

Soluciones de la ecuación de KdV en el círculo y
variedades isospectrales para la ecuación de Hill

Erika Fabiola Fernández Gómora

2006

LICENCIATURA MATEMÁTICO



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del Alumno
Fernández
Gómora
Erika Fabiola
01777-1205035
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
402036236
2. Datos del Tutor
Dr
Jorge Gilberto
Flores
Gallegos
3. Datos del sinodal 1
Dr
Antonmaria
Minzoni
Alessio
4. Datos del sinodal 2
Dra
María del Carmen
Jorge y Jorge
5. Datos del sinodal 3
Dr
Jorge Andrés
Ize
Lamache
6. Datos del sinodal 4
Dr
Panayiotis
Panayotaros
7. Datos del trabajo escrito
Soluciones de la ecuación de KdV en el círculo y variedades isospectrales para la
ecuación de Hill
110 p
2006

Dedicatoria

A mis padres

Agradecimientos

Al Dr. Gilberto Flores, gracias por compartir tu gusto por las funciones elípticas. Gracias por tu confianza, paciencia y por todo el tiempo que me has dedicado.

Al Dr. Jorge Ize, gracias por tu apoyo y por tu paciencia para corregir mis errores. Gracias por tu ejemplo.

Al Dr. Carlos Prieto, gracias por compartir tus conocimientos con tanto entusiasmo y por todo tu apoyo.

A los doctores María del Carmen Jorge y Jorge, Antonmaria Minzoni y Panayiotis Panayotaros, por revisar mi tesis y sus valiosos comentarios.

A todos los miembros del Departamento de Matemáticas y Mecánica del IIMAS

A Alfonso Escamilla, gracias por acompañarme en esta travesía.

Índice general

1. Introducción	9
2. Ecuación de Hill	13
2.1. Problema inverso y directo de la ecuación de Hill	14
2.1.1. Problema directo	14
2.1.2. Problema inverso	48
2.1.3. La fórmula de traza	56
3. Korteweg - de Vries	69
3.1. El espectro del operador de Schrödinger	70
3.2. Cantidades conservadas y ecuaciones de evolución	73
3.3. Evolución en el tiempo de soluciones de KdV	77
3.4. Función <i>Theta</i> de Riemann y soluciones elípticas de KdV	80
3.4.1. Funciones <i>Theta</i> de una variable	83
3.4.2. Toros Abelianos	87
3.4.3. Teoremas de adición para las funciones <i>Theta</i>	91
3.4.4. Representación de soluciones de KdV en términos de funciones <i>Theta</i>	92
A. Motivación: Par de Lax	97
B. Deducción de la ecuación KdV	99
C. Teorema de Oscilación	105
Bibliografía	109

Capítulo 1

Introducción

Han pasado más de 160 años desde que Scott Russell reportó a la British Association for the Advancement of Science su descubrimiento de las ondas solitarias en aguas poco profundas. Citamos un párrafo:

”Observaba el movimiento de un bote jalado por dos caballos en una parte angosta del Canal, cuando el bote se detuvo súbitamente, no así la masa de agua que se había puesto en movimiento. Ésta se acumuló alrededor de la proa del bote y se movió hacia adelante con la forma de una larga elevación solitaria. La seguí a caballo. La elevación de agua, que era de unos 10 metros de largo y 50 centímetros de alto, continuó su curso por el canal, aparentemente sin cambio de forma o disminución en su velocidad, que era de unos 15 kilómetros por hora. Su altura disminuyó después de tres kilómetros.”

Éste descubrimiento ha permeado áreas de la física y matemática en un sinnúmero de problemas.

Russell realizó experimentos en su laboratorio, generando ondas solitarias en un estanque angosto y poco profundo. Dedujo empíricamente que la velocidad de la onda solitaria es $c^2 = g(h + a)$, donde g es la aceleración debida a la gravedad, h es la profundidad en reposo y a es la amplitud de la onda. Esto dice que las ondas más altas viajan más rápido.

A partir de las ecuaciones de movimiento para un fluido no viscoso e incompresible, Boussinesq y Rayleigh dedujeron la fórmula de Russell para la velocidad y encontraron que el perfil de la superficie del agua se propaga con velocidad constante.

Fueron Korteweg y de Vries [KdV] quienes dedujeron la ecuación de movimiento para la superficie libre que ahora lleva su nombre y la denotaremos por KdV:

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 \quad (1.1)$$

Esta ecuación se estudia en toda la recta. En el límite de poca profundidad, amplitud pequeña y onda larga, esta ecuación tiene soluciones en la forma de onda viajera: $u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)\right)$ (ver [F1] para más detalles).

En 1965 Kruskal y Zabusky [KZ] hicieron un extenso estudio numérico de la ecuación (1.1), poniendo especial atención en trenes de ondas solitarias. Obtuvieron resultados sumamente interesantes:

Supongamos que la perturbación inicial es la suma aproximada de dos ondas solitarias con velocidades $a < b$ muy separadas de tal forma que al tiempo cero no interactúan y la onda grande está del lado izquierdo de la ola pequeña. Entonces, la ola grande se mueve más rápido que la ola pequeña hasta alcanzarla y chocar con ella. Es entonces que ocurre algo sorprendente: después de cierto tiempo la ola grande recobra su forma original y continúa avanzando dejando atrás a la ola pequeña quien también recobró su forma original. Ver Fig. 1.

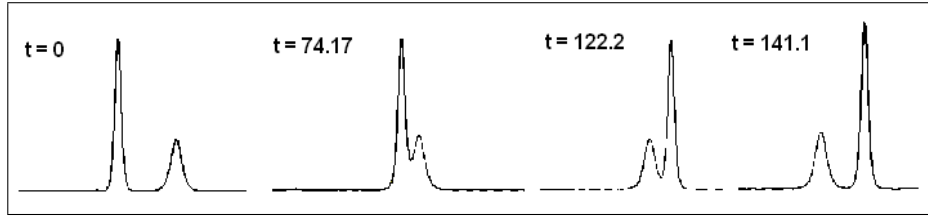


Fig. 1

Es decir, las ondas solitarias se comportan como partículas que pueden colisionar con otras sin perder su "individualidad". Fueron ellos quienes bautizaron a estas ondas solitarias con el nombre de SOLITONES.

La individualidad de las ondas solitarias de la que hacen referencia Kruskal y Zabusky sugiere la existencia de integrales de movimientos, para que la onda solitaria 'recuerde su forma'. Ésto fue confirmado por Gardner, Kruskal y Miura [GKM] y lo desarrollaremos en el capítulo tres de este texto.

En 1968 Miura [Mi] introduce la transformación

$$u(x, t) = \lambda - v^2(\lambda, x, t) - v(\lambda, x, t) \quad (1.2)$$

donde λ es un parámetro espectral (generalmente con valores complejos). Ésta transformación, conocida como la transformación de Miura, relaciona la ecuación KdV (1.1) con una variante de la llamada ecuación mKdV (ecuación de KdV modificada),

$$v_t = v_{xxx} - 6v^2v_x + 6\lambda v_x \quad (1.3)$$

Como (1.2) es una ecuación de Riccati para v , se puede transformar en la ecuación lineal

$$(L(t)y)(\lambda, x, t) = y_{xx}(\lambda, x, t) + u(x, t)y(\lambda, x, t) = \lambda y(\lambda, x, t)$$

tomando $v(\lambda, x, t) = y_x(\lambda, x, t)/y(\lambda, x, t)$.

Gardner, Kruskal y Miura [GKM] mostraron que los valores propios del operador en $L^2(\mathbb{R})$ asociado a $L(t)$ no dependen de t , es decir, son cantidades conservadas del flujo KdV (1.1). Éste fue el punto de partida del artículo de Gardner, Greene,

Kruskal y Miura [GGKM] donde usaron métodos de dispersión inversa para resolver el problema de Cauchy para la ecuación de KdV con condiciones iniciales definidas en todo \mathbb{R} y que decaen rápidamente. Éste método, que representa un análogo no lineal de la transformada de Fourier para resolver ecuaciones diferenciales parciales, consiste primeramente en calcular los datos de dispersión de $L(0)$, después propagarlos en el tiempo para finalmente reconstruir el potencial $q(x, t)$ en $L(t)$ via la ecuación de Marchenko. Resulta que la función $q(x, t)$ es la solución del problema de Cauchy.

Éste descubrimiento inspiró a Lax a conjeturar que los operadores $L(t)$ son unitariamente equivalentes entre sí, es decir,

$$L(0) = U(t)^{-1}L(t)U(t)$$

para alguna familia de operadores unitarios $U(t)$. Ésto llevo a Lax [L]₁ a su conocida representación del conmutador

$$[B, L] = u_t = L_t$$

donde

$$B = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3}{4}u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{4} \frac{\partial}{\partial x} u$$

y es quien determina la evolución en el tiempo de $U(t)$

$$U_t(t) = BU(t)$$

Dickey y Gelfand [DG] bautizaron al operador $[B, L]$ como el par de Lax.

Lax [L]₁ probó, en el caso en que $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t)$, que siempre se puede encontrar un operador antisimétrico $B_j(t)$ tal que $[B_j, L]$ es un operador de multiplicación y la ecuación de evolución

$$u_t = [B_j, L] \tag{1.4}$$

define la ecuación de orden j de *KdV*. Las ecuaciones de *KdV* de orden 0, 1 y 2 son:

$$u^2 u_x + 4u_x u_{xx} + 2uu_{xxx} + \frac{6}{5}u_{xxxxx}$$

Cada una de éstas ecuaciones es un sistema Hamiltoniano completamente integrable y está íntimamente relacionado con la cantidades conservadas encontradas por Gardner, Kruskal y Miura [GKM] de las que hicimos referencia anteriormente.

Por otra parte a finales del siglo XIX se empezó a estudiar la ecuación

$$u''(x) + [\lambda - q(x)]u(x) = 0 \tag{1.5}$$

$$q(x + \pi) = q(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

llamada ecuación de Hill ya que apareció en el estudio que Hill realizó sobre la periapsis de la Luna [Hi]. También, (1.5) resulta de buscar los valores propios y las funciones propias del operador de Schrödinger $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x, t)$, el cual es fundamental en la mecánica cuántica y en el estudio de la ecuación de KdV. En esta tesis estudiaremos soluciones de la ecuación (1.5) que son periódicas en x con periodo π .

Dedicamos el capítulo dos al estudio de la ecuación de Hill en el intervalo $[0, \pi]$. Los valores propios correspondientes a condiciones periódicas y antiperiódicas son importantes porque determinan los intervalos en los que existen soluciones acotadas (estabilidad) o no acotadas (inestabilidad) de la ecuación de Hill en toda la recta y que corresponden a movimientos estables o inestables en el tiempo x del problema de Hill.

Determinamos el espectro periódico, antiperiódico y de Dirichlet en el caso $q(x) = 0$. En el caso periódico el primer valor propio, $\lambda_0 = 0$ es simple, todos los demás son dobles. En el caso antiperiódico todos son dobles. Esto implica que hay un sólo intervalo de inestabilidad, $(-\infty, 0)$ pero no hay intervalos finitos de inestabilidad, ya que éstos están separados por valores propios periódicos o antiperiódicos simples.

También determinamos la estructura del espectro en el caso

$$q(x) = m(m+1)k^2 sn^2(x; k),$$

donde $sn(x; k)$ es la función elíptica de Jacobi (ver [Fe]). Cuando m es un natural, hay $m+1$ valores propios periódicos simples y m antiperiódicos simples. Estos $2m+1$ valores propios dan lugar a m intervalos finitos de inestabilidad. Finalmente, encontramos una representación del potencial $q(x)$ a partir del espectro, por medio de la fórmula de *traza*.

En el capítulo tres nos concentramos en soluciones periódicas de la ecuación KdV cuando el dato inicial tiene un número finito de intervalos de inestabilidad. Si denotamos por $q(x, t)$ a la correspondiente solución de *KdV*, demostramos que no sólo se preserva el espectro periódico y antiperiódico del operador de Hill, sino también las multiplicidades y por lo tanto los intervalos finitos de inestabilidad. De esta manera, el conjunto de potenciales con m intervalos finitos de inestabilidad es invariante bajo el flujo de *KdV*. Describimos la evolución en el tiempo de los valores propios de Dirichlet y utilizando la fórmula de traza describimos la evolución en el tiempo de estas soluciones de la ecuación *KdV*. También damos una expresión para este tipo de soluciones de la ecuación KdV por medio de la función Theta de Riemann asociada y encontramos condiciones que garantizan que dichas soluciones son funciones elípticas.

Capítulo 2

Ecuación de Hill

A lo largo de este capítulo estudiaremos el espectro periódico, antiperiódico, de Dirichlet, los intervalos de inestabilidad y la determinación del potencial a partir de la información espectral de la ecuación de Hill.

En la introducción definimos la ecuación de Hill como

$$u''(x) + [\lambda - q(x)]u(x) = 0 \quad (2.1)$$

donde la función $q(z)$ es continua en $[0, \pi]$ y

$$q(z + \pi) = q(z)$$

Decimos que un valor propio λ es periódico si

$$\begin{aligned} u(0; \lambda) &= u(\pi; \lambda) \\ u'(0; \lambda) &= u'(\pi; \lambda) \end{aligned}$$

y es antiperiódico si

$$\begin{aligned} u(0; \lambda) &= -u(\pi; \lambda) \\ u'(0; \lambda) &= -u'(\pi; \lambda) \end{aligned}$$

y de Dirichlet si

$$u(0; \lambda) = u(\pi; \lambda) = 0$$

Denotamos a los valores propios antiperiódicos por $\{\lambda'_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, a los periódicos por $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ y a los de Dirichlet por $\{\mu_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$: consulte [E] para más detalles. Los valores propios periódicos y antiperiódicos están distribuidos de la siguiente forma

$$\lambda_0 < \lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda'_3 \leq \lambda'_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots$$

y son tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} = 0 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda'_n} = 0$$

(Ver Apéndice C)

A lo largo de este capítulo estaremos interesados en los intervalos de inestabilidad

$$(-\infty, \lambda_0) \quad , \quad (\lambda'_i, \lambda'_{i+1}) \quad , \quad (\lambda_i, \lambda_{i+1}) \quad , \quad i = 1, 2, \dots$$

determinados por el potencial $q(x)$ y que corresponden a valores propios periódicos o antiperiódicos simples.

Los valores propios $\{\lambda'_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ pueden ser dobles, es decir, puede ocurrir que $\lambda'_i = \lambda'_{i+1}$ o $\lambda_i = \lambda_{i+1}$. Por lo tanto, algunos (o todos) los intervalos de inestabilidad se pueden colapsar a un punto. En este caso existen dos soluciones no triviales de (2.1) linealmente independientes periódicas o antiperiódicas correspondiente a dicho valor propio doble.

Si sólo existe un número finito de intervalos de inestabilidad decimos que $q(x)$ es un potencial con un número finito de intervalos de inestabilidad.

Un caso sencillo donde $q(x)$ sea un potencial de éste tipo es cuando es cero, el cual desarrollaremos en este capítulo. Ince [In] fue el primero en desarrollar un ejemplo no trivial, tomando como potencial la función elíptica

$$m(m+1)k^2 sn^2(x; k)$$

con m entero, donde $sn(x; k)$ es la función elíptica de Jacobi. Mostró que este potencial tiene $m+1$ intervalos de inestabilidad. Estos resultados ya eran conocidos por Whittaker y Watson [WW], Sección 23.7 pero no en el lenguaje de teoría de Floquet.

2.1. Problema inverso y directo de la ecuación de Hill

Primero determinamos el espectro cuando el potencial es *cero* o $m(m+1)k^2 sn^2(x; k)$, además de que en este último caso, también se determina la multiplicidad de los valores propios y por lo tanto los intervalos de inestabilidad en los casos $m = 1, 2$ en los que hay 1 y 2 intervalos finitos de inestabilidad, respectivamente. Después hacemos el problema inverso que consiste en determinar el potencial a partir de los datos espectrales.

2.1.1. Problema directo

El primer ejemplo que a uno se le ocurre de la ecuación de Hill es cuando el potencial es idénticamente cero. Es ilustrativo porque obtenemos explícitamente los valores propios y las funciones propias..

Proposición 2.1 Si $q(x) \equiv 0$ entonces no hay intervalos finitos de inestabilidad, es decir, los valores propios periódicos y antiperiódicos distintos de cero son dobles ($\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda'_1 = \lambda'_2$, etc.). Además, los valores propios de Dirichlet son simples.

Prueba. Queremos encontrar soluciones no triviales para

$$u'' + \lambda u = 0 \quad (2.2)$$

Caso 1: $\lambda = 0$.

Entonces

$$u'' = 0$$

Por lo tanto

$$u(x) = c_0 x + c_1$$

c_0 y c_1 constantes. Por lo tanto no existen soluciones no triviales antiperiódicas para el valor propio *cero*. Por otra parte, las únicas soluciones periódicas no triviales son

$$u(x) = c_1, \quad c_1 \neq 0$$

Por lo que existe sólo una solución linealmente independiente periódica. Por lo tanto $\lambda = 0$ es un valor propio simple periódico y no es un valor propio antiperiódico.

Caso 2: $\lambda \neq 0$

Mostraremos que los valores propios periódicos y antiperiódicos son dobles mientras que los de Dirichlet son simples.

Encontremos explícitamente estos valores propios periódicos, antiperiódicos y los de Dirichlet:

Cualquier solución de 2.2 es de la forma

$$u(x; \lambda) = c_a \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_b \text{sen}(\sqrt{\lambda}x)$$

Para que λ sea un valor propio **periódico** debe cumplir

$$\begin{aligned} c_a &= c_a \cos(\sqrt{\lambda}\pi) + c_b \text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) \\ c_b &= -c_a \text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) + c_b \cos(\sqrt{\lambda}\pi) \end{aligned}$$

Es decir

$$\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) [c_b^2 + c_a^2] = 0$$

Por lo que $\{\sqrt{\lambda_k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$, entonces

$$c_a = c_a \cos(\sqrt{\lambda_k}\pi)$$

Por lo tanto

$$\lambda_k = (2k)^2, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

y las funciones propias son:

$$\begin{aligned} &\cos(2kx) \\ &\text{sen}(2kx) \end{aligned}$$

Para el **caso antiperiódico** se tiene

$$\begin{aligned} -c_a &= c_a \cos(\sqrt{\lambda}\pi) + c_b \text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) \\ -c_b &= -c_a \text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) + c_b \cos(\sqrt{\lambda}\pi) \end{aligned}$$

Es decir

$$\cos(\sqrt{\lambda}\pi) = -1$$

Por lo tanto

$$\lambda'_k = (2k + 1)^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

y las funciones propias son:

$$\begin{aligned} &\cos((2k + 1)x) \\ &\text{sen}((2k + 1)x) \end{aligned}$$

Notemos que en el caso periódico y antiperiódico se tienen dos soluciones linealmente independientes para cada valor propio por lo que los valores propios son dobles.

Por último, el **caso de Dirichlet**

$$0 = c_a = c_a \cos(\sqrt{\lambda}\pi) + c_b \text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)$$

Por lo tanto $c_a = 0$ y entonces

$$0 = c_b \text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)$$

y

$$\lambda_k \equiv \mu_k = j^2, \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Entonces las funciones propias para los valores propios de Dirichlet son

$$\text{sen}(jx)$$

Es decir, para cada valor propio μ_k existe sólo una solución linealmente independiente y por lo tanto son simples.

Notemos que $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{\lambda_l\}_{l \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \cup \{\lambda'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. □

¿Cómo es el espectro dada $q(x)$ una función elíptica? Más precisamente, ¿Cómo es el espectro del potencial $q(x) = m(m + 1)k^2 \text{sn}^2(x; k)$?

Potencial de Lamé

A la ecuación de Hill cuyo potencial es $m(m+1)k^2 sn^2(x; k)$ se le llama ecuación de Lamé:

$$u''(x) + [\lambda - m(m+1)k^2 sn^2(x; k)] u(x) = 0 \quad (2.4)$$

donde $sn(x; k)$ es la función sinus amplitudinis de Jacobi definida por

$$x = \int_0^{sn(x;k)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (2.5)$$

Es decir, es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$$

$$y(0) = 0$$

k^2 es el módulo de $sn(x; k)$. Los dos periodos de $sn(x; k)$ son $4K$ y $2iK'$ donde

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (2.6)$$

$$K' = \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-k^2x^2}}$$

(Para más detalles, ver [Fe]; capítulo 4 y 5)

Haciendo el cambio de variable

$$v = am(x; k)$$

con la función $v = am(x; k)$ definida por

$$\frac{dv}{dx} = \sqrt{1-k^2 sen^2(v)} \quad , \quad k^2 < 1$$

$$v(0) = 0$$

la ecuación (2.4) toma la forma

$$[1 - k^2 sen^2(v)] \frac{d^2y}{dv^2} - k^2 sen(v) \cos(v) \frac{dy}{dv} + [\lambda - m(m+1)k^2 sen^2(v)] y = 0 \quad (2.7)$$

Estudiaremos las soluciones con periodos $2K$ y $4K$ de la ecuación de Lamé que corresponden a funciones propias del espectro periódico y antiperiódico respectivamente.

Whittaker y Watson [WW] (sección 23.47) muestran que si m es un entero y λ es un valor propio tal que existe un polinomio de Lamé que es solución de

(2.7) entonces la segunda solución no puede ser periódica. Es decir, λ es un valor propio simple. Teniendo en cuenta este resultado analicemos las soluciones para valores enteros de m .

Si $\rho(v)$ es solución antiperiódica (de periodo 2π) de la ecuación (2.7) de la forma

$$\rho(v) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+1} \cos((2j+1)v) \quad (2.8)$$

sus coeficientes cumplen las siguientes relaciones de recurrencia (de aquí en adelante $\varpi = 2\lambda - m(m+1)k^2$)

$$\frac{1}{2}(m-2)(m+3)k^2 A_3 + \left[\varpi - (2-k^2) + \frac{1}{2}m(m+1)k^2 \right] A_1 = 0 \quad (2.9)$$

y para $j \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(m-2j-2)(m+2j+3)k^2 A_{2j+3} + [\varpi - (2j+1)^2(2-k^2)] A_{2j+1} + \\ + \frac{1}{2}(m-2j+1)(m+2j)k^2 A_{2j-1} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Por otra parte, si $f(v)$ es solución antiperiódica (de periodo 2π) de (2.7) de la forma

$$f(v) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{2j+1} \sen((2j+1)v) \quad (2.11)$$

sus coeficientes quedan determinados por la relación de recurrencia

$$\frac{1}{2}(m-2)(m+3)k^2 B_3 + \left[\varpi - (2-k^2) - \frac{1}{2}m(m+1)k^2 \right] B_1 = 0 \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(m-2j-2)(m+2j+3)k^2 B_{2j+3} + [\varpi - (2j+1)^2(2-k^2)] B_{2j+1} + \\ + \frac{1}{2}(m-2j+1)(m+2j)k^2 B_{2j-1} = 0, \quad j \geq 1 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Si $\rho_2(v)$ es solución periódica (de periodo π) de la ecuación (2.7) de la forma

$$\rho_2(v) = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j} \cos(2jv) \quad (2.14)$$

sus coeficientes deben cumplir las siguientes relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(m-1)(m+2)k^2 A_2 + \varpi A_0 = 0 \\ \frac{1}{2}(m-3)(m+4)k^2 A_4 + [\varpi - 4(2-k^2)] A_2 + m(m+1)k^2 A_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

y

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (m - 2r - 1) (m + 2r + 2) k^2 A_{2r+2} + [\varpi - 4r^2(2 - k^2)] A_{2r} + \\ & + \frac{1}{2} (m + 2r - 1) (m - 2r + 2) k^2 A_{2r-2} = 0 \quad , \quad r > 1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Por otra parte, si $f_2(v)$ es solución periódica (de periodo π) de la ecuación (2.7) de la forma

$$f_2(v) = \sum_{j=1}^{\infty} B_{2j} \text{sen}(2jv) \quad (2.17)$$

sus coeficientes cumplen las siguientes relaciones de recurrencia

$$B_4 \left[-3k^2 + \frac{k^2}{4} m(m+1) \right] + B_2 \left[2k^2 + \lambda - 4 - m(m+1) \frac{k^2}{2} \right] = 0 \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} B_6 \left[-\frac{15}{2} k^2 + \frac{k^2}{4} m(m+1) \right] + B_4 \left[8k^2 - \frac{k^2}{2} m(m+1) + \lambda - 16 \right] + \\ + B_2 \left[-\frac{3}{2} k^2 + \frac{k^2}{4} m(m+1) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

y para $j \geq 3$

$$\begin{aligned} B_{2j} \left[2k^2 j^2 - \frac{k^2}{2} m(m+1) + \lambda - 4j^2 \right] + \\ + B_{2j-2} \left[-k^2 (j-1)^2 + \frac{k^2}{4} m(m+1) - \frac{1}{2} k^2 (j-1) \right] + \\ + B_{2j+2} k^2 \left[-(j+1)^2 + \frac{1}{2} (j+1) + \frac{1}{4} m(m+1) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Si $m = 1$

- Los valores propios antiperiódicos quedan determinados por (2.9) , (2.10), (2.12) y (2.13)
- La relación (2.9) correspondiente es

$$A_3 = \frac{1}{k^2} [\lambda - 1] A_1 \quad (2.21)$$

Si $\lambda = 1$, entonces $A_3 = 0$. Tomando este valor de λ para la relación (2.10) obtenemos $A_5 = 0$. Entonces, por (2.10), $A_{2j+1} = 0$ para toda $j \geq 3$. Por lo tanto, si $\lambda = 1$ y $A_1 = 1$

$$\rho(v) = \cos(v)$$

que es un polinomio de Lamé. Por lo tanto $\lambda = 1$ es un valor propio simple.

- La relación (2.12) correspondiente es

$$2k^2 B_3 = [\lambda - k^2 - 1] B_1$$

Si $\lambda = k^2 + 1$, entonces $B_3 = 0$. y por (2.13) $A_{2j+1} = 0$ para toda $j \geq 2$. Por lo tanto, si $\lambda = k^2 + 1$

$$\rho(v) = \text{sen}(v)$$

y $\lambda = k^2 + 1$ es un valor propio simple por ser $\rho(v)$ un polinomio de Lamé.

Las relaciones de recurrencia (2.10) y (2.13) y el **Teorema 2.10** garantizan que $\lambda = 1, 1 + k^2$ son los únicos valores propios antiperiódicos simples. Ya que las raíces del polinomio $Q^*(\mu)$ (definido en (2.28), que en este caso son las raíces de $(2\mu - 1)^2 + (2\mu - 1) - 2$) son

$$\mu = 1, \mu = \frac{-1}{2}$$

Tenemos otras dos formas de ver que $\lambda = 1, 1 + k^2$ son valores propios simples. La primera es encontrando otra solución no trivial de la ecuación (2.7) que no sea antiperiódica. Esto lo haremos por variación de constantes:

Para $\lambda = 1$ consideramos la función $y(v) = Y(v) \cos(v)$, entonces

$$\begin{aligned} Y'(v) &= Y'(0) + e^{2-2\cos(v)+k^2} \int_0^v \frac{\text{sen}(s) \cos^2(s)}{1-k^2 \text{sen}^2(s)} ds, \quad Y'(0) = 1 \\ Y(v) &= v + \int_0^v e^{2-2\cos(z)+k^2} \int_0^z \frac{\text{sen}(s) \cos^2(s)}{1-k^2 \text{sen}^2(s)} ds dz \\ y(v) &= v \cos(v) + \cos(v) \int_0^v e^{2-2\cos(z)+k^2} \int_0^z \frac{\text{sen}(s) \cos^2(s)}{1-k^2 \text{sen}^2(s)} ds dz \end{aligned}$$

Por lo tanto $y(v)$ no es una solución antiperiódica.

Para $\lambda = 1 + k^2$ consideramos la función $y(v) = Y(v) \text{sen}(v)$, entonces

$$\begin{aligned} Y'(v) &= Y'(0) + e^{-2\text{sen}(v)+k^2} \int_0^v \frac{\text{sen}^2(s) \cos(s)}{1-k^2 \text{sen}^2(s)} ds, \quad Y'(0) = 1 \\ Y(v) &= v + \int_0^v e^{-2\text{sen}(z)+k^2} \int_0^z \frac{\text{sen}^2(s) \cos(s)}{1-k^2 \text{sen}^2(s)} ds dz \\ y(v) &= v \text{sen}(v) + \text{sen}(v) \int_0^v e^{-2\text{sen}(z)+k^2} \int_0^z \frac{\text{sen}^2(s) \cos(s)}{1-k^2 \text{sen}^2(s)} ds dz \end{aligned}$$

Por lo tanto $y(v)$ no es una solución antiperiódica.

La otra manera es mediante el **Teorema 2.23**, si $\lambda = 1, 1 + k^2$ son dobles entonces no hay intervalos finitos de inestabilidad y por lo tanto el potencial es cero.

2.1. PROBLEMA INVERSO Y DIRECTO DE LA ECUACIÓN DE HILL 21

- Los valores propios periódicos quedan determinados por (2.15), (2.16), (2.18), (2.19) y (2.20)

-La relación de recurrencia (2.15) implica

$$\varpi A_0 = 0$$

Si $\varpi = 0$, entonces

$$\lambda = k^2$$

Por lo tanto si $A_0 = 1$

$$\rho_2(v) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} F_{2j}(A_2) \cos(2jv)$$

Donde $F_{2j}(A_2)$ es una función de A_2 determinada por (2.16).

Por el teorema de oscilación (ver Apéndice C) sabemos que el primer valor propio periódico es simple. La relación de recurrencia (2.15) y el **Teorema 2.11** garantizan primero que todos los valores propios periódicos de (2.7) diferentes de $\lambda = k^2$ son dobles, porque las raíces del polinomio $Q(\mu)$ (definido en (2.26)) son -1 y $\frac{1}{2}$, el coeficiente $A_0 = 0$ y las soluciones periódicas del tipo (2.14) son infinitas con coeficiente de $\cos(2k'v)$ igual a *cero* (en este caso $-k' - 1 = -1$). Y segundo, que entonces el primer valor propio es $\lambda = k^2$ porque tiene que haber un valor propio simple. Por el **Teorema 2.16** todos los demás valores propios periódicos son dobles. En este caso notamos que la multiplicidad de los valores propios no se deduce de la finitud de la expansión pues todas las funciones propias son de orden infinito.

