UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL TEOREMA DE SOBCZYK Y SU INVERSO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

LEÓN FELIPE VILLALOBOS SÁNCHEZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Tutor: M. en C. Ángel Manuel Carrillo Hoyo

2006

Hoja de Datos de Jurado

1. Datos de alumno Villalobos Sánchez León Felipe 55498018 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 097106027
2. Datos del tutor M en C Ángel Manuel Carrillo Hoyo
3. Datos del sinodal 1 Dr Hugo Arizmendi Peimbert
4. Datos del sinodal 2 Dr Carlos Hernández Garciadiego
5. Datos del sinodal 3 Dr Armando García Martínez
6. Datos del sinodal 4 Dr Ricardo Gómez Aíza
7. Datos del trabajo escrito El teorema de Sobczyk y su inverso 76 p 2006

Contenido

Prólogo

El espacio ℓ^∞ está complementado en todo espacio de Banach X que lo contiene. Esta propiedad equivale a decir que ℓ^∞ es un objeto inyectivo en la categoría de espacios de Banach. Por algún tiempo se conjeturó que cualquier espacio inyectivo en esa categoría era isomorfo a $\ell^\infty(\Gamma)$, para algún conjunto Γ. En 1970, H. Rosenthal publicó el artículo *On injective spaces and the spaces* $L_\infty(\mu)$ *for finite measures* μ, en el que probó que dicha conjetura es falsa.

En 1941, A. Sobczyk probó que para todo espacio de Banach separable X, que contenga a c_0, existe una proyección de X sobre Y, de norma a lo más 2; más aún, ésta es la cota óptima para dicha norma. Es decir, c_0 es un objeto inyectivo en la categoría de los espacios de Banach separables. Sin embargo, no lo es en la de los espacios de Banach, pues c_0 no está complementado en ℓ^∞. Todos estos resultados son probados en los Capítulos 2 y 3 de este trabajo. Ahí se presenta la llamada *prueba corta del teorema de Sobczyk*, la cual se debe a W. A. Veech y que fue publicada en 1971. En ella no se usan herramientas poderosas o técnicas muy complejas del análisis funcional sino resultados clásicos de la teoría de los espacios de Banach, los cuales se introducen en el Capítulo 1, que también incluye otro material básico que sirve para el desarrollo de toda la tesis.

Al abstraerse esa propiedad de c_0, se llegó a la definición de los llamados espacios separablemente inyectivos: un espacio de Banach X, separable y de dimensión infinita, es llamado separablemente inyectivo si para todo espacio de Banach separable Y que contiene a X (una copia isométrica o isomorfa $Y(X)$) de X, existe una proyección continua de X sobre X (sobre $Y(X)$). Se prueba que X es separablemente inyectivo si y sólo si X tiene la llamada propiedad de la extensión separable; es decir, todo operador lineal y continuo de X en un espacio normado Z puede extenderse a cualquier espacio de Banach separable que contiene a X.

Durante mucho tiempo se trató de dar un ejemplo de un espacio separablemente inyectivo que no fuera isomorfo a c_0 y surgió la pregunta ¿es válido el inverso del Teorema de Sobczyk: todo espacio separablemente inyectivo es isomorfo a c_0? o lo que es lo mismo: ¿si un espacio de Banach X, separable y de dimensión infinita, tiene la propiedad de la extensión separable, entonces X es isomorfo a c_0?

Hubo diversos intentos para probar esta pregunta por diferentes caminos, pero fue hasta 1977 que M. Zippin, en su artículo *The separable extension problem,* demuestra la validez del inverso del Teorema de Sobczyk. Su prueba, a diferencia de la del Teorema de Sobczyk, utiliza resultados profundos y complejos de la teoría de los espacios de Banach y es en sí misma una demostración difícil y en su parte técnica la redacción es complicada y en ocasiones confusa. La demostración se hace de modo indirecto; primero se muestra que si X es un espacio de Banach separable y de dimensión infinita para el cual existe un operador lineal, continuo y suprayectivo de c_0 sobre X, entonces X es isomorfo a c_0 y después se hace ver que tal es el caso cuando X es separablemente inyectivo; para esto se usa el que aquí hemos llamado *Teorema Principal*, cuya demostración constituye la parte final de la tesis y que está dividida en cuatro partes que son otras tantas subsecciones del Capítulo 3; entre éstas se intercala una más en la se introducen los conjuntos de Szlenk. Además, se usa el llamado *Lema de aproximación* que es una herramienta fundamental para la demostración y que está hecho ex profeso para ésta.

El propósito de la tesis es hacer una exposición que sea lo más autocontenida posible y resulte menos intrincada que la que aparece en el trabajo de Zippin [15] que es la base del nuestro. Se demuestran resultados que son mencionados como parte del folklore alrededor del tema y que por lo mismo no se encuentran en al literatura (Proposiciones 3.2.3 y 3.2.11 y Teorema 3.2.5). Se usan una gran cantidad de resultados; de ellos, la mayoría son probados y otros tan sólo son enunciados, en ocasiones adaptándolos, debido a que sus demostraciones son extensas o pertenecen más a otras ramas matemáticas.

Capítulo 1

Preliminares

En todo lo que sigue X es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sea $A \subset X$, entonces $\langle A \rangle$ denota al subespacio lineal generado por A y si X es un espacio vectorial topológico entonces $[A]$ denota a la cerradura de $\langle A \rangle$; si A es una sucesión $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ escribiremos $\langle x_i \rangle_{i=1}^{\infty}$ y $[x_i]_{i=1}^{\infty}$, respectivamente.

1.1 Espacio vectorial topológico. Seminorma y funcional de Minkowski

Definición 1.1.1 *Sea τ una topología en X. Decimos que (X, τ), o simplemente X, es un espacio vectorial topológico si las operaciones de suma y multiplicación por un escalar son continuas respecto a las topologías producto en $X \times X$ y $\mathbb{F} \times X$, respectivamente.*

Definición 1.1.2 *Decimos que una funcional $\rho : X \to \mathbb{R}$ es una seminorma en X si cumple las siguientes propiedades.*
a) $\rho(x) \geq 0$ para todo $x \in X$
b) $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$ para todo $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{F}$
c) $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, de b) se sigue que $\rho(0) = 0$.
Si además, $\rho(x) = 0$ implica $x = 0$, entonces ρ es llamada una norma en X.

Definición 1.1.3 *Sea $A \subset X$.*

- *A es absorbente si para cada $x \in X$ existe $\epsilon > 0$ tal que $|\lambda| > \epsilon$ implica $x \in \lambda A$.*
- *A es simétrico si $-x \in A$ siempre que $x \in A$.*
- *A es balanceado si $\lambda A \subset A$ para toda $\lambda \in K$ tal que $|\lambda| \leq 1$.*
- *A es convexo si $\alpha x + \beta y \in A$ para $x, y \in A$ y $\alpha, \beta \in [0, 1]$, con $\alpha + \beta = 1$.*

Observamos que todo conjunto absorbente contiene a 0. Si A es balanceado, entonces A es absorbente si y sólo si para cada $x \in X$ existe $\epsilon > 0$ tal que $x \in \epsilon A$.

Proposición 1.1.4 *Si cada miembro de una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X es balanceado (convexo), entonces $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$ es balanceado (convexo). Si cada miembro de una familia finita $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X es absorbente, entonces $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$ es absorbente*

Proposición 1.1.5 *Si $\rho_i : X \to \mathbb{R}$ es una seminorma para cada $1 \leq i \leq n$, entonces $V = \{x \in X : \rho_i (x) < \epsilon_i \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$ es un conjunto absorbente, balanceado y convexo.*

Definición 1.1.6 *La envolvente convexa $co(A)$ de $A \subset X$ es el mínimo subconjunto convexo de X que contiene a A. Es decir, $co(A)$ es un convexo de X que contiene a A y para todo convexo $C \subset X$ tal que $A \subset C$ se tiene que $co(A) \subset C$.*

Es fácil probar que

$$co(A) = \left\{ \begin{array}{c} x \in X : x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n, \text{ con } n \geq 1, a_i \in A, \lambda_i \in [0,1] \\ \text{para } 1 \leq i \leq n \text{ y } \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1 \end{array} \right\}$$

Definición 1.1.7 *Sea $A \subset X$ un subconjunto absorbente. Definimos la funcional $\rho_A : X \to \mathbb{R}$ como $\rho_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$. A esta funcional se lo conoce como la funcional de Minkowski asociada a A.*

Proposición 1.1.8 *Sea $A \subset X$ un subconjunto absorbente y ρ_A la funcional de Minkowski asociada a A. Entonces*

a) $\rho_A(x) \geq 0$ para todo $x \in X$ y $\rho_A(0) = 0$.

b) $\rho_A(\alpha x) = \alpha \rho_A(x)$ si $\alpha \geq 0$ y $x \in X$ (ρ_A es homogénea positiva).

c) $A \subset \{x \in X : \rho_A(x) \leq 1\}$.

d) Si A es simétrico, en particular si es balanceado, entonces $\rho_A(\alpha x) = |\alpha| \rho_A(x)$ si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in X$.

e) Si A es balanceado, entonces $\rho_A(\alpha x) = |\alpha| \rho_A(x)$ si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $x \in X$. (ρ_A es absolutamente homogénea)

f) Si A es convexo, entonces $\rho_A(x+y) \leq \rho_A(x) + \rho_A(y)$ si $x, y \in X$ (ρ_A es semiaditiva)

g) Si A es balanceado o convexo, entonces $\{x \in X : \rho_A(x) < 1\} \subset A$.

h) Si X es un espacio vectorial topológico y A es además abierto en X, entonces $A \subset \{x \in X : \rho_A(x) < 1\}$.

i) Si X es un espacio vectorial topológico, A es abierto y además es balanceado o convexo, entonces $\{x \in X : \rho_A(x) < 1\} = A$.

Demostración.

a) $\rho_A(x) \geq 0$ porque es el ínfimo de un conjunto no vacío de escalares mayores o iguales a cero. Como $0 \in A$, por ser A absorbente, se sigue que $0 \in \lambda A$ para todo $\lambda > 0$.

b) Si $\alpha = 0$, entonces el resultado se sigue inmediatamente. Sea $\alpha > 0$, entonces:

$$\begin{aligned}\rho_A(\alpha x) &= \inf\{\lambda > 0 : \alpha x \in \lambda A\} = \inf\left\{\alpha\lambda' > 0 : x \in \lambda' A\right\} \\ &= \alpha \inf\left\{\lambda' > 0 : x \in \lambda' A\right\} = \alpha \rho_A(x).\end{aligned}$$

c) Se sigue de la definición.

d)Sea $\alpha = -1$ entonces $\rho_A(-x) = \inf\{\lambda > 0 : -x \in \lambda A\}$, como A es simétrico se tiene que si $-x \in \lambda A$, entonces $x \in -\lambda A \subset \lambda A$. Así $\{\lambda > 0 : -x \in \lambda A\} \subset \{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$ y por tanto, $\rho_A(x) \leq \rho_A(-x)$. De aquí se sigue que $\rho_A(-x) \leq \rho_A(-(-x)) = \rho_A(x)$. Por tanto $\rho_A(-x) = \rho_A(x)$.

Sea $\alpha < 0$ como $\alpha = -|\alpha|$, entonces por lo inmediato anterior y b) tenemos: $\rho_A(\alpha x) = \rho_A(-|\alpha| x) = \rho_A(|\alpha| x) = |\alpha| \rho_A(x)$.

e) Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, entonces este inciso se reduce al anterior. Supongamos que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ y sea $\alpha = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces $\rho_A\left(e^{i\theta}x\right) = \inf\left\{\lambda > 0 : e^{i\theta}x \in \lambda A\right\}$. Como A es balanceado se tiene que si $e^{i\theta}x \in \lambda A$, entonces $x \in \lambda\left(e^{-i\theta}A\right) \subset \lambda A$. Así $\left\{\lambda > 0 : e^{i\theta}x \in \lambda A\right\} \subset \{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$ y por tanto $\rho_A(x) \leq \rho_A\left(e^{i\theta}x\right)$. De aquí se sigue que $\rho_A\left(e^{i\theta}x\right) \leq \rho_A\left(e^{-i\theta}e^{i\theta}x\right) = \rho_A(x)$. Por tanto, $\rho_A\left(e^{i\theta}x\right) = \rho_A(x)$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, como $\alpha = e^{i\theta}|\alpha|$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$, entonces por lo inmediato anterior y b) tenemos: $\rho_A(\alpha x) = \rho_A\left(e^{i\theta}|\alpha| x\right) = \rho_A(|\alpha| x) = |\alpha| \rho_A(x)$.

f) Sean $x, y \in X$ y $\epsilon > 0$. Existen $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tales que $\rho_A(x) \leq \lambda_1 < \rho_A(x) + \epsilon$ y $\rho_A(y) \leq \lambda_2 < \rho_A(y) + \epsilon$. Entonces $\dfrac{x}{\lambda_1}x \in A$ y $\dfrac{y}{\lambda_2}y \in A$. Si $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ entonces tenemos que $\dfrac{x+y}{\lambda} = \frac{\lambda_1}{\lambda}\dfrac{x}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\dfrac{y}{\lambda_2 \lambda}$ y $\dfrac{\lambda_1}{\lambda} + \dfrac{\lambda_2}{\lambda} = 1$ y como A es convexo tenemos que $\dfrac{x+y}{\lambda} \in A$ es decir $x + y \in \lambda A$ y así $\rho_A(x+y) \leq \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 < \rho_A(x) + \rho_A(y) + 2\epsilon$; así, $\rho_A(x+y) \leq \rho_A(x) + \rho_A(y)$.

g) Sea $x \in \{x \in X : \rho_A(x) < 1\}$ y tomemos $0 < \lambda < 1$ y $a \in A$ tales que $x = \lambda a$. Si A es balanceado $x = \lambda a \in A$ por definición de conjunto balanceado y si es convexo entonces $x = (1-\lambda)0 + \lambda a \in A$.

h) Supongamos que X es un espacio vectorial topológico y que A es además abierto. Sea $x \in A$, por la continuidad del producto por un escalar tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $tx \in A$ si $t \in (1-\delta, 1+\delta)$; en particular, $x \in \frac{1}{\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}A$ y por tanto, $\rho_A(x) \leq \frac{1}{\left(1+\frac{\delta}{2}\right)} < 1$.

i) Se sigue de los dos incisos anteriores. ■

Corolario 1.1.9 *Si $A \subset X$ es un subconjunto absorbente, balanceado y convexo, entonces su funcional de Minkowski es una seminorma en X.*

Corolario 1.1.10 *Si X es un espacio vectorial topológico y $\rho : X \to \mathbb{F}$ es un seminorma continua, entonces $A = \{x \in X : \rho(x) < 1\}$ es un subconjunto absorbente, balanceado, convexo y abierto de X tal que $\rho = \rho_A$*

Demostración.

Las primeras tres afirmaciones se siguen de la Proposición 1.1.5. A es abierto en X porque ρ es continua y por i) de la proposición anterior tenemos que

$$\{x \in X : \rho(x) < 1\} = \{x \in X : \rho_A(x) < 1\}.$$

Supongamos que $x \in X$ es tal que $\rho(x) \neq \rho_A(x)$. Si $\rho(x) > \rho_A(x)$, entonces $\rho(x) > 0$ y $1 > \rho_A\left(\frac{x}{\rho(x)}\right)$ y $\rho\left(\frac{x}{\rho(x)}\right) = 1$ lo que contradice la igualdad de conjuntos de arriba. Del mismo modo se llega a una contradicción si $\rho_A(x) > \rho(x)$. Por tanto, $\rho(x) = \rho_A(x)$ para todo $x \in X$. ■

1.2 Espacio normado y de Banach. Normas equivalentes

Definición 1.2.1 *Sea $\mathcal{P}$ es una familia de seminormas en el espacio X. Definimos la topología vectorial τ generada en X por $\mathcal{P}$ de la siguiente manera: $U \in \tau$ si para cada $x \in U$ existe una subfamilia finita $\{\rho_i : X \to \mathbb{R};\ 1 \leq i \leq n\}$ de $\mathcal{P}$ y números reales positivos ϵ_i, con $1 \leq i \leq n$, talesque $V = \{y \in X : \rho_i(y - x) < \epsilon_i$ para $1 \leq i \leq n\} \subset U$.*

En el caso de que $\mathcal{P}$ está constituida por una sola norma $\|\cdot\|$ entonces τ es la topología generada por la distancia $d(x, y) = \|y - x\|$ y decimos que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado. Si $(X, \|\cdot\|)$ es completo, entonces $(X, \|\cdot\|)$, o simplemente X, es llamado un espacio de Banach.

Teorema 1.2.2 *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para cualquier transformación lineal $T : X \to Y$.*

a) T es continua

b) Existe $M > 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$, para todo $x \in X$

c) T es acotada en una bola con centro en 0.

Si T satisface cualquiera de estas propiedades, entonces $\sup\limits_{\|x\|_X = 1} \|T(x)\|_Y$ es la mínima constante M que satisface b) y es llamada la norma de T.

Proposición 1.2.3 *Si $(X, \|\|)$ es un espacio vectorial normado y D es un conjunto tal que existe una función biyectiva f de D en X entonces podemos darle a D una estructura de espacio vectorial normado con las siguientes definiciones para $d_1, d_2 \in D$ y $\alpha \in \mathbb{F}$:*

- $d_1 + d_2 = d$ *si* $f(d_1) + f(d_2) = f(d)$,
- $\alpha d = d_1$ *si* $f(\alpha d_1) = \alpha f(d_1)$,
- $\|d\|_D = \|f(d)\|$

Obsérvese que con estas definiciones f resulta ser un isomorfismo isométrico lineal entre D y X; de donde, $(D, \| \quad \|_D)$ es un espacio separable de Banach si X lo es.

Definición 1.2.4 *Decimos que dos normas $\|\|_1$ y $\|\|_2$ son equivalentes en X, y en tal caso escribimos $\|\|_1 \sim \|\|_2$, si existen dos constantes positivas m y M tales que $m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$ para todo $x \in X$.*

La siguiente proposición nos dice que dados dos espacios normados isomorfos es posible renormar uno de ellos con una norma equivalente a la original, de manera que con la nueva norma sea isométrico al otro espacio.

Proposición 1.2.5 *Si $T : (X, \|\|_X) \to (Z, \|\|_Z)$ es un isomorfismo lineal entre dos espacios normados, entonces la funcional $\|\|_T : Z \to \mathbb{R}$ dada por $\|z\|_T = \left\|T^{-1}(z)\right\|_X$ para todo $z \in Z$ es una norma en Z que es equivalente a $\|\|_Z$. Además, $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Z, \|\cdot\|_T)$ es una isometría y*

$$\|T\|^{-1}\|z\| \leq \|z\|_T \leq \left\|T^{-1}\right\|\|z\|$$

para todo $z \in Z$.

A $\|\cdot\|_T$ la llamaremos la norma inducida por el isomorfismo T.

Demostración.

i) $\|z\|_T = \left\|T^{-1}(z)\right\|_X \geq 0$ porque $\|\|_X$ es norma. Si $\|z\|_T = 0$, entonces $\left\|T^{-1}(z)\right\|_X = 0$ y por tanto $T^{-1}(z) = 0$. Como T^{-1} es inyectiva por ser un isomorfismo tenemos que $z = 0$. Si $z = 0$ entonces $\|0\|_T = \left\|T^{-1}(0)\right\|_X = \|0\|_X = 0$.

ii) Sea α un escalar, entonces $\|\alpha y\|_T = \left\|T^{-1}(\alpha y)\right\|_X = \left\|\alpha T^{-1}(z)\right\|_X = \alpha\left\|T^{-1}(z)\right\|_X = \alpha\|z\|_T$.

iii) Sean $z_1, z_2 \in Z$ tenemos que $\|z_1 + z_2\|_T = \left\|T^{-1}(z_1 + z_2)\right\|_X \leq \|z_1\|_T + \|z_1\|_T$. Por cumplirse i)-iii) tenemos que $\|\cdot\|_T$ es una norma en Z. Como $\|T(x)\|_T = \left\|T^{-1}T(x)\right\|_X = \|x\|_X$ para todo $x \in X$, se tiene que $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Z, \|\cdot\|_T)$ es una isometría.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\|z\|_T &= \left\|T^{-1}(z)\right\|_X \leq \left\|T^{-1}\right\|\|z\|_Z \text{ y} \\
\|z\|_Z &= \left\|T\left(T^{-1}(z)\right)\right\|_Z \leq \|T\|\left\|T^{-1}(z)\right\|_X = \|T\|\|z\|_T
\end{aligned}$$

Así, $\|T\|^{-1}\|z\|_Z \leq \|z\|_T \leq \left\|T^{-1}\right\|\|z\|_Z$ para todo $z \in Z$ y entonces , $\|\|_T \sim \|\|_Z$. ■

Teorema 1.2.6 *Sea $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio normado y X un subespacio de Y. Supongamos que $\|\cdot\|_1$ es una norma en X que es equivalente a $\|\cdot\|$ restringida a X. Entonces $\|\cdot\|_1$ puede extenderse a Y de manera que la extensión es equivalente a $\|\cdot\|$. Más aún, si $m, M > 0$ son tales que $m\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M\ \|x\|$ para todo $x \in X$, entonces la extensión cumple las mismas desigualdades para todo $y \in Y$.*

Demostración.

Sean $m, M > 0$ tales que $m\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M\ \|x\|$ para todo $x \in X$. Esto implica, a menos que X sea el espacio nulo,. que $\frac{M}{m} \geq 1$.

Sea $B = \{y \in Y : \|y\| \leq 1\}$ y $V = \{x \in X : \|x\|_1 \leq M\}$. Observamos que si $x \in B \cap X$, entonces $\|x\|_1 \leq M\|x\| \leq M$ y por tanto, $x \in V$; es decir, $B \cap X \subset V$.

Definimos $A = co(B \cup V)$. Es fácil ver que este conjunto es absorbente, balanceado y convexo. Afirmamos que la funcional de Minkowski ρ_A de A es una norma en Y .

Por el Corolario 1.1.9 ρ_A es una seminorma, así que basta probar: $\rho_A(y) = 0$ implica $y = 0$.

Supongamos que $\rho_A(y) = 0$ para $y \in Y$. Para cada $\epsilon > 0$ existe $0 < \lambda < \epsilon$ tal que $y \in \lambda A$ es decir $y = \lambda a$ para alguna $a \in A$. Entonces $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ donde $\alpha_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ y $a_i \in B \cup V_M$ para $1 \leq i \leq n$. Podemos suponer que $a = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i + \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i a_i$, donde $r \leq n$, y $a_i \in B$ si $1 \leq i \leq r$ y $a_i \in V$ si $r+1 \leq i \leq n$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|y\| &= \lambda \left\| \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i + \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i a_i \right\| \leq \lambda \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \|a_i\| + \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i \|a_i\| \right) \\
&\leq \lambda \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i \frac{\|a_i\|_1}{m} \right) \leq \lambda \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \frac{M}{m} + \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i \frac{M}{m} \right) \\
&\leq \lambda \frac{M}{m} \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + \sum_{i=r+1}^{n} \alpha \right) = \lambda \frac{M}{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \lambda \frac{M}{m}.
\end{aligned}$$

Por tanto $\|y\| \leq \epsilon \dfrac{M}{m}$ y como ϵ es arbitraria se tiene que $\|y\| = 0$ y por consiguiente, $y = 0$. Así, $\|\cdot\|$ es una norma en Y.

De los cálculos anteriores, concluimos:

$$y \in co(B \cup V) \text{ implica } \|y\| \leq \frac{M}{m}. \tag{1.1}$$

Como $B \subset \{y \in Y : \rho_A(y) \leq 1\}$ tenemos que $\rho_A(y) \leq \|y\|$ para todo $y \in Y$.

Por otra parte, $\{y \in Y : \rho_A(y) < 1\} \subset co(B \cup V)$. Por 1.1 $\|y\| \leq \frac{M}{m}(\rho_A(y) + \epsilon)$ para todo $y \in Y$ y $\epsilon > 0$; de donde: $\|y\| \leq \frac{M}{m}\rho_A(y)$ para todo $y \in Y$.

En resumen:

$$\frac{m}{M}\|y\| \leq \rho_A(y) \leq \|y\| \text{ para todo } y \in Y. \tag{1.2}$$

o lo que es lo mismo

$$m\|y\| \leq M\rho_A(y) \leq M\|y\| \text{ para todo } y \in Y. \tag{1.3}$$

Veremos que la norma $M\rho_A(y)$ sirve para tomarse como la extensión buscada.

Sea $x \in X$, entonces $\|x\|_1 \leq M$ implica $x \in V$, y entonces $\rho_A(x) \leq 1$; de donde, $M\rho_A(x) \leq \|x\|_1$ para todo $x \in X$.

Inversamente, si $\rho_A(x) < 1$, con $x \in X$, entonces existe $0 < \lambda < 1$ tal que $x \in \lambda co(B \cup V)$. Así, $x = \lambda\left(\sum_{x_i \in B} \lambda_i x_i + \sum_{x_i \in V} \lambda_i x_i\right)$, con $\lambda_i \geq 0$ para todo i y $\sum \lambda_i = 1$. De aquí se sigue que $\sum_{x_i \in B} \lambda_i x_i \in B \cap X$ y por tanto,

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &\leq \lambda\left\|\sum_{x_i \in B} \lambda_i x_i\right\|_1 + \lambda\left\|\sum_{x_i \in V} \lambda_i x_i\right\|_1 \\
&\leq \lambda M\left\|\sum_{x_i \in B} \lambda_i x_i\right\| + \lambda M\sum_{x_i \in V} \lambda_i \\
&\leq \lambda M\left(\sum_{x_i \in B} \lambda_i + \sum_{x_i \in V} \lambda_i\right) < M.
\end{aligned}$$

Así, $\|x\|_1 \leq M\rho_A(x)$ para todo $x \in X$ y concluimos que $M\rho_A(x) = \|x\|_1$ para todo $x \in X$.

La norma $\|y\|_1 = M\rho_A(y)$, para $y \in Y$, es entonces una extensión de $\|\cdot\|_1$ y por lo antes visto es equivalente a $\|\cdot\|$ en Y. De hecho, de1.3 se sigue

$$m\|y\| \leq \|y\|_1 \leq M\|y\|$$

para todo $y \in Y$. ■

1.3 Espacio dual. Topología inducida por una familia de funciones. Topologías débil y débil*

Definición 1.3.1 *A una transformación lineal $x^* : X \to \mathbb{F}$ la llamamos una funcional lineal en X. Si (X,τ) es un espacio vectorial topológico, entonces al conjunto de todas las funcionales lineales en X que son continuas lo llamamos el espacio dual topológico de X y lo denotamos por $(X,\tau)^*$, o simplemente por X^*. Con X^{**} denotamos al espacio dual de X^* y lo llamamos el doble dual de X; así, $x^{**} \in X^{**}$ si $x^{**} : X^* \to \mathbb{F}$ es lineal y continua.*

Teorema 1.3.2 *El dual topológico X^* de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach con la norma* $\|x^*\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |x^*(x)|$

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Definimos$\widehat{\ }: (X, \|\cdot\|) \to (X^{**}, \|\cdot\|)$ donde la imagen $\widehat{x}$ de x es la funcional lineal $\widehat{x} : X^* \to \mathbb{F}$ definida como $\widehat{x}(x^*) = x^*(x)$ para $x^* \in X^*$.

Observamos que $\widehat{x}$ es efectivamente continua debido a que $|\widehat{x}(x)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\| \|x\|$. Más aún, $\|\widehat{x}\| = \sup\limits_{\|x^*\|=1} |\widehat{x}(x^*)| = \sup\limits_{\|x^*\|=1} |x^*(x)| = \|x\|$ y por tanto $\widehat{\ }: (X, \|\|) \to (X^{**}, \|\|)$ es una isometría.

