UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"Sucesiones: Un enfoque para el nivel medio superior."

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

GLORIA PATRICIA PATLANI HUERTA

TUTORA: M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

AGOSTO 2006

Agradecimientos:

A Dios por estar a mi lado en cada instante de mi vida y por todo lo que me da día a día.

A mis Padres:
Por tenerme en el corazón de cada uno de ustedes. Gracias por sus cuidados, sus sacrificios y sobre todo por la educación que me han brindado.
Gracias, porque ustedes pusieron en mis manos las herramientas necesarias para vivir con dignidad.

A mis hermanos y mis cuñadas, por apoyarme en todo momento.
A mis sobrinas: Berenice, Evelin y Jessica, por dar alegría a mi vida, las quiero mucho.

A Víctor Manuel Venegas Cruz,
no hay palabras para decirlo,
bien lo sabes, gracias por todo.

A mis amigos de la Facultad de Ciencias, de quienes guardo gratos recuerdos, gracias por seguir conmigo en esta etapa de mi vida.

A mis amigos y compañeros de trabajo de la Escuela Nacional Preparatoria, gracias por su apoyo incondicional.

A Isa Cornejo porque sé que cuento contigo para cualquier situación.

A mis sinodales:

M. en C. Emma Lam Osnaya

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

Dr. Fernando Brambila Paz

Dr. Carlos Hernández Garciadiego

por sus valiosas aportaciones en la revisión de este trabajo.

Un agradecimiento muy especial a la M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza *por aceptar ser mi asesora de tesis, por el tiempo dedicado en el desarrollo de este trabajo y por apoyarme para dar un paso más en mi vida profesional.*

A todos los que contribuyeron con algún comentario para esta tesis. Gracias Alex por tu amistad y tu apoyo.

Indíce

Introducción:

Las Matemáticas son una ciencia que a través de los años ha sufrido grandes avances y aportaciones; desde el tercer milenio a.C., en Babilonia y Egipto, con el estudio de medidas y cálculos geométricos hasta nuestros tiempos con el estudio del cálculo diferencial e integral.

Actualmente, la Escuela Nacional Preparatoria tiene en su plan curricular la asignatura obligatoria de Matemáticas VI Cálculo diferencial e integral, la cual se imparte en el último año. Los grupos en este año se dividen en cuatro áreas. Área I: Físico-Matemáticas, área II: Bio-médica, área III: Sociales, área IV: Humanidades y artes. El programa de estudios señala como tema: Sucesiones, en la unidad I, para el Área III y IV.

Ante la problemática de la escasa bibliografía del tema de sucesiones a nivel bachillerato, se desarrolla el presente material. Este material pretende ser un apoyo en clase, tanto para los profesores como para los alumnos, en el estudio de este tema para este nivel, así como para quienes tengan interés por el estudio de las sucesiones.

Los jóvenes, cuando cursan su educación media superior, se preguntan continuamente por la aplicación de las matemáticas. En este material utilizamos el lenguaje abstracto de las matemáticas para plantear problemas de la vida práctica, dar solución e interpretar esta solución.

El material se desarrolla en seis capítulos. Al inicio de cada uno de ellos se presenta la biografía de un matemático, se desarrollan los contenidos y se presenta al final del mismo una serie de ejercicios propuestos para resolver.

En el capítulo I, Sucesiones y series, se desarrolla el concepto intuitivo de sucesión, así como su representación gráfica, se clasifican los tipos de sucesiones y se define una serie. Se menciona también la sucesión de Fibonacci, sucesión aplicada a una gran diversidad de áreas del conocimiento humano.

El capítulo II, Progresión aritmética, es un caso particular de una sucesión, se explica como se calcula el n-ésimo término y la suma de ellos, así como el desarrollo para la interpolación aritmética.

El tema progresión geométrica se desarrolla en el capítulo III, este es otro caso particular de las sucesiones, se desarrolla la fórmula para calcular el n-ésimo término y la suma de ellos, también se presenta el proceso para la interpolación geométrica.

Capítulo IV, Progresión armónica, aquí se desarrolla el procedimiento para calcular el n-ésimo término y la interpolación armónica.

En el penúltimo capítulo se presenta un material didáctico, un juego con tarjetas y tableros. En dichas tarjetas aparece una pregunta de los temas estudiados en los anteriores capítulos y en los tableros aparecen las respuestas, a fin de que el alumno ejercite las habilidades adquiridas durante el desarrollo del tema.

En el capítulo VI, se aborda el tema de convergencia de sucesiones, que no se incluye en el plan de estudios de Matemáticas para la ENP; sin embargo, es un tema para quienes tengan un interés especial por continuar con el estudio de sucesiones. En esta unidad se presentan casos en que una sucesión converge y diverge, así como los criterios de convergencia.

Un caso particular de la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica, es cuando la razón es un número entre -1 y 1, y converge al sumar infinitamente los términos, se desarrollan ejemplos donde se aplica esta progresión, también en esta última unidad.

Al final del trabajo se presentan Anexos, en los que se encuentran las soluciones a los problemas propuestos en cada capítulo.

Capítulo I.

Sucesiones y series.

1.1 Fibonacci, Leonardo (c.1170 - c.1240)

Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci, recopiló y divulgó el conocimiento matemático de clásicos grecorromanos, árabes e indios y realizó aportaciones en los campos del álgebra y la teoría de números. Fibonacci nació en una ciudad comercial donde aprendió las bases del cálculo de los negocios mercantiles.

Cuando Fibonacci tenía unos 20 años, se fue a Argelia, donde empezó a aprender los métodos de cálculo árabes, conocimientos que incrementó durante otros viajes largos. Fibonacci utilizó esta experiencia para mejorar las técnicas de cálculo comercial que conocía y para extender la obra de los escritores matemáticos clásicos, como los matemáticos griegos Diofanto y Euclides.

Han quedado pocas obras de Fibonacci. Escribió sobre la teoría de números, problemas prácticos de matemáticas comerciales y geodesia, problemas avanzados de álgebra y matemáticas recreativas. Sus escritos sobre matemáticas recreativas, que a menudo los exponía como relatos, se convirtieron en retos mentales clásicos ya en el siglo XIII. Estos problemas entrañaban la suma de sucesiones, como la sucesión de Fibonacci que él descubrió.

Por ejemplo:

$k_n = k_{n-1} + k_{n-2}$ donde n , k toman los valores enteros positivos, para $n \geq 3$, es decir, la sucesión es: 1,1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

A cada término de esta sucesión se le denomina número de Fibonacci, la suma de los dos números que le preceden en la sucesión.

También resolvió el problema del cálculo del valor para cualquiera de los números de la sucesión.

Le fue concedido un salario anual por la ciudad de Pisa en 1240 como reconocimiento de la importancia de su trabajo y como agradecimiento por el servicio público prestado a la administración de la ciudad.

1.2 Sucesión.

Una sucesión es una regla de correspondencia que asocia a cada número natural un número real.

Una sucesión esta formada por los siguientes elementos ordenados:

$$a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 \ , \ . \ . \ .$$

Cada elemento se llama término.

Ejemplos:

Las siguientes son ejemplos de sucesiones.

1. 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , . . .

2. 1 , 4 , 9 , 16 , . . .

3. 5 , 10 , 15 , 20 , . . .

Notación:

$\{a_n\}$ es la manera simplificada de escribir una sucesión.

a_1 es el primer término.

a_n es el n-ésimo término.

n es un número natural.

Ejemplos:

Escribir los 4 primeros términos de las siguientes sucesiones:

1. $\{a_n\} = \{n+1\}$

$a_1 = 1+1 = 2$, $a_2 = 2+1 = 3$, $a_3 = 3+1 = 4$, $a_4 = 4+1 = 5$.

2. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

$a_1 = \frac{1}{1} = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$.

3. $\{b_n\} = \{7n\}$

$b_1 = 7(1) = 7$, $b_2 = 7(2) = 14$, $b_3 = 7(3) = 21$, $b_4 = 7(4) = 28$.

4. $\{a_n\} = \{2(-1)^n\}$

$a_1 = 2(-1)^1 = -2$, $a_2 = 2(-1)^2 = 2$, $a_3 = 2(-1)^3 = -2$, $a_4 = 2(-1)^4 = 2$.

5. $\{a_n\} = \{\sqrt[n]{9}\}$

$a_1 = \sqrt[1]{9} = 9$, $a_2 = \sqrt[2]{9} = 3$, $a_3 = \sqrt[3]{9} \approx 2.08$, $a_4 = \sqrt[4]{9} \approx 1.73$.

6. $\{a_n\} = \{-1 + (0.1)^n\}$

$a_1 = -1 + (0.1)^1 = -0.9$, $a_2 = -1 + (0.1)^2 = -0.99$,

$a_3 = -1 + (0.1)^3 = -0.999$, $a_4 = -1 + (0.1)^4 = -0.9999$.

7. $\{d_n\} = \{2^n\}$

$d_1 = 2^1 = 2$, $d_2 = 2^2 = 4$, $d_3 = 2^3 = 8$, $d_4 = 2^4 = 16$.

8. $\{a_n\} = \{6\}$

$a_1 = 6$, $a_2 = 6$, $a_3 = 6$, $a_4 = 6$.

Ejemplos:

Escribir la regla de correspondencia de las siguientes sucesiones:

1. $a_1 = (3)(1) = 3$, $a_2 = (3)(2) = 6$, $a_3 = (3)(3) = 9$, $a_4 = (3)(4) = 12$, . . .

   La regla de correspondencia es: $\{a_n\} = \{3n\}$.

2. $a_1 = 1^1 = 1$, $a_2 = 2^2 = 4$, $a_3 = 3^3 = 27$, $a_4 = 4^4 = 256$, . . .

   La regla de correspondencia es: $\{a_n\} = \{n^n\}$.

3. $a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$, $a_4 = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$, . . .

   La regla de correspondencia es: $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$.

4. $a_1 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 8$, $a_2 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 4$, $a_3 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$, $a_4 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1$, . . .

   La regla de correspondencia es: $\{a_n\} = \left\{8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$.

5. $a_1 = (-1)^2 = 1$, $a_2 = (-1)^3 = -1$, $a_3 = (-1)^4 = 1$, $a_4 = (-1)^5 = -1$, . . .

   La regla de correspondencia es: $\{a_n\} = \{(-1)^{n+1}\}$.

Ejemplos:

Escribir el término que se indica en la cada sucesión.

1. Escribir el quinto término de la siguiente sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{n-1}{n+2}\right\}$.

$$a_5 = \frac{5-1}{5+2}$$

$$a_5 = \frac{4}{7} \ .$$

2. Escribir el décimo sexto término de la siguiente sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{2}{n}\right\}$.

$$a_{16} = \frac{2}{16}$$

$$a_{16} = \frac{1}{8} \ .$$

3. Escribir el vigésimo quinto término de la siguiente sucesión $\{a_n\} = \{25 - \sqrt{n}\}$.

$$a_{25} = 25 - \sqrt{25}$$

$$a_{25} = 25 - 5$$

$$a_{25} = 20 \ .$$

4. Escribir el séptimo término de la siguiente sucesión $\{b_n\} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$$b_7 = \frac{(7)(8)}{2}$$

$$b_7 = 28 \ .$$

5. Escribir el decimocuarto término de la siguiente sucesión $d_n = \{\sqrt[n]{n}\}$.

$$d_{14} = \sqrt[14]{14}$$

$$d_{14} \approx 1.20 \ .$$

1.3 Gráfica de sucesiones.

Una sucesión podemos representarla gráficamente, en el eje horizontal localizamos el valor de n y en el eje vertical localizamos el valor del n-ésimo término de la sucesión.

Ejemplos:

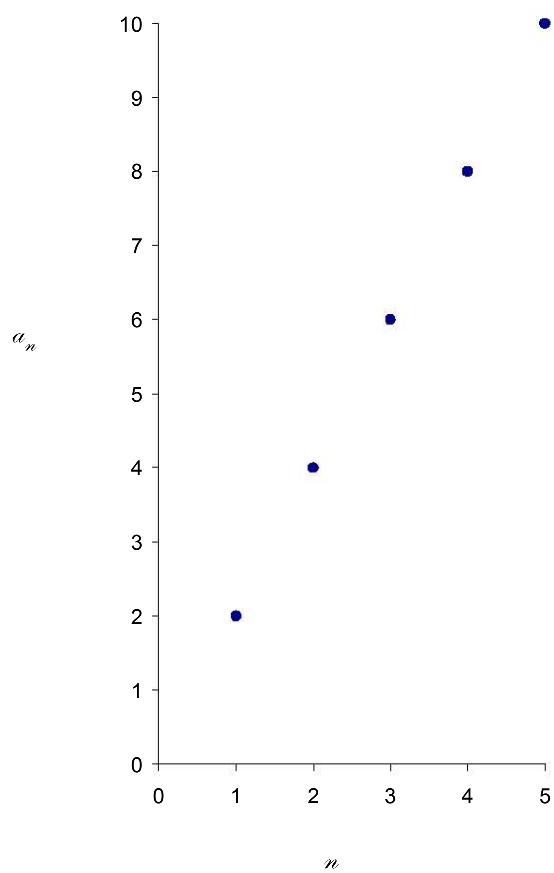
1. Sea la sucesión $\{a_n\} = \{2n\}$.

Los primeros 5 términos de la sucesión son:

$a_1 = 2(1)$, $a_2 = 2(2)$, $a_3 = 2(3)$, $a_4 = 2(4)$, $a_5 = 2(5)$.

$a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$, $a_5 = 10$.

Gráficamente:



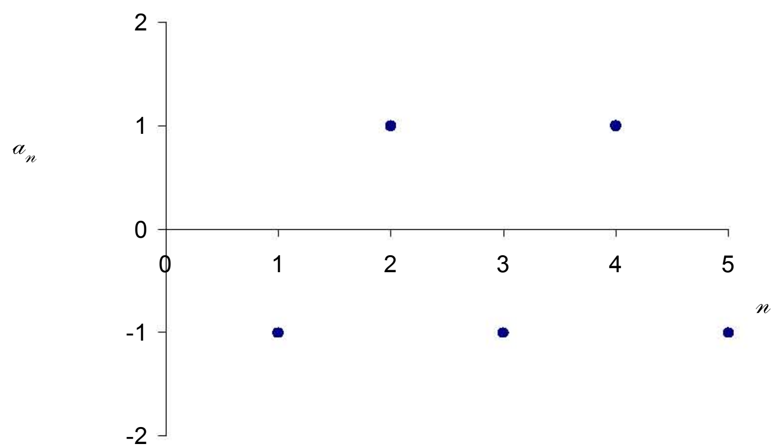
2. Sea la sucesión $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$.

Los primeros 5 términos de la sucesión son:

$a_1 = (-1)^1$, $\quad a_2 = (-1)^2$, $\quad a_3 = (-1)^3$, $\quad a_4 = (-1)^4$, $\quad a_5 = (-1)^5$.

$a_1 = -1$, $\quad a_2 = 1$, $\quad a_3 = -1$, $\quad a_4 = 1$, $\quad a_5 = -1$.

Gráficamente:

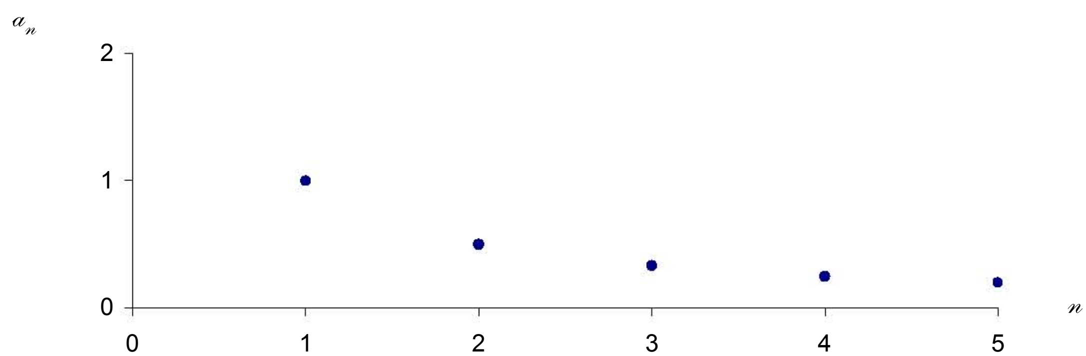


3. Sea la sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Los primeros 5 términos de la sucesión son:

$a_1 = \frac{1}{1} = 1$, $\quad a_2 = \frac{1}{2}$, $\quad a_3 = \frac{1}{3}$, $\quad a_4 = \frac{1}{4}$, $\quad a_5 = \frac{1}{5}$.