Por lo tanto, hemos demostrado que para $m = 1$ los intervalos de inestabilidad son

$$(-\infty, k^2) \quad \text{y} \quad (1, 1 + k^2)$$

La ecuación (2.4) correspondiente es

$$u''(x) + [\lambda - 2k^2 sn^2(x; k)] u(x) = 0$$

Sea $q = 2k^2 sn^2(x; k)$, entonces

$$\begin{aligned} q' &= [4k^2 sn(x; k) sn'(x; k)] = \\ &= \sqrt{16k^2 k^2 sn^2(x; k) (1 - sn^2(x; k)) (1 - k^2 sn^2(x; k))} = \\ &= \sqrt{8k^2 2k^2 sn^2(x; k) \left(1 - \frac{2k^2 sn^2(x; k)}{2k^2}\right) \left(1 - \frac{2k^2 sn^2(x; k)}{2}\right)} = \\ &= \sqrt{8k^2 q \left(\frac{2k^2 - q}{2k^2}\right) \left(\frac{2 - q}{2}\right)} = \sqrt{2} \sqrt{q(2k^2 - q)(2 - q)} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$q' = \sqrt{2}\sqrt{q(q-2k^2)(q-2)} \quad (2.22)$$

Más adelante, en el **Teorema 2.25**, demostramos el resultado de Hochstadt [Ho] que garantiza que si $q(x)$ tiene un sólo intervalo finito de inestabilidad entonces $q(x)$ es una función elíptica y que además es solución la ecuación diferencial (2.97). Y la ecuación (2.22).es de este tipo, sólo cambian las raíces de la cúbica.

Si $m = 2$

- Los valores propios antiperiódicos quedan determinados por (2.9) , (2.10), (2.12) y (2.13)
 - La relación (2.9) correspondiente es

$$[\lambda - (k^2 + 1)] A_1 = 0$$

Si $A_1 \neq 0$, entonces

$$\lambda = k^2 + 1$$

Por lo tanto, por (2.10) para $j \geq 1$ tenemos

$$\begin{aligned} -j(5+2j)k^2 A_{2j+3} + [2(1-k^2) - (2j+1)^2(2-k^2)] A_{2j+1} + \\ + (3-2j)(1+j)k^2 A_{2j-1} = 0 \end{aligned}$$

Entonces (2.8) es una serie infinita

- La relación (2.12) correspondiente es

$$[\lambda - (1 + 4k^2)] B_1 = 0$$

Si $B_1 \neq 0$ entonces

$$\lambda = 1 + 4k^2$$

Por lo tanto, por (2.13) para $j \geq 1$ tenemos

$$\begin{aligned} -j(5+2j)k^2 B_{2j+3} + [2(1+k^2) - (2j+1)^2(2-k^2)] B_{2j+1} + \\ + (3-2j)(1+j)k^2 B_{2j-1} = 0 \end{aligned}$$

Entonces (2.11) es una serie infinita

Observación. Si $A_1 = 0$, los coeficientes de (2.8) son los mismos de (2.11) si $B_1 = 0$ ya que (2.10) y (2.13) son iguales cambiando A por B . Por lo tanto los valores propios antiperiódicos distintos de $\lambda = 1 + 4k^2$ y $\lambda = 1 + k^2$ son dobles.

Por otra parte, el **Teorema 2.12**, con $k^* = 0$, garantiza que

- a) no hay soluciones finitas de periodo 2π

b) si hay una solución periódica de periodo 2π que por lo tanto debe ser infinita, entonces el valor propio es doble si y sólo si el coeficiente de $\cos(v)$ o $\sen(v)$, según sea el caso, es diferente de 0.

Por lo tanto $\lambda = 1 + 4k^2$ y $\lambda = 1 + k^2$ son valores propios antiperiódicos simples y por la observación anterior todos los otros son dobles.

- Los valores propios periódicos quedan determinados por (2.15), (2.16), (2.18), (2.19) y (2.20) las relaciones de recurrencia para $\{B_{2j}\}_{j \in \mathbb{N} \setminus 0}$ en caso de tener asociada una solución de la forma (2.17)

- La relación (2.18) correspondiente es

$$B_4 = \frac{2}{3k^2} B_2 [\lambda - (4 + k^2)] \quad (2.23)$$

Supongamos $B_2 = 1$. Si $\lambda = 4 + k^2$ entonces $B_4 = 0$. Por lo que (2.19) queda como

$$-6k^2 B_6 = 0$$

Por lo tanto $B_6 = 0$ y por (2.20) tenemos

$$B_{2j} = 0 \quad \forall j \geq 3$$

Entonces

$$f_2(v) = \sen(2v) \quad (2.24)$$

Como (2.24) es un polinomio de Lamé, $\lambda = 4 + k^2$ es un valor propio simple.

- La relación de recurrencia (2.15) correspondiente es

$$A_2 = \frac{1}{k^2} [3k^2 - \lambda] A_0$$

Si $A_0 = 1$ Entonces $A_2 = 3k^2 - \lambda$, entonces la segunda relación de recurrencia de (2.15) queda como

$$-3k^2 A_4 + [2\lambda - 6k^2 - 4(2 - k^2)] \frac{1}{k^2} (3k^2 - \lambda) + 6k^2 = 0$$

Es decir

$$3k^4 A_4 = -2 [\lambda^2 + 4k(k+1)\lambda - 12k^2]$$

A_4 es un polinomio de grado dos en λ . Si $A_4(\lambda) = 0$, es decir

$$\lambda_{\pm} = 2(k^2 + 1) \pm 2\sqrt{k^2(k^2 - 1) + 1}$$

entonces λ_+ y λ_- son valores reales de λ para los cuales $A_4(\lambda) = 0$

Entonces, para $\lambda \in \{\lambda_+, \lambda_-\}$ tenemos $A_6 = 0$ y por lo tanto

$$A_{2j} = 0 \quad , \quad j \geq 3$$

Entonces

$$\rho_+(v) = 1 + [3k^2 - \lambda_+] \cos(2v).$$

$$\rho_-(v) = 1 + [3k^2 - \lambda_-] \cos(2v).$$

que son polinomios de Lamé, por lo que λ_+ y λ_- son valores propios periódicos simples.

Por **Teorema 2.10** los valores propios λ distintos a λ_+ , λ_- y $(4 + k^2)$ son dobles ya que las series (2.14) y (2.17) correspondientes son infinitas y las raíces del polinomio $Q(\mu)$ (definido en (2.26), que en este caso corresponden a las raíces de $2\mu^2 + \mu - 3$) son

$$\mu = 1 \quad , \quad \mu = -\frac{3}{2}$$

Por lo tanto, hemos encontrado todos los valores propios simples para $m = 2$: los periódicos son λ_+ , λ_- , $(4 + k^2)$, y por la **Observación** anterior los antiperiódicos son $\lambda = 1 + 4k^2$ y $\lambda = 1 + k^2$.

Otra forma de verificar que los valores propios antiperiódicos $\lambda = 1 + 4k^2$ y $\lambda = 1 + k^2$ son simples es de la ecuación diferencial para el potencial $q(x) = 6k^2 sn^2(x)$:

$$\begin{aligned} q' &= 2 \cdot 6k^2 sn(x) sn'(x) = 2\sqrt{6k^2 q^2} \sqrt{(1 - sn^2(x; k)) (1 - k^2 sn^2(x; k))} = \\ q' &= 2\sqrt{6k^2 q} \sqrt{\left(\frac{6k^2 - q}{6k^2}\right) \left(\frac{6 - q}{6}\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{q(q - 6k^2)(q - 6)} \end{aligned}$$

El **Teorema 2.25** garantiza que $\lambda = 1 + 4k^2$ y $\lambda = 1 + k^2$ son simples, de lo contrario solo existiría un intervalo de inestabilidad y la ecuación diferencial para $q(x)$ tendría que ser del tipo (2.22), es decir, con coeficiente principal del polinomio cúbico igual a 2. En el cálculo anterior tenemos que el coeficiente del término principal de la cúbica es distinto de 2, por lo tanto no cumple una ecuación del tipo (2.22).

Por lo tanto, en este caso los intervalos de inestabilidad son:

$$(-\infty, \lambda_-) \quad , \quad (1 + k^2, 1 + 4k^2) \dots (\lambda_+, 4 + k^2)$$

Encontremos como son los valores propios en el caso general. Para esto, haremos uso de la *ecuación de Ince*:

$$(1 + a \cos(2x))y'' + b(\sin(2x))y' + (c + d \cos(2x))y = 0 \quad (2.25)$$

donde a, b, c y d son parámetros reales y $|a| < 1$.

Teorema 2.2 Si la ecuación de Ince (2.25) tiene dos soluciones linealmente independientes de periodo π , entonces el polinomio

$$Q(\mu) = 2a\mu^2 - b\mu - d/2 \quad (2.26)$$

tiene un cero en uno de los puntos

$$\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.27)$$

Si (2.25) tiene dos soluciones linealmente independientes de periodo 2π , entonces

$$Q^*(\mu) = 2Q(\mu - 1/2) = a(2\mu - 1)^2 - b(2\mu - 1) - d \quad (2.28)$$

tiene como raíz a alguno de los puntos de (2.27).

Para probar el **Teorema 2.2** necesitamos los siguientes lemas.

Lema 2.3 Sean $P(\mu)$ un polinomio de grado uno o dos en μ y D_n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) elementos de una sucesión que satisface la siguiente relación de recurrencia

$$P(n)D_n = P(-n - 2)D_{n+1} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

y relaciones de límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p D_n = 0 \quad , \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (2.30)$$

Entonces $D_n = 0$ para todo valor de n o $P(\mu)$ tiene una raíz entera.

Prueba. Si $P(\mu)$ no tiene raíces enteras entonces por (2.29) $D_n = 0$ para toda n o $D_n \neq 0$ para toda n .

Supongamos $D_n \neq 0$ para toda n y $P(m) \neq 0 \neq P(-m - 1)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Fijamos k un entero positivo, entonces por (2.29)

$$D_k = \frac{P(-k - 2)P(-k - 1) \cdots P(-k - r - 2)}{P(k)P(k + 1) \cdots P(k + r)} D_{k+r+1} \quad , \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

Supongamos que $P(\mu)$ es de grado 2 y que

$$P(\mu) = A(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2)$$

Entonces (2.31) se puede escribir como

$$D_k = \frac{A^r (-k - 2 - \lambda_1) (-k - 2 - \lambda_2) \cdots (-k - r - 1 - \lambda_1) (-k - r - 2 - \lambda_2)}{A^r (k - \lambda_1) (k - \lambda_2) \cdots (k + r - \lambda_1) (k + r - \lambda_2)} D_{k+r+1}$$

con $r = 0, 1, 2, \dots$ Entonces

$$D_k = \frac{(k+2+\lambda_1)(k+1+\lambda_1) \cdots (k+r+2+\lambda_1) \cdot (k+1+\lambda_2)(k+2+\lambda_2) \cdots}{(k-\lambda_1)(k+1-\lambda_1) \cdots (k+r-\lambda_1) \cdot (k-\lambda_2)(k+1-\lambda_2) \cdots} \cdot \frac{\cdots (k+r+2+\lambda_2)}{\cdots (k+r-\lambda_2)} D_{k+r+1}$$

Por lo tanto

$$\frac{\Gamma(k+2+\lambda_1) \cdot \Gamma(k+2+\lambda_2)}{\Gamma(k-\lambda_1) \cdot \Gamma(k-\lambda_2)} D_k = \frac{\Gamma(k+r+3+\lambda_1) \cdot \Gamma(k+r+3+\lambda_2)}{\Gamma(k-\lambda_1+r+1) \cdot \Gamma(k-\lambda_2+r+1)} D_{k+r+1} \quad (2.32)$$

Por otra parte, si $P(\mu)$ es de grado 1 y

$$P(\mu) = A(\mu - \lambda)$$

Entonces (2.31) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} D_k &= \frac{A^r(-k-2-\lambda)(-k-1-\lambda) \cdots (-k-r-2-\lambda)}{A^r(k-\lambda)(k+1-\lambda) \cdots (k+r-\lambda)} D_{k+r+1} \quad , r = 0, 1, 2, \dots \\ &= (-1)^r \frac{(k+2+\lambda)(k+1+\lambda) \cdots (k+r+2+\lambda)}{(k-\lambda)(k+1-\lambda) \cdots (k+r-\lambda)} D_{k+r+1} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Es decir,

$$D_k \frac{\Gamma(k+2+\lambda)}{\Gamma(k-\lambda)} = (-1)^r \frac{\Gamma(k+r+3+\lambda)}{\Gamma(k+r+1-\lambda)} D_{k+r+1}$$

Donde Γ es la función Gamma.

Como consecuencia de la fórmula de Stirling ($n! \sim \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n}$) tenemos las siguientes relaciones asintóticas

Sea $t_r = k+r+2$ y $\rho = \lambda+1$, entonces por (2.33) y (2.30) tenemos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (-1)^r \frac{\Gamma(k+r+3+\lambda)}{\Gamma(k+r+1-\lambda)} D_{k+r+1} = \lim_{r \rightarrow \infty} D_k \frac{\Gamma(k+2+\lambda)}{\Gamma(k-\lambda)} = D_k \frac{\Gamma(k+2+\lambda)}{\Gamma(k-\lambda)}$$

Por otra parte

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{\Gamma(k+r+3+\lambda)}{\Gamma(k+r+1-\lambda)} D_{k+r+1} \right| = \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{\Gamma(t_r+\rho)}{\Gamma(t_r-\rho)} D_{t_r} \right| = \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{\Gamma(t_r+\rho)}{\Gamma(t_r-\rho)t_r^\rho} \right| \cdot |t_r^\rho D_{t_r}| = 0$$

Por lo tanto

$$D_k \frac{\Gamma(k+2+\lambda)}{\Gamma(k-\lambda)} = 0 \quad (2.34)$$

Análogamente

$$\frac{\Gamma(k+2+\lambda_1) \cdot \Gamma(k+2+\lambda_2)}{\Gamma(k-\lambda_1) \cdot \Gamma(k-\lambda_2)} D_k = 0 \quad (2.35)$$

Lo cual contradice nuestra suposición sobre el valor de D_k . \square

Podemos usar que el lado izquierdo de las ecuaciones (2.33) y (2.32) son cero para demostrar el siguiente lema

Lema 2.4 Si D_n satisface las relaciones de recurrencia y límite (2.29) y (2.30) respectivamente, entonces $D_n = 0$ para $n > k_o$, donde k_o es la mayor raíz entera no negativa de $P(\mu)$. Si no existe tal entero, entonces $D_n = 0$ para toda n .

Para demostrar **Teorema 2.2** necesitamos

Lema 2.5 Si la ecuación de Ince tiene dos soluciones linealmente independientes de periodo π o 2π , entonces podemos encontrar dos soluciones y_1 y y_2 tales que

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \cos(2nx), \quad y_2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \text{sen}(2nx) \quad (2.36)$$

o

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \cos((2n+1)x), \quad y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \text{sen}((2n+1)x) \quad (2.37)$$

donde, para cada $p > 0$ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p A_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^p B_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^p A_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^p B_{2n+1} = 0 \quad (2.38)$$

Prueba. Del teorema de oscilación (Ver Apéndice C) sabemos que una ecuación de Hill no puede tener una solución de periodo π y otra de periodo 2π (que no es de periodo π) y ya que la ecuación de Ince puede ser transformada en una de Hill mediante el cambio de variable

$$y = (1 + a \cos(2x))^{\frac{b}{4a}} z, \quad a \neq 0$$

quedando como

$$z'' + \frac{\alpha + \beta \cos(2x) + \gamma \cos(4x)}{(1 + a \cos(2x))^2} z = 0 \quad (2.39)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha &= c - ab - b^2/8 + ad/2 \\ \beta &= d + ac - b \\ \gamma &= ad/2 + b^2/8 \end{aligned}$$

lo mismo aplica para dicha ecuación.

Notemos que si hay una solución del tipo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \cos((2n+1)x) + \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \cos(2nx)$ entonces el segundo término sería solución de la ecuación de Ince de periodo π ya que la relación de recurrencia para las soluciones pares de periodo π (2.16) tendría una solución, mientras que el primer término nos da una solución de periodo mínimo 2π y por teorema de oscilación (Apéndice C), ésto no puede ocurrir.

Por otra parte, sabemos por teoría de Floquet que dadas dos soluciones y_1 y y_2 linealmente independientes del sistema $y'' + Q(x)y = 0$ con condiciones iniciales (2.59) y $Q(x) = Q(-x)$ entonces:

■ **Nota:** Se cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} y_1(\pi) &= 2y_1(\pi/2)y_2'(\pi/2) - 1 = 1 + 2y_1'(\pi/2)y_2(\pi/2) \\ y_2(\pi) &= 2y_2(\pi/2)y_2'(\pi/2) \\ y_1'(\pi) &= 2y_1(\pi/2)y_1'(\pi/2) \\ y_2'(\pi) &= y_1(\pi) \end{aligned} \tag{2.40}$$

en todos los casos $y_1(x) = y_1(-x)$ y $y_2(x) = -y_2(-x)$. Más aún, siempre que existe una solución no trivial de periodo π o 2π existe también una solución del mismo periodo que es par o impar. Por lo tanto, estas soluciones periódicas son necesariamente múltiplos de una de las soluciones $y_1(x)$ o $y_2(x)$ a menos que todas las soluciones sean periódicas de periodo π o 2π .

Ya que la ecuación de Ince se puede transformar en una ecuación simétrica de Hill podemos aplicar este último resultado de teoría de Floquet. Por lo tanto, 2.25 tiene una solución par y una solución impar, ambas del mismo periodo, y si el periodo es 2π , las soluciones deben cambiar de signo si x se incrementa por π .

Estas observaciones demuestran (2.36) y (2.37). Para demostrar (2.38), observamos que las soluciones de (2.25) deben ser analíticas en una franja de ancho constante que contiene al eje real en el plano complejo. Por lo tanto, las series en (2.36) y (2.37) deben converger para $x = x_1 + ix_2$, con x_1 real arbitrario y x_2 real de tal forma que

$$|1 + a \cos(x_1 + ix_2)| > 0$$

Por lo tanto, existe una constante $M > 1$ tal que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^n A_{2n} = 0$$

y este hecho implica inmediatamente la primera relación de límite en (2.38). Esto completa la prueba. \square

Ahora necesitamos:

Lema 2.6 *Si la ecuación de Ince (2.25) tiene soluciones y_1 y y_2 definidas por (2.36), entonces A_{2n} y B_{2n} satisfacen las relaciones de recurrencia*

$$-cA_0 + Q(-1)A_2 = 0 \tag{2.41}$$

$$Q(n-1)A_{2n-2} + (4n^2 - c)A_{2n} + Q(-n-1)A_{2n+2} = 0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.42}$$

$$(2^2 - c)B_2 + Q(-2)B_4 = 0 \tag{2.43}$$

$$Q(n-1)B_{2n-2} + (4n^2 - c)B_{2n} + Q(-n-1)B_{2n+2} = 0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.44}$$

y si (2.25) tiene las soluciones definidas por (2.37) entonces las relaciones de recurrencia son las siguientes

$$[Q^*(0) - 2(c - 1)] A_1 + Q^*(-1)A_3 = 0 \quad (2.45)$$

$$Q^*(n)A_{2n-1} + 2 \left[(2n + 1)^2 - c \right] A_{2n+1} + Q^*(-n - 1)A_{2n+3} = 0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.46)$$

$$[-Q^*(0) - 2(c - 1)] B_1 + Q^*(-1)B_3 = 0 \quad (2.47)$$

$$Q^*(n)B_{2n-1} + 2 \left[(2n + 1)^2 - c \right] B_{2n+1} + Q^*(-n - 1)B_{2n+3} = 0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.48)$$

Prueba. La demostración es inmediata si sustituimos la serie en cuestión ((2.36) o (2.37)) en la ecuación diferencial. \square

El último lema que necesitamos para demostrar el **Teorema 2.2** es el siguiente

Lema 2.7 Sean D_o, D_1, D_2, \dots y $D_o^*, D_1^*, D_2^*, \dots$ definidos de la siguiente manera

$$D_o = A_o B_2, \quad D_n = -A_{2n+2} B_{2n} + B_{2n+2} A_{2n}.$$

$$D_o^* = A_1 B_1, \quad D_n^* = -A_{2n+1} B_{2n-1} + A_{2n-1} B_{2n+1}.$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$. Entonces las siguientes relaciones de recurrencia se cumplen:

$$Q(n)D_n = Q(-n - 2)D_{n+1} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.49)$$

$$2Q^*(0)D_o^* = Q^*(-1)D_1^* \quad (2.50)$$

$$Q^*(n)D_n^* = Q^*(-n - 1)D_{n+1}^* \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.51)$$

Prueba. La demostración se sigue de las relaciones de recurrencia del Lema anterior. \square

Ya tenemos todo para demostrar el **Teorema 2.2**.

Prueba. [Teo.2.2] **Lema 2.3** y **Lema 2.5** muestran que los D_n 's definidos en el **Lema 2.7** son cero si $Q(\mu)$ no tiene una raíz entera. Esto implica

$$D_o = A_o B_2 = 0$$

Por lo cual

$$A_o = 0 \quad \text{o} \quad B_2 = 0$$

Si $B_2 = 0$, las relaciones de recurrencia del **Lema 2.6** muestran que $B_{2n} = 0$ ya que $Q(\mu) \neq 0$. Por lo tanto la serie y_2 de (2.36) es idénticamente cero por lo que y_1 y y_2 no son linealmente independientes.

Si $A_o = 0$, entonces $y_1 = 0$.

Observemos que la demostración del **Lema 2.3** funciona igual si en (2.29) sustituimos $P(-n - 2)$ por $P(-n - 1)$. De este cambio y del **Lema 2.5** tenemos que $D_n^* = 0$ (definido en el **Lema 2.7**) cuando $Q^*(\mu)$ no tenga raíces enteras.

Por otra parte $D_n^* = 0$ implica

$$A_{2n+1} = 0 \quad \text{o} \quad B_{2n+1} = 0$$

lo cual es una contradicción al **Lema 2.5**. Así, queda completa la prueba del **Teorema 2.2**. \square

Tenemos condiciones necesarias para la coexistencia de dos soluciones periódicas de (2.25) de periodo π o 2π y esta condición se puede pedir aun sin saber si (2.25) tiene al menos una solución periódica o no.

Para tener condiciones suficientes para la coexistencia de soluciones periódicas para la ecuación de Ince necesitamos asumir que los valores de los parámetros son tales que existe al menos una solución de periodo π o 2π .

Teorema 2.8 *Para cualesquiera valores reales de los parámetros a, b y d (con $|a| < 1$) existen una infinidad de valores para el parámetro c tal que la ecuación de Ince tiene una solución par o impar de periodo π o 2π .*

Prueba. Notemos que el parámetro c no entra en las condiciones necesarias enunciadas en el **Teorema 2.2** para que la ecuación de Ince tenga soluciones periódicas de periodo π o 2π . Escribamos (2.39) como

$$z'' + \left[\frac{c}{1 + a \cos(2x)} + \frac{\rho + \sigma \cos(2x) + \tau \cos(4x)}{(1 + a \cos(2x))^2} \right] z = 0 \quad (2.52)$$

donde ρ, σ y τ no dependen de c .

Sea $H(x) = \left[\frac{c}{1 + a \cos(2x)} + \frac{\rho + \sigma \cos(2x) + \tau \cos(4x)}{(1 + a \cos(2x))^2} \right]$, el coeficiente de z en (2.52) y sean

$$\lambda^2 = \min_{0 \leq x \leq \pi} H(x) \quad \text{y} \quad \Lambda^2 = \max_{0 \leq x \leq \pi} H(x)$$

para c suficientemente grande.

Los valores λ^2 y Λ^2 crecen conforme el parámetro c crece y

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \Lambda^2 = \lim_{c \rightarrow \infty} \lambda^2 = \infty$$

Sean z_1 y z_2 soluciones de (2.52) tales que

$$z_1(0) = 1 = z_2'(0) \quad \text{y} \quad z_1'(0) = 0 = z_2(0)$$

El número de ceros de z_1, z_2, z_1' y z_2' en el intervalo $[0, \pi/2]$ es minimizado o maximizado, respectivamente, por el número de ceros de las soluciones correspondientes a la ecuación

$$z'' + \Lambda^2 z = 0$$

o

$$z'' + \lambda^2 z = 0$$

Ya que si $q_1(x)$ y $q_2(x)$ son continuas en $[a, b]$ y $u_1(x)$, $u_2(x)$ son soluciones de

$$u_j'' + q_j(x)u_j = 0 \quad , \quad j = 1, 2$$

y tomando $u_j = r \operatorname{sen}(\theta_j(x))$, $u_j' = r \cos(\theta_j(x))$ entonces si $q_1(x) \geq q_2(x)$

$$\theta_1(x) \geq \theta_2(x)$$

(ver [E]; capítulo 3).

Como los ceros de las soluciones dependen continuamente del parámetro c entonces si el parámetro c crece obtenemos una infinidad de valores de c tales que, para soluciones de (2.52), alguna de las cantidades

$$z_1(\pi/2) \quad , \quad z_1'(\pi/2) \quad , \quad z_2(\pi/2) \quad , \quad z_2'(\pi/2)$$

es cero y por **Nota** de (2.40) se tiene el resultado. \square

Definición 2.9 Una solución de la ecuación de Ince (2.25) dada por una serie del tipo (2.36) es llamada finita de orden k si $A_{2k} \neq 0$ o $B_{2k} \neq 0$ y $A_{2n} = 0$ o $B_{2n} = 0$ para toda $n > k$

Teorema 2.10 Si $Q(\mu)$, definida en el **Teorema 2.2**, tiene una raíz entera no negativa y si k_o es la mayor de dichas raíces, y si existe una solución (del tipo (2.36)) que es infinita o finita de orden $k > k_o$ entonces la ecuación de Ince tiene dos soluciones linealmente independientes de periodo π . Análogamente, existen dos soluciones linealmente independientes de periodo 2π si $Q^*(\mu)$ tiene una raíz entera no negativa k_o^* (y ninguna mayor a ésta) y si existe una solución del tipo (2.37) infinita o finita de orden $k^* > k_o^*$.

Prueba. Consideremos el caso donde la ecuación de Ince tiene una solución

$$y_2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \operatorname{sen}(2nx)$$

tal que $B_{2k} \neq 0$ para alguna $k > k_o$. En general, definimos una función

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \cos(2nx)$$

de la siguiente forma: Sea $A_{2n} = B_{2n}$ para $n > k_o$. Nuestra suposición garantiza que $y_1(x) \neq 0$ para alguna x y que la serie que la define converge en todas partes. Si y_1 es una solución de (2.25), las relaciones de recurrencia (2.41) y (2.42) se deben satisfacer. Para $n > k_o$ esto es automáticamente verdadero ya que B_{2n} satisface la misma relación de recurrencia que A_{2n} . Notemos que esto se cumple aun si $k_o = 0$, porque en este caso (2.43) tiene la misma forma que

(2.42) para $n = 1$. Para $n \leq k_o$ debemos determinar A_{2n} del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$-cA_o + Q(-1)A_2 = 0 \quad (2.53)$$

y si $k_o > 0$ entonces para $n = 1, \dots, k_o - 1$ se tiene

$$Q(n-1)A_{2n-2} + (4n^2 - c)A_{2n} + Q(-n-1)A_{2n+2} = 0 \quad (2.54)$$

Por último

$$Q(k_o - 1)A_{2k_o-2} + (4k_o^2 - c)A_{2k_o} = -Q(-k_o - 1)B_{2k_o+2} \quad (2.55)$$

Existen exactamente $k_o + 1$ ecuaciones lineales para las incógnitas A_o, \dots, A_{2k_o} . En general, tienen una solución única, por ejemplo cuando el determinante de la matriz K , formada por los coeficientes de las incógnitas, es diferente de cero. En este caso, hemos construido y_1 de la forma requerida. Sin embargo, puede ocurrir que el determinante de la matriz K sea igual a cero. Entonces, debemos definir a y_1 como sigue:

Tomamos A_o, \dots, A_{2k_o} soluciones no-triviales de las ecuaciones homogéneas (2.53), (2.54) y (2.55) (reemplazando B_{2k_o+2} por cero). Para $n > k_o$, hacemos $A_{2n} = 0$. El que $Q(k_o) = 0$ implica que existe una solución no trivial de nuestro sistema de relaciones de recurrencia y una solución y_1 de orden finito $\leq k_o$.

Un argumento similar se puede usar para probar el **Teorema 2.10** en los tres casos restantes donde asumimos otra de las cuatro series en (2.36) y (2.37) como solución de (2.25). \square

Ya discutimos los caso cuando Q y Q^* tienen una raíz entera no negativa, ahora veamos el siguiente caso

Teorema 2.11 *Supongamos que $Q(\mu)$ tiene una o dos raíces enteras negativas y ninguna mayor o igual a cero. Sea $-k' - 1$ dicha raíz o una de estas raíces en caso de haber dos, con $k' \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Entonces*

- a) *No existe solución de orden finito de periodo π para la ecuación de Ince.*
- b) *Si existe una solución $y(x)$ (infinita) de periodo π entonces existen dos soluciones linealmente independientes si y sólo si el coeficiente de $\cos(2k'x)$ (si $y(x)$ es par) o de $\sin(2k'x)$ (si $y(x)$ es impar) en la expansión (2.36), es cero. En este caso todos los coeficientes de Fourier de la solución periódica con índice menor a $2k'$ son cero.*

Prueba. Como $Q(\mu) \neq 0$ para toda $\mu = 0, 1, 2, \dots$, se sigue de las relaciones de recurrencia (2.41) y (2.42) que

$$A_{2n} = 0 \quad \text{o} \quad B_{2n} = 0, \quad \forall n \leq l$$

si A_{2l+2} y A_{2l+4} (o B_{2l+2} y B_{2l+4}) son cero. Por lo tanto, no pueden existir soluciones periódicas de orden finito. Así, hemos demostrado a)

Supongamos ahora que la ecuación (2.25) tiene soluciones y_1 y y_2 del tipo (2.36). Entonces por el **Lema 2.7**

$$D_n = 0 \text{ para toda } n$$

En particular,

$$A_o B_2 = 0$$

Supongamos $A_o = 0$, y sea A_{2l} la primera de las A_{2n} distinta de cero. Entonces por (2.42) tenemos que $l = k' + 1$, con $Q(-k' - 1) = 0$.

Por otra parte, por el **Lema 2.4**

$$A_{2l-2} B_{2l} = A_{2l} B_{2l-2}$$

y ya que $A_{2l-2} = 0$, entonces

$$B_{2l-2} = 0$$

Procedemos de manera análoga para el caso $B_2 = 0$.