Definición 1.3.3 *A la transformación*$\widehat{\ }: X \to X^{**}$ *se le llama la inmersión canónica de X en X^{**}. Si X es de Banach, entonces $\widehat{X}$ es un subespacio cerrado de X^{**} y por tanto, de Banach.*

Definición 1.3.4 *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $x^* \in X^*$. La función $\rho_{x^*} : X \to \mathbb{F}$ definida por $\rho_{x^*}(x) = |x^*(x)|$ es una seminorma en X. La topología generada en X por esta familia $\{\rho_{x^*} : x^* \in X^*\}$de seminormas es llamada la topología débil de X y se denota por w. La topología de la norma $\|\cdot\|$ es más fuerte que w.*

Definición 1.3.5 *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $x \in X$. La función $\rho_x : X^* \to \mathbb{F}$ definida por $\rho_x(x^*) = |x^*(x)|$ es una seminorma en X^*. La topología generada en X^* por esta familia $\{\rho_x : x \in X\}$ de seminormas es llamada la topología débil-estrella de X^* y se denota por w^*. La topología de la norma $\|\cdot\|^*$ es más fuerte que w^*.*

Definición 1.3.6 *Sean X un conjunto y $\mathfrak{F}$ una familia de funciones que tienen dominio X: $\mathfrak{F}$ es separante si para cada pareja de elementos distintos x, y de X, existe $f_{x,y}$ en $\mathfrak{F}$ tal que $f_{x,y}(x) \neq f_{x,y}(y)$.*

Un ejemplo de lo anterior es: si X es un espacio normado, entonces la familia $\widehat{X}$ es separante para X^*.

Supongamos que X es un conjunto y $\mathfrak{F}$ una familia de funciones f de X en un espacio topológico $(Y_f, \mathfrak{T}_f)$. Siempre es posible encontrar una topología para X tal que hace continua a cada miembro de $\mathfrak{F}$. Por ejemplo, basta con tomar la topología discreta en X. Existe la más pequeña de tales topologías como ahora probamos.

Proposición 1.3.7 *Sean X un conjunto y $\mathfrak{F}$ una familia de funciones $f : X \to (Y_f, \mathfrak{T}_f)$, donde $(Y_f, \mathfrak{T}_f)$ es un espacio topológico para cada $f \in \mathfrak{F}$. Existe una única topología $\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}}$ para X, llamada la $\mathfrak{F}$-topología de X o la topología débil para X inducida por $\mathfrak{F}$, tal que* *a) Cada* $f \in \mathfrak{F}$ *es* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}}$*-continua y*

b) Si $\mathfrak{T}$ *es una topología para* X *tal que cada* f *en* $\mathfrak{F}$ *es* $\mathfrak{T}$*-continua, entonces* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathfrak{T}$*.*

De hecho, la topología $\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}}$ *tiene a* $\mathfrak{S} = \left\{ f^{-1}(U) : f \in \mathfrak{F}, U \in \mathfrak{T}_f \right\}$ *como una subbase, la cual se denomina la subbase canónica de* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}}$*. La base canónica para* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}}$ *es la colección de todos los conjuntos que son intersecciones finitas de miembros de* $\mathfrak{S}$*.*

c) Sea (x_α) *una red en* X*.* $x_\alpha \to x$ *según la topología* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}}$ *si y sólo si* $f(x_\alpha) \to f(x)$ *para cada* $f \in \mathfrak{F}$*.*

d) Si $\mathfrak{F}$ *es numerable, separante y cada* $(Y_f, \mathfrak{T}_f)$ *es metrizable, entonces* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}}$ *es metrizabale.*

Demostración.

Sea $\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}}$ la topología generada por la subbase $\mathfrak{S}$.

a) Ya que $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{T}_{\mathfrak{F}}$ todo miembro de $\mathfrak{F}$ es $\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}}$-continuo.

b) Sea $\mathfrak{T}$ una topología para X tal que cada miembro de $\mathfrak{F}$ es $\mathfrak{T}$-continuo. Entonces se tiene que $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{T}$ y por consiguiente, $\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathfrak{T}$. La unicidad se sigue de inmediato.

c) Si $x_\alpha \to x$ según la topología $\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}}$, entonces $f(x_\alpha) \to f(x)$ para todo $f \in \mathfrak{F}$, debido a a). Inversamente supongamos que lo último se cumple. Basta probar que dados $f \in \mathfrak{F}$ y $U \in \mathfrak{T}_f$ tales que $x \in f^{-1}(U)$, existe α_0 tal que $x_\alpha \in f^{-1}(U)$ si $\alpha \succeq \alpha_0$, y esto sucede debido a que $f(x_\alpha) \to f(x)$.

d) Supondremos que $\mathfrak{F}$ es numerable infinito. Para cada $f_i \in \mathfrak{F}$, con $i \geq 1$, sea d_i una distancia que induce la topología $\mathfrak{T}_{f_i}$ de $Y_{f_i} = Y_i$. Definimos $d(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \min(1, d_i(f_i(x), f_i(y)))$, para $x, y \in X$. Esta función d es una distancia; para probarlo se usa que $\mathfrak{F}$ es separante. Es claro que si $x_\alpha \to x$ según d, entonces $f_i(x_\alpha) \to f_i(x)$ para $i \geq 1$. Si esto último sucede entonces para cada $\epsilon > 0$ existen $N > 0$ y α_0 tales que: $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \min(1, d_i(f_i(x_\alpha), f_i(x))) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo α y $\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} \min(1, d_i(f_i(x_\alpha), f_i(x))) < \frac{\epsilon}{2}$ si $\alpha \succeq \alpha_0$; es decir $x_\alpha \to x$ según d. Por c) concluimos que las topologías $\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}}$ y la inducida por d coinciden. ■

Corolario 1.3.8 *Si* $(X\ ,\tau)$ *es un espacio topológico compacto y existe una familia* $\mathfrak{F}$ *numerable y separante, formada por funciones continuas* $f : X \to (Y_f, d_f)$*, donde de* (Y_f, d_f) *es un espacio métrico, entonces la topología* τ *de* X *es metrizable.*

Demostración.

Tenemos $\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}} \subset \tau$; es decir, la función idéntica $(X\ ,\tau) \to (X\ ,\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}})$ es continua y como $(X\ ,\tau)$ es compacto se sigue que $\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}} = \tau$. Por el inciso d) de la proposición anterior obtenemos el resultado. ■

Proposición 1.3.9 *Sean X un conjunto y $\mathfrak{F}$ una familia separante de funciones $f : X \to (Y_f, \mathfrak{T}_f)$. Entonces la transformación $x \to (f(x))_{f\in\mathfrak{F}}$ es un homeomorfismo de X, con la $\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}}$ topología, sobre un subespacio del producto topológico $\prod_{f\in\mathfrak{F}} Y_f$.*

Demostración.
Es claro que la transformación es inyectiva, por ser $\mathfrak{F}$ separante, y es continua ya que su composición con cada proyección es una función de la familia y ésta es continua para la topología $\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}}$. Inversamente, la transformación $(f(x))_{f\in\mathfrak{F}} \to x$ es continua, ya que si $(f(x_\alpha))_{f\in\mathfrak{F}} \to (f(x))_{f\in\mathfrak{F}}$ entonces $f(x_\alpha) \to (f(x))$ converge para cada $f \in \mathfrak{F}$ y por c) de la proposición anterior, esto implica que $x_\alpha \to x$ según la topología $\mathfrak{T}_{\mathfrak{F}}$. ■

Teorema 1.3.10 *(Alaoglu) Sea X un espacio normado. Entonces la bola unitaria cerrada B_{X^*} en X^* es w^*-compacta.*

Demostración.
Sea$\widehat{\ }$: $X \to X^{**}$ la inmersión canónica de X en X^{**}. Entonces $\widehat{B_X}$ es una familia separante de funciones en B_{X^*} que induce una topología que coincide con la restricción de w^* a B_{X^*}. La topología de B_{X^*} que consideramos en el resto de esta prueba es w^*.

Sea $I = \{z \in \mathbb{F}, |z| \leq 1\}$. Tomamos $I_x = I$ para cada $x \in B_X$. Sea I^{B_X} el espacio producto $\prod_{x\in B_X} I_x$ con la topología usual. Entonces, I^{B_X} es compacto, por el teorema de Tychonoff, y la función $F : B_{X^*} \to I^{B_X}$ definida por $F(x^*) = (x^*(x))_{x\in B_X}$ es un homeomorfismo de B_{X^*} sobre un subespacio de I^{B_X}, como se vio en la Proposición 1.3.9 . El resultado se sigue porque $F(B_{X^*})$ es cerrado en I^{B_X}, como se prueba a continuación:

Sea (x^*_α) una red en B_{X^*} tal que $F(x^*_\alpha) = (x^*_\alpha(x))_{x\in B_X}$converge a algún $(z_x)_{x\in B_X} \in I^{B_X}$; así, $x^*_\alpha(x) \to z_x$ para cada $x \in B_X$. El objetivo de la prueba es encontrar $x^* \in B_{X^*}$ tal que $F(x^*) = (z_x)_{x\in B_X}$. Para cada $x \neq 0$ en X, definimos $x^*(x) = \|x\| z_{\|x\|^{-1}x}$ y hacemos $x^*(0) = 0$. Es claro que $x^*(x) = \|x\| \lim_\alpha x^*_\alpha\left(\|x\|^{-1} x\right) = \lim_\alpha x^*_\alpha(x)$, para $x \in X\setminus\{0\}$ y la igualdad $x^*(x) = \lim_\alpha x^*_\alpha(x)$ es obviamente cierta para $x = 0$; así, $x^*(x) = \lim_\alpha x^*_\alpha(x)$ para todo $x \in X$ y se sigue que x^* es una funcional lineal en X. Por otra parte, $x^* \in B_{X^*}$ ya que $|x^*(x)| = \lim_\alpha |x^*_\alpha(x)| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$.

Para cada $x \in B_X$ se tiene,

$$F(x^*)_x = x^*(x) = \lim_\alpha x^*_\alpha(x) = \lim_\alpha F(x^*_\alpha)_x = z_x,$$

así $F(x^*) = (z_x)_{x\in B_X}$. ■

Una consecuencia obvia del teorema de Alaoglu es que en el espacio dual de un espacio normado toda bola cerrada en la norma es w^*-compacta.

Corolario 1.3.11 *Sea X un espacio normado separable y sea A un subconjunto acotado de X^*. Entonces la topología inducida en A por w^* es metrizable.*

Demostración.

Podemos suponer que A es w^*- cerrado en X^* (si no lo es tomamos $\overline{A}$ y se sigue de inmediato el resultado para A) y por lo tanto w^*-compacto. Sean $D \subseteq X$ numerable y denso en X y $\widehat{\ }: X \to X^{**}$ la inmersión canónica de X en X^{**}. $\widehat{D}$ es una familia numerable y separante de funciones escalares continuas definidas en A. Por el Corolario 1.3.8 se tiene que la topología w^* restringida en A es metrizable. ■

1.4 Transformaciones abiertas

Sean X y Y dos espacios normados. Al espacio de todas las transformaciones lineales (operadores) continuos los denotamos por $B(X,Y)$; éste es un espacio normado con la norma $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|$. Si Y es de Banach, entonces $B(X,Y)$ también lo es.

Teorema 1.4.1 *Sean X y Y dos espacios normados y $T \in B(X,Y)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) Existe $r > 0$ tal que $\|T(x)\| \geq r\|x\|$ para toda $x \in X$. En este caso diremos que T está acotado por abajo.

b) T es un isomorfismo sobre su imagen

En particular, $T(X)$ es de Banach si X es de Banach y se cumple cualquiera de estas afirmaciones.

Demostración.

a)⇒b) La hipótesis implica que T es inyectiva. Sea $T^{-1} : T(X) \to X$ la transformación inversa. Entonces

$$\left\|T^{-1}y\right\| \leq \frac{1}{r}\|T(x)\| \text{ si } y = T(x)$$

es decir T^{-1} es continua.

b)⇒a) Si $T : X \to T(X)$ es un isomorfismo entonces

$$\left\|T^{-1}T(x)\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \|T(x)\|$$

para toda $x \in X$. Como $\|T\| \left\|T^{-1}\right\| \geq 1$, tenemos $\left\|T^{-1}\right\| > 0$ y $\|T(x)\| \geq r\|x\|$, donde $r = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$.

De a) se sigue que toda sucesión de Cauchy en $T(X)$ proviene de una sucesión de Cauchy en X y por tanto, converge, en vista de que X es de Banach, y T es continua. ■

Teorema 1.4.2 *Sean X y Y dos espacios normados y $T : X \to Y$ lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) T es abierta.

b) Existe $r > 0$ tal que $rB_Y \subset T(B_X)$, donde B_X y B_Y son las bolas unitarias cerradas en X y Y respectivamente.

c) Existe $M > 0$ tal que para cada $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $T(x) = y$ y $\|x\| \leq M\|y\|$. En particular, T es sobre.

Demostración.

a)⇒b) Se sigue de que $T(B_X)$ es una vecindad de 0.

b)⇒c) Sea $y \neq 0$. Existe $x \in X$, con $\|x\| \leq 1$, tal que $\frac{r}{\|y\|}y = T(x)$. O sea, $T\left(\frac{\|y\|}{r}x\right) = y$ y $\left\|\frac{\|y\|}{r}x\right\| \leq \frac{1}{r}\|y\|$. Tomamos $M = \frac{1}{r}$ y se cumple c) para todo $y \in Y$.

c)⇒a) Sea U un abierto no vacío de X. Tomemos $y \in T(U)$. Existen $x \in U$ y $r > 0$ tales que $y = T(x)$ y $x + rB_X \subset U$. Supongamos que $z - y \in \frac{r}{M}B_Y$. Existe $x_z \in X$ tal que $T(x_z) = z - y$ y $\|x_z\| \leq M\|z - y\| \leq r$; es decir, $T(x + x_z) = z$ y $x + x_z \in U$. Por tanto, $y + \frac{r}{M}B_Y \subset T(U)$ y T es abierta. ■

Proposición 1.4.3 *Sea X un espacio de Banach y Y un espacio normado. Supongamos que $T \in B(X,Y)$. Sean U_X y U_Y las bolas unitarias abiertas en X y en Y respectivamente. Si $rU_Y \subset \overline{T(sU_X)}$, entonces $rU_Y \subset T(sU_X)$ y así $\frac{r}{2s}B_Y \subset T(B_X)$ y por tanto, T es abierta.*

Demostración.

Probaremos primero el caso especial en que $r = s = 1$. Tomemos $z \in U_Y$ y sea $0 < \delta < \frac{1}{2}$ tal que $\|z\| < 1 - \delta = \alpha$. Se probará que $y = \frac{1}{\alpha}z \in \frac{1}{\alpha}T(U_X)$. Observemos que $\|y\| < 1$.

Sea $y_0 = 0$. Entonces, $\|y - y_0\| < \delta^0 = 1$. Existe $w_1 \in T(U_X)$ tal que $\|y - y_0 - w_1\| < \delta^1$. Definimos $y_1 = y_0 + w_1$ entonces $\|y - y_1\| < \delta^1$ y $y_1 - y_0 \in T(\delta^0 U_X)$ Supongamos que se han construido $y_0, ..., y_{n-1}$ en Y tales que $\|y - y_i\| < \delta^i$ y $y_i - y_{i-1} \in T(\delta^{n-1}U_X)$ para $1 \leq i \leq n-1$.

Tenemos que $y - y_{n-1} \in \delta^{n-1}U_Y$ y por tanto, existe $w \in T(\delta^{n-1}U_X)$ tal que $\|y - y_{n-1} - w\| < \delta^n$. Definimos $y_n = y_{n-1} + w$ entonces $\|y - y_n\| < \delta^n$ y $y_n - y_{n-1} \in T(\delta^{n-1}U_X)$.

Así, existe una sucesión $y_0, y_1, ..., y_n, ...$ en Y tal que $\|y - y_n\| < \delta^n$ y $y_n - y_{n-1} \in T(\delta^{n-1}U_X)$ para todo $n \geq 1$. En particular $y_n \to y$.

Para cada $n \geq 1$, sea $x_n \in X$ tal que $T(x_n) = y_n - y_{n-1}$ y $\|x_n\| < \delta^{n-1}$. Entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente, digamos que converge a x. Así, $\|x\| < \frac{1}{\alpha}$ y $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\right) = y$. De donde $y = \frac{1}{\alpha}z \in \frac{1}{\alpha}T(U_X)$ y $z \in T(U_X)$. Para demostrar el caso general se considera la transformación $\frac{s}{r}T$. ■

Corolario 1.4.4 *Si* $rB_Y \subset \overline{T(B_X)}$ *para algún* $r > 0$*, entonces* T *es abierta.*

Demostración.
$rB_Y \subset \overline{T(B_X)}$ implica $rU_Y \subset \overline{T(B_X)}$. Además $\overline{T(U_X)} = \overline{T(B_X)}$ ya que si $y = \lim_{n\to\infty} T(x_n)$ con $\|x_n\| \leq 1$, entonces $y = \lim_{n\to\infty} T(x'_n)$ donde $x'_n = \lambda_n x_n$ para cada $n \geq 1$ y (λ_n) es una sucesión de reales positivos menores que 1 que converge a 1. Por tanto, $rU_Y \subset \overline{T(U_X)}$. ■

Proposición 1.4.5 *Sea* X *un espacio de Banach y* Y *un espacio normado. Supongamos que* $T \in B(X,Y)$*.*
a) Si existe $c > 0$ *tal que* $\|y^*\| \leq c\,\|T^*(y^*)\|$ *para todo* $y^* \in Y^*$*, entonces* T *es abierta.*
b) Si $T^* : Y^* \to X^*$ *es un isomorfismo sobre su imagen, entonces* T *es abierta.*

Demostración.
a) Sea $y_0 \in Y$ con $y_0 \notin \overline{T(U_X)}$. Como $\overline{T(U_X)}$ es cerrado, convexo y balanceado, existe $y^* \in Y$ tal que

$$|y^*(y)| \leq 1 < |y^*(y_0)|$$

para todo $y \in \overline{T(U_X)}$. Sea $x \in U_X$, entonces

$$|T^*(y^*)(x)| = |y^*(T(x))| \leq 1.$$

O sea $\|T^*(y^*)\| \leq 1$. Por tanto, $\|y^*\| \leq c$. Entonces,

$$1 < |y^*(y_0)| \leq \|y^*\|\,\|y_0\| \leq c\,\|y_0\|$$

es decir, $\frac{1}{c}U_Y \subset \overline{T(U_X)}$ y por consiguiente, T es abierta.
b) Es consecuencia inmediata de a). ■

Proposición 1.4.6 *Sean* X *y* Y *dos espacios de Banach y* $T \in B(X,Y)$*. Entonces*
a) T^* *es sobre si y sólo si* T *es un isomorfismo sobre su imagen.*
b) T *es sobre si y sólo si* T^* *es un isomorfismo sobre su imagen.*

Demostración
a) Si $T^* : Y^* \to X^*$ es sobre, entonces es abierta (Teorema de la función abierta); por tanto, si B_{X^*} y B_{Y^*} son las bolas unitarias cerradas en X^* y Y^*, respectivamente, entonces existe $r > 0$ tal que $rB_{X^*} \subset T(B_{Y^*})$. Así, para cada $x \in X$ tenemos:

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &= \sup_{y^*\in B_{Y^*}} |y^*(T(x))| = \sup_{y^*\in B_{Y^*}} |T^*(y)(x)| \geq \sup_{x^*\in rB_{X^*}} |x^*(x)| = \\ &= r \sup_{x^*\in B_{X^*}} |x^*(x)| = r\,\|x\|\end{aligned}$$

Es decir, T esta acotada por abajo y por tanto, $T : X \to T(X)$ es un isomorfismo.

Inversamente, supongamos que $T : X \to T(X)$ es un isomorfismo y sea $x^* \in X^*$. Definamos $y^* : T(X) \to \mathbb{F}$ como $y^*(T(x)) = x^*(x)$; es decir $y^* = x^* \circ T^{-1}$. Claramente y^* es lineal y continua y puede extenderse a Y. Llamemos también y^* a su extensión. De la definición de y^* resulta que $T^*(y^*) = x^*$. O sea, T^* es sobre.

b) Si $T : X \to Y$ es sobre, entonces es abierta, por tanto, existe $r > 0$ tal que $rB_Y \subset T(B_X)$. Así, para cada $x \in X$ tenemos:

$$\|T^*(y^*)\| = \sup_{x\in B_X} |y^*(T(x))| \geq \sup_{y\in rB_Y} |y^*(y)| = r \sup_{y\in B_Y} |y^*(y)| = r\|y^*\|$$

es decir, $T^* : Y^* \to X^*$ es un isomorfismo.

Inversamente, supongamos que $T^* : Y^* \to T^*(Y^*)$ es un isomorfismo. Entonces T es abierta por el inciso b) de la proposición anterior y por tanto, T es sobre por el inciso c) del Teorema 1.4.2. ■

Teorema 1.4.7 *Si X es un espacio real de Banach y separable, entonces X es isométrico a un subespacio de $C[0,1]$.*

Demostración.

Por el Teorema de Alaoglu y el Corolario 1.3.11, sabemos que B_{X^*} es separable, metrizable y completo con la topología w^*, entonces, debido a las dos últimas propiedades, tenemos que existe una función continua $\varphi : D \to B_{X^*}$, donde D es el conjunto ternario de Cantor ([14]).

Sea $(d_n) \subset D$ una sucesión que converge a $d \in D$ entonces $\varphi(d_n) \overset{w^*}{\to} \varphi(d)$ y por tanto $\varphi(d_n)(x) \to \varphi(d)(x)$ para toda $x \in X$. Definimos $\widetilde{T} : X \to C(D)$ como $\widetilde{T}(x)(d) = \varphi(d)(x)$ obtenemos que $\widetilde{T}(x) : D \to \mathbb{R}$ es continua y se puede extender a $[0,1]$ de la siguiente manera

$$T(x)(r) = \begin{cases} \widetilde{T}(x)(r) & \text{si } r \in D \\ \alpha\widetilde{T}(x)(r_1) + \beta\widetilde{T}(x)(r_2) & \text{si } r \notin D \end{cases}$$

donde $r_1 = \max\{p \in D : p < r\}$ y $r_2 = \min\{p \in D : r < p\}$ y $r = \alpha r_1 + \beta r_2$ con $\alpha, \beta \in [0,1]$ y $\alpha + \beta = 1$

Se probará, por casos, que $T(x)$ es continua. Sea $r_0 \in [0,1]$

Supongamos que $r_0 \in D$. Como $\widetilde{T}(x)$ es continua en D, tenemos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\left|\widetilde{T}(x)(r) - \widetilde{T}(x)(r_0)\right| < \epsilon$ si $|r - r_0| < \delta$ con $r \in D$.

Sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^n} < \delta$ y que existe un intervalo $[a_n, b_n]$ tal que r_0 pertenece a dicho intervalo y $b_n - a_n = \frac{1}{3^n}$. Sea $r \in [a_n, b_n]$ tal que $r \notin D$ entonces $|r - r_0| < \delta$, y tenemos que $r = \alpha r_1 + \beta r_2$ con $r_1, r_2 \in D \cap [a_n, b_n]$

, $\alpha, \beta \in [0,1]$ y $\alpha + \beta = 1$. Así,

$$\begin{aligned}
|T(x)(r) - T(x)(r_0)| &= \left|\alpha\widetilde{T}(x)(r_1) + \beta\widetilde{T}(x)(r_2) - \alpha T(x)(r_0) - \beta T(x)(r_0)\right| \\
&\leq \alpha\left|\widetilde{T}(x) - \widetilde{T}(x)(r_0)\right| + \beta\left|\widetilde{T}(x) - \widetilde{T}(x)(r_0)\right| \\
&< \alpha\epsilon + \beta\epsilon = \epsilon.
\end{aligned}$$

Supongamos que $r_0 \notin D$. Entonces existe un intervalo abierto I que contiene a r_0 tal que si $r \in I$, $r_0 = \alpha_0 r_1 + \beta_0 r_2$ y $r = \alpha r_1 + \beta r_2$ y tenemos que

$$\begin{aligned}
|T(x)(r) - T(x)(r_0)| &\leq \left|\alpha\widetilde{T}(x)(r_1) + \beta\widetilde{T}(x)(r_2) - \alpha_0\widetilde{T}(x)(r_1) - \beta_0\widetilde{T}(x)(r_2)\right| \\
&\leq \left|(\alpha - \alpha_0)\widetilde{T}(x)(r_1) + (\beta - \beta_0)\widetilde{T}(x)(r_2)\right|
\end{aligned}$$

Si escogemos suficientemente cerca a r de r_0 entonces el lado izquierdo se hace pequeño.

Por otro lado, cada $r \in [0,1]$ lo podemos escribir como $r = \alpha r_1 + \beta r_2$ para algunos $r_1, r_2 \in D$ y $\alpha, \beta \in [0,1]$ tales que $\alpha + \beta = 1$ y

$$\|T(x)\| = \sup\{|T(x)(r)| : r \in [0,1]\}.$$

Entonces $T(x)(r) = \widetilde{T}(x)(r) = \varphi(r)(x)$ con $r \in D$ o $T(x)(r) = \alpha\varphi(r_1)(x) + \beta\varphi(r_2)(x)$ $r_1, r_2 \in D$. Como $\varphi(d) \in B_{X^*}$ para todo $d \in D$, obtenemos $\|T(x)\| \leq \|x\|$ y T es continua.

Finalmente, como φ es sobre

$$\begin{aligned}
\|T(x)\| &= \sup\{|T(x)(r)| : r \in [0,1]\} \\
&\geq \sup\{|T(x)(r)| : r \in D\} = \sup\{|\varphi(r)(x)| : r \in D\} \\
&= \|x\|
\end{aligned}$$

y así, $\|T(x)\| = \|x\|$ es decir T es una isometría. ■

1.5 Proyección. Subespacio complementado

Definición 1.5.1 *Sea X un espacio vectorial topológico. Una transformación lineal $P : X \to X$ es llamada una proyección si $P^2 = P$.*

Proposición 1.5.2 *Sea $P : X \to X$ una proyección. Entonces:*

a) $P(X)$ y $\operatorname{Ker} P$ son subespacios de X y $P(X) = \{x \in X : P(x) = x\}$ en particular, $P|_{P(X)} = I$,

b) $X = P(X) \oplus \operatorname{Ker} P$,

c) $Q = I - P$ es también una proyección y $Q(X) = \operatorname{Ker} P$ y $\operatorname{Ker} Q = P(X)$,

d) P es continua si y solo si Q es continua.

e) Si $X = M \oplus N$, donde M y N son subespacios de X, entonces se dice que son algebraicamente complementarios en X y en tal caso, existe una única proyección $P_{M,N}$ tal que $M = P_{M,N}(X)$ y $N = \operatorname{Ker} P_{M,N}$, la cual es llamada la proyección sobre M a lo largo de N.

f) Si $X = M \oplus N = X = M \bigoplus N_1$ y $N \subset N_1$, entonces $N = N_1$

Corolario 1.5.3 *Toda proyección continua en un espacio vectorial topológico de Hausdorff tiene rango cerrado.*

En lo que sigue $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

Teorema 1.5.4 *Sean M y N subespacios complementarios de X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

a) $\underset{(m,n)}{M \times N} \underset{\to}{\overset{T}{\to}} \underset{m+n}{M \oplus N}$ es un isomorfismo.Donde en $M \times N$ se toma la topología producto con la norma $\|m+n\| = \|m\| + \|n\|$.

b) $\underset{x}{N} \underset{\to}{\overset{\varphi}{\to}} \underset{\overline{x}}{X \diagup M}$ es un isomorfismo. Donde φ es la restricción del homomorfismo canónico $\pi : X \to X \diagup M$ a N. Donde en $X \diagup M$ se toma la topología cociente con la norma usual $\|x + M\| = \inf \{\|x - m\| : m \in M\}$.

c) La proyección $P_{M,N}$ es continua.

Cuando se tiene alguna de éstas situaciones, entonces M y N son llamados subespacios complementarios topológicos de X, o bien se dice que cada uno de ellos está complementado en X.