Gráficamente:

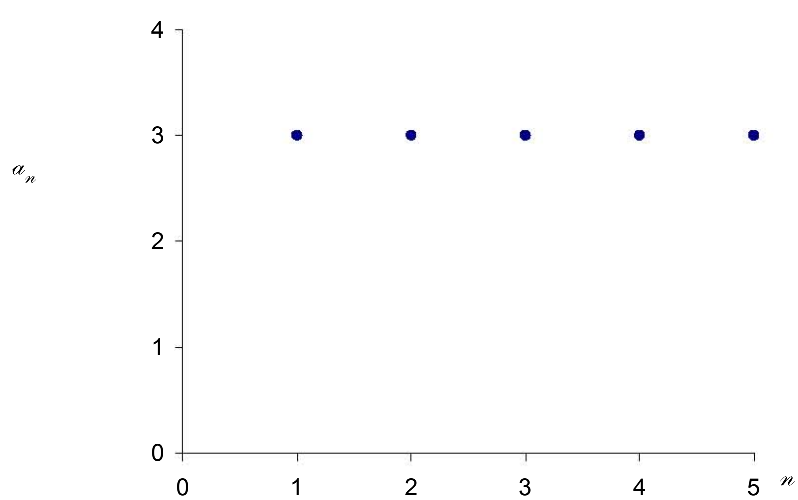


4. Sea la sucesión $\{a_n\} = \{3\}$.

Los primeros 5 términos de la sucesión son:

$a_1 = 3$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3$, $a_4 = 3$, $a_5 = 3$.

Gráficamente:



1.4 Sucesión creciente y decreciente.

Una sucesión es estrictamente creciente si

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{n-1} < a_n < a_{n+1} < \ldots \quad .$$

Una sucesión es estrictamente decreciente si

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_{n-1} > a_n > a_{n+1} > \ldots \quad .$$

No todas las sucesiones son estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes, hay sucesiones que no cumplen ninguna de estas definiciones.

Ejemplos:

Decir si cada una de las siguientes sucesiones es estrictamente creciente, estrictamente decreciente o ninguna de las dos.

1. $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, $a_3 = 27$, $a_4 = 81$, . . .

   La regla de correspondencia es: $\{3^n\}$.

   La sucesión es estrictamente creciente ya que:

   $a_1 < a_2 < a_3 < \ \ldots$

   $3 < 9 < 27 < 81 \ \ldots$

   P.D. $3^n < 3^{n+1}$ Para $n \geq 1$

   $1 < 3$ Multiplicando por 3^n a la desigualdad, para $n \geq 1$ y por lo tanto, $3^n > 0$ y la desigualdad no se altera.

   $1 \cdot 3^n < 3 \cdot 3^n$ Aplicando leyes de los exponentes.

   $\therefore \quad 3^n < 3^{n+1}$

2. $a_1 = 40$, $a_2 = 35$, $a_3 = 30$, $a_4 = 25$, . . .

   La regla de correspondencia es: $\{40 - 5(n-1)\}$.

La sucesión es estrictamente decreciente ya que

$a_1 > a_2 > a_3 > \ . \ . \ .$

$40 > 35 > 30 > 25 > \ . \ . \ .$

P.D. $40 - 5(n-1) > 40 - 5n$ Para $n \geq 1$,

$n - 1 < n$ Multiplicando por $-5 < 0$ y por lo tanto, invertimos el sentido de la desigualdad.

$-5(n-1) > -5n$ Sumando 40 a la desigualdad.

$\therefore$ $40 - 5(n-1) > 40 - 5n$

3. $a_1 = 8$, $a_2 = 8$, $a_3 = 8$, $a_4 = 8$, . . .

La regla de correspondencia es: $\{8\}$.

La sucesión no es estrictamente creciente ni estrictamente decreciente porque $a_1 = a_2 = a_3 = \ . \ . \ .$

4. $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$, $a_4 = 9$, . . .

La regla de correspondencia es: $\{(n-1)^2\}$.

La sucesión es estrictamente creciente porque

$a_1 < a_2 < a_3 < \ . \ . \ .$

$0 < 1 < 4 < 9 \ . \ . \ .$

P.D. $(n-1)^2 < n^2$ Para $n > 1$,

$n - 1 < n$ Multiplicando por $n - 1 > 0$ y la desigualdad no se altera.

$(n-1)(n-1) < n(n-1)$

$(n-1)^2 < n(n-1)$ y $-n < 0$

$n^2 - n < n^2$

entonces $(n-1)^2 < n^2 - n < n^2$ $\therefore$ $(n-1)^2 < n^2$.

1.5 Sucesión recursiva.

Una sucesión es recursiva si a partir de cierto momento cada término puede obtenerse de los anteriores.

Ejemplos:

Determina la fórmula de las siguientes sucesiones recursivas, dados los primeros 4 términos.

1. $a_1 = 1$ $\quad a_2 = 1$ $\quad a_3 = a_2 + a_1$ $\quad a_4 = a_3 + a_2$

$a_3 = 1 + 1$ $\quad a_4 = 2 + 1$

$a_1 = 1$, $\quad a_2 = 1$, $\quad a_3 = 2$, $\quad a_4 = 3$.

La regla de correspondencia es: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Para $n > 2$, donde $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$.

Ésta es la **sucesión de Fibonacci**.

2. $a_1 = -12$ $\quad a_2 = 5 + a_1$ $\quad a_3 = 5 + a_2$ $\quad a_4 = 5 + a_3$

$a_2 = 5 + (-12)$ $\quad a_3 = 5 + (-7)$ $\quad a_4 = 5 + (-2)$

$a_1 = -12$, $\quad a_2 = -7$, $\quad a_3 = -2$, $\quad a_4 = 3$.

La regla de correspondencia es: $a_n = 5 + a_{n-1}$. Para $n > 1$, donde $a_1 = -12$.

3. $a_1 = 2$ $\quad a_2 = -2\,a_1$ $\quad a_3 = -2a_2$ $\quad a_4 = -2a_3$

$a_2 = (-2)(2)$ $\quad a_3 = (-2)(-4)$ $\quad a_4 = (-2)(8)$

$a_1 = 2$, $\quad a_2 = -4$, $\quad a_3 = 8$, $\quad a_4 = -16$.

La relación es: $a_n = -2\,a_{n-1}$. Para $n > 1$, donde $a_1 = 2$.

4. $a_1 = -5$ $\quad a_2 = 1 + a_1$ $\quad a_3 = 2 + a_2$ $\quad a_4 = 3 + a_3$

$a_2 = 1 + (-5)$ $\quad a_3 = 2 + (-4)$ $\quad a_4 = 3 + (-2)$

$a_1 = -5$, $\quad a_2 = -4$, $\quad a_3 = -2$, $\quad a_4 = 1$.

La relación es: $a_n = (n-1) + a_{n-1}$. Para $n > 1$, donde $a_1 = -5$.

5. $a_1 = -1$ $\quad a_2 = \dfrac{a_1}{2-1}$ $\quad a_3 = \dfrac{a_2}{3-1}$ $\quad a_4 = \dfrac{a_3}{4-1}$

$a_2 = \dfrac{-1}{1}$ $\quad a_3 = \dfrac{-1}{2}$ $\quad a_4 = \dfrac{-\frac{1}{2}}{3}$

$a_1 = -1$, $\quad a_2 = -1$, $\quad a_3 = -\dfrac{1}{2}$, $\quad a_4 = -\dfrac{1}{6}$.

La relación es: $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n-1}$. Para $n > 1$, donde $a_1 = -1$.

Ejemplos:

Dada la fórmula de las siguientes sucesiones recursivas, escribir los primeros 4 términos.

1. $a_1 = 3$, $\quad a_n = -4a_{n-1}$. Para $n > 1$.

$a_1 = 3$ $\quad a_2 = -4\,a_1$ $\quad a_3 = -4a_2$ $\quad a_4 = -4a_3$

$a_2 = (-4)(3)$ $\quad a_3 = (-4)(-12)$ $\quad a_4 = (-4)(48)$

$a_1 = 3$, $\quad a_2 = -12$, $\quad a_3 = 48$, $\quad a_4 = -192$.

2. $a_1 = 1$, $\quad a_2 = 2$, $\quad a_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$. Para $n > 2$.

$a_1 = 1$ $\quad a_2 = 2$ $\quad a_3 = \dfrac{a_1}{a_2}$ $\quad a_4 = \dfrac{a_2}{a_3}$

$a_3 = \dfrac{1}{2}$ $\quad a_4 = \dfrac{2}{\frac{1}{2}}$

$a_1 = 1$, $\quad a_2 = 2$, $\quad a_3 = \dfrac{1}{2}$, $\quad a_4 = 4$.

3. $a_1 = 2$, $a_n = (a_{n-1})^2$. Para $n > 1$.

$a_1 = 2$ $a_2 = (a_1)^2$ $a_3 = (a_2)^2$ $a_4 = (a_3)^2$

$a_2 = 2^2$ $a_3 = 4^2$ $a_4 = 16^2$

$a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 16$, $a_4 = 256$.

1.6 Sumas parciales de sucesiones.

Dada una sucesión cuyos términos son: $a_1, a_2, a_3, \ldots$

La suma parcial de los primeros n términos es:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

o bien, $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

Esta expresión se lee: la suma de a_i, desde i igual a 1 hasta n, es decir, i toma los valores de 1, 2, 3, . . . , n.

Ejemplos:

1. Sea $a_n = n$, calcular S_5.

$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

$S_5 = 15$.

2. Sea $a_n = 3n$, calcular S_4.

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$S_4 = 3 + 6 + 9 + 12$

$S_4 = 30$.

3. Sea $a_n = n-2$, calcular S_4.

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_4 = -1+0+1+2$$

$$S_4 = 2.$$

4. Calcular $\sum_{i=1}^{3} i^2$.

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1+4+9$$

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 = 14.$$

5. Calcular $\sum_{i=1}^{4} 5i$.

$$\sum_{i=1}^{4} 5i = 5 + 10 + 15 + 20$$

$$\sum_{i=1}^{4} 5i = 50 \quad .$$

6. Calcular $\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i}$.

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i} = \frac{3}{2} \quad .$$

1.7 Sucesión de Fibonacci.

La sucesión de Fibonacci se obtiene, a partir del tercer término, sumando los 2 términos anteriores, donde el primer y el segundo término son igual a 1.

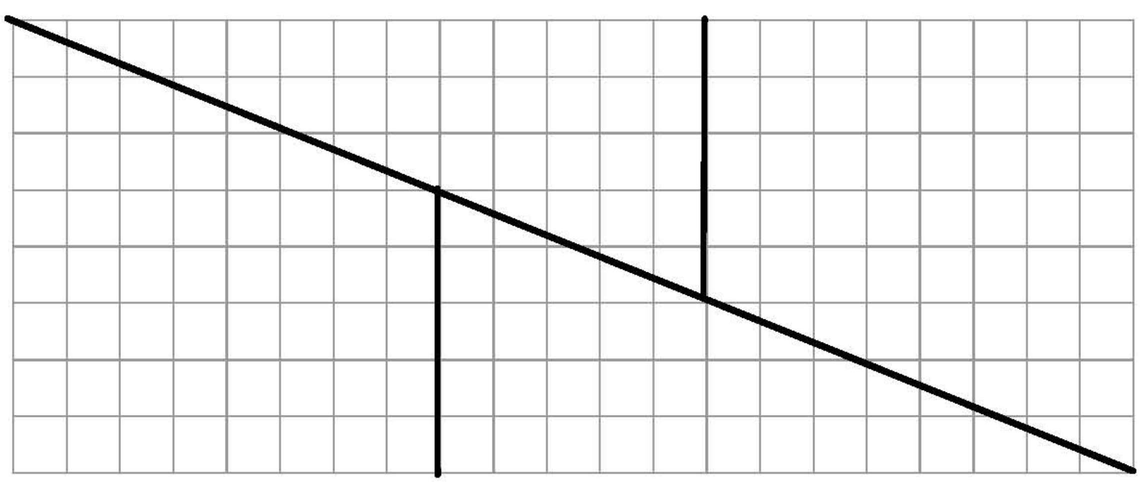
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ \ldots$$

Esta sucesión y la obtenida al formar los cocientes entre dos números consecutivos de la sucesión, es decir, $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$ aparecen en una diversidad de casos, desde la naturaleza, hasta la programación sin dejar de mencionar sus aplicaciones en la arquitectura y el arte.

Los siguientes casos son 2 juegos de Fibonacci, que tienen relación con los términos de esta sucesión.

1.7.1. Falacia geométrica.[1]

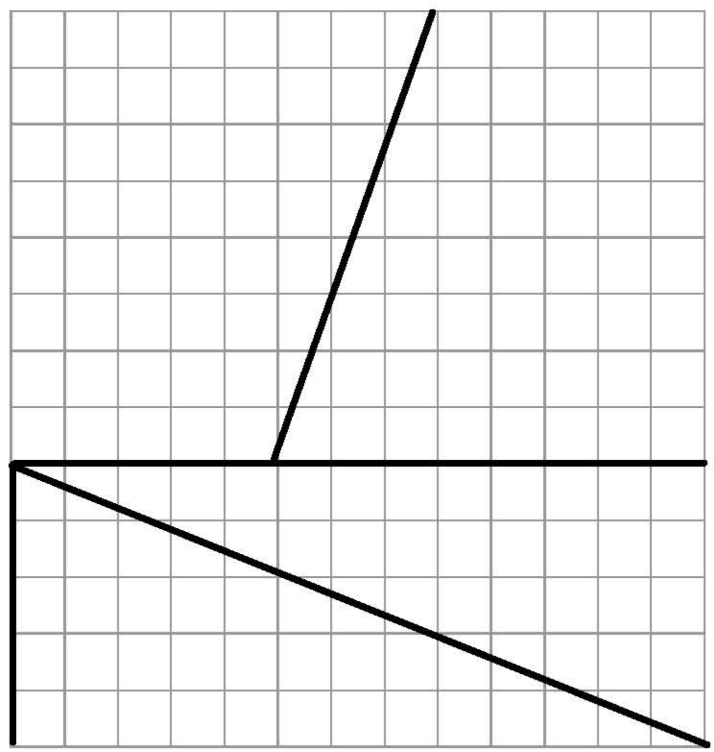
* Tenemos al siguiente rectángulo cuyos lados miden 8 y 21 unidades.



[1] Página web: http://redescolar.ilce.edu.mx/act_permanentes/mate/mate4k.htm
Nothrop, Eugene P., Riddles in Mathematics, Penguin Books, Great Britain 1971.

* Recortar las piezas de la figura anterior por las líneas marcadas.

* ¿Es posible construir un cuadrado de 13 unidades de lado con estas piezas, como muestra la siguiente figura?



* El área de un rectángulo cuyos lados miden 8 y 21 unidades es: 168 u^2

* El área de un cuadrado cuyos lados miden 13 unidades es: 169 u^2

* ¿Qué conclusión obtienes?

No es posible construir el cuadrado, porque las líneas marcadas en el rectángulo no pasan por los vértices de los cuadritos. Al formar la figura que pareciera un cuadrado, pero no lo es.

