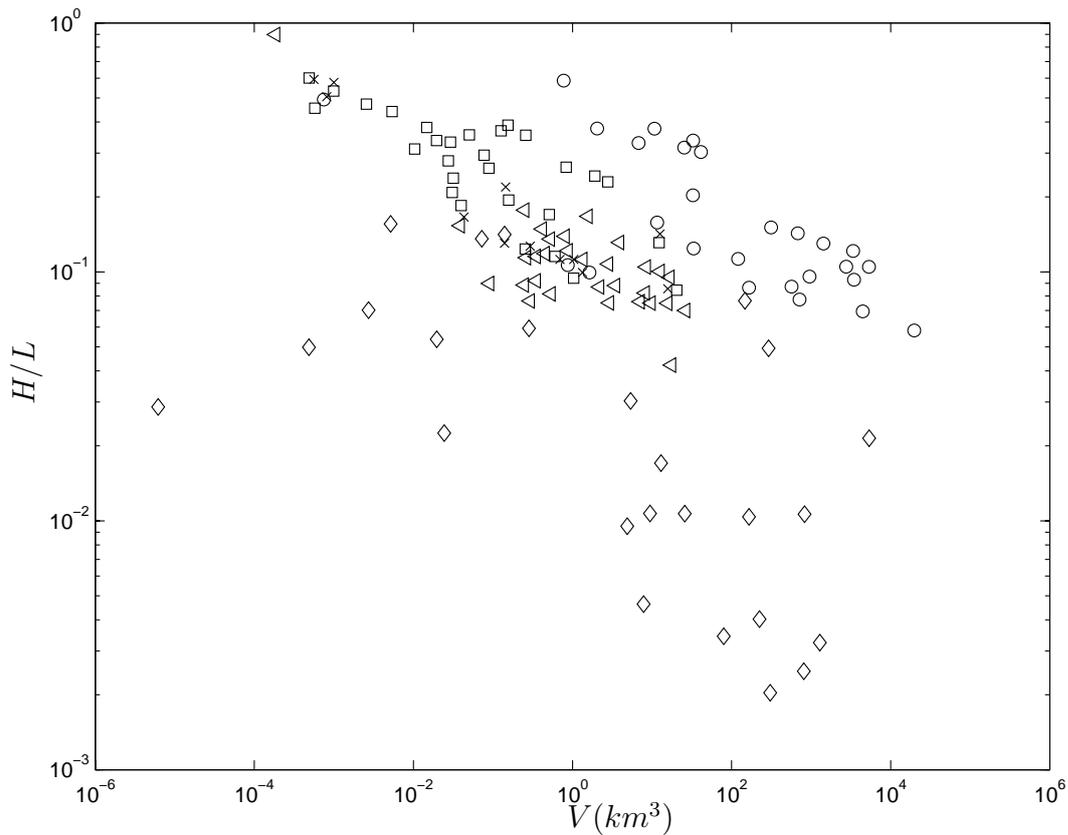


Figura 1.2: Relación entre H/L y el volumen de diversas avalanchas: \diamond Avalanchas submarinas (datos [22] y [23]), \circ Avalanchas en Marte (datos [24]), \triangleleft Avalanchas volcánicas terrestres (datos [25],[26], [27] y [28]), \square Avalanchas no volcánicas terrestres (datos [27]) y \times Avalanchas saturadas en agua (datos [19], [29], [30] y [31]).

Davies mostró que una gráfica del recorrido en función del volumen da

mejores correlaciones (Figura 1.3), y sugirió que la altura a la que cae la avalancha es de importancia secundaria y que solo añade dispersión a la correlación. En una serie de experimentos usando bentonita como material de prueba, Hsü [7] mostró que la altura a la cual estaba elevado cierto volumen no tenía influencia en la distancia recorrida. La razón por la cual se tiene un mayor recorrido para un mayor volumen independientemente de la altura es aún desconocida.

El hecho de que las avalanchas pueden viajar distancias mayores a las supuestas ha contribuido a que muchos autores propongan diversas hipótesis en donde el fluido intersticial puede jugar un papel muy importante para la reducción de la fricción. En conjunto con un fluido intersticial se puede reducir el coeficiente efectivo de fricción de un material granular, ya que el fluido soportará parcialmente a las partículas, y de esta manera se reducen los esfuerzos normales granulares [32] ya que se le resta la fuerza de flotación que generaría el fluido intersticial.

Varios autores han propuesto hipótesis que suponen la fluidización por: aire, agua, vapor, gases volcánicos o la suspensión de finas partículas.

Kent [4] propuso que durante la evolución de las avalanchas, cierta cantidad de aire queda atrapada, generando así la fluidización de la masa granular. Es poco probable o improbable que éste sea el mecanismo que produce la alta movilidad de las avalanchas, pues para que haya una completa fluidización se requiere que exista un gradiente de presiones del fluido (en este caso aire) que sea capaz de soportar el gradiente de presión generado por el peso del material granular que conforma la avalancha. A este gradiente se le conoce como gradiente litostático o presión geostática y es el gradiente de presión generado por el peso de las rocas que forman la avalancha. De esta manera el fluido será capaz de reducir la fricción granular. Dado que la masa que conforma a las avalanchas es permeable y más densa que el fluido, el gradiente de presión litostático provoca que el fluido escape de forma ascendente. Por lo que para mantener este gradiente de presiones se requiere que exista un abastecimiento continuo de fluido en el fondo de la avalancha, lo cual no ocurre en las avalanchas [18].

Shreve [33], [34] y Fahnestock [35] sugirieron que la avalancha de Black-

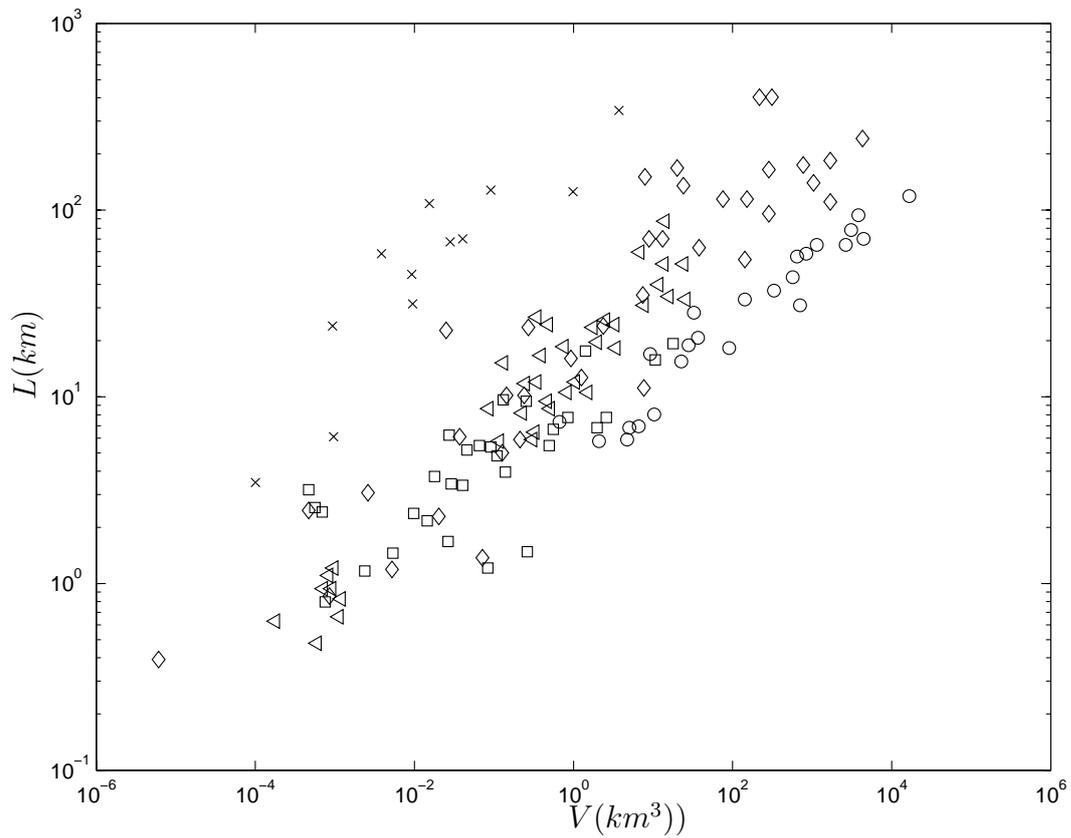


Figura 1.3: Relación entre L y el volumen de diversas avalanchas: \diamond Avalanchas submarinas (datos [22] y [23]), \circ Avalanchas en Marte (datos [24]), \triangle Avalanchas volcánicas terrestres (datos [25],[26], [27] y [28]), \square Avalanchas no volcánicas terrestres (datos [27]) y \times Avalanchas saturadas en agua (datos [29], [19], [30] y [31]).

hawk atrapó y comprimió un “cojín” de aire sobre el cual esta gran avalancha se deslizó con una fricción muy pequeña. Estimando el volumen de aire comprimido que había sido atrapado, Shreve dedujo que la tasa de filtración tenía que ser menor a $1 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ para que de esta manera se mantuviera una capa lubricante de aire durante la evolución de la avalancha. También consideró que el aire presentaba un gradiente de presiones igual al gradiente litostático, propuso que se requería de una permeabilidad⁴ de 10^{-12} m^2 para que se cumplan las condiciones propuestas, el cual es un valor razonable para ciertas avalanchas [19]. El problema de este análisis es que se supone una permeabilidad fija la cual controla la tasa de filtración. Experimentos sobre fluidización [36] muestran que para un gradiente de presión menor al litostático, la permeabilidad controla el flujo de aire, mientras que para un gradiente de presión igual al litostático, el flujo de aire controla la permeabilidad. Debido a esto el análisis de Shreve que trata a la avalancha como un bloque poroso con una permeabilidad fija no es consistente. Teniendo así que el aire no puede explicar la gran movilidad de las avalanchas.

Hsü [7], en cambio, formuló una hipótesis en la cual sostenía que partículas finas suspendidas podrían fluidizar el centro de la avalancha. Esta hipótesis se basa en las avalanchas observadas en la Luna, en donde no existe aire. En este caso el polvo toma el papel de la fase intersticial fluidizante. Sin embargo es difícil concebir como dichas partículas finas pueden formar una suspensión en el vacío [18]. Así la fluidización por este medio, en vacío, parece poco posible.

En la mayoría de los casos las avalanchas han sido descritas como “secas”. No obstante existe evidencia de que las avalanchas presentan cierta cantidad de agua o humedad en su masa inicial [19] la cual podría también fungir como elemento lubricante. El agua puede ser añadida posteriormente a la base de la avalancha ya sea por las condiciones del suelo o por el contacto directo con un río. El agua presenta muchas ventajas en comparación con el aire en cuanto a desarrollar altas presiones, ya que es más densa, incompresible y más viscosa. La incompresibilidad del agua permite soportar la presión litostática con un volumen despreciable. Por lo que, avalanchas grandes no necesitan la

⁴La permeabilidad en geología es diferente a la conductividad hidráulica, la primera es la medición de la habilidad de un material para transmitir fluidos a través de sí, y se mide en unidades de área, la segunda es la tasa de filtración de un fluido en un material y tiene unidades de velocidad.

incorporación de enormes volúmenes de agua para ser fluidizadas, como en el caso del aire. El agua presente en la masa inicial podría ser suficiente. Esta hipótesis es consistente con el hecho de que avalanchas altamente saturadas en agua alcanzan mayores recorridos que las no saturadas. No obstante esta hipótesis no es capaz de explicar el por qué de los grandes recorridos hechos por avalanchas en la luna, en donde no hay agua.

La fluidización por medio de gases volcánicos [37], también ha sido propuesta pero únicamente para casos específicos de avalanchas volcánicas. Esto conlleva a que esta hipótesis tenga una aplicación muy limitada.

Por otro lado, algunos autores han tratado de explicar el movimiento de las avalanchas con modelos granulares que no involucran la presencia de fluidos. Las hipótesis propuestas incluyen fluidización acústica [11], la dispersión de un flujo granular [12, 17], auto-lubricación [13, 14, 16], y la dispersión de un flujo granular en un régimen de transición entre fricción y colisión [15].

La teoría del flujo granular distingue dos regímenes: el friccional y el colisional. En el primero, régimen cuasiestático, los granos se mueven lentamente y disipan energía a través de contactos friccional. El esfuerzo disipativo es el producto del coeficiente de fricción y el esfuerzo normal ocasionado por el peso de los granos. En el segundo régimen, los granos están más agitados y disipan energía a través de colisiones instantáneas. El esfuerzo cortante disipativo en éste régimen (τ_s) es proporcional al cuadrado del gradiente vertical de la velocidad (dU/dy) y a una función positiva de la concentración de partículas (f)

$$\tau_s = f\sigma D^2 \sin(\alpha) \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 \quad (1.1)$$

donde α es el ángulo dinámico crítico de fricción interna, σ es la densidad de partículas y D es su diámetro [13, 32, 38]. A partir de la ecuación 1.1, se puede anticipar que los esfuerzos disipativos aumentarían con la velocidad del flujo. En contraste, experimentos de laboratorio muestran que el esfuerzo disipativo no varía, o sólo un poco, con la velocidad [38, 39, 40, 41]. Esto se puede explicar por el hecho de que las colisiones en las partículas también generan un esfuerzo normal dispersivo o presión dispersiva (P_d). Bagnold [32]

mostró que esta presión es proporcional al esfuerzo cortante.

$$P_d = \frac{\tau_s}{\tan(\alpha)} \quad (1.2)$$

En un flujo colisional enteramente desarrollado, el esfuerzo normal dispersivo debe ser capaz de soportar la carga del peso de todas las partículas y de esta manera se hace igual a la presión estática. Cuando la velocidad del flujo aumenta, el esfuerzo normal dispersivo debe aumentar también. Pero tan pronto se vuelve mayor a la carga del peso de las partículas, el flujo se expande rápidamente, la concentración de partículas disminuye y consecuentemente el esfuerzo normal dispersivo disminuye, hasta que es otra vez capaz de soportar la carga. Por medio de este mecanismo, en el régimen colisional, el esfuerzo dispersivo normal es siempre forzado a igualar la presión estática de las partículas. Así el esfuerzo cortante es también forzado a ser constante,

$$\tau_s = \mu N \quad (1.3)$$

donde N es la presión normal estática de las partículas y μ es el coeficiente de fricción, $\mu = \tan \alpha$. La condición de Coulomb de un coeficiente de fricción constante, es válida tanto en el régimen friccional como en el colisional [17, 16, 38, 41, 42]. En otras palabras, con base en estos argumentos podemos concluir que un flujo granular rápido no puede recorrer distancias mayores a las recorridas por un flujo friccional.

La fluidización acústica se da debido a la presencia de fluctuaciones de presión de alta frecuencia generadas durante el colapso inicial y en el flujo subsiguiente de la avalancha. De esta manera se pueden generar esfuerzos capaces de soportar la carga generada por el peso de las partículas de manera local y por lo tanto mantener un flujo rápido de la masa de la avalancha. Sin embargo, esta hipótesis es difícil de comprobar al no saberse si existe o no la presencia de fluctuaciones de presión durante una avalancha.

Para corroborar la hipótesis del aumento de la movilidad como resultado de una capa dispersante se han realizado simulaciones numéricas con fronteras periódicas de un flujo granular, las cuales muestran la presencia de una capa basal expandida debajo de una capa no expandida, lo cual concuerda con lo propuesto por Davies [12]. En contraste, experimentos de laboratorio [43] y simulaciones numéricas de una masa granular finita sobre una cuesta [15] no

muestran dicha capa. Por lo que la hipótesis de dispersión de un flujo granular queda en duda.

También se han propuesto modelos que toman en consideración cambios en la masa debido a la forma en la que la avalancha va descendiendo [44] y [45]. Así el recorrido de una avalancha se modifica debido al cambio progresivo de la masa durante la evolución de la avalancha [44, 45, 46]. La cuestión en sí es si una avalancha que progresivamente va perdiendo masa puede tener mayor velocidad y viajar mayores distancias que una avalancha que se mueve y detiene como un bloque simple.

Utilizando un modelo basado en la conservación de momentum, Van Gassen y Cruden [45] sugirieron que aún cuando una avalancha perdiera parte de su masa al transportarse, habría un incremento en la distancia recorrida por su centro de masa. Un análisis de Cannon y Savage [38] basado en el mismo principio fue criticado por ignorar el trabajo necesario para el cambio de masa ([42] y [47]). Cuando una masa inmóvil es llevada por un flujo, éste la acelera a su propia velocidad; el momentum se conserva pero la energía cinética total del sistema disminuye porque el proceso de llevársela y acelerarla es equivalente a una colisión inelástica en la cual se pierde toda la energía de colisión. En contraste, cuando un flujo pierde masa, utilizar la ecuación de conservación de momentum, implicaría un aumento en la energía cinética total del sistema. Esto es claramente ilustrado por el hecho de que en el modelo de Van Gassen y Cruden [45], el centro de masa es capaz de viajar más allá de lo previsto por la conservación de la energía. Esto implica que existe mas trabajo de fricción realizado por la avalancha que energía potencial perdida. En una avalancha, no existe una fuente de energía más que la pérdida de energía potencial. Por esto, la ecuación de conservación de momentum no puede ser usada. Lo que conlleva a que, aún cuando haya pérdida progresiva de masa, el centro de masa no puede viajar mas lejos que en un modelo de masa constante.

Ahora bien, esto no significa que la longitud total del depósito (L) de la avalancha no pueda aumentar por una pérdida progresiva de masa. Esto se ilustra con el siguiente ejemplo. Considérense dos bloques de la misma masa deslizándose a lo largo de una topografía como la mostrada en la figura 1.4.

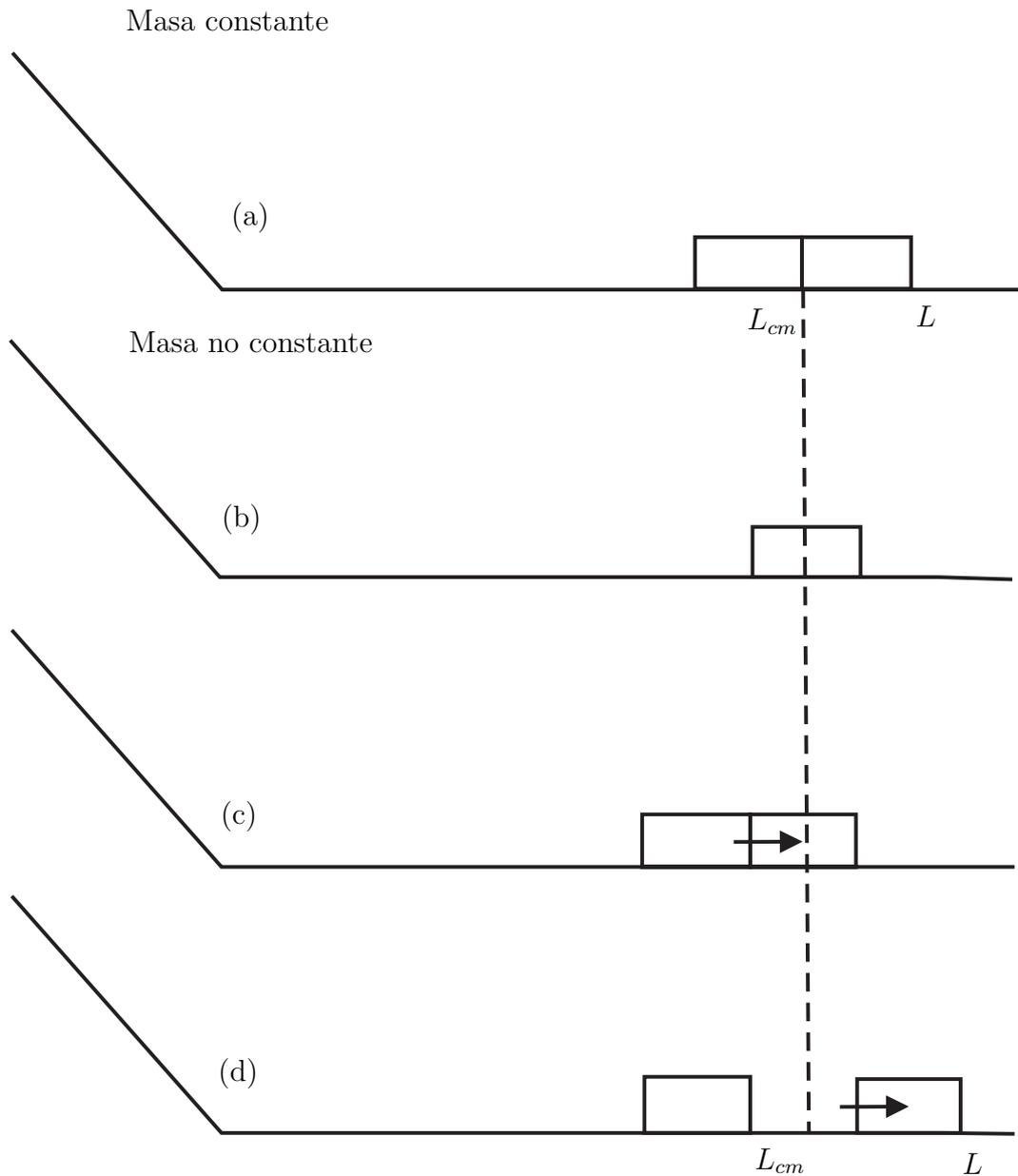


Figura 1.4: Comparación esquemática entre el deslizamiento de una masa constante (a) y el deslizamiento de una masa cambiante (b-d). (a) Los dos bloques están unidos y se deslizan como un simple bloque. (b) El bloque 1 se desliza primero y alcanza la longitud L_{cm} . (c) el bloque 2 choca con el bloque 1, se detiene y transmite su energía cinética. (d) El bloque uno se desliza una distancia extra. L_{cm} = distancia viajada por el centro de masa; L = máxima distancia recorrida.

Si los bloques permanecen unidos y se mueven como un simple bloque, viajarán hasta que su centro de masa alcance la distancia L_{cm} para la cual H_{cm}/L_{cm} es igual al coeficiente de fricción (Figura 1.4 (a)). Si los bloques se mueven de forma separada, el centro de masa del primer bloque alcanza la misma distancia L_{cm} (Figura 1.4 (b)). El segundo bloque haría lo mismo, pero antes de llegar a la distancia L_{cm} , chocaría con el primer bloque (Figura 1.4 (c)). Si la colisión es elástica, el segundo bloque se detendría (se “deposita”) y transmitiría toda su energía cinética al primer bloque el cual podría entonces viajar una distancia mayor (Figura 1.4 (d)). La comparación entre las figuras 1.4 (a) y (d) muestra que la longitud máxima (L) para el deslizamiento de las masas separadas es mayor que el de una masa constante, aunque la distancia recorrida por el centro de masa (L_{cm}) es el mismo. Para una avalancha que contiene un gran número de partículas, este mecanismo de propagación por la forma en que desciende la avalancha produciría un depósito continuo. Cabe hacer notar que en el ejemplo anterior, se considera que la colisión es elástica porque la energía es disipada a través de la fricción basal y una colisión inelástica causaría una pérdida de energía extra. En un flujo granular en régimen colisional totalmente desarrollado, la colisión de partículas es inelástica pero eso no implica una pérdida extra de energía dado que en este régimen los esfuerzos causados por la fricción son despreciables y la colisión inelástica es la única manera de disipar energía.

Legros [18] arguye que el exceso en el recorrido de una avalancha debido a la forma en la que se deposita su masa depende de la tasa de cambio de la masa. Él propuso un modelo en el cual la tasa de cambio de la masa es una consecuencia de la disminución de la velocidad de un flujo granular rápido y no es una variable independiente. En su análisis se considera un flujo granular que se encontraba inicialmente en un régimen colisional el cual disminuía su velocidad sobre una pendiente poco pronunciada. Utilizando el principio de conservación de la energía, Legros llegó a la conclusión de que el exceso en el recorrido de una avalancha ocasionado por la forma de descender de su masa era de tan sólo 2 km para una velocidad de 100 ms^{-1} , por lo que se requería de velocidades exageradamente grandes para poder obtener recorridos mayores mediante este mecanismo. Es importante remarcar que la tasa de cambio de la masa y el aumento en el recorrido calculado por Legros, se basan en varias simplificaciones y en particular, en la suposición de que se tiene un régimen colisional en el inicio y que la parte en régimen friccional tiene una velocidad

despreciable. A pesar de esto, la conclusión más importante del análisis de un flujo granular con una masa no constante es que, mientras la condición de Coulomb se mantenga (coeficiente de fricción constante), el descendimiento progresivo no permite que el centro de masa viaje más allá de lo que recorrería un bloque deslizante, ni en un régimen friccional ni en uno colisional. Por lo tanto, si se pretende explicar los extensos recorridos de avalanchas a partir de la propagación granular, se tiene que la condición de Coulomb de un coeficiente de fricción constante no se mantiene, o que el coeficiente de fricción efectivo es más pequeño que el valor normal de μ .

Aún cuando muchos de los mecanismos propuestos han sido relevantes para explicar eventos específicos de avalanchas, ninguno de ellos ha sido enteramente reconocido como la explicación universal para la movilidad de avalanchas. El debate sobre una explicación general continúa.

1.2.2. Segregación

En la naturaleza las avalanchas están compuestas por granos de diversos tamaños y diferentes propiedades mecánicas; en si son polidispersas. Cuando se tiene una mezcla de granos con diferentes propiedades ocurre el fenómeno de segregación. A diferencia de los líquidos, los cuales son comúnmente fáciles de mezclar, una mezcla homogénea de granos es muy difícil de obtener si existe un diferencia de tamaños, masas, propiedades mecánicas, etc [48].

Segregación por vibración

Cuando un medio granular polidisperso es agitado, los granos más grandes se sitúan en la superficie libre. Este fenómeno fue estudiado a través de diversos experimentos, los cuales exhibían la existencia de un mecanismo diferente que permite explicar el ascenso de las partículas grandes. El primer mecanismo es la percolación o filtrado de partículas pequeñas por debajo de las partículas grandes durante la vibración [49, 50]: durante la fase en la cual las partículas se encuentran suspendidas en el aire, se forman espacios vacíos cuyos tamaños permiten que únicamente las partículas pequeñas pasen filtrándose de esta manera por debajo de las grandes, y por consiguiente los grandes granos se encuentran en la superficie libre (Ver figura 1.5 (a)).

Otro mecanismo de segregación resulta del movimiento colectivo de convección en un contenedor [51]. Cuando se agita un contenedor con granos, aparecen patrones convectivos: los granos se dirigen hacia arriba en el centro del contenedor y bajan cerca de las paredes del mismo (fig. 1.5 (b)). La región donde los granos bajan es muy pequeña, aproximadamente unos cuantos diámetros de granos pequeños. Si hay una partícula grande en el medio granular, ésta subirá con los otros granos al centro, pero no bajará hacia la capa delgada donde las otras partículas bajan, y por consiguiente se quedará en la superficie libre.

Estos dos fenómenos están presentes durante la vibración de un medio granular y la interpretación de estos experimentos es compleja.

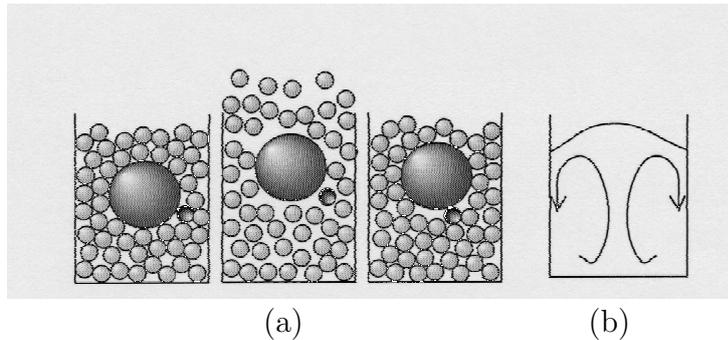


Figura 1.5: Dos mecanismos de segregación, a) Infiltración de partículas pequeñas por debajo una grande; b) Movimiento de convección. Figuras de [52].

Segregación en planos inclinados

Si se considera una mezcla de granos pequeños y grandes que fluyen sobre un plano inclinado con cierta rugosidad, ocurre el fenómeno de segregación de manera casi inmediata. A lo largo del plano los granos grandes suben a la superficie libre del flujo. Durante el flujo, las partículas están moviéndose constantemente en relación con otras y aparecen espacios vacíos entre los granos. Los granos grandes pueden caer o bajar únicamente en espacios vacíos grandes, mientras que las partículas pequeñas en cambio pueden descender en pequeños y grandes espacios. Esta asimetría en la fluctuación del movimiento

de los granos produce la segregación (percolación dinámica). Un modelo cuantitativo, basado en esta idea, fue propuesto por Savage y Lun [53]. Sin embargo, para ciertas configuraciones experimentales (en donde se tienen diferentes densidades de partículas o diferentes tamaños) se puede observar la segregación inversa [54]. Cuando se tienen granos de diferentes tamaños, y la densidad de las dos clases de granos es la misma, ocurre la segregación inversa para una relación de tamaño mayor a 40 (esto es, que el cociente entre el diámetro de los granos grandes y los granos pequeños es mayor a cuarenta): los granos grandes se depositan en la base del flujo. Sin embargo, para una relación de tamaño mayor a 5, los granos grandes no se encuentran en la superficie libre del flujo, sino que se encuentran en la capa intermedia del flujo (fig. 1.6).

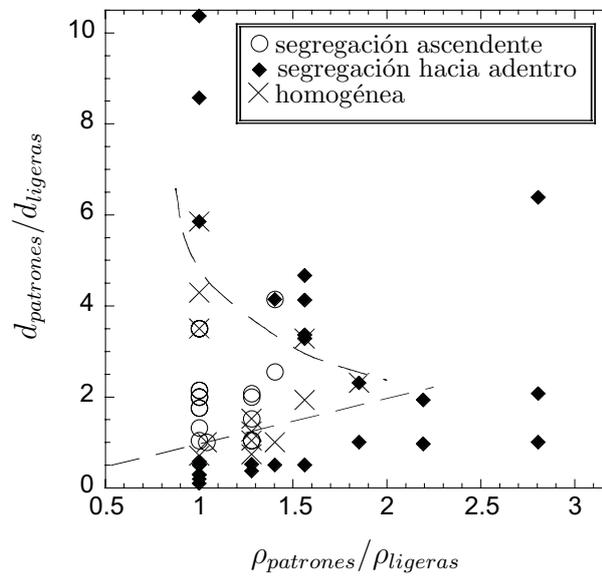


Figura 1.6: Superficie de segregación sobre un canal: la clase de partículas que está en mayor cantidad en el flujo recibe el nombre de patrones. El símbolo (o) representa el caso para el cual las partículas patrones cubren la superficie (“segregación ascendente”), (♦) representa el caso para el cual las partículas patrones son arrastradas en el depósito o en el fondo (“segregación hacia adentro”), (×) están ambas (partículas patrones como ligeras) dentro y en la superficie libre (“homogénea”). Para la relación de densidad $\rho_{patrones}/\rho_{ligeras}$ igual a 1, los patrones se encuentran adentro del depósito para una relación de tamaño $d_{patrones}/d_{ligeras}$ mayores a 5 (Figura de [54]).