Demostración.

a)⇒b) Existen $k, M > 0$ tales que $k(\|m\| + \|n\|) \leq \|m + n\| \leq M(\|m\| + \|n\|)$. Claramente φ es lineal y biyectivo. Sea $n \in N$, por a) tenemos $k\|n\| \leq \|n - m\| \leq M(\|m\| + \|n\|)$, para todo $m \in M$; de donde, $k\|n\| \leq \|n + M\| \leq M\|n\|$. Así, φ es un isomorfismo.

b)⇒c) $P_{N,M} = \varphi^{-1} \circ \pi$. De donde $P_{N,M}$, y por tanto $P_{M,N} = I - P_{N,M}$, son continuos.

c)⇒a) Claramente $\underset{(m,n)}{M \times N} \underset{\to}{\overset{T}{\to}} \underset{m+n}{M \oplus N}$ es lineal, biyectiva y continua. Falta probar que existe $k > 0$ tal que

$$k(\|m\| + \|n\|) \leq \|m + n\|. \tag{1.4}$$

Por hipótesis, $P_{M,N}$ y $P_{N,M}$ son continuas y por tanto, existe $K > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|m\| &\leq K\|m + n\| \\ \|n\| &\leq K\|m + n\| \end{aligned}$$

Por lo que 1.4 se cumple con $k = \frac{1}{2K}$. ■

Corolario 1.5.5 *Si M y N son complementarios topológicos en X, entonces M y N son cerrados.*

Demostración.

Se sigue del teorema anterior y el Corolario 1.5.3. ■

Teorema 1.5.6 *Sean X de Banach y M y N subespacios complementarios de X. M y N son subespacios complementarios topológicos de X si y sólo si M y N son cerrados. En particular, si P es una proyección definida en un espacio de Banach X, entonces ella es continua si solo si $P(X)$ y $\operatorname{Ker} P$ son cerrados.*

Demostración.

Si X es de Banach y M y N son cerrados, entonces $M \times N$ es un espacio de Banach y $\underset{(m,n)}{M \times N} \underset{\to}{\xrightarrow{T}} \underset{m+n}{M \oplus N}$ es un isomorfismo por el Teorema de la función abierta. La otra parte del teorema se sigue del corolario anterior. ■

Corolario 1.5.7 *Un subespacio de un espacio de Banach está complementado si y sólo si es el rango de una proyección continua en ese espacio.*

Teorema 1.5.8 *Supongamos que M es un subespacio de un espacio de Banach X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) Para todo espacio de Banach Y y todo operador lineal continuo $T : M \to Y$, hay un operador lineal continuo $T_X : X \to Y$ que extiende a T.

b) La cerradura $\overline{M}$ de M está complementada en X.

Demostración.

a)⇒b) Sea $T : M \to \overline{M}$ el operador inclusión y sea $T_X : X \to \overline{M}$ un operador lineal continuo que extiende a T. Se sigue de la continuidad de T_X que $T_X\left|\overline{M}\right.$ es la identidad de $\overline{M}$, lo cual implica que T_X es una proyección continua en X con rango $\overline{M}$. Por el corolario anterior, $\overline{M}$ está complementado en X.

b)⇒a) Supongamos que $\overline{M}$ está complementado. Por el corolario anterior, existe una proyección continua P en X que tiene rango $\overline{M}$. Si Y es un espacio de Banach y $T : M \to Y$ es un operador lineal continuo y como T es uniformemente continuo puede extenderse continuamente a un operador lineal continuo $T_1 : \overline{M} \to Y$. Entonces el operador lineal continuo $T_1 P : X \to Y$ extiende a T. ■

Un resultado profundo que usaremos en el último capítulo es el siguiente:

Proposición 1.5.9 *[12] Un subespacio complementado de $C\,[0,1]$, con dual no separable, es isomorfo a $C\,[0,1]$.*

1.6 Bases de Schauder

Definición 1.6.1 *Una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach X es llamada una base de Schauder de X, o simplemente una base de X, si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base del subespacio cerrado $[x_i]_{i=1}^{\infty}$ generado por $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, entonces es llamada una sucesión básica.

Se dice que la base está normalizada si $\|x_i\| = 1$ para todo $i \geq 1$. Toda base puede normalizarse.

Es claro que todo espacio de Banach con base de Schauder es separable.

Recordamos que ℓ^{∞} es el espacio de Banach de todas las sucesiones de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que son acotadas y donde se considera la norma del supremo, es decir, $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\| = \sup_n |x_n|$. Recordamos también que c y c_0 son los subespacios cerrados de ℓ^{∞} formados por todas las sucesiones de reales convergentes y que convergen a 0, respectivamente.

ℓ^{∞} es una espacio no separable y por tanto, no tiene base de Schauder. En tanto que c y c_0 sí tienen bases de Schauder a saber: la base canónica $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$ y $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ donde

$$e_i = \left(\overbrace{0, ...0, 1}^{i}, 0, ... \right) \text{ para } i \geq 1 \text{ y } e_0 = (1, 1, ...) \,.$$

.

Definición 1.6.2 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de X. Para cada $n \geq 1$ definimos $P_n : X \to X$ como*

$$P_n(x) = P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

y la llamamos la n-ésima proyección asociada a $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. A la funcional $x_j^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = a_j$, para $j \geq 1$ se le conoce como el j-ésimo coeficiente funcional asociado a la base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Definición 1.6.3 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de X. Si la sucesión de los coeficientes funcionales $\left(x_j^*\right)$ asociados a la base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de X^*, entonces $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es llamada una base que encoge.*

ℓ^p con $2 \leq p < \infty$ tienen una base que encoge. Lo mismo sucede con c_0.

Un resultado sobre esta noción, que usaremos en la parte final del trabajo, es la siguiente proposición, que tiene una prueba ([6]) que sobrepasa los alcances de esta tesis. Se refiere a una pregunta que permaneció abierta por varios años como problema central de la teoría de las bases: ¿Si X^* tiene una base, entonces X tiene una base?

Proposición 1.6.4 *Sea X un espacio de Banach tal que X^* tiene una base. Entonces, X tiene una base que encoge.*

Proposición 1.6.5 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i = 0$ *implica que* $a_i = 0$ *para todo* $i \geq 1$

b) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i x_i$ *implica que* $a_i = b_i$ *para todo* $i \geq 1$

Cuando alguna de estas condiciones se cumple, entonces $x_i \neq 0$ para toda $i \geq 1$ y en tal caso se dice que la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es w-linealmente independiente. Toda base es una sucesión w-linealmente independiente.

Teorema 1.6.6 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión w-linealmente independiente en un espacio de Banach $(X, \|\|)$. Sea*

$$Y = \left\{ y \in X : y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \text{ para una (única) sucesión de escalares} \right\}.$$

Definimos $|||\cdot||| : Y \to \mathbb{R}$ como $|||x||| = \sup\limits_{n \in \mathbf{N}} \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|$. Entonces, Y es un subespacio de X, $(Y, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach y $\|y\| \leq |||y|||$ para todo $y \in Y$. Si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base entonces $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ son normas equivalentes en X.

Proposición 1.6.7 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de X. Las proyecciones P_n y los coeficientes funcionales x_i^* asociados a la base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ son continuos, con $\|P_n\| \geq 1$ y $\sup\limits_{n \in \mathbf{N}} \|P_n\| < \infty$. Al número $\sup\limits_{n \in \mathbf{N}} \|P_n\|$ se le conoce como la constante básica de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Si $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, entonces $|x_i^*(x)| = |a_i| \leq \frac{2K_0}{\|x_i\|} \|x\|$ para todo $j \geq 1$ y $\|x_i^*\| \leq \frac{2K_0}{\|x_i\|}$*

Demostración.

Es claro que P_n es lineal. Para todo $x \in X$ y para cada $n \geq 1$ se tiene $\|P_n(x)\| \leq |||x|||$ y, por el teorema anterior, existe $K > 0$ tal que $|||x||| \leq K \|x\|$, por tanto,

$$\|P_n(x)\| \leq K \|x\| .$$

Así, P_n está acotada; $\|P_n\| \geq 1$ y

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \|P_n\| \leq K < \infty.$$

Supongamos $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, entonces $|(P_i - P_{i-1})(x)| \leq 2K_0 \|x\|$ si $i \geq 1$, donde $P_0 = 0$. De esto se sigue que, $|a_i| \leq \frac{2K_0}{\|x_i\|} \|x\|$ para todo $i \geq 1$ y $\|x_i^*\| \leq \frac{2K_0}{\|x_i\|}$. ■

Teorema 1.6.8 *Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio de Banach X. Entonces $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de X si y sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones:*

a) $x_i \neq 0$ para todo $i \geq 1$.

b) Existe una constante $K > 0$ tal que para cualquier sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ y para cualesquiera $n, m \geq 1$, con $n < m$, sucede que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|.$$

c) $[x_i]_{i=1}^{\infty} = X$.

Demostración.
Supongamos que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de X con constante básica K. Es claro que a) y b) se satisfacen. Por el teorema anterior, existe $K > 0$ tal que $|||x||| \leq K \|x\|$ para todo $x \in X$. Si $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión arbitraria de escalares, entonces para cualesquiera $n, m \geq 1$, con $n < m$, tenemos

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq \left|\left|\left| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right|\right|\right| \leq \left|\left|\left| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right|\right|\right| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|,$$

lo que demuestra b).

Inversamente, a) y b) implican que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es w-linealmente independiente. Por el teorema anterior

$$Y = \left\{ y \in X : y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \text{ para una única sucesión de escalares} \right\}$$

es $|||\ \ |||$ −completo. Mostraremos, usando b), que $\|\ \ \| \sim |||\ \ |||$ en Y, y por tanto, Y es cerrado en X. Sabemos que $\|y\| \leq |||y|||$ para todo $y \in Y$. Por otra parte, si $y \in Y$ y $y = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, entonces b) implica

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|,$$

si $n, m \geq 1$, con $n < m$, y al tomar el límite cuando $m \to \infty$ tenemos

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\|.$$

Por tanto,

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\|,$$

o lo que es lo mismo, $|||y||| \leq K \|y\|$,es decir, $\| \quad \|$ y $||| \quad |||$ son equivalentes en Y. Por consiguiente, $(Y, \| \quad \|)$ es completo y, por tanto, cerrado en X. Como es claro que $\langle x_i \rangle_{i=1}^{\infty} \subset Y$, se sigue de c) que $X = Y$. Así, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de X. ■

Observación 1.6.9 *Puede probarse que si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de un espacio de Banach X, entonces su constante básica es la mínima constante que satisface b) del teorema anterior.*

Definición 1.6.10 *Sean X y Y dos espacios de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ bases para X y Y, respectivamente. Decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge si y sólo si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ converge.*

Proposición 1.6.11 *Sea X un espacio de Banach.*

a) Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una base normalizada de un espacio de Banach X y con constante básica K. Sea $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de vectores en X que satisface $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i - y_i\| < \frac{1}{2K}$. Entonces, $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ es una base para X equivalente a $(x_i)_{i=1}^{\infty}$. Si $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica, entonces $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ también es una sucesión básica, equivalente a $(x_i)_{i=1}^{\infty}$.

b) Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach X y con constante básica K. Si existe una proyección continua P de X sobre $[x_i]_{i=1}^{\infty}$ y una sucesión $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que $\sum \|x_i - y_i\| < \frac{1}{8K\|P\|}$, entonces $Y = [y_i]_{i=1}^{\infty}$ está complementado en X.

Demostración.

a) Sea $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ una serie convergente, si $m > n \geq 1$ entonces se tiene

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=n}^{m} a_i y_i \right\| &\leq \left\| \sum_{i=n}^{m} a_i (x_i - y_i) \right\| + \left\| \sum_{i=n}^{m} a_i z_i \right\| \leq \sum_{i=n}^{m} |a_i| \|x_i - y_i\| + \left\| \sum_{i=n}^{m} a_i x_i \right\| \\ &\leq 2K \|x\| \sum_{i=n}^{m} \|x_i - y_i\| + \left\| \sum_{i=n}^{m} a_i x_i \right\|, \end{aligned}$$

donde los sumandos de la última expresión tienden a 0 cuando $r, s \to \infty$. Así $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ es de Cauchy y por tanto converge. Análogamente, la convergencia de $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ implica la de $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$.

Definimos $T : X \to X$ como $T\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i y_i$. Claramente T es lineal y por cálculos similares a los anteriores obtenemos: $\|x - Tx\| \leq 2K \|x\| \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i - y_i\|$; de donde T es acotado y $\|I - T\| < 1$. Así, T es invertible y por tanto, $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ es una base para X equivalente a $(x_i)_{i=1}^{\infty}$.

Supongamos que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X , y definamos $T : [x_i]_{i=1}^{\infty} \to Y = [y_i]_{i=1}^{\infty}$ como $T\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i y_i$. Esta definición es correcta por lo visto en la prueba anterior y de ahí mismo obtenemos $\|x - Tx\| \leq \delta \|x\|$ para alguna $0 < \delta < 1$; por tanto, T es continua y además, acotada por abajo ya que $(1 - \delta) \|x\| \leq \|Tx\|$ para todo $x \in [x_i]_{i=1}^{\infty}$; de donde T es inyectiva y su rango es cerrado. Si (z_n) es una sucesión en $\langle y_i \rangle_{i=1}^{\infty}$ que converge, entonces su límite está en el rango de T ya que (z_n) es una sucesión en el rango de T. Del Teorema de la función abierta se sigue que T es un isomorfismo de $[x_i]_{i=1}^{\infty}$ sobre Y y así, $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica equivalente a $(x_i)_{i=1}^{\infty}$.

b) Sabemos que $\|P\| \geq 1$, por lo que podemos definir la transformación $T : X \to Y$ del mismo modo que en el inciso anterior. Más aún, ahora tenemos que $\|x - Tx\| \leq \frac{\|x\|}{4}$ y por consiguiente, $\|T\| \leq \frac{5}{4}$ y $\|x\| \leq \frac{4}{3} \|T(x)\|$. Por tanto, si $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ y $y = T(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i y_i$, entonces

$$\|TPy - y\| = \left\| TP\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i (y_i - x_i)\right)\right\| < 8 \|P\| K \|y\| \left\|\sum_{i=1}^{\infty} y_i - x_i\right\| < \delta \|y\|$$

para alguna $\delta < 1$ y $\left\| TP|_{Y-I} \right\| < 1$ Así, $S = TP|_Y$ es invertible y $S^{-1}TP$ es una proyección continua de X sobre Y. ■

Definición 1.6.12 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica de un espacio de Banach X. Una sucesión de vectores $(u_j)_{j=1}^{\infty} \subset X$ distintos de 0 de la forma $u_j = \sum\limits_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} \lambda_i x_i$ con $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares y $0 \leq m_1 < m_2 < \cdots$ una sucesión de enteros, es llamada una sucesión básica por bloques de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Del Teorema 1.6.8 y la observación que le sigue resulta que una sucesión básica por bloques de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica cuya constante básica no excede la constante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Proposición 1.6.13 *Sea X un espacio de Banach con una base $(x_i)_{i=1}^{\infty}$. Sea Y un subespacio cerrado de dimensión infinita de X. Entonces existe un subespacio Z de Y que tiene una base equivalente a una sucesión básica por bloques normalizada de $(x_i)_{i=1}^{\infty}$.*

Demostración.

En la construcción del espacio Y se usará el siguiente hecho: si $m \geq 1$, entonces existen $m+1$ elementos $y_1, ..., y_{m+1}$ en Y linealmente independientes. Sean $x_1^*, ..., x_m^*$ los primeros m coeficientes funcionales asociados a $(x_i)_{i=1}^{\infty}$. Como $(x_1^*(y_i), ..., x_m^*(y_i))$, con $1 \leq i \leq m$, son $m+1$ vectores en $\mathbb{F}^n$, existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_{m+1}$ tales que $\sum\limits_{i=1}^{m+1} \lambda_i y_i = 0x_1 + ... + 0x_m + \sum\limits_{i=m+1}^{\infty} b_i x_i$ para una sucesión de escalares (b_i). Este elemento no es 0; por consiguiente, hay un elemento $y \in Y$ con $\|y\| = 1$ que es de la forma $\sum\limits_{i=m+1}^{\infty} a_i x_i$.

Supongamos que K es la constante básica de $(x_i)_{i=1}^{\infty}$. Sean $p_1 = 0$ y $y_1 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{i,1} x_i \in Y$ con $\|y_1\| = 1$. Suponemos definidos un entero no negativo p_n y $y_n = \sum\limits_{i=p_n+1}^{\infty} a_{i,n} x_i \in Y$, con $\|y_n\| = 1$. Escogemos un entero $p_{n+1} > p_n$ tal que $\left\| y_n - \sum\limits_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} a_{i,n} x_i \right\| < \frac{1}{2 \times 4^n K}$ y $\left\| \sum\limits_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} a_{i,n} x_i \right\| > \frac{1}{2}$; definimos $u_n = \sum\limits_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} a_{i,n} x_i$ y tomamos $y_{n+1} = \sum\limits_{i=p_{n+1}+1}^{\infty} a_{i,1} x_i \in Y$ con $\|y_{n+1}\| = 1$. Entonces quedan determinadas inductivamente dos sucesiones $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que: $y_n \in Y$, $\|u_n\| > \frac{1}{2}$ y $\|y_n - u_n\| < \frac{1}{2 \times 4^n K}$ para todo $n \geq 1$. Entonces, $\left(\frac{u_n}{\|u_n\|} \right)$ es una sucesión básica por bloques normalizada de $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, $\left(\frac{y_n}{\|u_n\|} \right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en Y y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{y_n}{\|u_n\|} - \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\| < \frac{1}{3K}$. Por la proposición anterior, $Z = [y_n]_{n=1}^{\infty}$ satisface lo requerido. ■

Capítulo 2

Algunos resultados sobre ℓ^∞ y c_0

2.1 Los espacios c y c_0

Proposición 2.1.1 *c y c_0 son espacios isomorfos a través de la transformación $(x_n)_{n=1}^\infty \to (\lambda, x_1 - \lambda, x_2 - \lambda, ...)$, donde $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.*

Proposición 2.1.2 *Cualquier proyección continua $P : c \to c_0$ tiene norma mayor o igual que 2.*

Demostración.
Sea $x = (x_n)_{n=1}^\infty = (1, 1, ...) - P(1, 1, ...)$. Entonces $x \neq 0$ y $P(x) = 0$. Supongamos $\|x\| = |x_i|$, entonces, $\|x - 2x_i e_i\| = |x_i|$, donde e_i es el i -ésimo vector de la base canónica de c_0, y $P(x - 2x_i e_i) = -2x_i e_i$. Por consiguiente, $\|P(x - 2x_i e_i)\| = 2|x_i| \leq \|P\| \; |x_i|$ y $\|P\| \geq 2$.■

Sabemos que c y c_0 son espacios separables y ℓ^∞ no lo es. Sin embargo este último tiene un subconjunto denso que más adelante nos será de utilidad..

Proposición 2.1.3 *Las sucesiones simples (aquellas que sólo toman un número finito de valores), son densas en ℓ^∞.*

Demostración.
Sea $x = (x_1, x_2, ...) \in \ell^\infty$ y $m \in \mathbb{N}$, dividamos el intervalo $[-(\|x\| + 1), \|x\|]$ en m partes iguales con los puntos $y_{m0}, y_{m1}, ..., y_{mm}$, donde $-(\|x\| + 1) = y_{m0} < y_{m1} < \cdots < y_{mm} = \|x\|$. Tomemos

$$E_i(m) = \left\{k \in \mathbb{N} : y_{m(i-1)} < x_k \leq y_{mi}\right\}$$

para $i = 1, 2, ..., m$ y definamos $\overline{x}_m = (x_{m1}, x_{m2}, ...)$, con $x_{mk} = y_{mi}$ para $k \in E_i(m)$. Es claro que $\overline{x}_m$ es simple, y si $k \in E_i(m)$, entonces

$$|x_k - x_{mk}| = y_{mi} - x_k < (2\|x\| + 1)/m,$$

entonces $\|x-\overline{x}_m\| \leq (2\|x\|+1)/m$ y se sigue el resultado. ■

2.2 Espacios de Banach separables y ℓ^∞

Lema 2.2.1 *Sea X un espacio de Banach separable de dimensión infinita. Entonces,*

a) Existe una familia numerable $\{x_n^*\}$ en la esfera unitaria de X^* tal que $\|x\| = \sup\limits_n |x_n^*(x)|$ para cada $x \in X$.

b) Existe una isometría lineal S de X en l^∞.

Demostración.

a) Sea $\{x_m\}$ un subconjunto de X numerable y denso en X. Para cada $m \geq 1$ existe una sucesión $\left(x_{m,i}^*\right)$ en la esfera unitaria de X^* tal que $\|x_m\| = \sup\limits_i \left|x_{m,i}^*(x_m)\right|$. Sea $\{x_n^*\}$ una numeración de $\left\{x_{m,i}^* : m \geq 1, i \geq 1\right\}$. Claramente, $\sup\limits_i |x_n^*(x)| \leq \|x\|$. Dados $x \in X$ y $\epsilon > 0$, existen x_m y x_n^* tales que: $\|x - x_m\| < \frac{\epsilon}{3}$ y $\|x_m\| - |x_n^*(x_m)| < \frac{\epsilon}{3}$. Así $\|x\| - |x_n^*(x)| \leq \|x - x_m\| + \|x_m\| - |x_n^*(x_m)| + |x_n^*(x_m) - x_n^*(x)| < \epsilon$. De donde se sigue el resultado.

b) Defínase $S(x) = (x_n^*(x))$ para cada $x \in X$. ■

Teorema 2.2.2 *Sean $X \subset Y$ dos espacios de Banach y $T : X \to \ell^\infty$ un operador lineal continuo. Entonces existe una extensión lineal continua $\widetilde{T} : Y \to \ell^\infty$ de S tal que $\|T\| = \left\|\widetilde{T}\right\|$.*

Demostración.

Sea $\pi_i : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ la proyección en la i -coordenada, para $i \geq 1$. Entonces, $x_i^* = \pi_i \circ T \in X^*$, $T(x) = (x_i^*(x))_i$ y$\|x_i^*\| \leq \|T\|$ para todo $i \geq 1$ y $x \in X$. Sea y_i^* una extensión de Hahn-Banach de x_i^* a Y para $i \geq 1$. Definimos $\widetilde{T}(y) = (y_i^*(y))_i$ para $y \in Y$. Es claro que $\widetilde{T}$ es una extensión lineal continua de T con $\left\|\widetilde{T}\right\| \leq \|T\|$ y por ser $\widetilde{T}$ extensión de T se tiene $\left\|\widetilde{T}\right\| = \|T\|$.■

El espacio ℓ^∞ es un espacio inyectivo, es decir, si X es un espacio de Banach que lo contiene, entonces existe un proyección continua de X sobre ℓ^∞ (tómese T igual a la identidad $I : \ell^\infty \to \ell^\infty$ en el teorema anterior). Esta propiedad no la tiene c_0 como se prueba en el teorema que sigue, para cuya demostración se necesita el siguiente

Lema 2.2.3 *Supongamos que A es un conjunto numerable infinito. Entonces existe una familia $S = \{S_\alpha : \alpha \in I\}$ de subconjuntos de A tales que:*

a) Para cada $\alpha \in I$, el conjunto S_a es infinito.

b) Si $\alpha, \beta \in I$ y $\alpha \neq \beta$, entonces el conjunto $S_a \cap S_\beta$ es finito.

c) El conjunto de índices I es no numerable.

Demostración.

Basta analizar el caso en que A es el conjunto de los racionales en $(0,1)$ y sea I el conjunto de irracionales en $(0,1)$. Para cada $\alpha \in I$, sea S_α el rango de una sucesión de racionales en $(0,1)$, distintos entre sí, que convergen a α. Así tenemos que I y $\{S_\alpha : \alpha \in I\}$ cumplen con lo requerido. ■

Teorema 2.2.4 *El espacio c_0 no está complementado en l^∞*

Demostración.

En esta prueba diremos que un espacio de Banach X tiene la propiedad P si existe una familia numerable $\Im$ de X^* que separa los puntos de X.

Es claro que si un espacio de Banach X tiene la propiedad P, entonces también la tiene cualquier subespacio de X y cualquier espacio isomorfo a X. En particular, l^∞ tiene la propiedad P pues claramente la familia $\Im = \{\pi_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $(l^\infty)^*$, donde π_n es la proyección en la n-ésima coordenada, separa los puntos de l^∞

Supongamos que algún subespacio cerrado N de l^∞ es el complemento topológico de c_0, entonces por la Proposición 1.5.4, $l^\infty / c_0 \cong N$ y en consecuencia l^∞ / c_0 tiene la propiedad P.

Sea $A = \mathbb{N}$, y tomamos $S = \{S_\alpha : \alpha \in I\}$ como en el lema anterior. Para cada $\alpha \in I$, sea $x_\alpha \in l^\infty$ tal que $\pi_n(x_\alpha) = 1$ si $n \in S_\alpha$ y $\pi_n(x_\alpha) = 0$ si $n \notin S_\alpha$.

Afirmamos que $x_\alpha + c_0 \neq x_\beta + c_0$ si $\alpha \neq \beta$. Supongamos lo contrario, entonces $x_\alpha + x_0 = x_\beta + y_0$ con $x_0, y_0 \in c_0$; por consiguiente, $x_\alpha - x_\beta \in c_0$ y como los términos de x_α y x_β son 0 o 1 esto implica que a partir de un cierto índice la sucesión $x_\alpha - x_\beta$ se estaciona en 0, esto a su vez implica que los términos de x_α coinciden con los términos de x_β a partir de cierta entrada, o sea para toda n suficientemente grande tenemos $n \in S_a$ si y sólo si $n \in S_\beta$. Esto nos dice que el conjunto $S_\alpha \cap S_\beta$ es infinito, lo cual contradice una de las propiedades de la familia S.

Supóngase que sucede lo siguiente: $y^* \in (l^\infty / c_o)^*$, $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son índices en I, distintos entre sí, que satisfacen $\left|y^*(x_{\alpha_j} + c_0)\right| \geq \dfrac{1}{m}$, para $j = 1, ..., n$. Sean $\gamma_1, ..., \gamma_n$ escalares de valor absoluto 1, tales que $\gamma_j y^*(x_{\alpha_j} + c_0) = \left|y^*(x_{\alpha_j} + c_0)\right|$ para $j = 1, ..., n$. Las propiedades a) y b) del lema anterior aseguran que una infinidad de términos de $\sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_j x_{\alpha_j} \in l^\infty$ tienen valor absoluto 1 y sólo un número finito de ellos tiene valor absoluto mayor que 1. De lo cual se sigue:

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_{\alpha_j} + c_0 \right\| = 1,$$

por tanto,

$$\|y^*\| \geq \left| y^* \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_{\alpha_j} + c_0 \right) \right| = \sum_{j=1}^{n} \left| y^* \left(x_{\alpha_j} + c_0 \right) \right| \geq \frac{n}{m}$$

y así $m \|y^*\| \geq n$. Consecuentemente, dado $y^* \in (l^\infty \diagup c_o)^*$se tiene que para cada natural $m > 0$ hay sólo una cantidad finita de elementos $\alpha \in I$ tales que $|y^* (x_a + c_0)| \geq \dfrac{1}{m}$. Se sigue que para cada $y^* \in (l^\infty \diagup c_0)^*$ hay sólo una cantidad numerable de índices α tales que $y^* (x_\alpha + c_0) \neq 0$.