1.7.2 Truco Fibonacci.[2]

- Piensa en dos números cualesquiera.
- A partir de estos construye una sucesión Fibonacci, es decir, cada término debe ser la suma de los dos anteriores.
- Calcula S_{10}.
- Observa que $S_{10} = 11a_7$.

  La suma de los 10 primeros números es 11 veces el séptimo término.

1.7.3 Números de Tribonacci.

- Los primeros términos son: 1, 1, 2.
- A partir de estos construye una sucesión Fibonacci, pero sumando los tres términos anteriores.
- ¿Qué sucesión obtienes?

  Respuesta: *1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, . . .*
- ¿Se cumple el truco Fibonacci para esta sucesión?

  Respuesta: No
- ¿Por qué?

  $S_{10} = 1 + 1 + 2 + 4 + 7 + 13 + 24 + 44 + 81 + 149$

  $S_{10} = 326$.

  $a_7 = 24$.

  $11a_7 = (11)(24)$

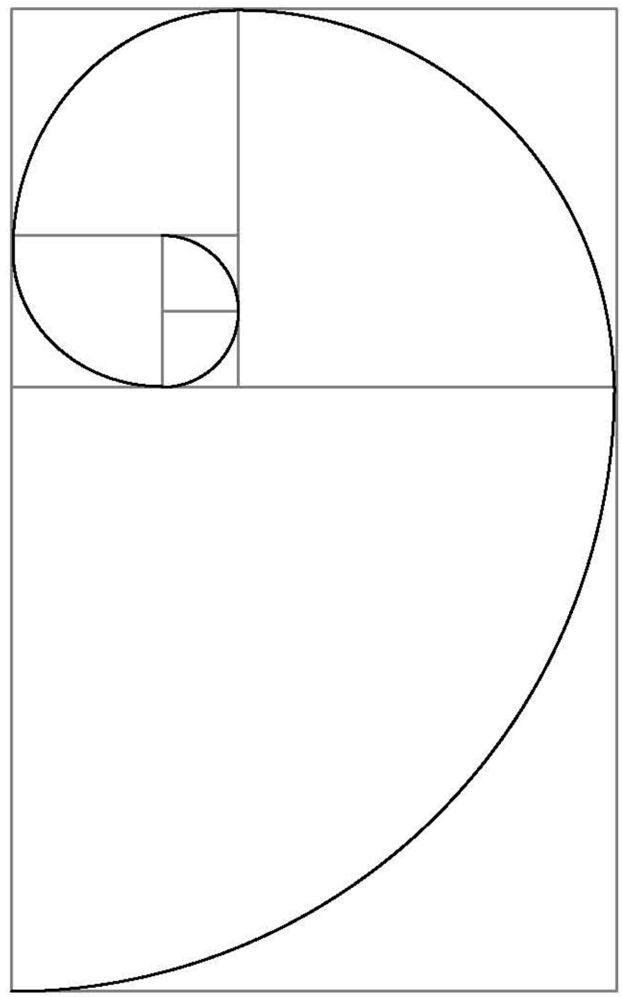
  $11a_7 = 264$

  $S_{10} \neq 11a_7$.

[2] http://www.ee.surrey.ac.uk/Personal/R.Knutt/Fibonacci/fib.html

1.7.4 Espiral Fibonacci.

Esta espiral se forma utilizando los términos de la sucesión de Fibonacci, mediante la siguiente manera:



* Dibujar un cuadrado de 1×1 unidad.
* Construir otro cuadrado de 1×1 sobre el anterior, para formar un rectángulo de 2×1.
* Sobre el lado mayor del rectángulo anterior, dibujar otro cuadrado de 2×2, ahora para formar un rectángulo de 3×2.
* El siguiente cuadrado a dibujar debe ser de 3×2 y formamos un rectángulo de 5×3.
* Añadir un cuadrado de 5×5 al lado mayor del rectángulo anterior para formar un rectángulo de 8×5.
* Así sucesivamente, dibujando cuadrados cuyo lado es un término de la sucesión de Fibonacci.
* Dibujar arcos que pasan por los vértices opuestos de cada cuadrado, como se muestra la figura.

Esta espiral se encuentra en la naturaleza, las espirales de las conchas de ciertos moluscos la forman.

1.7.5 Número Áureo.

El número áureo es representado por la letra griega Φ, este número esta relacionado con la sucesión de Fibonacci al calcular el cociente entre cada término y el anterior:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{1}\ , \quad \frac{a_3}{a_2}=\frac{2}{1}\ , \quad \frac{a_4}{a_3}=\frac{3}{2}\ , \quad \frac{a_5}{a_4}=\frac{5}{3}\ , \quad \frac{a_6}{a_5}=\frac{8}{5}\ , \quad \frac{a_7}{a_6}=\frac{13}{8}\ , \ldots$$

$$\frac{a_2}{a_1}=1\ , \quad \frac{a_3}{a_2}=2\ , \quad \frac{a_4}{a_3}=1.5\ , \quad \frac{a_5}{a_4}\approx 1.66\ , \quad \frac{a_6}{a_5}=1.6\ , \quad \frac{a_7}{a_6}=1.625\ , \ldots$$

Continuando este proceso, el resultado de los cocientes se acerca cada vez más al número áureo cuyo valor es:

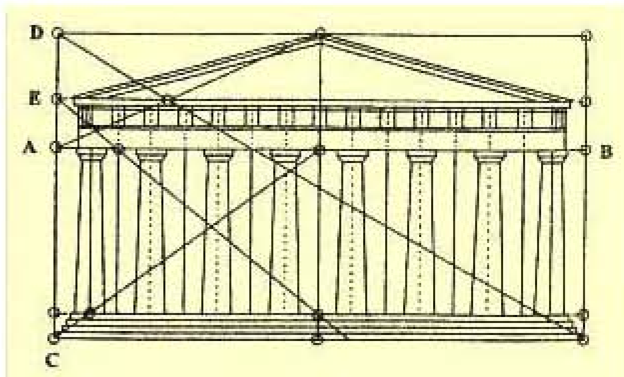
$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Phi \approx 1.61803$$

Este número fue utilizado por los egipcios para la construcción de la pirámide de Keops. También Salvador Dalí utilizó esta proporción en sus pinturas.

Los griegos utilizaron este número, también llamado la razón de oro, en la construcción de El Partenón.

Localizamos los puntos A, B, C, D y E en la parte frontal de El Partenón y observamos las siguientes características:



La relación $\frac{AB}{CD} = \Phi$, es decir, el número áureo.

También la relación $\frac{AC}{AD} = \Phi$

La relación $\frac{CD}{CA} = \Phi$

El número áureo también se ha utilizado en la construcción de muebles, marcos para ventanas, timbres postales y demás arquitecturas.

1.8 Ejercicios propuestos:

1. Escribir los 4 primeros términos de la sucesión $\{a_n\} = \{n-3\}$.

2. Escribir los 3 primeros términos de la sucesión $\{b_n\} = \{-5n\}$.

3. Escribir los 4 primeros términos de la sucesión $\{d_n\} = \{3^{n-1}\}$.

4. Escribir los 5 primeros términos de la sucesión $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n-1}{n+1}\right\}$.

5. Escribir la regla de correspondencia de la siguiente sucesión:
   $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 6$, $b_4 = 8$, . . .

6. Escribir la regla de correspondencia de la siguiente sucesión:
   $a_1 = 135$, $a_2 = -45$, $a_3 = 15$, $a_4 = -5$, . . .

7. Escribir el cuarto término de la sucesión $\{d_n\} = \{-5 + 2^n\}$.

8. Escribir el décimo término de la sucesión $\{b_n\} = \left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$.

9. Escribir el décimo octavo término de la sucesión $\{a_n\} = \{6 - 2n\}$.

10. Escribir el primer término de la sucesión $\{b_n\} = \{(3n)^{n-1}\}$.

11. Indicar si las siguientes sucesiones son estrictamente crecientes o decreciente o ninguna de las dos:

    a) $\{a_n\} = \{-2n\}$.
    b) $\{d_n\} = \{n+1\}$.
    c) $\{d_n\} = \{5\}$.
    d) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$.
    e) $\{b_n\} = \left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$.

12. Escribir los 4 primeros términos de la siguiente sucesión recursiva
    $a_1 = 2$, $a_n = 3 + a_{n-1}$. Para $n > 1$.

13. Escribir los 3 primeros términos de la siguiente sucesión recursiva
    $a_1 = 4$, $a_n = 3a_{n-1}$. Para $n > 1$.

14. Escribir los 5 primeros términos de la siguiente sucesión recursiva
    $a_1 = -1$, $a_n = \dfrac{2}{a_{n-1}}$. Para $n > 1$.

15. Sea $\{a_n\} = \{n-1\}$, calcular S_4 .

16. Sea $\{b_n\} = \left\{\dfrac{n-1}{n+1}\right\}$, calcular S_3 .

17. Sea $\{a_n\} = \{(0.1)^{n-1}\}$, calcular S_5 .

18. Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{1+i}$.

19. Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} i!$.

20. Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{2} (-4+3i)$.

Capítulo II.

Progresión aritmética.

2.1 Gauss, Carl Friedrich (1777-1855)

Nació en Braunschweig, el 30 de abril de 1777 y estudió lenguas antiguas, pero a los 17 años comenzó a interesarse por las matemáticas e intentó dar una solución al problema clásico de la construcción de un heptágono regular, o figura de siete lados, con una regla y un compás.

Su tratado sobre la teoría de números, ***Disquisitiones arithmeticae*** (1801), es una obra clásica en las matemáticas. Más tarde, Gauss dirigió su atención hacia la astronomía. En 1807 fue nombrado profesor de matemáticas y director del observatorio de Gotinga, ocupando los dos cargos hasta el 23 de febrero de 1855, fecha de su muerte.

Aunque Gauss hizo valiosas contribuciones tanto a la astronomía teórica como práctica, trabajó sobre todo en matemáticas y en física matemática, abarcando prácticamente todas sus ramas.

Se cuenta que Carl Friedrich Gauss en el año 1787 en la escuela, cuando tenía 10 años de edad, por un problema de conducta, él y todo el grupo fueron reprendidos por el profesor, recibiendo como castigo la orden de sumar del 1 al 100.

El profesor debió pensar: ¡que idea más buena he tenido!. ¡Durante un buen rato, me dejarán todos estos niños en paz!.

A los pocos minutos, el pequeño genio se levantó del pupitre, y entregó la respuesta correcta: 5050. El profesor, asombrado, debió pensar que había puesto un número al azar, y se dispuso él mismo a hacer la dicha suma. Al cabo de un buen rato, comprobó que, efectivamente, la suma pedida era 5050.

Lo que hizo Gauss fue lo siguiente, tenía que sumar los siguientes números:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \; . \quad . \quad . + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$

Pero nadie le obligaba a sumarlos por orden. Gauss se percató de un hecho singular: si agrupaba los números por parejas, tomando el primero y el último, el segundo y el penúltimo, etc., tenía lo siguiente:

$(1+100) = 101$

$(2+99) = 101$

$(3+98) = 101$

$(4+97) = 101$; etc.

Es decir, todos los pares de números sumaban 101. Como entre el uno y el 100 podía hacer 50 pares con esa propiedad, $50 \times 101 = 5050$.

Más tarde, aplicaría este mismo principio para hallar la suma de la serie aritmética y muchas otras series.

Gauss es considerado como uno de los mejores matemáticos de todos los tiempos.

2.2 Definición de progresión aritmética.

Una sucesión de números, $a_1 \ , a_2 \ , a_3 \ , \ ...$, es una progresión aritmética si la diferencia entre dos términos consecutivos es siempre la misma. Es decir:

$$a_2 - a_1 = a_7 - a_6 = a_{25} - a_{24} = \ ...$$

Ejemplos:

1. La siguiente sucesión de números es una progresión aritmética.

$$a_1 = 4 \ , \ a_2 = 6 \ , \ a_3 = 8 \ , \quad . \quad . \quad .$$

La diferencia entre dos términos consecutivos es siempre constante.

$$a_2 - a_1 = 2$$

$$a_3 - a_2 = 2 \ .$$

2. Esta sucesión es una progresión aritmética.

$$a_1 = \frac{17}{3} \ , \quad a_2 = \frac{16}{3} \ , \quad a_3 = \frac{15}{3} \ , \quad a_4 = \frac{14}{3} \ , \quad ...$$

La diferencia entre dos términos consecutivos es siempre la misma.

$$a_3 - a_2 = -\frac{1}{3}$$

$$a_4 - a_3 = -\frac{1}{3} \ .$$

Dicha diferencia la denotaremos por $\boldsymbol{d}$, y se conoce como diferencia común. A saber si $d = a_2 - a_1$, entonces, $a_2 = a_1 + d$, de tal manera que los términos de la progresión aritmética se podrán escribir como

$$a_1 \ , \ a_1 + d \ , \ a_1 + 2d \ , \ a_1 + 3d \ , \ ...$$

Notación:

a_1 es el primer término.

a_n es el n-ésimo término.

d es la diferencia entre los términos.

2.3 Término *n* de una progresión aritmética.

Los primeros ***n*** términos de una progresión aritmética son:

a_1	es el primer término.
$a_2 = a_1 + d$	es el segundo término.
$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$	es el tercero término.
$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$	es el cuarto término.
.	.
.	.
.	.
$a_n = a_1 + (n-1)d$	**es el n-ésimo término.**

Ejemplos:

1. Los cuatro primeros términos de una progresión aritmética son :

   $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 8$, $a_4 = 11$.

   Encontrar la diferencia común.

   $d = a_3 - a_2$

   $d = 8 - 5$.

2. Si los primeros términos de una progresión aritmética son:

   $a_1 = 42$, $a_2 = 37$, $a_3 = 32$, $a_4 = 27$, $a_5 = 22$.

   Encontrar la diferencia común.

   $d = a_2 - a_1$

   $d = 37 - 42 = -5$.

3. Los dos primeros términos de una progresión aritmética son 7 y 11. Encontrar el noveno término de la progresión.

Para aplicar la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)d$ y calcular el noveno término, deberemos encontrar ***d***. Conocemos $a_1 = 7$ *y* $a_2 = 11$:

$d = a_2 - a_1$

$d = 11 - 7 = 4$.

Como $a_n = a_1 + (n-1)d$ entonces:

$a_9 = 7 + (9-1)(4)$

$a_9 = 39$.

4. El primer término de una progresión aritmética es -6 y el quinto es 2. Calcular el cuarto término.

Es decir, $a_1 = -6$ *y* $a_5 = 2$.

Por definición:

$a_5 = a_1 + 4d$	Conociendo d aplicamos $a_n = a_1 + (n-1)d$
$2 = -6 + 4d$	$a_4 = -6 + (4-1)2$
$\frac{2+6}{4} = d$	$a_4 = -6 + (3)2$
$d = 2$	$a_4 = -6 + 6 = 0$

5. En la progresión aritmética $7, 10, 13, 16, \ldots\ a_n = 295$, ¿cuál es el valor de n?

Conociendo $a_1 = 7$.

Primero encontramos d:

$d = a_2 - a_1$

$d = 10 - 7 = 3$.

Aplicando $a_n = a_1 + (n-1)d$

$295 = 7 + (n-1)3$

$$\frac{295-7}{3}=n-1$$

$96=n-1$ $\qquad n=96+1$ $\qquad n=97$.

6. Obtener el décimo sexto término de la progresión:

$a_1=-7$, $\qquad a_2=-4$, $\qquad . . .$

Primero encontramos a_1 , d y n

$a_1=-7$ y $n=16$

Sabemos que $d=a_2-a_1$

$d=-4-(-7)$

$d=3$

Al sustituir los valores a_1, d y n en a_n

$a_1=-7$ $\qquad a_n=a_1+(n-1)d$

$d=3$ $\qquad a_{16}=-7+(16-1)3$

$n=16$ $\qquad a_{16}=-7+45$

$a_{16}=38$

7. De la progresión aritmética: $a_1=-5y+2$, $\qquad a_2=-4y+3$, $. . .$

Obtener el décimo segundo término.