Por lo tanto, las condiciones para coexistencia enunciadas en el **Teorema 2.11** son condiciones necesarias. Pero también son suficientes. Porque, supongamos de nuevo que

$$A_0 = A_2 = \dots = A_{2l-2} = 0 \quad , \quad B_{2l-2} = 0$$

y que (2.25) tenga una solución y_2 del tipo (2.36). Entonces podemos escoger y_1 definida por

$$y_1 = \sum_{n=k'+1}^{\infty} B_{2n} \cos(2nx)$$

Los coeficientes de Fourier de y_1 satisfacen (2.41) y (2.42) ya que, los coeficientes de y_2 satisfacen por hipótesis (2.43) y (2.44). Podemos demostrar fácilmente que $B_{2l-2} = 0$ implica que $B_{2n} = 0$ para toda $n \leq l - 1$. \square

Un resultado similar a **Teorema 2.11** aplica para soluciones de periodo 2π de la siguiente forma

Teorema 2.12 *Supongamos que $Q^*(\mu)$ tiene una o dos raíces enteras negativas pero ninguna mayor o igual a cero. Sea $-k^* - 1$ una de estas raíces, donde $k^* = 0, 1, 2, \dots$ Entonces*

- a) *No existe solución de orden finito de periodo 2π de la ecuación de Ince.*
- b) *Si existe al menos una solución (infinita) w de periodo 2π entonces, existirán dos soluciones linealmente independientes si y sólo si el coeficiente de $\cos((2k^* + 1)x)$ (si w es par) o el de $\sin((2k^* + 1)x)$ (si w es impar) en la expansión de Fourier, es cero.*

Prueba. La demostración es análoga a la del **Teorema 2.11** y la omitiremos. \square

Por los **Teoremas 2.2, 2.8, 2.10, 2.11 y 2.12** sabemos cuando existen dos soluciones linealmente independientes de (2.25) de periodo π o 2π una vez que conocemos una solución. A menos que dicha solución sea de orden finito y no exista otra solución de orden finito tal que sean linealmente independientes.

Teorema 2.13 *Una condición necesaria para que la ecuación de Ince tenga dos soluciones linealmente independientes de orden finito es que $Q(\mu)$ (en el caso de periodo π) o $Q^*(\mu)$ (en el caso de periodo 2π) tenga dos raíces enteras con al menos una positiva. El orden de las soluciones finitas no puede exceder a la mayor raíz positiva de $Q(\mu)$ o $Q^*(\mu)$.*

Prueba. Como en la demostración del **Teorema 2.11** se sigue de las relaciones de recurrencia (2.41) a (2.47) que $A_{2l} = 0$ si $A_{2l+2} = 0 = A_{2l+4}$, a menos que $Q(l) = 0$.

Argumentos similares son válidos para las otras tres soluciones del tipo (2.36) y (2.37), y por lo tanto puede existir una solución de orden finito sólo si $Q(\mu)$ o $Q^*(\mu)$ tiene una raíz no negativa, y el orden no excede a la mayor de las raíces de este tipo.

De las relaciones de recurrencia concluimos que a lo más existe una solución de orden finito si $\mu = 0$ es la mayor raíz entera de $Q(\mu)$ o de $Q(\mu)^*$.

Por lo tanto, $Q(\mu)$ o $Q(\mu)^*$ deben tener al menos una raíz entera positiva.

El resto de la demostración se sigue si podemos mostrar que $\frac{b}{2a}$ es un entero. Porque en ese caso,

$$\mu^2 - \beta\mu - \frac{d}{4a} = 0 \quad , \quad \text{con } \beta = \frac{b}{2a}$$

debe tener una raíz entera. Ya que β es un entero, se sigue que $d/4a$ es también un entero y por lo tanto $Q(\mu)$ tiene dos raíces enteras. \square

Un argumento similar funciona para $Q^*(\mu)$. Por lo tanto, solo nos queda demostrar:

Lema 2.14 *Si (2.25) tiene dos soluciones linealmente independientes de orden finito, entonces $b/(2a)$ es un entero no negativo.*

Prueba. Si y_1 y y_2 son soluciones de (2.25) de orden finito, entonces

$$w = y_1 y_2' - y_2 y_1' \tag{2.56}$$

es también de orden finito

Si y_1 y y_2 son linealmente independientes entonces w no es idénticamente cero y

$$(1 + a \cos(2x))w' + b(\text{sen}(2x))w = 0$$

Por lo tanto

$$w = w_0(1 + a \cos(2x))^{b/2a}$$

con w_o constante $\neq 0$.

Entonces w tiene una expansión de Fourier finita si y sólo si $b/2a = 0, 1, 2, 3, \dots$ \square

En todo el desarrollo que llevamos de la ecuación de Ince, ninguno de los parámetros a, b y d juega el rol del valor propio λ de la ecuación de Hill (2.1). Sin embargo, c juega un papel especial como veremos en el siguiente resultado.

Teorema 2.15 Sean a, b y d tales que $Q(\mu)$ (o para periodo 2π , $Q^*(\mu)$) tiene una raíz entera no negativa k (o para periodo 2π , k^*). Si existen dos raíces, entonces k (ó k^*) denotará a la mayor de ellas. Sea C el conjunto (infinito) de valores de c para los cuales, con los valores dados de a, b y d , (2.25) tiene al menos una solución periódica de periodo π (ó 2π). Entonces, existen a lo más $k + 1$ (o para periodo 2π , $k^* + 1$) valores c_o, \dots, c_k (ó $c_o^*, \dots, c_{k^*}^*$) en C para los cuales (2.25) tiene una solución de orden finito. Para otros valores de $c \in C$, la ecuación de Ince tendrá dos soluciones linealmente independientes de periodo π (ó 2π).

Prueba. De acuerdo al **Teorema 2.10**, existen dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Ince de periodo π (o 2π) si se satisfacen las hipótesis del **Teorema 2.15** y si se conoce una solución de periodo π o 2π de orden infinito. De acuerdo al **Teorema 2.10**, el orden de una solución finita no puede ser mayor que k (o k^*). Resta demostrar que hay a lo más $k + 1$ (o $k^* + 1$) valores diferentes de c para los cuales existe tal solución finita.

De las relaciones de recurrencia (2.41) a (2.47) vemos que la existencia de dicha solución es equivalente a la existencia de una solución no trivial para un sistema de a lo más $k + 1$ (o $k^* + 1$) ecuaciones lineales homogéneas con igual número de incógnitas. A su vez, la existencia de dicha solución no trivial es equivalente a que el determinante del sistema sea cero. Y ya que cada columna de dicho determinante involucra depende linealmente de c , el determinante es un polinomio en c de grado menor o igual a $k + 1$ (o $k^* + 1$) y no tiene más ceros que el grado. Esto prueba el **Teorema 2.15** \square

De aquí, podemos probar un análogo al **Teorema 2.15** que muestre que, en general, se da la coexistencia si $Q(\mu)$ o $Q^*(\mu)$ tiene una raíz entera negativa:

Teorema 2.16 Sean a, b y d tales que $Q(\mu)$ (o para periodo 2π , $Q^*(\mu)$) tiene alguna raíz entera negativa. Sea $-k_o - 1$ (o para raíces de $Q^*(\mu)$, $-k_o^* - 1$) la menor de las raíces. Entonces, existen a lo más $k_o + 1$ (o para periodo 2π , $k_o^* + 1$) valores de c tales que la ecuación de Ince tiene una solución periódica de periodo π (o 2π) pero no dos que sean linealmente independientes.

Prueba. Observamos en la prueba del **Teorema 2.11** que B_2, \dots, B_{2l-2} satisfacen el sistema homogéneo de ecuaciones lineales. Éste puede tener solución no trivial para un número finito de valores de c , como se puede ver en el argumento utilizado en la demostración del **Teorema 2.10**. \square

Regresando a nuestro problema: ¿Cómo es el espectro de la ecuación de Hill dada una función elíptica? Tenemos

Teorema 2.17 Consideremos la ecuación de Lamé

$$y'' + [\lambda - m(m+1)k^2 \operatorname{sn}^2(x; k)] y = 0 \quad (2.57)$$

donde k^2 es el módulo de $\operatorname{sn}(x; k)$. Los dos periodos de $\operatorname{sn}(x; k)$ son K y $2iK'$, definidos en (2.6). Entonces existen soluciones periódicas de periodo $2K$ y $4K$ si y sólo si $m \in \mathbb{Z}$.

Si definimos $l = m$, si m es un entero positivo y $l = -m - 1$, si m es un entero negativo, entonces (2.57) tiene a lo mas $l + 1$ intervalos de inestabilidad (incluyendo el intervalo $(-\infty, \lambda_0)$).

Prueba. Sea $t = am(x, k)$. La función $am(x, t)$ está definida por

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(t)} \quad , \quad k^2 < 1$$

Entonces (2.57), que es la ecuación de Lamé, se transforma en

$$[1 - k^2 \operatorname{sen}^2(t)] \frac{d^2 y}{dt^2} - k^2 \operatorname{sen}(t) \cos(t) \frac{dy}{dt} + [\lambda - m(m+1)k^2 \operatorname{sen}^2(t)] y = 0 \quad (2.58)$$

Sean

$$\begin{aligned} a &= -b = \frac{k^2}{2 - k^2} \\ c &= \frac{2\lambda - m(m+1)k^2}{2 - k^2} \\ d &= \frac{m(m+1)k^2}{2 - k^2} \end{aligned}$$

Así, la ecuación de Lamé toma la forma de la ecuación de Ince (2.25).

El periodo $2K$ de (2.57) corresponde a π en (2.58). Las raíces del polinomio $Q(\mu)$ correspondientes a (2.58) son

$$\mu_1 = m/2 \quad , \quad \mu_2 = -(m+1)/2$$

y las raíces del polinomio $Q^*(\mu)$ son

$$\mu_1^* = (m+1)/2 \quad , \quad \mu_2^* = -m/2$$

Para que algunas de las raíces sean enteras, m debe ser un entero. Podemos suponer $m \geq 0$ ya que la ecuación de Lamé no cambia si cambiamos m por $-m - 1$. Si m es par, $m = 2l'$, entonces

$$\mu_1 = l' \quad , \quad \mu_2^* = -l'$$

De acuerdo al **Teorema 2.15**, existen a lo más $l' + 1$ valores de c (y por lo tanto de λ) para los cuales existe una pero no dos soluciones linealmente independientes de periodo π . Por otra parte, el **Teorema 2.16** muestra que no existen

2.1. PROBLEMA INVERSO Y DIRECTO DE LA ECUACIÓN DE HILL 37

más de l' valores de c y por lo tanto de λ para los cuales (2.58) tiene una pero no dos soluciones linealmente independientes de periodo 2π . Por lo tanto, existen a lo más $2l' + 1 = m + 1$ intervalos de inestabilidad. El caso m impar se trata de manera similar.

Erdélyi (1941) demostró que no existen menos de $m + 1$ intervalos de inestabilidad si el parámetro m en la ecuación de Lamé es un entero no negativo. Por lo tanto existen exactamente $m + 1$ intervalos de inestabilidad (incluyendo el intervalo $(-\infty, \lambda_o)$). \square

¿Podremos dar una representación explícita del potencial a partir, únicamente, de su espectro?

Para ésto necesitamos estudiar el comportamiento de las soluciones de la ecuación de Hill.

En esta sección estudiaremos las soluciones de la ecuación (2.1).

Sean y_1 y y_2 soluciones de (2.1) tales que

$$y_1(0) = y_2'(0) = 1 \quad , \quad y_1'(0) = y_2(0) = 0 \quad (2.59)$$

Se define al discriminante de (2.1) como

$$\Delta(\lambda) = y_1(\pi; \lambda) + y_2'(\pi; \lambda) \quad (2.60)$$

Los valores propios antiperiódicos son $\{\lambda'_i\}_{i \in \mathbb{N} \setminus 0} = \{\lambda \mid \Delta(\lambda) = -2\}$ y los periódicos $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \{\lambda \mid \Delta(\lambda) = 2\}$. El conjunto de valores inestables queda caracterizado por:

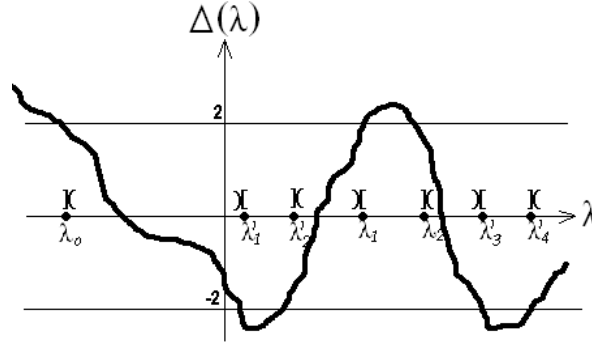
$$I(q) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid 2 < |\Delta(\lambda)|\} = (-\infty, \lambda_0) \bigcup_{i=1}^{\infty} (\lambda'_i, \lambda'_{i+1}) \bigcup_{i=1}^{\infty} (\lambda_i, \lambda_{i+1}) \quad (2.61)$$

y el conjuntos de valores estables por

$$E(q) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid -2 \leq \Delta(\lambda) \leq 2\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} [\lambda_{2i}, \lambda'_{2i+1}] \bigcup_{i=1}^{\infty} [\lambda'_{2i}, \lambda_{2i-1}] \quad (2.62)$$

(ver Apéndice C). A los intervalos que aparecen en $I(q)$ nos referimos como los intervalos de inestabilidad.

Los valores propios $\{\lambda'_i\}_{i \in \mathbb{N} \setminus 0}$ y $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ pueden ser dobles, es decir, puede ocurrir que $\lambda'_i = \lambda'_{i+1}$ o $\lambda_i = \lambda_{i+1}$. Por lo tanto, algunos (o todos) los intervalos de inestabilidad se pueden colapsar a un punto.



Sea $v = u'$, resolveremos (2.1) con condiciones iniciales (2.59) mediante el siguiente sistema

$$X' \equiv \begin{pmatrix} u' = v \\ v' = u'' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + B(X)$$

donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$ y $B(X(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ q(t)u \end{pmatrix}$

Por lo tanto

$$X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}B(X(s))ds \quad (2.63)$$

Pero A es diagonalizable, por lo tanto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{-\lambda} & -\sqrt{-\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{-\lambda} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{\lambda} & -i\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\sqrt{\lambda}t} & 0 \\ 0 & e^{-i\sqrt{\lambda}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2\sqrt{\lambda}} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{\lambda} & -i\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\sqrt{\lambda}(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{-i\sqrt{\lambda}(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2\sqrt{\lambda}} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ q(s)u \end{pmatrix} ds \\ X_1(t) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-it\sqrt{\lambda}} + e^{it\sqrt{\lambda}} & -\frac{i}{\sqrt{\lambda}}e^{it\sqrt{\lambda}} + \frac{i}{\sqrt{\lambda}}e^{-it\sqrt{\lambda}} \\ -i\sqrt{\lambda}e^{-it\sqrt{\lambda}} + i\sqrt{\lambda}e^{it\sqrt{\lambda}} & e^{it\sqrt{\lambda}} + ie^{-it\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{\lambda} & -i\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\sqrt{\lambda}(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{-i\sqrt{\lambda}(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2\sqrt{\lambda}} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ q(s)u \end{pmatrix} ds \end{aligned}$$

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{\lambda}) \\ -\sqrt{\lambda}\text{sen}(t\sqrt{\lambda}) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (*) \quad (2.64)$$

Donde (*) denota

$$\int_0^t \begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{\lambda}(-s+t)} + e^{i\sqrt{\lambda}(-s+t)} & \frac{i}{\sqrt{\lambda}}e^{-i\sqrt{\lambda}(-s+t)} - \frac{i}{\sqrt{\lambda}}e^{i\sqrt{\lambda}(-s+t)} \\ -i\sqrt{\lambda}e^{-i\sqrt{\lambda}(-s+t)} + i\sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\lambda}(-s+t)} & e^{-i\sqrt{\lambda}(-s+t)} + e^{i\sqrt{\lambda}(-s+t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ q(s)u \end{pmatrix} ds$$

Por lo tanto

$$u_1(z) = \cos(z\sqrt{\lambda}) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^z \text{sen}((z-s)\sqrt{\lambda})q(s)u_1(s)ds \quad (2.65)$$

$$u_2(z) = \text{sen}(z\sqrt{\lambda}) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^z \text{sen}((z-s)\sqrt{\lambda})q(s)u_2(s)ds \quad (2.66)$$

Resolvemos y obtenemos

$$u_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

con $v_0(z) = \cos(z\sqrt{\lambda})$ y

$$v_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^z \text{sen}((z-s)\sqrt{\lambda})q(s)v_{n-1}(s)ds, \text{ para } n \in \mathbb{Z}^+$$

Análogamente

$$u_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n$$

con $\omega_0(z) = \text{sen}(z\sqrt{\lambda})$ y

$$\omega_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^z \text{sen}((z-s)\sqrt{\lambda})q(s)\omega_{n-1}(s)ds, \text{ para } n \in \mathbb{Z}^+$$

Lema 2.18 Sea $Q(z) = \int_0^z q(s)ds$, entonces

$$y_1(z) = \cos(\sqrt{\lambda}z) + \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}z)}{2\sqrt{\lambda}}Q(z) + \frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{\lambda}[q(z) - q(0) - \frac{1}{2}Q^2(z)] + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)$$

$$y_2(z) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\text{sen}(\sqrt{\lambda}z) - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{2\lambda}Q(z) + \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}z)}{4\lambda^{3/2}}[q(z) + q(0) - \frac{1}{2}Q^2(z)] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

Prueba. De 2.65 tenemos

$$y_1(z) = \cos(z\sqrt{\lambda}) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^z \text{sen}((z-s)\sqrt{\lambda})q(s) \sum_{n=1}^{\infty} v_{n-1} ds$$

$$\text{donde } v_0(z) = \cos(z\sqrt{\lambda})$$

Desarrollemos $v_1(z)$ integrando por partes

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^z \text{sen}((z-s)\sqrt{\lambda})q(s) \cos(s\sqrt{\lambda}) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^z [\text{sen}(\sqrt{\lambda}z) \cos(\sqrt{\lambda}s) - \text{sen}(\sqrt{\lambda}s) \cos(\sqrt{\lambda}z)] q(s) \cos(s\sqrt{\lambda}) ds \\ &= \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}z)}{\sqrt{\lambda}} \int_0^z \cos^2(\sqrt{\lambda}s) q(s) ds - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{\sqrt{\lambda}} \int_0^z \text{sen}(\sqrt{\lambda}s) \cos(s\sqrt{\lambda}) q(s) ds \\ &= \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}z)}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^z q(s) ds + \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}z)}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^z \cos(2\sqrt{\lambda}s) q(s) ds + \\ &\quad - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{2\lambda} [\text{sen}^2(\sqrt{\lambda}z) q(z) - \int_0^z \text{sen}^2(\sqrt{\lambda}s) q'(s) ds] \\ &= \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}z)}{2\sqrt{\lambda}} \left[Q(z) + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \text{sen}((2\sqrt{\lambda}z)) q(z) - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^z \text{sen}((2\sqrt{\lambda}z)) q'(s) ds \right] + \\ &\quad - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{2\lambda} \left[\frac{1 - \cos(2\sqrt{\lambda}z)}{2} q(z) - \frac{1}{2} \int_0^z q'(s) - \cos(2\sqrt{\lambda}s) q'(s) ds \right] \\ &= \frac{\text{sen}(\lambda z)}{2\sqrt{\lambda}} Q(z) + \frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{2\lambda} q(z) - \frac{\cos^3(\sqrt{\lambda}z)}{2\lambda} q(z) - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{4\lambda} q(z) + \frac{\cos^3(\sqrt{\lambda}z)}{2\lambda} q(z) + \\ &\quad - \frac{\cos(\lambda z)}{4\lambda} q(z) + \frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{4\lambda} [q(z) - q(0)] + \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}z)}{8\lambda^{3/2}} [\cos((2\sqrt{\lambda}z)) q'(z) - q'(0)] + \\ &\quad - \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}z)}{8\lambda^{3/2}} \int_0^z \cos((2\sqrt{\lambda}z)) q''(s) ds - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{8\lambda^{3/2}} \text{sen}((2\sqrt{\lambda}z)) q'(z) + \\ &\quad + \frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{8\lambda^{3/2}} \int_0^z \text{sen}((2\sqrt{\lambda}s)) q''(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}z)}{2\sqrt{\lambda}} Q(z) + \frac{1}{4\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}z) [q(z) - q(0)] + \\ &\quad + \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}z)}{8\lambda^{3/2}} \left[\cos((2\sqrt{\lambda}z)) q'(z) - q'(0) - \int_0^z \cos((2\sqrt{\lambda}s)) q''(s) ds \right] + \\ &\quad - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{8\lambda^{3/2}} \left[\text{sen}((2\sqrt{\lambda}z)) q'(z) - \int_0^z \text{sen}((2\sqrt{\lambda}s)) q''(s) ds \right] \end{aligned}$$

$$v_1(z) = \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}z)}{2\sqrt{\lambda}} Q(z) + \frac{1}{4\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}z) [q(z) - q(0)] + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \quad (2.67)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} v_2(z) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^z \operatorname{sen}((z-s)\sqrt{\lambda})q(s)v_1(s)ds = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^z \operatorname{sen}((z-s)\sqrt{\lambda})q(s)v_1(s)ds \\ &= \int_0^z \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}z)}{\sqrt{\lambda}} \cos(\sqrt{\lambda}s)q(s)v_1(s) - \int_0^z \frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}s)q(s)v_1(s)ds \end{aligned}$$

De 2.67 tenemos

$$\begin{aligned} v_2(z) &= \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}z)}{\sqrt{\lambda}} \int_0^z \cos(\sqrt{\lambda}s)q(s) \left[\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}s)}{2\sqrt{\lambda}}Q(s) + \frac{1}{4\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}s) [q(s) - q(0)] \right] ds + \\ &\quad - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{\sqrt{\lambda}} \int_0^z \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}s)q(s) \left[\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}s)}{2\sqrt{\lambda}}Q(s) + \frac{1}{4\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}s) [q(s) - q(0)] \right] ds + \\ &\quad + \left[\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}z)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{\sqrt{\lambda}} \right] \int_0^z O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)ds \\ &= -\frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{2\lambda} \int_0^z \operatorname{sen}^2(\sqrt{\lambda}s)q(s)Q(s)ds + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \\ &= -\frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{2\lambda} \int_0^z \frac{1-\cos(2\sqrt{\lambda}s)}{2}q(s)Q(s)ds + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \\ &= -\frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{2\lambda} \int_0^z \frac{1-\cos(2\sqrt{\lambda}s)}{2}q(s)Q(s)ds + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \\ &= -\frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{4\lambda} \int_0^z q(s)Q(s) - \cos(2\sqrt{\lambda}s)q(s)Q(s)ds + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \\ &= -\frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{4\lambda} \int_0^z q(s)Q(s)ds + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$v_2(z) = -\frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{8\lambda}Q^2(s) + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)$$

Para $n \geq 3$ se tiene $v_n(z) = O\left(\frac{1}{\lambda^k}\right)$, $k \geq 3/2$. Por lo que

$$y_1(z) = \cos(z\sqrt{\lambda}) + \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}z)}{2\sqrt{\lambda}}Q(z) + \frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{4\lambda} \left[q(z) - q(0) - \frac{1}{2}Q^2(s) \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \quad (2.68)$$

Análogamente

$$y_2(z) = \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}z)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}z)}{2\lambda}Q(z) + \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}z)}{4\lambda^{3/2}}[q(z) + q(0) - \frac{1}{2}Q^2(z)] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad (2.69)$$

Evaluando en $z = \pi$

$$y_1(\pi) = \cos(\pi\sqrt{\lambda}) + v_1(\pi) + v_2(\pi) + \dots$$

Por 2.67 y ya que $Q(\pi) = \int_0^\pi q(s)ds = 0$ y $q(z + \pi) = q(z)$

$$\begin{aligned} v_1(\pi) &= \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}} \left[\cos(2\sqrt{\lambda}\pi)q'(\pi) - q'(0) - \int_0^\pi \cos(2\sqrt{\lambda}s)q''(s)ds \right] + \\ &\quad - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}} \left[\text{sen}(2\sqrt{\lambda}\pi)q'(\pi) - \int_0^\pi \text{sen}(2\sqrt{\lambda}s)q''(s)ds \right] \\ &= -\frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}}q'(\pi) + \frac{\cos(2\sqrt{\lambda}\pi)\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)q'(\pi)}{8\lambda^{3/2}} - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}}\text{sen}(2\sqrt{\lambda}\pi)q'(\pi) + \\ &\quad - \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}} \int_0^\pi \cos(2\sqrt{\lambda}s)q''(s)ds + \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}} \int_0^\pi \text{sen}(2\sqrt{\lambda}s)q''(s)ds \\ &= -\frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}}q'(\pi) + \frac{1}{8\lambda^{3/2}} \left[\cos^2(\sqrt{\lambda}\pi)\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) - \text{sen}^3(\sqrt{\lambda}\pi) \right] q'(\pi) + \\ &\quad - \frac{1}{4\lambda^{3/2}} \cos^2(\sqrt{\lambda}\pi)\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)q'(\pi) - \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}} \int_0^\pi \cos(2\sqrt{\lambda}s)q''(s)ds + \\ &\quad + \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}} \int_0^\pi \text{sen}(2\sqrt{\lambda}s)q''(s)ds \\ v_1(\pi) &= -\frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}}q'(\pi) - \frac{1}{8\lambda^{3/2}} \cos^2(\sqrt{\lambda}\pi)\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)q'(\pi) - \frac{1}{8\lambda^{3/2}}\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)q'(\pi) + \\ &\quad + \frac{\cos^2(\sqrt{\lambda}\pi)\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}}q'(\pi) - \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{16\lambda^2} \left[\text{sen}(2\sqrt{\lambda}\pi)q''(\pi) - \int_0^\pi \text{sen}(2\sqrt{\lambda}s)q'''(s)ds \right] + \\ &\quad - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}{16\lambda^2} \left[\cos(2\sqrt{\lambda}\pi)q''(\pi) - \int_0^\pi \cos(2\sqrt{\lambda}s)q'''(s)ds \right] \\ v_1(\pi) &= -\frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{4\lambda^{3/2}}q'(0) - \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{16\lambda^2} \left[\text{sen}(2\sqrt{\lambda}\pi)q''(\pi) - \int_0^\pi \text{sen}(2\sqrt{\lambda}s)q'''(s)ds \right] + \end{aligned}$$

$$-\frac{\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}{16\lambda^2} \left[\cos(2\sqrt{\lambda}\pi)q''(\pi) - \int_0^\pi \cos(2\sqrt{\lambda}s)q'''(s)ds \right]$$

$$v_1(\pi) = -\frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{4\lambda^{3/2}}q'(0) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

De igual forma desarrollamos v_2

$$\begin{aligned} v_2(\pi) &= \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi \cos(\sqrt{\lambda}s)q(s) \left[\frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}s)}{2\sqrt{\lambda}}Q(s) + \frac{1}{4\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}s) [q(s) - q(0)] \right] ds + \\ &\quad - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi \text{sen}(\sqrt{\lambda}s)q(s) \left[\frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}s)}{2\sqrt{\lambda}}Q(s) + \frac{1}{4\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}s) [q(s) - q(0)] \right] ds + \\ &\quad + \left[\frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}{\sqrt{\lambda}} \right] \int_0^\pi \left[\cos(\sqrt{\lambda}s) - \text{sen}(\sqrt{\lambda}s) \right] q(s)O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2(\pi) &= \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{2\lambda} \int_0^\pi \cos(\sqrt{\lambda}s)\text{sen}(\sqrt{\lambda}s)q(s)Q(s)ds + \\ &\quad + \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}} \int_0^\pi \left[1 + \cos(2\sqrt{\lambda}s) \right] q^2(s) - \left[1 + \cos(2\sqrt{\lambda}s) \right] q(s)q(0)ds + \\ &\quad + \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi \cos(\sqrt{\lambda}s)q(s)O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)ds - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}{4\lambda} \int_0^\pi \text{sen}^2(\sqrt{\lambda}s)q(s)Q(s)ds + \\ &\quad - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}{4\lambda^{3/2}} \int_0^\pi \text{sen}(\sqrt{\lambda}s) \cos(\sqrt{\lambda}s)q^2(s) - \text{sen}(\sqrt{\lambda}s) \cos(\sqrt{\lambda}s)q(s)q(0)ds + \\ &\quad - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi \text{sen}(\sqrt{\lambda}s)q(s)O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2(\pi) &= -\frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{4\lambda^{3/2}} \int_0^\pi \text{sen}^2(\sqrt{\lambda}s)q^2(s) + \text{sen}^2(\sqrt{\lambda}s)q'(s)Q(s)ds + \\ &\quad + \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}} \int_0^\pi q^2(s)ds - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda} \int_0^\pi \left[1 - \cos(2\sqrt{\lambda}s) \right] q(s)Q(s)ds + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \end{aligned}$$

$$\nu_2(\pi) = -\frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}} \int_0^\pi q^2(s) - \cos(2\sqrt{\lambda}s)q^2(s) + q'(s)Q(s) - \cos(2\sqrt{\lambda}s)q'(s)Q(s)ds +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}} \int_0^\pi q^2(s) ds - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda} \int_0^\pi q(s)Q(s) ds - \cos(2\sqrt{\lambda}s)q(s)Q(s) ds + \\
& O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \\
\nu_2(\pi) & = -\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}} \int_0^\pi q'(s)Q(s) ds + \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}} \int_0^\pi \cos(2\sqrt{\lambda}s) [q^2(s) + q'(s)Q(s)] ds + \\
& - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda} \int_0^\pi q(s)Q(s) ds - \cos(2\sqrt{\lambda}s)q(s)Q(s) ds + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \\
\nu_2(\pi) & = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}} \int_0^\pi q^2(s) ds + \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}} \int_0^\pi \cos(2\sqrt{\lambda}s) [q^2(s) + q'(s)Q(s)] ds + \\
& + \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda} \int_0^\pi \cos(2\sqrt{\lambda}s)q(s)Q(s) ds + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \\
\nu_2(\pi) & = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}} \int_0^\pi q^2(s) ds + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y_1(\pi) = \cos(\pi\sqrt{\lambda}) + \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{8\lambda^{3/2}} \left[\int_0^\pi q^2(s) ds - 2q'(0) \right] + \dots$$

Análogamente

$$y_2(\pi) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sen}(\pi\sqrt{\lambda}) + \frac{\operatorname{sen}(\pi\sqrt{\lambda})}{2\lambda^{3/2}} q(0) - \frac{1}{8\lambda^2} \cos(\pi\sqrt{\lambda}) \int_0^\pi q^2(s) ds + \dots$$

y

$$\begin{aligned}
y_1'(\pi) & = -\sqrt{\lambda} \operatorname{sen}(\pi\sqrt{\lambda}) + \frac{\operatorname{sen}(\pi\sqrt{\lambda})}{2\sqrt{\lambda}} q(0) + \frac{1}{8\lambda} \cos(\pi\sqrt{\lambda}) \int_0^\pi q^2(s) ds + \\
& + \frac{1}{8\lambda^{3/2}} \operatorname{sen}(\pi\sqrt{\lambda}) [q^2(0) - q''(0)] + \dots
\end{aligned}$$

$$y_2'(\pi) = \cos(\pi\sqrt{\lambda}) + \frac{1}{8\lambda^{3/2}} \operatorname{sen}(\pi\sqrt{\lambda}) \left[2q'(0) + \int_0^\pi q^2(s) ds \right] + \dots$$