Ahora supóngase que $\mathcal{F}$ es un subconjunto numerable de $(l^\infty \diagup c_0)^*$. Entonces, hay sólo una cantidad numerable de índices $\alpha \in I$ tales que $y^* (x_\alpha + c_0) \neq 0$ para algún $y^* \in \mathcal{F}$. En vista de que I es no numerable, existen $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ distintos entre sí, tales que $y^* (x_{\alpha_1} + c_0) = y^* (x_{\alpha_2} + c_0) = 0$ para toda $y^* \in \mathcal{F}$, lo cual muestra que $\mathcal{F}$ no es una familia separante para $l^\infty \diagup c_0$. Por tanto el espacio $l^\infty \diagup c_0$ no tiene la propiedad P, lo que es una contradicción a lo supuesto. ■

2.3 Subespacios de c_0

Proposición 2.3.1 *Sea $(u_j)_{j=1}^\infty$ una base por bloques normalizada de la base canónica $(e_n)_{n=1}^\infty$ de c_0. Entonces,*

a) $(u_j)_{j=1}^\infty$ es equivalente a $(e_n)_{n=1}^\infty$ y $[u_j]_{j=1}^\infty$ es isométrico a c_0.

b) $[u_j]_{j=1}^\infty$ está complementado en c_0; más aún, existe una proyección de norma 1 de c_0 sobre $[u_j]_{j=1}^\infty$.

Demostración.

a) Existe una sucesión creciente de enteros $0 \leq m_1 < m_2 < ...$ talque $u_j = \sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} \lambda_{ij} e_i$, con $\max_{m_j+1 \leq i \leq m_{j+1}} |\lambda_{ij}| = 1$, para $j = 1, 2, ...$ Sabemos que $(u_j)_{j=1}^\infty$ es una sucesión básica.

Sea $(x_j)_{j=1}^\infty$ una sucesión de escalares, entonces

$$\left\| \sum_{j=m}^{n} x_j u_j \right\| = \max_{m \leq j \leq n} \left| \max_{m_j+1 \leq i \leq m_{j+1}} |x_j \lambda_{ij}| \right| = \max_{m \leq j \leq n} |x_j| = \left\| \sum_{j=m}^{n} x_j e_j \right\|. \tag{2.1}$$

De donde, $\sum_{j=1}^{\infty} x_j u_j$ converge si y sólo si $\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$ converge; es decir $\sum_{j=1}^{\infty} x_j u_j$ converge si y sólo si $(x_j) \in c_0$. Al tomar $m = 1$ en 2.1, obtenemos que si las series correspondientes convergen, entonces tiene la misma norma. Así, $T : c_0 \to [u_j]_{j=1}^\infty$ definida en la base canónica como $T(e_i) = u_i$ es una isometría lineal y sobre, con lo que queda probado a).

b) Sea $j \geq 1$, existe $m_j + 1 \leq i(j) \leq m_{j+1}$ tal que $\left|\lambda_{i(j)j}\right| = 1$. Observamos que $i(j) < i(j+1)$. Sea a_j un escalar tal que $|a_j| = 1$ y $a_j \lambda_{i(j)j} = \left|\lambda_{i(j)j}\right| = 1$ y definimos $\left(u_j^*(x)\right)_j = (a_j)_j \left(x_{i(j)}\right)_j$, para $x \in c_0$. Entonces, $u_j^* \in c_0^*$, $\left\|u_j^*\right\| = u_j^*(u_j) = 1$ y $u_j^*(u_k) = 0$ si $k \neq j$. Sea $x \in c_0$, entonces $u_j^*(x) = a_j x_{i(j)}$ para cada $j \geq 1$, así $\left(u_j^*(x)\right)_j \in c_0$ y por lo antes visto $\sum\limits_{j=1}^{\infty} u_j^*(x) u_j$ converge y su norma es igual a $\left\|\sum\limits_{j=1}^{\infty} u_j^*(x) e_j\right\|$.

Definamos $P : c_0 \to [u_j]_{j=1}^{\infty}$ como $P(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} u_j^*(x) u_j$, si $y = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i u_i$ está en $[u_j]_{j=1}^{\infty}$, entonces,

$$P(y) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i u_i\right) u_j = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i u_j^*(u_i)\right) u_j = \sum_{j=1}^{\infty} b_j u_j = y \qquad ((1))$$

o sea P es una proyección no nula sobre $[u_j]_{j=1}^{\infty}$ y por consiguiente, $\|P\| \geq 1$.

Si $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i e_i$, entonces $\left|u_j^*(x)\right| \leq \max\limits_{m_j+1 \leq i \leq m_{j+1}} |x_i|$ para $j = 1, 2, \ldots$; de donde,

$$\begin{aligned} \|P(x)\| &= \left\|\sum_{j=1}^{\infty} u_j^*(x) u_j\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} u_j^*(x) e_j\right\| \\ &= \max \left|u_j^*(x)\right| \leq \max_{j \geq 1} \max_{m_j+1 \leq i \leq m_{j+1}} |x_i| \leq \|x\|. \end{aligned}$$

Por tanto, $\|P\| = 1$.■

Corolario 2.3.2 *Todo subespacio Y de c_0 cerrado y de dimensión infinita contiene un subespacio Z isomorfo a c_0 y complementado en c_0, y por tanto, en Y.*

Demostración.

Sea Y un subespacio cerrado de c_0. Al aplicar la Proposición 1.6.13 con $X = c_0$ se sigue que existe un subespacio cerrado Z de Y el cual tiene una base equivalente a una sucesión básica por bloques normalizada $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Por consiguiente, Z es isomorfo a $[u_j]_{j=1}^{\infty}$ que a su vez, por la proposición anterior, es isomorfo a c_0 y complementado en c_0. De esto se sigue que Z es isomorfo a c_0. Por otra parte, sea $P : c_0 \to [u_j]_{j=1}^{\infty}$ una proyección continua y $T : Z \to [u_j]_{j=1}^{\infty}$ un isomorfismo; sabemos, por la Proposición 3.2.4 y el Teorema 3.2.5, que veremos en el siguiente capítulo, que existe una extensión continua $S : c_0 \to [u_j]_{j=1}^{\infty}$ de T. Entonces, $T^{-1}PS$ es una proyección continua de c_0 en Z.■

Definición 2.3.3 *Sean $X_1, X_2, ...$ espacios de Banach con normas $\|\|_1, \|\|_2, ...$, respectivamente. Definimos el espacio normado $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_0$ como la colección de todas las sucesiones $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, con $x_i \in X_i$, tales que $(\|x_i\|_i)_{i=1}^{\infty} \in c_0$, y en el que la norma está dada por $\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\| = \max_{i\geq 1} \|x_i\|_i$.*

Proposición 2.3.4 $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_0$ *es un espacio de Banach.*

Demostración.

Sean $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en dicho espacio, donde $y_n = (x_{n1}, x_{n2}, ...)$ y $\epsilon > 0$; existe $N > 0$ tal que $\|y_m - y_n\| < \epsilon$ si $m, n \geq N$, es decir, $\max_{i\geq 1} \|x_{mi} - x_{ni}\|_i < \epsilon$ si $m, n \geq N$, o sea la sucesión $(x_{ni})_{n=1}^{\infty}$ en X_i es una sucesión de Cauchy y por tanto, converge, digamos a $x_i \in X_i$.

De lo anterior obtenemos $\max_{i\geq 1} \|x_i - x_{ni}\|_i \leq \epsilon$ si $n \geq N$ lo que significará que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, una vez que veamos que este elemento está en el espacio $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_0$. De esa desigualdad se sigue $\|x_i\|_i \leq \|x_{Ni}\|_i + \epsilon$, y como $(\|x_{ni}\|_i)_{i=1}^{\infty} \in c_0$ para todo $n \geq 1$, obtenemos $\overline{\lim_i} \|x_i\|_i \leq \epsilon$ y entonces, $\lim_{i\to\infty} \|x_i\|_i = 0$ y $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in (X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_0$. ■

Lema 2.3.5 $(X \oplus X \oplus \cdots)_0 \oplus X$ *es isomorfo a* $(X \oplus X \oplus \cdots)_0$.

Demostración.

Para $((x_1, x_2, ...), x_0) \in (X \oplus X \oplus \cdots)_0 \oplus X$, con $(x_1, x_2, ...) \in (X \oplus X \oplus \cdots)_0$ y $x_0 \in X$, defínase $\varphi : (X \oplus X \oplus \cdots)_0 \oplus X \to (X \oplus X \oplus \cdots)_0$ como $\varphi((x_1, x_2, ...), x_0) = (x_0, x_1, x_2, ...)$. ■

Sea $\{e_i\}$ la base canónica de c_0, y $a_{in} = \left(\overline{0}, \overline{0}, ..., e_i, \overline{0}, ...\right) \in (c_0 \oplus c_0 \oplus \cdots)_0$, donde e_i se encuentra en la n-ésima entrada y $\overline{0} = (0, 0, ...)$. La suma $\sum_{n=1}^{r}\sum_{i=1}^{s} x_{in}a_{in}$ la podemos escribir como

$$\begin{array}{lllllll}
x_{11}a_{11} & + & x_{21}a_{21} & + & \cdots & + & x_{s1}a_{s1} \ + \\
x_{12}a_{12} & + & x_{22}a_{22} & + & \cdots & + & x_{s2}a_{s2} \ + \\
\vdots & & & & & & \\
x_{1r}a_{1r} & + & x_{2r}a_{2r} & + & & + & x_{sr}a_{sr}
\end{array}$$

y esto es igual a

$$\begin{array}{ccccccc}
\left(x_{11}e_1, \overline{0}, ...\right) & + & \left(x_{21}e_2, \overline{0}, ...\right) & + \cdots + & \left(x_{s1}e_s, \overline{0}, ...\right) & + \\
\left(\overline{0}, x_{12}e_1, \overline{0}, ...\right) & + & \left(\overline{0}, x_{22}e_2, \overline{0}, ...\right) & + \cdots + & \left(\overline{0}, x_{s2}e_s, \overline{0}, ...\right) & + \\
\vdots & & & & & \\
\left(\overline{0}, ..., x_{1r}e_1, \overline{0}, ...\right) & + & \left(\overline{0}, ..., x_{2r}e_2, \overline{0}, ...\right) & + \quad + & \left(\overline{0}, ..., x_{sr}e_s, \overline{0}, ...\right) &
\end{array}$$

y realizando la suma coordenada a coordenada, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{r}\sum_{i=1}^{s} x_{in}a_{in} = \left((x_{11},...,x_{s1},0,...),(x_{12},...,x_{s2},0,...),...,(x_{1r},...,x_{sr},0,...),\overline{0},...\right)$$

De esta expresión se sigue el siguiente

Lema 2.3.6 *Los vectores a_{in}, con $i,n \geq 1$ son linealmente independientes y el subespacio que generan es denso en $(c_0 \oplus c_0 \oplus \cdots)_0$.*

Demostración.
La primera afirmación es inmediata. Sea $x \in (c_0 \oplus c_0 \oplus \cdots)_0$, con $x = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, ...)$. Existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $n > r$ implica $\|\overline{x}_n\| < \epsilon$. Escribamos $\overline{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, ...)$, para $n \geq 1$. Existe $s > 0$ tal que $|x_{in}| < \epsilon$ si $i > s$ para todo $1 \leq n \leq r$. Sea $x' = \sum_{n=1}^{r}\sum_{i=1}^{s} x_{in}a_{in} \in \langle a_{in}\rangle_{i,n}$, entonces

$$x - x' = \left(\left(0,0,...,x_{(s+1)1},...\right),\left(0,0,...,x_{(s+1)2},...\right),...,\left(0,0,...,x_{(s+1)r},...\right),\overline{x}_{r+1},...\right)$$

y como cada entrada tiene norma menor que ϵ, se obtiene $\|x - x'\| < \epsilon$; de donde, $\langle a_{in}\rangle_{i,n}$ es denso en $(c_0 \oplus c_0 \oplus \cdots)_0$.■

Lema 2.3.7 $(c_0 \oplus c_0 \oplus \cdots)_0$ *es isométricamente isomorfo a c_0.*

Demostración.
Usamos la notación del lema anterior. Sea $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función biyectiva y definamos la transformación lineal $T : \langle a_{i,n}\rangle \to c_0$ definida como $T(a_{in}) = e_{\varphi(i,n)}$. Probaremos que ésta es una isometría sobre $\langle e_i\rangle_i$.
Sea $x \in \langle a_{in}\rangle$ talque $T(x) = 0$. Entonces,

$$x = \sum_{n=1}^{r}\sum_{i=1}^{s} x_{i,n}a_{in} y T\left(\sum_{n=1}^{r}\sum_{i=1}^{s} x_{in}a_{in}\right) = \sum_{n=1}^{r}\sum_{i=1}^{s} x_{in}T(a_{in}) = \sum_{n=1}^{r}\sum_{i=1}^{s} x_{in}e_{\varphi(i,n)} = 0.$$

Como $\{e_i\}_i$ es un conjunto linealmente independiente, esto implica que $x_{in} = 0$ para toda pareja (i,n) y por tanto, $x = 0$ y T es inyectiva.

Por otro lado, si $y \in \langle e_i\rangle$ tenemos que $y = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i e_i$ y claramente $T(x) = y$ si $x = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i a_{\varphi^{-1}(i)}$, o sea, la imagen de T es $\langle e_i\rangle$.

Sea $x = \sum_{n=1}^{r}\sum_{i=1}^{s} \lambda_{in}a_{in}$, entonces

$$\left\|T\left(\sum_{n=1}^{r}\sum_{i=1}^{s} \lambda_{in}a_{in}\right)\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{r}\sum_{i=1}^{s} \lambda_{in}e_{\varphi(i,n)}\right\| = \max_{\substack{1\leq i\leq s\\ 1\leq n\leq r}} |\lambda_{in}|$$

y como

$$x = \left((\lambda_{11}, ..., \lambda_{s1}, 0, ...), (\lambda_{12}, ..., \lambda_{s2}, 0, ...), ..., (\lambda_{1r}, ..., \lambda_{sr}, 0, ...), \overline{0}, ... \right),$$

obtenemos

$$\|x\| = \max_{1\le n\le r} \|(\lambda_{in})_{i=1}^{\infty}\| = \max_{1\le n\le r} \left\{ \max_{1\le i\le s} |\lambda_{in}| \right\};$$

por tanto, $\|x\| = \|T(x)\|$.

Al ser T lineal y continua en el denso $\langle a_{i,n}\rangle$, se puede extender de modo lineal y continuo definiendo $\widetilde{T} : (c_0 \oplus c_0 \oplus \cdots)_0 \to c_0$ como $\widetilde{T}(x) = \lim T(x_n)$ si $(x_n) \in \langle a_{in}\rangle_{i,n}$ es una sucesión que converge a $x \in (c_0 \oplus c_0 \oplus \cdots)_0$. Más aún, $\widetilde{T}$ es una isometría suprayectiva, ya que

$$\left\|\widetilde{T}(x)\right\| = \|\lim T(x_n)\| = \lim \|T(x_n)\| = \lim \|x_n\| = \|x\|$$

Finalmente, si $y \in c_0$, entonces existen una sucesión (y_n) en $\langle e_i\rangle_i$ y otra $(x_n)_n$ en $\langle a_{in}\rangle$ tales que $y_n \to y$ y $T(x_n) = y_n$. Dado $\epsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_m - y_n\| < \epsilon$ si $m, n > M$, así tenemos

$$\|x_m - x_n\| = \|T(x_m - x_n)\| = \|T(x_m) - T(x_n)\| = \|y_m - y_n\| < \epsilon,$$

de donde concluimos que $(x_m) \subset \langle a_{in}\rangle$ es una sucesión de Cauchy en $(c_0 \oplus c_0 \oplus \cdots)_0$ y por tanto, converge, digamos a x; así,

$$\widetilde{T}(x) = \lim T(x_n) = \lim y_n = y,$$

es decir $\widetilde{T}$ es suprayectiva. ■.

Teorema 2.3.8 *Todo subespacio complementado de c_0 de dimensión infinita es isomorfo a c_0.*

Sea Y un subespacio de dimensión infinita y complementado en c_0, entonces existe un subespacio cerrado X_1 de c_0 tal que $c_0 = Y \oplus X_1$. Por el corolario 2.3.2 sabemos que Y contiene un subespacio Z el cual es isomorfo a c_0 y complementado en Y, es decir $Y = Z \oplus Y_1$ para algún espacio de Banach Y_1 de Y. Entonces por los lemas anterior y 2.3.5 obtenemos

$$c_0 \oplus Y \approx c_0 \oplus (Z \oplus Y_1) \approx (c_0 \oplus c_0) \oplus Y_1 \approx c_0 \oplus Y_1 \approx Z \oplus Y_1 \approx Y$$

y como en el lema anterior se probó que c_0 es isométricamente isomorfo a $(c_0 \oplus c_0 \oplus \cdots)_0$ tenemos la siguiente cadena de isomorfismos

$$\begin{aligned} c_0 \oplus Y &\approx (c_0 \oplus c_0 \oplus \cdots)_0 \oplus Y \approx ((Y \oplus X_1) \oplus (Y \oplus X_1) \oplus \cdots)_0 \oplus Y \\ &\approx (X_1 \oplus X_1 \oplus \cdots)_0 \oplus (Y \oplus Y \oplus \cdots)_0 \oplus Y \\ &\approx (X_1 \oplus X_1 \oplus \cdots)_0 \oplus (Y \oplus Y \oplus \cdots)_0 \\ &\approx ((Y \oplus X_1) \oplus (Y \oplus X_1) \oplus \cdots)_0 \approx c_0 \end{aligned}$$

por tanto, $Y \approx c_0 \oplus Y \approx c_0$. ■

Proposición 2.3.9 *Todo espacio isomorfo a un espacio cociente de c_0 es isomorfo a un subespacio de c_0.*

Capítulo 3

Espacios separablemente inyectivos

3.1 Teorema de Sobczyk

El teorema de Sobczyk asegura, en su versión original, que para todo espacio de Banach separable Y que contiene a c_0 existe una proyección de Y sobre c_0 de norma a lo más 2 y que ésta es la cota óptima.

La parte que se refiere a que 2 es la cota óptima se sigue de la Proposición 2.1.2.

Una versión más general de este resultado, que se presenta en el Teorema 3.1.2, puede probarse a partir del que se da a continuación. El Teorema 3.2.5 implica que los dos teoremas de esta sección son de hecho equivalentes.

Teorema 3.1.1 *Sea X un espacio de Banach separable y Y un subespacio cerrado de X. Si $T_0 : Y \to c_0$ es un operador lineal de norma λ, entonces existe una extensión $T : X \to c_0$ de norma a lo más 2λ.*

Demostración.

B_λ^* denota la bola cerrada en X^*, de radio λ y con centro en 0. Por el teorema de Alaoglu, B_λ^* es compacto en la topología w^* y como X es separable, entonces (B_λ^*, w^*) es metrizable (Corolario 1.3.11). Sea $d(\cdot,\cdot)$ una métrica compatible con w^* en B_λ^*; o sea, la convergencia de sucesiones en B_λ^* según esta distancia equivale a la convergencia puntual.

Por el teorema de Hahn-Banach existe una sucesión $\phi_1, \phi_2, ...$ en B_λ^* tal que para la n-ésima coordenada $T_0(y)_n$ de $T_0(y)$, con $y \in Y$, se satisface $T_0(y)_n = \phi_n(y)$. Hacemos $K = B_\lambda^* \cap Y^\perp$. El w^*-límite de cualquier subsucesión de (ϕ_n) pertenece a K, como vemos a continuación: si $\psi \in X^*$ es el w^*-límite de una subsucesión (ϕ_{n_k})de $(\phi_n)_{n=1}^\infty$, entonces $\phi_{n_k}(x) \to \psi(x)$ cuando $n \to \infty$, para cada $x \in X$; en especial, $|\psi(x)| \leq \lambda \|x\|$ y $\psi(y) = 0$, con $y \in Y$, ya que es el límite de una subsucesión de $T_0(y)$. Así, $\|\psi\| \leq \lambda$ y $\psi(y) = 0$, si $y \in Y$; es decir, $\psi \in K$.

Tenemos $d(\phi_n, K) \to 0$, ya que en caso contrario $d\left(\phi_{n_k}, K\right) \geq \epsilon$ para una subsucesión $\left(\phi_{n_k}\right)$ de $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ y alguna $\epsilon > 0$. Por ser B_λ^* compacto existe una subsucesión $\left(\phi_{n_{k_j}}\right)$ de $\left(\phi_{n_k}\right)$que converge a ψ; por consiguiente, $\psi \in K$ y $d\left(\phi_{n_{k_j}}, \psi\right) \geq d\left(\phi_{n_{k_j}}, K\right) \geq \epsilon$, lo cual no es posible.

Es claro que K es un w^*-cerrado de B_λ^*, de donde, K es un subconjunto w^*-compacto. Así, para cada $n \geq 1$ existe $\phi_n \in K$ que minimiza $d(\phi_n, \psi)$, para $\psi \in K$; es decir, $d(\phi_n, \psi_n) = d(\phi_n, K)$. Entonces $d(\phi_n, \psi_n) \to 0$, o sea, la sucesión $(\phi_n - \psi_n)_{n=1}^{\infty}$ en $B_{2\lambda}^*$ es tal que $(\phi_n(x) - \psi_n(x))_{n=1}^{\infty}$ pertenece a c_0, para cada $x \in X$. Defínase $(Tx)_n = \phi_n(x) - \psi_n(x)$, entonces T es un operador lineal de X en c_0, con norma a lo más 2λ y extiende a T, ya que $T_0(y)_n = \phi_n(y)$ y $\psi_n(y) = 0$ para todo $y \in Y$. ■

Teorema 3.1.2 *Para todo espacio de Banach separable Y que contiene una copia isométrica $Y(c_0)$ de c_0 existe una proyección de Y sobre $Y(c_0)$, de norma a lo más* 2.

Demostración.

Sea $T_0 : Y(c_0) \to c_0$ una isometría suprayectiva, entonces existe $T : Y \to c_0$ tal que $T|Y = T_0$ y $\|T\| \leq 2$, ya que $\|T_0\| = 1$. Sea $P : Y \to Y(c_0)$ el operador definido como $P(y) = \left(T_0^{-1} \circ T\right)(y)$. Es claro que $\|P\| \leq 2$ y $P(y) = y$ para todo $y \in Y(c_0)$. Además, como $P(x) \in Y(c_0)$ para todo $x \in Y$, se cumple $P^2(y) = P(P(y)) = P(y)$. Por tanto, P es una proyección de Y sobre $Y(c_0)$. ■

3.2 Espacios separablemente inyectivos

La propiedad de c_0 señalada en el Teorema de Sobczyk llevó a la siguiente

Definición 3.2.1 *Un espacio de Banach X de dimensión infinita y separable, se dice que es separablemente inyectivo si para todo espacio de Banach separable Y que contiene a X, existe una proyección continua P de Y sobre X; o lo que es lo mismo X está complementado en Y.*

En la próxima proposición veremos que la condición $X \subset Y$ se puede sustituir por: Y contiene una copia isomorfa (en particular, isométrica) de X. Para esto usaremos:

Lema 3.2.2 *Sean X y Y dos conjuntos. Entonces, existe $x \in 2^X$ tal que X y $Y \times \{x\}$ son ajenos.*

Demostración.

Sea $A = \left\{\overline{x} \in 2^X : (y, \overline{x}) \in X \text{ para alguna } y \in Y\right\}$, claramente $A \subset 2^X$ y afirmamos que esta contención es propia. Supongamos que $A = 2^X$ entonces para cada $\overline{x} \in 2^X$ existe $y \in Y$ tal que $(y, \overline{x}) \in X$. Sea $f : X \to 2^X$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \overline{x} \text{ si } x = (y, \overline{x}) \text{ con } y \in Y \text{ y } \overline{x} \in 2^X \\ \emptyset \quad \text{en caso contrario} \end{cases}$$

En vista de nuestra suposición f es una función suprayectiva y por tanto, $\left|2^X\right| \leq |X|$ lo cual es falso. Así, $A \subsetneq 2^X$ y se tiene que existe $\overline{x} \in 2^X$ tal que $(y, \overline{x}) \notin X$ para todo $y \in Y$; o sea, $X \cap (Y \times \{\overline{x}\}) = \emptyset$. ■

Proposición 3.2.3 *Sea X un espacio de Banach X, de dimensión infinita y separable. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) X es separablemente inyectivo.

b) Para todo espacio separable Y que contiene una copia isométrica $Y(X)$ de X, existe una proyección continua Q de Y sobre $Y(X)$.

c) Para todo espacio separable Y que contiene una copia isomorfa $Y(X)$ de X, existe una proyección continua P de Y sobre $Y(X)$.

Demostración.

a)$\Rightarrow$b) Sea Y un espacio de Banach separable que contiene una copia isométrica $Y(X)$ de X. Sean $T : X \to Y(X)$ una isometría lineal suprayectiva, $\overline{x} \in 2^X$ como en el lema anterior y $Z = Y \times \{\overline{x}\}$ y $W = Y(X) \times \{\overline{x}\}$. Es claro que Z, con las operaciones lineales y la norma heredadas de Y es un espacio de Banach separable.

Definimos $D = X \cup (Z - W)$ y $f : D \to Z$ como

$$f(d) = \begin{cases} (T(d), \overline{x}) & \text{si } d \in X \\ d & \text{si } d \in Z - W \end{cases}$$

Demostraremos que f es biyectiva. Supongamos que $f(d) = f\left(d'\right)$. Tenemos los siguientes casos:

i) Si $d, d' \in X$, entonces $(T(d), \overline{x}) = \left(T(d'), \overline{x}\right)$ y por tanto, $T(d) = T(d')$. Como T es una isometría, se tiene que $d = d'$.

ii) Si $d, d' \in Z - W$, entonces $d = f(d) = f\left(d'\right) = d'$.

iii) El caso $d \in X$ y $d' \in Z - W$ no puede presentarse, ya que entonces $f(d) \in W$ y $f\left(d'\right) \notin W$.

Por consiguiente, f es inyectiva.

Por otra parte, sea $z \in Z$. Si $z \in Z - W$ se tiene que $f(z) = z$. Si $z \in W$, entonces $z = (y, \overline{x})$ para alguna $y \in Y(X)$; como T es sobre, existe $x \in X$ tal que

$T(x)=y$ y así, $z=(T(x),\overline{x})$, es decir, $z=f(x)$. Por tanto, f es sobre, con lo que queda probado que f es biyectiva.

Por la Proposición 1.2.3, a D se le puede dar una estructura de espacio vectorial normado a través de la función f. Por esa proposición sabemos que D es un espacio de Banach separable y además f es entonces un isomorfismo isométrico lineal entre D y Z.

Es fácil verificar que las originales operaciones lineales en X coinciden con las que hereda de D; además para todo $x\in X$ se tiene:

$$\|x\|_D=\|f(x)\|_Z=\|(T(x),\overline{x})\|_Z=\|T(x)\|_Y=\|x\|_X.$$

Por tanto, $\| \quad \|_D=\| \quad \|_X$ en X. Así, $(X,\| \quad \|_X)$ es un subespacio de Banach de $(D,\| \quad \|_D)$.

Como X es separablemente inyectivo, existe una proyección continua $P_X: D\rightarrow X$.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$Y\xrightarrow{i}Z\xrightarrow{f^{-1}}D\xrightarrow{P_X}X\xrightarrow{T}Y(X)$$

donde i representa la inmersión $y\rightarrow(y,\overline{x})$ de Y en $Z=Y\times\{\overline{x}\}$. Se afirma que $P:Y\rightarrow Y(X)$, definida como la composición $T\circ P_X\circ f^{-1}\circ i$ es una proyección continua de Y sobre $Y(X)$. Es claro que P es una transformación lineal continua por ser composición de tal tipo de transformaciones. Si $y\in Y(X)$, entonces $y=T(x)$ para una $x\in X$ y se tiene

$$T(x)\xrightarrow{i}(T(x),\overline{x})\xrightarrow{f^{-1}}x\xrightarrow{P_X}x\xrightarrow{T}T(x)$$

es decir, $P(y)=y$ y por tanto, P es una proyección de Y sobre $Y(X)$. Observamos que $\|P\|=\|P_X\|$.

b)$\Rightarrow$c) Supongamos que $Y(X)\subset(Y,\| \quad \|_Y)$ es una copia isomorfa de X. Sean $T:(X,\| \quad \|_X)\rightarrow(Y(X),\| \quad \|_Y)$ un isomorfismo y $\| \quad \|_T$ la norma inducida por T en $Y(X)$; entonces, $T:(X,\| \quad \|_X)\rightarrow(Y(X),\| \quad \|_T)$ es una isometría suprayectiva.