Por definición: $\qquad a_2=a_1+d$

$-4y+3=-5y+2+d$

$-4y+3+5y-2=d$

$d=y+1$

Al sustituir los valores a_1, d y n en a_n :

$a_1=-5y+2$ $\qquad a_n=a_1+(n-1)d$

$d=y+1$ $\qquad a_{12}=-5y+2+(12-1)(y+1)$

$n = 12$ $\qquad a_{12} = -5y + 2 + (11)(y+1)$

$$a_{12} = -5y + 2 + 11y + 11$$

$$a_{12} = 6y + 13$$

8. Si los primeros términos de una progresión aritmética son:

   $a_1 = 25 \quad a_2 = 21 \quad a_3 = 17 \quad a_4 = 13 \quad a_5 = 9$.

   Calcular la suma de estos términos.

   $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 25 + 21 + 17 + 13 + 9 = 85$.

9. Si los primeros términos de una progresión aritmética son:

   $a_1 = -4 \quad a_2 = -5 \quad a_3 = -6 \quad a_4 = -7 \quad a_5 = -8 \quad a_6 = -9$.

   Sumar estos términos.

   $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = (-4) + (-5) + (-6) + (-7) + (-8) + (-9) = -39$.

2.4 Suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.

En los ejemplos anteriores hemos calculado la suma de los primeros términos de una progresión aritmética, en el primer caso sólo son 5 términos y en el segundo son 6 términos. Sin embargo, obtener la suma de los 100 primeros términos de cada progresión anterior implicaría de más tiempo. Pero, es posible desarrollar una fórmula para obtener la suma de ellos, a continuación mostramos su desarrollo.

Primero encontraremos los términos $n - 1$ y $n - 2$ en relación a d y a_n:

Por definición: $\qquad d = a_n - a_{n-1}$

$a_{n-1} = a_n - d$ $\qquad$ es el término $n - 1$.

Nuevamente: $d = a_{n-1} - a_{n-2}$

$a_{n-2} = a_{n-1} - d$ Sustituyendo $a_{n-1} = a_n - d$

$a_{n-2} = a_n - d - d$

$a_{n-2} = a_n - 2d$ es el término $n-2$.

Recordamos los primeros ***n*** términos de la progresión aritmética:

a_1	es el primer término.
$a_2 = a_1 + d$	es el segundo término.
$a_3 = a_1 + 2d$	es el tercero término.
$a_4 = a_1 + 3d$	es el cuarto término.
.	.
.	.
.	.
$a_{n-2} = a_1 + (n-3)d$	es el n-ésimo menos dos término.
$a_{n-1} = a_1 + (n-2)\,d$	es el n-ésimo menos un término.
$a_n = a_1 + (n-1)\,d$	es el n-ésimo término.

Ahora sumemos estos términos, llamando S_n a esta suma:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Dicha suma podemos escribir como:

$$S_n = a_1 + a_1+d + \ldots + a_1+(n-2)d + a_1+(n-1)d$$

Acomodando la suma comenzando por el n-ésimo término.

$$S_n = a_1+(n-1)d + a_1+(n-2)d + \ldots + a_1 +d + a_1$$

Ahora sumamos las dos últimas igualdades:

$$
\begin{array}{lccccccccc}
S_n = & a_1 & + & a_1+d & + & \ldots & + & a_1+(n-2)d & + & a_1+(n-1)d \\
S_n = & a_1+(n-1)d & + & a_1+(n-2)d & + & \ldots & + & a_1+d & + & a_1 \\
\hline
2S_n = & 2a_1+(n-1)d & + & 2a_1+(n-1)d & + & \ldots & + & 2a_1+(n-1)d & + & 2a_1+(n-1)d
\end{array}
$$

Puesto que el lado derecho de la igualdad hay n términos iguales a $2a_1 + (n-1)d$, entonces podemos simplificar como:

$$2S_n = n\,(2a_1 + (n-1)d)$$
$$2S_n = n\,(a_1 + (a_1 + (n-1)d))$$
$$2S_n = n\,(a_1 + a_n)$$

de donde:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Es la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética, si conocemos a_1 y a_n.

Sustituyendo $a_n = a_1 + (n-1)d$ en S_n:

$$S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

Es la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética, si conocemos a_1 y d.

Ejemplos:

1. Calcular la suma de los primeros 20 términos de la siguiente progresión aritmética:

$$a_1 = \frac{7}{2} \;, \qquad a_2 = 2 \;, \qquad a_3 = \frac{1}{2} \;, \; . \; . \; .$$

Debemos encontrar d, para aplicar la fórmula de S_n:

$$a_2 - a_1 = d$$

$$2 - \frac{7}{2} = d$$

$$-\frac{3}{2} = d \,.$$

Al sustituir los valores a_1, d y n en S_n :

$$a_1 = \frac{7}{2} \qquad\qquad S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

$$d = -\frac{3}{2} \qquad\qquad S_{20} = \frac{20\left[2\left(\frac{7}{2}\right) + (20-1)\left(-\frac{3}{2}\right)\right]}{2}$$

$$n = 20 \qquad\qquad S_{20} = -215 \,.$$

2. Calcular la suma de los primeros 50 números pares positivos:

$$a_1 = 2 \;, \qquad a_2 = 4 \;, \; . \; . \; .$$

Al sustituir los valores a_1, d y n en S_n :

$$a_1 = 2 \qquad\qquad S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

$d = 2$ $\qquad S_{50} = \dfrac{50[2(2) + (50-1)(2)]}{2}$

$n = 50$ $\qquad S_{50} = \dfrac{50[4 + 98]}{2}$

$$S_{50} = 2550 \ .$$

Calcularemos la suma como lo hizo Gauss en sus años de infancia. Sumando el primer término con el último, el segundo con el penúltimo, . . . , el vigésimo quinto con el vigésimo sexto.

$$\begin{array}{llllll}
a_1 = 2 & + & a_{50} = 100 & = & 102 \\
a_2 = 4 & + & a_{49} = 98 & = & 102 \\
\ \ . & & \ \ . & & \ \ . \\
\ \ . & & \ \ . & & \ \ . \\
\ \ . & & \ \ . & & \ \ . \\
a_{24} = 48 & + & a_{27} = 54 & = & 102 \\
a_{25} = 50 & + & a_{26} = 52 & = & 102 \\
\end{array}$$

Donde hay 25 sumandos igual a 102

$$S_{50} = 102(25)$$

$$S_{50} = 2550 \ .$$

3. Calcular la suma de los múltiplos de 4 que hay entre 213 y 1306.

Para determinar a_1 y a_n, debemos encontrar el primero y el último múltiplo de 4 entre estas cantidades.

Sabemos que 213 no es múltiplo de 4, entonces elegimos el primer múltiplo de 4 mayor que 213, es decir, 216 lo llamaremos a_1.

Para determinar a_n debemos buscar el múltiplo de 4 menor a 1306 pero más cercano a él, es decir, $a_n = 1304$.

Ahora tenemos la siguiente progresión aritmética, formada por múltiplos de 4.

$$a_1 = 216 \;, \quad a_2 = 220 \;, \quad a_3 = 224 \;, \quad . \quad . \quad . \quad , \quad a_n = 1304$$

Conocemos a_1, d y a_n, pretendemos encontrar el valor de n:

$a_1 = 216$

$d = 4$

$a_n = 1304$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$1304 = 216 + (n-1)4$$

$$1304 - 216 = (n-1)4$$

$$\frac{1088}{4} = n-1$$

$$272 + 1 = n$$

$$n = 273 \;.$$

Al sustituir los valores a_1, a_n y n en S_n:

$a_1 = 216$

$a_{273} = 1304$

$n = 273$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_{273} = \frac{273(216 + 1304)}{2}$$

$$S_{273} = 207480 \;.$$

4. Encontrar el primer y el n-ésimo términos, de una progresión aritmética, si la suma de los primeros 5 términos es igual a - 85 y diferencia común igual a 3.

Datos:

$d = 3 \qquad n = 5 \qquad S_5 = -85$

Sustituyendo los valores:

$$S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

$$-85 = \frac{5[2a_1 + (5-1)(3)]}{2}$$

$$-85 = \frac{5[2a_1 + 12]}{2}$$

$$\frac{(-85)(2)}{5} = 2a_1 + 12$$

$$-34 = 2a_1 + 12$$

$$-34 - 12 = 2a_1$$

$$a_1 = \frac{-46}{2}$$

$$a_1 = -23\ .$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Al sustituir $a_1 = -23$

$$a_5 = -23 + (5-1)(3)$$

$$a_5 = -23 + 12$$

$$a_5 = -11\ .$$

5. Encontrar el primer término y el número de términos, en una progresión aritmética, si conocemos: $d = -5 \qquad a_n = 4 \qquad S_n = 46$.

Aplicando las fórmulas del n-ésimo término y la suma de ellos obtenemos lo siguiente.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$4 = a_1 + (n-1)(-5)$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$46 = \frac{n(a_1 + 4)}{2}$$

Por lo que debemos encontrar la solución de un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

$4 = a_1 - 5n + 5$

$a_1 = 5n - 1 \quad . . . (1) \qquad\qquad 92 = n(a_1 + 4) \quad . . . (2)$

Sustituyendo a_1 en la ecuación (2).

$92 = n(5n - 1 + 4)$

$92 = 5n^2 + 3n$

$5n^2 + 3n - 92 = 0$ Ahora encontraremos la solución a esta ecuación de segundo grado, usando la fórmula general.

$a = 5 \qquad b = 3 \qquad c = -92$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(5)(-92)}}{2(5)}$$

$$n = \frac{-3 \pm \sqrt{1849}}{10}$$

Como resultado obtenemos dos soluciones

$$n_1 = \frac{-3 + 43}{10} = 4 \quad , \qquad n_2 = \frac{-3 - 43}{10} = \frac{-46}{10} \ .$$

Descartamos la segunda solución puesto que n debe ser un número natural, por ser el número de términos de la progresión.

Por último, sustituimos $n = 4$ en la ecuación (1) para encontrar el valor de a_1

$a_1 = 5n - 1$

$a_1 = 5(4) - 1$

$a_1 = 19$.

6. Luis adquiere una computadora mediante la siguiente forma de pago: un enganche de \$900 y 18 mensualidades de \$300 en el primer mes, \$320 en el segundo mes, \$340 en el tercer mes y así sucesivamente. ¿Cuánto pagará Luis por su computadora?

Denotaremos:

$a_1 = 300$	Primera mensualidad
$a_2 = 300 + 20 = 320$	Segunda mensualidad
$a_3 = 300 + 40 = 340$	Tercer mensualidad

.

.

.

Al sustituir los valores a_1, d y n en S_n :

$a_1 = 300$ $$S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

$d = 20$ $$S_{18} = \frac{18[2(300) + (18-1)(20)]}{2}$$

$n = 18$ $$S_{18} = \frac{18[600 + 340]}{2}$$

$$S_{18} = 8460 .$$

Por lo tanto, Luis pagará por su computadora: \$900 de enganche más \$8,460 de las mensualidades, es decir, \$900 + \$8,460 = \$9,360 .

7. Alex invierte en el banco \$5000 con una tasa de interés simple del 8% anual. ¿Cuál será el valor de su inversión después de 4 años?

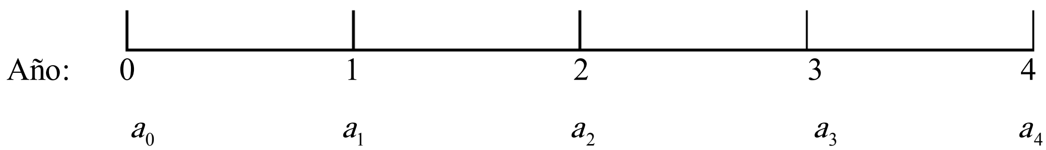
   Denotaremos: C - capital inicial

   i - tasa de interés

   I - interés generado por el capital

   I = Ci

   I = 5000(0.08) = 400



   Al sustituir los valores a_1, d y n en a_n :

   $a_0 = 5000$

   $d = 400$

   $n = 5$

$a_n = a_0 + (n)(d)$

$a_4 = 5000 + (4)(400)$

$a_5 = 6600$.

Por lo tanto, Alex tendrá una inversión de \$6,600 en el banco después de 4 años.

8. Un entrenador de básquet recompensa a sus jugadores por haber ganado el campeonato, para lo cual decidió formarlos en fila, conforme a un criterio que el consideró con base en la importancia durante el último partido; el premio era algunos centenarios de oro, para lo cual les dice, el primero de la fila se quedara con un centenario, el segundo con dos, el tercero con tres y así sucesivamente. Pero los jugadores se revelaron, y el más audaz de ellos dijo: tomaremos cinco centenarios cada uno. Y así se hizo en efecto. ¿Cuántos centenarios repartieron en total?

Denotaremos como:

n - número de jugadores

a_n - número de monedas que le corresponden a cada jugador, según el entrenador.

S_n - número total de monedas que se repartieron.

La repartición que el entrenador quería dar a sus jugadores era la siguiente:

$a_1 = 1 \quad , \qquad a_2 = 2 \quad , \qquad . \; . \; . \quad , \qquad a_n = n \,.$

Pero ellos decidieron lo siguiente:

$S_n = 5n\,.$

Considerando ambas posturas podemos resumirlo en la siguiente expresión.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$5n = \frac{n(1+n)}{2} \qquad \text{Resolviendo para } n.$$

$$10n = n + n^2$$

$$n^2 - 9n = 0$$

$$n(n-9) = 0$$

De aquí tenemos dos soluciones.

$n_1 = 0 \qquad , \qquad n_2 = 9 \;.$

Descartando la primera solución por el planteamiento del problema $n = 9$ y la suma de los términos es:

$S_9 = 5(9) = 45$

Concluimos que en el último partido participaron 9 jugadores y se repartieron 45 centenarios en total.

9. Un teatro tiene 30 filas; en la primera fila hay 40 asientos, en la segunda 42 asientos, en la tercera 44, y así sucesivamente. ¿Cuántos asientos tiene el teatro?

Al sustituir los valores a_1, d y n en S_n :

$a_1 = 40$ $\qquad S_n = \dfrac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$

$d = 2$ $\qquad S_{30} = \dfrac{30[2(40) + (30-1)(2)]}{2}$

$n = 30$ $\qquad S_{30} = \dfrac{30[80 + 58]}{2}$

$S_{50} = 2070$

Por lo tanto, el teatro tiene 2070 asientos.

2.5 Interpolación aritmética.

Medios aritméticos.

A los términos que hay entre el primer término y el n-ésimo, en una progresión aritmética, se les llama medios aritméticos.

De la siguiente progresión aritmética:

$$a_1 = 12 \ , \qquad a_2 = 17 \ , \qquad a_3 = 22 \ , \qquad a_4 = 27 \ , \qquad a_5 = 32 \ , \qquad a_6 = 37 \ .$$

Podemos observar que existen 4 medios aritméticos entre a_1 y a_6:

$$a_2 = 17 \ , \qquad a_3 = 22 \ , \qquad a_4 = 27 \ , \qquad a_5 = 32 \ .$$

Interpolación.