Para flujos geofísicos, la segregación puede tener una gran importancia, ya que ésta podría ser la razón por la cual distintos eventos naturales presentan una gran movilidad. Más aún, en los flujos geofísicos conformados por bloques, se ha encontrado que los bloques de mayor tamaño se encuentran al frente del flujo: estos bloques al acumularse al frente del flujo pueden modificar la propagación de la avalancha [55]. Un ejemplo de la influencia de estos grandes bloques en el frente es la generación de formas con apariencia de “dedos”, lo cual es observado tanto en la naturaleza como en el laboratorio [56, 57] (Ver figura 1.7).

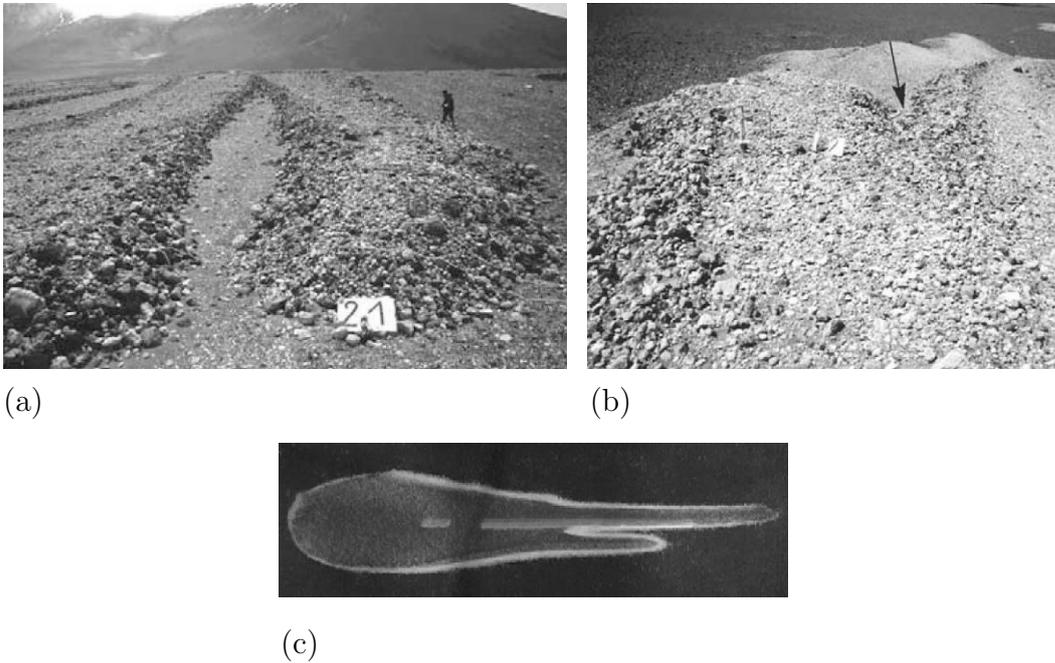


Figura 1.7: Formación de varios dedos al frente del flujo granular compuesto con pequeñas y grandes partículas. (a) y (b) eventos naturales, depósitos del flujo piroclástico del volcán Lascar, Chile [58]. (c) en pruebas de laboratorio [48].

Segregación en tambores

Una configuración en la cual la segregación ha sido muy estudiada es la de un tambor rotatorio. Cuando una mezcla de granos pequeños y grandes es

manejada de manera muy rápida, en un tambor rotatorio bidimensional como el presentado en la figura 1.8 (a), las partículas pequeñas se encuentran en el centro del tambor y las grandes en la periferia [59]. El mecanismo de segregación es similar al de un flujo sobre un plano inclinado. Para un tambor que es operado a una velocidad pequeña, la capa del flujo es delgada. La segregación es explicada por el hecho de que los granos pequeños son sometidos a una rugosidad relativa mayor a la presentada por los granos grandes, y por consiguiente la probabilidad para que un grano pequeño sea atrapado antes de alcanzar el extremo del tambor es mayor que para una partícula grande. Experimentos recientes han demostrado que la segregación puede ser inversa para relaciones de tamaño grandes [60], como el observado en los flujos sobre un plano inclinado.

Cuando el tambor es tridimensional, aparecen estructuras más complejas. Se pueden observar la formación espontánea de bandas alternantes con grandes y pequeños granos como se muestra en la figura 1.8 (c) y (d) [61, 62, 63].

1.3. Objetivos

El objetivo principal de esta tesis es simular una avalancha: el movimiento de una masa granular localizada inicialmente sobre un plano inclinado. En particular se investiga la aparente reducción de la fricción efectiva de una avalancha como resultado de la presencia de partículas de menor tamaño. A este efecto se le ha denominado lubricación geométrica. El método utilizado para la simulación es el llamado: Elemento Discreto Bidimensional.

Para este propósito se realizaron simulaciones numéricas de avalanchas constituidas por 2 tipos de partículas de diferente tamaño pero con propiedades mecánicas idénticas. El área total de las distintas avalanchas se mantuvo constante variando únicamente el porcentaje de área ocupada por partículas pequeñas y la relación de diámetros.

Con el fin de obtener el coeficiente de fricción global (μ), se midió el centro de masa al inicio y al final de la avalancha calculando la altura de caída H_{cm} y el recorrido viajado por el centro geométrico de la avalancha L_{cm} . Se consideró que la relación H_{cm}/L_{cm} es equivalente al coeficiente de fricción global

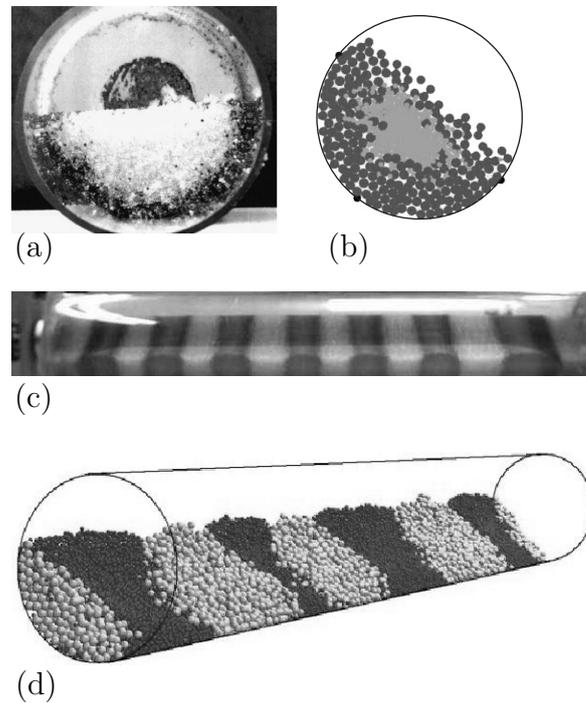


Figura 1.8: Segregación en un tambor rotatorio. (a) y (c) pruebas de laboratorio en 3D; (b) simulación numérica 2D; (d) simulación numérica 3D. Figuras de [62, 63].

de la avalancha. Se obtuvo la variación de la energía cinética para cada simulación, relacionando el porcentaje de área de partículas pequeñas para el cual la energía cinética es máxima con el porcentaje para el cual el coeficiente de fricción global es mínimo ($\%A_{p,m}$).

Ambos resultados se relacionaron y con el fin de interpretarlos se analizó la distribución de las partículas en el depósito final de la avalancha. Se realizaron análisis tanto de la segregación como de la velocidad angular de las partículas que se encontraban en la base de la avalancha, siendo estos dos análisis puntos claves para el entendimiento del mecanismo de lubricación geométrica de las avalanchas granulares.

Capítulo 2

Simulación numérica

Las simulaciones numéricas han mostrado ser una valiosa herramienta para estudiar los flujos granulares en el pasado [14, 43, 64, 65, 66, 67] . De hecho ésta fue una de las razones por la cual resurgió el estudio de los flujos granulares en la década de los 80. Dado que las mediciones experimentales de los flujos granulares son frecuentemente difíciles o costosas, las simulaciones numéricas son en muchos casos el único medio para obtener información del flujo. Los modelos computacionales de flujos granulares permiten investigar algunas propiedades y ambientes difíciles de investigar experimentalmente, como lo son partículas carentes de fricción o un espacio con gravedad modificada.

2.1. Técnica de Elemento Discreto para flujo granular

La mayoría de las simulaciones numéricas de flujos granulares son del método de elemento discreto. El término “elemento discreto” se refiere al hecho de que la simulación modela el material granular como un sistema de partículas individuales. Las simulaciones de elemento discreto rastrean cada partícula en un flujo, proporcionando información sobre su posición y velocidad para cada paso del tiempo. Además, cada colisión de una partícula es modelada de forma individual por lo que la energía disipada durante un contacto puede ser determinada directamente.

En este trabajo las simulaciones numéricas son en dos dimensiones utilizando el método de elemento discreto, siguiendo el modelo de partícula suave. Las fuerzas que actúan en cada partícula son calculadas y la segunda ley de Newton es integrada para encontrar la aceleración, velocidad y posición de cada partícula para cada paso del tiempo.

2.2. Fuerzas entre partículas

En particular, una de las ventajas de utilizar el modelo de partícula suave, es que permite que varios tipos de fuerzas puedan ser simuladas sobre cada partícula. Estas fuerzas son generalmente clasificadas en fuerzas de cuerpo o en fuerzas de contacto. Las fuerzas de cuerpo actúan generalmente en todas las partículas que forman el flujo. Ejemplos de estas fuerzas son las causadas por campos gravitacionales y electromagnéticos. Las fuerzas de contacto, en cambio, actúan sólo cuando las partículas están en contacto (o están en contacto con un límite o frontera). Ejemplos de estas fuerzas incluyen fuerzas de choque debido a superficies en contacto y fuerzas cohesivas. Las fuerzas ocasionadas por un flujo intersticial son un tercer tipo de fuerzas que el modelo de partícula suave puede simular.

En este trabajo, las simulaciones modelan únicamente fuerzas de contacto y de gravedad. Se supone que las fuerzas ocasionadas por un fluido intersticial y fuerzas cohesivas, ambas significativas en flujos de partículas finas, son despreciables. Este modelo es en efecto, la simulación de una masa granular seca en el vacío dentro de un campo gravitacional.

2.2.1. Fuerzas de contacto

El término “partícula suave” hace referencia a que las partículas pueden deformarse durante un contacto. Esta deformación es modelada como un traslape (ver figura 2.1). La duración del contacto es finita y pueden ocurrir múltiples contactos sobre una partícula. Cuando dos partículas (o una partícula y una frontera sólida) entran en contacto, pueden traslaparse un poco. El paso del tiempo de la simulación es escogido de tal forma que el traslape no exceda el uno por ciento del diámetro de una partícula dada.

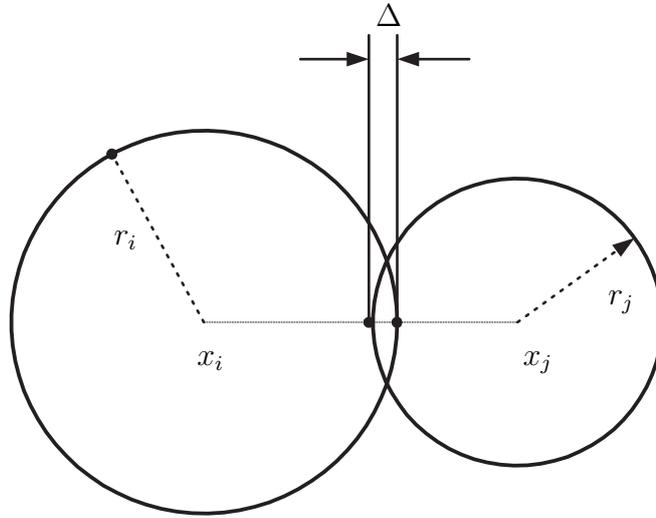


Figura 2.1: Modelo de contacto.

En las simulaciones de este trabajo, todas las partículas son redondas, esto dado que las colisiones entre partículas perfectamente redondas son simples de detectar y permiten una simulación eficiente. Las fronteras sólidas son planas, rígidas y tienen un coeficiente de fricción determinado.

Las fuerzas de contacto son modeladas tanto en dirección normal como en dirección tangencial. Para cada una de las direcciones se utilizó un modelo diferente. La descripción de estos modelos se dará más adelante en esta sección.

Un contacto entre dos partículas redondas es detectado cuando la distancia entre los centros de las partículas es menor que la suma de sus radios. Esto es, el traslape entre dos partículas circulares j e i está dado por:

$$\Delta = (r_i + r_j) - |\vec{x}_j - \vec{x}_i| \geq 0 \quad (2.1)$$

donde \vec{x}_i y \vec{x}_j son las posiciones de dos partículas en el espacio. El traslape entre una partícula y una pared sólida es detectada similarmente cuando la distancia entre ambas sea menor a el radio de la partícula. Si el traslape Δ es positivo, entonces los dos cuerpos están en contacto. En este caso se calculan las fuerzas de contacto en dirección normal y tangencial.

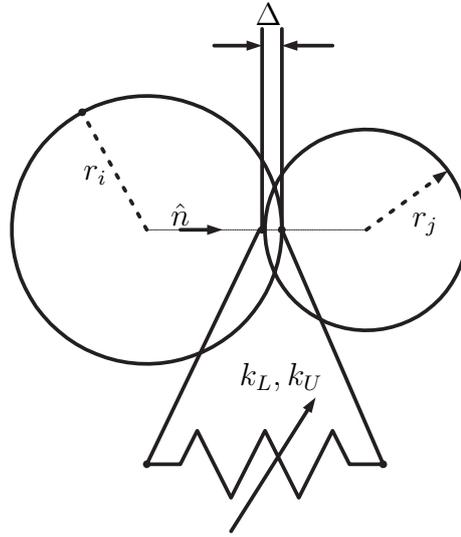


Figura 2.2: Esquema del modelo de contacto en dirección normal.

Modelo de contacto en dirección normal

La componente normal durante una fuerza de contacto, actúa a lo largo de una línea que une el centro de la partícula i con el centro de la partícula j . El vector unitario de esta línea, \hat{n}_{ij} , está dado por:

$$\hat{n}_{ij} = \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|} \quad (2.2)$$

El modelo utilizado para simular la fuerza de contacto en dirección normal fue propuesto por Walton y Braun [65], y consiste en un resorte con dos diferentes constantes o de diferente rigidez, k_L y k_U (ver figura 2.2). La primera corresponde a la constante de carga y la segunda a la de descarga. La diferencia entre las dos modela la disipación de energía que ocurre durante la interacción entre dos partículas. De esta forma la fuerza normal para una partícula i está dada por:

$$F_{normal,i} = \begin{cases} -k_L \Delta \hat{n} & \text{carga} \\ -k_U (\Delta - \Delta_0) \hat{n} & \text{descarga} \end{cases} \quad (2.3)$$

donde Δ es el traslape de dos superficies, y la cantidad Δ_0 es un “traslape residual” que modela la deformación plástica de la partícula, dicho de otra manera, Δ_0 es el valor de Δ para el cual la curva de descarga se hace cero (ver

figura 2.3). Si la expresión $\Delta - \Delta_0$ es negativa, la fuerza es igual a cero; esto es, que no se permiten fuerzas de tensión. Δ_0 se calcula como:

$$\Delta_0 = \Delta_{max}(1 - \epsilon_n^2) \quad (2.4)$$

donde Δ_{max} es el máximo traslape permitido entre dos superficies durante una colisión, el cual es determinado arbitrariamente por el usuario y ϵ_n es el coeficiente de restitución, el cual se define como la relación entre la diferencia de las velocidades de la partícula j e i después del choque y la diferencia de velocidades de las partículas j e i antes del choque:

$$\epsilon_n = \frac{v_j * -v_i *}{v_j - v_i}$$

donde $v_j * -v_i *$ es la velocidad relativa de las partículas j e i después del choque y $v_j - v_i$ es la velocidad relativa de las partículas j e i antes del choque. La fórmula anterior expresa que la velocidad relativa de las dos partículas después del impacto puede obtenerse multiplicando su velocidad relativa antes del impacto por el coeficiente de restitución. Esta propiedad se utiliza para obtener experimentalmente el valor del coeficiente de restitución de dos materiales dados [68]. En las simulaciones el coeficiente de restitución es determinado a partir del valor más común que presentan los materiales que forman las avalanchas reales. De este parámetro se hablará más adelante en el capítulo 3.

Modelo de contacto en dirección tangencial

El modelo de contacto en dirección tangencial fue propuesto por Cundall y Strack [69], y consiste en un resorte en serie con un elemento deslizador de fricción de Coulomb (ver figura 2.4). El resorte permite que la partícula responda de forma elástica mientras que el elemento deslizador de fricción permite a las partículas deslizarse una sobre otra. El elemento deslizador limita la magnitud de la fuerza tangencial. La fuerza tangencial se calcula de dos maneras. Primero es calculada como:

$$F_{t,resorte} = -k_s \delta_s \quad (2.5)$$

donde k_s es la constante del resorte y δ_s es el desplazamiento tangencial entre los puntos iniciales de contacto. Este último se calcula como:

$$\delta_s(t) = \int_{t_i}^{t_f} (\delta \dot{x}) dt \quad (2.6)$$

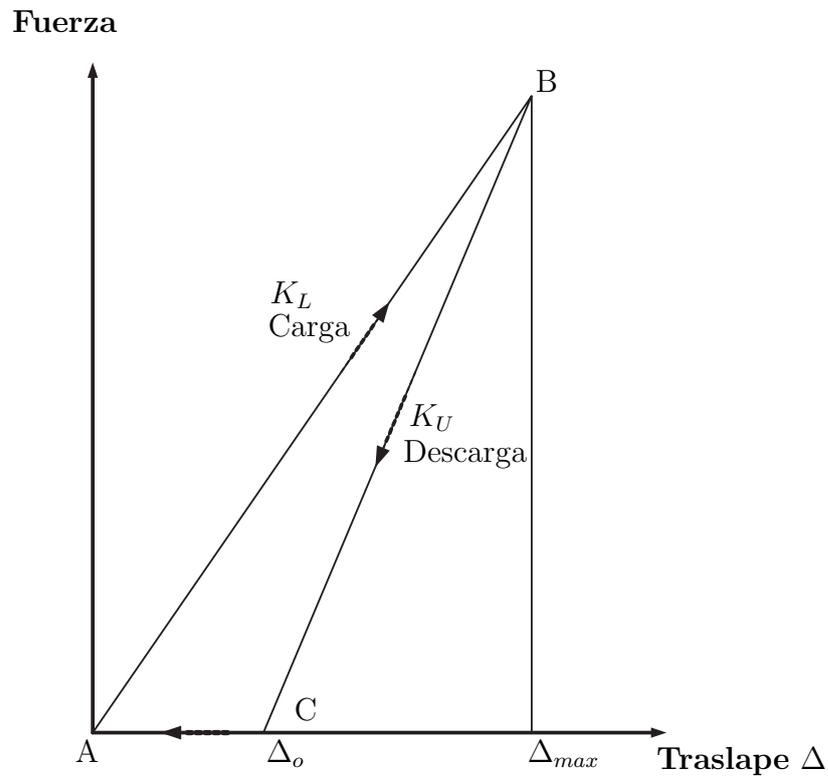


Figura 2.3: Fuerza vs deformación, Δ . A es el punto inicial del contacto, B es el punto de máxima deformación y C es el punto de descarga.

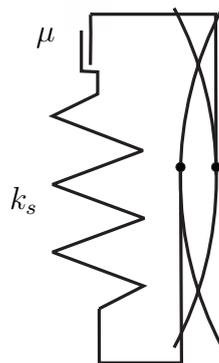


Figura 2.4: Contacto tangencial, k_s es la constante del resorte y μ es el coeficiente de fricción del elemento deslizante.

donde t_i y t_f son el tiempo inicial y final del contacto respectivamente y $\delta\dot{x}$ es igual a:

$$\delta\dot{\vec{x}}_{ij} = \dot{\vec{x}}_j - \dot{\vec{x}}_i - (\dot{\theta}_j r_j + \dot{\theta}_i r_i) \hat{s}_{ij} \quad (2.7)$$

donde \hat{s}_{ij} es la dirección normal a \hat{n} (Ver figura 2.5).

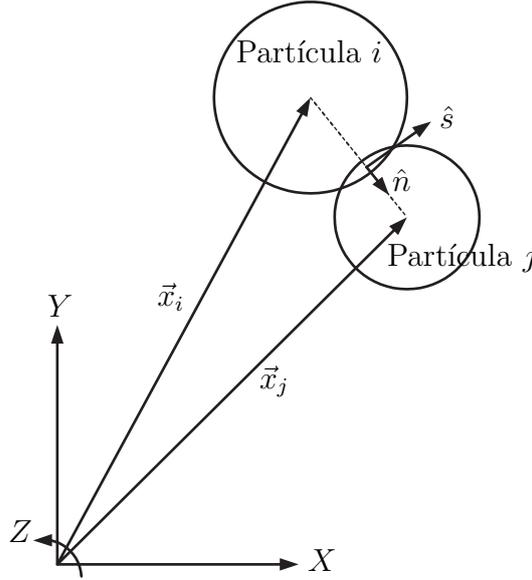


Figura 2.5: Sistema de coordenadas usado en las simulaciones

Si $t_0 = 0$ cuando el resorte está completamente relajado, entonces $\delta_s(0) = 0$. Alternativamente la fuerza de fricción es calculada utilizando un coeficiente de fricción μ :

$$F_{t,friccion} = \mu F_n \quad (2.8)$$

La fuerza utilizada en la simulación es la menor de estas dos fuerzas. Si la fuerza de fricción es menor, entonces se supone que las superficies están deslizándose una contra otra. Si la fuerza del resorte es menor, entonces se supone que las dos superficies están “atoradas” y no hay disipación de energía. En el otro caso la magnitud de la fuerza tangencial es μF_n y actúa en la misma dirección y sentido que la fuerza del resorte. Adicionalmente, la extensión del resorte δ_s cambia constantemente su magnitud, la cual determina la magnitud de la fuerza de fricción del elemento deslizador. Estos cálculos son realizados en cada paso del tiempo. Para asegurar que el proceso de contacto es simulado

adecuadamente, cada contacto dura por lo menos 10 pasos de tiempo, por lo que, durante una simple colisión, tanto “estancamiento” como deslizamiento pueden ocurrir en el punto de contacto.

2.2.2. Fuerzas gravitacionales

Todas las simulaciones en esta investigación, incluyen el efecto de la gravedad. En este caso, la fuerza gravitacional en cada partícula está dada por:

$$F_{\text{gravedad}} = mg \quad (2.9)$$

donde m es la masa de la partícula y g es la aceleración ocasionada por la gravedad. Esta fuerza actúa en el centroide de las partículas. La dirección de esta fuerza es la de la gravedad para cada simulación y la magnitud de la aceleración gravitacional se toma igual a 9.81 ms^{-2} .

2.3. Ecuaciones de movimiento

El vector resultante de la suma de todas las fuerzas discutidas anteriormente es determinado para cada partícula en cada instante del tiempo en la simulación. La segunda ley de Newton es utilizada para encontrar la aceleración de la partícula, $\ddot{\vec{x}}$:

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_{\text{total}} = \vec{F}_{\text{contacto}} + \vec{F}_{\text{gravedad}} \quad (2.10)$$

y

$$I\ddot{\theta} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{contacto}} \quad (2.11)$$

donde m es la masa de la partícula y está dada por:

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad (2.12)$$

donde ρ es la densidad de las partículas.

I es el momento de inercia, definido como:

$$I = \frac{2}{5}mr^2, \quad (2.13)$$

para el caso de una esfera uniforme. De esta manera la simulación considera esferas confinadas a moverse en dos dimensiones. $\ddot{\theta}$ es la aceleración angular la

cual está relacionada con el torque ejercido sobre la partícula por las fuerzas de contacto. \vec{r} es el vector que conecta el centro de la partícula con el punto de contacto. $\vec{F}_{contacto}$ es la suma de todas las fuerzas de contacto en la partícula, esto es, para una partícula i la suma de todas las fuerzas de contacto que actúan sobre ella se calculan como:

$$\vec{F}_{contacto} = \sum_{j=1, j \neq i}^N (\vec{F}_{cij}), \quad (2.14)$$

donde F_{cij} es la fuerza de contacto sobre la partícula i ejercida por la partícula j y N es el número total de partículas. Si no hay partículas o paredes en contacto con la partícula, la fuerza de contacto es cero. Las fuerzas de contacto en dirección tangencial actúan sobre la superficie de la partícula. Las velocidades y posiciones de las partículas están determinadas al integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento en el tiempo:

$$\dot{\vec{x}}_n = \dot{\vec{x}}_{n-1} + \ddot{\vec{x}}_n \Delta t \quad (2.15)$$

$$\vec{x}_n = \vec{x}_{n-1} + \dot{\vec{x}}_n \Delta t \quad (2.16)$$

$$\dot{\vec{\theta}} = \dot{\vec{\theta}}_{n-1} + \ddot{\vec{\theta}}_n \Delta t \quad (2.17)$$

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}_{n-1} + \dot{\vec{\theta}}_n \Delta t \quad (2.18)$$

donde n es el paso de tiempo.

2.4. Determinación de los parámetros de contacto

Los parámetros utilizados en el modelo de contacto son las constantes del resorte k_s, k_L, k_U y el paso del tiempo Δt .

La constante de carga del resorte, k_L , en el modelo para las fuerzas de contacto en dirección normal, es determinada de tal forma que concuerden con los parámetros de un contacto de Hertz [66] (las características de estos parámetros se verán más adelante, en esta sección). El cálculo de esta constante se basa en el máximo traslape, Δ_{max} , permitido entre dos superficies durante una colisión, el cual es determinado arbitrariamente por el usuario. k_L

también depende de la velocidad relativa máxima entre dos cuerpos (ya sea entre dos partículas o una partícula y una pared), $\delta\dot{x}_{n,max}$; sus masas, m_i y m_j ; y el coeficiente de restitución, ϵ_n [66].

Para este modelo, la rigidez del resorte es calculada a partir de la siguiente ecuación:

$$\frac{k_L}{m^*} = \left(\frac{\delta\dot{x}_{n,max}}{\Delta_{max}} \right)^2 \left(\exp\left(\frac{\arctan(-\pi/\ln \epsilon_n)}{\pi/\ln \epsilon_n} \right) \right)^2 \quad (2.19)$$

donde m^* es la masa equivalente de dos cuerpos y se calcula como:

$$m^* = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \quad (2.20)$$

En este trabajo $\Delta_{max} = 0,01$ y $\delta\dot{x}_{n,max}$ se calcula como:

$$\delta\dot{x}_{n,max} = \dot{\delta}_0 \sqrt{\frac{m^*}{k_L}} \quad (2.21)$$

donde $\dot{\delta}_0$ es un parámetro de carácter arbitrario y su valor en las simulaciones de este trabajo es: $\dot{\delta}_0 = 10$.

Todas las paredes de las simulaciones son rígidas y fijas. Sus masas se pueden considerar de tamaño infinito. De esta forma, la masa equivalente m^* de una colisión entre partícula-pared es igual a la masa de la partícula.

Manteniendo un valor constante de k_L/m^* en una simulación con mezcla de partículas, se tiene el siguiente resultado: cuando una partícula pequeña choca con otra partícula pequeña, se usa una constante del resorte diferente a la utilizada cuando una partícula pequeña choca con una grande, de igual forma que para un choque entre partículas grandes. Por lo que la constante del resorte no es una propiedad de una partícula en especial, sino del choque que se esté llevando a cabo.

La constante de descarga del resorte utilizada en este modelo, k_U , se calcula utilizando el coeficiente de restitución, ϵ_n , para el choque de partículas:

$$\frac{k_U}{m^*} = \frac{k_L}{m^*} \frac{1}{\epsilon_n^2} \quad (2.22)$$

Para la constante del resorte tangencial, Cundall y Strack [69] recomiendan que:

$$\frac{2}{3} \leq \frac{k_s}{k_L} \leq 1 \quad (2.23)$$

basándose en modelos analíticos de contactos tangenciales. En las simulaciones de este trabajo se consideró que $k_s = k_L$.

Finalmente, el paso del tiempo en la simulación se calcula de tal modo que sea una pequeña fracción de la duración de una colisión típica. Dado que existen dos tipos de contactos (translacional y rotacional), se elige el tiempo de contacto más pequeño. El paso del tiempo en las simulaciones es un décimo de este tiempo mínimo (τ_{min}), es decir

$$\Delta t = \frac{\tau_{min}}{10} \quad (2.24)$$

El tiempo mínimo de colisión, τ_{min} , depende de k_L/m^* de la siguiente manera:

$$\tau_{min} = \frac{\pi \sqrt{1 + \left(\frac{\ln \epsilon_n}{\pi}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{k_L}{m^*}\right)}} \quad (2.25)$$

2.4.1. Contacto de Hertz

La teoría clásica de impacto entre dos cuerpos elásticos carentes de fricción se debe a Hertz [70] y se deriva directamente de su teoría de contacto elástico estático. En el modelo de contacto normal, se suponen superficies de contacto lisas y que el área de contacto entre las partículas es muy pequeña en comparación con la dimensión de las partículas. En este caso, cuando dos partículas entran en contacto, se tocan inicialmente en un punto. La teoría de Hertz supone que cuando dos cuerpos en contacto son sometidos ligeramente a una carga, se deforman en la vecindad del punto de contacto inicial, de tal manera que los cuerpos entran en contacto sobre un área finita. No obstante, esta área es pequeña en comparación con la dimensión de los dos cuerpos.

La teoría es cuasi-estática en el sentido de que la deformación se restringe al área en la vecindad del punto de contacto. Por estar dada por la teoría estática, no se toma en cuenta el movimiento de una onda elástica en los cuerpos y se supone que la masa total de los cuerpos se mueve en cada instante con

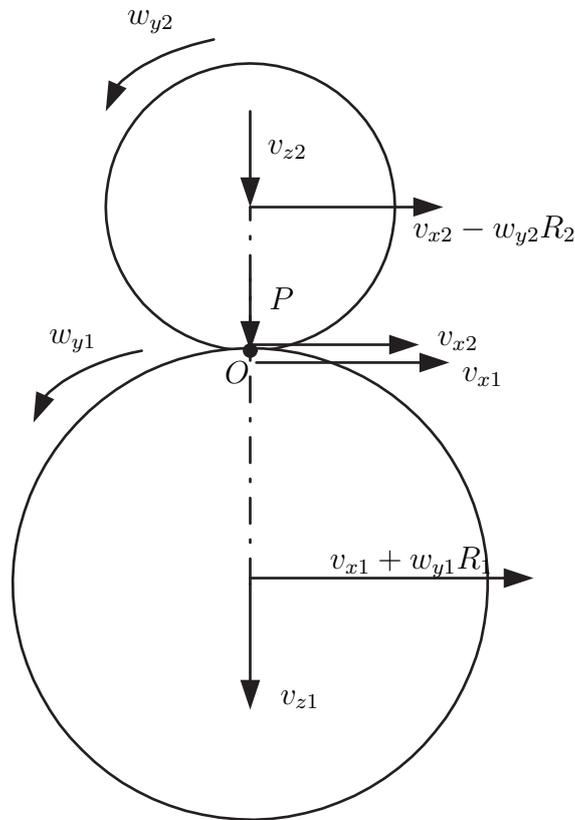


Figura 2.6: Esquema de dos esferas en contacto

la velocidad de su centro de masa. El impacto debe ser visualizado como la colisión de dos cuerpos equipados con resortes; la deformación se concentra en los resortes, cuya inercia es despreciable, y los cuerpos se consideran rígidos.