□

Lema 2.19 $\Delta(\lambda) = y_1(\pi, \lambda) + y_2'(\pi, \lambda)$ es una función entera de λ de orden $\frac{1}{2}$. Es decir, existen constantes positivas M y m tales que para toda λ

$$\left| |\Delta(\lambda)| e^{-M\sqrt{|\lambda|}} \right| \text{ está acotada} \quad (2.70)$$

y para toda λ real

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} |\Delta(\lambda)| e^{-m\sqrt{|\lambda|}} \rightarrow \infty \quad (2.71)$$

Prueba. Por el **Lema 2.18**

$$\Delta(\lambda) = y_1(\pi, \lambda) + y_2'(\pi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} [v_n(\pi, \lambda) + w_n'(\pi, \lambda)]$$

con $\tau = 0$ y

$$\begin{aligned} w_0'(\pi, \lambda) &= \cos(\pi\sqrt{\lambda}) \\ w_n'(z, \lambda) &= - \int_0^z \cos(\sqrt{\lambda}(z-s))q(s)\omega_{n-1}(s, \lambda)ds \end{aligned}$$

Sea $M^* \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo z se cumple $|q(z)| \leq M^*$

Demostremos por inducción

$$|v_n(z, \lambda)| \leq \frac{1}{(2n)!} e^{|\sqrt{\lambda}|z} (M^* z^2)^n \quad (2.72)$$

$$|w_n(z, \lambda)| \leq \frac{1}{(2n+1)!} z e^{|\sqrt{\lambda}|z} (M^* z^2)^n \quad (2.73)$$

Para $n = 0$ y para todo valor real de $z \geq 0$

$$|v_0(z, \lambda)| = \left| \cos(z\sqrt{\lambda}) \right| \leq e^{|\sqrt{\lambda}|z}$$

$$|w_0(z, \lambda)| = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left| \text{sen}(z\sqrt{\lambda}) \right| \leq z e^{|\sqrt{\lambda}|z}$$

Supongamos que la hipótesis es válida para k y para todo $s \in [0, z]$, demostremos entonces para $k+1$:

$$\begin{aligned} |v_{k+1}(z, \lambda)| &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left| \int_0^z \text{sen}(\sqrt{\lambda}(z-s))q(s)u_k ds \right| \leq \\ &\leq \int_0^z \frac{|\text{sen}(\sqrt{\lambda}(z-s))|}{(2k)!\sqrt{\lambda}} |q(s)| e^{|\sqrt{\lambda}|s} (M^* s^2)^k ds \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2k)!} \int_0^z \frac{|\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}(z-s))|}{\sqrt{\lambda}} |q(s)| e^{|\sqrt{\lambda}|s} (M^* s^2)^k ds &\leq \\ &\leq \frac{1}{(2k)!} \int_0^z (z-s) e^{|\sqrt{\lambda}|(z-s)} M^* e^{|\sqrt{\lambda}|s} (M^* s^2)^k ds \end{aligned}$$

Por lo que

$$|v_{k+1}(z, \lambda)| \leq \frac{1}{(2k)!} (M^*)^{k+1} e^{\sqrt{\lambda}z} \int_0^z s^{2k} (z-s) ds \equiv m(z, \lambda)$$

$$\begin{aligned} m(z, \lambda) &= \frac{1}{(2k)!} (M^*)^{k+1} e^{\sqrt{\lambda}z} \left[\frac{1}{2k+1} z^{2k+2} - \frac{1}{2k+2} z^{2k+2} \right] = \\ &= \frac{1}{(2k)!} (M^*)^{k+1} e^{\sqrt{\lambda}z} \left[\frac{1}{2k+1} z^{2k+2} - \frac{1}{2k+2} z^{2k+2} \right] = \\ &= \frac{1}{(2k)!} (M^*)^{k+1} e^{\sqrt{\lambda}z} z^{2k+2} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = \\ &= \frac{1}{(2k+2)!} (M^*)^{k+1} e^{\sqrt{\lambda}z} z^{2k+2} = \frac{1}{(2k+2)!} (M^* z^2)^{k+1} e^{\sqrt{\lambda}z} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|v_{k+1}(z, \lambda)| \leq \frac{1}{(2k+2)!} (M^* z^2)^{k+1} e^{\sqrt{\lambda}z}$$

Análogamente se tiene el resultado para $w_{k+1}(z, \lambda)$

De (2.72) concluimos

$$|w'_n(z, \lambda)| = \frac{1}{(2n)!} e^{\sqrt{\lambda}z} (M^* z^2)^n$$

Entonces

$$|\Delta(\lambda)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} [|v_n(\pi, \lambda)| + |w'_n(\pi, \lambda)|] \leq 2e^{\sqrt{\lambda}\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (M^* \pi^2)^n$$

y

$$2e^{\sqrt{\lambda}\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (M^* \pi^2)^n = 2e^{\sqrt{\lambda}\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (\sqrt{M^*} \pi)^{2n}$$

Así

$$|\Delta(\lambda)| \leq 2e^{\sqrt{\lambda}\pi} \cosh(\sqrt{M^*} \pi)$$

Por lo tanto si $M = \pi$ se tiene (2.70).

2.1. PROBLEMA INVERSO Y DIRECTO DE LA ECUACIÓN DE HILL 47

Para demostrar (2.71) supongamos $q(z) \leq 1$ para toda z . Si no lo cumple podemos reemplazar $q(z)$ por $Q(z) \equiv [q(z) - M^* - 1]$ y λ por $[\lambda + M^* + 1]$ y se tiene lo que queremos sin modificar la ecuación diferencial. En este caso tomemos valores de λ negativos. Entonces

$$v_o = \cos(z\sqrt{\lambda}) \geq \frac{1}{2}e^{-i\sqrt{\lambda}z} \geq \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}i\sqrt{\lambda}z}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\text{sen}(\sqrt{\lambda}(z-s)) \geq \frac{1}{4}(z-s)e^{-i\sqrt{\lambda}(z-s)/2}$$

ya que

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\text{sen}(\sqrt{\lambda}(z-s)) = \frac{i}{\sqrt{\lambda}}\text{senh}(-i\sqrt{\lambda}(z-s)) = \frac{1}{2} \int_{s-z}^{z-s} e^{-i\sqrt{\lambda}x} dx \geq \frac{1}{2} \int_{(z-s)/2}^{z-s} e^{-i\sqrt{\lambda}x} dx$$

y

$$\frac{1}{2} \int_{s-z}^{z-s} e^{-i\sqrt{\lambda}x} dx \geq \frac{1}{2} \int_{(z-s)/2}^{z-s} e^{-i\sqrt{\lambda}x} dx \geq \frac{1}{4}(z-s)e^{-i\sqrt{\lambda}(z-s)/2}$$

Usamos inducción y las desigualdades anteriores para demostrar

$$v_n(z, \lambda) \geq \frac{1}{2}e^{-i\sqrt{\lambda}z/2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!}$$

Asimismo demostramos $w'_n(z, \lambda) \geq 0$. Por lo tanto

$$\Delta(\lambda) \geq \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\pi, \lambda) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-i\sqrt{\lambda}z/2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!} = \frac{1}{2}e^{-i\sqrt{\lambda}z/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!}$$

y

$$\frac{1}{2}e^{-i\sqrt{\lambda}z/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!} = \frac{1}{2}e^{-i\sqrt{\lambda}z/2} \cosh(\pi/2)$$

Es decir,

$$\Delta(\lambda) \geq \frac{1}{2}e^{-i\sqrt{\lambda}z/2} \cosh(\pi/2)$$

Esto prueba (2.71) para $m \in [0, \pi/2]$.

Las funciones v_n , w_n y w'_n son funciones enteras de λ ya que sus sumas convergen uniformemente en el plano λ . Por lo tanto $\Delta(\lambda)$ es una función entera de λ . Más aun, el discriminante $\Delta(\lambda)$ es invariante bajo traslaciones τ ya que esta determinado únicamente por los valores propios correspondientes a cualesquiera de las siguientes condiciones

$$u(z + \pi) \pm u(z) = 0$$

□

Mediante el mismo proceso que aplicamos para demostrar el **Lema 2.19** demostramos que $y_1(x, \lambda)$, $y'_2(x, \lambda)$ y $y_2(x, \lambda)$ son funciones enteras de λ de orden a lo más $1/2$.

2.1.2. Problema inverso

Encontraremos la representación explícita del potencial con un número finito de intervalos de inestabilidad de la ecuación 2.1 o lo que es lo mismo, del operador de Schrödinger $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x)$. En esa dirección van los siguientes resultados

Lema 2.20 Sea $q(z)$ periódica de periodo π , integrable en $[0, \pi]$ y tal que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(z) e^{-2inz} dz = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Entonces $q(z)$ es absolutamente continua c.d.s

Prueba. La función $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{2inz}$ es continua, ya que la serie converge uniformemente.

Consideremos la función $f(z) - q(z)$ y calculemos su serie de Fourier

$$f(z) - q(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i2nz}$$

donde

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(z) - q(z)) e^{-i2nz} dz$$

pero $q(z)$ es π -periódica, entonces $A_n = 0$ para toda n . Por lo tanto

$$f(z) = q(z) \quad \text{c.d.s}$$

Ahora demostraremos que $f(z)$ es absolutamente continua.

La función

$$f_1(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} 2ina_n e^{2inz}$$

tiene coeficientes cuadrado sumables ya que $na_n = O(\frac{1}{n})$. Por lo tanto, $f_1(z)$ es periódica y L^2 -integrable entonces es integrable en el intervalo $[0, \pi]$. Ya que toda función es L^2 -integrable si y sólo si su serie de Fourier es L^2 -convergente (*Riesz - Fischer*).

Sea $S_N = \sum_{n=-N}^N 2ina_n e^{2inz}$ y $f_1(z) = S_N(z) + R_N(z)$

$$\left\| \int_0^z f_1(x) dx - f(z) + f(0) \right\| \leq \left\| \int_0^z S_N(x) dx - f(z) + f(0) \right\| + \left\| \int_0^z R_N(x) dx \right\|$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^z S_N(x) dx - f(z) + f(0) \right\| &= \left\| \sum_{n=-N}^N a_n \int_0^z 2in e^{2inx} dx - \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{2inz} + \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \right\| = \\ &= \left\| \sum_{n=-N}^N [a_n e^{2inz} - a_n] + \sum_{-\infty}^{\infty} a_n [1 - e^{2inz}] \right\| = \left\| \sum_{n>|N|} a_n [1 - e^{2inz}] \right\| = \end{aligned}$$

$$\sqrt{\int_0^z \left| \sum_{n>|N|} a_n [1 - e^{2inz}] \right|^2} \leq \sqrt{\sum_{n>|N|} |a_n|^2 \int_0^z |1 - e^{2inz}|^2} \leq \sqrt{\sum_{n>|N|} |a_n|^2 2\pi}$$

Por lo tanto

$$\left\| \int_0^z S_N(x) dx - f(z) + f(0) \right\| \leq \sqrt{2\pi \sum_{n>|N|} |a_n|^2}$$

Por otra parte

$$\left\| \int_0^z R_N(x) dx \right\|^2 = \int_0^z \left| \int_0^z R_N(x) dx \right|^2 dz = \int_0^z \left(\int_0^z |R_N(x)| dx \right)^2 dz$$

Aplicando la desigualdad de Jensen ya que $|R_N(x)|$ es sumable y $f(x) = x^2$ es cóncava

$$\int_0^z \left(\int_0^z |R_N(x)| dx \right)^2 dz \leq \int_0^z z^2 \left(\frac{1}{z} \int_0^z |R_N(x)|^2 dx \right) dz = \int_0^z z \int_0^z |R_N(x)|^2 dx dz$$

Integrando por partes

$$\int_0^z z \int_0^z |R_N(x)|^2 dx dz = \frac{z^2}{2} \int_0^z |R_N(x)|^2 dx - \int_0^z \frac{z^2}{2} |R_N(z)|^2 dz \leq \frac{z^2}{2} \int_0^z |R_N(x)|^2 dx$$

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{2} \int_0^z |R_N(x)|^2 dx &\leq \frac{\pi^2}{2} \|R_N(x)\|^2 = \frac{\pi^2}{2} \int_0^z \left| \sum_{n>|N|} 2ina_n e^{2inx} \right|^2 dx \leq \\ &\leq \frac{\pi^2}{2} \int_0^z \left(\sum_{n>|N|} |2ina_n e^{2inx}| \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{2} \int_0^z \left(\sum_{n>|N|} 2|n||a_n| |e^{2inx}| \right)^2 dx \leq \\ &\leq \frac{\pi^2}{2} \int_0^z \left(\sum_{n>|N|} 2|n||a_n| \right)^2 dx \leq \frac{\pi^2}{2} z \left(\sum_{n>|N|} 2|n||a_n| \right)^2 \leq \frac{\pi^3}{2} \sum_{n>|N|} 4|n|^2 |a_n|^2 \end{aligned}$$

Así

$$\left\| \int_0^z f_1(x) dx - f(z) + f(0) \right\| \leq \sqrt{\sum_{n>|N|} |a_n|^2} 2\pi + \frac{\pi^3}{2} \sum_{n>|N|} 4|n|^2 |a_n|^2 \leq O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Por lo tanto

$$f(z) = f(0) + \int_0^z f_1(x) dx$$

para toda z ya que todos los términos son continuos. Y entonces

$$q(z) = f(0) + \int_0^z f_1(x) dx, \text{ c.d.s. y ya que } f_1(x) \text{ es integrable, } q(z) \text{ es absolutamente continua c.d.s.} \quad \square$$

Consideremos la ecuación

$$u''(t) + [\lambda - q(t + \tau)]u(t) = 0 \quad (2.74)$$

con $\tau \in \mathbb{R}$. Tenemos el siguiente resultado

Lema 2.21 Sean $\mu_n(\tau)$ los valores propios de (2.74) con las siguientes condiciones

$$u(0) = u(\pi) = 0. \quad (2.75)$$

Entonces

$$\lambda'_1 \leq \mu_1(\tau) \leq \lambda'_2, \quad \lambda_1 \leq \mu_2(\tau) \leq \lambda_2, \dots$$

Análogamente, si consideramos (2.74) con las condiciones

$$u'(0) = u'(\pi) = 0. \quad (2.76)$$

se tiene que sus valores propios correspondientes $\varsigma_n(\tau)$ cumplen

$$\varsigma_0(\tau) \leq \lambda_0, \quad \lambda'_1 \leq \varsigma_1(\tau) \leq \lambda'_2, \quad \lambda_1 \leq \varsigma_2(\tau) \leq \lambda_2, \dots$$

Prueba. Si u_2 y u_1 satisfacen las condiciones iniciales (2.59), entonces el Wronskiano

$$u_1(z)u'_2(z) - u_2(z)u'_1(z) = 1$$

pero $u_2(\pi) = 0$, Por lo tanto

$$u_1(\pi)u'_2(\pi) = 1$$

Entonces

$$\Delta(\mu_n(\tau)) = u_1(\pi) + u'_2(\pi) = u_1(\pi) + \frac{1}{u_1(\pi)}$$

Por lo tanto $|\Delta(\mu_n(\tau))| \geq 2$ y ya que las soluciones $y(z, \lambda'_{2n-1})$, $y(z, \lambda'_{2n})$ y $y(z, \mu_{2n-1}(\tau))$ de (2.74) tienen el mismo número de ceros, por el teorema de oscilación (Ver Apéndice C) podemos concluir

$$\mu_{2n-1}(\tau) \in [\lambda'_{2n-1}, \lambda'_{2n}]$$

Más aun, para algunos valores de τ , $\mu_{2n-1}(\tau)$ toma los valores λ'_{2n-1} y λ'_{2n} .

La función $\mu_{2n-1}(\tau)$ es una función periódica de τ de periodo π .

Por lo anterior podemos caracterizar al espectro de $\Delta(\lambda)$ por

$$\lambda'_{2n-1} = \min_{\tau} \mu_{2n-1}(\tau)$$

$$\lambda'_{2n} = \max_{\tau} \mu_{2n-1}(\tau)$$

Los demás casos se tratan de manera similar y se tiene el lema. \square

Teorema 2.22 *Si $q(z)$ es real e integrable y si no existen intervalos finitos de inestabilidad, es decir $\lambda'_1 = \lambda'_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$, etc, entonces $q(z) = 0$ c.d.s.*

Prueba. Si consideramos la ecuación (2.74), como el discriminante $\Delta(\lambda)$ es invariante bajo traslaciones τ , podemos expresar las soluciones de (2.74) como

$$\begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_2(\tau) & -y'_1(\tau) \\ -y_2(\tau) & y_1(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(z + \tau) \\ y_2(z + \tau) \end{pmatrix}$$

$$u_1(z) = y'_2(\tau)y_1(z + \tau) - y'_1(\tau)y_2(z + \tau) \quad (2.77)$$

$$u_2(z) = y_1(\tau)y_2(z + \tau) - y_2(\tau)y_1(z + \tau) \quad (2.78)$$

Si no existen intervalos finitos de inestabilidad entonces por el **Lema 2.21** los valores propios correspondientes a $u_2(\pi) = 0$ son

$$\mu_1(0) = \lambda'_1 = \lambda'_2, \mu_2(0) = \lambda_1 = \lambda_2$$

y los valores propios correspondientes a $u_2(\pi) = 0$ son los mismos para toda τ . Como funciones de λ , $y_2(\pi, \lambda)$ y $u_2(\pi, \lambda)$ son funciones enteras de orden $1/2$, con los mismos ceros. . Por lo tanto difieren en a lo más una constante $c(\tau)$. Entonces

$$u_2(\pi, \lambda) = c(\tau)y_2(\pi, \lambda)$$

El **Lema 2.18** muestra que

$$y_2(\pi, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

análogamente para $u_2(\pi, \lambda)$. Por lo tanto $c(\tau) = 1$. Así

$$y_2(\pi, \lambda) = u_2(\pi, \lambda) \quad (2.79)$$

De la misma forma investigaremos los valores propios correspondientes a

$$y_1'(\pi) = 0 \quad \text{y} \quad u_1'(\pi) = 0$$

Como no hay intervalos finitos de inestabilidad tenemos por el **Lema 2.21** que

$$\varsigma_n(\tau) = \varsigma_n(0) \quad n \geq 1$$

El intervalo $(-\infty, \lambda_0)$ no es finito por lo que $\varsigma_0(\tau)$ puede variar con τ , pero cumpliendo $\varsigma_0(\tau) \leq \lambda_0$

Como en el caso anterior concluimos

$$u_1'(\pi) = y_1'(\pi) \frac{\lambda - \varsigma_0(\tau)}{\lambda - \varsigma_0(0)} \quad (2.80)$$

Las representaciones de y_1 y y_2 dadas en el **Lema 2.18** muestran que y_1 , y_2 y sus derivadas son series uniformemente convergentes de funciones absolutamente continuas y por lo tanto también son series absolutamente continuas. De (2.77) concluimos que $u_1'(\pi)$ como función de τ es absolutamente continua y de (2.80) tenemos que $\varsigma_0(\tau)$ es absolutamente continua. De (2.78) y (2.79)

$$u_2''(\pi) = y_1''(\tau)y_2(z + \tau) + 2y_1'(\tau)y_2'(z + \tau) - 2y_2'(\tau)y_1'(z + \tau) + \\ + y_1(\tau)y_2''(z + \tau) - y_2''(\tau)y_1(z + \tau) - y_2(\tau)y_1''(z + \tau)$$

$$u_1'(\pi) = y_2''(\tau)y_1(\pi + \tau) - y_1''(\tau)y_2(\pi + \tau) + y_2'(\tau)y_1'(\pi + \tau) - y_1'(\tau)y_2'(\pi + \tau)$$

Entonces

$$u_2''(\pi) + u_1'(\pi) = (y_2'(\pi + \tau)y_1(\tau) - y_1'(\pi + \tau)y_2(\tau))' = (u_1(-\pi))' = 0$$

Por lo tanto

$$[\lambda - q(\tau)]y_2(\pi) + y_1'(\pi) \frac{\lambda - \varsigma_0(\tau)}{\lambda - \varsigma_0(0)} = 0, \quad c.d.s. \quad (2.81)$$

De esta última ecuación concluimos que $q(\tau)$ es absolutamente continua *c.d.s.*

Usando las aproximaciones dadas en el **Lema 2.18** reescribir (2.79) como

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) \left[1 + \frac{1}{2\lambda}q(\tau) + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \right] = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) \left[1 + \frac{1}{2\lambda}q(0) + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \right]$$

Por lo tanto

$$q(\tau) = q(0) \quad c.d.s.$$

Más aún, como $q(\tau)$ fue normalizada para tener valor medio cero podemos concluir

$$q(\tau) = 0 \quad c.d.s. \quad \square$$

Por lo visto en el problema directo y este último resultado, hemos demostrado:

Teorema 2.23 *Sea $q(z)$ real e integrable. Entonces no existen intervalos finitos de inestabilidad, es decir $\lambda'_1 = \lambda'_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$, etc, si y solo si $q(z) = 0$ c.d.s*

Investiguemos ahora qué sucede si existe exactamente un intervalo finito de inestabilidad.

Teorema 2.24 *Si $q(z)$ es real e integrable y si existe un único intervalo finito de inestabilidad . Entonces $q(z)$ es una función elíptica c.d.s..*

Prueba. Procedemos como en la demostración del teorema anterior. Como solo existe un intervalo finito de inestabilidad, todos los ceros de $u_2(\pi)$ y $y_2(\pi)$ coinciden a excepción de uno. Por el teorema de factorización de Weierstrass

$$u_2(\pi) = y_2(\pi) \frac{\lambda - \mu(\tau)}{\lambda - \mu(0)} \quad (2.82)$$

análogamente

$$u'_1(\pi) = y'_1(\pi) \frac{\lambda - \varsigma(\tau)}{\lambda - \varsigma(0)} \frac{\lambda - \varsigma_0(\tau)}{\lambda - \varsigma_0(0)} \quad (2.83)$$

De (2.82) y (2.83) observamos que $\mu(\tau)$ satisface las mismas condiciones de diferenciabilidad de $y(\tau)$ y $\varsigma(\tau)$ y $\varsigma_0(\tau)$ las de $y'(\tau)$. Esto por (2.77) y (2.78). Derivando con respecto a τ (2.82) obtenemos

$$\frac{\partial u_2}{\partial \tau} = u'_2(\pi) - u_1(\pi) = -y_2(\pi) \frac{\mu'(\tau)}{\lambda - \mu(0)} \quad (2.84)$$

Usando las estimaciones del **Lema 2.18** y suponiendo $q(z)$ integrable reescribimos (2.84) como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi \text{sen}(\sqrt{\lambda}(\pi - 2z)) q(z + \tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi q(z + \tau) dz \int_0^z \text{sen}(\sqrt{\lambda}(z - \zeta)) \text{sen}(\sqrt{\lambda}(\pi - z - \zeta)) q(\zeta + \tau) d\tau = O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \end{aligned} \quad (2.85)$$

Usando identidades trigonométricas podemos reescribir el segundo término del lado izquierdo de la ecuación como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\pi q(z + \tau) dz \int_0^\pi \left[\cos(\sqrt{\lambda}(\pi - 2z)) - \cos(\sqrt{\lambda}(\pi - 2\zeta)) \right] q(\zeta + \tau) d\zeta = \\ & = \int_0^\pi \cos(\sqrt{\lambda}(\pi - 2z)) q(z + \tau) dz \int_0^z q(\zeta + \tau) d\zeta \end{aligned} \quad (2.86)$$

Esto último se sigue si cambiamos el orden de integración del segundo término de la izquierda y del hecho $\int_0^\pi q(\zeta)d\zeta = 0$.

Por último integramos por partes el lado derecho de (2.86) y obtenemos

$$-\sqrt{\lambda} \int_0^\pi \text{sen}(\sqrt{\lambda}(\pi - 2z)) \left(\int_0^z q(\zeta + \tau)d\zeta \right)^2 dz \quad (2.87)$$

De (2.87) y (2.85) y siendo $k = \sqrt{\lambda}$ obtenemos

$$\int_0^\pi \text{sen}(2kz) \left(q(z + \tau) - \int_0^z q(\zeta + \tau)d\zeta \right)^2 dz = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (2.88)$$

Del **Lema 2.20** la función

$$q(z + \tau) - \int_0^z q(\zeta + \tau)d\zeta \quad (2.89)$$

es absolutamente continua *c.d.s.* El segundo término lo es, por lo tanto $q(z)$ es necesariamente absolutamente continua *c.d.s.*

Con esta información podemos regresar a (2.82) usando las estimaciones de **Lema 2.18**. La continuidad absoluta nos permite aproximar asintóticamente a un orden superior de $\frac{1}{\lambda}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \text{sen}(\pi\sqrt{\lambda}) + \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi \text{sen}(\sqrt{\lambda}(\pi - z)) \text{sen}(\sqrt{\lambda}z) q(z + \tau) dz + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) = \\ & = \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \text{sen}(\pi\sqrt{\lambda}) + \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi \text{sen}(\sqrt{\lambda}(\pi - z)) \text{sen}(\sqrt{\lambda}z) q(z) dz + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \right] \cdot f(\tau, \lambda) \end{aligned} \quad (2.90)$$

donde $f(\tau, \lambda) = 1 - \frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$

Desarrollando y agrupando términos obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \text{sen}(\sqrt{\lambda}(\pi - z)) \text{sen}(\sqrt{\lambda}z) q(z + \tau) dz &= \frac{1}{2} \int_0^\pi q(z + \tau) \cos(\sqrt{\lambda}(\pi - 2z)) dz = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \text{sen}(\pi\sqrt{\lambda}) q(\tau) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (2.91)$$

Encontramos de (2.91) y (2.90)

$$\mu(\tau) - \mu(0) = -\frac{1}{2}(q(\tau) - q(0)) \text{ c.d.s.} \quad (2.92)$$

De esta última ecuación concluimos que $q(\tau)$ es dos veces diferenciable *c.d.s.* ya que $\mu(\tau)$ lo es. En ese caso $y(\tau)$ es cuatro veces diferenciable *c.d.s.* y (2.78) muestra que $\mu(\tau)$ también lo es. Repitiendo este argumento vemos que $q(\tau)$ es necesariamente infinitamente diferenciable *c.d.s.*

Análogamente analizamos (2.83) y así, como en (2.92)

$$\varsigma(\tau) + \varsigma_0(\tau) - \varsigma(0) - \varsigma_0(0) = \frac{1}{2}(q(\tau) - q(0)) \text{ c.d.s.} \quad (2.93)$$

De (2.92) y derivando (2.82) dos veces con respecto a τ obtenemos

$$-2(\lambda - q(\tau))y_2(\pi) \frac{\lambda - \mu(\tau)}{\lambda - \mu(0)} - 2u_1'(\pi) = -y_2(\pi) \frac{\mu''(\tau)}{\lambda - \mu(0)} \text{ c.d.s.} \quad (2.94)$$

Expandiendo los términos de (2.94) en una serie de $\frac{1}{\lambda}$ y comparando los coeficientes encontramos que $q(\tau)$ satisface la siguiente ecuación diferencial

$$q''(\tau) = 3q^2(\tau) - [2q(0) + 4\mu(0)]q(\tau) + [q'''(0) + \mu(0)q(0) - q^2(0)] \text{ , c.d.s.} \quad (2.95)$$

Sean

$$\begin{aligned} c &= q'''(0) + \mu(0)q(0) - q^2(0) \\ b &= [2q(0) + 4\mu(0)] \end{aligned}$$

Entonces de (2.95) tenemos

$$q''(\tau) = 3q^2(\tau) - bq(\tau) + c \text{ , c.d.s} \quad (2.96)$$

Multiplicamos por $q'(\tau)$ e integramos de 0 a τ para obtener

$$q^3(\tau) - \frac{b}{2}q^2(\tau) + cq(\tau) + d = \frac{1}{2}[q'(\tau)]^2$$

d constante. Es decir

$$q'(\tau) = \pm\sqrt{2}\sqrt{q^3(\tau) - \frac{b}{2}q^2(\tau) + cq(\tau) + d} \quad (2.97)$$

o bien

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \int_0^\tau \frac{q'(s)}{\sqrt{q^3(s) - \frac{b}{2}q^2(s) + cq(s) + d}} ds = \tau$$

cuyas soluciones son funciones elípticas. □

Observación 2.25 *El potencial $q(x)$, que satisface (2.96) es solución estacionaria de KdV.*

Prueba. Derivamos (2.96) con respecto a τ encontramos que q satisface la ecuación de KdV

$$q''' = 6qq' - bq' \quad , \quad c.d.s$$

□

Para el caso de dos intervalos de inestabilidad, Wallace Goldberg [G] (alumno de Hochstadt), demostró que $q(x)$ debe cumplir la ecuación diferencial

$$q^{(4)} = 10qq' + Aq'' + 5(q')^2 - 10q^3 + Bq^2 + Cq + D \quad , \quad c.d.s. \quad (2.98)$$

con A, B, C y D constantes.

La demostración se sigue de un análogo a (2.82), ya que para el caso en que existan sólo 2 intervalos finitos de inestabilidad se tiene

$$u_2(\pi) [\lambda - \mu_1(0)] [\lambda - \mu_2(0)] = y_2(\pi) [\lambda - \mu_1(\tau)] [\lambda - \mu_2(\tau)]$$

Goldberg lo demuestra sustituyendo $u_2(\pi)$ y $y_2(\pi)$ por sus expansiones asintóticas e igualando términos. Nosotros daremos la forma explícita del potencial utilizando la forma de la traza para el potencial que deduciremos a continuación.

2.1.3. La fórmula de traza

Consideremos, de nuevo, el operador de Schrödinger $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u$ con $u(x)$ potencial periódico de periodo π . El objetivo en ésta sección es dar una representación de u en términos de los valores propios del operador L . Aunque éste es un problema inverso, lo quiero tratar aparte por su generalidad.