Interpolar es encontrar los medios aritméticos. Para interpolar necesitamos conocer la diferencia, despejando d de a_n:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n - a_1 = (n-1)d$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

Ejemplo:

1. Interpolar los 3 medios aritméticos entre: 10 y 2.

Es una progresión donde $a_1 = 10$, $a_n = 2$, es decir, encontrar los siguientes términos:

$$a_1 = 10 \ , \qquad a_2 \ , \qquad a_3 \ , \qquad a_4 \ , \qquad a_n = 2 \ .$$

Como debemos encontrar 3 medios aritméticos, entonces

$$n = 5$$

Calculando d:

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

$$d = \frac{2-10}{5-1}$$

$$d = -2 \ .$$

Con la diferencia d y la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)d$

obtenemos los 3 medios aritméticos:

Por definición:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_2 = 10 + (-2)$$

$$a_2 = 8 \ ,$$

$$a_3 = a_2 + d$$

$$a_3 = 8 + (-2)$$

$$a_3 = 6 \ ,$$

$$a_4 = a_3 + d$$

$$a_4 = 6 + (-2)$$

$$a_4 = 4 \ .$$

Por lo tanto, la progresión aritmética con los 5 términos es la siguiente:

$a_1 = 10$, $a_2 = 8$, $a_3 = 6$, $a_4 = 4$, $a_5 = 2$.

2. Interpolar los 4 medios aritméticos entre: $a_1 = C$ y $a_6 = C + 5I$.

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

$$d = \frac{C + 5I - C}{6 - 1}$$

$$d = \frac{5I}{5} = I \ .$$

Con la diferencia podemos obtener los 4 medios aritméticos:

Por definición:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_2 = C + I \ ,$$

$$a_3 = a_2 + d$$

$$a_3 = C + I + I$$

$$a_3 = C + 2I \ ,$$

$$a_4 = a_3 + d$$

$$a_4 = C + 2I + I$$

$$a_4 = C + 3I \ ,$$

$$a_5 = a_4 + d$$

$$a_5 = C + 3I + I$$

$$a_5 = C + 4I \ .$$

Por lo tanto, la progresión aritmética con los 6 términos es la siguiente:

$$a_1 = C, \qquad a_2 = C + I \ , \ a_3 = C + 2I, a_4 = C + 3I, a_5 = C + 4I, a_6 = C + 5I.$$

3. Ana ahorró durante 6 meses, en el primer mes ahorró \$300 y en el último \$600. Si a partir del segundo mes tuvo un incremento constante en sus ahorros.

a) ¿Cuánto ahorró cada mes?

b) ¿Cuánto ahorró en total?

a) Conocemos los siguientes datos: $a_1 = 300$ y $a_6 = 600$.

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

$$d = \frac{600-300}{6-1}$$

$$d = 60 \ .$$

Con la diferencia podemos obtener los medios aritméticos:

Por definición:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_2 = 300 + 60 = 360 \ ,$$

$$a_3 = a_2 + d$$

$$a_3 = 360 + 60 = 420 \ ,$$

$$a_4 = a_3 + d$$

$$a_4 = 420 + 60 = 480,$$

$$a_5 = a_4 + d$$

$$a_5 = 480 + 60 = 540.$$

Por lo tanto, los ahorros de Ana fueron de la siguiente forma:

Mes: 1	2	3	4	5	6
$a_1 = 300$,	$a_2 = 360$,	$a_3 = 420$,	$a_4 = 480$,	$a_5 = 540$,	$a_6 = 600$.

b) Con los siguientes datos: $a_1 = 300$ y $a_6 = 600$, calculamos S_6

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_6 = \frac{6(300 + 600)}{2}$$

$$S_6 = \frac{6(900)}{2}$$

$$S_6 = 2700$$

Por lo tanto, los ahorros de Ana durante los seis meses fueron de $2700.

2.6 Ejercicios propuestos:

1. Encontrar el octavo término de la siguiente progresión aritmética:

$$a_1 = 20 \quad , \quad a_2 = 16 \quad , \quad \ldots$$

2. Encontrar el décimo séptimo término de la siguiente progresión aritmética:

$$a_1 = 2w - 3 \quad , \quad a_2 = 4w - 4 \quad , \quad a_3 = 6w - 5 \quad , \ldots$$

3. Encontrar el término de la posición 28 de la siguiente progresión aritmética:

$$a_1 = \frac{16}{3} \quad , \quad a_2 = \frac{13}{3} \quad , \quad \ldots$$

4. Calcular la suma de los primeros 30 términos de la siguiente progresión aritmética:

$$a_1 = r \ , \quad a_2 = 2r \ , \ldots$$

5. Calcular la suma de los primeros 25 términos de la siguiente progresión aritmética:

$$a_1 = -\frac{7}{4} \quad , \ a_2 = -\frac{3}{2} \ , \ \ldots$$

6. En una progresión aritmética, $a_1 = 15$, $a_n = 3$ y la diferencia es $d = -3$, ¿cuál es el valor de n?

7. ¿Cuántos múltiplos de 3 hay entre 250 y 980?

8. Calcular la suma de los múltiplos de 6 que existen ente 219 y 1257.

9. Interpolar los 4 medios aritméticos entre: $\frac{3}{5}$ y $\frac{13}{5}$.

10. Calcular la suma de los primeros 100 números impares positivos.

11. En una progresión aritmética, $a_4 = 24$ y $a_5 = 21$, calcular la suma de los primeros 27 términos de esta progresión.

12. Interpolar los 3 medios aritméticos entre: $a_1 = t + 2$ y $a_5 = 9t + 6$.

13. Si la suma de los primeros 5 términos de una progresión aritmética es 55 y el primer término es 5, ¿cuál es la diferencia común entre los términos?

14. Si la suma de los primeros n términos, en una progresión aritmética, es 12, la diferencia común es 13 y $a_n = 7$, ¿cuál es valor de a_1?

15. Un hombre va a cavar un pozo de 20 metros, por el primer metro a cavar le pagaran $60, por el segundo metro a cavar le pagaran $80, por el tercer metro le pagaran $100 y así sucesivamente. ¿Cuánto le pagaran por cavar los 20 metros?

Capítulo III.

Progresión geométrica.

3.1 Cauchy, Augustin Louis

Augustin Louis Cauchy matemático y físico francés, nacido el 21 de Agosto de 1789. Probó (1811) que los ángulos de un Poliedro convexo están determinados por sus caras (las superficies planas limitan a un sólido geométrico). Numerosos términos en matemáticas llevan su nombre, por ejemplo, el teorema de la integral de Cauchy, en la teoría de funciones complejas, y teorema de la existencia de la solución de ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Kovalevskaya.

Cauchy fue el primero en hacer un estudio cuidadoso de las condiciones para la **CONVERGENCIA de las SERIES**; también dio una definición rigurosa de una integral independiente del proceso de diferenciación y desarrolló la teoría matemática de elasticidad. Sus textos **Cours d'analyse** (Curso en Análisis, 1821) y **Exercises d'analyse et de physique mathematique** (4 volúmenes de ejercicios en Análisis y en Físicas Matemáticas, 1840-47) fueron muy influyentes. Murió el 23 de mayo de 1857.

3.2 Definición de progresión geométrica.

Una sucesión de números, a_1, a_2, a_3, . . ., a_n, . . . es una progresión geométrica si el cociente entre cualquier término y su antecesor es siempre la misma. Dicha cantidad constante es llamada razón común, es decir,

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \quad . \quad . \quad .$$

Ejemplos:

1. La siguiente sucesión de números es una progresión geométrica

$$a_1 = 2 \quad , \qquad a_2 = 6 \quad , \qquad a_3 = 18 \quad , \ldots$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3$$

Al dividir un término entre su antecesor la cantidad obtenida es siempre la misma igual a 3.

2. La siguiente sucesión de números es una progresión geométrica

$$a_1 = 240 \qquad , \qquad a_2 = -120 \qquad , \qquad a_3 = 60 \quad , \ldots$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-120}{240} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{60}{-120} = -\frac{1}{2}$$

Al dividir un término entre su antecesor la cantidad es siempre igual a $-\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, si llamamos r a la razón, entonces

$r = \frac{a_2}{a_1}$, de donde $a_2 = a_1 r$

Análogamente

$r = \frac{a_3}{a_2}$, de donde $a_3 = a_2 r$,

Sustituyendo $a_2 = a_1 r$ en a_3, entonces $a_3 = a_1 rr$

Siguiendo el mismo procedimiento obtenemos los primeros términos de la progresión geométrica escritos de la siguiente forma:

$$a_1 \;,\; a_1 r \;,\; a_1 r^2 \;,\; a_1 r^3 \;,\; \ldots$$

Notación:

a_1 es el primer término.

a_n es el $n-$ ésimo término.

r es la razón común.

3.3 Término *n* de una progresión geométrica.

Entonces, los primeros ***n* términos** de una progresión geométrica son:

a_1	es el primer término.
$a_2 = a_1 r$	es el segundo término.
$a_3 = a_1 r^2$	es el tercero término.
$a_4 = a_1 r^3$	es el cuarto término.
.	.
.	.
.	.
$\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}}$	**es el n-ésimo término.**

Ejemplos:

1. Calcular la razón en la siguiente progresión geométrica:

$a_1 = 5 \quad , \qquad a_2 = 10 , \qquad a_3 = 20 \quad , \; . \; . \; .$

$$r = \frac{a_3}{a_2}$$

$$r = \frac{20}{10}$$

$$r = 2$$

La razón es igual a 2.

2. Obtener el octavo término de la siguiente progresión:

$a_1 = -4 \; , \qquad a_2 = 8 \; , \qquad a_3 = -16 \quad , \; . \; . \; .$

Por definición: $\quad r = \dfrac{a_2}{a_1}$

$$r = \frac{8}{-4} = -2$$

Al sustituir los valores a_1 , r y n en a_n :

$a_1 = -4 \qquad a_n = a_1 r^{n-1}$

$r = -2 \qquad a_8 = -4(-2)^{8-1}$

$n = 8 \qquad a_8 = -4(-2)^7$

$$a_8 = -4(-128)$$

$$a_8 = 512$$

El octavo término es igual a 512.

3. En una progresión geométrica $a_2 = 9$ y $a_3 = 6$ encontrar el valor de a_1.

Por definición $r = \frac{a_3}{a_2}$

$$r = \frac{6}{9} \qquad r = \frac{2}{3}$$

El primer término lo obtenemos de la igualdad

$$a_2 = a_1 r$$

$$\frac{a_2}{r} = a_1$$

$$a_1 = \frac{9}{\frac{2}{3}}$$

$$a_1 = \frac{27}{2} .$$

4. En una progresión geométrica $a_1 = 56$ y $a_4 = 7$. Calcular la razón.

Sustituyendo en $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$7 = (56)(r^{4-1})$$

$$\frac{7}{56} = r^3$$

$$r^3 = \frac{1}{8}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$$

$$r = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{8}}$$ Por leyes de los radicales.

$$r = \frac{1}{2} .$$

5. Calcula la suma de los 5 primeros términos de la siguiente progresión geométrica.

$a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 9$, $a_4 = 27$, $a_5 = 81$

$Suma = 1 + 3 + 9 + 27 + 81$

$Suma = 121$.

3.4 Suma de los primeros n términos de una progresión geométrica.

Calcular la suma de 20, 70 o más términos en una progresión geométrica resultaría laborioso. Al igual que en las progresiones aritméticas, hay una fórmula para calcular la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica. A continuación mostramos como encontrar la suma.

Recordamos que los primeros n términos de una progresión geométrica:

a_1	es el primer término.
$a_2 = a_1 r$	es el segundo término.
$a_3 = a_1 r^2$	es el tercero término.
$a_4 = a_1 r^3$	es el cuarto término.
.	.
.	.
.	.
$a_{n-1} = a_1 r^{n-2}$	es el n-ésimo menos un término.
$\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}}$	**es el n-ésimo término.**

Ahora sumemos estos términos, llamando S_n a esta suma:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \quad ... \quad + a_{n-1} + a_n$$

Al sustituir cada término utilizando las igualdades anteriores.

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} \qquad (1)$$

Multiplicando por r esta igualdad

$$rS_n = r\ (a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1})$$

$$rS_n = a_1 r + a_1 rr + a_1 r^2 r + \dots + a_1 r^{n-2} r + a_1 r^{n-1} r$$

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \qquad (2)$$

Restando la igualdad (1) menos la igualdad (2), tenemos

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} \\ - & \\ rS_n = & \qquad a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \\ \hline \end{array}$$

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r + a_1 r - a_1 r^2 + a_1 r^2 - \dots + a_1 r^{n-2} - a_1 r^{n-1} + a_1 r^{n-1} - a_1 r^n$$

Simplificando tenemos:

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n$$

Al factorizar S_n en el primer miembro de la igualdad y a_1 en el segundo tenemos:

$$(1 - r)S_n = a_1(1 - r^n)$$

Por lo tanto,

$S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$	**Es la suma de los primeros *n* términos de una progresión geométrica, conociendo a_1 y r. Con $r \neq 1$**

Ejemplos:

1. Calcular la suma de los primeros 10 términos de la siguiente progresión geométrica:

$a_1 = 2$, $a_2 = -4$, $a_3 = 8$, . . .

Por definición: $a_2 = a_1 r$

$$-4 = 2r$$

$$r = \frac{-4}{2}$$

$$r = -2 \ .$$

Al sustituir los valores a_1, r y n en S_n, tenemos: $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

$$S_{10} = \frac{2\left[1-(-2)^{10}\right]}{1-(-2)}$$

$$S_{10} = \frac{2[1-1024]}{1+2}$$

$$S_{10} = \frac{2(-1023)}{3}$$

$$S_{10} = \frac{-2046}{3}$$

$$S_{10} = -682 \ .$$

2. Calcular la suma de los primeros 8 términos de la siguiente progresión geomética:

$a_1 = 486$, $a_2 = 162$, . . .

Por definición: $a_2 = a_1 r$

$$162 = 486r$$

$$r = \frac{162}{486}$$

$$r = \frac{1}{3}\ .$$

Al sustituir los valores a_1, r y n en S_n: $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

$$S_8 = \frac{486\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{3}}$$

$$S_8 = \frac{486\left[1-\frac{1}{6561}\right]}{\frac{2}{3}}$$

$$S_8 = \frac{486\left(\frac{6560}{6561}\right)}{\frac{2}{3}}$$

$$S_8 = \frac{6560}{9}\ .$$

La fórmula de la suma también se puede escribir como:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$	**Es la suma de los primeros *n* términos de una progresión geométrica, conociendo a_1 y r. Con $r \neq 1$**

Ejemplos:

1. La suma de los primeros 4 términos de una progresión geométrica es $S_4 = 200$ y $r = 3$. Encontrar el valor de a_1.

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$200 = \frac{a_1(3^4 - 1)}{3 - 1}$$

$$200 = \frac{a_1(81 - 1)}{2}$$

$$(200)(2) = a_1(80)$$

$$400 = a_1(80)$$

$$a_1 = \frac{400}{80}$$

$$a_1 = 5 \ .$$

2. En una progresión geométrica $a_3 = 48$ y $a_4 = 192$. Calcular S_6.

Por definición: $a_4 = a_3 r$

$$192 = 48r$$

$$r = \frac{192}{48}$$

$$r = 4 \ .$$

Utilizando $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$a_3 = a_1 r^{3-1}$$

$$48 = a_1(4)^2$$

$$48 = a_1(16)$$

$$a_1 = \frac{48}{16}$$

$$a_1 = 3 \;.$$

Para calcular la suma: $$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

$$S_6 = \frac{3(4^6 - 1)}{4-1}$$

$$S_6 = \frac{3(4096-1)}{3}$$

$$S_6 = 4095 \,.$$

5. En una progresión geométrica $a_1 = 2$, $r = 3$, $S_n = 80$. Escribir los primeros n términos de esta progresión.

Sustituyendo datos: $$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

$$80 = \frac{2(3^n - 1)}{3-1}$$

$$80 = \frac{2(3^n - 1)}{2}$$

$$80 = 3^n - 1$$

$$80 + 1 = 3^n$$

$$81 = 3^n$$

la igualdad se satisface cuando

$$n = 4$$

es decir,

$$3^4 = 81$$

Los primeros 4 términos de la progresión son:

$$a_1 \qquad a_2 = a_1 r \qquad a_3 = a_1 r^2 \qquad a_4 = a_1 r^3$$

$$a_1 = 2\,, \qquad a_2 = (2)(3)\,, \qquad a_3 = (2)(3)^2\,, \qquad a_4 = (2)(3)^3.$$

$$a_2 = 6 \quad , \qquad a_3 = 18 \quad , \qquad a_4 = 54\,.$$

Donde $S_4 = 2 + 6 + 18 + 54 = 80$.