Según la Proposición 1.2.5, $\|\|_T$ es equivalente a $\| \quad \|_Y$ en $Y(X)$. Por el Teorema 1.2.6 se tiene que $\| \quad \|_T$ se puede extender a una norma en Y, que también denotaremos por $\| \quad \|_T$, de tal forma que $\| \quad \|_T\sim\| \quad \|_Y$ en Y. Así, existen constantes positivas m y M tales que

$$m\|y\|_T\leq\|y\|_Y\leq M\|y\|_T$$

para todo $y\in Y$. Más áun, podemos tomar $m=\left\|T^{-1}\right\|^{-1}$ y $M=\|T\|$

Entonces, $(Y(X),\| \quad \|_T)$ es una copia isométrica de $(X,\| \quad \|_X)$ en $(Y,\| \quad \|_T)$. Por b) existe una proyección continua $Q:(Y,\| \quad \|_T)\rightarrow(Y(X),\| \quad \|_T)$ con norma $\|Q\|_T$. Entonces

$$\|Qy\|_Y\leq M\|Qy\|_T\leq M\|Q\|_T\|y\|_T\leq\frac{M}{m}\ \|Q\|_T\|y\|_Y$$

para todo $y \in Y$.

Así, $Q : (Y, \| \quad \|_Y) \to (Y(X), \| \quad \|_Y)$ es también una proyección continua y $\|Q\|_Y \leq \|T\| \left\|T^{-1}\right\| \|Q\|_T$

c) $\Rightarrow$ a) Es obviamente cierto. ■

La propiedad de ser separablemente inyectivo es invariante bajo isomorfismos.

Proposición 3.2.4 *Sea X un espacio separablemente inyectivo y Z un espacio de Banach isomorfo a X. Entonces Z es separablemente inyectivo.*

Demostración.

Claramente Z es de dimensión infinita y separable.

Sea Y un espacio de Banach separable que contiene una copia isomorfa $Y(Z)$ de Z. Como X es isomorfo a Z se tiene que $Y(Z)$ es una copia isomorfa de X y como X separablemente inyectivo, entonces existe una proyección continua $P : Y \to Y(Z)$. Por tanto Z es separablemente inyectivo.■

Teorema 3.2.5 *Sea X un espacio de Banach, separable y de dimensión infinita. Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes.*

a) X es separablemente inyectivo.

b) (Propiedad de la extensión separable) Para cada espacio de Banach separable Y que contiene a X y cada operador lineal continuo $T : X \to Z$, donde Z es un espacio normado, existe una extensión continua $\widetilde{T} : Y \to Z$ de T.

c) Para cada par de espacios de Banach separables $Y \subset Z$ y cada operador lineal continuo $T : Y \to X$, existe una extensión lineal y continua $\widetilde{T} : Z \to X$ de T.

Demostración.

a) se sigue de b) o c) al tomar $Z = X$ y T la identidad, en el primer caso, y al tomar $Y = X$ y T la identidad en el segundo.

a)$\Rightarrow$b) Supongamos que X es separablemente inyectivo, Y es un espacio de Banach separable que contiene a X y $T : X \to Z$ es un operador lineal continuo, donde Z es un espacio normado. Sea $P : Y \to X$ una proyección continua. El operador $\widetilde{T} = TP : Y \to Z$ es una extensión lineal continua de T.

a)$\Rightarrow$c) Supongamos que X es separablemente inyectivo, $Y \subset Z$ son espacios de Banach separables y $T : Y \to X$ es operador lineal continuo. Sea $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ y $S : X \to l^{\infty}$ como en el Lema 2.2.1; es decir, $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en la esfera unitaria de X^*, tal que $\|x\| = \sup_n |x_n^*(x)|$ para cada $x \in X$ y $S(x) = (x_n^*(x))$ es una isometría lineal y por consiguiente, S tiene inverso continuo S^{-1} definido en $S(X)$. Para cada $n \geq 1$ sea z_n^* una extensión de Hahn-Banach de $T^*(x_n^*)$ a Z. Definamos $\widetilde{T}_0 : Z \to l^{\infty}$ como $\widetilde{T}_0(z) = (z_n^*(z))$. Entonces, $\widetilde{T}_0$ es lineal, $\left\|\widetilde{T}_0\right\| \leq \|T\|$, $\widetilde{T}_0(Y) \subset S(X)$ y $\widetilde{T}_0(Z)$ es un subespacio separable de l^{∞}. Sea $W = \left[S(X), \widetilde{T}_0(Z)\right]$ el subespacio cerrado de l^{∞} generado por $S(X)$

y $\widetilde{T}_0(Z)$, entonces W es un espacio de Banach separable. Sea $P : W \to S(X)$ una proyección continua sobre $S(X)$. El operador $\widetilde{T} = S^{-1}P\widetilde{T}_0 : Z \to X$ es una extensión lineal continua de T. ■

En el siguiente teorema , que no probaremos, aparecen dos ejemplos de espacios de Banach que no son separablemente inyectivos. El primero de ellos nos servirá para dar una condición necesaria para que un espacio sea separablemente inyectivo.

Teorema 3.2.6 *[2] Los espacios de Banach $C[0,1]$ y $C(\omega^\omega)$, donde ω es el primer ordinal infinito, no son separablemente inyectivos.*

Proposición 3.2.7 *Si X es separablemente inyectivo y M es un espacio de dimensión infinita, complementado en X, entonces M es separablemente inyectivo.*

Demostración.

Probaremos que M tiene la propiedad de extensión separable (Teorema 3.2.5). Sean Y un espacio de Banach separable, tal que $M \subset Y$, Z un espacio normado y $T : M \to Z$ un operador lineal y continuo.

Como M es complementado en X, entonces existe N tal que $X \cong M \times N$ y así, $M \times N$ es separablemente inyectivo.

Definimos $T_1 : M \times N \to Z$ como $T_1(m,n) = T(m)$. T_1 es lineal y continuo, y como $M \times N$ es separablemente inyectivo, existe una extensión continua $\widetilde{T_1} : Y \times N \to Z$ de T_1. Definimos $\widetilde{T} : Y \to Z$ como $\widetilde{T}(y) = \widetilde{T_1}(y,0)$. El operador $\widetilde{T}$ es lineal y continuo, y además

$$\widetilde{T}(m) = \widetilde{T_1}(m,0) = T_1(m,0) = T(m)$$

para todo $m \in M$; es decir, $\widetilde{T}$ extiende a T. Así, M es separablemente inyectivo. ■

Corolario 3.2.8 *El espacio $C(\omega^\omega)$ no es isomorfo a un subespacio complementado de un separablemente inyectivo.*

Demostración.

Recordamos que $C(\omega^\omega)$ no es separablemente inyectivo (Teorema 3.2.6*)*.■

Proposición 3.2.9 *Si X es separablemente inyectivo, entonces X^* es separable.*

Demostración.

Supongamos que X^* no es separable. Al ser X separable, existe un subespacio Z de $C[0,1]$ isométricamente isomorfo a X (Teorema 1.4.7). Sea $P : C[0,1] \to Z$ un proyección continua sobre Z. Entonces Z está complementado en $C[0,1]$ y como $X^* \cong Z^*$, tenemos que Z^* no es separable. Por la Proposición 1.5.9, Z es isomorfo a $C[0,1]$ y por tanto, $C[0,1]$ es isomorfo a X y por consiguiente, separablemente inyectivo , lo que contradice la Proposición 3.2.6. ■

Definición 3.2.10 *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita y separable. Se dice que X es un espacio $\mathcal{P}'_\gamma$, y escribimos entonces $X \in \mathcal{P}'_\gamma$, si para todo espacio separable Y que contiene a X (una copia isométrica $Y(X)$ de X), existe una proyección continua P de Y sobre X (sobre $Y(X)$) tal que $\|P\| \leq \gamma$.*

El hecho de que en la definición anterior se pueda cambiar X por $Y(X)$ se sigue de la prueba $a) \Rightarrow b)$ de la Proposición 3.2.3; especialmente hay que tener en cuenta la observación final de esa prueba.

A continuación veremos que todo espacio separablemente inyectivo es un $\mathcal{P}'_\gamma$ para alguna γ, y para esto probaremos la siguiente

Proposición 3.2.11 *Si X es separablemente inyectivo, entonces $X \in \mathcal{P}'_\gamma$ para alguna γ.*

Demostración.

Procedamos por contradicción, es decir supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un espacio de Banach separable tal que $X \subset Y_n$ y para toda proyección continua $P : Y_n \to X$ se tiene que $\|P\| > n$. Como X es separable, por el Lema 2.2.1, existe una isometría $T : X \to l^\infty$ y por el Lema 2.2.2 existe una extensión $T_n : Y_n \to l^\infty$ de T tal que $\|T_n\| = \|T\| = 1$. Observamos que $T(X) \subset T_n(Y_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea Z el subespacio lineal cerrado generado por $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(Y_n)$ en ℓ^∞. Entonces, Z es un espacio de Banach separable de dimensión infinita que contiene a la copia isométrica $T(X)$ de X. Sea $P : Z \to T(X)$ cualquier proyección. Tenemos el siguiente diagrama

$$Y_n \overset{T_n}{\to} Z \overset{P}{\to} T(X) \overset{T^{-1}}{\to} X$$

Afirmamos que para cada $n \geq 1$, el operador $T^{-1} \circ P \circ T_n : Y_n \to X$ es una proyección sobre X; en efecto, si $x \in X$, entonces

$$\left(T^{-1} \circ P \circ T_n\right)(x) = T^{-1}\left(P\left(T_n(x)\right)\right) = T^{-1}\left(P\left(T(x)\right)\right) = T^{-1}\left(T(x)\right) = x$$

Por tanto,

$$n < \left\|\left(T^{-1} \circ P \circ T_n\right)\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \|P\| \|T_n\| = \|P\|$$

para todo $n \geq 1$, lo que no es posible ya que P es continua.■

Definición 3.2.12 *Sean X y Z dos espacios de Banach isomorfos entre sí. Se define la distancia de Banach-Mazur entre X y Z como:*

$$d(X,Z) = \inf\left\{\|T\| \left\|T^{-1}\right\| : T \text{ es un isomorfismo entre } X \text{ y } Z\right\}.$$

Proposición 3.2.13 *Si $X \in \mathcal{P}'_\gamma$ y Z es un espacio isomorfo a X talque $d(X,Z) \leq \mu$ entonces $Z \in \mathcal{P}'_{\mu\gamma}$.*

Demostración.

Supongamos que $Y(Z) \subset (Y, \|\|_Y)$ es una copia isométrica de Z en $(Y, \|\|_Y)$ y $T : (X, \|\|_X) \to (Z, \|\|_Z)$ es un isomorfismo. Sea $i : (Z, \|\|_Z) \to (Y(Z), \|\|_Y)$ una isometría. Entonces, $i \circ T(X)$ es una copia isomorfa de X en $(Y, \|\|_Y)$. Al seguir lo hecho en la prueba de la implicación b)⇒c) de la Proposición 3.2.3, obtenemos que existe una proyección $Q : (Y, \|\|_Y) \to (Y(Z), \|\|_Y)$ tal que $\|Q\| \leq \|i \circ T\| \left\|(i \circ T)^{-1}\right\| \gamma \leq \|T\| \left\|T^{-1}\right\| \gamma$. Como esto es válido para cualquier isomorfismo T entre X y Z, concluimos que $\|Q\| \leq \mu\gamma$, es decir, $Z \in \mathcal{P}'_{\mu\gamma}$. ■

En [8] se prueba el siguiente

Teorema 3.2.14 *Si X es separablemente inyectivo, entonces X^* es isomorfo a ℓ^1 y por tanto, existe una constante μ y una base (φ_n) de X^* que satisfacen*

$$\mu^{-1} \sum |a_n| \leq \left\| \sum a_n \varphi_n \right\| \leq \sum |a_n|$$

para todas las sucesiones reales (a_n); donde $\|\sum a_n \varphi_n\|$ se interpreta como ∞ si $\sum a_n \varphi_n$ no converge en X^* , ya que $\sum a_n \varphi_n$ converge si y sólo si $(a_n) \in \ell^1$.

De este teorema y la Proposición 1.6.4 obtenemos:

Corolario 3.2.15 *Si X es separablemente inyectivo, entonces X tiene una base que encoge.*

3.3 El inverso del teorema de Sobczyk

El teorema de Sobczyk establece que c_0 es separablemente inyectivo; más aún, hace ver que $c_0 \in \mathcal{P}'_2$. Por su parte, la Proposición 3.2.4 establece que cualquier espacio isomorfo a c_0 es separablemente inyectivo. En lo que sigue se probará el inverso:

Teorema 3.3.1 *(Inverso del Teorema de Sobczyk). Si X es separablemente inyectivo, entonces X es isomorfo a c_0.*

De acuerdo al Teorema 3.2.5, este último teorema nos da una respuesta afirmativa del llamado:

Problema de la extensión separable: ¿es cierto que si X tiene la propiedad de la extensión separable, entonces X es isomorfo a c_0?

Resultados estrechamente relacionados con el que nos interesa son las siguientes dos proposiciones.

Proposición 3.3.2 *Si X es separablemente inyectivo y existe una inmersión $i : X \to c_0$, entonces X es isomorfo a c_0.*

Demostración.

Como $i : X \to c_0$ es un isomorfismo sobre su imagen, tenemos que $i(X)$ es una copia isomorfa de X en c_0. Por la Proposición 3.2.4 $i(X)$ está complementado en c_0. Por la Proposición 2.3.8, tenemos que $i(X)$ es isomorfo a c_0 y así, X es isomorfo a c_0. ■

Proposición 3.3.3 *Si X es separablemente inyectivo y existe un operador continuo y suprayectivo $T : c_0 \to X$, entonces X es isomorfo a c_0.*

Demostración.

Sea $N = \ker T$ y considérese $\widetilde{T} : c_0/N \to X$ definido como $\widetilde{T}(y) = T(y)$ para toda $y \in c_0$. Es fácil ver que $\widetilde{T}$ es un isomorfismo de c_0/N en X. Por la Proposición 2.3.9, existe un subespacio Z de c_0 que es isomorfo a X. Por la Proposición 3.2.4, Z está complementado en c_0 y por la Proposición 2.3.8, Z es isomorfo a c_0 y por consiguiente, X es isomorfo a c_0. ■

Para probar el Inverso del Teorema de Sobczyk basta hacer ver que las hipótesis de cualquiera de las dos proposiciones anteriores, relativas a las transformaciones que ahí aparecen, siempre se cumplen si X es separablemente inyectivo. Por lo pronto, aceptemos el siguiente teorema que probaremos en la parte final de este trabajo.

Teorema 3.3.4 (Teorema Principal) *Sea X un espacio separablemente inyectivo. Existen un espacio métrico compacto K, una inmersión ι de X en $C(K)$ y $\mu > 0$ tales que $(2\mu)^{-1}\|x\| \leq \|\iota(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$. Además, dado $\epsilon_0 > 0$ existe un subespacio Y de $C(K)$, isomorfo a c_0, tal que para cada $x \in X$ existe $y \in Y$ que satisface $\|\iota(x) - y\| \leq \epsilon_0 \|\iota(x)\|$.*

Con la ayuda de este teorema probaremos el siguiente teorema que, por la proposición anterior, tiene por corolario al Inverso del Teorema de Sobczyk

Teorema 3.3.5 *Si X es separablemente inyectivo, entonces existe un operador continuo y suprayectivo $T : c_0 \to X$.*

Demostración.

Supongamos que X es separablemente inyectivo y que $X \in \mathcal{P}'_\gamma$. Con la notación de la proposición anterior, escojamos $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$ suficientemente pequeña para que $2\mu\gamma\epsilon_0 < \frac{1}{2}$. Tenemos: $\|\iota\| \leq 1$ y $\left\|\iota^{-1}\right\| \leq 2\mu$. Así, $d(X, \iota(X)) \leq 2\mu$, donde d es la distancia de Banach-Mazur. De la Proposición 3.2.13 tenemos que $\iota(X) \in \mathcal{P}'_{2\gamma\mu}$.

Sea $P : C(K) \to \iota(X)$ una proyección continua sobre $\iota(X)$, talque $\|P\| \leq 2\mu\gamma$. Definimos $Q = P|_Y$. Dado $x \in X$, existe $y \in Y$ tal que $\|\iota(x) - y\| \leq \epsilon\|\iota(x)\|$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|Q(y) - \iota(x)\| &= \|P(y) - P(\iota(x))\| \leq \|P\| \|y - \iota(x)\| \leq \\ \|P\| \epsilon_0 \|\iota(x)\| &\leq 2\mu\gamma\epsilon_0 \|\iota(x)\| < \frac{1}{2}\|\iota(x)\|. \end{aligned}$$

Afirmamos que $Q^* : \iota(X)^* \to Y^*$ es un isomorfismo sobre su imagen. Para hacer ver esto, basta probar que existe $r > 0$ tal que $\|Q^*(z^*)\| \geq r\|z^*\|$ para todo $z^* \in \iota(X)^*$ (Proposición 1.4.5) ; lo cual es equivalente a probar $\|Q^*(z^*)\| \geq r$ si $\|z^*\| = 1$. Para esto último, demostraremos que para cada $z^* \in \iota(X)^*$, con $\|z^*\| = 1$, existe $y \neq 0$ en Y tal que $\|Q^*(z^*)(y)\| \geq \frac{1}{6}\|y\|$.

Sea $z^* \in \iota(X)^*$, con $\|z^*\| = 1$. Como $\|z^*\| = \sup\limits_{\|\iota(x)\|=1} |z^*(\iota(x))| = 1$, existe $x \in X$ tal que $\|\iota(x)\| = 1$ y $|z^*(\iota(x))| > \frac{3}{4}$.

Por lo anterior, también existe $y \in Y$ tal que $\|Q(y) - \iota(x)\| < \frac{1}{2}\|\iota(x)\| = \frac{1}{2}$; de donde,

$$|z^*(Q(y) - \iota(x))| \leq \|z^*\| \|Q(y) - \iota(x)\| = \|Q(y) - \iota(x)\| < \frac{1}{2}.$$

Además, $\|\iota(x) - y\| \leq \epsilon_0 \|\iota(x)\| < \frac{1}{2}$, y esto implica $0 < \|y\| < \frac{3}{2}$, por lo que $\frac{1}{6}\|y\| < \frac{1}{4}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} |Q^*(z^*)(y)| &= |z^*(Q(y))| = |z^*(Q(y) - \iota(x)) + z^*(\iota(x))| \\ &\geq |z^*(\iota(x))| - |z^*(Qy - \iota(x))| > \frac{1}{4} > \frac{1}{6}\|y\| \end{aligned}$$

Así, $\|Q^*(z^*)\| > \frac{1}{6}$ si $\|z^*\| = 1$.

Tenemos entonces que $Q^* : \iota(X)^* \to Y^*$ es un isomorfismo sobre su imagen y por tanto, $Q : Y \to \iota(X)$ es un operador continuo y suprayectivo (Proposición 1.4.6). El operador lineal $T = \iota^{-1} \circ Q : Y \to X$ es suprayectivo y continuo. Por ser Y isomorfo a c_0, obtenemos el resultado buscado: existe un operador suprayectivo y continuo de c_0 en X. ■

Corolario 3.3.6 *(Inverso del Teorema de Sobczyk). Si X es separablemente inyectivo, entonces X es isomorfo a c_0.*

3.4 Lema de aproximación

Definition 1 *Para un conjunto A definimos la función caracteristica $\chi_A : A \to \{0,1\}$ asociada a A como*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

El Lema de aproximación que presentamos es parte esencial en la prueba del Teorema Principal (3.3.4).

Lema 3.4.1 *Sea F un espacio métrico compacto tal que existe una sucesión $\{C_i\}$ de conjuntos finitos, no vacíos, y una colección*

$$\mathcal{A} = \{A(a_1, a_2, ..., a_n) : n \geq 1, a_i \in C_i \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$$

de subconjuntos, no necesariamente distintos del vacío, abiertos y cerrados de F, etiquetados con n-adas, de tamaños variables, pertenecientes a $C_1 \times ... \times C_n$, que cumplen las siguientes condiciones:

a) $F = \bigcup_{a_1 \in C_1} A(a_1)$.

b) Para $n \geq 1$ se satisface

$$A(a_1, a_2, ..., a_n) = \bigcup_{a_{n+1} \in C_{n+1}} A(a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}).$$

Por tanto, $A(a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}) \subset A(a_1, a_2, ..., a_n)$ para todo $a_{n+1} \in C$.

c) $A(a_1) \cap A(a_1') = \emptyset$ si $a_1 \neq a_1'$. Si $n \geq 1$ y $a_{n+1} \neq a_{n+1}'$, entonces $A(a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}) \cap A\left(a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}'\right) = \emptyset$.

d) $\mathcal{A}$ es una base para la topología de F.

Sea η un ordinal numerable, y sea G_α un subconjunto de F para cada $\alpha \leq \eta$. Supongamos que para cada $\alpha \leq \eta$ existe una sucesión $(A_i^\alpha)_{i=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ tal que

e) Si $i \neq j$, entonces $A_i^\alpha \cap A_j^\alpha = \emptyset$.

f) Si $\beta < \alpha$, $i, j \geq 1$ y $A_i^a \cap A_j^\beta \neq \emptyset$, entonces $A_i^\beta \subset A_j^\alpha$.

g) $A_i^\beta \cap G_\alpha = \emptyset$ para todo $\beta < \alpha$.

Sean

$$Y = \left\{ \begin{array}{c} y \in C(F) : y \text{ es constante en cada conjunto} \\ K_i^\alpha = A_i^\alpha \cap G_\alpha, \text{ si } i \geq 1 \text{ y } \alpha \leq \eta \end{array} \right\}$$

y $x(\theta) \in C(F)$ tal que $\sup_{i,\alpha} \{\operatorname{osc} x(\theta) : \theta \in K_i^\alpha\} < r$. Entonces, $\|x - y\| < r$ para alguna $y \in Y$.

Damos algunas propiedades de los miembros de $\mathcal{A}$ que nos servirán en el desarrollo de la prueba del lema, cada una de éstas se enuncia e inmediatamente es probada. Las primeras 5 propiedades no usan las hipótesis e), f) y g).

1. $A(a_1, a_2, ..., a_n) = A(a_1', a_2', ..., a_n')$ si $(a_1, a_2, ..., a_n) = (a_1', a_2', ..., a_n')$ y $A(a_1, a_2, ..., a_n) \cap A(a_1', a_2', ..., a_n') = \emptyset$ si $(a_1, a_2, ..., a_n) \neq (a_1', a_2', ..., a_n')$

Si $n = 1$ el resultado se sigue de la primera parte de c). Supongamos que $n \geq 1$, $(a_1, a_2, ..., a_n) \neq (a_1', a_2', ..., a_n')$ y $1 \leq i_o \leq n$ es el primer índice tal que $a_{i_0} \neq a_{i_0}'$; así, $A(a_1', a_2', ..., a_n') = A\left(a_1, a_2, ..., a_{i_0}', a_{i_o+1}', .., a_n'\right)$ por b) tenemos: $A(a_1, a_2, ..., a_n) \subset A(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \subset \cdots \subset A(a_1, a_2, ..., a_{i_0})$ y $A(a_1', a_2', ..., a_n') \subset A\left(a_1', a_2', ..., a_{n-1}'\right) \subset \cdots \subset A\left(a_1', a_2', ..., a_{i_0}'\right) = A\left(a_1, a_2, ..., a_{i_0}'\right)$. Sabemos por c) que $A(a_1, a_2, ..., a_{i_0}) \cap A\left(a_1', a_2', ..., a_{i_0}'\right) = \emptyset$; por tanto, $A(a_1, a_2, ..., a_n) \cap A(a_1', a_2', ..., a_n') = \emptyset$

2. Si $m \geq n$, entonces $A(a_1, a_2, ..., a_m) \subset A(a_1', a_2', ..., a_n')$ si $(a_1, a_2, ..., a_n) = (a_1', a_2', ..., a_n')$ y $A(a_1, a_2, ..., a_m) \cap A(a_1', a_2', ..., a_n') = \emptyset$ si $(a_1, a_2, ..., a_n) \neq (a_1', a_2', ..., a_n')$.

El caso $n = m$ ya se analizó en la propiedad **1**; supongamos $m > n$. De la hipótesis b) se sigue: $A(a_1, a_2, ..., a_m) \subset A(a_1, a_2, ..., a_n)$, y por la Propiedad 1 tenemos: $A(a_1, a_2, ..., a_n) = A(a_1', a_2', ..., a_n')$ si $(a_1, a_2, ..., a_n) = (a_1', a_2', ..., a_n')$ y $A(a_1, a_2, ..., a_n) \cap A(a_1', a_2', ..., a_n') = \emptyset$ si $(a_1, a_2, ..., a_n) \neq (a_1', a_2', ..., a_n')$; de donde, $A(a_1, a_2, ..., a_m) \subset A(a_1', a_2', ..., a_n')$ si $(a_1, a_2, ..., a_n) = (a_1', a_2', ..., a_n')$ y $A(a_1, a_2, ..., a_m) \cap A(a_1', a_2', ..., a_n') = \emptyset$ si $(a_1, a_2, ..., a_n) \neq (a_1', a_2', ..., a_n')$.

3. Las funciones características de los elementos de $\mathcal{A}$, son elementos de $C(F)$.

Sea B un abierto en $\mathbb{R}$, entonces $\chi^{-1}_{A(a_1, a_2, ..., a_n)}(B)$ es alguno de los siguientes conjuntos $\emptyset$, F, $F - A(a_1, a_2, ..., a_n)$ o $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ y todos estos son abiertos de F porque $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ es abierto y cerrado de F por hipótesis.

4. La característica χ_A, con $A \in \mathcal{A}$, es constante en todos los conjuntos A_i^α excepto en un número finito de ellos. Lo mismo sucede entonces para cualquier combinación lineal de dichas características

Supongamos que χ_A no es constante en A_i^α. Por lo anterior, hay 3 posibilidades: $A \cap A_i^\alpha = \emptyset$, $A_i^\alpha \subset A$ o bien, $A \subsetneq A_i^\alpha$. En los primeros dos casos χ_A es constante A_i^α, que es contradictorio con la hipótesis. Así, $A \subsetneq A_i^\alpha$ y por la propiedad b) tenemos que si $A = A(a_1, ..., a_n)$, entonces A sólo puede estar contenido propiamente en una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$, a saber: $A(a_1, ..., a_{n-1}), \cdots, A(a_1)$.

5. El álgebra generada por las funciones características de los elementos de $\mathcal{A}$ coincide con el subespacio generado por dichas funciones. La función constante 1 pertenece a dicha álgebra y ésta separa puntos de X. Por tanto, el subespacio generado por las funciones características de los elementos de $\mathcal{A}$ es denso en $C(F)$

Sean $A = A(a_1, ..., a_n)$ y $A' = A(a_1', a_2', ..., a_m')$. Supongamos $m \geq n$, por b) tenemos: $A' \subset A$ o bien $A \cap A' = \emptyset$ por tanto,

$$x_A(\theta) \cdot x_{A'}(\theta) = x_{A \cap A'}(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \cap A' = \emptyset \\ x_{A'}(\theta) & \text{si } A' \subset A \end{cases}.$$

De aquí se obtiene la primera afirmación.

Como F es la unión finita de los conjuntos ajenos $A(a_1)$, con $a_1 \in C_1$, se sigue: $1 = x_F = \sum\limits_{a_1 \in C_1} x_{A(a_1)}$.

Finalmente, dados $\theta_1 \neq \theta_2$ en F, por d), existe $A(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathcal{A}$ tal que $\theta_1 \in A(a_1, a_2, ..., a_n)$ y $\theta_2 \notin A(a_1, a_2, ..., a_n)$; por tanto, $x_{A(a_1,a_2,...,a_n)}(\theta_1) = 1$ y $x_{A(a_1,a_2,...,a_n)}(\theta_2) = 0$, por lo que el álgebra separa puntos de F. Entonces, por el teorema de Stone-Weierstrass, el espacio lineal generado (que coincide con la álgebra generada) por las funciones características de los elementos de $\mathcal{A}$ es denso en F.