Impacto colinear de esferas

Las dos esferas elásticas, de masa m_1 y m_2 , mostradas en la figura 2.6 se mueven a una velocidad v_{z1} y v_{z2} a lo largo de su línea de centros cuando chocan en el punto O . Se debe considerar primeramente un impacto colinear en el cual $v_{x1} = v_{x2} = w_{y1} = w_{y2} = 0$. Durante el impacto, debido a la deformación elástica, sus centros se aproximan una distancia Δ_z . Su velocidad relativa es $v_{z2} - v_{z1} = d\Delta_z/dt$ y la fuerza entre ellas a cada instante es $P(t)$.

Ahora

$$P = m_1 \frac{dv_{z1}}{dt} = -m_2 \frac{dv_{z2}}{dt} \quad (2.26)$$

por lo tanto

$$-\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} P = \frac{d}{dt}(v_{z2} - v_{z1}) = \frac{d^2 \Delta_z}{dt^2} \quad (2.27)$$

La relación entre P y Δ_z está dada por un contacto elástico estático mediante la siguiente ecuación

$$P = \frac{4}{3} R^{1/2} E^* \Delta_z^{3/2} = k \Delta_z^{3/2} \quad (2.28)$$

donde:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.29)$$

y

$$\frac{1}{E^*} = \frac{(1 - \nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1 - \nu_2^2)}{E_2} \quad (2.30)$$

R_1 y R_2 son los radios de las esferas, E_1 y E_2 son los módulos de Young o módulos de elasticidad de cada esfera y ν_1 y ν_2 son las constantes de Poisson de las esferas. Escribiendo $1/m^*$ igual a $(1/m_1 + 1/m_2)$ se tiene que:

$$m^* \frac{d^2 \Delta_z}{dt^2} = -k \Delta_z^{3/2} \quad (2.31)$$

Integrando con respecto a t queda:

$$\frac{1}{2} \left(V_z^2 - \left(\frac{d\Delta_z}{dt} \right)^2 \right) = \frac{2}{5} \frac{k}{m^*} \Delta_z^{5/2}$$

donde $V_z = (v_{z2} - v_{z1})_{t=0}$ es la velocidad de acercamiento. Para la compresión máxima $\Delta_{z,max}$, $d\Delta_z/dt = 0$, lo cual da como resultado:

$$\Delta_{z,max} = \left(\frac{5m^* V_z^2}{4k} \right)^{2/5} = \left(\frac{15m^* V_z^2}{16R^{1/2} E^*} \right)^{2/5} \quad (2.32)$$

La curva del tiempo de compresión se obtiene mediante una segunda integración:

$$t = \frac{\Delta_{z,max}}{V_z} \int \frac{d(\Delta_z/\Delta_{z,max})}{(1 - (\Delta_z/\Delta_{z,max})^{5/2})^{1/2}} \quad (2.33)$$

La integral ha sido evaluada numéricamente por Deresiewicz [71] y convertida en una curva de fuerza-tiempo. Después del instante en el que ocurre un

máximo en la compresión t^* , las esferas se expanden de nuevo. Dado que son perfectamente elásticas y carentes de fricción, y la energía absorbida en la onda de movimiento es despreciada, la deformación es perfectamente reversible. El tiempo total de impacto $t_{contacto}$ está dado por:

$$\begin{aligned}\tau = 2t^* &= 2 \frac{\Delta_{z,max}}{V_z} \int \frac{d(\Delta_z/\Delta_{z,max})}{(1 - (\Delta_z/\Delta_{z,max})^{5/2})^{1/2}} \\ &= 2.94 \Delta_{z,max}/V_z = 2.87(m^{*2}/RE^{*2}V_z)^{1/5}\end{aligned}\quad (2.34)$$

2.5. Descripción del algoritmo

El código de la simulación utilizado en esta investigación fue escrito en C y fue desarrollado por Wassgren [66] en 1997. El código fue adaptado para simular flujos bidispersos.

En una simulación de elemento discreto, la parte que requiere más tiempo de CPU es la verificación de los contactos entre las partículas. Se han utilizado dos métodos para hacer más eficiente este procedimiento. El primero consiste en el uso de una malla de celdas en el dominio de la simulación. El segundo consiste en el uso de una lista de vecinos para cada partícula.

Una celda es una estructura de datos asociada con una cierta posición entera en el dominio x y y . Cada celda es el primer elemento de una lista doblemente ligada de partículas que existen dentro de la celda. De igual modo, cada partícula también mantiene una cuenta sobre la celda en la que se encuentra, basada en la ubicación de su centro en la malla. Así, conociendo la celda de una partícula dada, las celdas que rodean esa celda pueden ser revisadas por las partículas que están cerca a esa partícula dada. Cada celda es un cuadrado cuyo lado es poco mayor al diámetro de la partícula más grande del sistema. La lista de celdas es actualizada en cada paso del tiempo. El método de la revisión de las celdas incrementa la eficiencia de la simulación.

El segundo método para mejorar la eficiencia es el uso de una lista de vecinos. Sea i la partícula actual de interés. Una vez que el método del chequeo de las celdas provee las partículas cercanas a la partícula i , la distancia entre cada candidato (llámese partícula j) y la partícula i es encontrada. Si la distancia es más pequeña que la distancia máxima predeterminada D_{max} , entonces la partícula j es añadida a la lista de vecinos de la partícula i . Así, la longitud de cada lado de cada celda es igual a $D + D_{max}$, donde D es el diámetro de una

partícula grande. En cada paso del tiempo, la partícula más rápida dentro de la celda es localizada y la distancia que ésta viajó es calculada en ese paso del tiempo, y cuando la distancia que viajó alcanza la distancia D_{max} , los vecinos son re-evaluados. Esto es, las celdas vuelven a revisar los vecinos tan pronto como la partícula más rápida ha viajado la distancia D_{max} , la cual es usualmente fijada de entre 10 a 40 % del diámetro de una partícula grande. En cada paso del tiempo, sólo la lista de vecinos para cada partícula es revisada para contactos, ahorrando tiempo de cálculo. Detalles sobre la implementación de esta técnica se pueden encontrar en [66].

El algoritmo general de la simulación se muestra en la figura 2.7

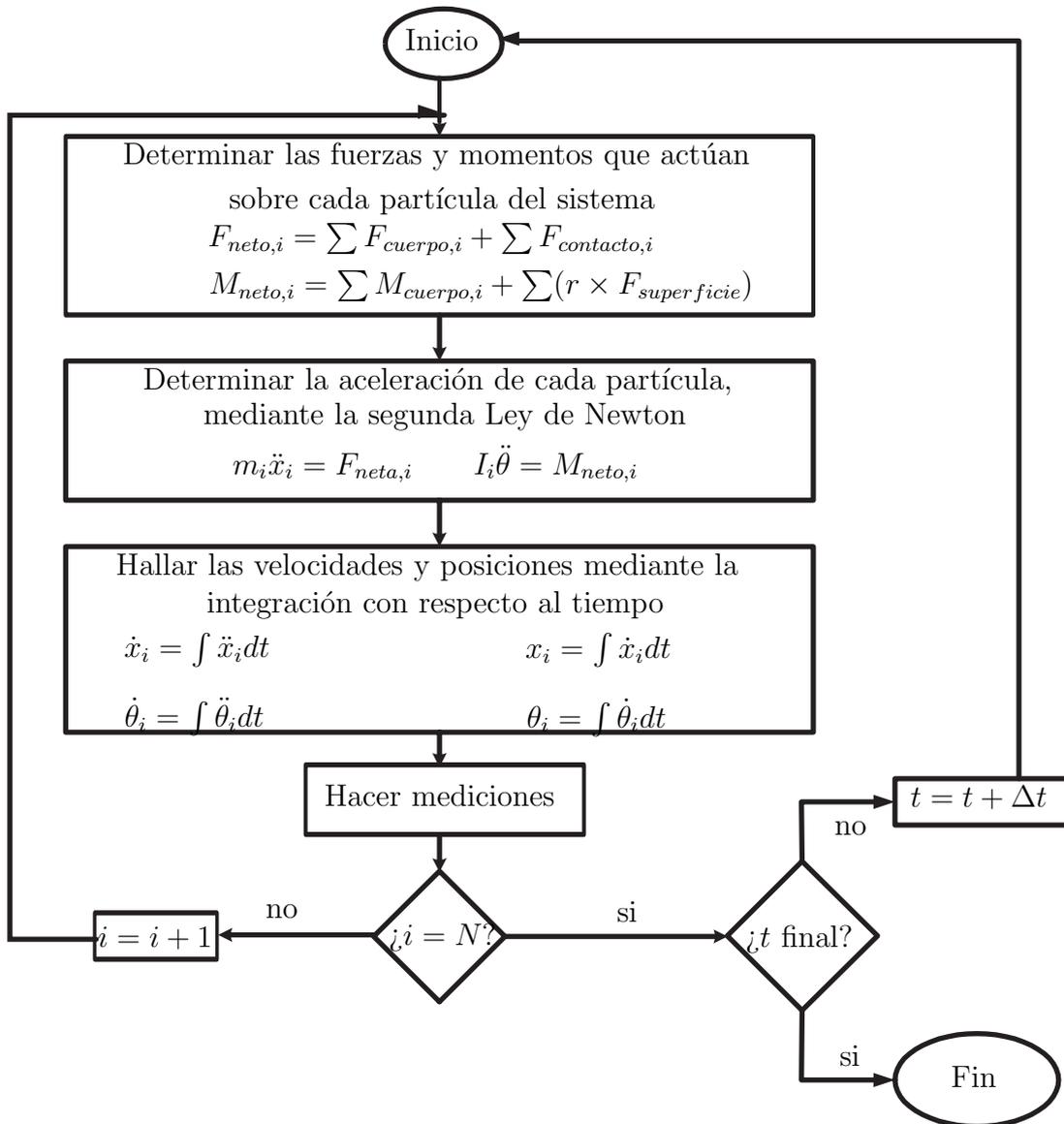


Figura 2.7: Diagrama de flujo y algoritmo de la simulación

Capítulo 3

Planteamiento del problema

Con la finalidad de estudiar el efecto de la presencia de un porcentaje de un segundo tipo de partículas en una avalancha granular, se realizaron experimentos numéricos que simulan el comportamiento de una avalancha granular bidispersa.

3.1. Descripción de los experimentos numéricos

Los experimentos numéricos consisten en una masa granular colocada inicialmente sobre un plano inclinado (ver figura 3.2). Los discos que conforman la avalancha se colocan de forma aleatoria. Estos discos se encuentran dentro de los límites formados por dos paredes verticales y una pared inclinada. Al igual que la posición inicial, a los discos se les asigna una velocidad inicial aleatoria.

La inicialización de la simulación comienza con la colocación de los centros de las partículas aleatoriamente dentro de los límites determinados por el usuario, estos límites pueden ser las coordenadas de las paredes de la simulación o las coordenadas de una caja más pequeña. Una vez que se posicionan aleatoriamente los centros de las partículas éstas tienen un radio mucho menor (cerca a cero) al radio original determinado por el usuario, el radio aumentará de tamaño exponencialmente hasta alcanzar el valor del radio final. Esto se realiza con el fin de que las partículas se vayan acomodando, y se tenga

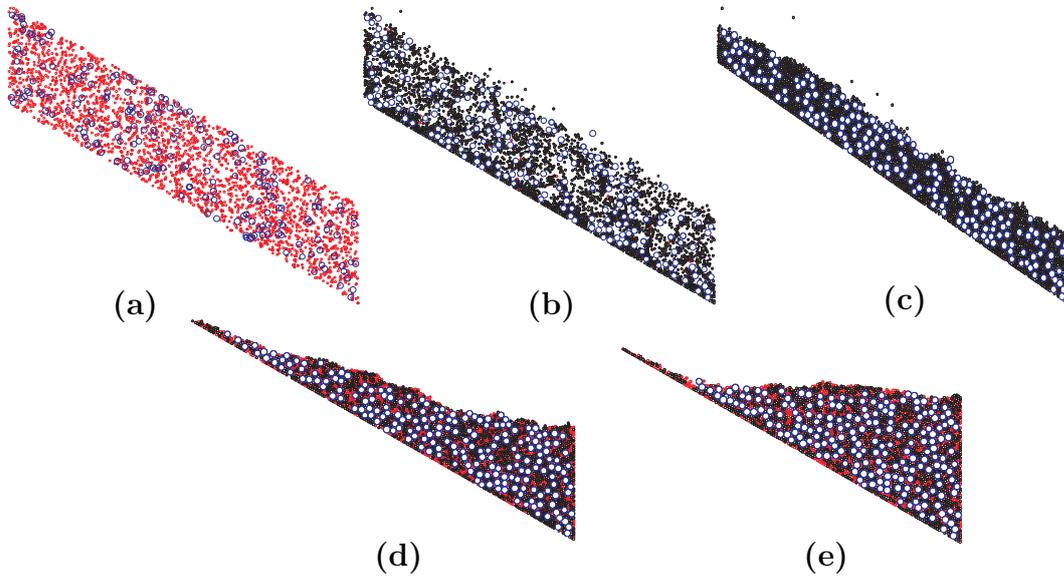


Figura 3.1: Inicialización de la simulación para $D/d=3$ y $\%A_p = 60$ para diferentes instantes del tiempo $t^* = t\sqrt{\frac{g}{d}}$, (a) colocación aleatoria de las partículas $t^*=t^* = t\sqrt{\frac{g}{d}}=0.4$, (b) $t^* = 1$, (c) $t^* = 2$, (d) $t^* = 4$ y (e) $t^* = 6$

una buena “mezcla” de partículas. La figura 3.1 muestra una secuencia de imágenes correspondientes a la inicialización de una simulación. El acomodo de las partículas durante la inicialización evoluciona con el tiempo hasta que se disipa su energía cinética y se forma el depósito inicial de la avalancha (figura 3.1 (e)).

Una vez que la masa granular se encuentra en completo reposo, la pared vertical A (ver figura 3.2) es removida de manera instantánea, iniciando así el movimiento de la avalancha colina abajo. La avalancha evoluciona hasta que vuelve a un estado de reposo sobre el plano horizontal (ver figura 3.4).

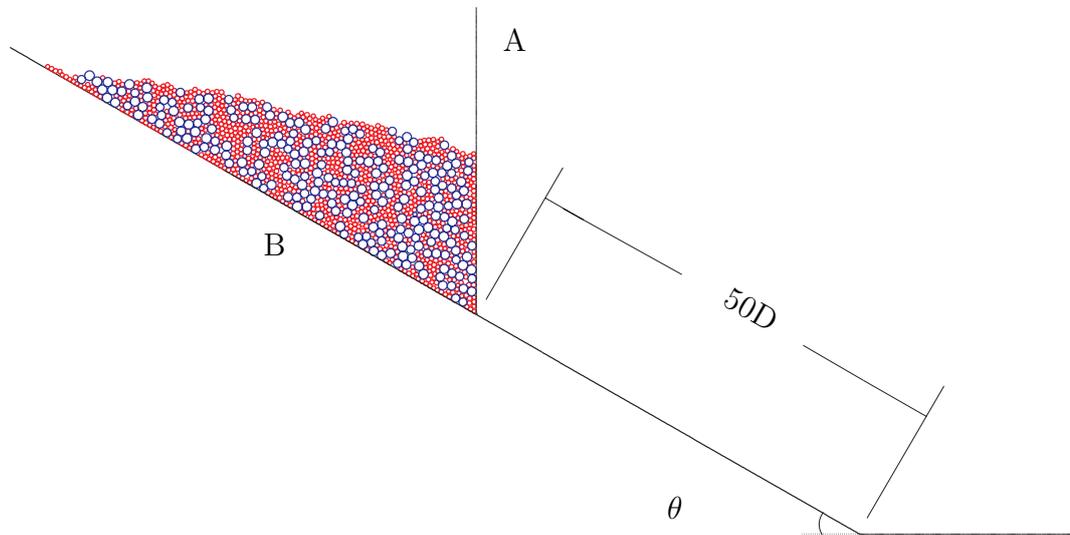


Figura 3.2: Depósito inicial de una avalancha para una relación de diámetros igual a D/d y un porcentaje de área de pequeñas partículas igual a $\%A_p$. A pared vertical de la inicialización, B plano con un ángulo de inclinación $\theta = 30^\circ$. $50D$ es la distancia que recorre la avalancha sobre el plano inclinado.

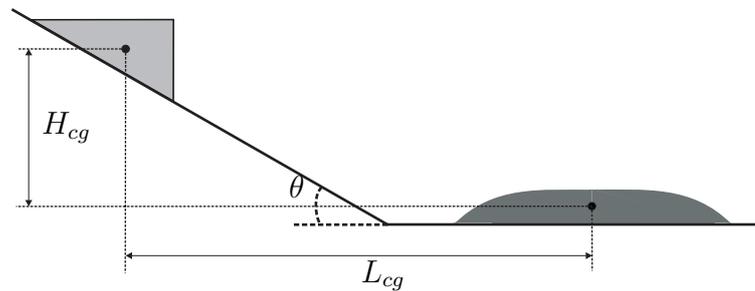


Figura 3.3: Esquema de simulación.

En todos los experimentos el área ocupada por los discos se mantuvo constante, variando únicamente la relación de diámetros (D/d) y el porcentaje de área ocupada por partículas pequeñas ($\%A_p$).

Dado que se tiene la información de la posición de todas las partículas, se puede medir el centro de masa al inicio y al final de la avalancha, y de esta manera se puede obtener el coeficiente de fricción global definido como

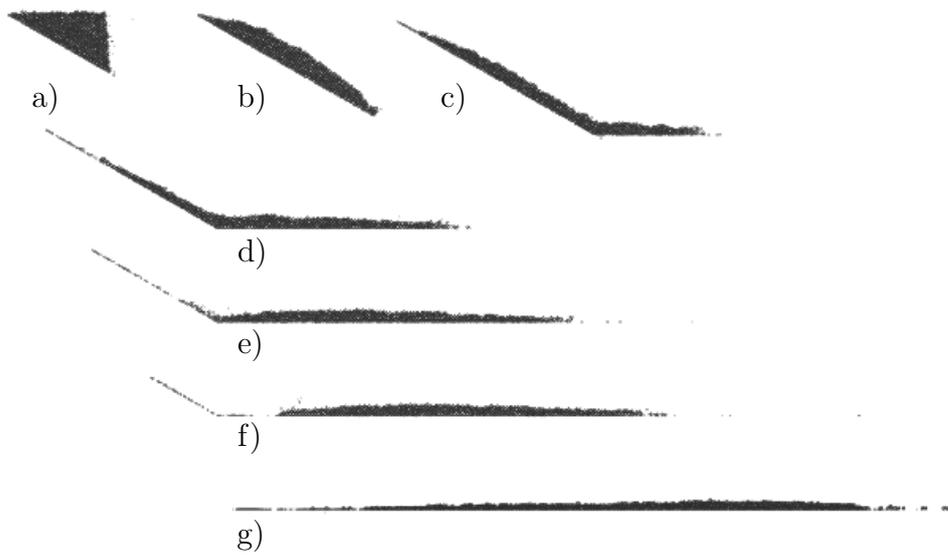


Figura 3.4: Movimiento de la masa granular bidispersa a lo largo del plano para diferentes instantes de tiempo $t^* = t\sqrt{\frac{g}{d}}$, a) comienzo de la avalancha $t^* = 0$, b) $t^* = 20$, c) $t^* = 40$, d) $t^* = 60$, e) $t^* = 80$, f) $t^* = 100$ y g) $t^* = 250$ (depósito final de la avalancha. Se muestra el caso para $D/d=8.33$ y el porcentaje de pequeñas partículas igual a 25).

H_{cm}/L_{cm} , donde H_{cm} es la diferencia de cotas del centro de masa al inicio y final de la avalancha y L_{cm} es el recorrido del centro de masa (ver figura 3.3).

Esto se comprueba haciendo el análisis de un bloque que se desliza sobre un plano inclinado y después sobre un plano horizontal, haciendo un recorrido similar al que hace la avalancha granular (véase la figura 3.5).

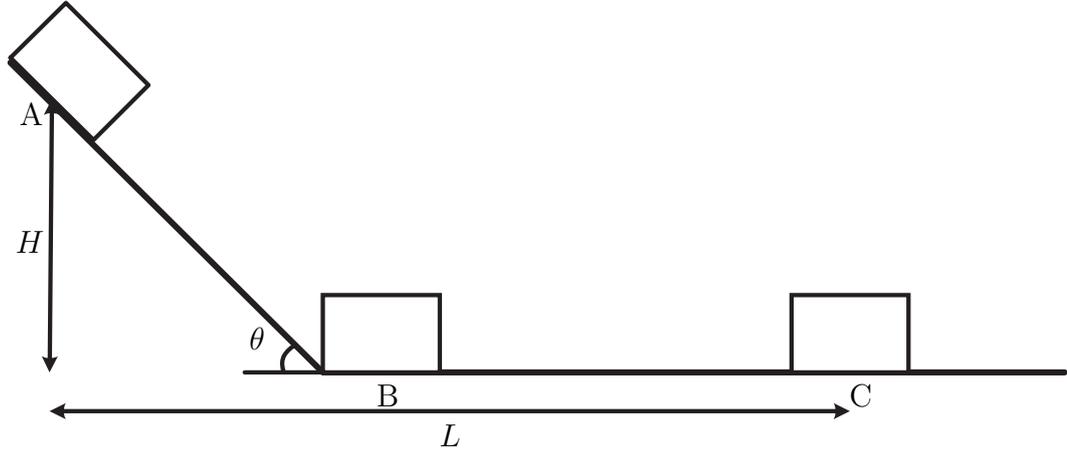


Figura 3.5: Bloque que se desliza sobre un plano inclinado. A posición inicial del bloque, B posición para la cual la energía potencial se transformó en energía cinética, C posición final donde el bloque se detiene.

El bloque en reposo se sitúa en la posición A con una energía potencial (E_p) igual a mgH . Al recorrer la distancia AB la energía potencial del bloque se transforma en su totalidad en energía cinética (E_c) y energía disipada por fricción (E_f). Teniendo así que la energía cinética del bloque en la posición B será igual a:

$$E_c = E_p - E_f = mgH - \mu(mg\cos(\theta))|\vec{AB}| = mgH - \mu mg \frac{H}{\tan(\theta)}$$

donde m es la masa del bloque, g es la aceleración de la gravedad y θ es el ángulo de inclinación del plano inclinado. La velocidad del bloque en el punto B se obtiene de despejarla de la energía cinética, de tal forma que:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = mgH - \mu mg \frac{H}{\tan(\theta)}$$

↓

$$v^2 = 2\left(gH - \mu g \frac{H}{\tan(\theta)}\right)$$

Del punto B al C, la energía cinética del bloque se disipará en forma de energía de fricción de tal forma que:

$$E_c = E_f \Rightarrow m\left(gH - \mu g \frac{H}{\tan(\theta)}\right) = \mu mg|BC|$$

despejando μ se obtiene:

$$\mu|BC| + \mu \frac{H}{\tan(\theta)} = mgH$$

$$\mu = \frac{H}{\frac{H}{\tan(\theta)} + |BC|} = \frac{H}{L}$$

donde L es la distancia horizontal que va desde la posición inicial del centro de masa del bloque (A) hasta la posición final del centro de masa del bloque (C) y H es la altura de caída del bloque.

3.1.1. Parámetros de simulación

La densidad de las partículas se fijó en $2500 \text{ kg}/m^3$, este valor corresponde a la densidad del óxido de sílice (vidrio) y está dentro del orden de la densidad promedio que tienen los materiales que forman a las avalanchas reales (entre 2000 y $3000 \text{ kg}/m^3$) [19]. El coeficiente de fricción, μ , para colisiones entre partícula-partícula y partícula-pared, es igual a 0.5 . Los parámetros de la simulación se eligieron de tal manera que fueran parecidos a los de un material granular similar al de una avalancha real [19]. El coeficiente de restitución en la dirección normal y tangencial, ϵ_n y ϵ_s , para todo tipo de colisiones (ya sea partícula-pared o partícula-partícula) es de 0.2 . El área ocupada por las partículas en todas las simulaciones es igual al área ocupada por 500 partículas grandes. Si el diámetro dimensional de las partículas grandes fuese 1m , entonces el área ocupada por las partículas sería igual a 392.7 m^2 . El número de partículas en cada simulación dependerá de la relación de diámetros D/d y el porcentaje de área ocupada por partículas pequeñas, $\%A_p$. El número de partículas pequeñas (n) estará dado por:

$$n = \%A_p N_0 \left(\frac{D}{d}\right)^2 \quad (3.1)$$

$\% A_p$	D/d	N_D	N_d	N_{total}
0	8.33	500	0	500
10	8.33	450	3473	3923
25	8.33	375	8681	9056
50	8.33	250	17362	17612
10	4	450	800	1250
40	4	300	3200	3500
100	4	0	8000	8000
10	3	450	450	900
60	3	200	2700	2900
100	3	0	4500	4500
10	2	450	200	650
50	2	250	1000	1250
90	2	50	1800	1850

Cuadro 3.1: Número de partículas pequeñas y grandes para diferentes simulaciones. Donde $\%A_p$ es el porcentaje de área ocupada por partículas pequeñas, N_D y N_d es el número de partículas grandes y pequeñas respectivamente y N_{total} es el número total de partículas

donde N_0 es el número de partículas grandes para una simulación con un porcentaje de partículas pequeñas $\%A_p$ igual a cero. La relación de diámetros se define como:

$$\frac{D}{d} = \frac{\text{diámetro de discos grandes}}{\text{diámetro de discos pequeños}} \quad (3.2)$$

Para evitar el efecto de cristalización, el diámetro de las partículas varía en un $\pm 10\%$. El cuadro 3.1 muestra el número de partículas pequeñas y grandes para simulaciones con diferentes relaciones de diámetro y diferentes porcentajes de partículas pequeñas. Para adimensionalizar cantidades físicas cuya dimensión sea de longitud, se utiliza d^* , para el tiempo se usa t^* , y para la masa se utiliza m^* (ver cuadro 3.2). El ángulo de inclinación θ del plano inclinado se fijó en 30° para todas las simulaciones. La distancia sobre el plano inclinado a recorrer por la avalancha en todas las simulaciones equivale a $50D$ (ver figura 3.2).

Parámetro característico	Descripción del parámetro
g^*	G , aceleración debida a la gravedad
d^*	d , diámetro de las partículas pequeñas
ρ^*	ρ , densidad de las partículas
t^*	$\sqrt{\frac{d}{g}}$
m^*	$\rho(d)^3$
I^*	$m(d)^3$

Cuadro 3.2: Parámetros para adimensionalizar.

3.1.2. Características del flujo bidisperso

Las primeras simulaciones de flujo bidisperso realizadas tienen una relación de diámetros $D/d = 8.33$. Esta relación se determinó a partir del espacio intersticial formado por tres partículas grandes. Se buscó que el diámetro de las partículas pequeñas fuera lo suficientemente pequeño para caber en este espacio intersticial. El espacio intersticial formado por tres discos se muestra en la figura 3.6.

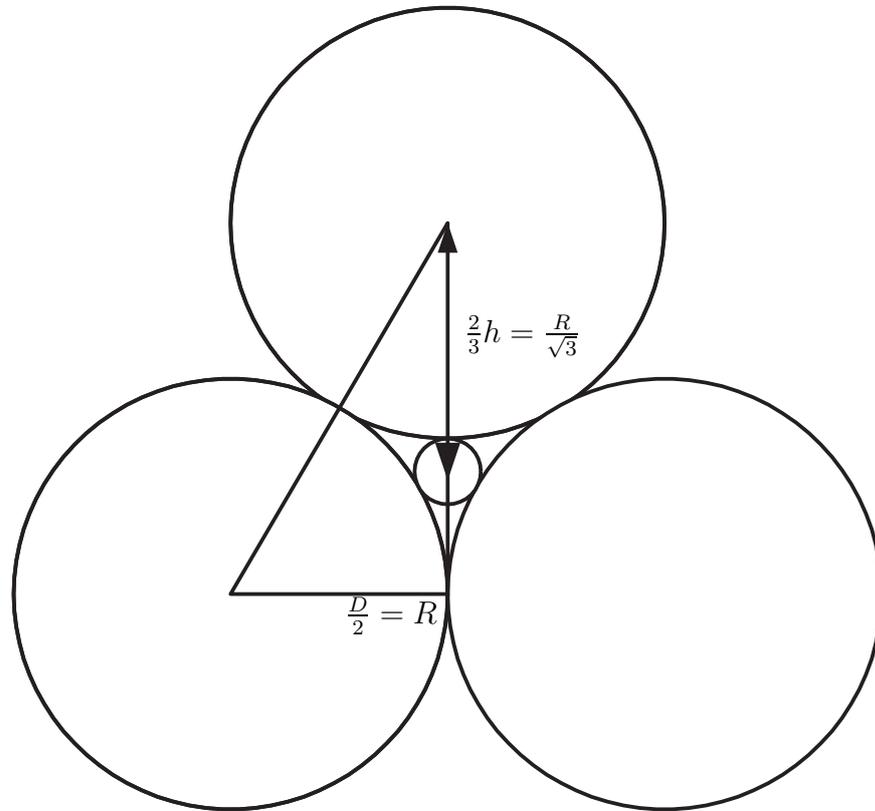


Figura 3.6: Espacio intersticial formado por tres discos.

El radio del disco más grande que puede entrar en un intersticio se calcula como:

$$\frac{d}{2} = \frac{D}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) \quad (3.3)$$

donde $\frac{d}{2}$ es el radio del disco intersticial y $\frac{D}{2}$ es el radio de los discos que forman el intersticio. Entonces la relación $\frac{D}{d}$ para el cual una partícula de diámetro d cabe en el espacio intersticial de las partículas D es de $\frac{D}{d} = 6.46$. Para asegurar que las partículas pequeñas ocuparan los intersticios, se les impuso un diámetro un poco menor al diámetro máximo para ocupar un intersticio.

Posteriormente se realizaron simulaciones para relaciones de diámetros igual a 2, 3 y 4 con el objetivo de estudiar su efecto en el comportamiento de la avalancha.