6. En una progresión geométrica $a_1 = 16$, $a_n = 81$, $r = \frac{3}{2}$. Calcular S_n .

Por definición: $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$81 = 16\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{81}{16} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

Convirtiendo a ecuación logarítmica

$$\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{81}{16}\right) = n - 1$$

Por propiedades de los logaritmos

$$n - 1 = \frac{\log\left(\frac{81}{16}\right)}{\log\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$n-1=\frac{\log\left(\frac{3^4}{2^4}\right)}{\log\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$n-1=\frac{\log\left(\frac{3}{2}\right)^4}{\log\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$n-1=\frac{4\log\left(\frac{3}{2}\right)}{\log\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$n-1=4$$

$$n=4+1$$

$$n=5\ .$$

De donde la suma de los primeros cinco términos de la progresión es:

$$S_n=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_5=\frac{16\left[\left(\frac{3}{2}\right)^5-1\right]}{\frac{3}{2}-1}$$

$$S_5=\frac{16\left[\frac{243}{32}-1\right]}{\frac{3}{2}-1}$$

$$S_5 = \frac{16\left[\dfrac{243-32}{32}\right]}{\dfrac{1}{2}}$$

$$S_5 = \frac{16\left[\dfrac{211}{32}\right]}{\dfrac{1}{2}}$$

$$S_5 = \frac{\dfrac{211}{2}}{\dfrac{1}{2}}$$

$$S_5 = 211 \ .$$

7. Víctor invierte \$4000 en un banco que le reditúa el 12% de interés compuesto anualmente, ¿Cuál será el valor de su inversión al final del cuarto año?

Denotaremos: C - capital inicial

i - tasa de interés

I - interés generado por el capital

I = Ci

		$C+I$			
	$C = 4000$	$C+Ci$			
	C	$C(1+i)$	$C(1+i)^2$		
Año:	0	1	2	3	4
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

Es decir, $a_1 = C$

$$a_2 = C(1+i)$$

$$a_3 = C(1+i)^2$$

Por definición: $a_2 = a_1 r$

$$C(1+i) = Cr$$

$$\frac{C(1+i)}{C} = r$$

$$r = 1+i$$

$$r = 1+0.12$$

$$r = 1.12$$

Al sustituir los valores a_1, r y n en a_n :

$$a_1 = 4000$$

$$r = 1.12$$

$$n = 5$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_5 = 4000(1.12)^{5-1}$$

$$a_5 = 4000(1.12)^4$$

$$a_5 = 4000(1.57351936)$$

$$a_5 = 6294.07$$

Por lo tanto, Víctor tendrá de inversión \$6,294.07 al finalizar el cuarto año.

8. Por depreciación, al final de cada año el valor de un automóvil es del 90% de su valor que tenía al principio del año, ¿Cuál será el valor de un automóvil después de 5 años si el día de hoy es de $120,000?

Denotaremos: C – valor del automóvil

d - tasa de depreciación

$$C = 120{,}000$$

	C	$C \cdot d$	$C \cdot d^2$			
Año:	0	1	2	3	4	5
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

Es decir, $a_1 = C$

$$a_2 = C \cdot d$$

$$a_3 = C \cdot d^2$$

Por definición: $a_2 = a_1 r$

$$C \cdot d^2 = C \cdot d \cdot r$$

$$\frac{C \cdot d^2}{C \cdot d} = r$$

$r = d$ Tasa de depreciación

$$r = 0.9$$

Al sustituir los valores a_1 , r y n en a_n :

$$a_1 = 120{,}000$$

$$r = 0.90$$

$$n = 6$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_6 = 120000(0.90)^{6-1}$$

$$a_6 = 120000\,(0.90)^5$$

$$a_6 = 120000(0.59049)$$

$$a_6 = 70858.8$$

Por lo tanto, el valor del automóvil después de 5 años será de $70,858.8

3.5 Interpolación geométrica.

Medios geométricos.

A los términos que existen entre el primer término y el n-ésimo, en una progresión geométrica, se le llaman medios geométricos.

Ejemplos:

Dados los siguientes términos de una progresión geométrica:

$$a_1 = 6 \,, \qquad a_2 = 12 \,, \qquad a_3 = 24 \,, \qquad a_4 = 48 \,, \qquad a_5 = 96 \,.$$

Hay 3 medios geométricos entre el primer y el quinto término de la progresión:

$$a_2 = 12 \,, \qquad a_3 = 24 \,, \qquad a_4 = 48 \,.$$

Interpolación.

La interpolación es encontrar los medios geométricos dando el primer término y el n–ésimo.

Para interpolar necesitamos conocer la razón, despejando r de a_n:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\frac{a_n}{a_1} = r^{n-1}$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

Ejemplo:

1. Interpolar los 2 medios geométricos entre 5 y -40 .

   Es decir, $a_1 = 5$ y $a_4 = -40$.

   Debemos encontrar a_2 y a_3

   Aplicando la fórmula $r = \sqrt[n-1]{\dfrac{a_n}{a_1}}$

$$r = \sqrt[4-1]{\frac{-40}{5}}$$

$$r = \sqrt[3]{-8}$$

$$r = -2 \ .$$

Por lo tanto, los dos medios geométricos son:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 r \\ &= 5(-2) \\ &= -10 \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 r \\ &= (-10)(-2) \\ &= 20 \ . \end{aligned}$$

2. Interpolar 3 medios geométricos entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{27}{8}$.

Es decir, $a_1 = \frac{2}{3}$ y $a_5 = \frac{27}{8}$.

Debemos encontrar a_2, a_3 y a_4

Aplicando la fórmula $r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$

$$r = \sqrt[5-1]{\frac{\frac{27}{8}}{\frac{2}{3}}}$$

$$r = \sqrt[4]{\frac{81}{16}}$$

$$r = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}}$$

$$r = \frac{3}{2}.$$

Por lo tanto, los tres medios geométricos son:

$$a_2 = a_1 r$$

$$a_2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$a_2 = 1 \;,$$

$$a_3 = a_2 r$$

$$a_3 = (1)\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$a_3 = \frac{3}{2} \;,$$

$$a_4 = a_3 r$$

$$a_4 = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$a_4 = \frac{9}{4} \;.$$

3.6 Ejercicios propuestos:

1. En una progresión geométrica, $a_1 = 3$ y $r = 2$, calcular S_6.

2. En una progresión geométrica, $a_1 = 800$ y $a_4 = 100$, interpolar los 2 medios geométricos.

3. En una progresión geométrica, $a_1 = 2$ y $S_4 = 170$, ¿cuánto vale la razón?

4. En una progresión geométrica, $a_5 = \frac{81}{2}$ y $r = -3$, ¿cuánto vale a_3?

5. En una progresión geométrica, $a_1 = m$, $a_n = m^7$ y $r = m^3$, ¿cuánto vale n?

6. En una progresión geométrica, $a_1 = 8$ y $r = \frac{3}{2}$, calcular a_4.

7. En una progresión geométrica, $a_4 = -16$ y $r = -\frac{2}{3}$, calcular a_1.

8. En una progresión geométrica, $a_1 = 2$ y $a_4 = -16$, calcular S_4.

9. David obtiene una beca para sus estudios de \$10,000 anuales; esta se incrementa en un 10% anual siempre y cuando su promedio escolar sea mayor a 9. Si David no pierde la beca, ¿cuánto obtendrá al finalizar el tercer año?

10. Una máquina nueva tiene un valor de \$31,104 y después de 4 años tiene un valor, por depreciación, de \$15,000. Suponiendo que la tasa de depreciación anual no varía, ¿cuál fue el valor de la máquina al final del segundo año?

Capítulo IV.

Progresión armónica.

4.1 Biografía de Hipatia.

Hipatia de Alejandría fue, sin duda, una de las primeras mujeres en la historia que contribuyó al desarrollo de las matemáticas. Nació en Alejandría, Egipto en el año 370 de nuestra era.

Su padre fue Teón de Alejandría, quien era un ilustre filósofo y matemático de esa época, fue el maestro de Hipatia desde que ella era pequeña y permitió que su hija se convirtiera en astrónoma filósofa y matemática, cosa que era sumamente inusual en un sistema en el que las mujeres no tenían derecho a la educación.

Teón trabajaba en el Museo, institución dedicada a la investigación y la enseñanza que había sido fundada por Tolomeo, emperador que sucedió a Alejandro Magno, fundador de la ciudad de Alejandría. El Museo tenía más de cien profesores que vivían ahí y muchos más que asistían periódicamente como invitados. Hipatia entró a estudiar con ellos y aunque viajó a Italia y Atenas para recibir algunos cursos de filosofía se formó como científica en el Museo y formó parte de él hasta su muerte, llegando incluso a dirigirlo alrededor del año 400.

Hipatia se dedicó, durante veinte años, a investigar y enseñar Matemáticas, Geometría, Astronomía, Lógica, Filosofía y Mecánica en el Museo. Ganó tal renombre que al Museo asistían estudiantes de Europa, Asia y África a escuchar sus enseñanzas sobre "la Aritmética de Diofanto".

Ella vivió toda su vida en la ciudad de Alejandría, Egipto. En marzo del 415, acusada de conspirar contra el patriarca cristiano de Alejandría, fue asesinada.

4.2 Definición de progresión armónica.

Una sucesión de números, a_1, a_2, a_3, . . ., a_n es una progresión armónica si los recíprocos de ellos forman una progresión aritmética.

Ejemplos:

1. La siguiente sucesión de números es una progresión armónica.

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_2 = \frac{1}{3}, \qquad a_3 = \frac{1}{4}, \qquad a_4 = \frac{1}{5}, \ldots$$

Ya que sus recíprocos $\frac{1}{a_1} = 2$, $\frac{1}{a_2} = 3$, $\frac{1}{a_3} = 4$, $\frac{1}{a_4} = 5$, . . . son términos de una progresión aritmética. Podemos observar que la diferencia entre ellos es $d = 1$.

2. La siguiente sucesión de números es una progresión armónica.

$$a_1 = \frac{2}{3}, \qquad a_2 = \frac{2}{5}, \qquad a_3 = \frac{2}{7}, \qquad a_4 = \frac{2}{9}, \ldots$$

Ya que sus recíprocos: $\frac{1}{a_1} = \frac{3}{2}$, $\frac{1}{a_2} = \frac{5}{2}$, $\frac{1}{a_3} = \frac{7}{2}$, $\frac{1}{a_4} = \frac{9}{2}$, . . . son términos de una progresión aritmética. La diferencia entre estos término es $d = \frac{2}{2} = 1$.

3. La siguiente sucesión de números es una progresión armónica.

$a_1 = \frac{-4}{5}$, $a_2 = \frac{-2}{5}$, $a_3 = \frac{-4}{15}$, . . . los cuales podemos rescribirlos como:

$$a_1 = \frac{-4}{5}, \qquad a_2 = \frac{-4}{10}, \qquad a_3 = \frac{-4}{15}, \qquad \ldots$$

Ya que sus recíprocos: $\frac{1}{a_1}=\frac{-5}{4}$, $\frac{1}{a_2}=\frac{-10}{4}$, $\frac{1}{a_3}=\frac{-15}{4}$, . . . son términos de una progresión aritmética. Donde la diferencia entre ellos es $d=\frac{-5}{4}$.

4.3 Término *n* de una progresión armónica.

Para calcular el n-ésimo término de una progresión armónica, primero convertimos cada término a su recíproco para formar una progresión aritmética, calculamos el n-ésimo término de la progresión aritmética y por último convertimos nuevamente a su recíproco.

Ejemplos:

1. Calcula el noveno término de la siguiente progresión armónica.

$$a_1=\frac{4}{3}\ , \qquad a_2=\frac{4}{6}\ , \qquad \ldots$$

La progresión aritmética correspondiente, tomando sus recíprocos, es

$$\frac{1}{a_1}=\frac{3}{4}\ , \qquad \frac{1}{a_2}=\frac{6}{4}\ , \qquad \ldots$$

Renombrando estos últimos términos:

$$b_1=\frac{3}{4}\ , \qquad b_2=\frac{6}{4}\ , \qquad \ldots$$

El n-ésimo término de una progresión aritmética es:

$$b_n=b_1+(n-1)d$$

Además $d=b_2-b_1$ por ser términos de una progresión aritmética

$$d=\frac{6}{4}-\frac{3}{4}$$

$$d=\frac{3}{4}$$

Entonces: $b_1 = \frac{3}{4}$

$n = 9$

$d = \frac{3}{4}$

$$b_9 = \frac{3}{4} + (9-1)\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$b_9 = \frac{3}{4} + (8)\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$b_9 = \frac{3}{4} + \frac{24}{4}$$

$$b_9 = \frac{27}{4}$$

Y su recíproco es $a_9 = \frac{1}{b_9} = \frac{4}{27}$, el cual es el noveno término de la progresión armónica.

2. Calcula el décimo tercer término de la siguiente progresión armónica.

$a_1 = \frac{1}{9}$, $\quad a_2 = \frac{1}{7}$, $\quad \ldots$

La progresión aritmética correspondiente, tomando sus recíprocos, es

$\frac{1}{a_1} = 9$, $\quad \frac{1}{a_2} = 7$, $\quad \ldots$

Renombrando estos últimos términos:

$b_1 = 9$, $\quad b_2 = 7$, $\quad \ldots$

El n-ésimo de una progresión aritmética es:

$$b_n = b_1 + (n-1)d$$

Además $d = b_2 - b_1$ por ser términos de una progresión aritmética

$$d = 7 - 9$$

$$d = -2$$

Entonces: $b_1 = 9$

$n = 13$

$d = -2$

$$b_{13} = 9 + (13-1)(-2)$$

$$b_{13} = 9 + (12)(-2)$$

$$b_{13} = 9 - 24$$

$$b_{13} = -15$$

Y el recíproco es $a_{13} = \dfrac{1}{b_{13}} = -\dfrac{1}{15}$, el cual es el décimo tercer término de la progresión armónica.

3. Calcula el término 45 de la siguiente progresión armónica.

$$a_1 = \frac{r}{5a}\ , \qquad a_2 = \frac{r}{6a}\ , \qquad \ldots$$

Donde $a \neq 0$, $r \neq 0$

La progresión aritmética correspondiente, tomando sus recíprocos, es

$$\frac{1}{a_1} = \frac{5a}{r}\ , \qquad \frac{1}{a_2} = \frac{6a}{r}\ , \qquad \ldots$$

Renombrando términos:

$$b_1 = \frac{5a}{r}\ , \qquad b_2 = \frac{6a}{r}\ , \qquad \ldots$$

El n-ésimo término de una progresión aritmética es:

$$b_n = b_1 + (n-1)d$$

Recordemos que para calcular d:

$$b_2 = b_1 + d$$

$$\frac{6a}{r} = \frac{5a}{r} + d$$

$$d = \frac{6a}{r} - \frac{5a}{r}$$

$$d = \frac{a}{r}$$

Donde: $b_1 = \dfrac{5a}{r}$

$n = 45$

$d = \dfrac{a}{r}$

$$b_{45} = \frac{5a}{r} + (45-1)\left(\frac{a}{r}\right)$$

$$b_{45} = \frac{5a}{r} + (44)\left(\frac{a}{r}\right)$$

$$b_{45} = \frac{5a}{r} + \frac{44a}{r}$$

$$b_{45} = \frac{49a}{r}$$

Y el recíproco es $a_{45} = \dfrac{r}{49a}$, el cual es el término 45 de la progresión armónica.

4.5 Interpolación armónica.

Medios armónicos.

A los términos que existen entre el primer término y el n-ésimo, en una progresión armónica, se les llaman medios armónicos.