6. $\emptyset \neq A_i^\beta \subsetneq A_j^\alpha$ implica $\beta < \alpha$.

Si $\alpha \leq \beta$, entonces tenemos: $\emptyset \neq A_i^\alpha \subsetneq A_j^\alpha$ o bien, por la hipótesis f), $A_j^\alpha \subset A_i^\beta$ y ninguna de estas relaciones es posible; en el primer caso por la hipótesis e) y en el segundo porque $A_i^\beta \subsetneq A_j^\alpha$.

7. $\emptyset \neq A_i^\beta \subsetneq A_j^\alpha$ implica $A_i^\beta \cap G_\alpha = \emptyset$

Por la propiedad anterior $\beta < \alpha$ y por la hipótesis g) se obtiene el resultado.

Demostración del Lema de Aproximación.

Por la Propiedad 5 podemos demostrar el lema suponiendo que $x(\theta)$ es una combinación lineal finita de funciones características de elementos de $\mathcal{A}$. El caso general, se sigue entonces al considerar, por ejemplo, una de tales combinaciones que diste de la función $x(\theta)$ menos que $\epsilon_0 = \frac{1}{4}\left(r - \sup_{i,\alpha}\{\operatorname{osc} x(\theta) : \theta \in K_i^\alpha\}\right)$.

Supongamos entonces en el resto de la prueba que $x(\theta)$ es una combinación lineal finita de funciones características de elementos de $\mathcal{A}$.

Por la Propiedad 4, $x(\theta)$ es constante excepto a lo más en una cantidad finita de elementos de la familia $\{A_i^\alpha \in \mathcal{A} : i \geq 1, \alpha \leq \eta\}$. Denotemos por $A_{j(l)}^{\alpha(l)}$, con $1 \leq l \leq r$, dichos elementos de $\mathcal{A}$.

Por comodidad, diremos que el conjunto $A(a_1, ..., a_n)$ tiene (etiqueta de) longitud n y entradas a_i, con $1 \leq i \leq n$.

Para cada $A_{j(l)}^{\alpha(l)}$ escogemos una etiqueta $(a_1, ..., a_n)$ que satisface $A_{j(l)}^{\alpha(l)} = A(a_1, ..., a_n)$ y con ellas formamos el conjunto J.

Sea $p \in \mathbb{N}$ la longitud máxima de los elementos en J, y supongamos que $C_i = \left\{a_1^{(i)}, ..., a_{d_i}^{(i)}\right\}$ para algún $d_i \in \mathbb{N}$, con $i \geq 1$.

Para $1 \leq k \leq p$, definamos los conjuntos

$$\widetilde{I}_k = \left\{a_j^{(k)} \in C_k : a_j^{(k)} \text{ es la } k-\text{ésima entrada de alguna etiqueta en } J\right\}$$

y los conjuntos I_k formados por los subíndices $1 \leq j \leq d_k$ de los elementos en $\widetilde{I}_k$.

Para cada $(i_1, i_2, ..., i_m)$ con $i_k \in I_k$, $1 \leq k \leq m \leq p$, definimos

$$E_{(i_1,i_2,...,i_m)} = \begin{cases} A_{j(l)}^{\alpha(l)} & \text{si } A(a_{i_1}, ..., a_{i_m}) = A_{j(l)}^{\alpha(l)} \text{ para alguna } 1 \leq l \leq r \\ \emptyset & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Estos conjuntos tienen las siguientes tres propiedades:

8. $E_{(i_1,i_2,...,i_m,i_{m+1})} \cap E_{\left(i_1,i_2,...,i_m,i'_{m+1}\right)} = \emptyset$ si $i_{m+1} \neq i'_{m+1}$.

9. $E_{(i_1,i_2,...,i_m,i_{m+1})} \subset E_{(i_1,i_2,...,i_m)}$. Por tanto, si $m < n$, y $E_{(i_1,i_2,...,i_n)} \neq \emptyset$, entonces $E_{(i_1,i_2,...,i_m)} \neq \emptyset$

   La segunda afirmación se sigue de inmediato de la primera y ésta es clara si $E_{(i_1,i_2,...,i_{m+1})} = \emptyset$. Supongamos

$$E_{(i_1,i_2,...,i_{m+1})} = A_{j(l)}^{\alpha(l)} = A\left(a_{i_1},...,a_{i_m},a_{i_{m+1}}\right)$$

   para alguna $1 \leq l \leq s$ y una etiqueta $\left(a_{i_1},...,a_{i_m},a_{i_{m+1}}\right)$. Por la hipótesis b), $A\left(a_{i_1},...,a_{i_m},a_{i_{m+1}}\right) \subset A\left(a_{i_1},...,a_{i_m}\right)$ y por tanto, $x(\theta)$ no es constante en $A\left(a_{i_1},...,a_{i_m}\right)$, por lo que $A\left(a_{i_1},...,a_{i_m}\right) = A_{j\left(l'\right)}^{\alpha\left(l'\right)}$ para alguna $1 \leq l' \leq s$, no necesariamente distinta de l, de donde $E_{(i_1,i_2,...,i_m)} = A_{j\left(l'\right)}^{\alpha\left(l'\right)}$ y $E_{(i_1,i_2,...,i_m,i_{m+1})} \subset E_{(i_1,i_2,...,i_m)}$.

10. Para cada $A_{j(l)}^{\alpha(l)}$, con $l = 1,...,s$, existe $(i_1,i_2,...,i_m)$, con $1 \leq m \leq p$, tal que $E_{(i_1,i_2,...,i_m)} = A_{j(l)}^{\alpha(l)}$ y si $m < p$, entonces $E_{(i_1,i_2,...,i_{m+1})} \subsetneq E_{(i_1,i_2,...,i_m)}$ para todo $i_{m+1} \in I_{m+1}$.

    Escojamos $(i_1,...,i_m)$ con $1 \leq m \leq p$, de longitud máxima, tal que $A\left(a_{i_1},...,a_{i_m}\right) = A_{j(l)}^{\alpha(l)}$.

Sea $D_{(i_1,i_2,...,i_m)} = E_{(i_1,i_2,...,i_m)} - \bigcup\limits_{i_{m+1} \in I_{m+1}} E_{(i_1,i_2,...,i_m,i_{m+1})}$ si $1 \leq m < p$ y $D_{(i_1,i_2,...,i_p)} = E_{(i_1,i_2,...,i_p)}$

En vista de que los conjuntos $E_{(i_1,i_2,...,i_m)}$ son abiertos y cerrados, también los son los conjuntos $D_{(i_1,i_2,...,i_m)}$, ya que estos conjuntos coinciden con los $E_{(i_1,i_2,...,i_m)}$ o son complementos con respecto a conjuntos abiertos y cerrados de uniones finitas de conjuntos abiertos y cerrados.

Para $E_{(i_1,i_2,...,i_m)} = A_{j(l)}^{\alpha(l)}$ y $D_{(i_1,i_2,...,i_m)} \neq \emptyset$ definimos la función $y_{(i_1,i_2,...,i_m)}$: $D_{(i_1,i_2,...,i_m)} \to \mathbb{R}$ como sigue: si $K_{j(l)}^{\alpha(l)} = A_{j(l)}^{\alpha(l)} \cap G_{\alpha(l)} = \emptyset$, entonces hacemos $y_{(i_1,i_2,...,i_m)}(\theta) = x(\theta)$, en caso contrario, sea $c_{(i_1,i_2,...,i_m)}$ uno de los valores tomados por $x(\theta)$ en $x\left(A_{j(l)}^{\alpha(l)} \cap G_{\alpha(l)}\right)$ y hagamos

$$y_{(i_1,i_2,...,i_m)}(\theta) = \begin{cases} c_{(i_1,i_2,...,i_m)} & \text{si } \theta \in x^{-1}\left(x\left(A_{j(l)}^{\alpha(l)} \cap G_{\alpha(l)}\right)\right) \\ x(\theta) & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{3.1}$$

En cualquier caso tenemos que $y_{(i_1,i_2,...,i_m)}(\theta)$ es constante en $A_{j(l)}^{\alpha(l)} \cap G_{\alpha(l)}$ y

$$\left|x(\theta) - y_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}(\theta)\right| < \sup_{i,\alpha} \{\operatorname{osc} x(\theta) : \theta \in K_i^\alpha\} < r, \tag{3.2}$$

debido a que la oscilación de x en $A_{j(l)}^{\alpha(l)} \cap G_{\alpha(l)}$ es menor que r

Veremos que $y_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}$ es constante en cada subconjunto de $D_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}$ en el cual $x(\theta)$ es constante. Sólo es necesario comprobarlo cuando $y_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}(\theta)$ está dado por 3.1. Sea D un subconjunto de $D_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}$ en el que $x(\theta)$ es constante y tomemos $\theta_1, \theta_2 \in D$. Supongamos que $y_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}(\theta_1) = c_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}$; esto implica que $\theta_1 \in x^{-1}(x(A_i^\alpha \cap G_\alpha))$; es decir, $x(\theta_1) \in x(A_i^\alpha \cap G_\alpha)$. Como $x(\theta_1) = x(\theta_2)$, porque x es constante en D, tenemos $x(\theta_2) \in x(A_i^\alpha \cap G_\alpha)$ y $y_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}(\theta_2) = c_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}$. El caso $y_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}(\theta_1) = x(\theta_1)$ se maneja de modo similar.

Sea $c \in \mathbb{R}$ y consideremos el conjunto $C = \{\theta \in F : x(\theta) = c\}$; este conjunto es abierto y cerrado porque $x(\theta)$ es continua y al ser simple, su imagen está formada por puntos aislados. Como $x\left(A_{j(i)}^{\alpha(i)} \cap G_\alpha\right)$ es un conjunto finito de reales, entonces $x^{-1}\left(x\left(A_{j(i)}^{\alpha(i)} \cap G_\alpha\right)\right)$ es abierto y cerrado en F, al igual que su complemento respecto a $D_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}$, y como $x(\theta)$ es continua se sigue que la función combinada $y_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}$ es continua en $D_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}$.

Los conjuntos $D_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}$, con $i_k \in I_k$, $1 \leq k \leq m \leq p$, que son distintos del vacío, son ajenos dos a dos. En efecto, tomemos cualesquiera dos de tales conjuntos, distintos entre sí: $D_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)} \subset E_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)} = A(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m})$ y $D_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)} \subset E_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)} = A(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n})$ y supongamos $1 \leq n \leq m \leq p$. Si $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}) \neq (a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n})$, entonces $A(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}) \cap A(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n}) = \emptyset$; en caso contrario $n < m$ y $E_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)} \subset E_{(j_1,j_2,\ldots,j_n,i_{n+1})}$ y por consiguiente, $E_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)} \cap D_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)} = \emptyset$.

Definamos $y : F \to \mathbb{R}$ como

$$y(\theta) = \begin{cases} y_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}(\theta) & \text{si } \theta \in D_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)} \\ x(\theta) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por el párrafo anterior $y(\theta)$ está bien definida y como cada $D_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}$ es abierto y cerrado en F y $x(\theta)$ y $y_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}(\theta)$ son continuas en F, se tiene que la función combinada $y(\theta)$ es continua en F. Y por (3.2) tenemos: $|x(\theta) - y(\theta)| \leq \sup_{i,\alpha} \{\operatorname{osc} x(\theta) : \theta \in K_i^\alpha\}$ para todo $\theta \in F$; o sea $\|x - y\| < r$

Para ver que $y \in Y$, sólo falta probar que $y(\theta)$ es constante en los conjuntos $A_j^\alpha \cap G_\alpha$, con $\alpha \leq \eta$ y $j \geq 1$, que sean distintos del vacío,

Primero se probará que si $x(\theta)$ es constante en A_j^α, entonces también lo es $y(\theta)$. Para tal conjunto, tenemos $A_j^\alpha \neq A_{j(l)}^{\alpha(l)}$ para todo $1 \leq l \leq s$. Si $A_j^\alpha \cap D_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)} = \emptyset$ para todo $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$, entonces $y(\theta) = x(\theta)$ en A_j^α y $y(\theta)$ es constante en A_j^α. Si $A_j^\alpha \cap D_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)} \neq \emptyset$, con $E_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)} = A_{j(l)}^{\alpha(l)}$, entonces

$A_j^\alpha \subset A_{j(l)}^{\alpha(l)}$, ya que un conjunto debe contener al otro, según la Propiedad 2, y la otra contención implica que $x(\theta)$ es constante en $A_{j(l)}^{\alpha(l)}$. Afirmamos que $A_j^\alpha \subset D_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}$, pues $A_j^\alpha \cap E_{(i_1,i_2,\ldots,i_{m+1})} = \emptyset$ o bien $A_j^\alpha \subset E_{(i_1,i_2,\ldots,i_{m+1})}$; y esto último no es posible porque sabemos que $A_j^\alpha \cap D_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)} \neq \emptyset$. Como vimos antes, $y_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}(\theta) = y(\theta)$ es constante en A_j^α.

Finalmente, supongamos que $A_j^\alpha \cap G_\alpha \neq \emptyset$ y $x(\theta)$ no es constante en A_j^α; es decir $A_j^\alpha = A_{j(l)}^{\alpha(l)}$ para alguna $1 \leq l \leq s$. Tomemos $E_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)} = A_j^\alpha$ como en la Propiedad 10. Si $m = p$, entonces $D_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)} = E_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)} = A_j^\alpha$ y, por su definición, la función $y(\theta)$ vale $c_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}$ en todo punto de $A_j^\alpha \cap G_\alpha$; o sea ahí es constante.

Supongamos que $m < p$. Se probará que

$$\begin{aligned} A_j^\alpha \cap G_\alpha &= E_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)} \cap G_\alpha \subset \\ &\subset E_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)} - \bigcup_{i_{m+1}\in I_{m+1}} E_{(i_1,i_2,\ldots,i_m,i_{m+1})} = \\ &= D_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)} \end{aligned}$$

y entonces, por la definición de $y(\theta)$ se tiene que ésta vale $c_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}$ en todo punto de $A_j^\alpha \cap G_\alpha$; o sea ahí es constante.

De las relaciones anteriores sólo requiere prueba la siguiente:

$$E_{(i_1,i_2,\ldots,i_m,)} \cap G_\alpha \subset E_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)} - \bigcup_{i_{m+1}\in I_{m+1}} E_{(i_1,i_2,\ldots,i_m,i_{m+1})}$$

y ésta se sigue si probamos que $G_\alpha \cap E_{(i_1,i_2,\ldots,i_m,i_{m+1})} = \emptyset$, lo cual es obvio si $E_{(i_1,i_2,\ldots,i_m,i_{m+1})} = \emptyset$. Supongamos entonces que $E_{(i_1,i_2,\ldots,i_m,i_{m+1})} = A_i^\beta$, con $i \geq 1$ y $\beta \leq \eta$. Por la elección de $E_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}$ tenemos $E_{(i_1,i_2,\ldots,i_m,i_{m+1})} \subsetneq E_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}$ y así, $\emptyset \neq A_i^\beta \subsetneq A_j^\alpha$; por la Propiedad **7** concluimos $A_i^\beta \cap G_\alpha = \emptyset$, o sea, $E_{(i_1,i_2,\ldots,i_m,i_{m+1})} \cap G_\alpha = \emptyset$. ■

3.5 Prueba del Teorema Principal

Los títulos de las siguientes subsecciones se refieren al Teorema 3.3.4

3.5.1 Construcción del espacio métrico K

Lema 3.5.1 *Sean X un espacio de Banach separable y $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ y $(\theta_n)_{n=1}^\infty \subset X^*$ un sistema biortogonal. Supongamos que $[x_n]_{n=1}^\infty = X$, y $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión en X^* que satisface $\sup_n |\varphi_n(x)| \leq \|x\| \leq \mu \sup_n |\varphi_n(x)|$ para una $\mu > 0$ y todo $x \in X$. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe una sucesión $(\psi_n)_{n=1}^\infty$ en X^* con $\sup_n \|\varphi_n - \psi_n\| \leq \epsilon$ y $\sup_n \|\psi_n\| \leq 1$. Para el espacio métrico compacto $K =$*

$\overline{\{\psi_n\}}^{w^*}$ *existe una sucesión* $(C_i)_{i=1}^{\infty}$ *de conjuntos finitos de números reales, tales que* $\theta(x_i) \in C_i$ *para todo* $i \geq 1$ *y* $\theta \in K$.

Demostración.

Primero consideremos el caso en que $\|x\| = \sup\limits_n |\varphi_n(x)|$ para todo $x \in X$. Entonces $\|\varphi_n\| \leq 1$ para todo $n \geq 1$ y $T : X \to \ell^\infty$ con $Tx = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ...)$ es una isometría. Podemos suponer que $\epsilon < 1$. Como las sucesiones simples son densas en ℓ^∞ (Proposición 2.1.3), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión simple $\overline{x}_n \in \ell^\infty$ tal que $\|Tx_n - \overline{x}_n\| < \dfrac{\epsilon}{2^{n+2}(\|\theta_n\| + 1)}$.

Defínase $V : \langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty} \to \ell^\infty$ como $Vx_n = \overline{x}_n$. Si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$, entonces $a_i = \theta_i(x)$ para $1 \leq i \leq n$ y además $\|Vx - Tx\| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |\theta_i(x)| \|Vx_i - Tx_i\|$; de donde*:*

$$\|Vx - Tx\| \leq \frac{1}{4}\epsilon \|x\| = \frac{1}{4}\epsilon \|Tx\|. \tag{3.3}$$

Entonces, para todo $x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ tenemos:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\epsilon\right)\|x\| \leq \|Vx\| \leq \left(1 + \frac{1}{4}\epsilon\right)\|x\|; \tag{3.4}$$

de esta última desigualdad se observa que V es inyectiva y como $\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ es denso en X y ℓ^∞ es de Banach, entonces podemos extender V a una isometría de X en ℓ^∞ de tal modo que las dos desigualdades (3.3) y (3.4) se satisfacen para todo $x \in X$, a la extensión también la denotamos por V. Definamos $\overline{\psi}_n(x) = Vx(n)$ (la n-ésima entrada de Vx) para todo $x \in X$.

Se cumple la desigualdad $\left\|\varphi_n - \overline{\psi}_n\right\| \leq \dfrac{\epsilon}{4}$, puesto que $\overline{\psi}_n(x) = Vx(n)$ y $\varphi_n(x) = Tx(n)$, y obtenemos $\left\|\overline{\psi}_n\right\| \leq 1 + \dfrac{\epsilon}{4}$. Por tanto, si definimos $\psi_n = c\overline{\psi}_n$, con $c = \left(1 + \dfrac{\epsilon}{4}\right)^{-1}$, obtenemos $\|\psi_n\| \leq 1$ y

$$\|\varphi_n - \psi_n\| = \left\|\varphi_n - c\overline{\psi}_n\right\| = c\left\|\varphi_n\left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right) - \overline{\psi}_n\right\|$$

$$c\left\|\varphi_n\left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right) - \overline{\psi}_n\right\| = c\left\|\varphi_n + \varphi_n\frac{\epsilon}{4} - \overline{\psi}_n\right\|$$

$$\begin{aligned} c\left\|\varphi_n + \varphi_n\frac{\epsilon}{4} - \overline{\psi}_n\right\| &\leq c\left(\left\|\varphi_n - \overline{\psi}_n\right\| + \|\varphi_n\|\frac{\epsilon}{4}\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right)^{-1}\left(\frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4}\right) \end{aligned}$$

De donde,

$$\|\varphi_n - \psi_n\| < \epsilon$$

Sea C_i el conjunto finito formado por las entradas de la sucesión simple $c\overline{x}_i$. Entonces, $\psi_n(x_i) = c(Vx_i)(n) = c\overline{x}_i(n) \in C_i$. Por el Teorema de Alaoglu y Corolario 1.3.11, $K = \overline{\{\psi_n\}}^{w^*}$ es un espacio métrico compacto y si $\theta \in K$, entonces $\theta = w^*\text{-}\lim_k \psi_{n_k}$ para una sucesión en $\{\psi_n\}$ y $\theta(x_i) = \lim_k \psi_{n_k}(x_i) = \lim_k c\overline{x}_i(n_k) \in C_i$, como se quería probar.

En el caso que $\sup_n |\varphi_n(x)| < \|x\|$ para alguna $x \in X$, damos a X la norma equivalente $|||x||| = \sup_n |\varphi_n(x)|$ y procedemos como arriba.■

Teorema 3.5.2 *Sea X un espacio separablemente inyectivo. Entonces:*

a) X tiene una base que encoge (x_n), con coeficientes funcionales (θ_n).

b) existen $\mu > 0$ y una base (φ_n) de X^* que satisfacen

$$\mu^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \tag{3.5}$$

para todas las sucesiones reales (a_n). En particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \leq \mu \text{ si } \left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n\right\| = 1.$$

c) Se cumple

$$\sup_n|\varphi_n(x)| \leq \|x\| \leq \mu\sup_n|\varphi_n(x)|,$$

para todo $x \in X$ y existe una sucesión $(\psi_n) \subset X^*$ que satisface: $\sup_n\|\psi_n\| \leq 1$, $\sup_n\|\varphi_n - \psi_n\| \leq \frac{1}{2\mu}$. Además,

$$(2\mu)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\psi_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \tag{3.6}$$

para todas las sucesiones reales (a_n). Donde como antes $\|\sum a_n\psi_n\| = \infty$ si $\sum a_n\psi_n$ no converge. Así, $\sum a_n\psi_n$ converge si y sólo si $(a_n) \in \ell^1$.

Para el espacio métrico compacto $K = \overline{\{\psi_n\}}^{w^*}$, existe una sucesión $(C_i)_{i=1}^{\infty}$ de conjuntos finitos de números reales tales que para todo $\theta = \sum_{i=1}^{\infty}a_i\theta_i \in K$ se tiene que $a_i = \theta(x_i) \in C_i$, para $i = 1, 2, 3, \cdots$. Además, $\|\theta\| \leq 1$ para todo $\theta \in K$.

Demostración.

a) Se sigue del Corolario 3.2.15.

b) Es parte del Teorema 3.2.14.

c) Para m, $n \geq 1$ sea $a_{mn} = 0$ si $m \neq n$ y $a_{mn} = 1$ si $m = n$. Entonces, por b) tenemos:

$$|\varphi_n(x)| = \left|\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\varphi_m(x)\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn}| \, \|x\| = \|x\|$$

para todo $x \in X$; por tanto, $\sup_n |\varphi_n(x)| \leq \|x\|$.

Sean $\epsilon > 0$ y $x \in X$. Existe $\varphi \in X^*$, con $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n$ para alguna sucesión de escalarares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tal que $\|\varphi\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n\right\| = 1$ y $\|x\| - \epsilon \leq |\varphi(x)|$. Por b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \mu$ y

$$\|x\| - \epsilon \leq \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \sup_n |\varphi_n(x)| \leq \mu \sup_n |\varphi_n(x)|;$$

de donde, $\|x\| \leq \mu \sup_n |\varphi_n(x)|$

Con esto tenemos que (φ_n) cumple con las hipótesis del lema anterior y por consiguiente, si fijamos $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2\mu}$ podemos obtener: una sucesión (ψ_n) en X^* tal que $\sup_n \|\varphi_n - \psi_n\| \leq \epsilon_0$, $\sup \|\psi_n\| \leq 1$ para todo $n \geq 1$ y una sucesión $(C_i)_{i=1}^{\infty}$ de conjuntos finitos de números reales tales que $\theta(x_i) \in C_i$, si $i \geq 1$ y $\theta \in K$, donde $K = \overline{\{\psi_n\}}^{w^*}$. De esto último se sigue la primera afirmación sobre K. Para probar la última, sean $\theta \in K$ y $\epsilon > 0$, entonces existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $\|\theta\| - \epsilon \leq |\theta(x)|$. Por la w^*-densidad de $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ en K, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\theta(x)| - |\psi_m(x)| \leq |\theta(x) - \psi_m(x)| < \epsilon$. Así,

$$\|\theta\| - \epsilon \leq |\theta(x)| \leq \epsilon + \|\psi_m(x)\| \leq \epsilon + 1,$$

puesto que $\|\psi_n\| \leq 1$, por tanto $\|\theta\| \leq 2\epsilon + 1$ y como ϵ es arbitraria tenemos que $\|\theta\| \leq 1$.

Si (a_n) es una sucesión real, entonces es claro que

$$\left\|\sum a_n\psi_n\right\| \leq \sum |a_n| \, \|\psi_n\| \leq \sum |a_n|.$$

Entonces, $\sum a_n\psi_n$ es absolutamente convergente, y por consiguiente convergente, si $(a_n) \in \ell^1$.

Finalmente, sea $h_n = \varphi_n - \psi_n$ para cada $n \geq 1$. De (3.5) obtenemos

$$\mu^{-1} \sum |a_n| \leq \left\|\sum a_n(h_n + \psi_n)\right\| \leq \left\|\sum a_n h_n\right\| + \left\|\sum a_n\psi_n\right\|.$$

Así,

$$\mu^{-1} \sum |a_n| \leq \epsilon_0 \sum |a_n| + \left\|\sum a_n\psi_n\right\|;$$

o sea,

$$\mu^{-1}\sum|a_n| - \epsilon_0 \sum |a_n| \leq \left\| \sum a_n \psi_n \right\|$$

Como $\epsilon_0 < \frac{1}{2\mu}$, obtenemos: $(2\mu)^{-1}\sum|a_n| \leq \|\sum a_n\psi_n\|$. En particular, si $\sum a_n\psi_n$ converge, entonces $(a_n) \in \ell^1$. ■

El espacio métrico compacto $K = \overline{\{\psi_n\}}^{w^*}$ del teorema anterior es el que tomaremos para probar el Teorema Principal.

3.5.2 Construcción de la inmersión $\iota : X \to C(K)$

Lema 3.5.3 *Supongamos que X es un espacio separablemente inyectivo. Sean (x_n) la base de X que encoge, con coeficientes funcionales (θ_n), $K = \overline{\{\psi_n\}}^{w^*}$ el espacio métrico compacto y $(C_i)_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de conjuntos finitos de números reales del teorema anterior. Definimos los conjuntos*

$$A(a_1, a_2, ..., a_n) = \{\theta \in K : \theta(x_i) = a_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Donde $a_i \in C_i$ para $1 \leq i \leq n$ y $n \geq 1$.

Entonces,

a) Cada $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ es cerrado y abierto en la topología inducida por w^* en K.

b) $K = \bigcup_{a_1 \in C_1} A(a_1)$

c) $A(a_1, a_2, ..., a_n) = \bigcup_{a_{n+1} \in C_{n+1}} A(a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1})$

d) $A(a_1) \cap A(a_1') = \emptyset$ si $a_1 \neq a_1'$ y si $n \geq 1$ y $a_{n+1} \neq a_{n+1}'$, entonces $A(a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}) \cap A\left(a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}'\right) = \emptyset$.

e) La colección $\mathcal{A} = \{A(a_1, a_2, ..., a_n) : n \geq 1,\ a_i \in C_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ es una base para la topología inducida por w^*en K.

Es decir, se cumplen las primeras hipótesis, hasta d), del Lema de Aproximación y por consiguiente, se tienen las propiedades 1 a 4 que aparecen en la prueba de dicha demostración. En particular, vale:

f) Supongamos $A(a_1, ..., a_m) \cap A(b_1, ..., b_n) \neq \emptyset$, entonces $A(a_1, ..., a_m) \subset A(b_1, ..., b_n)$ si $n \leq m$.