D/d	D	d
8.333	1	0.12
4	1	0.25
3	1	0.333
2	1	0.5

Cuadro 3.3: Diámetros de partículas para diferentes relaciones de tamaño

El diámetro de los discos grandes se mantuvo constante para todos los experimentos numéricos (1 [m]), por lo que la relación de diámetros es determinada por el tamaño de los discos pequeños. El cuadro 3.3 muestra los diámetros de las partículas para las diferentes relaciones de diámetros. Para las diferentes relaciones de diámetros, se realizaron simulaciones para diferentes porcentajes de área ocupada por las partículas pequeñas. Este porcentaje de área ocupada por los discos pequeños ($\%A_p$) se calcula como:

$$\%A_p = \frac{A_p}{A_p + A_g} \quad (3.4)$$

donde A_p es el área total ocupada por los discos pequeños y A_g es el área total ocupada por los discos grandes. Este porcentaje varía desde 0% (únicamente discos grandes) hasta 100% (únicamente discos pequeños), para cada una de las diferentes relaciones de diámetro.

En todas las simulaciones, $A_{total} = A_p + A_g$ es constante.

Capítulo 4

Resultados y Análisis

4.1. Resultados

4.1.1. Mínimo en la variación global del coeficiente de fricción

Se midieron los centros de masa del depósito al inicio y final de la avalancha para cada simulación. Las coordenadas del centro de masa se calcularon como:

$$(x_{cm}, y_{cm}) = \begin{cases} x_{cm} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N m_i} \sum_{i=1}^N x_i m_i \\ y_{cm} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N m_i} \sum_{i=1}^N y_i m_i \end{cases} \quad (4.1)$$

donde m_i es la masa de la partícula i , x_i y y_i son las coordenadas de la partícula i . Para obtener el coeficiente de fricción global se calculó la altura de caída (H_{cm}) y el recorrido (L_{cm}) de la avalancha según:

$$H_{cm} = |y_{cm,final} - y_{cm,inicial}| \quad (4.2)$$

$$L_{cm} = |x_{cm,final} - x_{cm,inicial}| \quad (4.3)$$

donde $x_{cm,inicial}$, $y_{cm,inicial}$, $x_{cm,final}$, y $y_{cm,final}$, corresponden a las coordenadas del centro de masa del depósito al inicio y final de la avalancha respectivamente. El coeficiente de fricción global promedio se consideró igual a:

$$\mu = \frac{H_{cm}}{L_{cm}} \quad (4.4)$$

En la figura 4.1 se muestra la variación global del coeficiente de fricción global para diferentes relaciones de diámetros en función del porcentaje de área ocupada por partículas pequeñas ($\%A_p$). La línea punteada corresponde al coeficiente de fricción global para un flujo constituido únicamente por un solo tipo de partículas (flujo monodisperso). Es importante notar que este coeficiente global de fricción es menor al coeficiente de fricción para los contactos entre partícula-partícula y partícula-pared determinado en la simulación ($\mu = 0.5$), ya que al evolucionar la avalancha los contactos entre las partículas son una combinación de deslizamiento y rodamiento. Para simulaciones con una relación de diámetro mayor a 2, el coeficiente global de fricción (H_{cm}/L_{cm}) disminuye con el porcentaje de área de pequeñas partículas ($\%A_p$), alcanzando un mínimo para un porcentaje determinado ($\%A_{p,m}$). Estos resultados indican que existe un efecto lubricante para las simulaciones con un D/d mayor a 2 para ciertos porcentajes de área ocupada por partículas pequeñas. La avalancha recorre entonces una mayor distancia y las partículas se esparcen más en el plano horizontal al ir aumentando el porcentaje de partículas pequeñas, haciendo que el depósito final sea menos prominente para un porcentaje de partículas pequeñas igual a $\%A_{p,m}$. Con ello se tiene un aumento de L_{cm} , haciendo que el coeficiente global de fricción H_{cm}/L_{cm} disminuya. De esta manera se tiene una lubricación en la avalancha cuyo origen se debe únicamente a la presencia de partículas de menor tamaño, pues todos los demás factores se matuvieron fijos.

En la figura 4.1 se puede observar también que el mínimo del coeficiente de fricción global es menor para mayores valores de D/d , teniendo que el mínimo del coeficiente de fricción global es menor para $D/d = 8.33$ y mayor para $D/d = 3$.

Otro resultado es el del aumento en el porcentaje de partículas pequeñas para el cual se tiene un mínimo en el coeficiente global de fricción ($\%A_{p,m}$) con la relación de diámetros. Esto se observa más detalladamente en la figura 4.2 en donde se muestra el porcentaje de partículas pequeñas para el cual se tiene un mínimo en el coeficiente global de fricción en función de la relación de diámetros. Dado que no se hicieron simulaciones para todos los porcentajes de partículas pequeñas se tiene cierta incertidumbre, lo que significa que el mínimo en el coeficiente de fricción global se puede dar para un porcentaje de partículas pequeñas mayor o menor al señalado en la gráfica. Lo anterior se muestra en la gráfica en forma de barras de error.

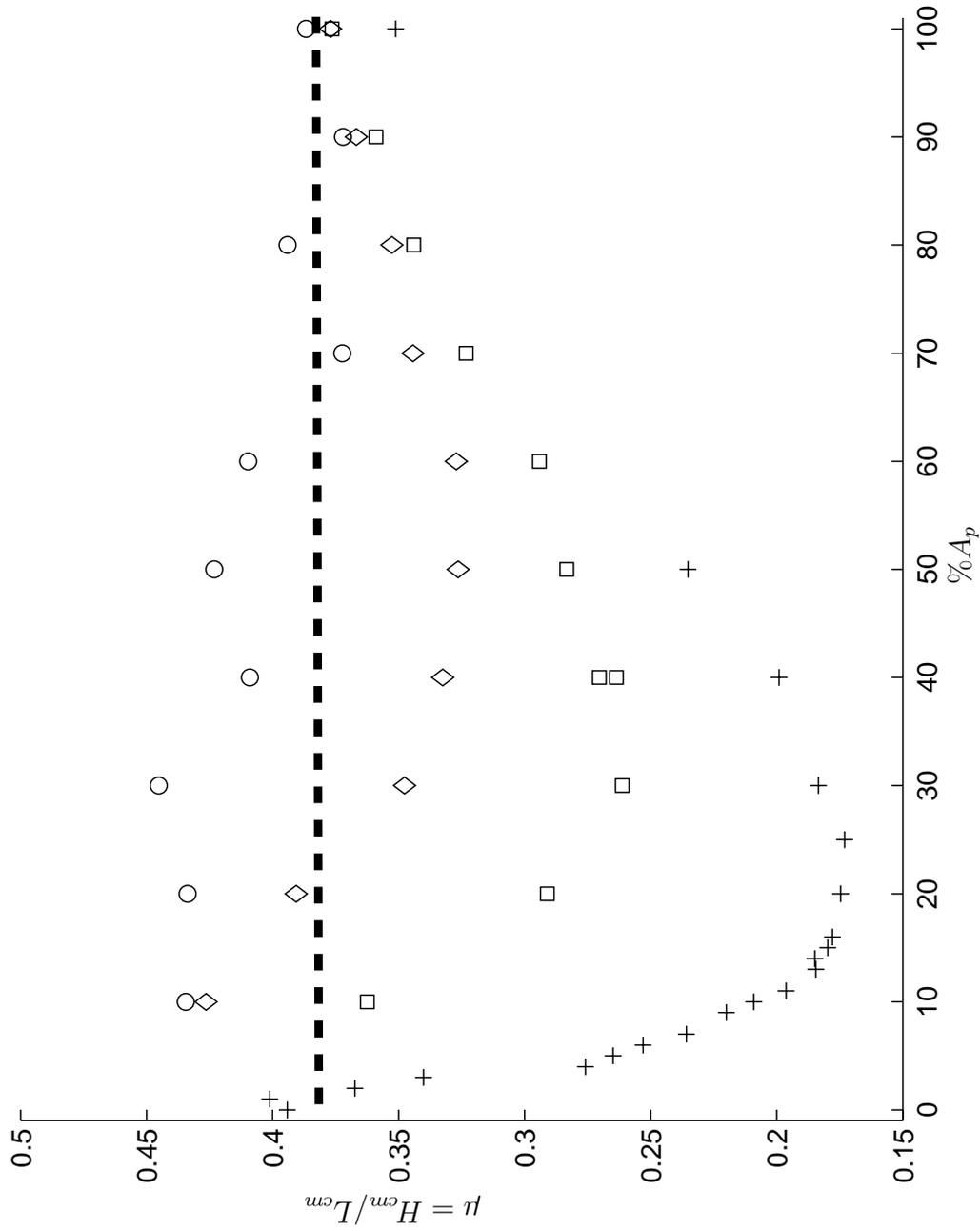


Figura 4.1: Variación del coeficiente de fricción global (μ) en función del porcentaje de área ocupada por partículas pequeñas ($\%A_p$) para diferentes relaciones de diámetro: +: $D/d = 2$; o: $D/d = 3$; ◊: $D/d = 4$; ◻: $D/d = 8.33$. La línea punteada representa el coeficiente global de fricción para flujo monodisperso ($\%A_p = 0$ ó $\%A_p = 100$), $\mu \approx 0.38$.

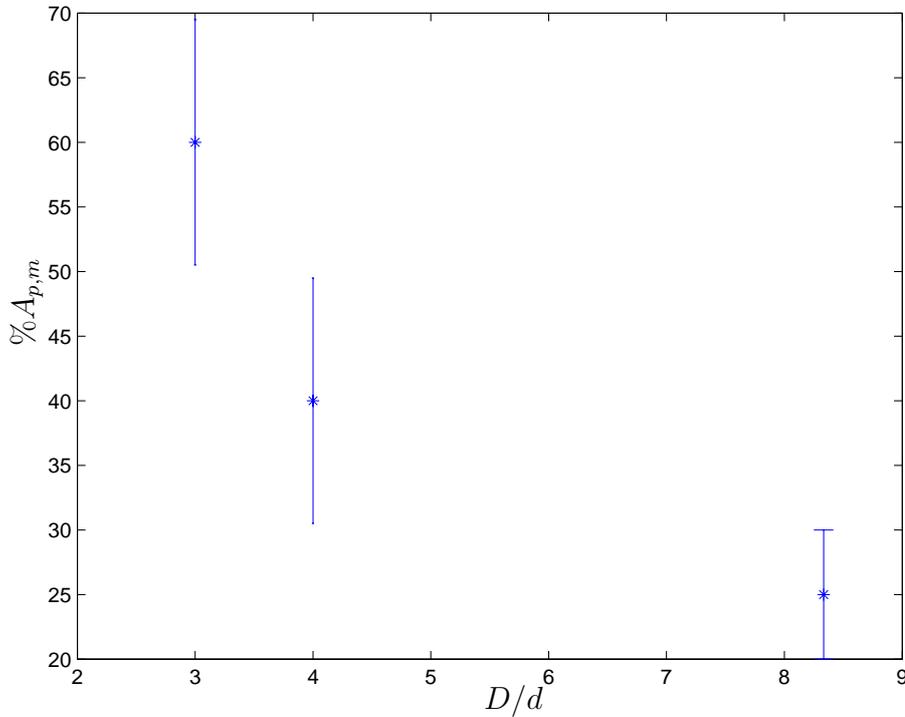


Figura 4.2: Porcentaje de partículas pequeñas para el cual el coeficiente global de fricción es mínimo ($\%A_{p,m}$) en función de la relación de diámetros (D/d).

Para simulaciones con una relación de diámetros (D/d) igual a 2, el coeficiente de fricción global es casi constante y puede ser un poco mayor al coeficiente de fricción global para flujo monodisperso. A diferencia de las otras simulaciones, la curva correspondiente a esta relación de diámetros no muestra de manera clara la presencia de un mínimo, pero se puede notar que para dos porcentajes (70 % y 90 %) el coeficiente global de fricción es menor al coeficiente global correspondiente a las simulaciones monodispersas. No obstante el comportamiento de la curva no es similar al resto de las curvas ya que el coeficiente de fricción global no va disminuyendo hasta alcanzar un mínimo. Por lo tanto las simulaciones con esta relación de diámetros no muestran de manera clara si existe o no un porcentaje de partículas pequeñas para el cual

el coeficiente global de fricción sea mínimo ($\%A_{p,m}$).

4.1.2. Variación global de la energía cinética

La presencia de un mínimo en la variación del coeficiente de fricción global se puede relacionar con la energía cinética de la avalancha. La energía cinética traslacional se calcula en cada paso del tiempo como:

$$E_c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \quad (4.5)$$

donde N es el número total de partículas, m_i es la masa de cada partícula y \dot{x}_i es la magnitud de la velocidad de la partícula i . La figura 4.3 muestra la variación de la energía cinética adimensional en función del tiempo adimensional, para una relación de diámetros igual a 8.33 para diferentes porcentajes de área de partículas pequeñas ($\%A_p$). La energía cinética se hace adimensional con el valor de la energía potencial inicial ($E_{p,initial}$). El tiempo se hace adimensional con el parámetro t^* . Al evolucionar la avalancha la energía cinética aumenta alcanzando un máximo para un tiempo determinado; de igual manera, el máximo en la energía cinética adimensional aumenta con el porcentaje de área de partículas pequeñas teniendo un máximo para el porcentaje en el cual se tiene un mínimo en el coeficiente global de fricción ($\%A_{p,m}$). Esto significa que la avalancha tiene mayor movilidad para el porcentaje $\%A_{p,m}$.

Las únicas formas de disipación de energía que pudieran existir en las simulaciones es la de disipación por medio de fricción, y disipación por colisión. Esta última se da en flujos granulares cuyo régimen es colisional para lo cual se requiere que el flujo sea rápido y exista espacio libre suficiente en la masa granular para permitir los continuos choques de las partículas que ocasionarían la disipación por colisión. Este régimen no está presente en las simulaciones de esta investigación pues a partir de las visualizaciones se observa que las partículas que conforman la avalancha están en contacto continuo y no se forman espacios vacíos lo suficientemente grandes para que colisionen continuamente. Entonces la energía de disipación por fricción es la forma de disipación de energía que predomina. Teniendo así que para que exista un aumento en la energía cinética se debe de tener una reducción en la energía de disipación por fricción y por ende una reducción en el coeficiente global de fricción. Esto

concuenda con los resultados que se presentan a continuación pues el máximo en la energía cinética corresponde a las simulaciones con un mínimo en el coeficiente global de fricción.

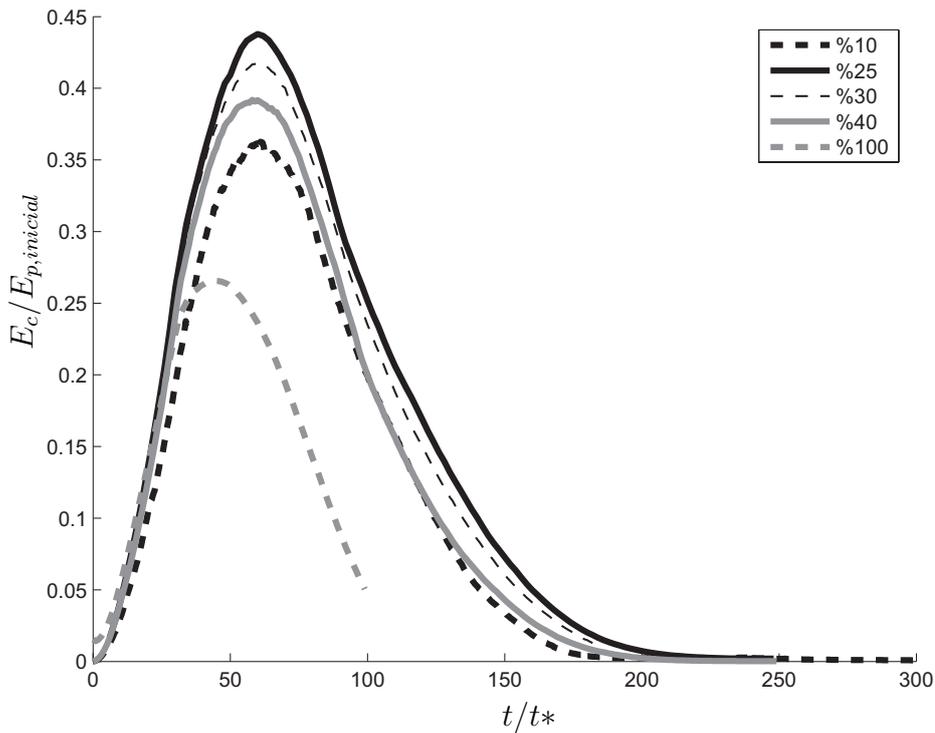


Figura 4.3: Variación de energía cinética adimensional en función del tiempo adimensional para una relación de diámetro igual a 8.33.

Para las simulaciones presentadas en la figura 4.3 el porcentaje de área ocupado por partículas pequeñas para el cual se tiene un mínimo en el coeficiente global de fricción $\%A_{p,m}$ es $25 \pm 5\%$, (ver figura 4.2). Este porcentaje presenta el máximo valor en la energía cinética adimensional (ver figura 4.3). Para simulaciones con relaciones de diámetros $D/d=4$ y $D/d=3$, se observa el mismo comportamiento en la variación de la energía cinética adimensional. Ver figuras 4.4. Más aún, el valor en la energía cinética es máximo para la simulación que presenta el coeficiente global de fricción más bajo. Como se vió en la sección anterior, el mínimo en el coeficiente global de fricción disminuye al aumentar

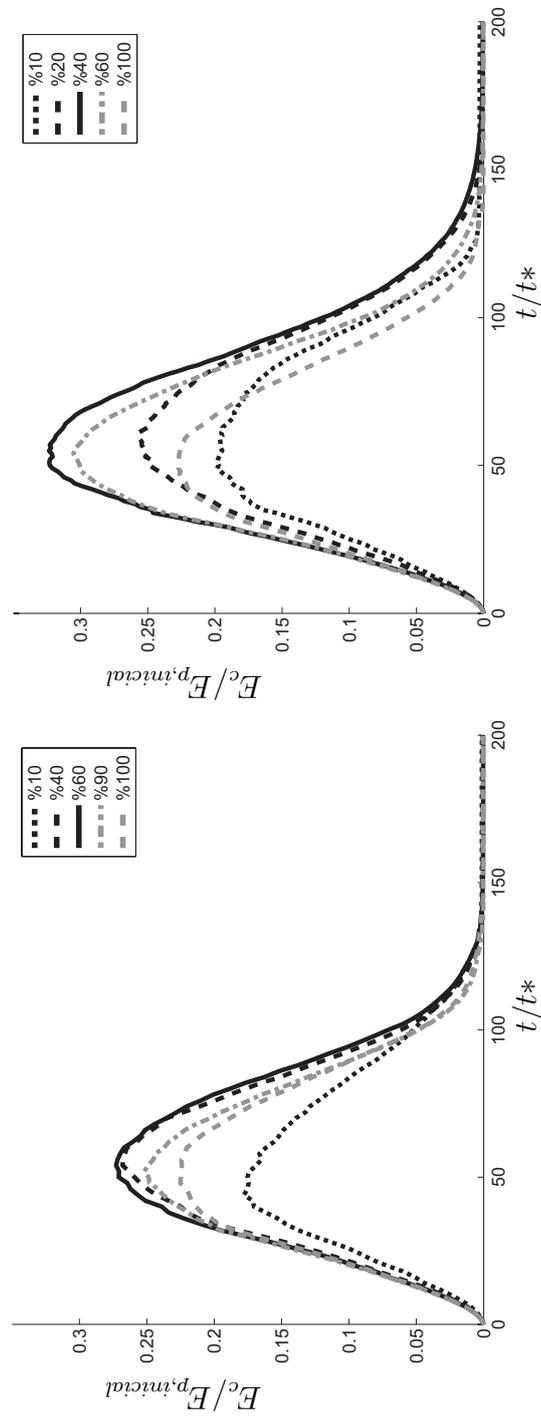


Figura 4.4: Variación de energía cinética adimensional en función del tiempo adimensional. Izquierda $D/d=3$. Derecha $D/d=4$.

la relación de diámetro (ver figura 4.1), teniendo así que el valor del mínimo coeficiente global de fricción corresponde a la simulación con una relación de diámetros $D/d = 8.33$ y con un $\%A_{p,m} \approx 25$. Para esta simulación se tiene el mayor valor del máximo de la energía cinética como se puede observar en la figura 4.5.

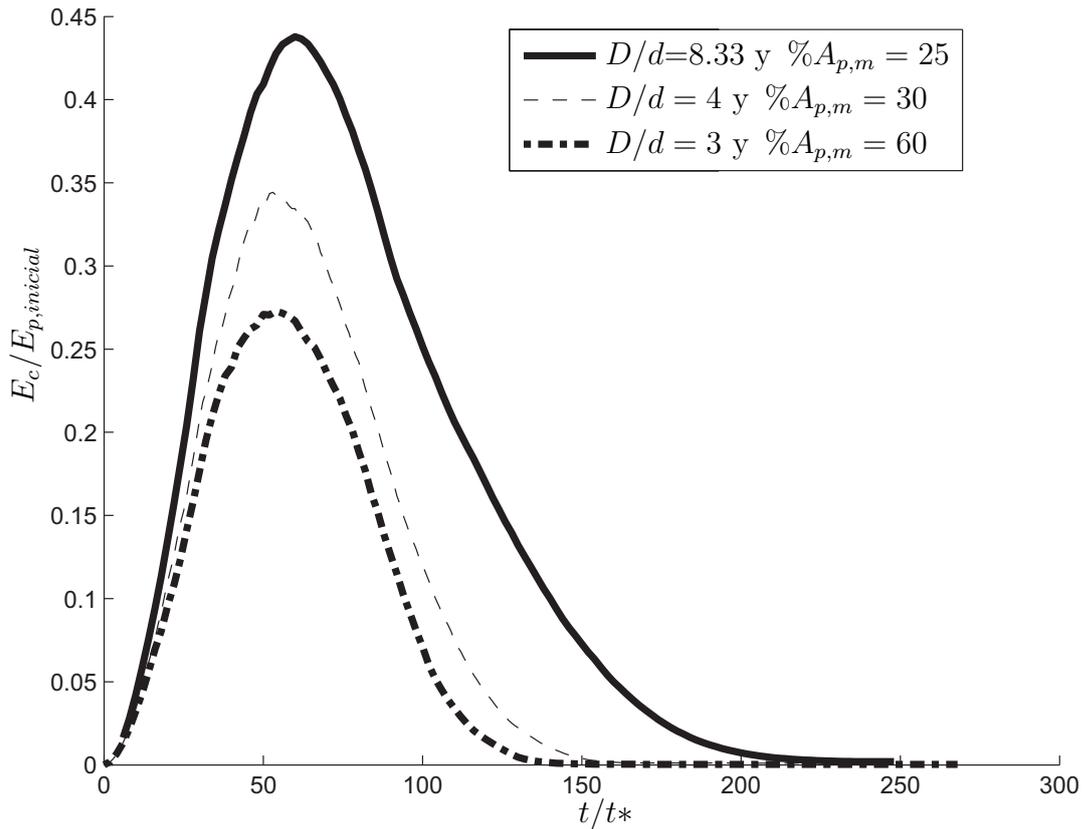


Figura 4.5: Evolución en el tiempo adimensional de la energía cinética para diferentes D/d y para $\%A_p = \%A_{p,m}$.

Analizando los resultados para las simulaciones con $D/d = 2$ (figura 4.6) se observa que los máximos en la energía cinética corresponden a los porcentajes para los cuales se tiene un menor coeficiente global de fricción: 70% y 90% (ver figura 4.1). Manteniendo así la relación entre la evolución de la energía cinética adimensional con la reducción del coeficiente global de fricción. Esto es, que para un menor coeficiente global de fricción se tiene un mayor valor en

el máximo de la energía cinética.

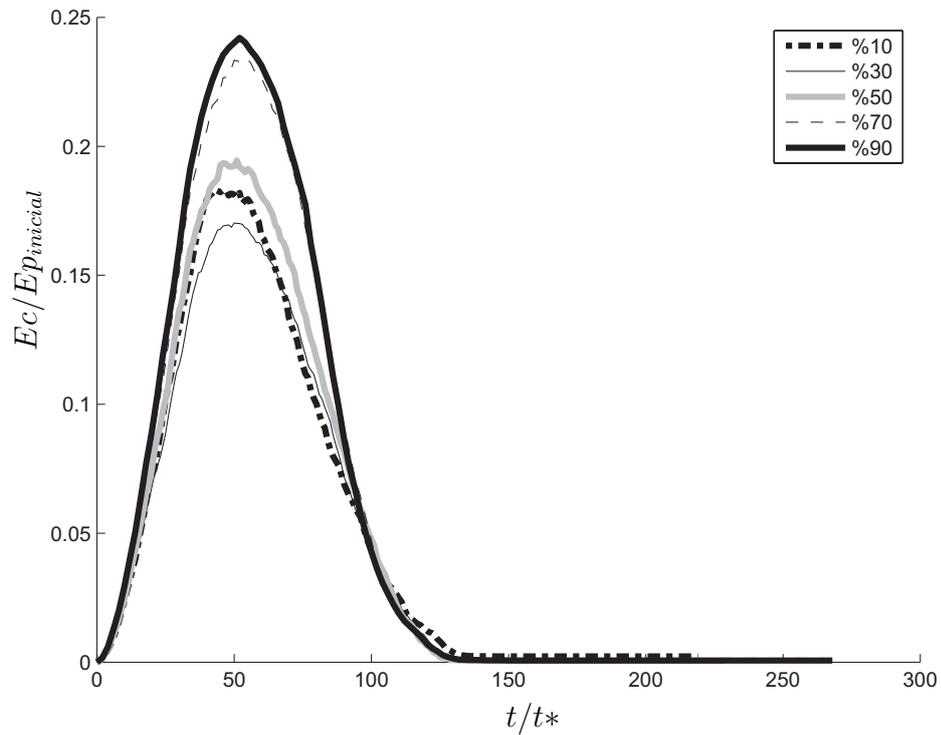


Figura 4.6: Variación de la energía cinética adimensional en función del tiempo adimensional para $D/d=2$.

En resumen, los resultados muestran que existe un determinado porcentaje de área de pequeñas partículas $\%A_{p,m}$ para el cual se tiene un mínimo en el coeficiente global de fricción para relaciones de diámetros mayores a 2. Este porcentaje disminuye con la relación de diámetros. La lubricación es más eficiente; esto es, el mínimo del coeficiente de fricción global es menor, al aumentar las relaciones de diámetro. Por último existe una relación entre el máximo en la energía cinética y el porcentaje $\%A_{p,m}$.

4.2. Análisis

4.2.1. Distribución de las partículas

En esta sección se hace un análisis de la distribución de tamaños de las partículas en el depósito final de la avalancha. A continuación se presentan tres ejemplos de la distribución de las partículas correspondiente a tres diferentes $\%A_p$ para simulaciones con una relación de diámetros igual a 8.33. Para las tres distribuciones se observa la formación de una capa en la base del

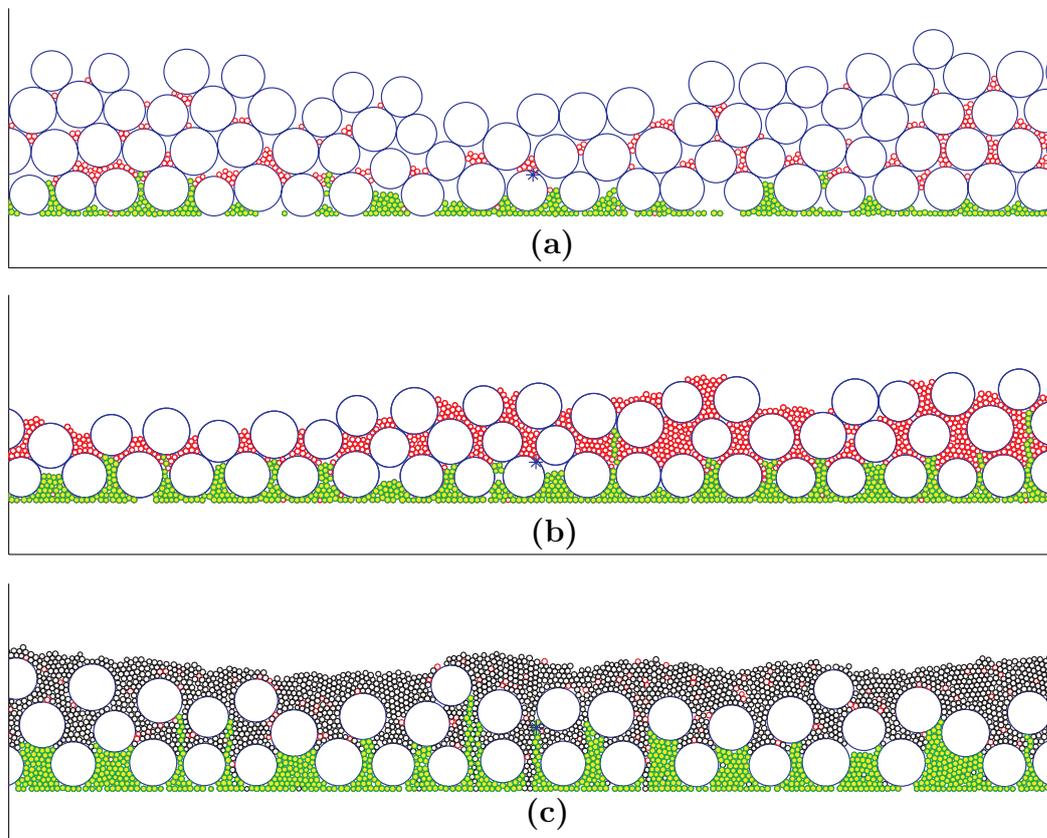


Figura 4.7: Distribución de partículas alrededor del centro geométrico (señalado como *) para $D/d = 8,33$: (a) $\%A_p=10$, (b) $\%A_p=\%A_{p,m}=25$ y (c) $\%A_p=50$. Las partículas sombreadas corresponden a las partículas pequeñas que forman una capa en la base del depósito de la avalancha.

depósito final de la avalancha constituida por partículas pequeñas (partículas sombreadas), una capa intermedia formada por una mezcla de partículas pequeñas y grandes y una capa superior formada por partículas pequeñas o partículas grandes dependiendo del porcentaje $\%A_p$. Esta distribución resulta del fenómeno de segregación, en donde las partículas pequeñas se mueven a la base de la avalancha por factores geométricos.

La capa inferior en las tres distribuciones mostradas en la figura 4.7 se calculó localizando las partículas pequeñas que se encontraban por debajo de las partículas grandes cuya posición tuviese una cota mínima a lo largo del depósito de la avalancha. Esto es, se localizaron las partículas grandes cuya distancia vertical entre el plano y su centro fuese mínima a lo largo del depósito de la avalancha. De tal manera que las partículas grandes que estuviesen más “pegadas” al plano formaran una línea que fuese el límite superior de la capa inferior formada por partículas pequeñas.