Sea x_o un punto fijo y φ_+ y φ_- la base del espacio de soluciones tales que

$$\begin{aligned} L\varphi_{\pm} &= \lambda\varphi_{\pm} \\ \varphi_+(x_o; x_o, \lambda) &= 1, \quad \varphi'_+(x_o; x_o, \lambda) = ik \\ \varphi_-(x_o; x_o, \lambda) &= 1, \quad \varphi'_-(x_o; x_o, \lambda) = -ik \end{aligned} \quad (2.99)$$

donde $k^2 = \lambda$. Sean $c(x; x_o, \lambda)$ y $s(x; x_o, \lambda)$ tales que

$$\begin{aligned} Ls &= \lambda s \\ Lc &= \lambda c \\ c(x_o; x_o, \lambda) &= 1, \quad c'(x_o; x_o, \lambda) = 0 \\ s(x_o; x_o, \lambda) &= 0, \quad s'(x_o; x_o, \lambda) = 1 \end{aligned} \quad (2.100)$$

y sea \hat{T} el operador de traslación que conmuta con el operador L

$$\hat{T}L - L\hat{T} = 0$$

definido de la siguiente forma

$$\left(\hat{T}\Psi \right) (x) = \Psi(x + \pi)$$

Como $\overline{\varphi_-} = \varphi_+$ para valores reales de k , entonces

$$\left[\hat{T} \right]_{\{\varphi_+, \varphi_-\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

Por otra parte

$$\left[\hat{T} \right]_{\{c, s\}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

por lo que

$$\det \left[\hat{T} \right]_{\{c, s\}} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \quad (2.103)$$

Pero $\det \left[\hat{T} \right]_{\{c, s\}}$ es el Wronskiano y como es constante para cualquier par de soluciones, entonces

$$|a|^2 - |b|^2 = 1$$

Si los valores propios de \hat{T} son λ_1 y λ_2 , entonces por la ecuación anterior

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1 \quad (2.104)$$

Por lo tanto, los valores propios los podemos escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e^{ip(\lambda)\pi} \\ \lambda_2 &= e^{-ip(\lambda)\pi} \end{aligned} \quad (2.105)$$

A la función $p(\lambda)$ se le llama cuasimomento. Sea $s(x_o + \pi; x_o, \lambda) = 0$. En este caso obtenemos los valores propios de Dirichlet y los denotaremos por μ_j .

Observemos que bajo estas condiciones $a_{21} = 0$.

En principio la matriz \hat{T} depende de (x_o, λ) . pero demostraremos que no así sus valores propios.

Proposición 2.26 *Los valores propios de \hat{T} sólo dependen de λ y no de x_o .*

Prueba. De (2.101)

$$\begin{aligned} \text{traza}(\hat{T}) &= a + \bar{a} = 2a_R \\ a &= a_R + ia_I \end{aligned} \quad (2.106)$$

Por (2.103) sabemos que $\det \hat{T} = 1$, por lo tanto podemos expresar a los valores propios (2.103) haciendo uso de la ecuación para la traza (2.106) y (2.105)

$$\begin{aligned} e^{\pm ip(\lambda)\pi} &= a_R \pm \sqrt{a_R^2 - 1} \\ 2 \cos(p(\lambda)\pi) &= \text{traza}(\hat{T}) = 2a_R = a_{11} + a_{22} \end{aligned} \quad (2.107)$$

Como $\text{traza}\left(\begin{smallmatrix} \hat{T} \\ \{c,s\} \end{smallmatrix}\right) = \Delta(\lambda, x_0)$, y demostramos en el **Lema 2.19** que $\Delta(\lambda, x_0) = \Delta(\lambda, 0)$. Por lo tanto

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{traza}(\hat{T}(x_0)) = \text{traza}(\hat{T}(0)) \quad (2.108)$$

Es decir, λ_1 y λ_2 no dependen de x_0 . \square

Llamamos a las funciones propias $\psi_{\pm}(x)$ funciones de Bloch (o de Floquet) si son vectores propios (en el espacio de funciones) del operador \hat{T} :

$$\begin{aligned} L\psi_{\pm}(x) &= \lambda\psi_{\pm}(x) \\ \hat{T}\psi_{\pm}(x) &= e^{\pm ip(\lambda)\pi}\psi_{\pm}(x) \end{aligned} \quad (2.109)$$

De (2.107) tenemos que los intervalos de estabilidad están dados por las siguientes ecuaciones:

$$\left| \frac{1}{2} \text{traza}(\hat{T}) \right| = |a_R| \leq 1$$

Existen intervalos de inestabilidad cuando

$$|a_R| > 1$$

en el eje real λ . Aunque la matriz \hat{T} depende de x_0 y λ , la *traza* de \hat{T} que es igual a $2a_R$ depende únicamente de λ .

Sean $\{E_j\}_{j=0}^{2n}$ los extremos de los intervalos de inestabilidad y $\{E_{2n+k}\}_{k=1}^{\infty}$ los valores propios de multiplicidad doble. Entonces

$$p(E_j) = l \in \mathbb{Z}$$

y

$$e^{\pm ip(E_j)\pi} = \pm 1$$

De aquí en adelante denotaremos por p a $p(\lambda)$. Recordemos que

$$e^{\pm ip\pi} = \cos(p\pi) + i \text{sen}(p\pi) \equiv a_R \pm ia_I = a_R \pm \sqrt{(a_R)^2 - 1}$$

Si $\lambda = E_j$ entonces

$$a_R(E_j) = \pm 1 \quad (2.110)$$

Por lo tanto la ecuación $\sqrt{(a_R)^2 - 1}$ tiene asociada una superficie de Riemann Γ de dos hojas, con puntos rama en E_0, E_1, \dots, E_{2n} . Los puntos en la superficie de Riemann Γ los denotaremos por (λ, \pm) , el signo denota la hoja de la superficie de Riemann Γ en donde se ubica.

La función propia de Bloch Ψ_{\pm} es univaluada en Γ ya que los extremos de los intervalos de inestabilidad son los puntos rama de Γ

Se $\chi_{\pm}(x; x_o, \lambda)$ tal que

$$\Psi_{\pm}(x; x_o, \lambda) = e^{i \int_{x_o}^x \chi_{\pm}(s; x_o, \lambda) ds} \quad (2.111)$$

La función $\Psi_{\pm}(x; x_o, \lambda)$ depende de x_o , pero

Proposición 2.27 $\chi_{\pm}(x; x_o, \lambda)$ es una función que depende únicamente de x y λ .

Prueba. De (2.111)

$$i\chi_{\pm}(x; x_o, \lambda) = \frac{\partial \Psi_{\pm}}{\partial x} / \Psi_{\pm}$$

Derivamos $i\chi_{\pm}(x; x_o, \lambda)$ con respecto a x_o

$$i \frac{\partial}{\partial x_o} \chi_{\pm} = \frac{\partial}{\partial x_o} \left(\frac{\partial \Psi_{\pm}}{\partial x} / \Psi_{\pm} \right) = \frac{1}{(\Psi_{\pm})^2} \left[\Psi_{\pm} \frac{\partial^2 \Psi_{\pm}}{\partial x \partial x_o} - \frac{\partial \Psi_{\pm}}{\partial x} \frac{\partial \Psi_{\pm}}{\partial x_o} \right] \quad (2.112)$$

Pero

$$\Psi_{\pm} \frac{\partial^2 \Psi_{\pm}}{\partial x \partial x_o} - \frac{\partial \Psi_{\pm}}{\partial x} \frac{\partial \Psi_{\pm}}{\partial x_o} = W \left(\Psi_{\pm}, \frac{\partial \Psi_{\pm}}{\partial x_o} \right)$$

y

$$-\Psi_{\pm}'' + u\Psi_{\pm} = \lambda\Psi_{\pm}$$

entonces

$$-\frac{\partial \Psi_{\pm}''}{\partial x_o} + u \frac{\partial \Psi_{\pm}}{\partial x_o} = \lambda \frac{\partial \Psi_{\pm}}{\partial x_o}$$

Recordemos que

$$\Psi_{\pm}(x + \pi; x_o, \lambda) = e^{\pm ip(\lambda)\pi} \Psi_{\pm}(x; x_o, \lambda)$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial \Psi_{\pm}}{\partial x_o} = \alpha_{\pm} \Psi_{\pm} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (2.113)$$

Entonces

$$W \left(\Psi_{\pm}, \frac{\partial \Psi_{\pm}}{\partial x_o} \right) = 0 \quad (2.114)$$

Sustituyendo (2.114) en (2.112)

$$i \frac{\partial}{\partial x_o} \chi_{\pm} = 0$$

Por lo tanto $\chi_{\pm}(x; x_o, \lambda) = \chi_{\pm}(x, \lambda)$ □

Por otra parte, supusimos en (2.109) que

$$L\Psi_{\pm} = \lambda\Psi_{\pm}$$

y por (2.111) $\Psi_{\pm}(x_o; x_o, \lambda) = 1$, entonces

$$\Psi_{\pm}(x; x_o, \lambda) = c(x; x_o, \lambda) + i\alpha_{\pm}(x_o, \lambda)s(x; x_o, \lambda)$$

Entonces, haciendo uso de (2.100)

$$i\chi_{\pm}(x, \lambda)|_{x_o} = -\frac{\Psi'_{\pm}|_{x_o}}{\Psi_{\pm}|_{x_o}} = -\frac{c' + i\alpha_{\pm}s'}{c + i\alpha_{\pm}s}|_{x_o} = -i\alpha_{\pm}$$

Sustituyendo en (2.113)

$$\chi_{\pm}(x_o, \lambda) = \alpha_{\pm} \quad (2.115)$$

Por lo que

$$\Psi_{\pm} = c + i\chi_{\pm}(x_o, \lambda)s \quad (2.116)$$

Observación 2.28 Como $c(x; x_o, \lambda)$ y $s(x; x_o, \lambda)$ son funciones enteras univalueadas en la variable compleja λ , los polos de $\Psi_{\pm}(x; x_o, \lambda)$ en la superficie de Riemann Γ son los mismos que los polos de $\chi_{\pm}(x_o, \lambda)$ contando multiplicidades. Por lo tanto, los polos dependen sólo de x_o .

La función $\chi_{\pm}(x, \lambda)$ es solución de la ecuación de Riccati

$$i\chi'_{\pm} - \chi_{\pm}^2 = u - \lambda \quad (2.117)$$

Sea

$$\chi_{\pm} = \chi_{R\pm} + i\chi_{I\pm} \quad (2.118)$$

En las siguientes expresiones escribiremos simplemente χ_R y χ_I en lugar de $\chi_{R\pm}$ y $\chi_{I\pm}$ (más adelante demostraremos que de hecho existe una única χ_R y una única χ_I si estamos en los intervalos de estabilidad).

Sustituyendo (2.118) en (2.117)

$$i(\chi'_R + i\chi'_I) - (\chi_R^2 - \chi_I^2 + i2\chi_R\chi_I) = u - \lambda$$

Entonces

$$\chi'_R - 2\chi_R\chi_I = 0$$

Es decir

$$\chi_I = \frac{1}{2} \frac{\chi'_R}{\chi_R} = \frac{1}{2} (\ln(\chi_R))' \quad (2.119)$$

Sustituyendo (2.119) en (2.111)

$$\Psi_{\pm}(x; x_o, \lambda) = \sqrt{\frac{\chi_R(x_o, \lambda)}{\chi_R(x, \lambda)}} e^{\pm i \int_{x_o}^x \chi_R(s, \lambda) ds}$$

Por lo tanto

$$\Psi_+ \Psi_- = \frac{\chi_R(x_o, \lambda)}{\chi_R(x, \lambda)} \quad (2.120)$$

^{1'} denota derivada con respecto a x

Por (2.116) y (2.102), aplicando \hat{T} a Ψ_{\pm} tenemos

$$\hat{T}(\Psi_{\pm}) = \hat{T}(c + i\chi_{\pm}s) = a_{11}c + a_{12}s + i\chi_{\pm}(a_{21}c + a_{22}s)$$

y por (2.109)

$$\hat{T}\Psi_{\pm} = e^{\pm ip\pi}\Psi_{\pm} = \left(a_R \pm \sqrt{(a_R)^2 - 1}\right) [c + i\chi_{\pm}s]$$

entonces

$$\chi_{\pm}(x_o, \lambda) = \frac{\sqrt{1 - (a_R)^2}}{a_{21}} + \frac{i}{2} \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{21}}$$

y $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para toda $i, j \in \{1, 2\}$ si λ es real. En los intervalos de estabilidad $(a_R)^2 \leq 1$ y por lo tanto $\chi_{\pm} = \chi_R + i\chi_I$ donde

$$\chi_R(x_o, \lambda) = \frac{\sqrt{1 - (a_R)^2}}{a_{21}} \quad y \quad \chi_I(x_o, \lambda) = \frac{1}{2} \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{21}} \quad (2.121)$$

Veamos cuales son las propiedades analíticas de las funciones enteras $1 - (a_R)^2$ y $a_{21}(x_o, \lambda)$:

Para un potencial con n intervalos de inestabilidad, la función $1 - (a_R)^2$ tiene polos simples en E_0, \dots, E_{2n} , y polos dobles en E_j para $j > 2n$ y $(a_R)^2 = 1$. Todos estos puntos son reales y

$$\hat{T}(x_o, \lambda) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La función $a_{21}(x_o, \lambda)$ tiene ceros en E_j .

Por otra parte

$$\frac{1}{2}\Delta(\lambda) = \frac{1}{2}(e^{ip\pi} + e^{-ip\pi}) = a_R$$

En el **Lema 2.19** demostramos que $\Delta(\lambda)$ es una función entera de λ de orden $1/2$. Por lo tanto

$$1 - (a_R)^2$$

se escribe como el producto de sus ceros, por (2.110)

$$1 - (a_R)^2 = \prod_{j=0}^{2n} (\lambda - E_j) \prod_{k=1}^{\infty} (\lambda - E_{2n+k})^2$$

Sea

$$f(\lambda, x_o) = \left(\sqrt{\prod_{j=0}^{2n} (\lambda - E_j)} \right) / \chi_R(x_o, \lambda) \quad (2.122)$$

Aplicando (2.121) en (2.122), tenemos

$$f(\lambda, x_o) = a_{21}(\lambda, x_o) / \prod_{k=2n+1}^{\infty} (\lambda - E_k)$$

pero $a_{21}(\lambda, x_o) = 0$ si $\lambda = \mu_j$, es decir, si λ es valor propio de Dirichlet. Por **Lema 2.21** sabemos que los valores propios de Dirichlet son iguales a los valores propios periódicos y antiperiódicos cuando éstos son DOBLES. Entonces $f(\lambda, x_o)$ es función entera en λ con ceros en los valores propios λ simples. Por lo tanto

$$f(\lambda, x_o) = \prod_{j=1}^n (\lambda - \mu_j(x_o)) \quad (2.123)$$

Entonces

$$\chi_R(x_o, \lambda) = \sqrt{\prod_{j=0}^{2n} (\lambda - E_j) / \prod_{k=1}^n (\lambda - \mu_k(x_o))} \quad (2.124)$$

Pero λ_j no depende de x , únicamente de x_o , entonces

$$2\chi_I = \frac{\chi'_R(x_o, \lambda)}{\chi_R(x_o, \lambda)} = \left[\prod_{k=1}^n (\lambda - \mu_k(x_o)) \right]' / \prod_{k=1}^n (\lambda - \mu_k(x_o)) \quad (2.125)$$

de ésta representación de $\frac{\chi'_R(x_o, \lambda)}{\chi_R(x_o, \lambda)}$ podemos deducir

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\chi'_R(x_o, \lambda)}{\chi_R(x_o, \lambda)} = 0$$

Entonces la representación asintótica de $\chi(x, \lambda)$ es

$$\chi(x, \lambda) = \sqrt{\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\chi_{2n+1}(x)}{(2\sqrt{\lambda})^{2n+1}} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\chi_{2n+2}(x)}{(2\sqrt{\lambda})^{2n+2}} \quad (2.126)$$

Sustituimos $\chi(x, \lambda)$ dada en la expresión anterior en la ecuación de Riccati (2.117)

$$\begin{aligned} & i \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\chi'_{2n+1}(x)}{(2\sqrt{\lambda})^{2n+1}} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\chi'_{2n+2}(x)}{(2\sqrt{\lambda})^{2n+2}} \right) + \\ & - \left(\sqrt{\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\chi_{2n+1}(x)}{(2\sqrt{\lambda})^{2n+1}} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\chi_{2n+2}(x)}{(2\sqrt{\lambda})^{2n+2}} \right)^2 = u(x) - \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\chi'_{2n+1}(x)}{(2\sqrt{\lambda})^{2n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\chi'_{2n+2}(x)}{(2\sqrt{\lambda})^{2n+2}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\chi_n^2(x)}{(4\lambda)^n} + \\
 & - 2i \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\chi_{2n+1}(x)}{(2\sqrt{\lambda})^{2n+1}} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\chi_{2n+2}(x)}{(2\sqrt{\lambda})^{2n+2}} \right) + \\
 & - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\chi_{2n+1}(x)}{(2\sqrt{\lambda})^{2n}} - i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\chi_{2n+2}(x)}{(2\sqrt{\lambda})^{2n+1}} = u(x)
 \end{aligned}$$

Igualemos potencias de $\sqrt{\lambda}$:

$$\begin{aligned}
 \chi_1(x) &= u \\
 \chi_2(x) &= -(\chi_1)_x = -u_x \\
 \chi_3(x) &= -(\chi_2)_x - (\chi_1)^2 = u_{xx} - u^2 \\
 \chi_4(x) &= -(\chi_3)_x - 2\chi_1\chi_2 = u_{xxx} \\
 \chi_5(x) &= -(\chi_4)_x - (\chi_2)^2 = -u_{xxxx} + (u_x)^2 \\
 \chi_6(x) &= -(\chi_5)_x - 2\chi_2\chi_3 + 2\chi_1\chi_4 \\
 \chi_7(x) &= -(\chi_6)_x + (\chi_3)^2 \\
 \chi_8(x) &= -(\chi_7)_x - 2\chi_1\chi_6 - 2\chi_2\chi_5 - 2\chi_3\chi_4
 \end{aligned}$$

Notemos que $\chi_2(x)$ y $\chi_4(x)$ son derivadas. De hecho $\chi_{2n+2}(x)$ es una derivada total para toda n . Esto tiene sentido ya que, por (2.119), la parte imaginaria χ_I de $\chi(x, \lambda)$ es una derivada total y las funciones $\chi_{2n+2}(x)$ determinan la expansión asintótica de χ_I .

Por otra parte de (2.124) y (2.125)

$$\chi(x, \lambda) = \frac{\sqrt{\prod_{j=0}^{2n} (\lambda - E_j)}}{\prod_{k=1}^n (\lambda - \mu_k)} - i \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dx} \left[\prod_{k=1}^n (\lambda - \mu_k(x)) \right]}{\prod_{k=1}^n (\lambda - \mu_k(x))} \quad (2.127)$$

Igualemos coeficientes de (2.127) y (2.126), tenemos

$$u(x) = -2 \sum_{k=1}^n \mu_k(x) + \sum_{j=0}^{2n} E_j \quad (2.128)$$

y así hemos obtenido $u(x)$ en su representación de la *traza*.

El nombre de representación de la traza es porque también se obtiene de la expansión asintótica de la función de Green para la ecuación de calor con potencial u . La función de Green es de la forma $p(x, y, t)$ y la fórmula de traza se obtiene de expandir esta función sobre la diagonal: $x = y$. cuando $t \downarrow 0$ (Para más detalles consultar [Mc])

Aplicaciones

Encontraremos una expresión para los ceros y polos de la función de Bloch $\Psi_{\pm}(x; x_o, \lambda)$. Para esto es necesario notar que para un potencial $u(x)$ con valores reales y diferenciable se tiene

Observación 2.29 *Si un polo de la función de Bloch $\Psi_{\pm}(x; x_o, \lambda)$ está en el punto $(\lambda, +)$ de la superficie de Riemann Γ , entonces el punto $(\lambda, -)$ no es un polo (para toda $\lambda \notin \{E_j\}$, es decir, para valores distintos a los puntos rama ya que $(E_j, +) = (E_j, -)$)*

Prueba. De la **Observación 2.28** sabemos que los polos de $\chi_{\pm}(x, \lambda)$ son los mismos que los de $\Psi_{\pm}(x; x_o, \lambda)$ contando multiplicidades. Si $\Psi_{\pm}(x; x_o, \lambda)$ tiene polos en $(\lambda, +)$ y en $(\lambda, -)$ de multiplicidades m_+ y m_- respectivamente entonces $\Psi_+ \Psi_-$ tiene un polo en λ de multiplicidad $(m_+ + m_-)$ en el plano complejo, lo cual contradice la **Observación 2.28**. \square

La función

$$\chi(x_o, \lambda) = \frac{\sqrt{\prod_{j=0}^{2n} (\lambda - E_j) - i \frac{1}{2} \frac{d}{dx_o} \left[\prod_{j=1}^n (\lambda - \mu_j(x_o)) \right]}}{\prod_{j=1}^n (\lambda - \mu_j(x_o))} \quad (2.129)$$

tiene polos en $(\mu_k(x_o), +)$ o en $(\mu_k(x_o), -)$ en la superficie de Riemann Γ sobre el punto $\mu_k(x_o)$ en el λ -plano. Supongamos que el polo está en $Q_k = (\mu_k(x_o), +)$. La condición para que no exista polo en $(\mu_k(x_o), -)$ es que el numerador de (2.129) sea cero en $\lambda = \mu_k(x_o)$, es decir

$$\sqrt{\prod_{j=0}^{2n} (\mu_k(x_o) - E_j) - i \frac{1}{2} \frac{d}{dx_o} \left[\prod_{j=1}^n (\lambda - \mu_k(x)) \right]}_{\lambda = \mu_k(x_o)} = 0$$

Por lo tanto, en x_o

$$\mu'_k = -2i \sqrt{\prod_{j=0}^{2n} (\mu_k - E_j) \left[\prod_{j \neq k}^n (\mu_k - \mu_j) \right]^{-1}}$$

Tenemos la ecuación diferencial para los valores propios

$$\mu'_k = -2i \frac{\sqrt{\prod_{j=0}^{2n} (\mu_k - E_j)}}{\prod_{j \neq k} (\mu_k - \mu_j)} \quad (2.130)$$

Ejemplos

- Sea $n = 1$. Entonces, de (2.128)

$$u(x) = -2\mu_1(x) + E_0 + E_1 + E_2$$

y de (2.130)

$$\frac{\mu'_1}{\sqrt{(\mu_1 - E_0)(\mu_1 - E_1)(\mu_1 - E_2)}} = -2i$$

Por lo tanto $u(x)$ es un potencial elíptico con un intervalo de inestabilidad (también llamado, potencial de Lamé con un intervalo de inestabilidad).

- Sea $n = 2$. Entonces, de (2.130)

$$\mu'_1 = -2i \frac{\sqrt{(\mu_1 - E_0)(\mu_1 - E_1)(\mu_1 - E_2)(\mu_1 - E_3)(\mu_1 - E_4)}}{(\mu_1 - \mu_2)}$$

$$\mu'_2 = -2i \frac{\sqrt{(\mu_2 - E_0)(\mu_2 - E_1)(\mu_2 - E_2)(\mu_2 - E_3)(\mu_2 - E_4)}}{(\mu_2 - \mu_1)}$$

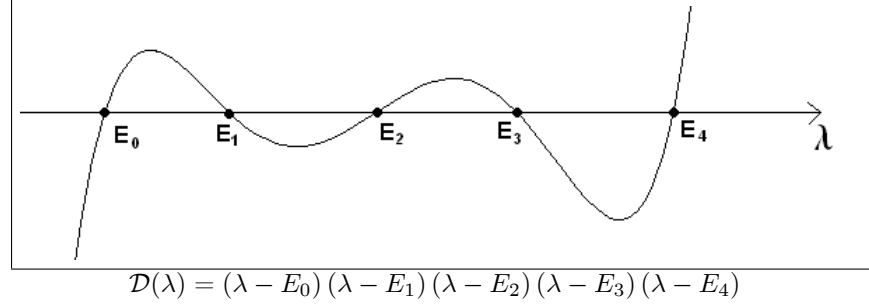
y de (2.128)

$$u(x) = -2[\mu_1(x) + \mu_2(x)] + E_0 + E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \quad (2.131)$$

Sea $\mathcal{D}(\lambda) \equiv (\lambda - E_0)(\lambda - E_1)(\lambda - E_2)(\lambda - E_3)(\lambda - E_4)$

$$d\xi = -\frac{\mu'_1}{\sqrt{-\mathcal{D}(\mu_1)}} = \frac{\mu'_2}{\sqrt{-\mathcal{D}(\mu_2)}} = \frac{2dx}{\mu_2 - \mu_1} \quad (2.132)$$

Esta función no tiene polos ya que por **Lema 2.21** $\mu_2 - \mu_1 > 0$, de hecho:



$$\begin{aligned} E_0 < E_1 \leq \mu_1 \leq E_2 < E_3 \leq \mu_2 \leq E_4 \\ E_1 < E_2 \quad , \quad E_3 < E_4 \end{aligned} \quad (2.133)$$

De la primera y última igualdad de (2.132) se tiene

$$x = x_o + \int_0^\xi \frac{1}{2} (\mu_2 - \mu_1) d\xi \quad (2.134)$$

Sean $F_1(\xi)$ y $F_2(\xi)$ funciones periódicas real valuadas, tales que

$$\xi = \int_{E_1}^{F_1(\xi)} \frac{d\mu}{\sqrt{-\mathcal{D}(\mu)}} \quad (2.135)$$

$$\xi = \int_{E_3}^{F_2(\xi + \xi_0)} \frac{d\mu}{\sqrt{-\mathcal{D}(\mu)}} \quad (2.136)$$

Donde $\xi_0 = \int_{E_1}^{E_2} \frac{d\mu}{\sqrt{-\mathcal{D}(\mu)}} + i \int_{E_2}^{E_3} \frac{d\mu}{\sqrt{\mathcal{D}(\mu)}}$, ya que

$$\xi = \int_{E_1}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\sqrt{-\mathcal{D}(\mu)}} = \int_{E_1}^{E_2} \frac{d\mu}{\sqrt{-\mathcal{D}(\mu)}} + i \int_{E_2}^{E_3} \frac{d\mu}{\sqrt{\mathcal{D}(\mu)}} + \int_{E_3}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\sqrt{-\mathcal{D}(\mu)}}$$

Las funciones $F_1(\xi)$ y $F_2(\xi)$ son funciones hiperelípticas y están bien definidas en los intervalos

$$\begin{aligned} E_1 \leq F_1(\xi) \leq E_2 \\ E_3 \leq F_2(\xi + \xi_0) \leq E_4 \end{aligned} \quad (2.137)$$

ya que $\mathcal{D}(\lambda)$ es como se muestra en la figura anterior.

Ahora encontraremos una expresión para los valores propios de Dirichlet μ_1 y μ_2 en términos de F_1 y F_2 :

Caso μ_1

Derivemos (2.135) con respecto a F_1

$$\frac{d\xi}{dF_1} = \frac{1}{\sqrt{-\mathcal{D}(F_1(\xi))}} \quad (2.138)$$

o

$$\frac{dF_1}{d\xi} = \sqrt{-\mathcal{D}(F_1(\xi))}$$

Por otra parte, de (2.132) se tiene

$$\frac{d\mu_1}{d\xi} = -\sqrt{-\mathcal{D}(\mu_1)}$$

Sea $\widetilde{\mu}_1(\xi) = \mu_1(-\xi)$, entonces

$$\frac{d\widetilde{\mu}_1(-\xi)}{d\xi} = \sqrt{-\mathcal{D}(\mu_1)} \quad (2.139)$$

Podemos concluir de (2.139) y (2.138) que

$$F_1(-\xi) = \mu_1(\xi)$$

Caso μ_2

Procedemos igual que en el caso μ_1 y tenemos

$$F_2(\xi + \xi_0) = \mu_2(\xi)$$

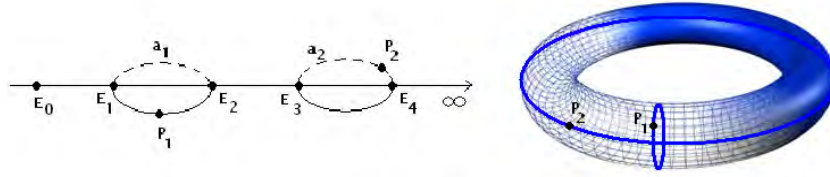
Por lo tanto (2.131) es de la forma

$$u(x) = -2[F_1(-\xi) + F_2(\xi + \xi_0)] + E_0 + E_1 + E_2 + E_3 + E_4$$

Notemos que F_1 y F_2 son realmente la misma función. Por lo tanto tenemos un potencial que es suma de funciones hiperehélicas y de hecho es solución de la ecuación de KdV de orden 2 como veremos más adelante.

Las soluciones de (2.132) son funciones cuasiperiódicas con dos, en general, periodos racionales independientes T_1 y T_2 definidos por la superficie de Riemann Γ (se desarrollara en el siguiente capítulo) Podemos interpretar a la ecuación (2.132) geoméricamente de la siguiente forma: Los puntos en

la superficie de Riemann que corresponden a los intervalos de inestabilidad forman ciclos a_1 y a_2 como se muestra en la siguiente figura



Los ceros P_1 y P_2 de la función $\Psi_{\pm}(x; x_o, \lambda)$ pertenecen a los ciclos a_1 y a_2 respectivamente y su posición cambia con x . Topológicamente, los ciclos a_1 y a_2 son círculos y el "punto fase" $(P_1, P_2) = (\mu_1, \pm, \mu_2, \pm)$ pertenece a un toro de dos dimensiones T^2 . La ecuación (2.132) describe la dinámica del "punto fase" (P_1, P_2) en el toro.

Análogamente, la ecuación (2.130) describe la dinámica del "punto fase"

$$(P_1, \dots, P_n) = (\mu_1, \pm, \mu_2, \pm, \dots, \mu_n, \pm)$$

en el toro (de dimensión n) T^n , donde cada punto $P_j = (\mu_j, \pm)$ pertenece al ciclo a_j . en la superficie de Riemann Γ en el j -ésimo intervalo de inestabilidad.

Capítulo 3

Korteweg - de Vries

En 1974, Novikov [N] estudió el problema de Cauchy para la ecuación KdV con condiciones iniciales periódicas. Probó:

Si q es una función con valores reales, periódica y solución estacionaria de la ecuación de KdV de orden n (para alguna n , ver (1.4)), entonces el espectro asociado a $\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$, tiene a lo más, n intervalos de inestabilidad.

Poco menos de un año de publicado el resultado de Novikov, Dubrovin [D]₁ y Flaschka [Fla] probaron el regreso. Dubrovin y Novikov [DN] usaron estos resultados para demostrar que los siguientes incisos son equivalentes para q periódica de periodo π :

- a) q es un potencial con un número finito de intervalos de inestabilidad
- b) q es solución estacionaria de la ecuación de KdV de orden n para alguna n .
- c) Sólo para un número finito de valores de λ , la ecuación de Hill (2.1) NO tiene dos soluciones de Floquet linealmente independientes, es decir, sólo un número finito de valores de λ son simples.
- d) En el caso de condiciones de frontera de Dirichlet, sólo existe un número finito de valores propios simples, dependientes de x_o , en el intervalo $[x_o, x_o + \pi]$.