Demostración.

a) Sea $\theta_0 \in \overline{A(a_1, a_2, ..., a_n)}^{w^*}$, entonces existe una sucesión $(\theta_m)_m$ en $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ tal que $\theta_m \xrightarrow{w^*} \theta_0$; esto implica: $\theta_m(x_i) \to \theta_0(x_i)$ para todo $i \geq 1$. Como $\theta_m \in A(a_1, a_2, ..., a_n)$ para todo $m \geq 1$, tenemos: $\theta_m(x_i) = a_i$ para todo $m \geq 1$ y cada $1 \leq i \leq n$. Así, $\theta_0(x_i) = a_i$ si $1 \leq i \leq n$ y $\theta_0 \in A(a_1, a_2, ..., a_n)$; es decir, $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ es w^*-cerrado.

Por otro lado, sean $\theta_0 \in A(a_1, a_2, ..., a_n)$. Para $1 \leq i \leq n$, escojamos $\delta_i > 0$ tal que a_i es el único punto de C_i que satisface $|x - a_i| < \delta_i$. Definimos

$\epsilon = \min\{\delta_i : 1 \leq i \leq n\}$ y tomemos la w^*-vecindad

$$V = \{\theta \in K : |\theta(x_i) - \theta_0(x_i)| < \epsilon, \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$$

de θ_0. Entonces, $V = \{\theta \in K : |\theta(x_i) - a_i| < \epsilon\}$. Sea $\theta \in V$; tenemos $\theta(x_i) \in C_i$, para todo $1 \leq i \leq n$, y por la definición de ϵ se sigue que $\theta(x_i) = a_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Por tanto, $V \subset A(a_1, a_2, ..., a_n)$ y $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ es w^*-abierto.

b) Es obvio que $\bigcup\limits_{a_1 \in C_1} A(a_1) \subset K$. Sea $\theta = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i\theta_i \in K$, por el teorema anterior tenemos $\theta(x_1) = a_1 \in C_1$ por tanto, $K \subset \bigcup\limits_{a_1 \in C_1} A(a_1)$.

c) Sea $\theta \in A(a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1})$, entonces $\theta(x_i) = a_i$, para $1 \leq i \leq n+1$; en particular, $\theta(x_i) = a_i$ si $1 \leq i \leq n$; o sea, $\theta \in A(a_1, a_2, ..., a_n)$. Por otro lado, sea $\theta \in A(a_1, a_2, ..., a_n)$, como $\theta \in K$ se tiene que $\theta(x_{n+1}) \in C_{n+1}$; por tanto, $\theta \in A(a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1})$ con $a_{n+1} = \theta(x_{n+1})$. Así, $A(a_1, a_2, ..., a_n) = \bigcup\limits_{a_{n+1} \in C_{n+1}} A(a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1})$.

d) Se sigue inmediatamente de las definiciones.

e) Sean $U \subset K$ un w^*-abierto y $\theta_0 \in U$. Entonces, existen $\epsilon > 0$ y $y_1, ..., y_n \in X$, con $y_i = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \theta_j(y_i)x_j$, $1 \leq i \leq n$, tales que

$$\{\theta \in K : |\theta(y_i) - \theta_0(y_i)| < \epsilon, \text{ para } 1 \leq i \leq n\} \subset U.$$

Para cada $1 \leq i \leq n$ existe $n_i \geq 1$ tal que $\left\| \sum\limits_{j=m}^{\infty} \theta_j(y_i)x_j \right\| < \frac{\epsilon}{2}$ si $m \geq n_i$. Sea $N = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{n_i\}$, afirmamos que $\theta_0 \in A(a_1, a_2, ..., a_N) \subset U$, donde $a_i = \theta_0(x_i)$, $1 \leq i \leq N$, como ahora comprobamos. Es obvio que $\theta_0 \in A(a_1, a_2, ..., a_N)$. Por otra parte, sea $\theta \in A(a_1, a_2, ..., a_N)$. Entonces,

$$|\theta(y_i) - \theta_0(y_i)| \leq \|\theta - \theta_0\| \left\| \sum_{j=N}^{\infty} \theta_j(y_i)x_j \right\| < \epsilon,$$

ya que por el teorema anterior, $\|\theta\| \leq 1$ para todo $\theta \in K$. Así, $A(a_1, a_2, ..., a_n) \subset U$ y por tanto, $\mathcal{A} = \{A(a_1, a_2, ..., a_n) : n \geq 1, a_i \in C_i, 1 \leq i \leq n\}$ es una base para la topología inducida por w^*en K. ■

Proposición 3.5.4 *Sea X un espacio separablemente inyectivo. Escojamos $(\varphi_n)_n$, $\mu > 0$ y $K = \overline{\{\psi_n\}}^{w^*}$ como en el Teorema 3.5.2. El operador lineal $\iota : X \to C(K)$ definido como $\iota(x)(\theta) = \theta(x)$ para todo $\theta \in K$ satisface las siguientes desigualdades*

$$\frac{\|x\|}{2\mu} \leq \|\iota(x)\| \leq \|x\|$$

para todo $x \in X$, y por tanto, ι es un isomorfismo sobre su imagen.

Si $E \subset K \subset X^*$, $\operatorname{diam}(E) \leq d$, entonces $\operatorname{osc}_E \iota(x) \leq 2\mu d \|\iota(x)\|$, donde $\operatorname{osc}_E i(x)$ es la oscilación de $\iota(x)$ en E.

Demostración.

Observamos que $\iota(x) = \widehat{x}|K$ por tanto, es una función continua en K y $\|\iota(x)\| \leq \|x\|$. De acuerdo al Teorema 3.5.2 se tiene:

$$\sup_n |\varphi_n(x)| \leq \|x\| \leq \mu \sup_n |\varphi_n(x)|$$

y

$$\sup_n |\varphi_n(x) - \psi_n(x)| \leq \frac{1}{2\mu}$$

para todo $x \in X$. Dados $x \in X$ y $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\|x\|}{\mu} - \epsilon < |\varphi_n(x)|$$

y

$$|\varphi_n(x) - \psi_n(x)| \leq \frac{1}{2\mu} \|x\|.$$

Entonces,

$$\frac{\|x\|}{\mu} - \epsilon < |\varphi_n(x) - \psi_n(x) + \psi_n(x)| \leq \frac{1}{2\mu} \|x\| + |\psi_n(x)|$$

O sea,

$$\frac{1}{2\mu} \|x\| \leq |\psi_n(x)| + \epsilon.$$

Además, como $\psi_n \in K$ y $\|\iota(x)\| = \sup\{|\theta(x)| : \theta \in K\}$, tenemos:

$$\frac{1}{2\mu} \|x\| \leq \|\iota(x)\| + \epsilon.$$

Al ser ϵ arbitraria, concluimos: $\dfrac{\|x\|}{2\mu} \leq \|\iota(x)\|$.

Si $E \subset K \subset X^*$ y $\operatorname{diam}(E) \leq d$ para alguna $d > 0$, entonces para cualesquiera $\theta, \theta' \in E$ se tiene que

$$\left|\iota(x)(\theta) - \iota(x)\left(\theta'\right)\right| = \left|\theta(x) - \theta'(x)\right| \leq \left\|\theta - \theta'\right\| \|x\| \leq 2\mu d \|\iota(x)\|$$

por tanto, $\operatorname{osc}_E \iota(x) \leq 2\mu d \|\iota(x)\|$. ■

3.5.3 Conjuntos de Szlenk

Definición 3.5.5 *Sean X un espacio de Banach separable, B_X su bola unitaria cerrada, Γ un subconjunto acotado de X^* y $\delta > 0$. A cada ordinal α le asignamos, por inducción transfinita, el subconjunto $F_\alpha(\delta)$ de X^* definido como:*

$$F_0(\delta) = \overline{\Gamma}^{w^*}$$

$$F_{\alpha+1}(\delta) = \Big\{z^* \in X^* : \text{ existen dos sucesiones } (z_n^*) \text{ en } F_\alpha(\delta) \text{ y } (z_n) \text{ en } B_X \\ \text{tales que } z_n^* \overset{w^*}{\to} z^*,\ z_n \overset{w}{\to} 0 \text{ y } \lim_n z_n^*(z_n) \geq \delta\Big\}$$

y si α es un ordinal límite, entonces

$$F_\alpha(\delta) = \bigcap_{\beta<\alpha} F_\beta(\delta).$$

Estos conjuntos $F_\alpha(\delta)$ son llamados conjuntos de Szlenk.

Con ω_1 denotamos al primer ordinal no numerable, y definimos $\eta = \sup\{\alpha < \omega_1 : F_a \neq \emptyset\}$.

Es claro que $F_\alpha(\delta)$ es w^*-denso en $F_{\alpha+1}(\delta)$.

Definición 3.5.6 *Sean (A, d) un espacio métrico compacto y $S = (s_n)$ una sucesión en el espacio $C(A)$ de funciones reales continuas en A, que está formada por funciones uniformemente acotadas y que convergen puntualmente a cero. Tomemos $x \in A$, para cada sucesión (x_k) en A que converge a x y cada sucesión (n_k) de naturales que diverge a infinito, tomamos $\lambda = \overline{\lim} |s_{n_k}(x_k)|$ y definimos $H(S; A; x)$ como el supremo de esos valores λ.*

Lema 3.5.7 *Sea $\delta > 0$. Con la notación de la definición anterior tenemos que el conjunto $G = \{x \in A : H(S; A, x) \geq \delta\}$ es denso en ninguna parte en A.*

Demostración.

Se probará que $int\overline{G} = \emptyset$. Sea $x \in \overline{G}$ y sea V una vecindad abierta de x. Afirmamos que existe $U \subset V$ abierto no vacío tal que $U \cap G = \emptyset$ y por tanto $V \subsetneqq \overline{G}$. Supongamos lo contrario, entonces existe $y_1 \in V \cap G$, es decir $H(S; A, y_1) \geq \delta > \frac{\delta}{2}$ y por tanto, existen $x_1 \in V$ y un natural n_1 tales que $|s_{n_1}(x_1)| > \frac{\delta}{2}$ y, por la continuidad de s_{n_1}, existe una vecindad abierta $V_1 \subset V$ de x_1 tal que $|s_{n_1}(y)| > \frac{\delta}{2}$ para todo $y \in V_1$. De acuerdo a nuestra suposición tenemos que $V_1 \cap G \neq \emptyset$, entonces, dado $y_2 \in V_1 \cap G$ existen $x_2 \in V_1$ y un natural $n_2 > n_1$ tales que $|s_{n_2}(x_2)| > \frac{\delta}{2}$ y así, existe una vecindad abierta $V_2 \subset V_1$ de x_2 tal que $|s_{n_2}(y)| > \frac{\delta}{2}$ para todo $y \in V_2$. Al continuar este proceso inductivo obtenemos dos sucesiones: una de naturales (n_k) que es creciente y otra decreciente, $V \supset V_1 \supset V_2 \supset ...$ de abiertos de A, no vacíos, tales que $|s_{n_k}(y)| > \frac{\delta}{2}$ para toda $y \in V_k$ y todo $k \geq 1$.

De la compacidad de A se sigue que existe un punto $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n}$. Entonces, $|s_{n_k}(x_0)| \geq \frac{\delta}{2}$ para todo $k \geq 1$, pero esto es imposible ya que $s_{n_k}(x_0) \to 0$. ■

Lema 3.5.8 *Sea X un espacio de Banach con dual separable X^*. Supongamos que Γ es un subconjunto acotado de X^*. Sea $\delta > 0$ y $F_\alpha(\delta)$ y η definidos como arriba. Entonces,*

a) $F_\alpha(\delta)$ es w^*-compacto, para todo $\alpha \geq 0$

b)$F_\alpha(\delta) \supset F_{\alpha+1}(\delta)$, para todo $\alpha \geq 0$

c) $F_{\alpha+1}(\delta)$ es denso en ninguna parte en $F_\alpha(\delta)$

d) $\eta < \omega_1$ y $F_\eta(\delta) \neq \emptyset$.

Demostración.

Observamos que como X^* es separable, entonces las topologías w y w^* son metrizables en conjuntos acotados. Sea d una distancia que induce la topología w en B_X

a) Procedemos por inducción transfinita. Por el Teorema de Alaoglu, $F_0(\delta) = \overline{\Gamma}^{w^*}$ es w^*-compacto y $F_0(\delta) \supset F_1(\delta)$ porque $F_0(\delta)$ es w^*-denso en $F_1(\delta)$ y $F_0(\delta)$ es w^*-cerrado. Supongamos que α es un ordinal y que $F_\alpha(\delta)$ es w^*-compacto. Sea d' una distancia que induce la topología w^* en $F_\alpha(\delta)$. Tenemos $F_{\alpha+1}(\delta) \subset F_\alpha(\delta)$ ya que $F_\alpha(\delta)$ es w^*-cerrado y w^*-denso en $F_{\alpha+1}(\delta)$. Entonces, la compacidad de $F_{\alpha+1}(\delta)$ se obtendrá si probamos que es w^*-cerrado. Sea $(z_m^*)_m$ una sucesión en $F_{\alpha+1}(\delta)$ que converge a $z^* \in X^*$ en la topología w^*. Para cada $m \geq 1$ existen sucesiones $(z_{mn}^*)_{n=1}^{\infty}$ en $F_\alpha(\delta)$, y $(z_{mn})_{n=1}^{\infty}$, en B_X, tales que se cumple $z_{mn}^* \xrightarrow{w^*} z_m^*$, $z_{mn} \xrightarrow{w} 0$, cuando $n \to \infty$ y $\lim_n z_{mn}^*(z_{mn}) \geq \delta$. Podemos construir sucesiones crecientes (m_k) y (n_k) de naturales tales que $d'\left(z_{m_k}^*, z^*\right) < \frac{1}{k}$, $d'\left(z_{m_k n_k}^*, z_{m_k}^*\right) < \frac{1}{k}$ y $d(z_{m_k n_k}, 0) < \frac{1}{k}$. Por tanto, $z_{m_k n_k}^* \xrightarrow{w^*} z^*$, $z_{m_k n_k} \xrightarrow{w} 0$, cuando $k \to \infty$ y $\lim_n z_{m_k n_k}^*(z_{m_k n_k}) \geq \delta$ para todo $k \geq 1$. Así, $z^* \in F_{\alpha+1}(\delta)$ y $F_{\alpha+1}(\delta)$ es cerrado.

Por último si α es un ordinal límite y $F_\beta(\delta)$ es w^*-compacto para todo $\beta < \alpha$, entonces $F_\alpha(\delta) = \bigcap_{\beta<\alpha} F_\beta(\delta)$ es compacto por ser un cerrado del compacto $F_0(\delta)$.

b) Se sigue de que cada $F_\alpha(\delta)$ es w^*-cerrado y w^*-denso en $F_{\alpha+1}(\delta)$.

c) Supongamos lo contrario. Existe $\alpha \geq 0$ para el que existe un w^*-cerrado B en $F_\alpha(\delta)$, con interior no vacío tal que $B \subset F_\alpha(\delta)$. Por se X^* separable, tenemos que X^* y cualquiera de sus subconjuntos es w^*-separable. Sea $\{z_n^*\}_n \subset B$ un conjunto numerable y w^*-denso en B. Para cada $m \geq 1$ existen sucesiones $(z_{mn}^*)_{n=1}^{\infty}$, en $F_\alpha(\delta)$ y $(z_{mn})_{n=1}^{\infty}$ en B_X, tales que se cumple $z_{mn}^* \xrightarrow{w^*} z_m^*$, $z_{mn} \xrightarrow{w} 0$, cuando $n \to \infty$ y $\lim_n z_{mn}^*(z_{mn}) \geq \delta$.

Sea n_1 un natural tal que $d(z_{1n_1}, 0) < 1$. Supongamos construidos k naturales $n_1 < ... < n_k$ tales que $d(z_{mn_k}, 0) < \frac{1}{k}$ si $1 \leq m \leq k$. Existe un natural n_{k+1} tal que $d\left(z_{mn_{k+1}}, 0\right) < \frac{1}{k+1}$ si $1 \leq m \leq k+1$, ya que las sucesiones $(z_{mn})_n$ tienden débilmente a 0 para todo $m \geq 1$. Mediante el proceso diagonal aplicado a la matriz

$$\begin{array}{cccc} z_{1n_1} & z_{1n_2} & z_{1n_3} & . \\ z_{2n_2} & z_{2n_3} & z_{2n_4} & . \\ z_{3n_3} & z_{3n_4} & z_{3n_5} & . \\ . & . & . & . \end{array}$$

construimos una sucesión $(z_n)_n$ que converge débilmente a 0.

Definimos

$$Q(\delta) = \{y^* \in F_\alpha(\delta): \text{ existe una sucesión } (y_n^*) \text{ en } F_\alpha(\delta) \\ \text{tal que } y_n^* \xrightarrow{w^*} y^* \text{ y } \overline{\lim_n}\, y_n^*(z_n) \geq \delta\Big\}.$$

Afirmamos que $z_m^* \in Q(\delta)$ para todo $m \geq 1$. En efecto, la sucesión $(z_{mn}^*)_{n=1}^\infty$ en $F_\alpha(\delta)$ es tal que $z_{mn}^* \xrightarrow{w^*} z_m^*$ cuando $n \to \infty$, y para la subsucesión $(z_{n_k})_{k=1}^\infty = \left(z_{mn_j}\right)_{j=m}^\infty$ de $(z_n)_n$ se satisface: $\lim z_{mn_j}^*\left(z_{mn_j}\right) \geq \delta$ y por tanto, $\overline{\lim_n}\, z_{mn}^*(z_{mn}) \geq \delta$.

Por otra parte, se puede demostrar, de manera similar a como se procedió en el inciso a), que $Q(\delta)$ es cerrado. Por consiguiente, $B = \overline{\{z_n^*\}_n}^{w^*} \subset Q(\delta)$.

Para cada $z \in X$ la funcional $\widehat{z}$, restringida al compacto métrico $F_\alpha(\delta)$, pertenece al espacio de las funciones reales continuas $C(F_\alpha(\delta))$. Así, $(\widehat{z}_n)_n$ es una sucesión en $C(F_\alpha(\delta))$ que converge puntualmente a 0, ya que $(z_n)_n$ que converge débilmente a 0 en X. Entonces.

$$Q(\delta) \subset \{y^* \in F_\alpha(\delta): \ H((\widehat{z}_n)_n; F_\alpha(\delta), y^*) \geq \delta\}$$

De acuerdo al lema anterior, este conjunto es denso en ninguna parte en $F_\alpha(\delta)$ y esto contradice la contención $B = \overline{\{z_n^*\}_n}^{w^*} \subset Q(\delta)$ que habíamos obtenido.

d) La familia $\{F_\alpha(\delta) \neq \emptyset : \alpha < \omega_1\}$ es decreciente y está formada por cerrados del espacio métrico separable (F_0, w^*), distintos entre sí. De acuerdo al Teorema del Apartado II de la Sección 24 del Capítulo 2 de [7] $\{F_\alpha(\delta) \neq \emptyset : \alpha < \omega_1\}$ es numerable y por tanto, $\eta = \sup\{\alpha < \omega_1 : F_\alpha(\delta) \neq \emptyset\}$ es un ordinal numerable, es decir, $\eta < \omega_1$. Si η tiene antecesor inmediato, entonces $F_\eta \neq \emptyset$. Supongamos que η es un ordinal límite. Entonces, $F_\eta(\delta) = \bigcap\limits_{\beta<\eta} F_\beta(\delta)$. Si $\beta < \eta$, entonces $F_\beta(\delta) \neq \emptyset$, ya que existe $\beta < \alpha < \eta$ tal que $F_\alpha(\delta) \neq \emptyset$ y por consiguiente, $F_\alpha(\delta) \subset F_\beta(\delta)$. Por tanto, $F_\eta(\delta) \neq \emptyset$, en vista que $(F_\beta(\delta))_\beta$ es una sucesión decreciente de w^*-cerrados, distintos del vacío, del w^*- compacto $F_0(\delta)$. ■

El siguiente es un caso particular del resultado principal en [1]

Proposición 3.5.9 *Sea X un espacio separablemente inyectivo y Γ un subconjunto de la bola unitaria de X^*. Consideremos a X como subespacio de $C[0,1]$. Sea P una proyección de $C[0,1]$ sobre X . Si los conjuntos de Szlenk correspondientes a Γ y un número real $\delta > 0$ satisfacen $F_n(\delta) \neq \emptyset$ para todo $n \geq 1$, entonces existe un subespacio Y de $C[0,1]$ tal que Y es isomorfo a $C(\omega^\omega)$ y la restricción $P|_Y$ es un isomorfismo sobre su imagen.*

Al proceder de manera similar a como se hizo en la prueba b)⇒c) de la Proposición 3.2.3, se obtiene la siguiente versión del resultado principal de [11].

Teorema 3.5.10 *Sean K un espacio métrico compacto, X un espacio de Banach separable que contiene un subespacio Z que es isomorfo a $C(K)$, entonces existe un subespacio $Z_0 \subset Z$ tal que Z_0 es isomorfo a $C(K)$ y está complementado en X.*

Proposición 3.5.11 *Sean X un espacio separablemente inyectivo y $\Gamma = \{\psi_n\}$ la familia en X^* construida en el Teorema 3.5.2. Para cada $\delta > 0$ existe un primer entero $N_\delta \geq 0$ tal que $F_{N_\delta+1}(\delta) = \emptyset$, donde $F_\alpha(\delta)$, con $\alpha \geq 0$, son los conjuntos de Szlenk construidos para Γ y δ.*

Demostración.
Supongamos que $F_n(\delta) \neq \emptyset$ para toda $n \geq 1$, entonces por la Proposición 3.5.9 el subespacio $Z = P(Y)$ de X (usamos la notación de dicha proposición) es isomorfo a $C(\omega^\omega)$. Se sigue del Teorema 3.5.10 que existe un subespacio Z_0 de Z isomorfo a $C(\omega^\omega)$ y que está complementado en X, lo cual contradice el Teorema 3.2.8.■

Lema 3.5.12 *Sea X un espacio separablemente inyectivo. Tomamos la base (x_n) de X que encoge, con coeficientes funcionales (θ_n) y constante básica M, y $\Gamma = \{\psi_n\}$ como en el Teorema 3.5.2, y $\mathcal{A}$ la colección de conjuntos $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ definidos en el Lema 3.5.3. Dado $\delta > 0$ sea $N = N_\delta$ como en la Proposición anterior. Para $0 \leq k \leq N$, tomamos los conjuntos de Szlenk $F_k = F_k(\delta)$.*

a) Si $\theta \in F_k - F_{k-1}$, para alguna $1 \leq k \leq N$, entonces existe $m = m(\theta)$ tal que $\theta \in A(a_1, a_2, ..., a_m)$ y $\operatorname{diam}(A(a_1, a_2, ..., a_m) \cap F_k) \leq 4(M+1)\delta$.

b) Cada conjunto $F_k - F_{k+1}$ puede ser cubierto por una subcolección $\left\{A_i^k\right\}_i$ de $\mathcal{A}$, a lo más numerable, tal que $\operatorname{diam}\left(A_i^k \cap F_k\right) \leq 4(M+1)\delta$.

c) Cada A_i^k del inciso anterior puede escogerse de manera que es maximal entre aquellos elementos A de $\mathcal{A}$ que satisfacen la desigualdad $\operatorname{diam}(A \cap F_k) \leq 4(M+1)\delta$.

d) Cada conjunto $F_k - F_{k+1}$ puede ser cubierto por una sucesión $\left(A_i^k\right)$ en $\mathcal{A}$, de subconjuntos ajenos dos a dos, cada uno de los cuales satisface $\operatorname{diam}\left(A_i^k \cap F_k\right) \leq 4(M+1)\delta$ *y A_i^k es maximal entre aquellos elementos de $\mathcal{A}$ que satisfacen la desigualdad anterior*

Demostración

a) Supongamos que $\theta \in F_k - F_{k+1}$, para alguna $1 \leq k \leq N$. Entonces $\theta = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \theta_i$ para una sucesión $(a_i)_i$. Por la definición de los elementos de $\mathcal{A}$ tenemos que $\theta \in A(a_1, a_2, ..., a_n)$ para todo $n \geq 1$. Supongamos que no existe un natural m con la propiedad requerida, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\operatorname{diam}(A(a_1, a_2, ..., a_n) \cap F_k) > 4(M+1)\delta$. Se probará que esto lleva a la contradicción $\theta \in F_{k+1}$. De acuerdo a nuestra suposición, dado $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n^* \in A(a_1, a_2, ..., a_n) \cap F_k$ tal que $\|z_n^* - \theta\| > 2(M+1)\delta$. Supongamos que $z_n^* = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_{ni}\theta_i$. Como $z_n^* \in A(a_1, a_2, ..., a_n)$ se tiene: $b_{ni} = a_i$ para $1 \leq i \leq n$, por tanto,

$$z_n^* - \theta = \sum_{i=n+1}^{\infty} (b_{ni} - a_i)\theta_i \tag{3.7}$$

y

$$2(M+1)\delta < \|z_n^* - \theta\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} (b_{ni} - a_i)\theta_i \right\|. \tag{3.8}$$

Como $\left\| \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} (b_i^n - a_i)\theta_i \right\| \to 0$ cuando $n \to \infty$; se sigue, $|(z_n^* - \theta)(x)| \to 0$ cuando $n \to \infty$ para cada $x \in X$; por tanto,

$$\theta = \omega^* - \lim z_n^*, \text{ donde } (z_n^*)_{n=1}^{\infty} \text{ es una sucesión en } F_k. \tag{3.9}$$

Por la desigualdad de (3.8), existe $z_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_{ni}x_i \in X$, con $\|z_n\| = 1$, tal que

$$|(z_n^* - \theta)(z_n)| > \frac{3}{2}(M+1)\delta.$$

Tomemos $z_{0n} = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} c_{ni}x_i$ entonces

$$\|z_{0n}\| = \left\| z_n - \sum_{i=1}^{n} c_{ni}x_i \right\| \leq \|z_n\| + \left\| \sum_{i=1}^{n} c_{ni}x_i \right\| \leq 1 + M$$

Sea $\widetilde{z}_n = \dfrac{z_{0n}}{(M+1)}$ para $n \geq 1$, de lo anterior tenemos que $\|\widetilde{z}_n\| \leq 1$ y

$$|(z_n^* - \theta)(\widetilde{z}_n)| = \frac{|(z_n^* - \theta)(z_{0n})|}{M+1} = \frac{|(z_n^* - \theta)(z_n)|}{M+1} \geq \frac{3}{2}\delta,$$

donde la segunda igualdad se sigue de 3.7.

Existe un natural n_0 tal que $\left\| \sum\limits_{i=n}^{\infty} a_i \theta_i \right\| < \dfrac{\delta}{2}$ si $n \geq n_0$. Además, $|\theta(\widetilde{z}_n)| = \frac{1}{M+1} \left| \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_i \theta_i(z_n) \right| < \dfrac{\delta}{2} \|z_n\| \leq \dfrac{\delta}{2}$ si $n \geq m_0$ y de esto se sigue:

$$|z_n^*(\widetilde{z}_n)| \geq |(z_n^* - \theta)(\widetilde{z}_n)| - |\theta(\widetilde{z}_n)| \geq \delta \tag{3.10}$$

si $n \geq m_0$.

Observamos que $\theta_i(\widetilde{z}_n) = 0$ si $n > i$.