Se puede observar en la figura 4.7 (a) que para bajos valores de $\%A_p$, la capa inferior no es continua, ya que existen partículas grandes en la capa inferior. Para mayores valores de $\%A_p$ la capa inferior se vuelve continua, como se puede ver en las figuras 4.7 (b) y (c) en donde la capa inferior está formada únicamente por partículas pequeñas. Más aún, se puede observar que el grosor de la capa inferior aumenta con el porcentaje de partículas pequeñas. Esta distribución ocurre de manera similar para $D/d = 4$ y $D/d = 3$, como se observa en las figuras 4.8 y 4.9.

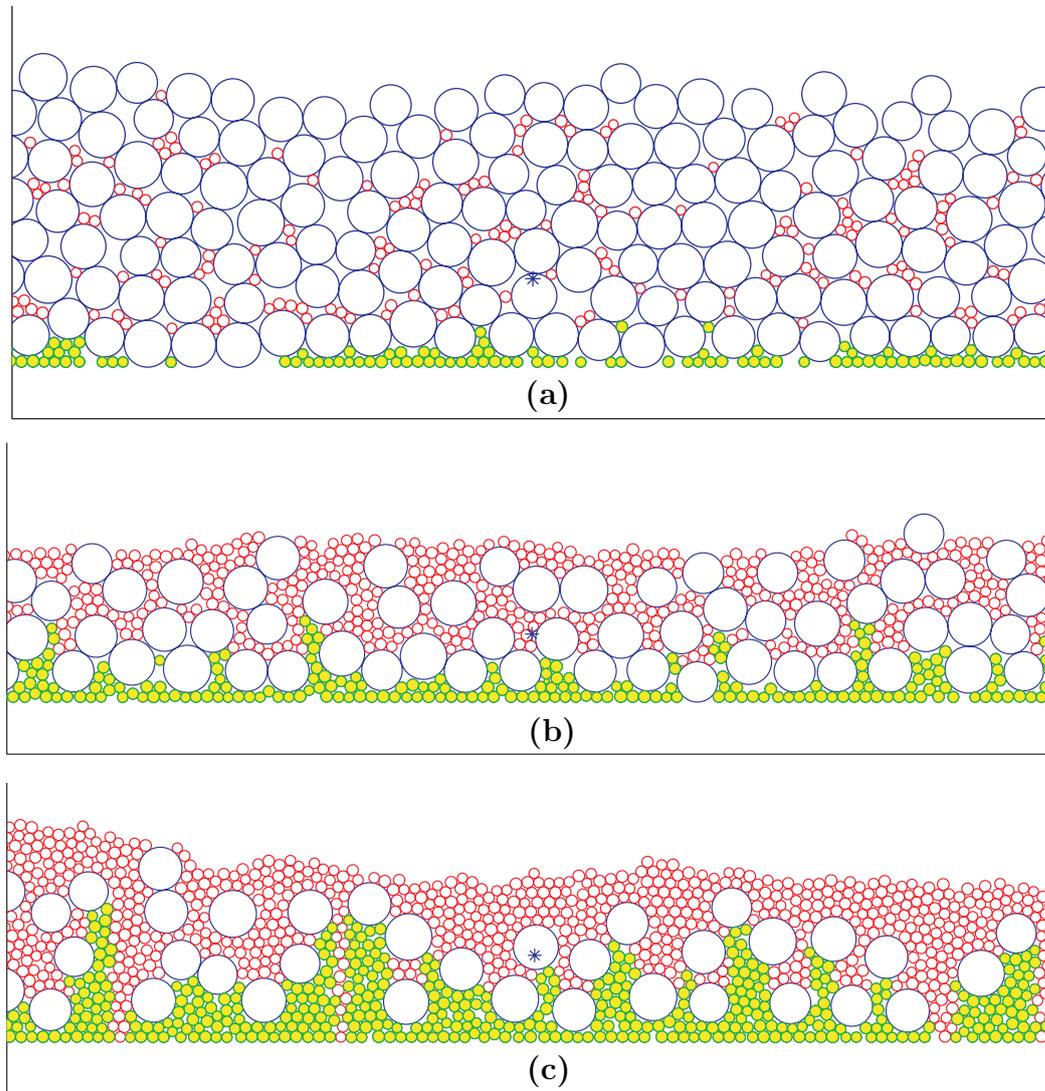


Figura 4.8: Distribución de partículas alrededor del centro geométrico (*) para $D/d = 4$ para: (a) $\%A_p = 10$, (b) $\%A_p = 40 = A_{p,m}$ y (c) $\%A_p = 70$.

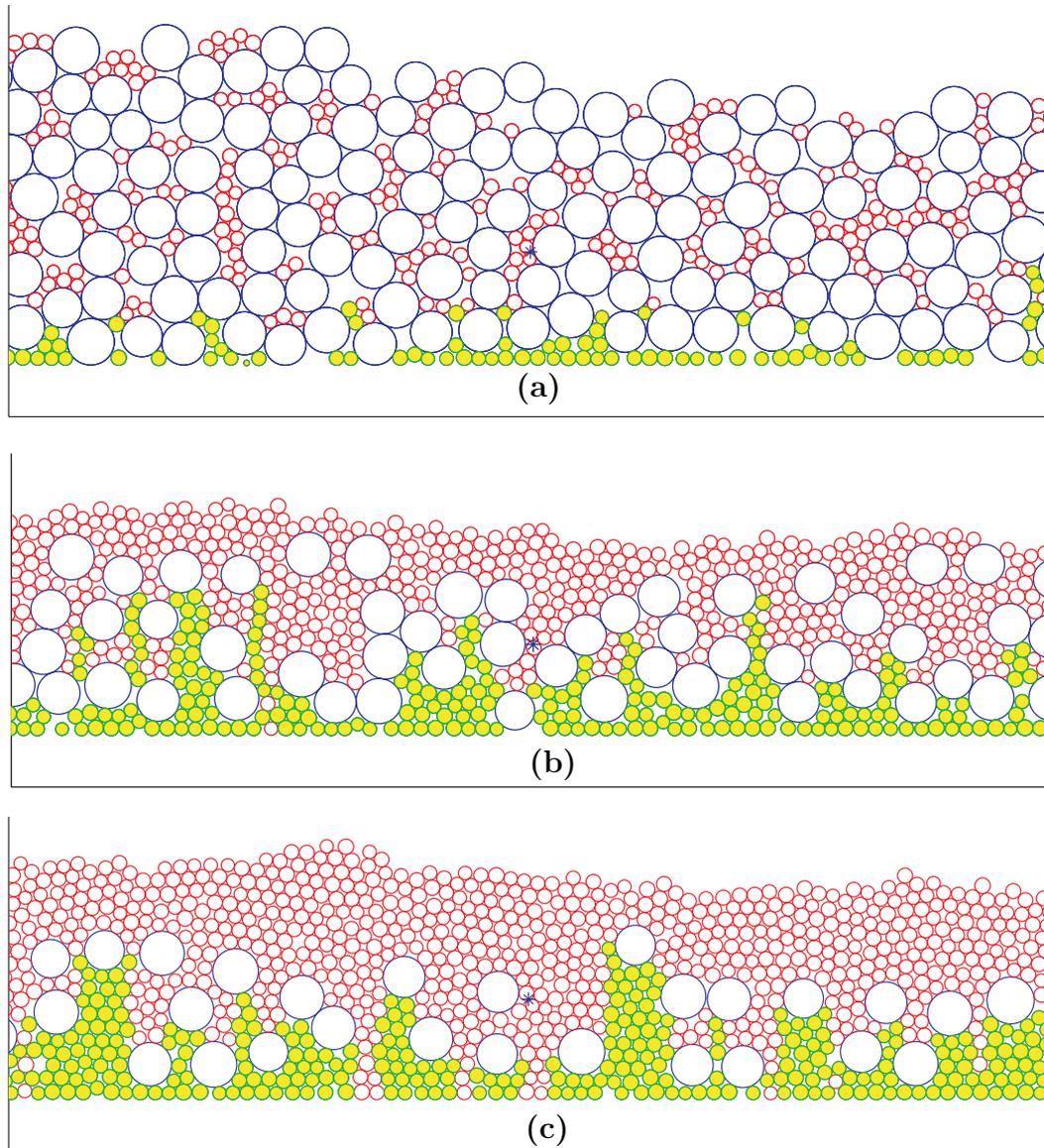


Figura 4.9: Distribución de partículas alrededor del centro geométrico (*) para $D/d = 3$ para: (a) $\%A_p = 20$, (b) $\%A_p = 60 = A_{p,m}$ y (c) $\%A_p = 80$.

La constitución de la capa inferior de partículas pequeñas del depósito final de las avalanchas para relaciones de diámetros mayores a 2 dependerá de

$\%A_p$. Para $\%A_p < \%A_{p,m}$ la capa no está constituida en su totalidad por partículas pequeñas, por lo que será discontinua a lo largo del depósito. Para $\%A_p = \%A_{p,m}$ la capa será continua y para $\%A_p > \%A_{p,m}$ la capa será continua y su grosor será mayor al correspondiente para $\%A_p = \%A_{p,m}$.

Para $D/d = 2$, la distribución de las partículas no presenta los mismos patrones, como se puede observar en la figura 4.10. Para $\%A_p = 20$ y $\%A_p = 60$, se tiene una capa inferior formada por una mezcla de partículas grandes y pequeñas por lo que la distribución no presenta una capa inferior bien definida. Para $\%A_p = 80$ se tiene una capa inferior continua pero su grosor es mayor al observado para las simulaciones con un $\%A_p = \%A_{p,m}$. Para esta relación de diámetros no existe un $\%A_p$ para el cual se tenga una capa inferior continua y cuyo grosor sea aproximadamente igual al característico para las simulaciones con un coeficiente de fricción mínimo. Por lo tanto esta relación de diámetros no presenta un $\%A_{p,m}$ para el cual el coeficiente global de fricción sea mínimo y, entonces, el fenómeno de lubricación no es el más efectivo.

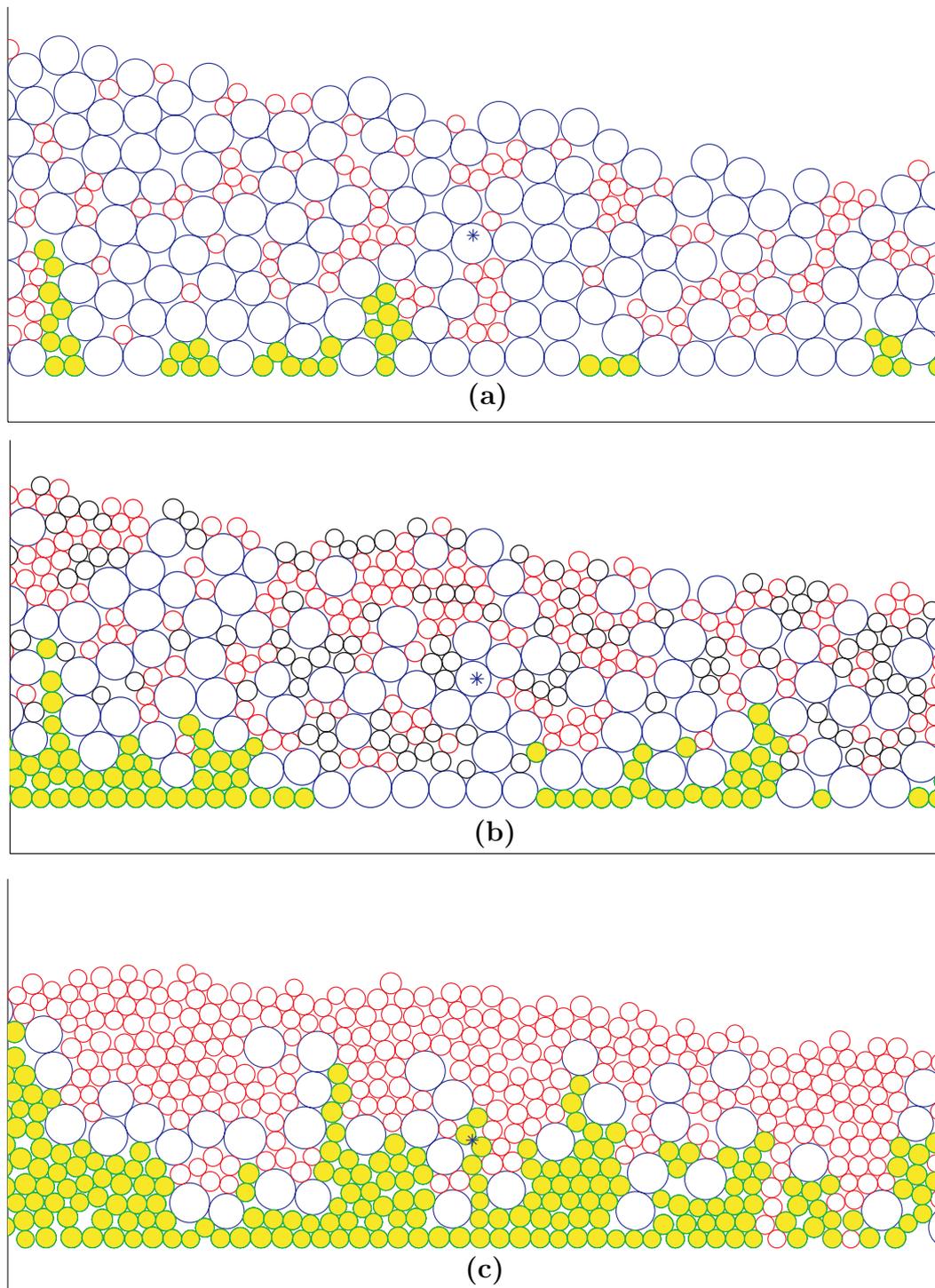


Figura 4.10: Distribución de partículas alrededor del centro geométrico para $D/d = 2$ para: a) $\%A_p = 20$, b) $\%A_p = 50$ y c) $\%A_p = 90$

En resumen, para simulaciones con una relación de diámetros mayor a 2, se observa la formación de una capa de partículas pequeñas en la base del depósito final de la avalancha. Esta capa será continua para $\%A_p \geq \%A_{p,m}$. Para simulaciones con una relación de diámetros igual a 2, no se tiene una capa inferior continua cuyo grosor sea similar al grosor que presentan las simulaciones con un coeficiente global de fricción mínimo.

Con las observaciones de la distribución de las pequeñas partículas en la parte inferior del depósito de la avalancha, se puede concluir que la lubricación (esto es la disminución en el coeficiente global de fricción H_{cm}/L_{cm}) se debe a la formación de una capa de partículas pequeñas formada en la base del depósito de la avalancha. La lubricación es más eficiente si esta capa es continua y si presenta un grosor específico. Lo anterior se puede analizar de forma cuantitativa al graficar la altura de la capa inferior en función de $\%A_p$ para diferentes relaciones de diámetros.

Para ello se midió el grosor de la capa inferior de la siguiente manera: se determinaron las partículas grandes con cota mínima (las partículas grandes que estuviesen más cerca del plano) a lo largo de una longitud L en el depósito de la avalancha. Esta longitud se determinó sin considerar los extremos del depósito, ya que en esa parte se localizan partículas dispersas y que por lo tanto no forman parte del depósito. Una vez que se determinaron las partículas grandes con cota mínima, se graficó el contorno inferior de estas partículas, como se muestra en la figura 4.11.

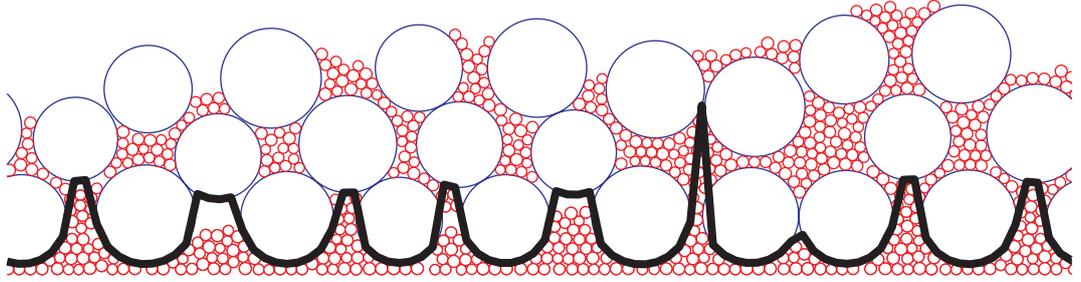


Figura 4.11: Ejemplo del contorno inferior de las partículas grandes con cota mínima. $D/d = 8,33$ y $\%A_p = 25$.

Posteriormente se calculó el área ocupada por partículas pequeñas por debajo del contorno:

$$area_{particulas,pequeñas} = \sum_{i=1}^n \pi \times r_i^2 \quad (4.6)$$

donde n es el número de partículas que se encuentran por debajo del contorno inferior y r_i el radio de cada partícula pequeña. El área por debajo del contorno se puede considerar igual al área de un rectángulo de longitud L y de ancho igual a H_{capa} . Esta área se puede igualar al área ocupada por las partículas pequeñas debajo del contorno dividida por la compactación del depósito, de tal forma que:

$$L \times H_{capa} = \frac{1}{C} \sum_{i=1}^n \pi \times r_i^2 \quad (4.7)$$

donde C es la compactación, la cual se determina de la configuración de las partículas. La configuración más sencilla que se puede tener en dos dimensiones es la configuración triangular (ver figura 4.12).

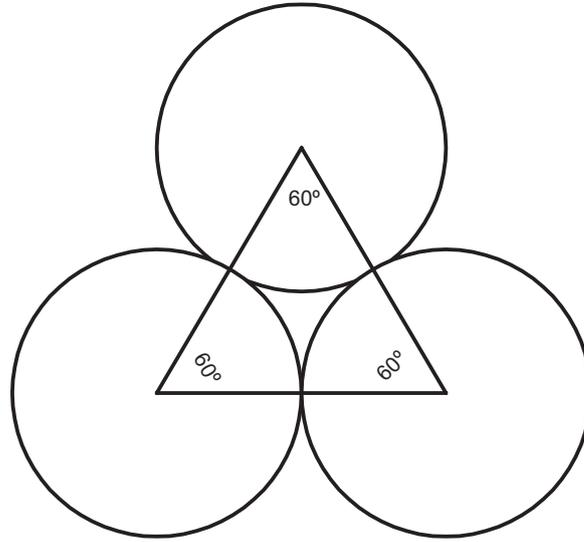


Figura 4.12: Configuración triangular

Para calcular la compactación de la configuración triangular se calcula el área del triángulo equilátero en función del radio de las partículas, el cual es $A_{triangulo} = \frac{\sqrt{3}}{4}d^2 = \sqrt{3}r^2$ donde d es el diámetro de las partículas pequeñas y r es el radio. Después se calcula el área ocupada por los sectores circulares que se localizan dentro del triángulo equilátero, $A_{sectores} = 3 \times \frac{1}{2}r^2\theta$ donde θ es igual a $\frac{1}{3}\pi$ por ser un triángulo equilátero. De esta manera la compactación es:

$$C_{triangular} = \frac{\frac{1}{2}r^2\pi}{\sqrt{3}r^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,9 \quad (4.8)$$

Para las simulaciones la configuración que presenta el depósito de la avalancha no es triangular sino irregular. Para este tipo de configuración no existe una manera analítica para determinar la compactación. Sin embargo existen estudios [72] en donde se han obtenido valores de la compactación de configuraciones irregulares de forma experimental. Para la configuración de la avalancha se utilizó una compactación igual a 0.7. Este valor se obtuvo de los resultados de Donev *et al* [72] al calcular la compactación de una configuración irregular de esferoides (esferas aplanadas).

De esta forma se puede calcular la H_{capa} si ésta se despeja de la ecuación

4.7, de tal manera que:

$$H_{capa} = \pi \times \frac{1}{L \times C} \sum_{i=1}^n r_i^2 \quad (4.9)$$

Para calcular la incertidumbre en la medición del grosor de la capa inferior, se varió 4 veces la longitud L , tomando como punto de partida el centro geométrico del depósito final de la avalancha. El primer valor de L (que llamaremos L_1) se determinó de tal forma que abarcara todo el largo del depósito final de la avalancha exceptuando los extremos, que como se mencionó anteriormente no se consideran parte del depósito. El siguiente valor de L se determinó en base a L_1 de tal manera que fuese $3/4L_1$, el tercer valor se determinó igual a $1/2L_1$ y finalmente el cuarto valor se determinó igual a $1/4L_1$ (ver figura 4.13).

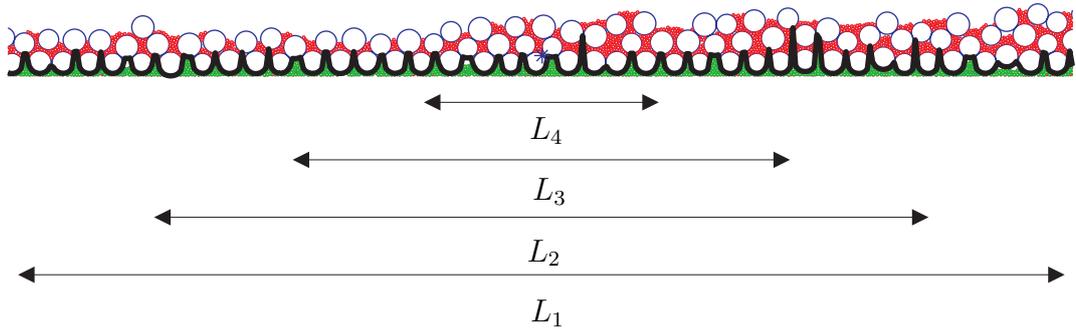


Figura 4.13: Técnica para medir la incertidumbre en la medición de la capa inferior H_{capa} .

H_{capa} , entonces, se calculó para los 4 diferentes valores de L suponiendo C constante. A partir de las variaciones en el valor de H_{capa} se calculó la incertidumbre.

La figura 4.14 muestra la variación del grosor de la capa inferior en función del $\%A_p$ para diferentes D/d .

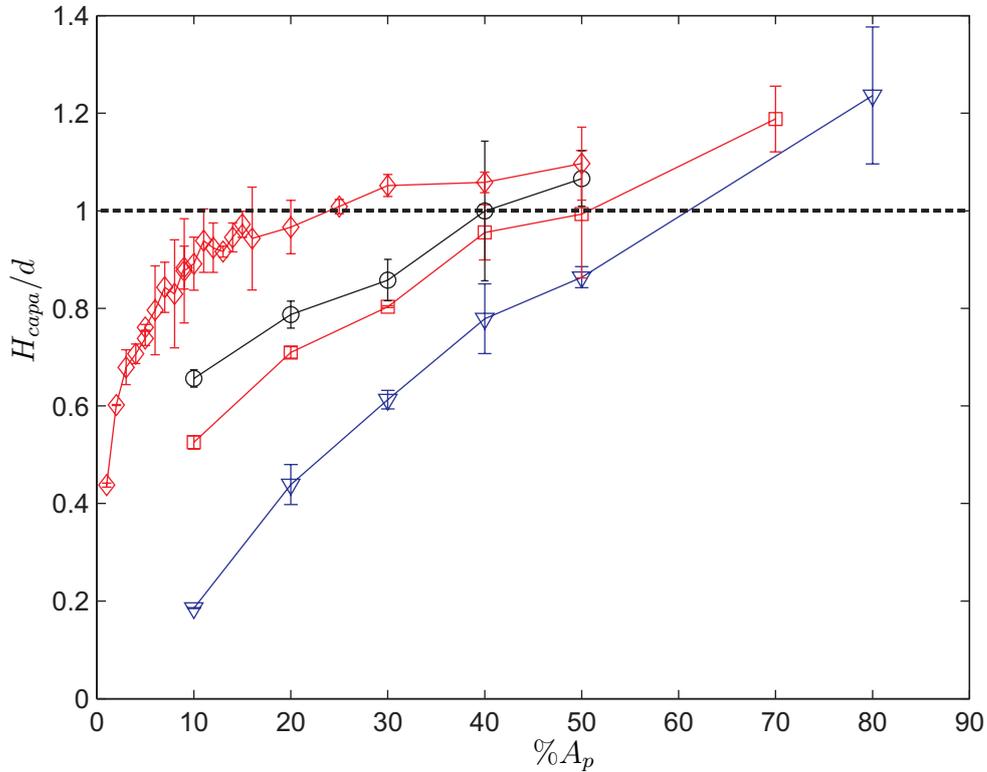


Figura 4.14: Grosor de la capa (H_{capa}) de partículas pequeñas formada en la base del depósito final de la avalancha dividida entre el diámetro de las partículas pequeñas (d) en función de $\%A_p$ para diferentes relaciones de diámetros: \diamond : $D/d = 8,33$; \circ : $D/d = 4$; \square : $D/d = 3$; ∇ : $D/d = 2$.

En la figura 4.14 se graficó la altura de la capa inferior (H_{capa}) dividida por el diámetro de las partículas pequeñas (d) en función de D/d . Se observa que cuando $H_{capa}/d \approx 1$, (el grosor de la capa inferior es aproximadamente igual al diámetro de las partículas pequeñas), el porcentaje de área ocupada por partículas pequeñas ($\%A_p$) es aproximadamente igual a $\%A_{p,m}$. De esta manera la lubricación es más eficiente (esto es, cuando μ es mínimo) cuando se forma una capa continua de partículas pequeñas en la base de la avalancha cuyo grosor es aproximadamente igual a $1d$.

Como se vió en la ecuación 4.9, H_{capa} depende del valor de la compactación. Si las simulaciones presentaran una compactación diferente a la supuesta, el

resultado sería un aumento o una disminución de la relación H_{capa}/d , pero esta relación seguiría siendo constante para las simulaciones con un porcentaje de partículas pequeñas igual a $\%A_{p,m}$. Por lo tanto, un valor de H_{capa}/d menor o mayor a uno para una compactación diferente no implica que no se tenga una capa inferior continua y con un grosor tal que permita la lubricación más eficiente.

La capa inferior funge como una capa lubricante en la avalancha, cambiando la dinámica friccional de la base de la avalancha, que pasa de deslizante a rodante. Esto se verá mas a detalle en el siguiente análisis sobre la velocidad angular en la base de la avalancha.

El grosor de la capa es determinante para la lubricación, si la capa inferior de la avalancha presenta un grosor mayor al que presentaron las simulaciones con $\%A_p = \%A_{p,m}$ ésta estará formada por una capa doble de partículas. Las partículas que se encuentran en la capa superior no podrían rodar libremente debido a que tendrían que avanzar sobre la primera capa de partículas, lo cual es similar a tener que rodar sobre un plano rugoso. Por otro lado, si el grosor de la capa inferior es menor al las partículas pequeñas no son suficientes para formar una capa lubricante más efectiva.

4.2.2. Segregación en la avalancha

La segregación se evaluó midiendo la distancia promedio entre las partículas y el plano durante la evolución de la avalancha. Con el fin de conocer el instante para el cual ocurre la segregación en la masa granular, se graficó la distancia promedio en función de la coordenada en “x” del centro de masa. En la figura 4.15 se muestra un caso típico. El punto de origen del sistema de coordenadas se fijó en el punto para el cual termina el plano inclinado, por lo que para valores negativos de la coordenada “x”, la avalancha se localiza sobre el plano inclinado. Se puede observar en la figura 4.15 la segregación. Se puede decir que ésta ocurre cuando la distancia promedio al plano de las partículas pequeñas es menor a la distancia promedio al plano de las partículas grandes. Para este caso, se tiene que las patículas pequeñas se comienzan a segregar momentos antes de que la avalancha llegue al plano horizontal. A diferencia de lo que ocurre en tres dimensiones, donde la segregación sobre un plano inclinado es casi instantánea, la segregación para un caso bidimensional es mas

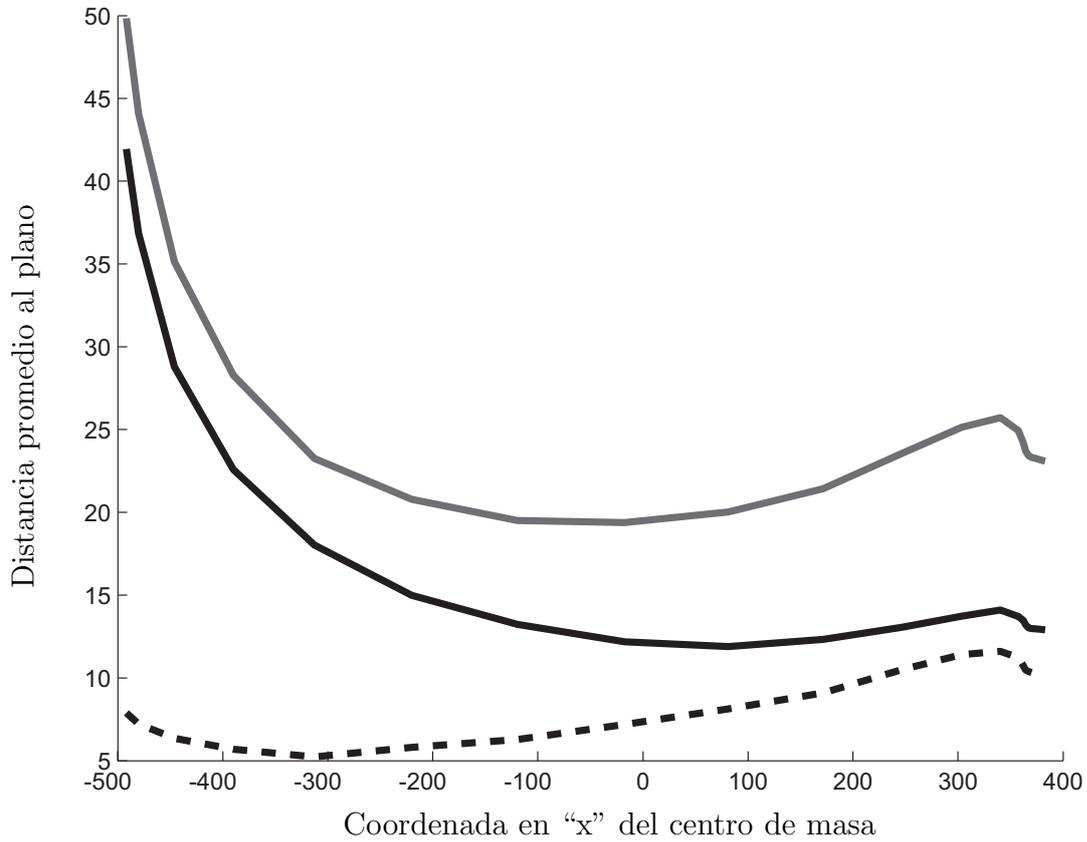


Figura 4.15: Evolución de la distancia promedio al plano de las partículas pequeñas y grandes como función de la coordenada en "x" del centro de masa. En línea negra continua se muestra la evolución de la distancia promedio al plano de las partículas pequeñas; en línea gris continua se muestra la evolución de la distancia promedio de las partículas grandes. La línea punteada corresponde a la diferencia entre estas dos distancias. El caso mostrado corresponde a $D/d=4$ y $\%A_p = 10$.

lenta, debido a que la generación de espacios vacíos es menor. No obstante, la segregación ocurre lo suficientemente rápido para que la capa de partículas pequeñas se forme durante el descenso de la avalancha sobre el plano inclinado.