Fue a partir de estos resultados que se infiere que, generalmente, potenciales con un número finito de intervalos de inestabilidad, serán cuasiperiódicos con respecto a x pero no periódicos en x .

Durante este mismo periodo, Its y Matveev [IM] dieron una representación para soluciones $q(x, t)$ con un número finito de intervalos de inestabilidad en términos de la función theta de Riemann asociada ([NMPZ]; Capítulo II)

En este capítulo nos concentraremos en soluciones de la ecuación **KdV** cuando el dato inicial tiene un número finito de intervalos de inestabilidad. Nos interesa:

- 1) Describir la evolución en el tiempo de los datos espectrales y utilizar la fórmula de traza para describir la evolución en el tiempo de soluciones de la ecuación **KdV**
- 2) Expresar las soluciones de la ecuación **KdV** por medio de la función Theta de Riemann asociada y encontrar condiciones que garanticen que dichas soluciones son funciones elípticas

3.1. El espectro del operador de Schrödinger

Denotaremos por L al operador de Schrödinger

$$L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t) \quad (3.1)$$

con $u(x, t)$ un potencial π -periódico en x . En éste caso, el espectro de L correspondiente a condiciones de frontera periódicas, antiperiódicas y de Dirichlet es discreto y queda determinado por el potencial u .

Si $u(x, t)$ es solución de la ecuación KdV, es decir,

$$u_t = -uu_x - u_{xxx} \equiv \kappa(u) \quad (3.2)$$

Entonces, ¿qué pasa con los intervalos de inestabilidad de L ? Es decir, ¿cómo evolucionan en el tiempo los valores propios periódicos y antiperiódicos simples de L ? Asimismo, debido a la fórmula de traza nos interesa la evolución en el tiempo del espectro de Dirichlet. El primer resultado es que el espectro periódico y antiperiódico no cambia en el tiempo.

Proposición 3.1 $\Delta(\lambda, t) = \Delta(\lambda, 0)$

Prueba. Fijamos un x_o . Y sean φ_+ y φ_- (como en (2.99)) soluciones de

$$-\varphi'' + u\varphi = \lambda\varphi \quad (3.3)$$

tales que

$$\begin{aligned} \varphi_+(x_o, t) &= 1 & \varphi_-(x_o, t) &= 1 \\ \varphi'_+(x_o, t) &= ik & \varphi'_-(x_o, t) &= -ik \end{aligned} \quad (3.4)$$

con $k = \sqrt{\lambda}$

Consideremos el operador de traslación (también llamado operador de monodromía) \hat{T} , ya que conmuta con el operador de Schrödinger L

$$\hat{T} : \Phi(x) \rightarrow \Phi(x + \pi) \quad (3.5)$$

Entonces $\hat{T}\varphi_+(x)$ y $\hat{T}\varphi_-(x)$ son soluciones de (3.3), por lo tanto

$$\hat{T}\varphi_+(x) = a\varphi_+(x) + b\varphi_-(x) \quad (3.6)$$

$$\hat{T}\varphi_-(x) = c\varphi_+(x) + d\varphi_-(x) \quad (3.7)$$

Como λ es real, entonces (por unicidad)

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_+(x)} &= \varphi_-(x) \\ \overline{\varphi_-(x)} &= \varphi_+(x) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por lo tanto

$$\hat{T}\varphi_-(x) = \overline{\hat{T}\varphi_+(x)} = \overline{a\varphi_+(x) + b\varphi_-(x)} = \bar{b}\varphi_+(x) + \bar{a}\varphi_-(x) \quad (3.9)$$

Entonces

$$\hat{T} = \hat{T}(x_o; t, \lambda) = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

Sean c y s (como en (2.100)) soluciones de (3.3) tales que

$$\begin{aligned} c(x_o) &= 1, & s(x_o) &= 0 \\ c'(x_o) &= 0, & s'(x_o) &= 1 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= c + iks \\ \varphi_- &= c - iks \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por lo tanto

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{11} + a_{22} = \Delta(\lambda, t)$$

Sea

$$B = \partial^3 + \frac{3}{4}u\partial + \frac{3}{4}\partial u$$

(veremos como se encuentra B en **Teorema 3.2**) Entonces

$$\begin{aligned} (L - \lambda)(\dot{\varphi} + B\varphi) &= L\dot{\varphi} + LB\varphi - \lambda\dot{\varphi} - \lambda B\varphi = L\dot{\varphi} + LB\varphi - \lambda\dot{\varphi} - B(\lambda\varphi) = \\ &= L\dot{\varphi} + LB\varphi - \lambda\dot{\varphi} - BL\varphi = (L - \lambda)\dot{\varphi} + (LB - BL)\varphi = L\dot{\varphi} - \lambda\dot{\varphi} + \dot{L}\varphi \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pero $L\varphi = \lambda\varphi$, entonces

$$L\dot{\varphi} + \dot{L}\varphi = \lambda\dot{\varphi}$$

sustituyendo en (3.11) obtenemos

$$(L - \lambda) (\dot{\varphi} + B\varphi) = 0 \quad (3.12)$$

Por lo tanto

$$\dot{c} + Bc = \alpha c + \beta s \quad (3.13)$$

$$\dot{s} + Bs = \gamma c + \delta s \quad (3.14)$$

Sea

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

(la matriz Λ asociada a φ_+ , φ_- es $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$)

Pero Λ es el *par de Lax de \hat{T}*

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = \left[\hat{T}, \Lambda \right] = \hat{T}\Lambda - \Lambda\hat{T} \quad (3.16)$$

La matriz $\hat{T}\Lambda - \Lambda\hat{T}$ tiene traza cero por ser un conmutador, entonces

$$\frac{\partial(\text{traza}(\hat{T}))}{\partial t} = 0 \quad (3.17)$$

Por lo tanto

$$\text{traza}(\hat{T}(t)) = \text{traza}(\hat{T}(0))$$

y así

$$\Delta(\lambda, t) = \Delta(\lambda, 0)$$

Es decir, los intervalos de inestabilidad se preservan, o bien

$$\{\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t), \dots\} = \{\lambda_1(0), \dots, \lambda_n(0), \dots\}$$

los valores propios y sus multiplicidades se preservan. \square

¿Cuáles son las ecuaciones diferenciales cuyas soluciones tienen esta propiedad?
Es decir, cuyo espectro se preserva.

3.2. Cantidades conservadas y ecuaciones de evolución

Gardner identificó a las ecuaciones diferenciales cuyo espectro se conserva como ecuaciones generalizadas de KdV:

$$u_t = [B_n, L] u \quad (3.18)$$

donde

$$B_m = \frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m+1}} + \sum_{j=1}^m \left[b_j(x) \frac{\partial^{2m-1}}{\partial x^{2m-1}} + \frac{\partial^{2m-1}}{\partial x^{2m-1}} b_j(x) \right] \quad (3.19)$$

y $\{b_j(x)\}_{j=1}^m$ son tales que $[B_n, L]$ es de grado cero. Denotamos por

$$K_n(u) \equiv [B_n, L] u \quad (3.20)$$

Por lo tanto (3.18) se transforma en

$$u_t = K_n(u) \quad (3.21)$$

y comparte con la ecuación (3.2) la propiedad que los valores propios del operador de Schrödinger (3.1) con u como potencial son sus integrales.

El resultado se sigue de forma análoga a como se procede en el problema de encontrar matrices similares dentro de las matrices antisimétricas (ver Apéndice A).

Sea $\{L(t)\}_t$ una familia de operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert. El espectro de $L(t)$ es independiente de t si los operadores $L(t)$ son unitariamente equivalentes entre ellos, es decir, si existe una familia $\{U(t)\}_t$ de operadores unitarios tal que para toda t

$$U^*(t)L(t)U(t) = L(0) \quad (3.22)$$

Supongamos que tanto $L(t)$ como $U(t)$ dependen de forma diferenciable en t . Como $U(t)$ es una matriz unitaria

$$U^*(t)U(t) = I \quad (3.23)$$

Si derivamos esta última relación con respecto a t obtenemos

$$(U^*)_t U + U^* U_t = 0 \quad (3.24)$$

es decir

$$(U^*)_t U = -U^* U_t \quad (3.25)$$

Por lo tanto

$$B \equiv U_t U^* \quad (3.26)$$

es un operador antisimétrico.

$$B^* = -B \quad (3.27)$$

De (3.26) y (3.23) tenemos que

$$U_t = BU \quad (3.28)$$

Inversamente, dado $B(t)$ operador antisimétrico podemos construir un operador $U(t)$ que satisface (3.28) resolviendo el problema de valor inicial

$$h_t = B(t)U(t) , h(t_o) = h_o \quad (3.29)$$

con $U(t)h(0) = h(t)$. El operador $U(t)$ definido de esta forma es isométrico. Si se puede resolver el problema de valor inicial (3.29) para un conjunto denso de h_o para toda t_o , entonces ambos $U(t)$ y su inversa están densamente definidos, por lo que la cerradura de $U(t)$ es unitaria. Derivamos (3.22) con respecto a t .

$$(U^*)_t LU + U^* L_t U + U^* L U_t = (0)$$

por lo tanto

$$U (U^*)_t L + L_t + L U_t U^* = (0)$$

y de (3.28) y (3.27) concluimos

$$L_t = BL - LB \quad (3.30)$$

Es decir, B es el *par de Lax* de L .

A su vez (3.30) implica la equivalencia unitaria (3.22). Por lo que hemos demostrado

Teorema 3.2 Sean $\{L(t)\}_t$ una familia de operadores autoadjuntos y $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ una familia de operadores antisimétricos tales que se puede resolver el problema de valores iniciales (3.29) para un conjunto denso de h_o y cumplen (3.30). Entonces los operadores $L(t)$ son unitariamente equivalentes.

Aplicamos este teorema a L (definida en (3.1)). En éste caso

$$L_t = v_t$$

y (3.30) se transforma en

$$v_t = BL - LB \quad (3.31)$$

Esta ecuación se satisface para $B = B_m$ definida en (3.19).

Calculemos B_1

$$B_1 = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + b(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} b(x)$$

entonces

$$\begin{aligned} [B_1, L] f(x) &= B_1 [L f(x)] - L [B_1 f(x)] = \\ &= 2b(x) f(x) u'(x) - f(x) b'''(x) + f(x) u'''(x) + \\ &\quad + f''(x) [3u'(x) - 4b'(x)] + f'(x) [3u''(x) - 4b''(x)] \end{aligned} \quad (3.32)$$

para que sea de grado cero necesitamos

$$\begin{aligned} 3u'(x) - 4b'(x) &= 0 \\ 3u''(x) - 4b''(x) &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Por lo que es suficiente tomar $b(x) = \frac{3}{4}u(x)$. Entonces

$$[B_1, L] = \frac{1}{4} [6u(x)u'(x) + u'''(x)] \quad (3.34)$$

y (3.34) es (3.2) módulo un reescalamiento (Ver Apéndice B).

¿Cómo obtenemos cantidades conservadas para el flujo (3.2)?

Lax muestra en [L] la existencia de una secuencia de cantidades conservadas de la forma

$$F_n(u) = \int P_n dx \quad (3.35)$$

donde P_n es un polinomio en u y sus derivadas hasta orden n . Las cantidades conservadas tienen la propiedad

Teorema 3.3 *Sea F una cantidad conservada de (3.2), entonces $\{u \mid \nabla F(u) = 0\}$ es un conjunto invariante del flujo (3.2).*

Prueba. Queremos demostrar que dada u solución de (3.2) y $\nabla F(u(x, 0)) = 0$ entonces $\nabla F(u(x, t)) = 0$ para toda t .

Sea $u(x, t)$ la solución de (3.2) y $u_o \equiv u(x, 0)$ tal que

$$\nabla F(u_o) = 0. \quad (3.36)$$

Sean $t_o \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $\hat{u}(x, t; t_o, \varepsilon)$ solución de (3.2) tal que $\hat{u}(x, t_o; t_o, \varepsilon) = u(x, t_o) + \varepsilon w(x)$, donde $w(x)$ es periódica y diferenciable. Suponemos que existe un conjunto denso de w para las cuales la dependencia de u en ε es diferenciable. Como F es una cantidad conservada, para ε fija se tiene

$$\frac{dF(\hat{u}(x, t; t_o, \varepsilon))}{dt} = 0$$

Por otra parte

$$\frac{dF(\hat{u}(x, t; t_o, \varepsilon))}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \nabla F(\hat{u}(x, t; t_o, \varepsilon)) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \nabla F(\hat{u}(x, t; t_o, 0)) w(x) \quad (3.37)$$

Si $t_o = 0$, por (3.36) tenemos

$$\frac{dF(\hat{u}(x, t_o; t_o, \varepsilon))}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

Como (3.37) es independiente de t , se tiene que para toda t

$$\nabla F(\hat{u}(x, t; t_o, 0))w(x) = 0$$

En particular, es cero para $t = t_o$

$$\frac{dF(\hat{u}(x, t; t_o, \varepsilon))}{d\varepsilon} \Big|_{\substack{\varepsilon=0 \\ t_o=0}} = \nabla F(u_o(x))w(x) = 0$$

Como w es arbitraria en un conjunto denso

$$\nabla F(\hat{u}(x, t_o; t_o, 0)) = \nabla F(u(x, t_o)) = 0$$

y ya que t_o es un tiempo arbitrario

$$\nabla F(u(x, t)) = 0, \forall t$$

□

Las primeras cantidades conservadas de la forma (3.35) y sus gradientes, son:

N	F_N	∇F_N
-1	$\int u dx$	1
0	$\int \frac{1}{2} u^2 dx$	u
1	$\int \left[-\frac{1}{3} u^3 + (u_x)^2 \right] dx$	$-2u_{xx} - u^2$
2	$\int \left[\frac{1}{4} u^4 - 3u(u_x)^2 + \frac{9}{5} (u_{xx})^2 \right] dx$	$u^3 + 6(u_x)^2 + 6uu_{xx} + \frac{18}{5} u_{xxxx}$

Por otra parte, en [L]₂, se demuestra que las soluciones de

$$G_N(u) = \nabla F_N(u) + \sum_{j=-1}^{N-1} a_j \nabla F_j(u) = 0 \quad (3.38)$$

forman un conjunto invariante del flujo (3.2). Esta formulación corresponde a extremizar F_N fijando F_1, \dots, F_{N-1} , donde a_1, \dots, a_{N-1} son los multiplicadores de Lagrange.

Para $N = 0$, la ecuación (3.38) es

$$u + a_{-1} = 0 \quad (3.39)$$

cuyas soluciones son constantes. Para $N = 1$, tenemos

$$-2u_{xx} - u^2 + a_0 u + a_{-1} = 0 \quad (3.40)$$

Multiplicando 3.40 por u_x , integramos y obtenemos

$$\begin{aligned} cte &= \int 2u_{xx}u_x + u^2u_x - a_0uu_x - a_{-1}u_x dx = \\ &= (u_x)^2 + \frac{1}{3}u^3 - a_0\frac{1}{2}u^2 - a_{-1}u \end{aligned} \quad (3.41)$$

cuyas soluciones son funciones elípticas.

Teorema 3.4 Si $u(x)$ es una solución de (3.40), entonces

$$u(x, t) = u(x - \alpha_0 t) \quad (3.42)$$

es solución de KdV (3.2), donde $\alpha_0 = \frac{1}{2}a_0$

Prueba. Derivando (3.40) con respecto a x y multiplicando por $\frac{-1}{2}$ obtenemos

$$u_{xxx} + uu_x - \alpha_0 u_x = 0 \quad (3.43)$$

Por otra parte, sustituyendo (3.42) en la ecuación (3.2), obtenemos

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = -\alpha_0 u_x + uu_x + u_{xxx}$$

la cual, de acuerdo a (3.43) es cero y por lo tanto solución de KdV \square

El conjunto $\{u : G_N(u) = 0\}$ corresponde a potenciales con N intervalos de inestabilidad y forman un toro de dimensión N que es invariante bajo el flujo de orden N de KdV y son las variedades isospectrales en el sentido que todos los potenciales tienen los mismos intervalos de inestabilidad (ver [L],[Mc])

3.3. Evolución en el tiempo de soluciones de KdV

En esta sección encontraremos una representación para las soluciones de KdV correspondientes a datos iniciales con un número finito de intervalos de inestabilidad. Esto se hará determinando la evolución en el tiempo de los valores propios de Dirichlet, que son los polos de la función χ_R y se utilizan estas expresiones en la fórmula de traza, obteniendo sumas de funciones hiperelípticas.

Usamos la representación (2.121):

$$\chi_R = \frac{\sqrt{1 - a_R^2}}{a_{21}}$$

Donde a_R es como la definimos en (2.106) y a_{21} como en:(2.102). Derivando con respecto a t obtenemos

$$(\chi_R)_t = -\frac{\sqrt{1-a_R^2}}{(a_{21})^2} (a_{21})_t = -\chi_R \frac{(a_{21})_t}{a_{21}}$$

pues a_R no depende de t ya que por (2.107) tenemos que $a_R = \frac{1}{2} \text{traza}(\widehat{T})$,.Ahora usemos la ecuación

$$\frac{\partial \widehat{T}}{\partial t} = \Lambda \widehat{T} - \widehat{T} \Lambda$$

donde

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -u'(x_o) & u''(x_o) - 2u^2(x_o) - 2\lambda u(x_o) + 4\lambda^2 \\ 2(u(x_o) + \lambda) & u'(x_o) \end{pmatrix}$$

con respecto a la base $\{c, s\}$ (definida en (2.100)) para obtener

$$(a_{21})_t = 2u'(x_o)a_{21} + 2[u(x_o) + \lambda](a_{11} - a_{22})$$

por lo cual

$$(\chi_R)_t = -\chi_R \left[2u'(x_o) + 2[u(x_o) + \lambda] \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{21}} \right]$$

y por (2.125) y (2.121)

$$(\chi_R)_t = -\chi_R \left[2u'(x_o) + 2 \frac{\chi'_R}{\chi_R} [u(x_o) + \lambda] \right]$$

Sea $\lambda_{1,2}(x, t, \lambda) = 2[u(x, t) + \lambda]$, entonces

$$(\chi_R)_t = -[(\lambda_{1,2}) \chi_R]' \quad (3.44)$$

Ahora usamos la representación $\chi_R = \sqrt{\prod_{j=0}^{2n} (\lambda - E_j) / P_n(x, t, \lambda)}$ (donde $P_n(x, t, \lambda) =$

$\prod_{k=1}^n (\lambda - \mu_k)$, ver (2.127)) y la expresión (3.44) para encontrar que

$$(P_n)_t = (\lambda_{1,2})' P_n - (\lambda_{1,2}) P'_n \quad (3.45)$$

Finalmente usamos la expresión (2.130) para P'_n :

$$(P_n)_t \Big|_{\lambda=\mu_j} = -2i(\lambda_{1,2}) \Big|_{\lambda=\mu_j} \sqrt{\prod_{j=0}^{2n} (\mu_j - E_j)} \quad (3.46)$$

y ahora se resuelve para μ_j , quedando el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$(\mu_j)_t = \frac{4i[u(x, t) + 2\mu_j(x, t)] \sqrt{\prod_{j=0}^{2n} (\mu_j - E_j)}}{\prod_{k \neq j} (\mu_k - \mu_j)} \quad (3.47)$$

En el caso $n = 2$ usamos la fórmula de traza para llegar a:

$$(\mu_1)_t = \frac{8[\mu_2 - \frac{1}{2}(E_0 + E_1 + E_2 + E_3 + E_4)]}{\mu_1 - \mu_2} \sqrt{-\prod_{j=0}^4 (\mu_1 - E_j)} \quad (3.48)$$

$$(\mu_2)_t = \frac{8[\mu_1 - \frac{1}{2}(E_0 + E_1 + E_2 + E_3 + E_4)]}{\mu_2 - \mu_1} \sqrt{-\prod_{j=0}^4 (\mu_2 - E_j)} \quad (3.49)$$

Suponiendo que $E_0 + E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = 0$, el sistema se integra cambiando a la variable independiente definida por

$$dw = \frac{8\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} dt \quad (3.50)$$

quedando el sistema:

$$-\frac{\mu_1 d\mu_1}{\sqrt{-\prod_{j=0}^4 (\mu_1 - E_j)}} = \frac{\mu_2 d\mu_2}{\sqrt{-\prod_{j=0}^4 (\mu_2 - E_j)}} = dw \quad (3.51)$$

Como en el caso estacionario, se obtiene de la fórmula de traza

$$u(x, t) = -2[F_1(-\tau(x - x_o(t))) + F_2(\tau_o(t) + \tau(x - x_o))] \quad (3.52)$$

$$\tau_o(t) = 4t \quad \text{y} \quad (x_o)_t = 4F_1(\tau_o(t))$$

En el caso general, aplicamos la fórmula (3.52) a

$$\tilde{u}(x, t) = u(x, t) - \frac{1}{5}(E_0 + E_1 + E_2 + E_3 + E_4)$$

Entonces los valores propios simples periódicos y antiperiódicos de $\tilde{u}(x, t)$ son

$$\tilde{E}_j = E_j - \frac{1}{5}(E_0 + E_1 + E_2 + E_3 + E_4)$$

y

$$\sum_{j=0}^4 \tilde{E}_j = 0$$

Por lo tanto

$$u(x, t) = -2[F_1(-\tau(x - x_o(t))) + F_2(\tau_o(t) + \tau(x - x_o))] + \frac{1}{5}(E_0 + E_1 + E_2 + E_3 + E_4)$$

3.4. Función *Theta* de Riemann y soluciones elípticas de KdV

Nuestro principal interés en esta sección es deducir la representación de soluciones de la ecuación KdV de

$$4u_t = 6uu_x + u_{xxx} \quad (3.53)$$

de la forma

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(\theta(Ux + Wt + z_o)) \quad (3.54)$$

donde θ es una función *Theta* de Riemann construida a partir de una matriz de Riemann (B_{jk}) de $n \times n$ y z_o es un vector arbitrario de dimensión n . Estas soluciones corresponden a potenciales del operador de Schrödinger con n intervalos finitos de inestabilidad. La dinámica de KdV en este caso tiene lugar en una variedad isospectral del tipo descrito en la sección 3.2.

La representación garantiza que dichas soluciones son funciones cuasiperiódicas. Deduiremos una condición suficiente para que dichas soluciones sean funciones elípticas.

Para llegar a la expresión (3.54) vamos a desarrollar las herramientas necesarias de funciones *Theta* y superficies de Riemann.

Definición 3.5 Una matriz simétrica $B = (B_{jk})$ de $n \times n$ es una matriz de Riemann si $\text{Re}(B) = (\text{Re}(B_{jk}))$ es definida negativa.

Definición 3.6 Una función *Theta* de Riemann esta definida por su serie de Fourier de la siguiente forma

$$\theta(z|B) = \sum_{N \in \mathbb{Z}^n} e^{\frac{1}{2} \langle BN, N \rangle + \langle N, z \rangle} \quad (3.55)$$

Donde,

$$z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \quad (3.56)$$

$$\langle BN, N \rangle = \sum_{i,j=1}^n B_{ij} N_i N_j \quad (3.57)$$

y $N \in \mathbb{Z}^n$ es un vector con coeficientes enteros, es decir $N = (N_1, N_2, \dots, N_n)$ con $N_i \in \mathbb{Z}$ para toda $i \in \{1, \dots, n\}$.

3.4. FUNCIÓN THETA DE RIEMANN Y SOLUCIONES ELÍPTICAS DE KDV81

Notemos que el término general de (3.55) depende únicamente de la parte simétrica de la matriz B . La serie (3.55) converge uniforme y absolutamente en compactos ya que si $b \in \mathbb{R}^+$ tal que $-b$ es el mayor valor propio de la matriz $\text{Re}(B)$, entonces

$$\text{Re}(\langle BN, N \rangle) \leq -b \langle N, N \rangle$$

Por lo tanto, la función $\theta(z|B)$ es analítica en \mathbb{C}^n .

Si la matriz B es fija simplemente denotamos por $\theta(z)$ a $\theta(z|B)$.

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base para el espacio \mathbb{C}^n tal que

$$(e_k)_j = \delta_{kj} \quad (3.58)$$

y sean f_1, \dots, f_n vectores tales que

$$(f_k)_j = B_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, n \quad (3.59)$$

o bien

$$f_k = Be_k \quad (3.60)$$

Proposición 3.7 Si trasladamos el argumento de la función Theta por $2\pi ie_k$, se tienen las siguientes relaciones

$$\theta(z + 2\pi ie_k) = \theta(z) \quad (3.61)$$

$$\theta(z + f_k) = e^{-\frac{1}{2}B_{kk} - z_k} \theta(z) \quad (3.62)$$

Prueba. La relación (3.61) se cumple ya que el término general de (3.55) no cambia si sustituimos z por $z + 2\pi ie_k$

$$\begin{aligned} \theta(z + 2\pi ie_k) &= \sum_{N \in \mathbb{Z}^n} e^{\frac{1}{2}\langle BN, N \rangle + \langle N, z + 2\pi ie_k \rangle} = \\ &= \sum_{N \in \mathbb{Z}^n} e^{\frac{1}{2}\langle BN, N \rangle + \sum_{s,j=1, s \neq k}^n N_s z_j + \sum_{s=1}^n N_s (z_k + 2\pi i)} \\ &= \sum_{N \in \mathbb{Z}^n} e^{\frac{1}{2}\langle BN, N \rangle + \sum_{s,j=1, s \neq k}^n N_s z_j + \sum_{s=1}^n N_s (z_k + 2\pi i)} \end{aligned}$$

$$\text{pero } \sum_{s=1}^n N_s (z_k + 2\pi i) = \sum_{s=1}^n N_s z_k + 2\pi i N_s = e^{\sum_{s=1}^n N_s z_k} e^{\sum_{s=1}^n 2\pi i N_s} = e^{\sum_{s=1}^n N_s z_k}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \theta(z + 2\pi ie_k) &= \sum_{N \in \mathbb{Z}^n} e^{\frac{1}{2}\langle BN, N \rangle + \sum_{s,j=1, s \neq k}^n N_s z_j + \sum_{s=1}^n N_s z_k} = \\ &= \sum_{N \in \mathbb{Z}^n} e^{\frac{1}{2}(\langle BN, N \rangle + \langle N, z \rangle)} = \theta(z) \end{aligned}$$

Para demostrar (3.62) sustituimos N por $M + e_k$, $M \in \mathbb{Z}^n$. Entonces

$$\begin{aligned}\theta(z + f_k) &= \sum_{N \in \mathbb{Z}^n} e^{\frac{1}{2}\langle BM, M \rangle + \frac{1}{2}\langle B e_k, e_k \rangle - \langle M, B e_k \rangle + \langle M, z \rangle + \langle M, f_k \rangle - \langle e_k, z \rangle - \langle e_k, f_k \rangle} \\ &= e^{-\frac{1}{2} B_{kk} - z_k} \sum_{M \in \mathbb{Z}^n} e^{\frac{1}{2}\langle BM, M \rangle + \langle M, z \rangle} = e^{-\frac{1}{2} B_{kk} - z_k} \theta(z)\end{aligned}$$

□

Por lo tanto la función $\theta(z)$ es periódica con base de periodos $2\pi i e_1, \dots, 2\pi i e_n$. Los vectores f_1, \dots, f_n son los cuasiperiodos de $\theta(z)$. Y llamamos al sistema de vectores $(2\pi i e_k, f_1)$ los periodos de la función θ .

Cualquier vector de la forma $2\pi i N + BM$, con $N, M \in \mathbb{Z}^n$, es un periodo de la función *Theta* de Riemann.

De la proposición anterior tenemos:

$$\theta(z + 2\pi i N + BM) = \sum_{N \in \mathbb{Z}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle BM, M \rangle - \langle M, z \rangle} \theta(z) \quad (3.63)$$

Los vectores de la forma $2\pi i N + BM$ forman una latiz periódica.

También podemos definir funciones θ mediante características:

Sean α y β vectores en \mathbb{R}^n arbitrarios. Sea

$$\theta[\alpha, \beta](z) = e^{\frac{1}{2}\langle B\alpha, \alpha \rangle + \langle z + 2\pi i \beta, \alpha \rangle} \theta(z + 2\pi i \beta + B\alpha) \quad (3.64)$$

Si $\alpha = \beta = 0$

$$\theta[0, 0](z) = \theta(z)$$

Y si $\alpha = M$, $\beta = N$ por (3.63)

$$\theta[N, M](z) = \theta(z)$$

Por lo tanto, es suficiente considerar las funciones $\theta[\alpha, \beta](z)$ con α y β tales que $0 < \alpha_i$ y $\beta_i < 1$. La expansión de Fourier de $\theta[\alpha, \beta](z)$ es

$$\theta[\alpha, \beta](z) = \sum_{N \in \mathbb{Z}^n} e^{\frac{1}{2}\langle B(N+\alpha), N+\alpha \rangle + \langle z + 2\pi i \beta, N+\alpha \rangle} \quad (3.65)$$

Análogo a la proposición anterior, tenemos

$$\theta[\alpha, \beta](z + 2\pi i N + BM) = e^{-\frac{1}{2}\langle BM, M \rangle - \langle z, M \rangle + 2\pi i(\langle \alpha, N \rangle - \langle \beta, M \rangle)} \theta[\alpha, \beta](z) \quad (3.66)$$

Al multiplicar funciones *Theta* del tipo (3.64), obtenemos funciones *Theta* de orden superior y se cumple la siguiente relación

$$\theta_m[\alpha, \beta](z + 2\pi i N + BM) = e^{-\frac{m}{2}\langle BM, M \rangle - m\langle z, M \rangle + 2\pi i(\langle \alpha, N \rangle - \langle \beta, M \rangle)} \theta_m[\alpha, \beta](z) \quad (3.67)$$

3.4. FUNCIÓN THETA DE RIEMANN Y SOLUCIONES ELÍPTICAS DE KDV83

La clase de funciones enteras de n variables z_1, \dots, z_n que cumplen (3.67) forman un espacio lineal de dimensión m^n . Por lo tanto existe una base para dicho espacio. Tomemos como base a las funciones

$$\theta\left[\frac{\alpha + \gamma}{m}, \beta\right](mz | mB) \quad (3.68)$$

con $\gamma \in [0, n - 1]$

Definición 3.8 Las características $[\alpha, \beta]$ para las cuales todas las coordenadas α_i, β_j son 0 o $\frac{1}{2}$ son llamadas semiperiodos. Decimos que un semiperiodo $[\alpha, \beta]$ es par si

$$4 \langle \alpha, \beta \rangle \equiv 0 \pmod{2}$$

e impar en cualquier otro caso.

Afirmación 3.9 La función $\theta[\alpha, \beta](z)$ es par o impar si $[\alpha, \beta]$ es par o impar respectivamente.