En la siguiente progresión armónica:

$$a_1 = \frac{2}{5}, \qquad a_2 = \frac{2}{8}, \qquad a_3 = \frac{2}{11}, \qquad a_4 = \frac{2}{14}, \qquad a_5 = \frac{2}{17}.$$

hay 3 medios armónicos entre a_1 y a_5 :

$$a_2 = \frac{2}{8}, \qquad a_3 = \frac{2}{11}, \qquad a_4 = \frac{2}{14}.$$

Interpolar.

Interpolar es encontrar los medios armónicos dado el primer término y el *n*-ésimo. Para interpolar, convertimos los términos a sus recíprocos para obtener una progresión aritmética, interpolamos como progresión aritmética y nuevamente convertimos a sus recíprocos para obtener los medios armónicos.

Recordemos que la diferencia de una progresión aritmética esta determinada por:

$$b_n = b_1 + (n-1)d$$

$$b_n - b_1 = (n-1)d$$

$$d = \frac{b_n - b_1}{n-1}.$$

Ejemplos:

1. Interpolar los 2 medios armónicos entre $a_1 = -\frac{3}{4}$ y $a_4 = -\frac{3}{10}$.

Es decir, debemos calcular a_2 y a_3.

La progresión aritmética correspondiente, tomando sus recíprocos, es:

$$b_1 = \frac{1}{a_1} = -\frac{4}{3} \qquad b_2 = \frac{1}{a_2} \qquad b_3 = \frac{1}{a_3} \qquad b_4 = \frac{1}{a_4} = -\frac{10}{3}$$

Donde: $$d = \frac{b_n - b_1}{n-1}$$

en este caso $d = \dfrac{b_4 - b_1}{4-1}$

$$d = \frac{\left(-\frac{10}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)}{4-1}$$

$$d = \frac{-\frac{10}{3} + \frac{4}{3}}{4-1}$$

$$d = \frac{-\frac{6}{3}}{3}$$

$$d = -\frac{2}{3}$$

Calcular $b_2 = b_1 + d$

$$b_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}$$

$$b_2 = -\frac{6}{3}$$

$$b_2 = -2 \ ,$$

$$b_3 = b_2 + d$$

$$b_3 = -\frac{6}{3} - \frac{2}{3}$$

$$b_3 = -\frac{8}{3} \ ,$$

Convirtiendo a sus recíprocos:

$$a_2 = \frac{1}{b_2} = -\frac{3}{6} \ , \qquad a_3 = \frac{1}{b_3} = -\frac{3}{8} \ .$$

$$a_2 = \frac{1}{b_2} = -\frac{1}{2} \ .$$

Por lo tanto, los cuatro primeros términos de la progresión armónica son:

$$a_1 = -\frac{3}{4} \ , \qquad a_2 = -\frac{1}{2} \ , \qquad a_3 = -\frac{3}{8} \ , \qquad a_4 = -\frac{3}{10} \ .$$

2. Interpolar los 3 medios armónicos entre $a_1 = \frac{1}{C}$ y $a_5 = \frac{1}{C+4i}$, para $C \neq 0$

   Es decir, debemos calcular a_2 , a_3 y a_4.

   La progresión aritmética correspondiente, tomando sus recíprocos, es:

   $b_1 = \frac{1}{a_1} = C$, $b_2 = \frac{1}{a_2}$, $b_3 = \frac{1}{a_3}$, $b_4 = \frac{1}{a_4}$, $b_5 = \frac{1}{a_5} = C + 4i$.

   Donde: $d = \frac{b_n - b_1}{n-1}$

   $$d = \frac{C + 4i - C}{5-1}$$

   $$d = \frac{4i}{4} \qquad d = i \ .$$

   Calcular $b_2 = b_1 + d$

   $$b_2 = C + i \ ,$$

   $$b_3 = b_2 + d$$

   $$b_3 = C + i + i$$

   $$b_3 = C + 2i \ ,$$

   $$b_4 = b_3 + d$$

   $$b_4 = C + 2i + i$$

   $$b_4 = C + 3i \ .$$

   Convirtiendo a sus recíprocos:

   $$a_2 = \frac{1}{b_2} = \frac{1}{C+i} \ , \qquad a_3 = \frac{1}{b_3} = \frac{1}{C+2i} \ , \qquad a_4 = \frac{1}{b_4} = \frac{1}{C+3i} \ .$$

   Por lo tanto, los términos de la progresión armónica son:

   $$a_1 = \frac{1}{C} \ , \qquad a_2 = \frac{1}{C+i} \ , \quad a_3 = \frac{1}{C+2i} \ , \quad a_4 = \frac{1}{C+3i} \ , \quad a_5 = \frac{1}{C+4i} \ .$$

3. Interpolar los 2 medios armónicos entre $a_1 = \frac{1}{6}$ y $a_4 = \frac{1}{18}$.

Es decir, debemos calcular a_2 y a_3.

La progresión aritmética correspondiente, tomando sus recíprocos, es:

$b_1 = \frac{1}{a_1} = 6$, $\quad b_2 = \frac{1}{a_2}$, $\quad b_3 = \frac{1}{a_3}$, $\quad b_4 = \frac{1}{a_4} = 18$.

Donde: $$d = \frac{b_n - b_1}{n-1}$$

$$d = \frac{18-6}{4-1}$$

$$d = \frac{12}{3}$$

$$d = 4 \ .$$

Calcular $b_2 = b_1 + d$

$$b_2 = 6 + 4$$

$$b_2 = 10 \ ,$$

$$b_3 = b_2 + d$$

$$b_3 = 10 + 4$$

$$b_3 = 14 \ ,$$

Convirtiendo a sus recíprocos:

$$a_2 = \frac{1}{b_2} = \frac{1}{10} \ , \qquad a_3 = \frac{1}{b_3} = \frac{1}{14} \ .$$

Por lo tanto, los términos de la progresión armónica son:

$$a_1 = \frac{1}{6} \ , \qquad a_2 = \frac{1}{10} \ , \qquad a_3 = \frac{1}{14} \ , \qquad a_4 = \frac{1}{18} \ .$$

4.6 Ejercicios propuestos:

1. Determina el noveno término de la siguiente progresión armónica: $a_1 = \frac{2}{7}$, $a_2 = \frac{2}{10}$,. . .

2. Determina el término 12 de la siguiente progresión armónica: $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{5}$, . . .

3. Determina el quinto término de la siguiente progresión armónica:

$a_1 = \frac{3}{i}$, $a_2 = \frac{3}{2i}$, . . . , para $i \neq 0$

4. Determina el quinto término de la siguiente progresión armónica: $a_1 = \frac{2}{5}$, $a_2 = \frac{1}{5}$, . . .

5. Determina el décimo término de la siguiente progresión armónica:

$a_1 = \frac{b}{c}$, $a_2 = \frac{b}{3c}$, . . . , para $b, c \neq 0$.

6. Interpola los dos medios armónicos entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{10}$.

7. Interpola un medios armónico entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{2}{9}$.

8. Interpola los tres medios armónicos entre $\frac{C}{r}$ y $\frac{C}{5r}$, para $C, r \neq 0$

9. Interpola un medio armónicos entre $\frac{5}{4}$ y $\frac{5}{12}$.

10. Interpola los dos medios armónicos entre $\frac{t}{15}$ y $\frac{t}{6}$.

Capítulo V.

Material didáctico.

5.1 Reglas del juego.

El siguiente material reúne ejercicios referente a los 4 capítulos anteriores para que los alumnos los resuelvan. A lo largo del juego los alumnos pueden aplicar los conocimientos adquiridos.

El material es un juego entretenido y fácil, como la lotería, sólo que ahora esta enfocado a las sucesiones.

El material fue probado en los grupos 611 y 616 de Matemáticas VI (Área III) de la Escuela Nacional Preparatoria No. 7, del ciclo escolar 2004, obteniendo resultados positivos.

Bases:

* El juego consta de 4 tableros y 22 tarjetas

* Cada jugador debe tener a la mano lápiz, hoja para hacer cálculos y es válido usar calculadora.

* Se juegan con 2 o 4 personas y además un juez.

* Se reparten 2 tableros a cada persona si son 2 jugadores o 1 tablero por persona si van a ser 4 jugadores.

* El juez comienza a leer cada tarjeta, la cual contiene un ejercicio a resolver.

* El juez lee cada tarjeta dando el intervalo de 1 minuto para que cada jugador conteste.

* El primer jugador en llenar su tablero deberá gritar “sucesiones” y el juez deberá revisar con las tarjetas que ya pasaron que sus respuestas sean las correctas.

* Si el jugador puso una marca donde aún no se lee la tarjeta será eliminado del juego, y en caso de ser 2 jugadores el contrario será el ganador, en caso contrario los demás seguirán jugando.

* Si el tablero del jugador que grito “sucesiones” es correcto, según lo determine el juez, este será el ganador.

5.2 Tableros.

5	-266	1.001
2t-2	100	$\frac{1}{9}$
-68	$\frac{5}{3}$	9

5	-266	1.001
2t-2	100	$\frac{1}{9}$
-68	$\frac{5}{3}$	9

Tableros.

5	-266	1.001
2t-2	100	$\frac{1}{9}$
-68	$\frac{5}{3}$	9

5	-266	1.001
2t-2	100	$\frac{1}{9}$
-68	$\frac{5}{3}$	9

5.3 Tarjetas.

En una progresión aritmética, donde $a_1 = 15$ y $d = -3$, si $a_n = 3$, ¿cuál es el valor de *n*?	En una progresión geométrica $a_1 = 64$, $a_2 = -96$. Calcula S_6.	En la sucesión $a_n = 1 + (0.1)^n$, ¿Cuál es el valor de a_3?
¿Cuántos múltiplos de 4 hay entre 150 y 550?	¿Cuál es término 12 de la siguiente progresión armónica $a_1 = \frac{4}{3}$, $a_2 = \frac{4}{6}$, $a_3 = \frac{4}{9}, \ldots$?	Escribir el número 1.66... como cociente de enteros.
En una progresión aritmética $a_1 = -11$, $a_4 = -2$, ¿cuál es el valor de la diferencia común?	En una progresión aritmética $a_3 = 1 + i$, $a_4 = 1 + 2i$, ¿cuál es el valor de a_{10}?	En una progresión geométrica $a_1 = 384$, $a_2 = 192$, $a_3 = 96$, calcula S_5.

Tarjetas:

Escribir el número 2.888... como cociente de enteros.

En la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$, ¿Cuál es el valor de S_4?

En una progresión aritmética $a_3 = t - 4$, $a_4 = 3t - 6$, ¿Cuál es el valor de la diferencia común?

En la sucesión $a_n = n^{n-2}$, ¿Cuál es el valor de a_4?

En una progresión geométrica, donde $a_4 = 40$ y $a_5 = -80$, ¿cuál es el valor de a_1?

En una progresión aritmética $a_1 = 2t - 1$, $a_2 = t - 2$, ¿a qué es igual S_6?

En la sucesión $a_n = \frac{n}{n+1}$, ¿cuál es el valor de S_2?

En la siguiente progresión armónica, $a_1 = \frac{4}{d}$, $a_2 = \frac{4}{2d}, \ldots$ ¿cuál es el valor de a_8?

En la progresión geométrica, donde $a_1 = 8$ y $a_4 = -27$, cuánto vale r?

Tarjetas:

Calcula la suma infinita de la siguiente progresión geométrica:
$a_1 = -64$,
$a_2 = 48, \ldots$

En la siguiente progresión geométrica:
$a_1 = -16$,
$a_2 = -8, \ldots$ ¿cuál es el valor de a_7?

En una progresión geométrica:
$a_1 = 1$, $a_2 = d^2$,
$a_n = d^{10}$ ¿cuál es el valor de n?

En la siguiente progresión armónica:
$a_1 = \frac{5}{2}$, $a_2 = \frac{5}{5}, \ldots$,
¿qué lugar ocupa $a_n = \frac{1}{4}$?

5.4 Respuestas.

1. En una progresión aritmética, donde $a_1 = 15$ y $d = -3$, si $a_n = 3$, ¿cuál es el valor de n?

 Respuesta: 5 .

2. En una progresión geométrica $a_1 = 64$, $a_2 = -96$. Calcula S_6 .

 Respuesta: -266 .

3. En la sucesión $a_n = 1 + (0.1)^n$, ¿Cuál es el valor de a_3?

 Respuesta: 1.001 .

4. ¿Cuántos múltiplos de 4 hay entre 150 y 550?

 Respuesta: 100 .

5. ¿Cuál es término 12 de la siguiente progresión armónica $a_1 = \frac{4}{3}$, $a_2 = \frac{4}{6}, \ldots$?

 Respuesta: $\frac{1}{9}$.

6. Escribir el número $1.66\ldots$ como cociente de enteros.

 Respuesta: $\frac{5}{3}$.

7. En una progresión aritmética $a_1 = -11$, $a_4 = -2$, ¿cuál es el valor de la diferencia común?

 Respuesta: 3 .

8. En una progresión aritmética $a_3 = 1 + i$, $a_4 = 1 + 2i$, ¿cuál es el valor de a_{10}?

 Respuesta: $1 + 8i$.

9. En una progresión geométrica $a_1 = 384$, $a_2 = 192$, $a_3 = 96$, calcula S_5.

Respuesta: 744 .

10. Escribir el número $2.888...$ como cociente de enteros.

Respuesta: $\frac{26}{9}$.

11. En la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$, ¿Cuál es el valor de S_4?

Respuesta: $\frac{25}{12}$.

12. En una progresión aritmética $a_3 = t-4$, $a_4 = 3t-6$, ¿Cuál es el valor de la diferencia común?

Respuesta: $2t-2$.

13. En la sucesión $a_n = n^{n-2}$, ¿Cuál es el valor de a_4?

Respuesta: 16 .

14. En una progresión geométrica, donde $a_4 = 40$ y $a_5 = -80$, ¿cuál es el valor de a_1?

Respuesta: -5 .

15. En una progresión aritmética $a_1 = 2t-1$, $a_2 = t-2$, ¿a qué es igual S_6?

Respuesta: $-3t-21$.

16. En la sucesión $a_n = \frac{n}{n+1}$, ¿Cuál es el valor de S_2?

Respuesta: $\frac{7}{6}$.

17. En la siguiente progresión armónica $a_1 = \frac{4}{d}$, $a_2 = \frac{4}{2d}$, . . ., ¿cuál es el valor de a_8?

Respuesta: $\frac{1}{2d}$.

18. En la progresión geométrica, donde $a_1 = 8$ y $a_4 = -27$, ¿cuánto vale r?

Respuesta: $-\frac{3}{2}$.

19. Calcula la suma infinita de la siguiente progresión geométrica: $a_1 = -64$, $a_2 = 48, \ldots$

Respuesta: $-\frac{256}{7}$.

20. En la siguiente progresión geométrica: $a_1 = -16$, $a_2 = -8$, . . . ¿cuál es el valor de a_7?

Respuesta: $-\frac{1}{4}$.

21. En una progresión geométrica: $a_1 = 1$, $a_2 = d^2$, $a_n = d^{10}$ ¿cuál es el valor de n?

Respuesta: 6 .

22. En la siguiente progresión armónica $a_1 = \frac{5}{2}$, $a_2 = \frac{5}{5}$, . . . , ¿qué lugar ocupa $a_n = \frac{1}{4}$?

Respuesta: 7 .

Capítulo VI.

Convergencia de sucesiones.

6.1 Weierstarss, Karl

Karl Weierstrass, matemático alemán, nacido el 31 de Octubre de 1815.

Fue profesor del Instituto Industrial y de la Universidad de Berlín.

Investigó en diversos campos de las Matemáticas, entre los que destacan: el análisis funcional y las funciones analíticas y elípticas. Estudió los números irracionales como límites de series convergentes.

Sus prósperas conferencias en matemáticas atraían a los estudiantes de todo el mundo. Entre 1859 y 1860 presentó “Introducción al Análisis”, entre 1863 y 1864 comenzó a formular su teoría de los números reales.