Sea $z^* = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i \theta_i$ un elemento de X^*. Dado $\epsilon > 0$ existe $i_0 \geq 1$ tal que $\left\| \sum\limits_{i=i_0+1}^{\infty} \lambda_i \theta_i \right\| < \epsilon$. Así,

$$|z^*(\widetilde{z}_n)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \theta_i(\widetilde{z}_n) \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{i_0} \lambda_i \theta_i(\widetilde{z}_n) \right| + \left\| \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \lambda_i \theta_i \right\| < \epsilon$$

si $n > i_0$; de donde, $\omega - \lim\limits_{n\to\infty} (\widetilde{z}_n) = 0$; esto junto con 3.10 y el hecho de que $\|\widetilde{z}_n\| \leq 1$ para todo $n \geq 1$, implica que $\theta \in F_{k+1}$, lo cual contradice la elección de θ.

b) Se sigue inmediatamente de a) y de que $\mathcal{A}$ es una colección a lo más numerable.

c)Por b) existe una cubierta numerable $\left\{A_i^k\right\}_{i\in I}$ de $F_k - F_{k-1}$ formada por elementos de $\mathcal{A}$ que satisfacen $\operatorname{diam}\left(A_i^k \cap F_k\right) \leq 4(M+1)\delta$ para todo $i \in I$. Para cada $i \in I$, definamos la colección

$$\mathcal{A}_i^k = \left\{ A \in \mathcal{A} : \operatorname{diam}(A \cap F_k) \leq 4(M+1)\delta \;\; y \;\; A_i^k \subset A \right\},$$

entonces todo elemento $A = A(a_1, ..., a_n) \in \mathcal{A}_i^k$ de longitud mínima entre los miembros de $\mathcal{A}_i^k$ es un elemento maximal de

$$\mathcal{A}^k = \{ A \in \mathcal{A} : \operatorname{diam}(A \cap F_k) \leq 4(M+1)\delta \},$$

ya que si $A(a_1, ..., a_n) \subset A\left(a_1', ..., a_m'\right)$, con $A\left(a_1', ..., a_m'\right) \in \mathcal{A}^k$, entonces $A\left(a_1', ..., a_m'\right) \in \mathcal{A}_i^k$ y por tanto, $m \geq n$, y del inciso f) del Lema 3.5.3 obtenemos $A(a_1, ..., a_n) = A\left(a_1', ..., a_m'\right)$.

d) Si A y B son dos maximales en $\mathcal{A}^k$, distintos entre sí, entonces $A \cap B = \emptyset$, puesto que por el inciso f) del Lema 3.5.3, si dos elementos de $\mathcal{A}$ se intersectan, entonces uno de ellos contiene al otro, pero por ser en este caso maximales, resulta que son iguales, lo que es contrario a lo supuesto. ■

Lo visto en la proposición anterior queda resumido en una parte del siguiente

Corolario 3.5.13 *Sean X separablemente inyectivo y $\delta > 0$. Con la notación del lema anterior, tenemos que para cada $0 \leq k \leq N_\delta$ existe una colección a los más numerable $\{A_i^k\}_i \subset \mathcal{A}$ tal que*

a) $F_k - F_{k+1} \subset \bigcup\limits_i A_i^k$

b) $\operatorname{diam}\left(A_i^k \cap F_k\right) \leq 4\,(M+1)\,\delta$

c) $A_i^k \cap A_i^k = \emptyset$ *si* $i \neq j$

d) Para cada $k \geq 1$, A_i^k es un subconjunto maximal dentro aquellos A en $\mathcal{A}$ que satisfacen $\operatorname{diam}(A \cap F_k) \leq 4\,(M+1)\,\delta$

e) Si $0 \leq h < k \leq N_\delta$ y $A_i^h \cap A_j^k \neq \emptyset$, entonces $A_i^h \subset A_j^k$.

f) $\left\{A_i^{N_\delta}\right\}$ tiene una subcubierta finita de $F_{N_\delta} = F_{N_\delta} - F_{N_\delta+1}$. Así, podemos suponer que $\left\{A_i^{N_\delta}\right\}$ es una colección finita.

Demostración.

Los incisos a) b) c) y d) son parte de lo visto en el lema previo.

e) Como $A_j^h \cap A_i^k \neq \emptyset$ se sigue de f) del Lema 3.5.3 que $A_i^h \subset A_j^k$ o bien $A_i^k \subset A_j^h$, pero debido a que $h < k$ se tiene $F_k \subset F_h$ y de esto obtenemos: $\operatorname{diam}\left(A_i^h \cap F_k\right) \leq \operatorname{diam}\left(A_i^h \cap F_h\right) \leq 4\,(M+1)\,\delta$. Por d), $A_i^h \subset A_j^k$.

f) Según el lema 3.5.8, $F_N = F_N - F_{N+1}$ es w^* compacto.■

3.5.4 Construcción del subespacio Y

En lo que sigue usamos los conjuntos que a continuación se definen usando las notaciones del lema y corolario anteriores:

i) $B_i^h = A_i^h \cap F_h$ para $i \geq 1$ y $1 \leq h \leq N_\delta$,

ii) $G_0 = F_0 \left(= K = \overline{\{\psi_n\}}^{w^*}\right)$, $G_{N+1} = \emptyset$ y $G_k = F_k - \left(\bigcup\limits_{h=1}^{k-1} \bigcup\limits_i B_i^h\right)$ para $1 \leq k \leq N_\delta$

iii) $K_i^k = A_i^k \cap G_k$ para $i \geq 1$ y $0 \leq k \leq N_\delta$.

Recordamos que para $k = N_\delta$ la colección $\{A_i^k\}$ la estamos tomando finita.

Observamos que todos los conjuntos anteriores dependen finalmente del número $\delta > 0$ que se haya propuesto, por lo que al definir más adelante el espacio $Y = \{y \in C(K) : y \text{ es constante en } K_i^k\}$ hacemos notar dicha dependencia escribiendo Y_δ.

De todos estos subespacios Y_δ de $C(K)$, uno de ellos será escogido como el espacio Y del Teorema Principal; la elección de δ dependerá del real $\epsilon_0 > 0$ propuesto en dicho teorema.

Proposición 3.5.14 *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

a) $G_k \supset G_{k+1}$ *para todo* $0 \leq k \leq N_\delta$

b) $F_0 = \bigcup\limits_{k=0}^{N_\delta} (G_k - G_{k+1})$

c) Para $1 \leq h < k \leq N_\delta$ se tiene:

$$G_k = F_k - \left(\bigcup_{h=1}^{k-1} \bigcup_i \left(A_i^h \cap F_k \right) \right)$$

d) G_k es w^*-cerrado y, por tanto, w^*-compacto

e) $G_k - G_{k+1} \subset \bigcup_i \left(A_i^k \cap G_k \right)$ para $0 \leq k \leq N_\delta$. De donde, $K = \bigcup_{k=0}^{N_\delta} \bigcup_i \left(A_i^k \cap G_k \right)$, es decir $K = \bigcup_{i,k} K_i^k$

f) $A_i^h \cap G_k = \emptyset$ con $0 \leq h < k \leq N_\delta$.

g) $\operatorname{diam} K_i^k \leq 4(M+1)\delta$ para $0 \leq k \leq N_\delta$, $i \geq 1$, donde $M > 0$ es la constante básica considerada en el Lema y Corolario anteriores.

Demostración.

a) Para los valores $k = 0$ y N_δ es obvio el resultado. Supongamos $0 < k < N_\delta$ y $\theta \in G_{k+1}$, entonces $\theta \in F_{k+1} \subset F_k$ y $\theta \notin \bigcup_{h=1}^{k} \bigcup_i \left(A_i^h \cap F_h \right)$; por tanto, $\theta \in F_k - \bigcup_{h=1}^{k-1} \bigcup_i \left(A_i^h \cap F_h \right)$.

b) Claramente $\bigcup_{k=0}^{N} (G_k - G_{k+1}) \subset F_0$ debido a que cada G_k es subconjunto de F_0. Por otro lado, sea $\theta \in F_0 = G_0$ y sea $0 \leq k \leq N_\delta$ el último índice tal que $\theta \in G_k$. Así, $\theta \in G_k$ y $\theta \notin G_{k+1}$ si $k < N_\delta$ y entonces $\theta \in G_k - G_{k+1}$. Nótese que esto último es también válido en el caso $k = N_\delta$ ya que $G_{N+1} = \emptyset$.

c) Como y $F_k \subset F_h$ tenemos

$$\begin{aligned}
G_k &= F_k - \left(\bigcup_{h=1}^{k-1} \bigcup_i B_i^h \right) = F_k - \left(\bigcup_{h=1}^{k-1} \bigcup_i \left(A_i^h \cap F_h \right) \right) = \\
&= F_k - \left(\left(\bigcup_{h=1}^{k-1} \bigcup_i \left(A_i^h \cap F_h \right) \right) \cap F_k \right) = F_k - \left(\bigcup_{h=1}^{k-1} \bigcup_i \left(A_i^h \cap F_h \cap F_k \right) \right) \\
&= F_k - \left(\bigcup_{h=1}^{k-1} \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(A_i^h \cap F_k \right) \right)
\end{aligned}$$

d) Por a) del Lema 3.5.3 los conjuntos A_i^k son w^*-cerrados y w^*-abiertos en $F_0 = K$; de donde, $A_i^h \cap F_k$ es relativamente w^*-abierto en F_k; por tanto, G_k es w^*-cerrado en F_k y como cada F_k es w^*-compacto, tenemos que G_k es w^*-compacto.

e) Para $k = N_\delta$ es obvio. Para $0 \leq k < N_\delta$, tomemos $\theta \in G_k - G_{k+1}$ y supongamos que $\theta \notin \bigcup_i \left(A_i^k \cap G_k \right)$. Entonces, $\theta \notin \bigcup_{h=1}^{k-1} \bigcup_i \left(A_i^h \cap F_h \right)$ y $\theta \notin \bigcup_i A_i^k$.

Por otra parte, $F_k - F_{k+1} \subset \bigcup_i A_i^k$, por lo que $\theta \notin F_k - F_{k+1}$; de donde, $\theta \in F_{k+1}$. Entonces, $\theta \notin \bigcup_i \left(A_i^k \cap G_k\right)$, $\theta \notin \bigcup_{h=1}^{k-1} \bigcup_i \left(A_i^h \cap F_h\right)$y $\theta \in F_{k+1}$; por tanto, $\theta \in F_{k+1} - \bigcup_{h=1}^{k} \bigcup_i \left(A_i^h \cap F_h\right) = G_{k+1}$, lo que contradice la elección de θ.

La última afirmación en e) se sigue de lo inmediato anterior y b).

f) Para $k = N_\delta$ se sigue inmediatamente de c). Sea $k < N_\delta$ y $h < k$. $G_k \subset F_k \subset F_h$; por consiguiente, $G_k = F_h \cap G_k$ y, por definición de G_k, $B_i^h \cap G_k = \emptyset$ si $h < k$. De estas dos observaciones obtenemos:

$$A_i^h \cap G_k = A_i^h \cap F_h \cap G_k = B_i^h \cap G_k = \emptyset$$

y queda probado f).

g) $\operatorname{diam} K_i^k = \operatorname{diam}\left(A_i^k \cap G_k\right) \leq \operatorname{diam}\left(A_i^k \cap F_k\right)$ y $\operatorname{diam}\left(A_i^k \cap F_k\right) \leq 4\,(M+1)\,\delta$ de acuerdo al inciso b) del corolario anterior. ■

Sean $K = \overline{\{\psi_n\}}^{w^*}$ e $\iota : X \to C(K)$ el espacio métrico compacto y la inmersión construidos en las secciones anteriores (Teorema 3.5.2 y Proposición 3.5.4).

Como hicimos ver en su momento, tenemos que las condiciones a) b) c) y d) del Lema de Aproximación se satisfacen para los elementos de la familia $\mathcal{A} = \{A(a_1, a_2, ..., a_n) : n \geq 1,\ a_i \in C_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ (Lema 3.5.3).

Para $\delta > 0$, hacemos $\eta = N_\delta$, donde N_δ es el natural al que se refiere la Proposición 3.5.11, y usamos los conjuntos A_i^h y G_k del la última proposición, con lo que las condiciones e), f) y g) del Lema de Aproximación son idénticas a los incisos c), e) del Corolario 3.5.13 y al inciso f) de la Proposición 3.5.14, respectivamente.

En resumen,

Corolario 3.5.15 *Dado un espacio separablemente inyectivo X podemos encontrar: una base de X, con constante básica $M > 0$, un espacio métrico compacto $K = \overline{\{\psi_n\}}^{w^*}$, donde (ψ_n) es una sucesión en la bola unitaria cerrada de X^*, una familia de conjuntos $\mathcal{A} = \{A(a_1, a_2, ..., a_n) : n \geq 1,\ a_i \in C_i,\ 1 \leq i \leq n\}$, un real $\mu > 0$ y una inmersión $\iota : X \to C(K)$ de tal modo que satisfacen: las hipótesis a) b) c) y d) del Lema de Aproximación y las siguientes dos desigualdades*

$$\frac{\|x\|}{2\mu} \leq \|\iota(x)\| \leq \|x\|$$

para todo $x \in X$ y

$$\operatorname*{osc}_E \iota(x) \leq 2\mu d \|\iota(x)\|$$

para todo $x \in X$ y $E \subset K$, con $\operatorname{diam}(E) \leq d$.

Y dado $\delta > 0$, podemos encontrar un ordinal finito $\eta = N_\delta$ y construir, a partir de K, conjuntos K_i^k de tal modo que el resto de las hipótesis del Lema *de Aproximación se cumplen. Además,* $K = \bigcup_{k=1}^{N_\delta} \bigcup_i K_i^k$ *y* $\operatorname{diam} K_i^k \leq 4\,(M+1)\,\delta$, *para* $0 \leq k \leq N$. *Por consiguiente,*

$$\operatorname*{osc}_{K_i^k} \iota\,(x)\,(\theta) \leq 8\mu\,(M+1)\,\delta\,\|\iota\,(x)\|$$

para todo $x \in X$, $1 \leq k \leq N_\delta$ *e* $i \geq 1$. *Y de acuerdo al Lema de aproximación, el subespacio*

$$Y_\delta = \left\{ \begin{array}{c} y \in C\,(K) : y \text{ es constante en cada conjunto } K_i^k \\ \text{si } i \geq 1 \text{ y } k \leq N_\delta \end{array} \right\}$$

de $C(K)$ *tiene la siguiente propiedad: si* $x\,(\theta) \in C\,(K)$ *es una función tal que* $\sup_{i,k} \operatorname*{osc}_{K_i^k} x\,(\theta) < r$, *entonces, existe* $y \in Y$ *tal que* $\|x - y\| < r$.

Proposición 3.5.16 *Sea* $\delta > 0$. *El espacio* Y_δ *del corolario anterior es un espacio de Banach.*

Demostración.

Claramente Y es un subespacio lineal de $C\,(K)$, con la norma del supremo. Es de Banach, ya que si (y_n) es una sucesión en Y que converge uniformemente a y en K, entonces dados $\theta_1, \theta_2 \in K_i^k$, se sigue $y_n\,(\theta_1) \to y\,(\theta_1)$ y $y_n\,(\theta_2) \to y\,(\theta_2)$ y por consiguiente, $y\,(\theta_1) = y\,(\theta_2)$, lo cual implica que $y \in Y$.■

3.5.5 Conclusión de la prueba del Teorema Principal

Sea X un espacio separablemente inyectivo y $\epsilon_0 > 0$. Para $0 < \delta < \dfrac{\epsilon_0}{8\mu\,(M+1)}$, consideremos todos los elementos previamente construidos para este espacio X y el real δ, que fueron señalados en el último corolario de la subsección anterior; o sea: el espacio métrico K, la inmersión $\iota : X \to C\,(K)$ y el espacio Y_δ . Como para cada $x \in X$ se cumple $\sup_{i \geq 1, 1 \leq k \leq N_\delta} \operatorname*{osc}_{K_i^k} \iota\,(x) \leq 8\mu\,(M+1)\,\|i\,(x)\|\,\delta$, entonces, dado $x \in X$, existe y en $Y = Y_\delta$ tal que $\|\iota\,(x) - y\| < \epsilon_0\,\|\iota\,(x)\|$

Por último, sólo falta probar que Y es isomorfo a c_0. Para esto usaremos los siguientes hechos y resultados.

De acuerdo a la demostración del Teorema 3.3.5, el espacio X es un espacio $\mathcal{P}'_\gamma$ y si $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$ es lo suficientemente pequeña para que $2\mu\gamma\epsilon_0 < \frac{1}{2}$, entonces existe un operador lineal continuo y suprayectivo de Y en $\iota\,(X)$ y por tanto, Y es de dimensión infinita. Podemos suponer que ϵ_0 cumple tales condiciones.

Dado un espacio métrico compacto Q denotamos por $Q^{(k)}$ a su comjunto derivado de orden k.

Definición 3.5.17 *Para un espacio métrico, compacto y numerable Q definimos $\chi(Q)$ como el primer ordinal χ que satisface $Q^{(\chi)} = \emptyset$.*

El siguiente resultado se prueba en [3]

Teorema 3.5.18 *Sean Q y Q_1 dos espacios métricos, compactos y numerables. $C(Q)$ y $C(Q_1)$ son linealmente isomorfos si y sólo si $\chi(Q)^{\omega} = \chi(Q_1)^{\omega}$, donde ω es el primer ordinal infinito.*

Corolario 3.5.19 *Sea Q un espacio métrico, compacto y numerable infinito. Si $\chi(Q)$ es finito, entonces $C(Q)$ es isomorfo a c_0.*

Demostración.
$2 \leq \chi(Q) < \omega$. Por el teorema anterior $C(Q)$ es isomorfo a $C\left(\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}\right) = c$ y, como sabemos, c es isomorfo a c_0. ■

Construiremos un espacio métrico, compacto y numerable infinito $\widehat{\Theta}$ tal que Y es isométricamente isomorfo a $C\left(\widehat{\Theta}\right)$ y $\chi\left(\widehat{\Theta}\right)$ es finito. De donde, Y es isomorfo a c_0, según el corolario anterior.

Sea θ un elemento cualquiera de K. Definamos $\widehat{\theta} \in Y^*$ como $\widehat{\theta}(y) = y(\theta)$, entonces $\left|\widehat{\theta}(y)\right| = |y(\theta)| \leq \|y\|$ y así, $\left\|\widehat{\theta}\right\| \leq 1$. La funcional $\widehat{\theta}$ es multiplicativa, es decir $\widehat{\theta}\left(yy'\right) = \widehat{\theta}(y)\widehat{\theta}\left(y'\right)$ si $y, y' \in Y$.

Si $\theta, \theta' \in K_i^k = A_i^k \cap G_k$, entonces $y(\theta) = y\left(\theta'\right)$ ya que y es constante en K_i^k,o sea, $\widehat{\theta}(y) = \widehat{\theta'}(y)$ y entonces hay una sola funcional $\widehat{\theta}_i^k \in Y^*$ por cada K_i^k.

Sea $\widehat{\Theta} = \left\{\widehat{\theta}_i^k : 0 \leq k \leq N(\delta), i \geq 1\right\}$. El espacio $\widehat{\Theta}$ es numerable. Como se cumple $\sup\limits_{\widehat{\theta} \in \widehat{\Theta}} \left|\widehat{\theta}(y)\right| = \sup\limits_{\theta \in \Theta} |y(\theta)|$ y $K = \bigcup\limits_{i,k} K_i^k$ (Corolario 3.5.15), tenemos

$$\|y\| = \sup_{\theta \in K} |y(\theta)| = \sup_{\widehat{\theta} \in \widehat{\Theta}} \left|\widehat{\theta}(y)\right| \tag{3.11}$$

para todo $y \in Y$.

El espacio (B_{Y^*}, w^*) es metrizable porque Y es separable. Se probará que $\widehat{\Theta}$ es cerrado en (Y^*, w^*) y como $\widehat{\Theta} \subset B_{Y^*}$, entonces $\widehat{\Theta}$ es un compacto en la topología w^*.

Sea $\left(\widehat{\theta}_n\right)_n$ una sucesión en $\widehat{\Theta}$ que converge a $y^* \in Y^*$ en la topología w^*; o sea, $\widehat{\theta}_n(y) \to y^*(y)$ para todo $y \in Y$. Por otra parte, $\left(\widehat{\theta}_n\right)_n$ es una sucesión en el métrico compacto K, y por tanto, existe una subsucesión $\left(\theta_{n_j}\right)_j$ que converge, digamos a $\theta \in K$, así, $\widehat{\theta}_{n_j}(y) \to y(\theta)$. Entonces, $\widehat{\theta}(y) = y^*(y)$ para todo $y \in Y$ y como $\theta \in K = \bigcup\limits_{i,k} K_i^k$, tenemos que $\theta \in K_i^k$ para alguna pareja k, i, y, por tanto, $y^* \in \widehat{\Theta}$ y $\widehat{\Theta}$ es w^*-compacto.

Proposición 3.5.20 *Sea* $j : Y \to C\left(\widehat{\Theta}\right)$*, definida como* $j(y)\left(\widehat{\theta}_i^k\right) = \widehat{\theta}_i^k(y) = y\left(\theta_i^k\right)$*, donde* $\widehat{\Theta}$ *tiene la topología inducida por* w^**. Entonces*

a) j *es una isometría lineal.*

b) $j(Y)$ *es una subálgebra densa de* $C\left(\widehat{\Theta}\right)$

c) $j(Y)$ *es cerrado en* $C\left(\widehat{\Theta}\right)$ *y por tanto.* $j(Y) = C\left(\widehat{\Theta}\right)$*; es decir* Y *es isométricamente isomorfo a* $C\left(\widehat{\Theta}\right)$*. Como* Y *es de dimensión infinita se tiene que* $\widehat{\Theta}$ *es infinito.*

Demostración.

a) Por (3.11) j es una isometría lineal.

b) $j(Y)$ es una subálgebra de $C\left(\widehat{\Theta}\right)$, ya que $\widehat{\theta}_i^k$ es una funcional lineal multiplicativa. Por la definición de Y es claro que $j(Y)$ contiene a las funciones constantes y si $\widehat{\theta}_i^k \neq \widehat{\theta}_{i'}^{k'}$ con $(i,k) \neq \left(i', k'\right)$, entonces existe $y \in Y$ tal que $\widehat{\theta}_i^k(y) \neq \widehat{\theta}_{i'}^{k'}(y)$, es decir $j(y)\left(\widehat{\theta}_i^k\right) \neq j(y)\left(\widehat{\theta}_i^{k\prime}\right)$, por tanto $j(Y)$ es una subálgebra de $C\left(\widehat{\Theta}\right)$ que separa puntos; por el teorema de Stone-Weierstrass se tiene que $\overline{j(Y)} = C\left(\widehat{\Theta}\right)$.

c) Sea $(j(y_n))_n$ una sucesión en $j(Y)$ que converge uniformemente a un elemento $z \in C\left(\widehat{\Theta}\right)$. Como $(j(y_n))_n$ es una sucesión de Cauchy tenemos que (y_n) también lo es, y por ser Y de Banach, hay una subsucesión (y_{n_k}) de (y_n) que converge, digamos a $y \in Y$. Por ser j continua, tenemos que $j(y_{n_k}) \to j(y)$, lo que implica que $z = j(y)$; es decir, $j(Y)$ es cerrado en $C\left(\widehat{\Theta}\right)$ y por tanto, $j(Y) = C\left(\widehat{\Theta}\right)$. ■

Al $k-$ésimo conjunto derivado de $\left(\widehat{\Theta}, w^*\right)$ lo denotamos por $\widehat{\Theta}^{(k)}$. Como $\widehat{\Theta}$ es infinito y w^*-compacto, entonces $\widehat{\Theta}^{(1)} \neq \emptyset$.

Lema 3.5.21 $\widehat{\Theta}^{(k)} \subset \widehat{G_k}$ *para* $0 \leq k \leq N(\delta)$*.*

Demostración.

Será probado por inducción sobre k. Si $k = 0$, entonces y $\widehat{\Theta}^{(k)} = \widehat{\Theta}$, $G_k = K$ y la afirmación se cumple.

Supongamos $\widehat{\Theta}^{(k)} \subset \widehat{G_k}$, con $0 \leq k < N(\delta)$. Sea $y^* \in \widehat{\Theta}^{(k+1)}$ el límite de una sucesión $\left(\widehat{\theta}_n\right)_n$ de puntos en $\widehat{\Theta}^{(k)}$, distintos entre sí. Por la hipótesis $\left(\widehat{\theta}_n\right)_n$ es una sucesión en $\widehat{G_k}$. Como G_k es compacto (Proposición 3.5.14), existe una subsucesión de $(\theta_n)_n$, que podemos suponer que es ella misma, que converge a $\theta \in G_k$. Así, $y(\theta_n) \to y(\theta)$ $(\widehat{\theta}_n(y) \to \widehat{\theta}(y))$, para todo $y \in Y$ y, por consiguiente,

$y^*(y) = \widehat{\theta}(y)$, para todo $y \in Y$; es decir, $y^* = \widehat{\theta}$ y $\widehat{\theta} \in \widehat{G_k}$. Más aún, $\theta \in G_{k+1}$, ya que si $\theta \in G_k - G_{k+1}$, entonces, por el inciso e) de la Proposición 3.5.14, $\theta \in A_i^k$ para alguna i y como A_i^k es w^*abierto y cerrado, resulta que A_i^k es una vecindad de θ y entonces, $\theta_n \in A_i^k \cap G_k = K_i^k$ para todo n suficientemente grande, lo cual implica que la sucesión $\widehat{\theta_n}$ se estaciona y esto contradice que los $\widehat{\theta_n}$ son distintos entre sí, por tanto $\theta \in G_{k+1}$. ■

Corolario 3.5.22 $\widehat{\Theta}^{(N(\delta)+1)} = \emptyset$. *Así* $2 \leq \chi\left(\widehat{\Theta}\right) < \omega$ *y* $C\left(\widehat{\Theta}\right)$ *es isomorfo a* c_0.

Demostración.

Por el inciso e) de la Proposición 3.5.14, $\widehat{\Theta}^{(N(\delta))} \subset \widehat{A_i^{N(\delta)} \cap G}_{N(\delta)}$, para alguna $i \geq 1$; es decir, si $\widehat{\theta} \in \widehat{\Theta}^{(N(\delta))}$, entonces $\theta = \theta\ _i^{N(\delta)}$ con $\theta_i^{N(\delta)} \in A_i^{N(\delta)} \cap G_{N(\delta)}$, para alguna $i \geq 1$. Puesto que el número de conjuntos $A_i^{N(\delta)}$ es finito (inciso f) del Corolario 3.5.13), se tiene el número de elementos distintos $\widehat{\theta_i^{N(\delta)}}$ es también finito, por tanto, $\widehat{\Theta}^{(N(\delta))}$ es finito y esto implica que $\widehat{\Theta}^{(N(\delta)+1)} = \emptyset$. ■

Bibliografía

[1] D. E. Alspach, Quotients of $C[0,1]$ with separable dual, *Israel J. Math.* 29, 1978, 361-384.

[2] D. Amir, Projection onto continuous functions spaces, *Proc. Amer. Math.* Soc. 15, 1964, 396-402.

[3] C. Bessaga y A. Pełczyński, Spaces of continuous functions (IV) (On isomorphical classification of spaces of continuous functions), S*tudia Mathematica* XIX, 1960, 53-62.

[4] R. Gómez, Tesis de Licenciatura: *Sucesiones básicas. Extensión de coeficientes funcionales*, dirigida por el M.C. Ángel Carrillo Hoyo

[5] D. B. Goodner, Projections in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 69, 1950, 89-108.

[6] W.B. Johnson, H. P. Rosenthal y M. Zippin, On basis, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces, *Israel J. Math.* 9, 1971, 488-506.

[7] Kuratowski K. *Topology.* Vol. I. Academic Press, New York, 1966.

[8] D. R. Lewis, C. Stegall, Banach spaces whose duals are isomorphic to $\ell^1(\Gamma)$, *J. Functional Analysis* 12, 1973, 177-18.

[9] J. Lindenstrauss, L.Tzafriri , *Classical Banach Spaces I. Sequence spaces*, Springer Verlag, Berlín, 1977.

[10] R.E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Springer Verlag, 1998.

[11] A. Pełczynski, On $C(S)$ subspaces of separable Banach spaces , *Studia Math.* 31, 1968, 513-522.

[12] H. P. Rosenthal, On factor of $C[0,1]$ with nonseparable dual, *Israel J. Math.* 13, 1972, 361-378.

[13] W. Szlenk, the non-existence of a separable reflexive Banach space universal for all separable reflexive Banach spaces. *Studia Math.* 30, 1968, 53-61.

[14] S. Willard, *General Topology*, Addison Wesley Publishing Co., 1968.

[15] M. Zippin, The separable extension problem, *Israel J. Math.* 26, 3-4, 1977, 372-387.