Prueba. Si sustituimos z por $-z$ y N por $(-N - 2\alpha)$ el término general de la serie (3.65) es multiplicado por

$$e^{-(M+\beta, 4\pi i \alpha)} = e^{4\pi i \langle \alpha, \beta \rangle}$$

El signo de este factor queda determinado por la paridad del número $4 \langle \alpha, \beta \rangle$. Por lo tanto se tiene la afirmación. \square

3.4.1. Funciones Theta de una variable

La teoría clásica de funciones elípticas corresponde a $n = 1$. La matriz de Riemann que corresponde al caso $n = 1$ es la matriz de una sola entrada $B_{11} = b$ tal que $\text{Re}(b) < 0$. La notación usual es $b = 2\pi i \tau$ tal que $\text{Im}(\tau) > 0$, la función Theta correspondiente es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in^2 \pi \tau} \cdot e^{inz}, \text{ con } z \in \mathbb{C}$$

o bien

$$\theta(z | q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \cdot e^{i2nz}, \quad q = e^{i\pi \tau}$$

La serie converge absoluta y uniformemente para $z \in \mathcal{K}$ con $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$ compacto pues

$$|q| = e^{-\pi \text{Im}(\tau)} < 1$$

Por lo tanto $\theta(z | q)$ es entera.

Por otra parte

$$\theta(z + \pi \mid q) = \theta(z \mid q) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

entonces no tiene un segundo periodo independiente, ya que de tenerlo, por ser entera sería constante.

Aun así podemos encontrar relaciones interesantes entre $\theta(z + \pi\tau \mid q)$ y $\theta(z \mid q)$, veamos

$$\begin{aligned} \theta(z + \pi\tau \mid q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \cdot e^{i2n(z+\pi\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \cdot e^{i2n\pi\tau} \cdot e^{i2nz} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2+2n} \cdot e^{i2nz} = q^{-1} e^{-i2z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1)^2} \cdot e^{i(n+1)2z} = \\ &= q^{-1} \cdot e^{-i2z} \cdot \theta(z \mid q) \end{aligned}$$

A $\pi\tau$ se le llama un cuasiperiodo y decimos que $\theta(z \mid q)$ es cuasi-doblemente periódica con factor de periodicidad o multiplicador: $q^{-1} \cdot e^{-i2z}$.

Definimos

- $\theta_4(z \mid q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cdot e^{i2nz} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cdot \cos(2nz)$
- $\theta_3(z \mid q) = \theta_4\left(z + \frac{\pi}{2} \mid q\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{i2nz} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cdot \cos(2nz)$
- $\theta_1(z \mid q) = -ie^{i(z+\frac{\pi\tau}{4})} \cdot \theta_4\left(z + \frac{\pi\tau}{4} \mid q\right) =$
 $= -ie^{i(z+\frac{\pi\tau}{4})} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cdot e^{in\pi\tau} \cdot e^{i2nz} =$
 $= -ie^{i(z+\frac{\pi\tau}{4})} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+n} \cdot e^{in\pi\tau} \cdot e^{i2nz} =$
 $= -i \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \cdot e^{i(2n+1)z} =$
 $= -i \cdot q^{1/4} e^{iz} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \cdot \text{sen}((2n+1)z)$
- $\theta_2(z \mid q) = \theta_1\left(z + \frac{\pi}{2} \mid q\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \cdot \text{sen}((2n+1)z)$

En términos de características

$$\begin{aligned} i\theta_1(z) &= \theta\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right](z) \\ \theta_2(z) &= \theta\left[\frac{1}{2}, 0\right](z) \\ \theta_3(z) &= \theta[0, 0](z) \\ \theta_4(z) &= \theta\left[0, \frac{1}{2}\right](z) \end{aligned} \tag{3.69}$$

3.4. FUNCIÓN THETA DE RIEMANN Y SOLUCIONES ELÍPTICAS DE KDV85

Las funciones $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ y θ_4 son enteras para cada $\tau \in H^+$ y son funciones pares en z a excepción de θ_1 .

Cada θ_j es función periódica de z con periodo π , es decir

$$\theta_j(z + \pi | q) = \theta_j(z | q)$$

θ_4 tiene cuasiperiodo $\pi\tau$ y factor de periodicidad $-q^{-1} \cdot e^{-i2z}$, que heredan θ_1, θ_2 y θ_3 .

$$\begin{aligned} \theta_4(z + \pi\tau | q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cdot e^{i2nz} \cdot e^{i2n\pi\tau} = \\ &= q^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2} \cdot e^{i2nz} = \\ &= -q^{-1} \cdot e^{-i2z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} q^{(n+1)^2} \cdot e^{i2(n+1)z} = \\ &= -q^{-1} \cdot e^{-i2z} \cdot \theta_4(z | q). \end{aligned}$$

Observación 3.10 Si $\theta_j(z_0; q) = 0$ entonces $\theta_j(z_0 + k\pi\tau; q) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Prueba. Inmediata del comentario anterior. □

De hecho los ceros de θ_1 son los vértices de la latiz $z = 2\pi im + bn$. Sabiendo esto, podemos encontrar fácilmente los ceros de las demás funciones, en particular θ_3 tiene ceros en los puntos de la forma $z = \pi i + b/2 + 2\pi im + bn$ y no hay mas ceros. Veamos porque.

Sea Q el paralelogramo con vértices en $a, a + \pi, a + \pi\tau$ y $a + \pi + \pi\tau$, de tal forma que $\theta_4(z; q) \neq 0$ para $z \in \partial Q$.

Por el principio del argumento tenemos que el número de ceros buscados esta dado por

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} \frac{\theta'_j(z; q)}{\theta_j(z; q)} dz$$

Una parametrización de ∂Q esta dada por:

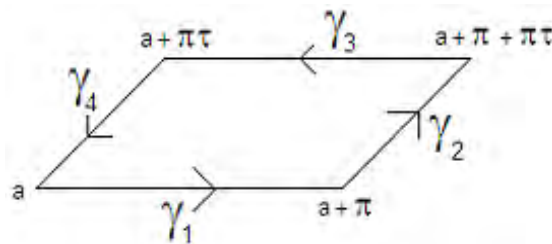


figura2

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= a + t \cdot \pi \\ \gamma_2(t) &= a + \pi + t \cdot \pi \cdot \tau \\ \gamma_3^{-1}(t) &= \gamma_1(t) + \pi \cdot \tau \\ \gamma_4^{-1}(t) &= \gamma_2(t) - \pi\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_{\gamma_3} \frac{\theta'_4(z; q)}{\theta_4(z; q)} dz = \int_{\gamma_1} \frac{\theta'_4(z + \pi\tau; q)}{\theta_4(z + \pi\tau; q)} dz$$

Por otra parte derivando

$$\theta'_4(z + \pi\tau | q) = \frac{d}{dz} \theta_4(z + \pi\tau | q) = -q^{-1} \cdot e^{-i2z} \cdot \theta'_4(z | q) + 2iq^{-1} \cdot e^{-i2z} \cdot \theta_4(z | q)$$

Por lo tanto

$$\frac{\theta'_4(z + \pi\tau | q)}{\theta_4(z + \pi\tau | q)} = \frac{-q^{-1} \cdot e^{-i2z} \cdot \theta'_4(z | q)}{-q^{-1} \cdot e^{-i2z} \cdot \theta_4(z | q)} + \frac{2iq^{-1} \cdot e^{-i2z} \cdot \theta_4(z | q)}{-q^{-1} \cdot e^{-i2z} \cdot \theta_4(z | q)}$$

Regresando a la integral anterior obtenemos

$$\int_{\gamma_3} \frac{\theta'_4(z; q)}{\theta_4(z; q)} dz = - \int_{\gamma_1} \frac{\theta'_4(z; q)}{\theta_4(z; q)} dz + 2i \int_{\gamma_1} dz = - \int_{\gamma_1} \frac{\theta'_4(z; q)}{\theta_4(z; q)} dz + 2i\pi$$

y por periodicidad tenemos que

$$\int_{\gamma_2 + \gamma_4} \frac{\theta'_4(z; q)}{\theta_4(z; q)} dz = 0$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} \frac{\theta'_4(z; q)}{\theta_4(z; q)} dz = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\gamma_1} \frac{\theta'_4(z; q)}{\theta_4(z; q)} dz + \int_{\gamma_2 + \gamma_4} \frac{\theta'_4(z; q)}{\theta_4(z; q)} dz + \int_{\gamma_3} \frac{\theta'_4(z; q)}{\theta_4(z; q)} dz \right] = 1.$$

Es decir, $\theta_4(z)$ tiene exactamente un cero en Q y dicho cero, que denotaremos por z_o , es simple porque la integral lo cuenta con multiplicidad (El análisis es análogo para $\theta_1, \theta_2, \theta_3$).

Recordemos que si f es una función elíptica con periodos $2w_1, 2w_2$; Q un paralelogramo fundamental con vértices en $a, a + 2w_1, a + 2w_2$ y $a + 2w_1 + 2w_2$ con a tal que f no contenga ceros ni polos en ∂Q entonces

$$\int_{\partial Q} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

Otra manifestación de que las funciones θ_j no son doblemente periódicas. (Por periodicidad y por principio del argumento el número de ceros de f en Q es igual al número de polos de f en Q)

3.4.2. Toros Abelianos

Afirmación 3.11 *Los vectores $2\pi ie_1, \dots, 2\pi ie_n, f_1, \dots, f_n$ elementos de $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ (definidos en (3.58) y (3.59)) son linealmente independientes sobre el campo de los números reales.*

Prueba. Supongamos que existe una combinación lineal

$$2\pi i \sum \lambda_k e_k + \sum \mu_k f_k = 0, \quad \lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R} \quad (3.70)$$

Por (3.60) tenemos que la parte real de ésta combinación lineal es de la forma

$$\operatorname{Re}(B) \sum \mu_k e_k = 0$$

Por lo tanto $\mu_k = 0$ para toda k ya que la matriz B es no singular. Por lo tanto, de (3.70), tenemos que $\lambda_k = 0$ para toda k . Así, hemos demostrado la afirmación. \square

Sea \mathcal{T} la latiz generada por los vectores $(2\pi ie_k, f_1)$. Los vectores de \mathcal{T} son de la forma

$$2\pi iN + BM, \quad N, M \in \mathbb{Z} \quad (3.71)$$

Ésta es precisamente la latiz periódica de la función *theta* descrita a partir de (3.63). Es conveniente pensar en el cociente $\mathbb{R}^{2n}/\mathcal{T}$ o lo que es lo mismo \mathbb{C}^n/\mathcal{T} : T^{2n} , el toro de dimensión $2n$ (ver [Fe]). Denotaremos a dicho toro como $T^{2n}(B)$, ya que depende de la matriz no singular B , dicho toro es llamado *Toro Abeliano*. Las funciones meromorfas en éste toro se llaman *funciones Abelianas*. Es decir, las *funciones Abelianas* son funciones con $2n$ periodos distintos de n variables complejas. Por lo tanto, el cociente de dos funciones θ del mismo orden con las mismas características es univaluada en $T^{2n}(B)$ y por lo tanto es una función *Abeliana*.

Sea $(2\pi ie'_k, f'_k)$ otra base de \mathcal{T} , donde $f'_k = B'e'_k$ y $B' = (B'_{jk})$ es otra matriz de Riemann. Para cambiar de la base $(2\pi ie_k, f_1)$ a la base $(2\pi ie'_k, f'_k)$ (y viceversa) lo hacemos a través de la matriz (con coeficientes enteros)

$$\begin{aligned} 2\pi ie'_i &= \sum_j d_{ij} 2\pi ie_j + c_{ij} f_j \\ f'_i &= \sum_j b_{ij} 2\pi ie_j + a_{ij} f_j \end{aligned} \quad (3.72)$$

con $a = (a_{ij})$, $b = (b_{ij})$, $c = (c_{ij})$ y $d = (d_{ij})$ matrices de $n \times n$ con coeficientes enteros y

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \quad (3.73)$$

y

$$B' = 2\pi i(aB + 2\pi ib)(cB + 2\pi id)^{-1} \quad (3.74)$$

Como la matriz B' es una matriz de Riemann, entonces la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ debe ser una matriz simpléctica:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^T & b^T \\ c^T & d^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

Decimos que dos matrices de Riemann B y B' son equivalentes si están relacionadas mediante transformaciones de la forma (3.74) y (3.75) ya que determinan el mismo toro Abeliiano $T^{2n}(B) = T^{2n}(B')$.

Las transformaciones (3.74) y (3.75) correspondientes a las funciones θ quedan de la siguiente forma:

$$\theta[\alpha', \beta'] = k\sqrt{\det(M)} e^{\frac{1}{2} \sum_{i \leq j} z_i z_j \frac{\partial \ln(\det(M))}{\partial B_{ij}}} \theta[\alpha, \beta](z|B) \quad (3.76)$$

$$M = cB + 2\pi i d, \quad 2\pi i z = z' M \quad (3.77)$$

$$[\alpha', \beta'] = [\alpha, \beta] \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \text{diag}[cd^T, ab^T]$$

con k constante independiente de z y B (para ver la demostración de éstas transformaciones consulte [Ig])

Observación 3.12 Sea $B = (B_{jk})$ una matriz de $n \times n$ tal que

$$B = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & B'' \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

donde B' y B'' son matrices de Riemann de $k \times k$ y $l \times l$ respectivamente. Entonces el toro correspondiente $T^{2n}(B)$ se separa en el producto directo de dos toros abelianos

$$T^{2n}(B) = T^{2k}(B') \times T^{2l}(B'') \quad (3.79)$$

La función Theta correspondiente también se separa en el producto de funciones Theta:

$$\theta(z|B) = \theta(z'|B')\theta(z''|B'') \quad (3.80)$$

$$z = (z_1, \dots, z_n)$$

$$z' = (z_1, \dots, z_k)$$

$$z'' = (z_{k+1}, \dots, z_n)$$

Definición 3.13 Una matriz de Riemann es descomponible si mediante transformaciones del tipo (3.74) y (3.75) se puede descomponer en bloques como (3.78). Análogamente usamos el término Toro Abeliiano descomponible (3.79) y Función Theta descomponible (3.80). En caso contrario se dice que son indescomponibles.

En el caso en que el toro abeliiano $T^{2n}(B)$ sea indescomponible se cumple que en $T^{2n}(B)$ no hay funciones Abelianas (no constantes) que dependan de un menor

3.4. FUNCIÓN THETA DE RIEMANN Y SOLUCIONES ELÍPTICAS DE KDV89

número de variables. Es decir, si $f(z)$ es una función abeliana en $T^{2n}(B)$ (toro indescomponible) tal que su derivada con respecto a alguna dirección es cero, $\sum_{i=1}^n U_i \frac{\partial f}{\partial z_i} = 0$, entonces $f = cte.$

Más aun, tenemos el siguiente teorema debido a *Lefschetz* ([GH])

Teorema 3.14 *Todo toro Abeliano es una variedad algebraica*

Prueba. Consideremos el caso $n = 1$. En éste caso cualquier toro T^2 queda determinado por sus periodos 2ω y $2\omega'$ ($\text{Im}(w/w') > 0$)

La función \mathcal{P} de Weierstrass correspondiente es:

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{[z - 2m\omega - 2n\omega']^2} - \frac{1}{[2m\omega + 2n\omega']^2} \quad (3.81)$$

La serie (3.81) converge uniformemente en compactos de $\mathbb{C} \setminus \{2m\omega + 2n\omega'\}$ (consulte [Fe], p.47), por lo tanto $\mathcal{P}(z)$ es una función meromorfa en z con polos dobles en cada vértice de la latiz. También es doblemente periódica:

$$\mathcal{P}(z + 2m\omega + 2n\omega') = \mathcal{P}(z) \quad , \quad n, m \in \mathbb{Z} \quad (3.82)$$

Su derivada, $\mathcal{P}'(z)$, también es doblemente periódica. Sean

$$g_2 = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{60}{[2m\omega + 2n\omega']^4} \quad (3.83)$$

$$g_3 = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{140}{[2m\omega + 2n\omega']^6}$$

Entonces la expansión de Laurent de $\mathcal{P}(z)$ y $\mathcal{P}'(z)$ en una vecindad de $z = 0$ tiene la forma

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2 z^2}{20} + \frac{g_3 z^4}{28} + \dots \quad (3.84)$$

$$\mathcal{P}'(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{g_2 z}{10} + \frac{g_3 z^3}{7} + \dots \quad (3.85)$$

De éstas expresiones se sigue que la función

$$(\mathcal{P}'(z))^2 - [4\mathcal{P}(z)^3 - g_2\mathcal{P}(z) - g_3]$$

no tiene un polo en el origen. Como es doblemente periódica, entonces es entera en todo el plano complejo y por lo tanto es constante. De hecho es constante cero (para más detalles consulte [Fe], Cap.6). Por lo tanto, la función de Weierstrass satisface la ecuación diferencial

$$(\mathcal{P}'(z))^2 = 4\mathcal{P}(z)^3 - g_2\mathcal{P}(z) - g_3$$

Necesitamos el siguiente resultado para completar la demostración: □

Afirmación 3.15 *El mapeo $x(z) = \mathcal{P}(z)$, $y(z) = \mathcal{P}'(z)$ establece un isomorfismo de toro $T^2 = \mathbb{C}/(2m\omega + 2n\omega')$ con la superficie de Riemann Γ asociada a la función algebraica*

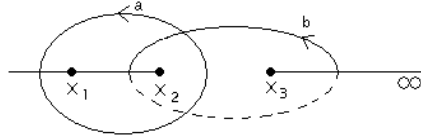
$$y^2 = 4x^3 - gx - g_3 \tag{3.86}$$

Prueba. Construiremos el mapeo inverso de la curva algebraica compleja (3.86) en el toro T^2 de la siguiente forma:

Sea $P = (x, y)$ un punto de la superficie de Riemann Γ .y sea

$$z = z(P) = \int_{\infty}^P \frac{dx}{y} = \int_{\infty}^P \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - gx - g_3}} \tag{3.87}$$

El contorno de integración de (3.87) está en la superficie de Riemann Γ .



$$4x_i^3 - g_2x_i - g_3 = 0 .$$

(La parte punteada del ciclo b corresponde a la hoja inferior $(P, -)$ de la superficie de Riemann Γ)

Éste contorno es único, módulo la suma de una combinación lineal integral de los ciclos base a y b que se muestran en la figura anterior:

$$z(P) \sim z(P) + m \oint_a \frac{dx}{y} + n \oint_b \frac{dx}{y}$$

Pero

$$\oint_a \frac{dx}{y} = 2\omega \quad \text{y} \quad \oint_b \frac{dx}{y} = 2\omega'$$

Por lo tanto, el mapeo (3.87) manda la curva (3.86) en el toro T^2 . Los mapeos

$$z \rightarrow P = (\mathcal{P}(z), \mathcal{P}'(z))$$

y

$$P \rightarrow \int_{\infty}^P \frac{dx}{y}$$

inversos uno del otro. Por lo tanto hemos demostrado el teorema para el caso $n = 1$. Para una prueba del teorema para el caso general consulte [Ma]. \square

3.4. FUNCIÓN THETA DE RIEMANN Y SOLUCIONES ELÍPTICAS DE KDV91

Observación 3.16 Una expresión explícita entre la función de Weierstrass $\mathcal{P}(z)$ y las funciones Theta consideradas en la sección anterior está dada por

$$\mathcal{P}(z) = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \ln(\theta_1(z)) + c \quad (3.88)$$

Donde c es una constante

Prueba. Inmediata de la periodicidad de $\theta_1(z)$ y de la ubicación de sus ceros, ver [Fe] capítulo 8. \square

3.4.3. Teoremas de adición para las funciones Theta

Las funciones Theta están construidas a partir de sistemas complicados de relaciones algebraicas, llamados teoremas de adición- Todos ellos son relaciones entre series formales de Fourier. Enunciaremos dos de los teoremas más importantes. De una matriz de Riemann B podemos construir dos tipos de funciones Theta :

$$\begin{aligned} \theta[\alpha, \beta](z) &\equiv \theta[\alpha, \beta](z|B) \\ \widehat{\theta}[\alpha, \beta](z) &\equiv \theta[\alpha, \beta](z|2B) \end{aligned} \quad (3.89)$$

Teorema 3.17 (Teorema de Adición I) Sean α, β, γ y ε elementos de \mathbb{R}^n arbitrarios. Entonces

$$\begin{aligned} \theta[\alpha, \gamma](z_1 + z_2)\theta[\beta, \varepsilon](z_1 - z_2) &= \\ &= \sum_{2\delta \in (\mathbb{Z}_2)^n} \widehat{\theta}\left[\frac{\alpha + \beta}{2} + \delta, \gamma + \varepsilon\right](2z_1)\widehat{\theta}\left[\frac{\alpha - \beta}{2} + \delta, \gamma - \varepsilon\right](2z_2) \end{aligned} \quad (3.90)$$

Teorema 3.18 (Teorema de Adición II) Sean $[m_i] = [m'_i, m''_i]$ ($i = 1, 2, 3, 4$) elementos de \mathbb{R}^{2n} arbitrarios. Entonces

$$\begin{aligned} \theta[m_1](z_1)\theta[m_2](z_2)\theta[m_3](z_3)\theta[m_4](z_4) &= \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{2a \in (\mathbb{Z}_2)^{2n}} e^{-4\pi i \langle m'_1, a'' \rangle} \theta[n_1 + a](w_1) \cdots \theta[n_4 + a](w_4) \end{aligned} \quad (3.91)$$

con $a = (a', a'')$

$$(z_1, \dots, z_4) = (w_1, \dots, w_4)T \quad (3.92)$$

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(cada 1 en la matriz T corresponde a la matriz identidad de $n \times n$ o $2n \times 2n$)

$$[n_i] = [n'_i, n''_i] \quad (3.93)$$

$$(m_1, \dots, m_4) = (n_1, \dots, n_4)T$$

Omitiremos la demostración de ambos teoremas (se puede encontrar en [D]₂)' Estas son las herramientas necesarias para obtener soluciones de la forma (3.54).

3.4.4. Representación de soluciones de KdV en términos de funciones *Theta*

Ahora sustituimos la expresión (3.54).en (3.53) obteniendo

$$2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \ln(\theta) = \frac{1}{4} \left(24 \frac{\partial^2 \ln(\theta)}{\partial x^2} \frac{\partial^3 \ln(\theta)}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^5 \ln(\theta)}{\partial x^5} \right) \quad (3.94)$$

con $\theta = \theta(z)$, $z = Ux + Wt + z_o$ un vector arbitrario y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \sum U_i \frac{\partial}{\partial z_i} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \sum W_i \frac{\partial}{\partial z_i} \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos escribir la expresión (3.94) como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-2 \frac{\partial^2 \ln(\theta)}{\partial x \partial t} + 3 \left(\frac{\partial^2 \ln(\theta)}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 \ln(\theta)}{\partial x^4} \right] = 0 \quad (3.95)$$

Si la matriz (B_{jk}) es indescomponible (Ver Capítulo I [S]) entonces de (3.95)

$$-2 \frac{\partial^2 \ln(\theta)}{\partial x \partial t} + 3 \left(\frac{\partial^2 \ln(\theta)}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 \ln(\theta)}{\partial x^4} = 4d$$

con d una constante. Lo que nos lleva a la siguiente relación

$$\theta_{xxxx}\theta - 4\theta_{xxx}\theta_x + 3(\theta_{xx})^2 - 4\theta_{xt}\theta + 4\theta_x\theta_t + 8d\theta^2 = 0 \quad (3.96)$$

para obtener un sistema finito de ecuaciones en U , W y la constante d

El **Teorema de Adición I** (Sección 3.4.3), en este caso toma la forma

$$\theta(z^1)\theta(z^2) = \sum_{n \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^n} \widehat{\theta}[s](w^1)\widehat{\theta}[s](w^2) \quad (3.97)$$

$$z^1 + z^2 = w^1, \quad z^1 - z^2 = w^2 \quad (3.98)$$

y

$$\widehat{\theta}[s](w) = \theta[s, 0](w|2B) \quad (3.99)$$

La notación $s \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^n$ significa que la suma en (3.97) es sobre todos los semiperiodos $s = (s_1, \dots, s_n)$, $s_i = 0, \frac{1}{2}$.

Los valores de las funciones $\widehat{\theta}[s](w)$ y sus derivadas

$$\widehat{\theta}_{ij\dots}[s](w) \equiv \frac{\partial}{\partial w_i} \frac{\partial}{\partial w_j} \dots \widehat{\theta}[s](w)$$

en $w = 0$ son llamados 'constantes θ ' y simplemente escribimos

$$\widehat{\theta}_{ij\dots}[s] \equiv \frac{\partial}{\partial w_i} \frac{\partial}{\partial w_j} \dots \widehat{\theta}[s](0)$$

3.4. FUNCIÓN THETA DE RIEMANN Y SOLUCIONES ELÍPTICAS DE KDV93

Lema 3.19 La ecuación (3.96) es equivalente al siguiente sistema de 2^n ecuaciones en el vector $U = (U_1, \dots, U_n)$, $W = (W_1, \dots, W_n)$ y la constante n :

$$\partial_U^4 \theta[s] - \partial_U \partial_W \widehat{\theta}[s] + d\widehat{\theta}[s] = 0 \quad (3.100)$$

Las ecuaciones están numeradas por $s \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^n$. Hemos introducido la notación

$$\begin{aligned} \partial_U^4 \theta[s] &= \sum_{i,j,k,l} U_i U_j U_k U_l \widehat{\theta}_{ijkl}[s] \\ \partial_U \partial_W \widehat{\theta}[s] &= \sum_{i,j} U_i W_j \widehat{\theta}_{ij}[s] \end{aligned} \quad (3.101)$$

Prueba. Introducimos los operadores

$$\begin{aligned} X_{z^1} &= \sum U_j \frac{\partial}{\partial z_j^1} \quad , \quad X_{z^2} = \sum U_j \frac{\partial}{\partial z_j^2} \\ T_{z^1} &= \sum W_j \frac{\partial}{\partial z_j^1} \quad , \quad T_{z^2} = \sum W_j \frac{\partial}{\partial z_j^2} \end{aligned} \quad (3.102)$$

y análogamente los operadores $X_{w^1}, X_{w^2}, T_{w^1}, T_{w^2}$ sustituyendo z por w . Éstos operadores están relacionados de la siguiente forma

$$\begin{aligned} X_{z^1} &= X_{w^1} + X_{w^2} \quad , \quad X_{z^2} = X_{w^1} - X_{w^2} \\ T_{z^1} &= T_{w^1} + T_{w^2} \quad , \quad T_{z^2} = T_{w^1} - T_{w^2} \end{aligned} \quad (3.103)$$

Entonces (3.96) se puede escribir como

$$\left[(X_{z^1}^4 - 4X_{z^1}^3 X_{z^2} + 3X_{z^1}^2 X_{z^2}^2 + 4X_{z^1} T_{z^2} - 4X_{z^1} T_{z^1} + 8d) \theta(z^1) \theta(z^2) \right] \Big|_{\substack{w^1=2z \\ w^2=0}} = 0 \quad (3.104)$$

Las 2^n funciones $\theta[s](2z)$, $s \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^n$, son linealmente independientes (forman una base para el espacio de funciones θ de orden dos (Ver Sección 3.4.1)

Igualando los coeficientes de esta ecuación a cero obtenemos el sistema (3.100). Lo cual prueba el Lema. \square

El sistema 3.100 es invariante bajo los siguientes reescalamientos:

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \lambda U \\ W &\rightarrow \lambda^2 W \\ d &\rightarrow \lambda^4 d \end{aligned} \quad (3.105)$$

Resolvamos ahora el sistema (3.100) para $n = 1$ y 2.

- $n = 1$. Entonces (3.100) toma la forma

$$\begin{aligned} U^4 \widehat{\theta}^{(4)}[0] - UW \widehat{\theta}''[0] + d\widehat{\theta}[0] &= 0 \\ U^4 \widehat{\theta}^{(4)}\left[\frac{1}{2}\right] - UW \widehat{\theta}''\left[\frac{1}{2}\right] + d\widehat{\theta}\left[\frac{1}{2}\right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.106)$$

Debido a la invariancia de (3.105) podemos asumir que $U = 1$, entonces

$$W = \frac{\widehat{\theta}^{(4)}[0]\widehat{\theta}[\frac{1}{2}] - \widehat{\theta}^{(4)}[\frac{1}{2}]\widehat{\theta}[0]}{\widehat{\theta}''[0]\widehat{\theta}[\frac{1}{2}] - \widehat{\theta}''[\frac{1}{2}]\widehat{\theta}[0]} \quad (3.107)$$

Una forma sencilla de encontrar la expresión para W se obtiene sustituyendo en (3.96) θ por la función impar $\theta_1(z) = \theta_1[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (ver (3.69)). Sustituimos $z = 0$ en (3.96) (con $\theta \rightarrow \theta_1$) y encontramos debido a la imparidad ($U = 1$)

$$W = -\frac{\theta_1'''(0)}{\theta_1'(0)} \quad (3.108)$$

Antes de resolver (3.100) para género $n \geq 2$ imponemos la siguiente condición de no singularidad a la matriz B_{jk} .

$$\text{rango}(\widehat{\theta}_{11}[s], \widehat{\theta}_{12}[s], \dots, \widehat{\theta}_{nn}[s], \widehat{\theta}[s]) = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \quad (3.109)$$

Los renglones de la matriz en paréntesis están numerados por el vector $s \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_n)^2$. No singularidad implica indescomponibilidad (para una matriz descomponible $B = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & B'' \end{pmatrix}$ (3.109) tiene cero columnas). La condición de no singularidad la satisfacen las matrices de Riemann de Superficies de Riemann (ver [D]₂ p.67)

- $n = 2$. Reescribimos (3.100) de la forma

$$U_1 W_1 \widehat{\theta}_{11}[s] + (U_1 W_2 + U_2 W_1) \widehat{\theta}_{12}[s] + U_2 W_2 \widehat{\theta}_{22}[s] - d\widehat{\theta}[s] = \partial_U^4 \widehat{\theta}[s] \quad (3.110)$$

con $s \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^2$. Aquí la no singularidad es equivalente a que la invertibilidad de la matriz de 4×4

$$(\widehat{\theta}_{11}[s], \widehat{\theta}_{12}[s], \widehat{\theta}_{22}[s], \widehat{\theta}[s]) \quad (3.111)$$

(los renglones están indexados por la característica $s \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^2$). Sea $(a_s^{11}, a_s^{12}, a_s^{22}, a_s)$ la matriz inversa. Entonces de (3.110) tenemos

$$W_1 = \frac{1}{U_1} \sum_{s \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^2} a_s^{11} \partial_U^4 \widehat{\theta}[s] = \frac{Q_{11}(U)}{U_1} \quad (3.112)$$

$$W_2 = \frac{1}{U_2} \sum_{s \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^2} a_s^{22} \partial_U^4 \widehat{\theta}[s] = \frac{Q_{22}(U)}{U_2}$$

$$U_1 W_2 + U_2 W_1 = W_1 = \sum_{s \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^2} a_s^{12} \partial_U^4 \widehat{\theta}[s] = Q_{12}(U)$$

3.4. FUNCIÓN THETA DE RIEMANN Y SOLUCIONES ELÍPTICAS DE KDV95

Sustituyendo W_1 y W_2 en la última relación, obtenemos la ecuación homogénea de grado 6 en $U = (U_1, U_2)$:

$$P(U_1, U_2) = U_1^2 Q_{22}(U) - U_1 U_2 Q_{12}(U) + U_2^2 Q_{11}(U) = 0 \quad (3.113)$$

donde los polinomios $Q_{ij}(U)$ están definidos en (3.112). De la matriz de Riemann B_{jk} obtenemos 6 vectores (módulo una constante). Después de esto podemos encontrar por (3.112) y (3.113), da una solución para la ecuación de KdV (3.53) para cualquier z_0 .