4.2.3. Velocidad angular en la base de la avalancha

Con el objetivo de conocer la dinámica en la base de la avalancha se midió la velocidad angular adimensional de las partículas que se encontraban en la parte inferior de la avalancha, específicamente las partículas pequeñas que estaban en contacto con el plano tanto el inclinado como el horizontal. Para las simulaciones con $\%A_p = 0$ se midió la velocidad angular de las partículas grandes que estaban en contacto con el plano.

De esta forma se obtuvo la variación de la velocidad angular en el tiempo. Para ello se calculó la velocidad angular promedio en cada instante del tiempo de la siguiente forma:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_i \quad (4.10)$$

donde $\bar{\omega}$ es la velocidad angular adimensional promedio y n es el número de partículas pequeñas que están en contacto con el plano.

Si la partícula gira en dirección horaria, su velocidad angular es negativa. Por lo tanto, para valores menores de $\bar{\omega}$ se tiene un avance mayor de las partículas y con ello una movilidad mayor en la base de la avalancha.

La figura 4.16, muestra la variación de la velocidad angular promedio para $D/d=8.33$. Se puede observar que la velocidad angular promedio disminuye con el porcentaje de partículas pequeñas hasta alcanzar un mínimo, el cual corresponde para un $\%A_p = 20$. Muy cercana a esta curva se encuentra la curva para $\%A_p = \%A_{p,m}$ (25%). Teniendo así que la dinámica en la base de la avalancha se vuelve más rotacional conforme se va aumentando $\%A_p$ hasta alcanzar el $\%A_{p,m}$. La razón por la cual el mínimo de la velocidad angular promedio no corresponda exactamente al porcentaje de partículas pequeñas para el cual se tiene un coeficiente de fricción mínimo se atribuye a diferentes factores como puede ser la presencia de una o más partículas que hayan sido

expulsadas del depósito al iniciar la evolución de la avalancha, haciendo que estas partículas se vayan al frente de la avalancha y puedan rodar libremente sobre el plano horizontal ya que no tienen partículas vecinas que entren en contacto, alcanzando velocidades angulares mucho mayores a las alcanzadas por las partículas que se encuentran dentro de la masa de la avalancha. Más aún, estas partículas son la causa por la cual la velocidad angular no sea exactamente cero al término de la simulación.

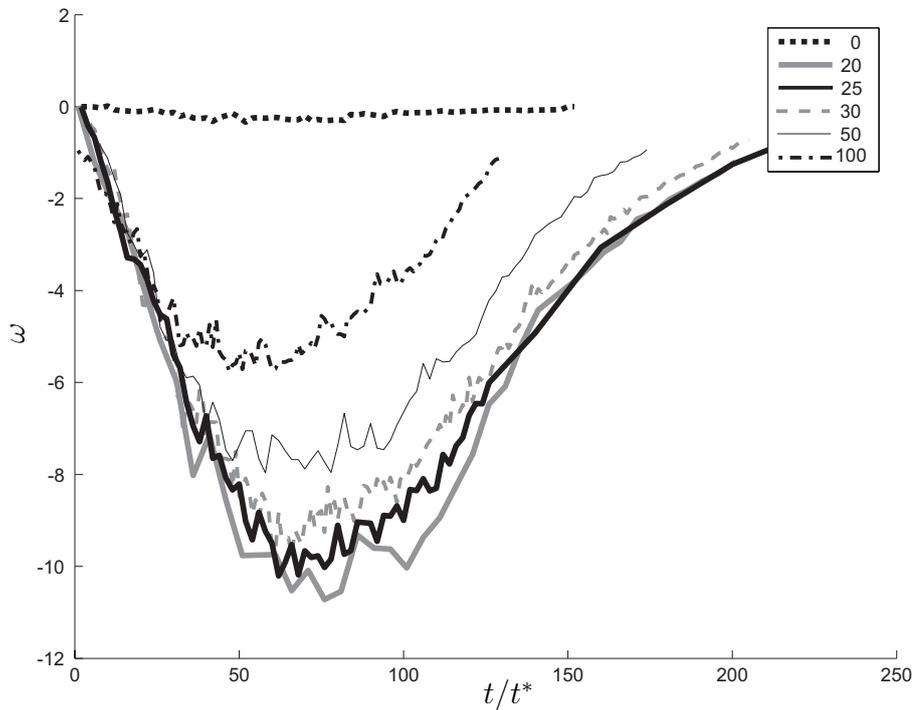


Figura 4.16: Variación de la velocidad angular adimensional promedio en función del tiempo adimensional para $D/d=8.33$.

Resultados similares se observan para las simulaciones con $D/d=4$ y $D/d=3$, como muestran las figuras 4.17. En la figura 4.18 se muestra la velocidad angular adimensional promedio para relaciones de diámetro mayores a 2 y $\%A_p = \%A_{p,m}$. Se observa que la velocidad angular adimensional disminuye con la relación de diámetros, teniendo una mayor magnitud para $D/d=8.33$.

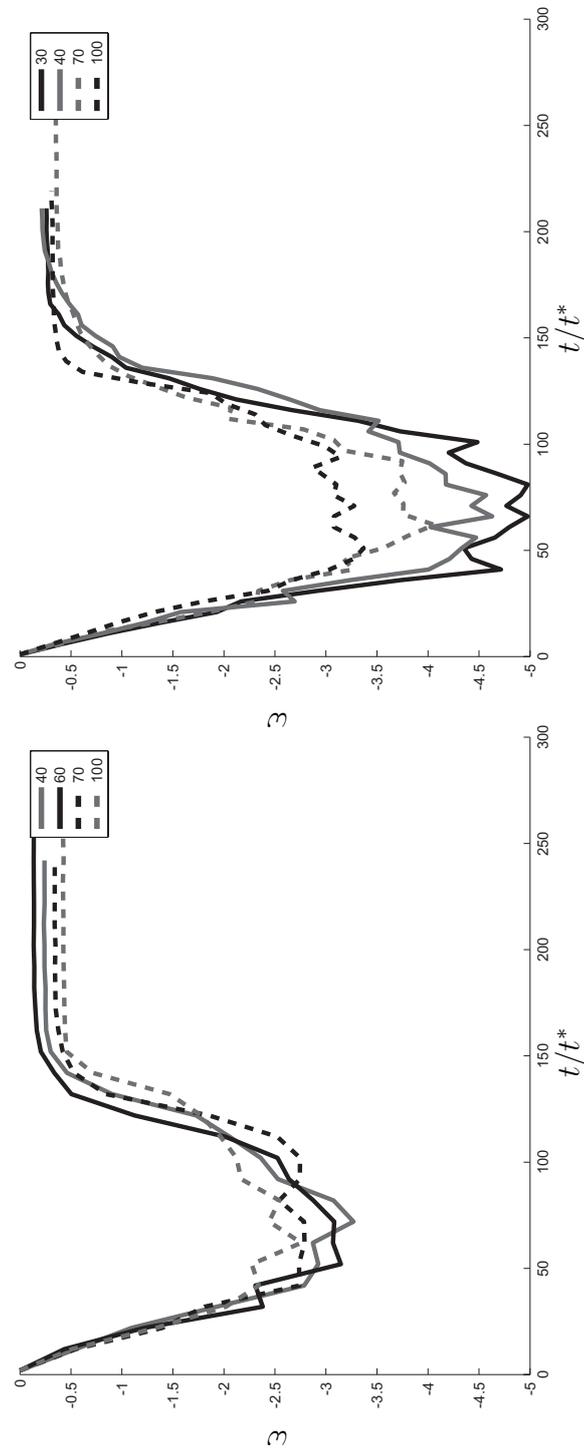


Figura 4.17: Variación de la velocidad angular adimensional promedio en función del tiempo adimensional. Izquierda $D/d=3$. Derecha $D/d=4$.

Este resultado es similar al obtenido en la variación del coeficiente global de fricción, pues éste disminuía con la relación de diámetros de igual forma que la velocidad angular adimensional promedio.

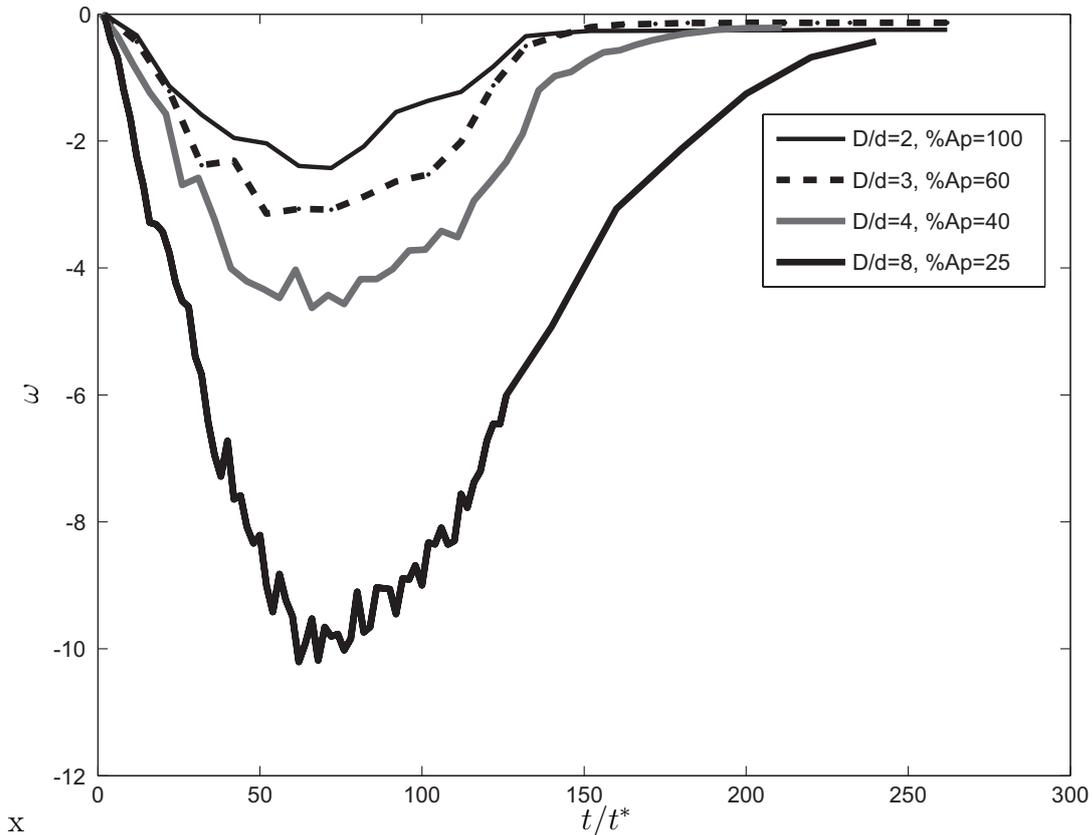


Figura 4.18: Variación de la velocidad angular promedio en función del tiempo adimensional para diferentes relaciones de diámetros y para $\%A_p = \%A_{p,m}$.

Para $D/d=2$ no se tiene el mismo comportamiento, pues para el porcentaje de partículas pequeñas para el cual se tenía el valor del coeficiente de fricción más bajo no se tiene un mínimo en la velocidad angular. De manera similar al comportamiento que presentaron estas simulaciones con la variación del coeficiente de fricción global, no se obtuvo un patrón de comportamiento definido para la variación de la velocidad angular promedio. Ver figura 4.19.

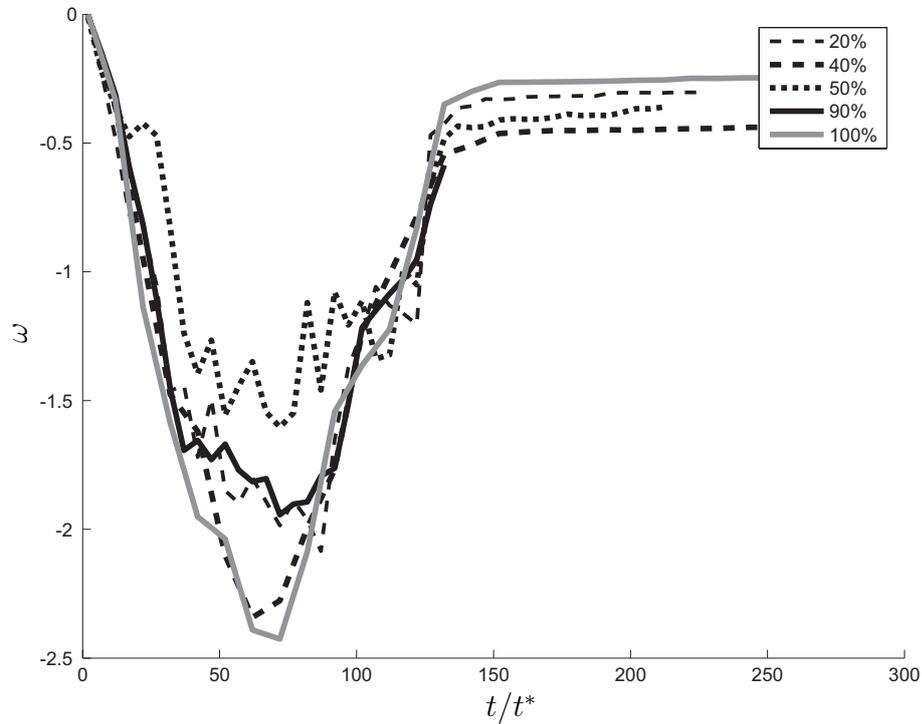


Figura 4.19: Variación de la velocidad angular promedio en función del tiempo adimensional para $D/d=2$.

En resumen, la velocidad angular en la base de la avalancha disminuye considerablemente al aumentar el porcentaje de partículas pequeñas, yendo desde una variación de la velocidad angular promedio aproximadamente constante para una avalancha granular formada únicamente por partículas grandes (figura 4.16 $\%A_p = 0\%$), hasta una variación que disminuye de manera muy marcada para $\%A_p = \%A_{p,m}$, ocurriendo un mínimo en su evolución. Este aumento en la velocidad angular conlleva a que la disipación de energía disminuya, pues se pasa de una dinámica basal deslizante a rodante, generando así el fenómeno de la lubricación.

Capítulo 5

Conclusiones

A continuación se presenta un resumen de los resultados obtenidos seguidos por una síntesis del posible trabajo a futuro en esta área.

5.1. Resumen de resultados

Se llevaron a cabo simulaciones para investigar el efecto de la presencia de un segundo tipo de partículas de menor tamaño, en una avalancha granular. En particular, se estudió el efecto de estas partículas en el recorrido de la avalancha. Se encontró que para avalanchas granulares monodispersas (ya sea una avalancha constituida únicamente por partículas pequeñas o únicamente por partículas grandes) se encuentra un coeficiente global de fricción, menor al coeficiente de fricción para contactos deslizantes entre partícula-partícula y partícula pared independientemente del tamaño de las partículas. Este resultado indica que los contactos entre partículas y la base son tanto deslizantes como rodantes. Para avalanchas bidispersas con una relación de diámetros mayor a 2, existe un porcentaje de área ocupado por partículas pequeñas ($\%A_{p,m}$) para el cual se tiene un mínimo en el coeficiente global de fricción (H_{cm}/L_{cm}). Este porcentaje depende de la relación de diámetros (D/d), teniendo que $\%A_{p,m}$ disminuye al aumentar D/d . También, el mínimo del coeficiente global de fricción depende de D/d , ya que al aumentar éste disminuye μ . Para una relación de diámetros igual a 2 el coeficiente global de fricción permanece casi constante al variar el $\%A_p$ y es poco mayor al coeficiente global de fricción correspondiente a una avalancha granular monodispersa. Para esta relación de diámetros, no se observó la presencia de un porcentaje de área de partículas pequeñas para

el cual se manifestara un mínimo en el coeficiente global de fricción ($\%A_{p,m}$).

Al estudiar el cambio de la energía cinética en función del tiempo adimensional se obtuvo que ésta aumenta al evolucionar la avalancha hasta alcanzar un máximo, el cual es mayor para el porcentaje de partículas pequeñas para el cual se tiene un mínimo en el coeficiente global de fricción ($\%A_{p,m}$).

Además se estudió la distribución de las partículas en la base de la avalancha. Se encontró que la segunda especie de partículas, con un diámetro menor, se mueve a la base del flujo de la avalancha por efecto de la segregación, la cual es producida únicamente por factores geométricos. Se observó la presencia de una capa en la base de la avalancha constituida por partículas pequeñas, la cual sirve como una capa lubricante y produce la reducción del coeficiente global de fricción. De esta manera, se observa un aumento en la distancia recorrida por la avalancha. La capa de partículas pequeñas formada en la base cambia la dinámica friccional de la parte inferior de la avalancha, yendo desde un contacto principalmente deslizante en la parte inferior de la avalancha a un contacto principalmente de rodamiento. La lubricación es más eficiente si la capa en la base del flujo es continua y su grosor es cercano a un diámetro de partículas pequeñas. Esto se corrobora con la medición de la velocidad angular de las partículas en la base del flujo de la partícula, pues se encontró que la velocidad angular promedio es mayor para esta parte de la avalancha.

A pesar de que el sistema estudiado es una simplificación, es posible que este mismo mecanismo ocurra en avalanchas reales, pues todas las masas granulares geológicas están compuestas por partículas de diversos tamaños. Por lo tanto, el efecto reportado en esta tesis podría explicar, por lo menos en parte, un aumento en la movilidad de las avalanchas aún para una pequeña cantidad de partículas de menor diámetro. Cabe hacer notar que en los flujos polidispersos las variaciones en las relaciones de diámetros pueden ser pequeñas, teniendo variaciones en tamaño de las partículas aproximadamente continuas, por lo que para flujos polidispersos con estas características el efecto en la reducción de la fricción sería un tanto incierto pues el efecto aumenta con la relación de diámetros.

5.2. Trabajo futuro

Muchas de las características de la segregación y la formación de la lubricación permanecen sin ser del todo entendidas, por lo que se debe continuar con este estudio en el futuro.

Puesto que Dade y Huppert [73] reportaron que el volumen de la avalancha tiene un efecto significativo en el recorrido de ésta, se deben realizar simulaciones de avalanchas considerando el área como una variable más del problema. Se deben también realizar simulaciones de avalanchas con un área constante pero con una altura inicial del centro geométrico diferente, para estudiar tanto el efecto en el recorrido de la avalancha como en el régimen del flujo. Para mayor altura inicial aumentaría la energía potencial y en consecuencia aumentaría también la energía cinética. Así los esfuerzos colisionales del flujo aumentarían por lo que el coeficiente de restitución podría jugar un papel más significativo.

Dado que es posible que, el efecto estudiado en esta tesis aumente al tener una mayor variedad de tamaños de partículas, se deben realizar simulaciones de flujo tridisperso ó polidisperso, pues de esta manera se tendrían resultados que se asemejen más a la realidad.

Apéndice A

Código del elemento discreto

El código del elemento discreto está escrito en C y consta de tres programas: `setup.c`, `DEsim2D_init.c` y `DEsim2D.c`.

A.1. `setup.c`

Este programa calcula todos los parámetros de la simulación y los convierte a números adimensionales. Lee los datos de entrada del programa del archivo `setup.in` y genera un archivo de salida `setup.out`. A continuación se presenta el código del programa `setup.c`.

```

/*
  setup.c

  Program to covert data into dimensionless form and
  to prepare the input file DEsim_init.in

  Copyright (C) 1999 Carl R. Wassgren, Jr.

  -----

  This program is free software; you can redistribute it
  and/or modify it under the terms of the GNU General Pu-
  blic License as published by the Free Software Founda-
  tion; either version 2 of the License, or (at your op-
  tion) any later version.

  This program is distributed in the hope that it will be
  useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the im-
  plied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PAR-
  TICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License
  for more details.

  You should have received a copy of the GNU General Pu-
  blic License along with this program; if not, write to
  the Free Software Foundation, Inc., 59 Temple Place
  - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA.

  WWW: http://www.gnu.org/copyleft/gpl.html

  -----

  Carl R. Wassgren, Jr.
  School of Mechanical Engineering
  Purdue University
  West Lafayette, IN 47907-1288
  e-mail: wassgren@ecn.purdue.edu
  WWW: http://widget.ecn.purdue.edu/~wassgren

  Last updated: 16 Apr 1999

  Modified by
  Roberto Zenit
  Instituto de Investigaciones en Materiales
  Universidad Nacional Autónoma de México
  México
  email: zenit@servidor.unam.mx
  www: http://mecmat.iimatercu.unam.mx/~zenit
*/

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <time.h>
#include <malloc.h>
#include "ParticleState2D.h"
#include "WallState2D.h"

#define PI (4.0*atan(1.0))
#define TWOPI (2.0*PI)

/* input data file name */
#define filename_in ("setup.in")

/* output data file name */
#define filename_out ("setup.out")

int NumParticleSpecies, NumWallSpecies,
    NumTotalSpecies,
    NumContactProps,
    NumofParams,
    Npart, Nwall, nsurr,
    dimensionless_flag;
double G, g[2],
    tstart, tend, samps_per_sec, r,

    g_star, d_star, rho_star, t_star, m_star,
    l_star, xdot_star,
    x_min_vis, x_max_vis, y_min_vis, y_max_vis;

struct WallState2D *wall;
struct Species *ParticleSpecies;

struct WallSpecies {
    int N;
    double rho, m, I, L, Ebar, poissonbar;
} *WallSpecies;

struct ContactProperty {
    int Nsurr;
    double kn, num, k_n1, k_n2, ks, mus, kratio,
    en, tau_trans, tau_rot;
} **Contact;

FILE *infile, *outfile;
/* input and output file pointer */
/* ***** */
int main() {
    void NormalContactModel_1();
    void NormalContactModel_2();
    void NormalContactModel_3();
    int i, j, NormalContactModel, TangContactModel;
    double temp;
    // extern x_min_vis, x_max_vis, y_min_vis,
    y_max_vis;

    /* set up the pointer for the input data file */
    if ((infile = fopen(filename_in,"rb")) == NULL) {
        printf("Error opening input file:
        %s.\n", filename_in);
        exit(1);
    }

    /* set up the pointer for the output data file */
    if ((outfile = fopen(filename_out, "wb")) == NULL) {
        printf("Cannot open output file:
        %s.\n", filename_out);
        exit(1);
    }

    /* read data from the input data file */
    fscanf(infile, "%lg", &tstart); /* sim start time */
    fscanf(infile, "%lg", &tend); /* sim end time */
    fscanf(infile, "%lg", &samps_per_sec); /* sampling
    frequency */
    fscanf(infile, "%lg", &G); /* the magnitude of the
    gravity vector */
    fscanf(infile, "%lg", &g[0]); /* x-component
    of gravity */
    fscanf(infile, "%lg", &g[1]); /* y-component
    of gravity */

    fscanf(infile, "%d", &NumParticleSpecies);
    /* make room for the particle mass array */
    if ( (ParticleSpecies = (struct Species *)
    calloc(NumParticleSpecies, sizeof(struct Species)))
    == NULL ) {
        printf("Not enough storage for *ParticleSpecies.\n");
        exit(1);
    }
    for(i=0; i<NumParticleSpecies; i++) {
        fscanf(infile, "%d", &(ParticleSpecies[i].N));
    }

    fscanf(infile, "%d", &NumWallSpecies);
    if ( (WallSpecies = (struct WallSpecies *)
    calloc(NumWallSpecies, sizeof(struct WallSpecies)))
    == NULL ) {
        printf("Not enough storage for *WallSpecies.\n");
        exit(1);
    }
    for(i=0; i<NumWallSpecies; i++) {

```

```

    fscanf(infile, "%d", &(WallSpecies[i].N));
}
NumTotalSpecies=NumParticleSpecies+NumWallSpecies;
NumOfParams=11;

Npart = 0;
for(i=0; i<NumParticleSpecies; i++) {
    Npart += ParticleSpecies[i].N;
}

Nwall = 0;
for(i=0; i<NumWallSpecies; i++) {
    Nwall += WallSpecies[i].N;
}

/* Make room for the wall array. */
if ( (wall = (struct WallState2D *)
    calloc(Nwall, sizeof(struct WallState2D)))
    == NULL ) {
    printf("Not enough storage for *wall.\n");
    fclose(outfile);
    exit(1);
}

/* Read in the particle species properties. */
for (i=0; i<NumParticleSpecies; i++) {
    fscanf(infile, "%lg", &(ParticleSpecies[i].dbar));
    fscanf(infile, "%lg", &(ParticleSpecies[i].ddev));
    fscanf(infile, "%lg", &(ParticleSpecies[i].rho));
    fscanf(infile, "%lg", &(ParticleSpecies[i].Ebar));
    fscanf(infile, "%lg", &(ParticleSpecies[i].poissonbar));
}

/* Calculate the mass and moment of inertia for each
particle species. */
for(i=0; i<NumParticleSpecies; i++) {
    r = 0.5*ParticleSpecies[i].dbar;
    /* spheres */
    ParticleSpecies[i].mbar = ParticleSpecies[i].rho*
        4.0/3.0*PI*r*r*r;
    ParticleSpecies[i].Ibar =
        2.0/5.0*ParticleSpecies[i].mbar*r*r;
}

/* Read in the wall species properties. */
for (i=0; i<NumWallSpecies; i++) {
    fscanf(infile, "%lg", &(WallSpecies[i].L));
    fscanf(infile, "%lg", &(WallSpecies[i].m));
    fscanf(infile, "%lg", &(WallSpecies[i].rho));
    fscanf(infile, "%lg", &(WallSpecies[i].Ebar));
    fscanf(infile, "%lg", &(WallSpecies[i].poissonbar));
}

/* Read in the wall data. */
for (i=0; i<Nwall; i++) {
    wall[i].num = i;
    fscanf(infile, "%lg %lg %lg %d",
        &(wall[i].L), &(wall[i].m), &(wall[i].I),
        &(wall[i].periodicbdry));
    fscanf(infile, "%lg %lg %lg %lg %lg %lg",
        &(wall[i].x[0]), &(wall[i].x[1]), &(wall[i].theta),
        &(wall[i].xdot[0]), &(wall[i].xdot[1]),
        &(wall[i].thetadot));
}

/* Calculate size of visualization window */
x_min_vis=0.0;
x_max_vis=0.0;
y_min_vis=0.0;
y_max_vis=0.0;

for (i=0; i<Nwall; i++) {
    if (wall[i].x[0] < x_min_vis)
        {
            x_min_vis = wall[i].x[0];
        }

    if (wall[i].x[0] > x_max_vis)
        {
            x_max_vis = wall[i].x[0];
        }

    if (wall[i].x[1] > y_max_vis)
        {
            if (cos(wall[i].theta) > 0.0)
                {y_max_vis =
                    wall[i].x[1]+wall[i].L*cos(wall[i].theta);}
            else
                {y_max_vis = wall[i].x[1];}
        }

    if (wall[i].x[1] < y_min_vis)
        {
            y_min_vis = wall[i].x[1];
        }
}

// printf("%lg %lg %lg %lg \n",x_min_vis,
//         x_max_vis,y_min_vis,y_max_vis);

/* Make room for contact property array. */
if ( (Contact = (struct ContactProperty **)
    calloc(NumTotalSpecies, sizeof(struct ContactProperty **))
    == NULL ) {
    printf("Not enough storage for **Contact.\n");
    exit(1);
}

for (i=0; i<NumTotalSpecies; i++) {
    if ( (Contact[i] = (struct ContactProperty *)
        calloc(NumTotalSpecies, sizeof(struct ContactProperty)))
        == NULL ) {
        printf("Not enough storage for *Contact.\n");
        exit(1);
    }
}

/* Determine the maximum number of particles surrounding each
particle species. */
for (i=0; i<NumParticleSpecies; i++) {
    for (j=0; j<NumParticleSpecies; j++) {
        Contact[i][j].Nsurr =
            (int)(PI*(ParticleSpecies[i].dbar + ParticleSpecies[j].dbar)/
                ParticleSpecies[i].dbar);
        if ((Contact[i][j].Nsurr % 2) != 0)
            Contact[i][j].Nsurr++;
    }
}

printf("\nDo you want to:\n");
printf("1. Make the data dimensionless (default)?\n");
printf("2. Or leave the data dimensional?\n");
scanf("%d", &dimensionless_flag);
if ((dimensionless_flag < 1) || (dimensionless_flag > 2)) {
    dimensionless_flag = 1;
}

printf("\nWhich normal contact model do you want to use?\n");
printf("1. hysteretic linear spring (default)\n");
printf("2. damped linear spring\n");
printf("3. damped Hertzian spring\n");
scanf("%d", &NormalContactModel);
if (NormalContactModel == 2) {
    NormalContactModel_2(); // damped linear spring
} else if (NormalContactModel == 3) {
    NormalContactModel_3(); // damped Hertzian spring
} else {
    NormalContactModel_1(); // hysteretic linear spring
}
}

```

```

for (i=0; i<NumParticleSpecies; i++) {
    fprintf(outfile, "%.5e\t%.5e\t%.5e\n",
        ParticleSpecies[i].dbar/d_star, ParticleSpecies[i].ddev,
        ParticleSpecies[i].rho/rho_star);
}

fprintf(outfile, "\n");

for (i=0; i<Nwall; i++) {
    fprintf(outfile, "%.5e\t%.5e\t%.5e\t%.5e\t%.5e\t%.5e\t%.5e\t%.5e\t%.5e\n",
        wall[i].L/d_star,
        wall[i].m/m_star,
        wall[i].I/I_star,
        wall[i].periodicbndry,
        wall[i].x[0]/d_star,
        wall[i].x[1]/d_star,
        wall[i].theta,
        wall[i].xdot[0]/xdot_star,
        wall[i].xdot[1]/xdot_star,
        wall[i].thetadot*t_star);
}

/* Close the files. */
fclose(infile);
fclose(outfile);
}

/* ***** */

void NormalContactModel_1() {
    /* hysteretic linear spring model */
    int i, j, temp;
    double s1, c1, beta, tau_min, r, reqv, meqv, ri, rj, mi,
        mj, m, I, kn, ks,
        dmnsnlss_alphadot0, dmnsnlss_alphamax;

    NumContactProps = 4;

    /* Read in the contact properties. */
    for (i=0; i<NumTotalSpecies; i++) {
        for (j=0; j<NumTotalSpecies; j++) {
            fscanf(infile, "%lg", &(Contact[i][j].en));
            fscanf(infile, "%lg", &(Contact[i][j].kratio));
            fscanf(infile, "%lg", &(Contact[i][j].mus));
        }
    }

    /* Determine the spring constants (normal and tangential),
    dashpot coefficient (normal), and friction coefficient
    (tangential) for each particle/particle species and
    particle/wall species interaction. */
    for (i=0; i<NumTotalSpecies; i++) {
        for (j=0; j<NumTotalSpecies; j++) {

            /* Determine the mass of object i. */
            if (i < NumParticleSpecies) {
                ri = 0.5*ParticleSpecies[i].dbar;
                mi = ParticleSpecies[i].mbar;
            } else {
                ri = 0.0;
                mi = WallSpecies[i-NumParticleSpecies].m;
            }

            /* Determine the mass of object j. */
            if (j < NumParticleSpecies) {
                rj = 0.5*ParticleSpecies[j].dbar;
                mj = ParticleSpecies[j].mbar;
            } else {
                rj = 0.0;
                mj = WallSpecies[j-NumParticleSpecies].m;
            }

            /* Determine the equivalent mass. If m=-1.0 then the
            mass is considered infinite. */
            if ((mi == -1.0) && (mj == -1.0)) {
                meqv = -1.0;
                reqv = -1.0;
            } else if (mi == -1.0) {
                reqv = rj;
                meqv = mj;
            } else if (mj == -1.0) {
                reqv = ri;
                meqv = mi;
            } else {
                reqv = ri*rj/(ri+rj);
                meqv = mi*mj/(mi+mj);
            }

            /* Determine the spring constant and dashpot coefficient
            for the contact. */
            if (meqv != -1.0) {
                beta = PI/log(Contact[i][j].en);

                /* Normal stiffness based on kinematic constraints. */
                dmnsnlss_alphadot0 = 10.0;
                dmnsnlss_alphamax = 0.01;
                Contact[i][j].k_n2 = meqv*G/reqv*
                    (dmnsnlss_alphadot0/dmnsnlss_alphamax*exp(-atan(beta)/beta))*
                    (dmnsnlss_alphadot0/dmnsnlss_alphamax*exp(-atan(beta)/beta));
                Contact[i][j].k_n1 = Contact[i][j].k_n2*
                    (Contact[i][j].en)*(Contact[i][j].en);
                Contact[i][j].ks = Contact[i][j].kratio*Contact[i][j].k_n1;
            } else {
                Contact[i][j].k_n1 = 0.0;
                Contact[i][j].k_n2 = 0.0;
                Contact[i][j].ks = 0.0;
                Contact[i][j].mus = 0.0;
            }
        }
    }

    /* Determine the translational and rotational periods
    for a particle of one species completely surrounded
    by particles of another species. Assume that the
    surrounding particles do not move. */
    for (i=0; i<NumParticleSpecies; i++) {
        for (j=0; j<NumParticleSpecies; j++) {
            m = ParticleSpecies[i].mbar;
            I = ParticleSpecies[i].Ibar;
            r = 0.5*ParticleSpecies[i].dbar;
            kn = Contact[i][j].k_n2;
            ks = Contact[i][j].ks;
            if (i==j) { /* the same species */
                Contact[i][j].tau_trans = TWOPI*sqrt(m/(3.0*kn+3.0*ks));
                Contact[i][j].tau_rot = TWOPI*sqrt(I/(6.0*ks*r*r));
            } else { /* different species */
                nsurr = Contact[i][j].Nsurr;
                s1 = sin(2.0*PI/nsurr);
                c1 = cos(2.0*PI/nsurr);
                Contact[i][j].tau_trans =
                    TWOPI*sqrt(m/(kn*(2.0+(nsurr-2.0)*c1*c1)
                        +ks*(nsurr-2.0)*s1*s1));
                Contact[i][j].tau_rot = TWOPI*sqrt(I/(nsurr*ks*r*r));
            }
        }
    }

    /* Determine the smallest period. */
    tau_min = Contact[0][0].tau_trans;
    for (i=0; i<NumParticleSpecies; i++) {
        for (j=0; j<NumParticleSpecies; j++) {
            if (tau_min > Contact[i][j].tau_trans)
                tau_min = Contact[i][j].tau_trans;
            if (tau_min > Contact[i][j].tau_rot)
                tau_min = Contact[i][j].tau_rot;
        }
    }
}

```

```

/* Choose parameters which will be used to non-dimension-
normalize the data. */
if (dimensionless_flag == 1) {
/* To make dimensionless, use the following parameters. */
g_star = G;
d_star = ParticleSpecies[0].dbar;
rho_star = ParticleSpecies[0].rho;
} else {
/* To leave dimensional, use the following parameters. */
g_star = d_star = rho_star = 1.0;
}

t_star = sqrt(d_star/g_star);
xdot_star = sqrt(g_star*d_star);
m_star = rho_star*d_star*d_star*d_star;
l_star = m_star*d_star*d_star;

/* write data to the output file */
fprintf(outfile,"%d",NumofParams);
fprintf(outfile,"\n");

fprintf(outfile,"%5e\t%5e\t%5e\t%5e\n",
tstart/t_star, tend/t_star,
samps_per_sec, (taumin/10.0)/t_star);

fprintf(outfile,"%5e\t%5e\t%5e\n",
G/g_star, g[0]/g_star, g[1]/g_star);

fprintf(outfile,"%5e\t%5e\t%5e\t%5e\n",
x_min_vis/d_star, x_max_vis/d_star,
y_min_vis/d_star, y_max_vis/d_star);

fprintf(outfile,"\n");

fprintf(outfile,"%d\t", NumParticleSpecies);
for (i=0; i<NumParticleSpecies; i++) {
fprintf(outfile,"%d\t", ParticleSpecies[i].N);
}
fprintf(outfile,"\n");

fprintf(outfile,"%d\t", NumWallSpecies);
for (i=0; i<NumWallSpecies; i++) {
fprintf(outfile,"%d\t", WallSpecies[i].N);
}
fprintf(outfile,"\n\n");

fprintf(outfile, "%d\n", NumContactProps);
for (i=0; i<NumTotalSpecies; i++) {
for (j=0; j<NumTotalSpecies; j++)
fprintf(outfile,"%5e\t%5e\t%5e\t%5e\n",
Contact[i][j].k_n1*d_star/(m_star*g_star),
Contact[i][j].k_n2*d_star/(m_star*g_star),
Contact[i][j].ks*d_star/(m_star*g_star),
Contact[i][j].mus);
}

fprintf(outfile,"\n");
}

/* ***** */

void NormalContactModel_2() {
/* damped linear spring model */
int i, j;
double s1, c1, beta, taumin, r, reqv, meqv, ri, rj, mi, mj,
m, l, kn, ks,
dmnsnlss_alphadot0, dmnsnlss_alphamax;

NumContactProps = 4;

/* Read in the contact properties. */
for (i=0; i<NumTotalSpecies; i++) {
for (j=0; j<NumTotalSpecies; j++) {
fscanf(infile, "%lg", &(Contact[i][j].en));
fscanf(infile, "%lg", &(Contact[i][j].kratio));
fscanf(infile, "%lg", &(Contact[i][j].mus));
}
}

/* Determine the spring constants (normal and tangential),
dashpot coefficient (normal), and friction coefficient
(tangential) for each particle/particle species and
particle/wall species interaction. */
for (i=0; i<NumTotalSpecies; i++) {
for (j=0; j<NumTotalSpecies; j++) {

/* Determine the mass of object i. */
if (i < NumParticleSpecies) {
ri = 0.5*ParticleSpecies[i].dbar;
mi = ParticleSpecies[i].mbar;
} else {
ri = 0.0;
mi = WallSpecies[i-NumParticleSpecies].m;
}

/* Determine the mass of object j. */
if (j < NumParticleSpecies) {
rj = 0.5*ParticleSpecies[j].dbar;
mj = ParticleSpecies[j].mbar;
} else {
rj = 0.0;
mj = WallSpecies[j-NumParticleSpecies].m;
}

/* Determine the equivalent mass. If m=-1.0 then the
mass is considered infinite. */
if ((mi == -1.0) && (mj == -1.0)) {
meqv = -1.0;
reqv = -1.0;
} else if (mi == -1.0) {
reqv = rj;
meqv = mj;
} else if (mj == -1.0) {
reqv = ri;
meqv = mi;
} else {
reqv = ri*rj/(ri+rj);
meqv = mi*mj/(mi+mj);
}

/* Determine the spring constant and dashpot
coefficient for the contact. */
if (meqv != -1.0) {
beta = PI/log(Contact[i][j].en);

/* Normal stiffness based on kinematic constraints. */
dmnsnlss_alphadot0 = 10.0;
dmnsnlss_alphamax = 0.01;
Contact[i][j].kn = meqv*G/reqv*
(dmnsnlss_alphadot0/dmnsnlss_alphamax*exp(-atan(beta)/beta))*
(dmnsnlss_alphadot0/dmnsnlss_alphamax*exp(-atan(beta)/beta));
Contact[i][j].nun = sqrt(4.0*meqv*Contact[i][j].kn/
(1.0+beta*beta));
Contact[i][j].ks = Contact[i][j].kratio*Contact[i][j].kn;
} else {
Contact[i][j].kn = 0.0;
Contact[i][j].nun = 0.0;
Contact[i][j].ks = 0.0;
Contact[i][j].mus = 0.0;
}
}
}

/* Determine the translational and rotational periods
for a particle of one species completely surrounded
by particles of another species. Assume that the
surrounding particles do not move. */
for (i=0; i<NumParticleSpecies; i++) {
for (j=0; j<NumParticleSpecies; j++) {
m = ParticleSpecies[i].mbar;
l = ParticleSpecies[i].lbar;
}
}

```

```

    r = 0.5*ParticleSpecies[i].dbar;
    kn = Contact[i][j].kn;
    ks = Contact[i][j].ks;
    if (i==j) { /* the same species */
Contact[i][j].tau_trans = TWOPI*sqrt(m/(3.0*kn+3.0*ks));
    Contact[i][j].tau_rot = TWOPI*sqrt(I/(6.0*ks*r*r));
    }
    else { /* different species */
nsurr = Contact[i][j].Nsurr;
s1 = sin(2.0*PI/nsurr);
c1 = cos(2.0*PI/nsurr);
Contact[i][j].tau_trans =
TWOPI*sqrt(m/(kn*(2.0+(nsurr-2.0)*c1*c1)
+ks*(nsurr-2.0)*s1*s1));
Contact[i][j].tau_rot = TWOPI*sqrt(I/(nsurr*ks*r*r));
    }
}

/* Determine the smallest period. */
taumin = Contact[0][0].tau_trans;
for (i=0; i<NumParticleSpecies; i++) {
for (j=0; j<NumParticleSpecies; j++) {
if (taumin > Contact[i][j].tau_trans)
taumin = Contact[i][j].tau_trans;
if (taumin > Contact[i][j].tau_rot)
taumin = Contact[i][j].tau_rot;
}
}

/* Choose parameters which will be used to
non-dimensionalize the data. */
if (dimensionless_flag == 1) {
/* To make dimensionless, use the following
parameters. */
g_star = G;
d_star = ParticleSpecies[0].dbar;
rho_star = ParticleSpecies[0].rho;
} else {
/* To leave dimensional, use the following
parameters. */
g_star = d_star = rho_star = 1.0;
}

t_star = sqrt(d_star/g_star);
xdot_star = sqrt(g_star*d_star);
m_star = rho_star*d_star*d_star*d_star;
I_star = m_star*d_star*d_star;

/* write data to the output file */
fprintf(outfile,"%d",NumOfParams);
fprintf(outfile,"\n");

fprintf(outfile,"%5e\t%.5e\t%.5e\t%.5e\n",
tstart/t_star, tend/t_star,
samps_per_sec*t_star, (taumin/10.0)/t_star);
fprintf(outfile,"%5e\t%.5e\t%.5e\n",
G/g_star, g[0]/g_star, g[1]/g_star);

fprintf(outfile,"%5e\t%.5e\t%.5e\t%.5e\n",
x_min_vis/d_star, x_max_vis/d_star,
y_min_vis/d_star, y_max_vis/d_star);

fprintf(outfile,"\n");

fprintf(outfile,"%d\t", NumParticleSpecies);
for (i=0; i<NumParticleSpecies; i++) {
fprintf(outfile,"%d\t", ParticleSpecies[i].N);
}
fprintf(outfile,"\n");

fprintf(outfile,"%d\t", NumWallSpecies);
for (i=0; i<NumWallSpecies; i++) {
fprintf(outfile,"%d\t", WallSpecies[i].N);
}
fprintf(outfile,"\n\n");

fprintf(outfile,"%d\n", NumContactProps);
for (i=0; i<NumTotalSpecies; i++) {
for (j=0; j<NumTotalSpecies; j++)
fprintf(outfile,"%5e\t%.5e\t%.5e\t%.5e\n",
Contact[i][j].kn*d_star/(m_star*g_star),
Contact[i][j].nun*xdot_star/(m_star*g_star),
Contact[i][j].ks*d_star/(m_star*g_star),
Contact[i][j].mus);
}

fprintf(outfile,"\n");
}

/* ***** */

void NormalContactModel_3() {
/* damped Hertzian spring model */
/* THIS ROUTINE IS NOT COMPLETE!!! */
int i, j;
double s1, c1, beta, taumin, r, reqv, meqv, ri, rj, mi,
mj, m, I, kn, ks,
Ei, pri, Ej, prj, Eqv;

NumContactProps = 4;

/* Read in the contact properties. */
for (i=0; i<NumTotalSpecies; i++) {
for (j=0; j<NumTotalSpecies; j++) {
fscanf(infile, "%lg", &(Contact[i][j].en));
fscanf(infile, "%lg", &(Contact[i][j].kratio));
fscanf(infile, "%lg", &(Contact[i][j].mus));
}
}

/* Determine the spring constants (normal and tangential),
dashpot coefficient (normal), and friction coefficient
(tangential) for each particle/particle species and
particle/wall species interaction. */
for (i=0; i<NumTotalSpecies; i++) {
for (j=0; j<NumTotalSpecies; j++) {

/* Determine the mass of object i. */
if (i < NumParticleSpecies) {
ri = 0.5*ParticleSpecies[i].dbar;
mi = ParticleSpecies[i].mbar;
Ei = ParticleSpecies[i].Ebar;
pri = ParticleSpecies[i].poissonbar;
} else {
ri = 0.0;
mi = WallSpecies[i-NumParticleSpecies].m;
Ei = WallSpecies[i-NumParticleSpecies].Ebar;
pri = WallSpecies[i-NumParticleSpecies].poissonbar;
}

/* Determine the mass of object j. */
if (j < NumParticleSpecies) {
rj = 0.5*ParticleSpecies[j].dbar;
mj = ParticleSpecies[j].mbar;
Ej = ParticleSpecies[j].Ebar;
prj = ParticleSpecies[j].poissonbar;
} else {
rj = 0.0;
mj = WallSpecies[j-NumParticleSpecies].m;
Ej = WallSpecies[j-NumParticleSpecies].Ebar;
prj = WallSpecies[j-NumParticleSpecies].poissonbar;
}

/* Determine the equivalent mass. If m=-1.0 then the
mass is considered infinite. */
if ((mi == -1.0) && (mj == -1.0)) {
meqv = -1.0;
reqv = -1.0;
Eqv = -1.0;
} else if (mi == -1.0) {
reqv = rj;
}
}
}
}

```

```

meqv = mj;
Eqv = 1.0/((1.0-prj*prj)/Ej);
} else if (mj == -1.0) {
reqv = ri;
meqv = mi;
Eqv = 1.0/((1.0-pri*pri)/Ei);
} else {
reqv = ri*rj/(ri+rj);
meqv = mi*mj/(mi+mj);
Eqv = 1.0/((1.0-pri*pri)/Ei+(1.0-prj*prj)/Ej);
}

/* Determine the spring constant and dashpot coefficient
for the contact. */
if (meqv != -1.0) {
beta = PI/log(Contact[i][j].en);

/* Normal stiffness based on kinematic constraints. */
Contact[i][j].kn = 4.0/3.0*sqrt(reqv)*Eqv;
Contact[i][j].nun = 0.0;
Contact[i][j].ks = Contact[i][j].kratio*Contact[i][j].kn;
} else {
Contact[i][j].kn = 0.0;
Contact[i][j].nun = 0.0;
Contact[i][j].ks = 0.0;
Contact[i][j].mus = 0.0;
}
}

/* Determine the translational and rotational periods
for a particle of one species completely surrounded
by particles of another species. Assume that the
surrounding particles do not move. */
for (i=0; i<NumParticleSpecies; i++) {
for (j=0; j<NumParticleSpecies; j++) {
m = ParticleSpecies[i].mbar;
I = ParticleSpecies[i].Ibar;
r = 0.5*ParticleSpecies[i].dbar;
kn = Contact[i][j].kn;
ks = Contact[i][j].ks;
if (i==j) { /* the same species */
Contact[i][j].tau_trans = TWOPI*sqrt(m/(3.0*kn+3.0*ks));
Contact[i][j].tau_rot = TWOPI*sqrt(I/(6.0*ks*r*r));
}
else { /* different species */
nsurr = Contact[i][j].Nsurr;
s1 = sin(2.0*PI/nsurr);
c1 = cos(2.0*PI/nsurr);
Contact[i][j].tau_trans =
TWOPI*sqrt(m/(kn*(2.0+(nsurr-2.0)*c1*c1)
+ks*(nsurr-2.0)*s1*s1));
//Contact[i][j].tau_rot = TWOPI*sqrt(I/(nsurr*ks*r*r));
Contact[i][j].tau_rot = 1.0e6;
}
}
}

/* Determine the smallest period. */
taumin = Contact[0][0].tau_trans;
for (i=0; i<NumParticleSpecies; i++) {
for (j=0; j<NumParticleSpecies; j++) {
if (taumin > Contact[i][j].tau_trans)
taumin = Contact[i][j].tau_trans;
if (taumin > Contact[i][j].tau_rot)
taumin = Contact[i][j].tau_rot;
}
}

/* Choose parameters which will be used to non-dimen-
sionalize the data. */
g_star = G;
d_star = ParticleSpecies[0].dbar;
rho_star = ParticleSpecies[0].rho;

/* To leave dimensional, use the following parameters. */
//g_star = d_star = rho_star = 1.0;

t_star = sqrt(d_star/g_star);
xdot_star = sqrt(g_star*d_star);
m_star = rho_star*d_star*d_star*d_star;
I_star = m_star*d_star*d_star;

/* write data to the output file */
fprintf(outfile,"%d",NumofParams);
fprintf(outfile,"\n");
fprintf(outfile,"%5e\t%5e\t%5e\t%5e\n",
tstart/t_star, tend/t_star,
samps_per_sec*t_star, (taumin/10.0)/t_star);
fprintf(outfile,"%5e\t%5e\t%5e\n",
G/g_star, g[0]/g_star, g[1]/g_star);

fprintf(outfile,"%5e\t%5e\t%5e\t%5e\n",
x_min_vis/d_star, x_max_vis/d_star,
y_min_vis/d_star, y_max_vis/d_star);

fprintf(outfile,"\n");

fprintf(outfile,"%d\t", NumParticleSpecies);
for (i=0; i<NumParticleSpecies; i++) {
fprintf(outfile,"%d\t", ParticleSpecies[i].N);
}
fprintf(outfile,"\n");

fprintf(outfile,"%d\t", NumWallSpecies);
for (i=0; i<NumWallSpecies; i++) {
fprintf(outfile,"%d\t", WallSpecies[i].N);
}
fprintf(outfile,"\n\n");

fprintf(outfile, "%d\n", NumContactProps);
for (i=0; i<NumTotalSpecies; i++) {
for (j=0; j<NumTotalSpecies; j++)
fprintf(outfile, "%5e\t%5e\t%5e\t%5e\n",
Contact[i][j].kn*d_star/(m_star*g_star),
Contact[i][j].nun*xdot_star/(m_star*g_star),
Contact[i][j].ks*d_star/(m_star*g_star),
Contact[i][j].mus);
}

fprintf(outfile,"\n");
}

```

A.2. Desim2Dinit.c

Esta es la parte de inicialización de la simulación. Esta simulación es utilizada para generar las condiciones iniciales utilizadas en la simulación principal, DEsim2D.c. En esta simulación de inicialización, las partículas tienen una posición y una velocidad inicial aleatoria con un radio inicial muy pequeño. El radio de las partículas crece de manera exponencial hasta alcanzar el radio final.

DEsim2Dinit.in es el archivo de entrada utilizado para especificar las propiedades de partículas, paredes y del ambiente. En este archivo el usuario determina el tiempo final de la simulación, así como también la frecuencia de muestreo.

La simulación genera dos archivos de salida, en uno va guardando el estado de las partículas y las paredes en cada punto de muestreo, y en el otro, DEsim2D.final-state, se guarda de manera periódica el estado de las partículas y paredes. Este archivo puede ser utilizado como archivo de entrada para la simulación principal. El archivo DEsim2D.final-state también es de ayuda si la simulación se detiene inesperadamente y se debe reiniciar la simulación.

A continuación se presenta el código del programa DEsim2Dinit.c.

```

/*
  DEsim2D_init.c

Copyright (C) 1999 Carl R. Wassgren, Jr.

-----

This program is free software; you can redistribute
it and/or modify it under the terms of the GNU Ge-
neral Public License as published by the Free Soft-
ware Foundation; either version 2 of the License, or
(at your option) any later version.

This program is distributed in the hope that it will
be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the
implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A
PARTICULAR PURPOSE. See the
GNU General Public License for more details.

You should have received a copy of the GNU General
Public License along with this program; if not, write
to the Free Software Foundation, Inc., 59 Temple
Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA.

WWW: http://www.gnu.org/copyleft/gpl.html

-----

Carl R. Wassgren, Jr.
School of Mechanical Engineering
Purdue University
West Lafayette, IN 47907-1288
e-mail: wassgren@ecn.purdue.edu
WWW: http://widget.ecn.purdue.edu/~wassgren

Last updated: 10 Mar 1999

Modified by: Roberto Zenit
Instituto de Investigaciones en Materiales
Universidad Nacional Autónoma de México
México
email: zenit@servidor.unam.mx
www: http://mecmat.iimatercu.unam.mx/~zenit

Modified: Sept 2004

*/

# define PI (4.0*atan(1.0))
# define TWOPI (2.0*PI)

# include <stdio.h>
# include <stdlib.h>
# include <math.h>
# include <malloc.h>
# include "ParticleState2D.h"
# include "WallState2D.h"
# include "InputRoutines2D.h"
# include "OutputRoutines2D.h"
# include "IntegrationRoutines2D.h"
# include "ForceRoutines2D.h"
# include "NearestNeighborContactDetection2D.h"
/* # include "NeighboringCellContactDetection2D.h" */
# include "InitialConditions2D.h"

struct ParticleState2D *particle;
struct WallState2D *wall;
struct Species *ParticleSpecies, *WallSpecies;
int Npart, Nwall, NumOfEnvData, NumContactProps,
    NumParticleSpecies, NumWallSpecies;
double deltat, *env_data, ***ContactProp, G, g[2], t;

/* ***** */

int main (int argc, char **argv) {
    void CalculateForces();
    int n, i, j, flag=0;
    double tmax, samps_per_unitytime,
        t_RecordParticleStates, deltat_RecordParticleStates;
    FILE *statefile;
    extern struct ParticleState2D *particle;
    extern struct Species *ParticleSpecies;
    extern struct WallState2D *wall;
    extern int Npart, Nwall, NumOfEnvData, NumParticleSpecies;
    extern double g[], t, *env_data;

    /* Make sure there are enough arguments on the
       command line. */
    if (argc < 2) {
        printf("Command line error. Format: DEsim2D_init
        <state file>\n");
        exit(1);
    }

    /* Read the input data. */
    ReadInputData("DEsim2D_init.in", 1);
    InstantiateNeighborList();
    ParticleSizeDistribution();

    /* Set variables. */
    t = env_data[0];
    tmax = env_data[1];
    samps_per_unitytime = env_data[2];
    deltat = env_data[3];
    G = env_data[4];
    g[0] = env_data[5];
    g[1] = env_data[6];
    t_RecordParticleStates = t;
    deltat_RecordParticleStates = 1.0/samps_per_unitytime;

    /* Initialize the particle positions. */
    RandomInitialParticleStates2(wall[2].x[0], wall[3].x[0],
        wall[3].x[1], wall[2].x[1],
        -1.0*sqrt(ParticleSpecies[0].dbar*G),
        1.0*sqrt(ParticleSpecies[0].dbar*G),
        -1.0*sqrt(ParticleSpecies[0].dbar*G),
        1.0*sqrt(ParticleSpecies[0].dbar*G));

    /* Open the output file. */
    if ((statefile = fopen(argv[1], "wb")) == NULL) {
        printf("Cannot open state output file: %s.\n", argv[1]);
        exit(1);
    }

    RecordHeaderData(statefile, 1);
    RecordParticleAndWallStates(statefile);
    RecordICConditions(1);

    DetermineNeighbors();
    do {
        CalculateForces();
        IntegrateParticleStates();
        if (flag == 0) {
            flag = GrowParticles();
        }
        IntegrateWallStates();
        if (t >= t_RecordParticleStates) {
            RecordParticleAndWallStates(statefile);
            //RecordICConditions(1);
            t_RecordParticleStates += deltat_RecordParticleStates;
        }
        UpdateNeighborListCheck();
        t += deltat;
    } while (t<tmax);
    RecordParticleAndWallStates(statefile);
    RecordICConditions(1);
    fclose(statefile);
    printf("Done.\n");
    return(0);
}

```

```
}  
  
/* ***** */  
  
void CalculateForces() {  
    int i;  
    extern int Npart;  
  
    InitializeParticleForces();  
    CalculateParticleGravityForces();  
    InitializeWallForces();  
    /* CalculateWallGravityForces(); */  
  
    /* Check for contacts between particles. */  
    for (i=0; i<Npart; i++) {  
        CheckForParticleParticleContacts(i);  
        CheckForParticleWallContacts(i);  
    }  
}
```

A.3. DEsim2D.c

Esta es la simulación principal. Este programa lee el archivo de entrada DEsim2Dinit.in para obtener los datos iniciales. Al igual que el programa de inicialización, este programa también genera dos archivos de salida, uno donde se guarda el estado de las partículas y paredes en cada punto de muestreo y el otro, llamado DEsim2D.final-state, donde se guarda periódicamente el estado de las partículas y paredes.

A continuación se presenta el código del programa DEsim2D.c.

```

/*
  DEsim2D.c

Copyright (C) 1999 Carl R. Wassgren, Jr.

-----
  This program is free software; you can redistribute
  it and/or modify it under the terms of the GNU Ge-
  neral Public License as published by the Free Soft-
  ware Foundation; either version 2 of the License, or
  (at your option) any later version.

  This program is distributed in the hope that it will
  be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the
  implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A
  PARTICULAR PURPOSE. See the
  GNU General Public License for more details.

  You should have received a copy of the GNU General
  Public License along with this program; if not, write
  to the Free Software Foundation, Inc., 59 Temple
  Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA.

WWW: http://www.gnu.org/copyleft/gpl.html

-----

Carl R. Wassgren, Jr.
School of Mechanical Engineering
Purdue University
West Lafayette, IN 47907-1288
e-mail: wassgren@ecn.purdue.edu
WWW: http://widget.ecn.purdue.edu/~wassgren

Last updated: 16 Apr 1999

Modified by: Roberto Zenit
Instituto de Investigaciones en Materiales
Universidad Nacional Autónoma de México
México
email: zenit@servidor.unam.mx
www: http://mecmat.iimatercu.unam.mx/~zenit

Modified: Sept 2004
*/

# define PI (4.0*atan(1.0))
# define TWOPI (2.0*PI)

# include <stdio.h>
# include <stdlib.h>
# include <math.h>
# include <malloc.h>
# include "ParticleState2D.h"
# include "WallState2D.h"
# include "InputRoutines2D.h"
# include "OutputRoutines2D.h"
# include "IntegrationRoutines2D.h"
# include "ForceRoutines2D.h"
# include "NearestNeighborContactDetection2D.h"
/* # include "NeighboringCellContactDetection2D.h" */

struct ParticleState2D *particle;
struct WallState2D *wall;
struct Species *ParticleSpecies, *WallSpecies;
int Npart, Nwall, NumOfEnvData, NumParticleStates,
    NumParticleSpecies, NumWallSpecies;
double deltat, ***ContactProp, G, g[2], t, *env_data;
double Ek, Ep, EE;

/* ***** */

int main (int argc, char **argv) {

void CalculateForces(void);
int n, i, j;
double tmax, samps_per_unittime,
    t_RecordParticleStates, deltat_RecordParticleStates;
FILE *statefile, *forcefile;
extern struct ParticleState2D *particle;
extern struct Species *ParticleSpecies;
extern struct WallState2D *wall;
extern int Npart, Nwall, NumOfEnvData, NumParticleStates;
extern double t, *env_data;
void CalculateEnergies();
void RecordEnergyData();

extern double Ek, Ep, EE;
FILE *energyfile;

/* Read the input data. */
ReadInputData("DEsim2D.in", 0);
InstantiateNeighborList();

/* Set variables. */
t = env_data[0];
tmax = env_data[1];
samps_per_unittime = env_data[2];
deltat = env_data[3];
G = env_data[4];
g[0] = env_data[5];
g[1] = env_data[6];
t_RecordParticleStates = t;
deltat_RecordParticleStates = 1.0/samps_per_unittime;

/* Make sure there are enough arguments on the command line. */
if (argc < 2) {
    printf("Command line error. Format: DEsim2D <state file>
    (<force file>)\n");
    exit(1);
}

/* Open state output file. */
if ((statefile = fopen(argv[1], "wb")) == NULL) {
    printf("Cannot open state ouput file: %s.\n", argv[1]);
    exit(1);
}

if ((energyfile = fopen(argv[2], "wb")) == NULL) {
    printf("Cannot open state ouput file: %s.\n", argv[1]);
    exit(1);
}

if ((forcefile = fopen(argv[3], "wb")) == NULL) {
    printf("Cannot open force ouput file: %s.\n", argv[1]);
    exit(1);
}

RecordHeaderData(statefile, 0);
RecordParticleAndWallStates(statefile);
RecordICConditions(0);

DetermineNeighbors();
do {
    CalculateForces();

    IntegrateParticleStates();
    IntegrateWallStates();
    if (t >= t_RecordParticleStates) {
        RecordParticleAndWallStates(statefile);
    }
    RecordWallForceData(forcefile);
    RecordICConditions(0);
    t_RecordParticleStates += deltat_RecordParticleStates;
} while (1);

CalculateEnergies();
RecordEnergyData(energyfile);
}