Teorema 3.20 *Sea B_{jk} una matriz de Riemann de 2×2 en posición general. Entonces la fórmula (3.54), donde $\theta(z) = \theta(z|B)$ y los vectores U y W quedan determinados por (3.112) y (3.113), da una solución para la ecuación de KdV (3.53) para cualquier z_0 .*

Soluciones en funciones Elípticas

En la sección anterior se demostró que las soluciones de la ecuación de KdV (de orden 1 y 2) se pueden escribir en términos de las funciones *Theta*. En esta sección daremos condiciones para que éstas soluciones sean elípticas.

Encontramos en (3.88) que la función $\mathcal{P}(z)$ se escribe como

$$\mathcal{P}(z) = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \ln(\theta_1(z)) + c \quad (3.114)$$

Esta función es doblemente periódica, con periodo real \mathcal{T} y periodo imaginario \mathcal{T}' :

$$\mathcal{T} = \frac{b}{U_1}, \quad \mathcal{T}' = \frac{2\pi i}{U_1}$$

con b la única entrada de la matriz de Riemann correspondiente y U_1 como definida en **Lema 3.19**

En general, un potencial $u(x)$ con una superficie de Riemann Γ ($y^2 = \prod_{\alpha} (\lambda - E_{\alpha})$) y matriz de Riemann $B = (2\pi i \delta_{kq}, b_{kq})$ tiene un conjunto de periodos reales

$$\mathcal{T}_q^{-1} = \sum_j b^{jq} U_j, \quad b^{jq} b_{qs} = \delta_{sj}$$

(con b^{jq} la entrada jq de la matriz inversa de la matriz de Riemann B .) y un conjunto de periodos imaginarios

$$\mathcal{T}'_q = \frac{2\pi i}{U_q}$$

Por lo tanto, un potencial $u(x)$ de este tipo es una función cuasiperiódica en la variable compleja x . Para que el potencial $u(x)$ sea periódico en la variable real

x , es necesario y suficiente

$$\sum_{q=1}^n m_{qk} \mathcal{T}_q = 0, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (3.115)$$

con $m_{qk} \in \mathbb{Z}$ para toda k, q . Pero no se puede concluir de (3.115) algo sobre los periodos imaginarios \mathcal{T}'_q . Por lo tanto, el potencial $u(x)$ es una función cuasiperiódica de la variable compleja x . Para que el potencial sea doblemente periódico (y por lo tanto, se puede expresar en términos de funciones elípticas), es necesario y suficiente pedir, además de (3.115), que:

$$\sum_{q=1}^n m'_{qk} \mathcal{T}'_q = 0, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (3.116)$$

Las relaciones (3.115) y (3.116) para un grupo de periodos dependen únicamente de la superficie Γ .

En caso de que la solución sea una función elíptica entonces las integrales hiperelípticas que aparecen (3.52) se pueden reducir a integrales elípticas y por lo tanto el potencial se puede expresar en términos de la función $\mathcal{P}(z)$ [En].

Las soluciones de KdV con condiciones iniciales $u(x, 0) = 6\mathcal{P}(z)$ Los potenciales elípticos de esta familia son de la forma [DMN]

$$u(x - x_o) + cte \quad (3.117)$$

con $u(x, 0) = 6\mathcal{P}(z)$. Sabemos que las soluciones de KdV son funciones elípticas. De este hecho y de la condición inicial, obtenemos que las funciones elípticas de KdV con 2 intervalos finitos de inestabilidad son sumas de tres ondas simples

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^3 2\mathcal{P}(z - \alpha_i(t)) \quad (3.118)$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i(t) = 0, \quad t = \int_0^{\alpha_1 - \alpha_3} \frac{dz}{12\sqrt{g_2 - 3\mathcal{P}^2(z)}} \quad (3.119)$$

$$\alpha_2 - \alpha_3 = \frac{1}{2}\mathcal{P}^{-1}[-\mathcal{P}(\alpha_1 - \alpha_3) + \sqrt{g_2 - 3\mathcal{P}^2(\alpha_1 - \alpha_3)}] \quad (3.120)$$

que se mueven sin cambiar su forma, con velocidades variables y fases $\alpha_i(t)$ que están relacionadas de manera complicada.

Apéndice A

Motivación: Par de Lax

Motivación:

Dada una matriz simétrica, ¿Cómo encontramos sus matrices similares?

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, entonces $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Sea $U(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \text{sen}(t) \\ -\text{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$, entonces

$A \sim B(t) = U^*(t) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U(t)$

Si A_o es una matriz simétrica de $n \times n$, entonces las matrices relacionadas con A_o son de la forma: $A(t) = U^*(t)A_oU(t)$

Supongamos que U es tal que

$$A_o = U^*(t)A(t)U(t) \quad , \quad U^*(0)U(0) = I \quad (\text{A.1})$$

Entonces, derivando con respecto a t obtenemos

$$0 = U^*(t)A(t)\dot{U}(t) + U^*(t)\dot{A}(t)U(t) + \dot{U}^*(t)A(t)U(t)$$

o

$$\dot{A}(t) = -U(t)\dot{U}^*(t)A(t) - A(t)\dot{U}(t)U^*(t) \quad (\text{A.2})$$

por (A.1)

$$\dot{U}U^* = -U\dot{U}^* \quad (\text{A.3})$$

por lo tanto (A.2) queda como

$$\dot{A} = \dot{U}U^*A - A\dot{U}U^* \quad (\text{A.4})$$

Sea $B = \dot{U}U^*$, entonces

$$\dot{A} = BA - AB \quad (\text{A.5})$$

Por lo tanto, B es tal que

$$B^* = U(t) \left(\dot{U}(t) \right)^* = -\dot{U}(t)U^*(t) = -B \quad (\text{A.6})$$

(la penúltima desigualdad es resultado de (A.3)). Por lo tanto B es antisimétrica.

Supongámos ahora $B(t)$ antisimétrica y $\dot{A} = BA - AB$ y definimos $U(t)$ como la solución fundamental de

$$\dot{U}(t) = BU(t) \quad (\text{A.7})$$

Observemos

$$(U(t)U^*(t))' = \dot{U}(t)U^*(t) + U(t)(\dot{U}^*(t)) \quad (\text{A.8})$$

transponiendo (A.7) y sustituyendo en (A.8) obtenemos

$$(U^*(t)U(t))' = B + U(t)U^*(t)B^* = B + B^* = 0$$

La última igualdad es por (A.6)

Por lo tanto

$$U^*(t)U(t) = U^*(0)U(0) = I \quad (\text{A.9})$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} [U^*(t)A(t)U(t)]' &= U^*(t)A(t)\dot{U}(t) + U^*(t)\dot{A}(t)U(t) + \dot{U}^*(t)A(t)U(t) = \\ &= U^*(t)A(t)BU(t) + U^*(t)[BA - AB]U(t) + U^*B^*AU = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$U^*(t)A(t)U(t) = A(0)$$

con $A(0)$ simétrica

Apéndice B

Deducción de la ecuación KdV

El descubrimiento de las ondas solitarias en aguas poco profundas lo hizo el ingeniero inglés Scott Russell, en el Canal de Edinburgo a Glasgow en el año de 1834. Sus observaciones las reportó a la British Association for the Advancement of Science en 1844.

Russel realizó experimentos en su laboratorio, generando ondas solitarias al dejar caer un objeto pesado en un extremo de un estanque angosto.

Dedujo empíricamente que el volumen de agua en la onda es igual al volumen desplazado y que la velocidad de la onda solitaria es: $c^2 = g(h + a)$, g es la aceleración debida a la gravedad, a es la amplitud de la onda y h es la profundidad en reposo.

Para fundamentar estos resultados, Boussinesq (1871) y Rayleigh (1876) supusieron que la longitud de la onda es mucho mayor que la profundidad. A partir de las ecuaciones de movimiento para un fluido no viscoso e incompresible, dedujeron la fórmula de Russell para la velocidad. También encontraron que el perfil de la superficie del agua es:

$$\xi(x, t) = a \cdot \operatorname{sech}^2 [b(x - ct)] , \text{ con } b^{-2} = \frac{1}{3a} 4h^2(h + a), \text{ en el caso } \frac{a}{h} \ll 1.$$

La contribución de Korteweg y de Vries en 1895 fue la deducción de la ecuación de movimiento para la superficie.

A continuación presentamos una deducción de la ecuación de Korteweg y de Vries a partir de las ecuaciones de Euler para un fluido incompresible, en el caso $h \ll 1$.

Consideremos un elemento de volumen V encerrado por $S \equiv \partial V$.

$\chi(x_1, x_2, x_3)$ y t denotan la posición y el tiempo. \vec{u} , ρ y p denotan la velocidad, densidad y presión del fluido, respectivamente.

\vec{n} es la normal unitaria a S .

La masa de fluido contenida en V al tiempo t es:

$$m(t) = \iiint_{\Omega} \rho(\chi, t) d\chi$$

Como la región V no cambia en el tiempo, la tasa de cambio de la masa con respecto al tiempo es

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\chi$$

La ley de conservación de masa garantiza que el cambio en la masa se debe únicamente al flujo neto de masa a través de la frontera, es decir,

$$\frac{dm}{dt} = - \iint_S \rho(\vec{u}, \vec{n}) d\sigma$$

Del Teorema de la divergencia se sigue que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

en la región ocupada por el fluido, ya que su integral sobre cualquier parte de esa región es cero.

De manera análoga se obtiene la ecuación de balance para el momento lineal. La densidad de momento en la i -ésima dirección es ρu_i . El cambio en el momento viene de tres factores: el flujo neto de momento a través de la frontera, las fuerzas superficiales y las fuerzas volumétricas. En nuestro caso, éstas últimas son debido a la gravedad y actúan en la dirección vertical. La ecuación de balance de momento es:

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} d\chi = - \iint_S \rho u_i(\vec{u}, \vec{n}) d\sigma + \iint_S p n_i d\sigma + \iiint_{\Omega} \rho F_i d\chi$$

Procediendo como antes obtenemos las ecuaciones

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \text{div}(\rho u_i \vec{u}) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho F_i = 0$$

En el caso del agua la densidad es constante, por lo cual la ecuación de conservación de masa es

$$\text{div}(\vec{u}) = 0$$

Las ecuaciones de conservación de momento son

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i$$

para $i = 1, 2, 3$. O en forma vectorial

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \vec{k}$$

Tomando rotacional en la ecuación de momento obtenemos para $\vec{w} = \nabla \times \vec{u}$ una ecuación diferencial parcial lineal de primer orden que garantiza que $\vec{w}(\chi, t) \equiv 0$ para $t > 0$ si esta condición se cumple para $t = 0$. En este caso hay un potencial de velocidades ϕ de tal forma que $\vec{u} = \nabla\phi$. La ecuación de conservación de masa es ahora la ecuación de Laplace para el potencial de velocidades: $\Delta\phi = 0$.

Usando que $u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} u \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j} \right)^2$, obtenemos la ecuación de Bernoulli

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + \frac{1}{\rho} p + gx_3 \right) = 0$$

Como podemos absorber cualquier función de t en el potencial, se sigue que

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + \frac{1}{\rho} (p - p_o) + gx_3 = 0$$

Esta ecuación determina a la presión una vez que conocemos el potencial de velocidades. Para determinar el potencial necesitamos condiciones de frontera. En la superficie del fondo se debe tener que la componente normal de la velocidad sea cero, es decir $\frac{\partial\phi}{\partial x_3} = (x_1, x_2, 0, t) = 0$ para (x_1, x_2) en la región que forma la base del volumen ocupado por el fluido y para todo $t > 0$.

En la superficie libre tenemos dos condiciones acopladas: la velocidad normal de la superficie debe coincidir con la velocidad normal del fluido y la presión en el agua debe coincidir con la presión en el aire.

La superficie libre es de la forma $\Gamma(t) = \{\chi : f(\chi, t) = 0\}$.

Si $\Gamma(t + \Delta t)$ se ha separado de $\Gamma(t)$ una distancia Δs en χ_o en la dirección normal, es decir, $f(\chi_o, t) = 0$ y $f(\chi_o + \Delta s \vec{n}, t + \Delta t) = 0$, entonces

$$f(\chi_o + \Delta s \vec{n}, t + \Delta t) - f(\chi_o, t + \Delta t) + f(\chi_o, t + \Delta t) - f(\chi_o, t) = 0$$

Usando el Teorema del Valor Medio, dividiendo por Δt y tomando el límite cuando esta cantidad tiende a 0 obtenemos

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{|\nabla f|} \frac{\partial f}{\partial t}$$

Por otra parte, la componente normal de la velocidad es

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \frac{1}{|\nabla f|} \nabla\phi \nabla f$$

Por lo tanto, $\nabla\phi \nabla f = -\frac{\partial f}{\partial t}$.

Supondremos que no hay rompimiento de olas y por lo tanto la superficie libre es la gráfica de una función de x_1, x_2 y t , es decir

$$f(\chi, t) = x_3 - \eta(x_1, x_2, t) - h$$

Usando la identidad del párrafo anterior encontramos la ecuación para la superficie del agua:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \frac{\partial\eta}{\partial x_1} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \frac{\partial\eta}{\partial x_2} = \frac{\partial\phi}{\partial x_3}$$

Ahora usamos que los cambios en la presión del aire son pequeños para tomar $p = p_o$ en la superficie $x_3 = h + \eta(x_1, x_2, t)$, lo cual da

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta = 0$$

La región ocupada por el fluido es $\{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leq x_3 \leq h + \eta(x_1, x_2, t)\}$ y el problema completo es (A^{**})

$$i) \quad \Delta \phi = 0 \quad \text{en } 0 < x_3 < h + \eta(x_1, x_2, t)$$

$$ii) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0, t) = 0 \quad \text{para todo } t \geq 0$$

$$iii) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta = 0 \quad \text{en } x_3 = h + \eta(x_1, x_2, t)$$

$$iv) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \quad \text{en } x_3 = h + \eta(x_1, x_2, t)$$

con ϕ y η como incógnitas. En particular, la forma que adopta la superficie del agua se debe obtener como parte de la solución por lo cual (A^{**}) es un problema de frontera libre.

Supondremos que el estanque o canal es angosto y largo para ignorar la dependencia en x_2 y considerar $x_1 \in [0, \infty)$. Finalmente, usamos las variables x, z en lugar de x_1, x_3 .

Usando las longitudes características: a, l y h que son la amplitud, longitud de onda y la profundidad en reposo, definimos variables adimensionales

$$x^* = \frac{x}{l}, \quad z^* = \frac{z}{h}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{a}, \quad t^* = \frac{t}{\gamma}, \quad \phi^* = \frac{\phi}{\beta}$$

$$\text{con } \gamma = \frac{l}{\sqrt{gh}}, \quad \beta = a \cdot l \sqrt{\frac{g}{h}}$$

La superficie libre es $z^* = 1 + \alpha \eta^*$ con $\alpha = \frac{a}{h}$

Quitando asteriscos a las nuevas variables, (A^{**}) se convierte en (A^*)

$$(i) \quad \phi_{zz} = 0 \quad \text{en } 0 < z < 1 + \alpha \eta(x, t), \quad x > 0$$

$$(ii) \quad \phi_z(x, 0, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0$$

$$(iii) \quad \eta + \phi_t + \frac{\alpha}{2} (\phi_x^2 + \delta^{-2} \phi_z^2) = 0 \quad \text{en } z = 1 + \alpha \eta(x, t)$$

$$(iv) \quad \phi_z = \delta^2 (\eta_t + \alpha \phi_x \eta_x) \quad \text{en } z = 1 + \alpha \eta(x, t)$$

donde $\delta = \frac{h}{l}$. Nos interesa el régimen de poca profundidad ($h \ll l$), amplitud pequeña ($a \ll l$), onda larga ($l \gg 1$), así que $\alpha \ll 1$, $\delta \ll 1$. Tomamos $\delta^2 = O(\alpha)$, reescalamos y usamos una coordenada espacial que se mueve con velocidad 1, es decir, $\xi = \frac{\sqrt{\alpha}}{\delta} (x - t)$, $\tau = \frac{\alpha^{3/2}}{\delta} t$, $\Phi = \frac{\sqrt{\alpha}}{\delta} \phi$ para obtener (A)

$$i) \quad \Phi_{zz} + \alpha \Phi_{\xi\xi} = 0 \quad \text{en } 0 < z < 1 + \alpha \eta(\xi, \tau)$$

- ii) $\Phi_z(\xi, 0, \tau) = 0$ para $\tau \geq 0$
 iii) $\eta + \Phi_\xi + \alpha\Phi_\tau + \frac{1}{2}(\Phi_z^2 + \alpha\phi_\xi^2) = 0$ en $z = 1 + \alpha\eta(\xi, \tau)$
 iv) $\Phi_z = \alpha(-\eta_\xi + \alpha\eta_z + \alpha\Phi_\xi\eta_\xi)$ en $z = 1 + \alpha\eta(\xi, \tau)$

Suponemos expansiones de la forma

$$\begin{aligned}\Phi(\xi, z, \tau) &= \Phi_o(\xi, z, \tau) + \alpha\Phi_1(\xi, z, \tau) + O(\alpha^2) \\ \eta(\xi, \tau) &= \eta_o(\xi, \tau) + \alpha\eta_1(\xi, \tau) + O(\alpha^2)\end{aligned}$$

A orden α^0 obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial z^2} &= 0 \text{ en } 0 < z < 1 + \alpha\eta(\xi, \tau) \\ \frac{\partial \Phi_o}{\partial z}(\xi, 0, \tau) &= 0\end{aligned}$$

por lo cual $\Phi_o(\xi, z, \tau)$ no depende de z , es decir $\Phi_o = \theta_o(\xi, \tau)$. Además,

$$\eta_o(\xi, \tau) = \frac{\partial \Phi_o}{\partial \xi} \text{ en } z = 1$$

Por lo tanto

$$\eta_o(\xi, \tau) = \frac{\partial \theta_o}{\partial \xi}(\xi, \tau)$$

A orden α^1 tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial \xi^2} &= 0 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}(\xi, 0, \tau) &= 0\end{aligned}$$

por lo cual

$$\Phi(\xi, z, \tau) = -\frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 \theta_o}{\partial \xi^2}(\xi, \tau) + c(\xi, \tau)z + b(\xi, \tau)$$

Usando la condición de frontera en $z = 0$ obtenemos

$$\Phi_1(\xi, z, \tau) = \theta_1(\xi, \tau) - \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 \theta_o}{\partial \xi^2}(\xi, \tau)$$

De la primera condición de frontera en $z = 1$ obtenemos

$$\eta_1 - \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \theta_o}{\partial \xi^3} + \frac{\partial \theta_o}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_o}{\partial \xi} \right)^2 = 0 \quad (1)$$

y de la segunda se obtiene una relación de consistencia.

A orden α^2 obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} &= 0 \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}(\xi, 0, \tau) &= 0\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\Phi_2(\xi, z, \tau) = \theta_2(\xi, \tau) - \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2}(\xi, \tau) + \frac{z^4}{24} \frac{\partial^4 \theta_0}{\partial \xi^4}$$

Pero $\Sigma := \left\{ \frac{\partial \Phi_j}{\partial \xi}, \frac{\partial \Phi_j}{\partial \tau}, \frac{\partial \Phi_j}{\partial z}, \frac{\partial \eta_j}{\partial \xi}, \frac{\partial \eta_j}{\partial \tau} \right\}$ tienen segundas derivadas continuas por lo que toda $f \in \Sigma$ tiene la siguiente expansión:

$$f(\xi, 1 + \alpha\eta, \tau) = f(\xi, 1, \tau) + \alpha\eta \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, 1, \tau) + O(\alpha^2)$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} \eta_o = -\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{6} \frac{\partial^4 \theta_o}{\partial \xi^4} - \frac{\partial^2 \theta_o}{\partial \xi^2} \eta_o = -\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_o}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta_o}{\partial \xi} \frac{\partial \eta_o}{\partial \xi} \quad (2)$$

Integramos (9) con respecto a ξ , usando (8) y $\eta_o = \frac{\partial \theta_o}{\partial \xi}$ para obtener

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_o}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \theta_o}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} = -\eta_1 + \frac{\partial \theta_o}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_o}{\partial \xi} \right)^2$$

así que

$$\eta_1 - \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial \theta_o}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial \theta_o}{\partial \tau} - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \theta_o}{\partial \xi^3} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 \theta_o}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \theta_o}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_o}{\partial \xi} \right)^2$$

Es decir,

$$2 \frac{\partial \theta_o}{\partial \tau} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \theta_o}{\partial \xi^3} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \theta_o}{\partial \xi} \right)^2 = 0$$

Derivando con respecto a ξ obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial \eta_o}{\partial \tau} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \eta_o}{\partial \xi^3} + \frac{3}{2} \eta_o \frac{\partial \eta_o}{\partial \xi} = 0$$

Reescalando las variables $\tau = 6t$, $x = \xi$, $u = \frac{3}{2} \eta_o$, obtenemos la ecuación de Korteweg y de Vries

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0 \quad (3)$$

Apéndice C

Teorema de Oscilación

Los valores propios

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots \quad (\text{C.1})$$

de la ecuación de Hill

$$u''(x) + [\lambda - q(x)]u(x) = 0 \quad (\text{C.2})$$

con $q(x)$ real y periódica de periodo π tal que

$$\begin{aligned} u(0) &= u(\pi) \\ u'(0) &= u'(\pi) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

y los valores propios de (C.2) tal que

$$\begin{aligned} u(0) &= -u(\pi) \\ u'(0) &= -u'(\pi) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

forman sucesiones tales que

$$\lambda_0 < \lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda'_3 \leq \lambda'_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots \quad (\text{C.5})$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda'_n} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Para $\lambda = \lambda_0$ existe una única función propia φ_0 . Si $\lambda_{2i+1} < \lambda_{2i+2}$ para algún $i \geq 0$, entonces existe una única función propia φ_{2i+1} en $\lambda = \lambda_{2i+1}$ y una única función propia φ_{2i+2} , en $\lambda = \lambda_{2i+2}$. Si $\lambda_{2i+1} = \lambda_{2i+2}$, entonces existen dos funciones propias linealmente independientes φ_{2i+1} y φ_{2i+2} , en $\lambda = \lambda_{2i+1} = \lambda_{2i+2}$. Se tiene un resultado similar para los casos $\lambda'_{2i+1} < \lambda'_{2i+2}$ y $\lambda'_{2i+1} = \lambda'_{2i+2}$, y denotamos a las correspondientes funciones propias por φ'_{2i+1} y φ'_{2i+2} .

Más aun, φ_o no tiene ceros en $[0, \pi]$; φ_{2i+1} y φ_{2i+2} ($i \geq 0$) tienen exactamente $2i + 2$ ceros en $[0, \pi)$; y φ'_{2i+1} y φ'_{2i+2} ($i \geq 0$) tienen exactamente $2i + 1$ ceros en $[0, \pi)$

Por otra parte, si μ_i son los valores propios de (C.2) tal que $u(0) = 0 = u(\pi)$, entonces existe un valor v_o tal que

$$v_o < \mu_o \leq \mu_1 < \dots \quad (\text{C.7})$$

y

$$\Delta(v_o) \geq 2 \quad , \quad \Delta(\mu_{2i}) \leq -2 \quad , \quad \Delta(\mu_{2i+1}) \geq 2 \quad , \quad i = 0, 1, \dots \quad (\text{C.8})$$

con $\Delta(\lambda)$ definido como en (2.60)

$$\Delta(\lambda) = y_1(\pi; \lambda) + y_2'(\pi; \lambda) \quad (\text{C.9})$$

Si $\Delta(\lambda) = 2$ o $\Delta(\lambda) = -2$ para algún $\lambda \neq \mu_i$, entonces λ es un valor propio simple de (C.2) para (C.3) o (C.4) y para dicha λ se cumple

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{d\lambda} &< 0 \quad \text{si } \lambda < \mu_o \\ (-1)^i \frac{d\Delta}{d\lambda} &> 0 \quad \text{si } \mu_i < \lambda < \mu_{i+1} \quad , \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Si $\Delta(\mu_{2i+1}) = 2$ y $\frac{d\Delta}{d\lambda} \neq 0$ en $\lambda = \mu_{2i+1}$, entonces μ_{2i+1} es un valor propio simple para (C.3).

Si $\Delta(\mu_{2i+1}) = 2$ y $\frac{d\Delta}{d\lambda} = 0$ en $\lambda = \mu_{2i+1}$, entonces para μ_{2i+1} existen dos funciones propias linealmente independientes para (C.3). Más aun, en este caso

$$\frac{d^2\Delta}{d\lambda^2}(\mu_{2i+1}) < 0.$$

Y los conjuntos $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ y $\{\lambda'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ quedan caracterizados de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} &= \{\lambda | \Delta(\lambda) = 2\} \\ \{\lambda'_n\}_{n \in \mathbb{N}} &= \{\lambda | \Delta(\lambda) = -2\} \end{aligned}$$

Bibliografía

- [CL] Coddington, E., Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, (1979)
- [D]₁ Dubrovin, B.A., Periodic problems for the Korteweg-de Vries equation in the class of finite-gap potentials, *Funct. Anal. Appl.* 9, (1975), 215-223. MR 58:6480
- [D]₂ Dubrovin, B.A., Theta functions and non-linear equations, *Russian Math. Surveys* 36:2 (1981), pp.11-92.
- [DG] Gelfand, I.M., Dikii, L.A., Asymptotic behaviour of the resolvent of Sturm-Liouville equations and the algebra of the Korteweg-de Vries equations, *Russ. Math. Surv.* 30:5, (1975)
- [DMN] Dubrovin, B.A., Matveev, V.B., Novikov, S.P., *Usp. Matem. Nauk* 31(1):55, 1976
- [DN] Dubrovin, B.A., Novikov, S.P., Periodic and conditionally periodic analogs of the many-soliton solutions of the Korteweg-de Vries equation, *Sov.Phys.-JETP* 40 (1975), 1058-1063. MR.52:3759
- [E] Eastham, M.S.P., The spectral theory of periodic differential equations, Scottish Academic Press, Edinburgh and London, 1973
- [En] Enol'skii, V. Z., On the solutions in elliptic functions of integrable nonlinear equations, *Physics Letters A*, 96 (1983) 327-330
- [Fe] Fernández, E. *Notas de Integrales y Funciones Elípticas*, 2005
<http://www.fenomec.unam.mx/publicaciones/notas/012.pdf>
- [Fla] Flaschka, H., On the inverse problem for Hill's operator, *Arch.Rat.Mech. Anal.* 59 (1975), 293-309. MR 52:8550
- [Flo] Flores, G., Ondas viajeras en modelos físicos y biológicos. XVI Escuela Venezolana de Matemáticas. 2003.
- [GGKM] Miura, R.M., Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D. Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.* 19 (1967), 1095-1097.
- [GH] Griffiths, P.A., Harris, J., Principles of algebraic geometry, Wiley-Interscience, New York (1978). MR 80b:14001
- [GKM] Miura, R.M., Gardner, C.S., Kruskal, M.D., Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion, *J. Math. Phys.* 9 (1968), 1204-1209. MR 40:6042b
- [G] Goldberg, W., On the determination of a Hill's equation from its spectrum, *Bulletin of the AMS*, Noviembre 1974, Vol.80, No.6

- [Hi] Hill, G.W., On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon, *Acta Math.* 8 (1886), 1-36.
- [Ho] Hochstadt, H., On the Determination of a Hill's Equation from its Spectrum, *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, Springer Berlin/Heidelberg, Enero 1965, Vol. 19, No. 5, , 353-362
- [Ig] Igusa, J., *Theta-Functions*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1972. MR48 #3972.
- [In] Ince, E. L., Further investigations into the periodic Lam efunctions, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 60 (1940), 83-99. MR 2:46d
- [IM] Its, A.R., Matveev, V.B., Schrödinger operators with finite-gap spectrum and N-soliton solutions of the Korteweg-de Vries equation, *Theoret. Math. Phys.* 23 (1975), 343-355. MR 57:18570
- [KdV] Korteweg, D.J., de Vries, G., On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Phil. Mag.* 39 (1895), 422-443.
- [KZ] Kruskal, M., Zabusky, N., Interactions of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Letters* 15 (1965), 240-243
- [L] Lax, P.D., Almost Periodic Solutions of the KdV Equation, *SIAM Review*, Julio 1976, Vol.18, No.3]
- [L]₁ Lax, P.D., Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Commun. Math. Phys.* 21 (1968), 467-490. MR 38-3620
- [L]₂ Lax, P.D, Periodic Solutions of the KdV Equation, *Comm. Pure Appl. Math.* 28 (1975), 141-188
- [Ma] Markushevich, A.I., *Introduction to the classical theory of Abelian functions*, Nauka, Moscow 1979. MR 81c:14024
- [Mc] McKean, H.P., *Integrable Systems and Algebraic Curves*, Lecture Notes in Mathematics, Global Analysis, Proceedings, Calgary 1978, Vol. 755
- [N] Novikov, S. P., The periodic problem for the Korteweg-de Vries equation, *Funct. Anal. Appl.* 8 (1974), 236-246. MR 52:3760
- [Mi] Miura, R.M., Korteweg-de Vries equation and generalization, I. A remarkable explicit nonlinear transformation, *J. Math. Phys.* 9 (1968), 1202-1204. MR 40:6042a
- [NMPZ] Novikov, S., Manakov, S.V., Pitaevskii, L.P., Zakharov, V.E., *Theory of Solitons*, Consultants Bureau, New York, 1984. MR 86k:35142
- [S] Shafarevich, I.R., *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1974. MR 51:3163
- [WW] Whittaker, E. T, Watson, G.N, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986. MR 97k:01072