```

```

    }
    UpdateNeighborListCheck();
    t += deltat;
} while (t<tmax);
RecordParticleAndWallStates(statefile);
RecordICConditions(0);
fclose(statefile);
fclose(energyfile);
fclose(forcefile);

/* Record inter-particle forces if a force output
file is specified. */
/* if (argc > 2) {
    if ((forcefile = fopen(argv[2], "wb")) == NULL) {
        printf("Cannot open force output file: %s.\n", argv[2]);
        exit(1);
    }
    RecordForceData(forcefile);
    fclose(forcefile);
}*/
printf("Done.\n");
return(0);
}

/* ***** */

void CalculateForces() {
    int i;
    extern int Npart;

    InitializeParticleForces();
    CalculateParticleGravityForces();

    InitializeWallForces();
    /* CalculateWallGravityForces(); */
    /* Check for contacts between particles. */
    for (i=0; i<Npart; i++) {
        CheckForParticleParticleContacts(i);
        CheckForParticleWallContacts(i);
    }
}

/* ***** Calculate energies ***** */

void CalculateEnergies() {
    int i;

    Ek=0.0;
    Ep=0.0;
    EE=0.0;

    /* Energies */
    for (i=0; i<Npart; i++) {
        Ep+=particle[i].m*particle[i].x[1]*G;
        Ek+=particle[i].m/2.0*(particle[i].xdot[0]*particle[i].xdot[0]+
            particle[i].xdot[1]*particle[i].xdot[1]);
        EE+=particle[i].E_En;
    }

    printf("Energies:  Ep %.3f , Ek %.3f, EE %.3f \n", Ep, Ek, EE );
}

/* ***** */

void RecordEnergyData(FILE *energyfile) {

    printf("t=%.3f\t:Recording Energies.\n", t);
    fprintf(energyfile, "%.5e\t %.5e\t %.5e\t %.5e\t\n", t,Ep,Ek,EE);
    fflush(NULL);
}
}

```


Apéndice B

Programas de análisis en Matlab



B.1. Campos-final

Este programa lee el archivo de estado final, (DEsim2D.final-state), de las simulaciones DEsim2Dinit.c y DESim2D.c. De esta manera es posible tener los datos sobre el depósito final como del inicial de la avalancha, para así medir el centro de masa de ambos depósitos y calcular el coeficiente global de fricción. A continuación se presenta el código del programa Campos-final.m

```

clear all

arch='DEsim2D.final_state';

fid=fopen(arch,'r');
particle=struct('x', {}, 'y', {}, 'ang', {}, 'xdot',
               {}, 'ydot', {}, 'angdot', {});
wall=struct('x', {}, 'y', {}, 'ang', {}, 'xdot', {},
            'ydot', {}, 'angdot', {});

EnvData=fscanf(fid, '%i', 1);
EndData_a=fscanf(fid, '%f', EnvData);

PartSpecies=fscanf(fid, '%i', 1);
Npart=fscanf(fid, '%i', PartSpecies);
WallSpecies=fscanf(fid, '%i', 1);
Nwall=fscanf(fid, '%i', WallSpecies);

TotalNpart=sum(Npart);
TotalWall=sum(Nwall);
TotalSpecies=WallSpecies+PartSpecies;

NContactProperties=fscanf(fid, '%i', 1);

for i=1:TotalSpecies,
    for j=1:TotalSpecies,
        for k=1:NContactProperties,
            temp=fscanf(fid, '%f', 1);
        end
    end
end;

for i=1:PartSpecies,
    temp=fscanf(fid, '%f', 3);
end
posx_prom=0;
posy_prom=0;
for i=1:TotalNpart,
    radius(i)=fscanf(fid, '%f', 1);
    mass(i)=fscanf(fid, '%f', 1);
    inertia(i)=fscanf(fid, '%f', 1);
    particle(i).x=fscanf(fid, '%f', 1);
    posx_prom=posx_prom+particle(i).x;
    particle(i).y=fscanf(fid, '%f', 1);
    posy_prom=posy_prom+particle(i).y;
    particle(i).ang=fscanf(fid, '%f', 1);
    particle(i).xdot=fscanf(fid, '%f', 1);
    particle(i).ydot=fscanf(fid, '%f', 1);
    particle(i).angdot=fscanf(fid, '%f', 1);
    temp_s=fscanf(fid, '%s', 1);
    while temp_s=='',
        temp=fscanf(fid, '%f', 2);
        temp_s=fscanf(fid, '%s', 1);
    end
end

posx_prom=posx_prom/TotalNpart
posy_prom=posy_prom/TotalNpart
cenmasax=sum([particle.x].*mass)/sum(mass)
cenmasay=sum([particle.y].*mass)/sum(mass)
for i=1:TotalWall,
    Length(i)=fscanf(fid, '%f', 1);
    Wmass(i)=fscanf(fid, '%f', 1);
    Winertia(i)=fscanf(fid, '%f', 1);
    pb(i)=fscanf(fid, '%f', 1);
    wall(i).x=fscanf(fid, '%f', 1);
    wall(i).y=fscanf(fid, '%f', 1);
    wall(i).ang=fscanf(fid, '%f', 1);
    wall(i).xdot=fscanf(fid, '%f', 1);
    wall(i).ydot=fscanf(fid, '%f', 1);
    wall(i).angdot=fscanf(fid, '%f', 1);
end

end

%initial frame
figure(1)
clf;

for j=1:TotalNpart,
    if j<=Npart(2),
        color='r';
    else
        color='b';
    end
    k=ellipse(radius(j), radius(j), 0, particle(j).x,
              particle(j).y, color);
    % set(k, 'markerfacecolor', 'b')
    hold on
end

for k=1:TotalWall,
    %k=line
end

axis equal;
hold off;

```

B.2. Campos

Este programa lee el archivo de salida de las simulaciones DEsim2Dinit.c y DESim2D.c en el que se guarda el estado de las partículas y paredes según la frecuencia de muestreo. De esta manera este programa obtiene la información de la avalancha para diferentes tiempos, permitiendo conocer la evolución de la avalancha. A continuación se presenta el código del programa Campos.m.

```

function [particle,n_s,n_l,radius]=campos_modified(1);

%clear all;

arch='1.out';

Frametoplot=1;
NumberofFrames=Frametoplot;

fid=fopen(arch,'r');
particle=struct('x',[],'y',[],'ang',[],'xdot',
               [],'ydot',[],'angdot',{});
wall=struct('x',[],'y',[],'ang',[],'xdot',[],
            'ydot',[],'angdot',{});

EnvData=fscanf(fid,'%i',1);
EndData_a=fscanf(fid,'%f',EnvData);

PartSpecies=fscanf(fid,'%i',1);
Npart=fscanf(fid,'%i',PartSpecies);
WallSpecies=fscanf(fid,'%i',1);
Nwall=fscanf(fid,'%i',WallSpecies);

TotalNpart=sum(Npart);
TotalWall=sum(Nwall);
TotalSpecies=WallSpecies+PartSpecies;

NContactProperties=fscanf(fid,'%i',1);

for i=1:TotalSpecies,
    for j=1:TotalSpecies,
        for k=1:NContactProperties,
            temp=fscanf(fid,'%f',1);
        end
    end
end;

for i=1:PartSpecies,
    temp=fscanf(fid,'%f',3);
end

for i=1:TotalNpart,
    radius(i)=fscanf(fid,'%f',1);
    mass(i)=fscanf(fid,'%f',1);
    inertia(i)=fscanf(fid,'%f',1);
end

%small=find(radius(:)<2 & radius(:)>0.8);
small=find(radius(:)<2);

[ls,cs]=size(small);
n_s=ls;
large=find(radius(:)>2);
[ll,cl]=size(large);
n_l=ll;

for i=1:TotalWall,
    Length(i)=fscanf(fid,'%f',1);
    Wmass(i)=fscanf(fid,'%f',1);
    Winertia(i)=fscanf(fid,'%f',1);
    pb(i)=fscanf(fid,'%f',1);
end

%initial frame
%figure(1)
%clf;

mark=fscanf(fid,'%s',1);
time=fscanf(fid,'%f',1);

for j=1:TotalNpart,
    particle(j).xi=fscanf(fid,'%f',1);
    particle(j).yi=fscanf(fid,'%f',1);
    particle(j).angi=fscanf(fid,'%f',1);
    particle(j).xdoti=fscanf(fid,'%f',1);
    particle(j).ydoti=fscanf(fid,'%f',1);
    particle(j).angdoti=fscanf(fid,'%f',1);
end

for k=1:TotalWall,
    wall(j).x=fscanf(fid,'%f',1);
    wall(j).y=fscanf(fid,'%f',1);
    wall(j).ang=fscanf(fid,'%f',1);
    wall(j).xdot=fscanf(fid,'%f',1);
    wall(j).ydot=fscanf(fid,'%f',1);
    wall(j).angdot=fscanf(fid,'%f',1);
end

axis equal;
hold off;

%more frames;
for i=2:NumberofFrames,
    mark=fscanf(fid,'%s',1);
    time=fscanf(fid,'%f',1);

    for j=1:TotalNpart,
        particle(j).x=fscanf(fid,'%f',1);
        particle(j).y=fscanf(fid,'%f',1);
        particle(j).ang=fscanf(fid,'%f',1);
        particle(j).xdot=fscanf(fid,'%f',1);
        particle(j).ydot=fscanf(fid,'%f',1);
        particle(j).angdot=fscanf(fid,'%f',1);
    end

    for k=1:TotalWall,
        wall(j).x=fscanf(fid,'%f',1);
        wall(j).y=fscanf(fid,'%f',1);
        wall(j).ang=fscanf(fid,'%f',1);
        wall(j).xdot=fscanf(fid,'%f',1);
        wall(j).ydot=fscanf(fid,'%f',1);
        wall(j).angdot=fscanf(fid,'%f',1);
    end

    end

%size of domain,
maxx=0.0;
minx=0.0;
maxy=0.0;
miny=0.0;

for j=1:TotalNpart,
    if particle(j).x>maxx,
        maxx=round(particle(j).x);
    end
    if particle(j).x<minx,
        minx=round(particle(j).x);
    end
    if particle(j).y>maxy,
        maxy=round(particle(j).y);
    end
    if particle(j).y<miny,
        miny=round(particle(j).y);
    end
end

fclose(fid);

```

B.3. Capa

Este programa, determina la capa de partículas pequeñas que se encuentra en la parte inferior de la avalancha. A continuación se presenta el código del programa `capa.m`

```

[particle,n_s,n_l,r]=campos_final;
% results obtained by campos %

[l2,c2]=size(particle);

% Two matrix X and Y in which there are
% the coordinates of the particles
for j=1:c2
    X(j,1)=particle(j).x; % coordinates of the
                        % center of the particle %
    Y(j,1)=particle(j).y; % coordinates of the
                        % center of the particle %
end

% Matrix r with the radius of each particle
r=r';

% Coordinates of small beads (number n_s),
% the radius, the area and the
% total area of small beads
for i=1:n_s
    xs(i,:)=X(i,:);
    ys(i,:)=Y(i,:);
    rs(i,:)=r(i,:);
    As(i)=pi*rs(i)^2;
end
Atots=sum(As(:));

% Coordinates of large beads (number n_l),
% the radius, the area and the
% total area of large beads
for i=1:n_l
    xl(i,:)=X(i+n_s,:);
    yl(i,:)=Y(i+n_s,:);
    rl(i,:)=r(i+n_s,:);
    Al(i,:)=pi*rl(i)^2;
end
Atotl=sum(Al(:));

for i=1:n_l
    Xl(i)=xl(i,1)-rl(i);
    X_l(i)=xl(i,1)+rl(i);
end
for i=1:n_s
    Ys(i)=ys(i,1)+rs(i);
    Xs(i)=xs(i,1)-rs(i);
    X_s(i)=xs(i,1)+rs(i);
end
figure(1)
for i=1:n_l
    rectangle('Position', [xl(i)-rl(i) yl(i)-rl(i)
2*rl(i) 2*rl(i)], 'Curvature', [1 1], 'EdgeColor', 'b')
end
hold on
for i=1:n_s
    rectangle('Position', [xs(i)-rs(i) ys(i)-rs(i)
2*rs(i) 2*rs(i)], 'Curvature', [1 1], 'EdgeColor', 'r')
end

for x=1:7000
    xx(x)=x;
    a=find(Xl(:)<x & X_l(:)>x);
    [l,c]=size(a);
    if l==0
        y(x)=0;
    else
        if l==1
            aa=a;
        else
            b=yl(a,1);
            bb=min(b);
            g=find(b(:)==bb);
            aa=a(g);
        end

        y(x)=yl(aa,1)-(rl(aa)^2-(x-xl(aa,1))^2)^(1/2);
    end
    clear a;
    clear aa;
end

uplim=floor(max(xs));
h(:,1)=xx(1:uplim);
h(:,2)=y(1:uplim);
lb2=0;
% Determination des petites billes sous la ligne
for x=1:uplim
    as=find(Xs(:)<x & X_s(:)>x);
    [la,ca]=size(as);
    if la==0
        n(x)=0;
        lb1=0;
    else
        bs=find(ys(as)<y(x));
        [lb1,cb]=size(bs);
        if cb==0
            n(x)=0;
        else
            n(x)=lb1;
            figure(1)
            hold on

            for i=1:lb1
                x2(i+x)=xs(as(bs(i)));
                rectangle('Position', [xs(as(bs(i)))-
rs(as(bs(i))) ys(as(bs(i)))-rs(as(bs(i)))
2*rs(as(bs(i))) 2*rs(as(bs(i)))], 'Curvature',
[1 1], 'Edgecolor', 'g', 'FaceColor', 'y')
            end

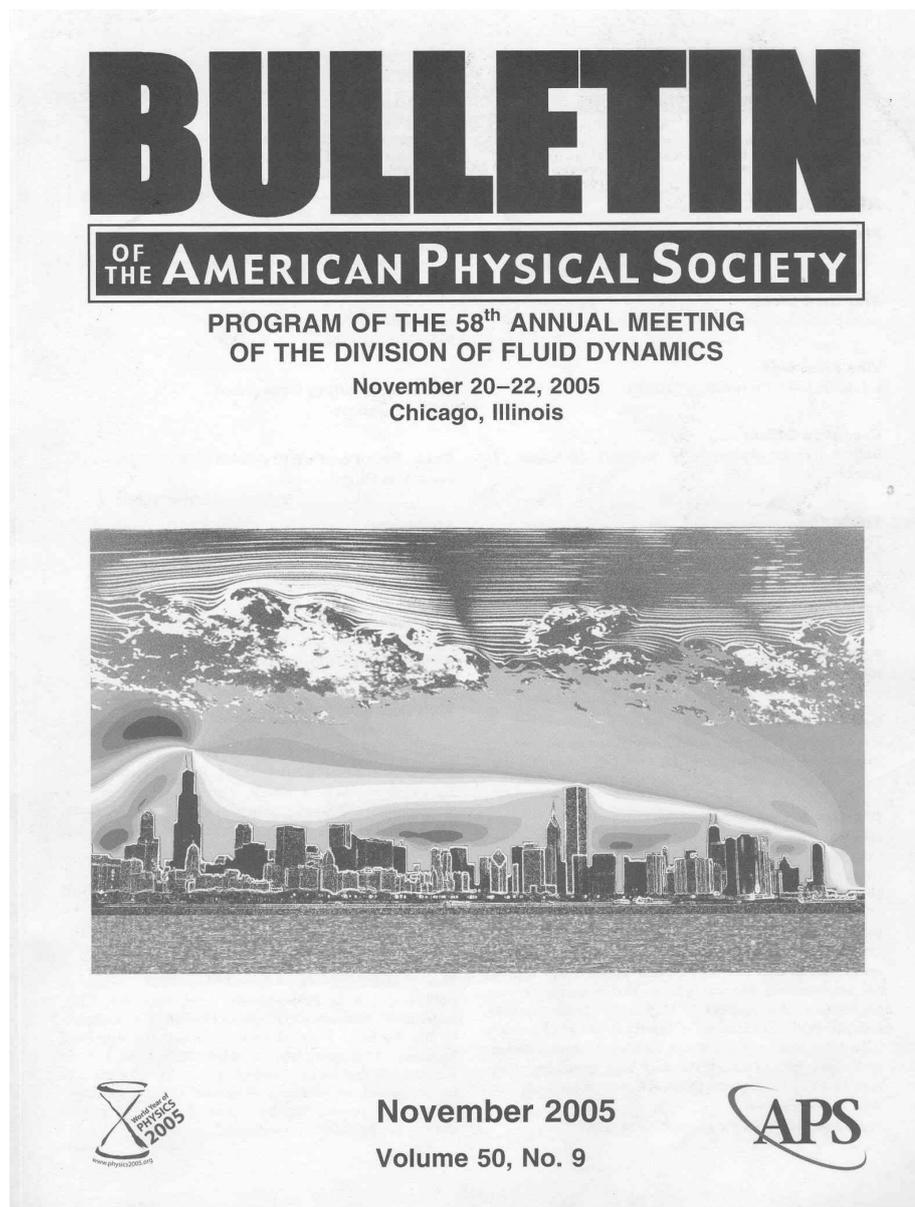
            end
            lb2=lb2+lb1;
            clear lb1;
            clear cb;
            clear la;
            clear ca;
        end
    end
end

```


Apéndice C

Artículos y Presentaciones

C.1. The 2005 APS Division of Fluid Dynamics 58th Annual Meeting



SESSION KJ: GRANULAR MEDIA: SURFACE AND TUMBLING FLOWS

Monday Afternoon, 21 November 2005

Williford C, Hilton Chicago at 16:10

Robert Behringer, Duke University, presiding

18:07

KJ 10 New insight on the understanding of long runout avalanches: geometric lubrication E. LINARES, C. GOUJON, R. ZENIT, *IIM-UNAM, Mexico* The unexpected long-runout landslides have been a controversial subject of discussion. In order to provide a new insight of this phenomena, we investigate the apparent reduction of friction resulting from the presence of small beads. Results obtained by means of a 2-D soft particle numerical simulation are presented. The numerical experiments consider an avalanche of two size disks, originally placed over an inclined plane. The friction coefficient for the particle-particle and wall-particle contacts is held fixed and is equal to 0.5. The granular mass is allowed to evolve with time, until it comes back to rest. The position of the center of mass is located, such that the runout length could be measured, L/H . Many simulations were performed keeping the area of the mass constant, varying only the percentage of small disks. The results show that the runout length increases with the percentage of small beads, reaching a maximum for approximately 25% of small disks. These results indicate that the apparent friction coefficient is reduced and affected by the percentage area of small particles. Additionally, the formation of a layer of small disks at the base of the avalanche was observed. This layer is identified as the source of "lubrication."

C.2. Increased mobility of bidisperse granular avalanches

Under consideration for publication in J. Fluid Mech.

Increased mobility of bidisperse granular avalanches

By **E. Linares, C. Goujon and R. Zenit**

Instituto de Investigaciones en Materiales
Universidad Nacional Autónoma de México
Apdo. Postal 70-360, México D.F. 04510, México

(Received)

The unexpected behavior of long-runout landslides has been a controversial subject of discussion in the geophysics community. In order to provide a new insight of this phenomena, we investigate the apparent reduction of friction resulting from the presence of second species of particles in the bulk of the granular material that forms the avalanche. Results obtained by means of a two dimensional soft particle discrete element numerical simulation are presented. The numerical experiments consider an avalanche of two size particles, originally placed over an inclined plane. The friction coefficient for the particle-particle and wall-particle contacts is held fixed and is equal to 0.5. The granular mass is allowed to evolve with time, until it comes back to rest. The position of the center of mass is located, such that the runout length could be measured, L_{cm}/H_{cm} . Many simulations were performed keeping the area of the avalanche constant, varying only the percentage of small particles. The results show that the runout length increases with the percentage of small particles, reaching a maximum for a given percentage of small particles. These results indicate that the apparent friction coefficient is affected by the percentage area of small particles. Additionally, the formation of a layer of small particles at the base of the avalanche was observed. This layer is identified as the source of “lubrication”.

Bibliografía

- [1] G. Pulos R. Zenit. Materiales granulares: otro estado de la materia. *Materiales avanzados*, 5:21–27, 2005.
- [2] J. Duran. *Sands, Powders and Grains* . Springer, 1999.
- [3] A. Heim. Bergsturz uns Menschenleben. *Fretz und Wasmth.* 218, 1932.
- [4] P.E. Kent. The transport mechanism in catastrophic rock falls. *J. Geol.*, 74:79–83, 1966.
- [5] C. Wolf A.D. Woodford M. Gary, R. McAffe. *Glossary of geology: Washington, D.C.* Am. Geol. Inst.
- [6] K. Terzaghi. Mechanism of lanslides, in Paige, Sydney. *ed., application of geology to engineering practice (Berkey volume)* *Geol. Soc. America*, 83:123, 1950.
- [7] K.J. Hsu. Catastrophic Debris Streams (Sturzstroms) Generated by Rock-falls. *Geol. Soc. Am. Bull.*, 86:129–140, 1975.
- [8] I.H.Ñoble R.P. Sharp. Mudflow of 1941 at Wrightwood, southern California. *Geol. soc. America Bull.*, 64:547–560, 1953.
- [9] K.E. Howard. Avalanche mode of motion: implications from lunar examples. *Science*, 180:1052–1055, 1973.
- [10] M.C. Malin A.S. McEwen. Dynamics of Mount St Helens 1980 pyroclastics flows, rockslide-avalanche, lahars and blast. *J. Volcanol Geotherm. Res.*, 37:205–231, 1989.
- [11] H.J. Melosh. Acoustic fluidization -a new geologic process. *J. Geophys. Res.*, **84**:7513–7520, 1979.

- [12] T.R.H. Davies. Spreading of rock avalanches by mechanical fluidization. *Rock Mech*, 15:9–24, 1982.
- [13] C.S. Campbell. Self lubrication for long runout landslides. *J. Geol.*, 97:653–665, 1989.
- [14] C.S. Campbell P.W. Cleary. Self lubrication for long runout landslides: examination by computer simulations. *J. Geophys. Res.*, 100:21911–21924, 1993.
- [15] M. Hopkins C.S. Campbell, P.W. Cleary. Large-scale landslide simulations: Global deformation, velocities and basal friction. *Journal of geophysical research*, 100:8267–8283, 1995.
- [16] S. Straub. Self-organization in the rapid flow of granular material: evidence for a major flow mechanics. *Geol. Rundsch.*, 85:85–91, 1996.
- [17] S. Straub. Predictability of long ruout landslide motion: implications from granular flow mechanics. *Geol. Rundsch.*, 86:415–425, 1997.
- [18] F. Legros. The mobility of long-runout landslides. *Engineering Geology*, 63:301–331, 2002.
- [19] R.M Iverson. The physics of debris flows. *Rev. Geophys.*, 35:245–296, 1997.
- [20] M.F. Sheridan G.R. Stoores. Giant debris avalanches from de Colima Volcanic Complex, Mexico: implications for long-runout landslides (less than 100km) and hazard assesment. *Geology*, 20:299–302, 1992.
- [21] A. Arce L. Capra V.H. Garduno J.M. Espindola A. Garcia-Palomo, J.L. Macias. Geology of Nevado de Toluca Volacano and surrounding areas, central Mexico . *Geological Society of America Map series*, MCH098:1–48, 2002.
- [22] J.G. Moore J.B. Wilson C. E. Gutmacher P.W. Lipman, W.R.Ñormark. The giant submarine Alike debris slide, Mauna Loa, Hawaii. *Geophys*, 93:4279–4299, 1988.
- [23] J. Locat M.A. Hampton, H. J. Lee. A Submarine landslides. *Geophys*, 34:33–59, 1996.

- [24] A.S. McEwen. Mobility of large rock avalanches: evidence from Valles Marineris. *Mars. Geology*, 17:1111–1114, 1989.
- [25] L. Siebert. Large volcanic debris avalanches: characteristics of source areas, deposits, and associated eruptions. *J. Volcanol Geotherm*, 22:163–197, 1984.
- [26] J.L. Anderson R. Elan R. Scandone R.W. Hazlett, D. Buesch. Geology, failure conditions, and implications of seismogenic avalanches of the 1944 eruption at Vesuvius, Italy. *J. Volcanol Geotherm*, 47:249–264, 1991.
- [27] S. Self J.N. Hayashi. A comparison of pyroclastic flow and landslide mobility. *J. Geophys.*, 97:9063–9071, 1992.
- [28] M.F. Sheridan C. Siebe, J.C. Komorowski. Morphology and emplacement of unusual debris-avalanche deposit at Jocotitlán volcano, Central Mexico. *Bull. Volcanol*, 54:573–589, 1992.
- [29] J.C.Thouret C.A. Borrero T.C. Pierson, R.J. Janda. Perturbation and melting of snow and ice by the 13 November 1985 eruption of Nevado del Ruiz, Colombia, and consequent mobilisation, flow and deposition of lahars. *Volcanol Geotherm*, 41:17–66, 1990.
- [30] J.W. Vallance R.M Iverson, S.P. Schilling. Objective delineation of lahar-inundation hazard zones. *Geol. Soc. Am. Bull*, 110:972–984, 1998.
- [31] R.J. Janda P.A. Mothes, M.L. Hall. The enormous Chillos Valley Lahar: an ash-flow-generated debris flow from Cotopaxi Volcano, Ecuador. *Bull. Volcanol*, 59:233–244, 1998.
- [32] R.A. Bagnold. Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear. *R. Soc. London*, 225:49–63, 1954.
- [33] R.L. Shreve. The Blackhawk landslide. *Geol. Soc. Am*, 108:1–47, 1968.
- [34] R.L. Shreve. Leakage and fluidization in air-layer lubricated avalanches. *Geol. Soc. Am. Bull*, 79:635–658, 1968.
- [35] R.K. Fahnestock. Littel Tahoma peak rockfalls and avalanches. *Mount Rainer, Wahington, USA. In: Voight, B. (Ed.), Rockslides and Avalanches. 1. Natural phenomena Elsevier, Amsterdam*, pages 181–196, 1978.

- [36] C.J.N. Wilson. The role of fluidisation in the emplacement of pyroclastic flows: 2. Experimental results and their interpretation. *J. Volcanol. Geotherm.*, 20:55–84, 1984.
- [37] H. Glicken P.M. Douglass B. Voight, R.J. Janda. Nature and mechanisms of the Mount St Helens rockslide-avalanche of May 1980. *Geotechnique*, 33:243–273, 1983.
- [38] K. Hutter S.B. Savage. The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *Fluid Mechanics*, 199:177–215, 1989.
- [39] N.R. Morgenstern O. Hungr. Experiments on the flow behaviour of granular materials at high velocity in an open channel. *Geotechnique*, 34:405–413, 1984.
- [40] N.R. Morgenstern O. Hungr. High-velocity ring shear test on sand. *Geotechnique*, 34:415–421, 1984.
- [41] D.L. Inman D.M. Hanes. Experimental evaluation of a dynamic yield criterion for granular fluid flows. *Geophys*, 90:3670–3674, 1985.
- [42] S.G. Evans O. Hungr. A dynamical model for landslides with changing mass. *Eng. Geol. Environ.*, 41:719–722, 1997.
- [43] T.G. Drake. Structural features in granular flows. *J. Geophys. Res.*, 95:8681–8696, 1990.
- [44] W.Z. Savage S.H. Cannon. A mass-change model for the estimation of debris-flows runout. *J. Geol.*, 96:221–227, 1988.
- [45] D.M. Cruden W. Van Gassen. Momentum transfer and the friction in the debris of rock landslides. *Can. Geotech. J.*, 26:623–628, 1989.
- [46] J. Sousa B. Voight. Lessons from Ontake-san: a comparative analyses of debris avalanche dynamics. *Eng. Geol.*, 38:261–297, 1994.
- [47] H. Erlichson. A mass-change model for the estimation of debris-flow runout, a second discussion: conditions for the application of the rocket equation. *Geol.*, 99:633–634, 1991.
- [48] C. Goujon. *Tesis doctoral*. PhD thesis, University of Provence, Francia, 2004.

- [49] F. Prinz R.H.Swendsen A. Rosato, K.J. Strandburg. Why the brazil nuts are on top: size segregation of particulate matter by shaking. *Phys. Rev. Lett.*, 58:1038–1040, 1987.
- [50] P. Meakin R. Jullien and A. Pavlovitch. Three dimensional model for particle size segregation by shaking. *Phys. Rev. Lett.*, 69:640–643, 1992.
- [51] H.M. Jaeger J.B. Knight and S.R. Nagel. Vibration induced size separation in granular media, the convection connection. *Phys. Rev. Lett.*, 70:3728–3731, 1993.
- [52] O. Pouliquen. *Cours ecoulements*. Millieux, 2001.
- [53] C.K.K. Lun S.B. Savage. Particle size segregation in inclined chute flow of dry cohesionless granular solids. *J. Fluid. Mech.*, 189:311–335, 1988.
- [54] N. Thomas G. Félix. Evidence of two effects in the size segregation process in a dry granular media. *Phys. Rev. E*, 70:16, 2004.
- [55] S.B. Savage. *Theoretical and applied mechanics*. Elsevier, Amsterdam.
- [56] J. Delour O. Pouliquen and S.B. Savage. Fingering in granular flows. *Nature*, 386:816–818, 1997.
- [57] J.W. Vallance O. Pouliquen. Segregation induced instabilities of granular fronts. *Chaos*, 9:621–62, 1999.
- [58] N. Thomas G. Félix. Relation between dry granular flow regimes and morphology of deposits: formation of levees in pyroclastic deposits. *Earth and Planetary Science Letters*, 221:197–213, 2004.
- [59] F. Cantelaube and D. Bideau. *Europhys. Lett.*, 30:133, 1995.
- [60] N. Thomas. Reverse and intermediate segregation of large beads in dry granular media. *Phys. Rev. E*, 62:961–974, 2000.
- [61] A. Caprihan K.M. Hill and J. Kakalios. Axial segregation of granular media rotated in a drum mixer: pattern evolution. *Phys. Rev. E*, 56:4386–4393, 1997.
- [62] N. Thomas. Reverse and intermediate segregation of large beads in dry granular media. *Phys. Rev. E*, 62:961–974, 2000.

- [63] N. Taberlet. *Tesis doctoral*. PhD thesis, University of Rennes 1, Francia, 2005.
- [64] M.L. Hunt. Discrete element simulations for granular material flows: effective thermal conductivity and self diffusivity. *Heat Mass Transfer*, 40:3059–3068, 1997.
- [65] R.L. Braun O.R. Wallton. Stress calculations for assemblies of inelastic spheres in uniform shear. *Acta Mechanica*, 63:73–86, 1986.
- [66] C.R. Wassgren. *Vibration of Granular Materials*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1997.
- [67] C.E. Brennen C.S. Campbell. Computer simulation of granular shear flows. *Fluid Mechanics*, 151:167–188, 1985.
- [68] E.R. Johnston F.P. Beer. *Vector Mechanics for Engineers: Statics and Dynamics*. McGraw-Hill Companies, 1997.
- [69] O.D.L. Strack P.A. Cundall. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29:101–113, 1992.
- [70] K.L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1987.
- [71] H. Deresiewicz. A note on Hertz impact. *Acta Mechanica*, 6:110, 1968.
- [72] D. Sachs E.A. Variano F.H. Stillinger R. Connelly S. Torquato P.M. Chaikin A. Donev, I. Cisse. Improving the Density of Jammed Disordered Packings Using Ellipsoids. *Science*, 303:990–993, 2004.
- [73] H.E. Huppert W.B. Dade. Long-runout rockfalls. *Geology*, 26:803–806, 1998.