6.2 Sucesión convergente.

Definición.

Una sucesión $\{a_n\}$ converge a un número real L, cuando n tiende a ∞, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que $|a_n - L| < \varepsilon$, si $n \geq N$.

Notación:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Se lee "el límite de a_n cuando n tiende a ∞ es igual a L".

La sucesión $\{a_n\}$ converge y tiene por límite a L. Es decir, mientras n toma valores más grandes, los términos de la sucesión $\{a_n\}$ se aproximan cada vez más al valor de L.

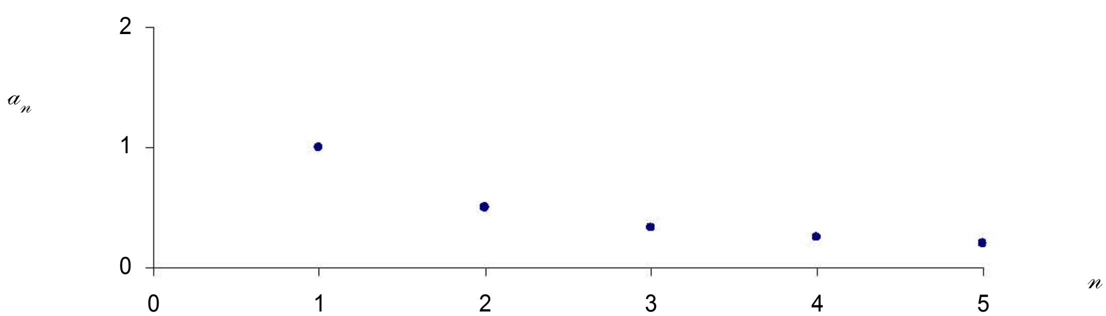
Representación gráfica.

1. Sea la sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

Los primeros 5 términos de la sucesión son:

$a_1 = \frac{1}{1}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_5 = \frac{1}{5}$.

Gráfica de la sucesión:



Observamos que cuando n toma valores cada vez más grandes, es decir n tiende a ∞, los términos de la sucesión se acercan a cero. La sucesión converge a cero.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $\mathrm{N} \in N$, tal que, si $n \geq \mathrm{N}$, entonces:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$, es decir,

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$, para $n \geq \mathrm{N}$

Sea $\mathrm{N} > \dfrac{1}{\varepsilon}$

Por ser: $n \geq \mathrm{N}$, entonces,

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

de donde:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

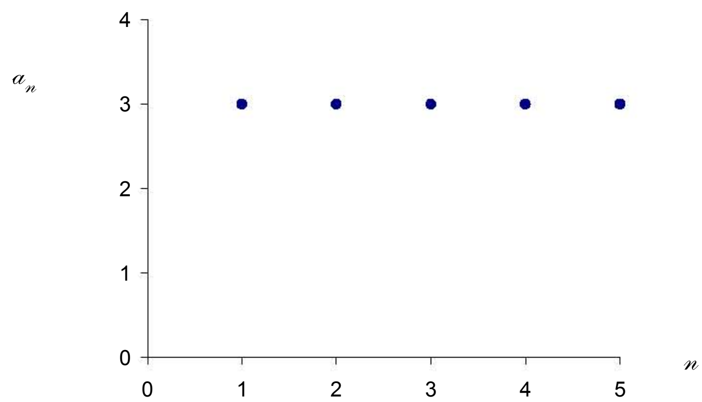
Por lo tanto, $|a_n - 0| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$

2. Sea la sucesión $\{a_n\} = \{3\}$

Los primeros 5 términos de la sucesión son:

$a_1 = 3$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3$, $a_4 = 3$, $a_5 = 3$.

Gráfica de la sucesión:



Observamos que cuando n tiende a ∞, los términos de la sucesión son todos iguales a 3. La sucesión converge a 3. $\lim_{n\to\infty} 3 = 3$

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $\mathrm{N} \in N$, tal que, si $n \geq \mathrm{N}$, entonces:

$|a_n - L| < \varepsilon$, es decir,

$|3-3| < \varepsilon$

$0 < \varepsilon$, lo cual se cumple.

6.3 Sucesión acotada.

Definición.

Una sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente si existe un número $M \in \Re$, tal que

$a_n \leq M$, para todo $n \geq 1$.

M es llamada una cota superior de la sucesión.

Ejemplos:

1. Sea $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{3}{4}$, $a_4 = \frac{4}{5}$, . . .

Esta sucesión esta acotada superiormente, $M = 1$ es una cota superior, porque,

$a_1 = \frac{1}{2} < 1$, $a_2 = \frac{2}{3} < 1$, $a_3 = \frac{3}{4} < 1$, $a_4 = \frac{4}{5} < 1$, . . . $a_n < M$, para todo $n \geq 1$.

Justificación:

Por ser $n < n+1$, donde $n > 0$, $n+1 > 0$

entonces $\frac{n}{n+1} < 1$, para cualquier $n \in N$.

Por lo tanto, $M = 1$ es una cota superior.

2. Sea $\{a_n\} = \{5\}$

$a_1 = 5$, $a_2 = 5$, $a_3 = 5$, $a_4 = 5$, . . .

Esta sucesión está acotada superiormente, $M = 5$ es una cota superior, porque,

$a_1 = 5 = M$, $a_2 = 5 = M$, $a_3 = 5 = M$, $a_4 = 5 = M$, . . . $a_n = M$, para toda $n \geq 1$.

3. Sea $\{a_n\} = \{n^2\}$

$a_1 = 1^2$, $a_2 = 2^2$, $a_3 = 3^2$, $a_4 = 4^2$, . . .

$a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, . . .

Esta sucesión no está acotada superiormente.

Demostración:

Supongamos que $\{a_n\} = n^2$ está acotada superiormente. Entonces existe $M > 0$, tal que:

$n^2 < M$ de donde $n < \sqrt{M}$ esto implica que los números naturales están acotados superiormente, lo cual es una contradicción.

Definición.

Una sucesión $\{a_n\}$ está acotada inferiormente si existe un número $m \in \Re$, tal que

$m \leq a_n$, para todo $n \geq 1$.

m es llamada una cota inferior de la sucesión.

Ejemplo:

1. Sea $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_4 = \frac{1}{5}$, . . .

Esta sucesión esta acotada inferiormente, $m = 0$ es una cota inferior, porque,

$0 < a_1 = \frac{1}{2}$, $0 < a_2 = \frac{1}{3}$, $0 < a_3 = \frac{1}{4}$, $0 < a_4 = \frac{1}{5}$, . . . $0 < a_n$, para todo $n \geq 1$.

Justificación:

Como $0 < 1$ y $n > 0$, $n + 1 > 0$

entonces multiplicando a la desigualdad por $\frac{1}{n+1} > 0$,

$0 < \frac{1}{n+1}$, para cualquier $n \in N$.

Por lo tanto, $m = 0$ es una cota inferior.

2. Sea $\{a_n\} = \{4\}$

$a_1 = 4$, $a_2 = 4$, $a_3 = 4$, $a_4 = 4$, . . .

Esta sucesión esta acotada inferiormente $m = 4$ es la cota inferior, porque,
$a_1 = 4 = m$, $a_2 = 4 = m$, $a_3 = 4 = m$, $a_4 = 4 = m$, . . . $a_n = m$, para toda $n \geq 1$.

3. Sea $\{a_n\} = \{-3n\}$

$a_1 = -3(1)$, $a_2 = -3(2)$, $a_3 = -3(3)$, $a_4 = -3(4)$, . . .

$a_1 = -3$, $a_2 = -6$, $a_3 = -9$, $a_4 = -12$, . . .

Esta sucesión no está acotada inferiormente.

Demostración:

Supongamos que $\{a_n\} = \{-3n\}$ está acotada inferiormente. Entonces existe m, tal que:

$$m < -3n$$

de donde

$$\frac{m}{-3} > n$$

esto implica que los números naturales están acotados superiormente, lo cual es una contradicción.

Definición.

Las sucesiones que están acotadas superior e inferiormente se llaman acotadas.

Una sucesión $\{a_n\}$ está acotada si existen $M, m \in \Re$, tal que

$m \leq a_n \leq M$, para todo $n \geq 1$.

Ejemplo:

1. Sea $\{a_n\} = (-1)^n$

$a_1 = (-1)^1$, $a_2 = (-1)^2$, $a_3 = (-1)^3$, $a_4 = (-1)^4$, . . .

$a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$, . . .

Esta sucesión esta acotada $m = -1$ y $M = 1$, por que, $m \leq a_n \leq M$, para toda $n \geq 1$.

Definición.0000

Toda sucesión convergente es acotada.

6.4 Sucesión divergente.

Definición.

Una sucesión es divergente si 0dicha sucesión no converge.

Ejemplo:

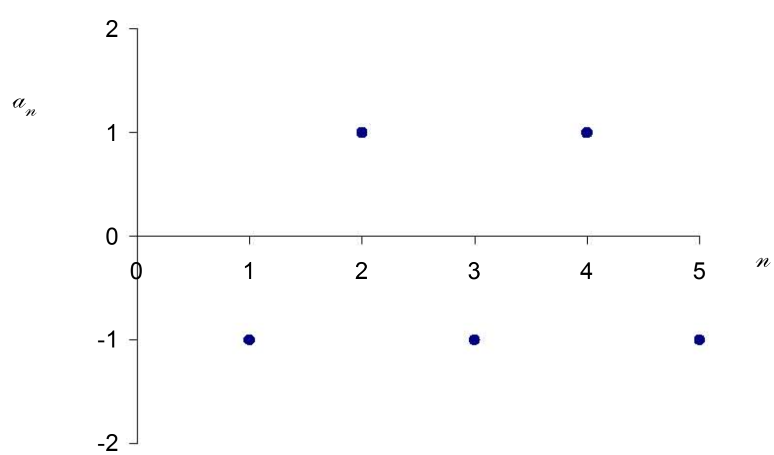
1. Sea la sucesión $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$

Los primeros 5 términos de la sucesión son:

$a_1 = (-1)^1$, $a_2 = (-1)^2$, $a_3 = (-1)^3$, $a_4 = (-1)^4$, $a_5 = (-1)^5$.

$a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$, $a_5 = -1$.

Gráfica de la sucesión:



Observamos que cuando n toma valores cada vez más grandes, los términos de la sucesión no se acercan a un valor en particular. La sucesión diverge.

Algunos casos de sucesiones divergentes son aquellas que crecen o decrecen indefinidamente cuando n crece indefinidamente.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Formalmente:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ si para todo $M > 0$, existe $\mathrm{N} \varepsilon N$, tal que si $n \geq \mathrm{N}$, entonces:

$$a_n > M$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ si para todo $M > 0$, existe $\mathrm{N} \varepsilon N$, tal que si $n \geq \mathrm{N}$, entonces:

$$a_n < -M$$

Representación gráfica.

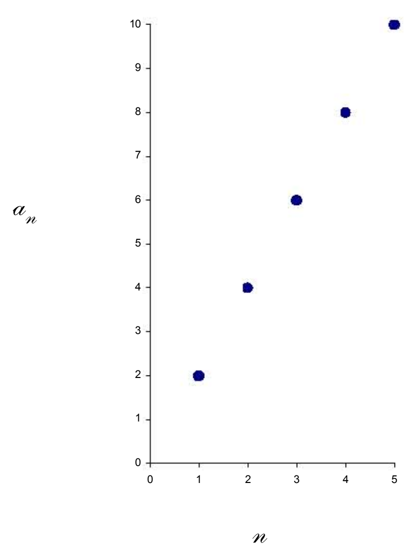
1. Sea la sucesión la sucesión $\{a_n\} = \{2n\}$

Los primeros 5 términos de la sucesión son:

$a_1 = 2(1)$, $a_2 = 2(2)$, $a_3 = 2(3)$, $a_4 = 2(4)$, $a_5 = 2(5)$.

$a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$, $a_5 = 10$.

Gráfica de la sucesión:



Observamos que cuando n crece indefinidamente, es decir, tiende a ∞, los términos de la sucesión también crecen.

Por demostrar:

$$\lim_{n\to\infty} 2n = \infty$$

Es decir, si para todo $M > 0$, existe $\mathrm{N} \,\varepsilon\, N$, tal que si $n \geq \mathrm{N}$,

entonces $2n > M$

Sea $\mathrm{N} > \dfrac{M}{2}$,

entonces si $n \geq \mathrm{N} > \dfrac{M}{2}$

tenemos que $n > \dfrac{M}{2}$

Por lo tanto, $2n > M$.

Definición.

Una sucesión $\{a_n\}$ es monótona si es creciente o decreciente.[3]

6.5 Sucesión nula.

Definición.

Una sucesión $\{a_n\}$ es nula si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Ejemplos:

1) Sea $\{a_n\} = \dfrac{1}{n}$

$a_1 = \dfrac{1}{1}$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_3 = \dfrac{1}{3}$, $a_4 = \dfrac{1}{4}$, . . .

$\{a_n\} = \dfrac{1}{n}$ es nula porque $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

[3] Capítulo I. 1.4

2) Sea $\{a_n\} = \dfrac{n+1}{n^3}$

$$a_1 = \frac{1+1}{1^3}\ , \qquad a_2 = \frac{2+1}{2^3}\ , \qquad a_3 = \frac{3+1}{3^3}\ , \qquad a_4 = \frac{4+11}{4^3}\ , \qquad . \quad . \quad .$$

$$a_1 = 2\ , \qquad a_2 = \frac{3}{8}\ , \qquad a_3 = \frac{4}{27}\ , \qquad a_4 = \frac{5}{64}\ , \qquad . \quad . \quad .$$

Veremos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n^3} = 0$

Por demostrar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{n^3} = 0$$

Es decir, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\mathrm{N}\,\varepsilon\, N$, tal que si $n \geq \mathrm{N}$,

entonces $\left|\dfrac{n+1}{n^3}\right| < \varepsilon$

$$\begin{aligned}
\frac{1+n}{n^3} &= \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}-1\right)+\frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^2} \ < \ \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} \ < \ \frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n}<\varepsilon
\end{aligned}$$

si $n > \dfrac{2}{\varepsilon}$, entonces $\mathrm{N} > \dfrac{2}{\varepsilon}$

6.6 Propiedades de sucesiones convergentes.

Propiedad 1.

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$ y c es un número real, entonces:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} c\ a_n = c\,L_1$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = L_1 + L_2$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\, b_n = L_1\, L_2$

Demostración:

ii) Por demostrar:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\mathrm{N} \in N$, tal que, si $n \geq \mathrm{N}$, entonces:

$$|a_n + b_n - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$$

Sean $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$, entonces como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$,

existen $\mathrm{N}_1,\ \mathrm{N}_2 \in N$, tales que si $n \geq \mathrm{N}_1$, entonces $|a_n - L_1| < \varepsilon'$

si $n \geq \mathrm{N}_2$, entonces $|b_n - L_2| < \varepsilon'$

Sea $\mathrm{N} = \mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2$, si $n \geq \mathrm{N}$ entonces,

$n \geq \mathrm{N}_1$ y $n \geq \mathrm{N}_2$ por consiguiente

si $n \geq \mathrm{N}$ tenemos que $|a_n - L_1| < \varepsilon'$ y $|b_n - L_2| < \varepsilon'$, pero

$$|a_n + b_n - (L_1 + L_2)| = |a_n - L_1 + b_n - L_2| \leq |a_n - L_1| + |b_n - L_2| < 2\varepsilon' = \varepsilon$$

Por lo tanto, si $n \geq \mathrm{N}$, entonces $|a_n + b_n - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$, implica que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L_1 + L_2$$

iii) Por demostrar:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\mathrm{N} \in N$, tal que, si $n \geq \mathrm{N}$, entonces:

$$|a_n b_n - (L_1 L_2)| < \varepsilon$$

$$|a_n b_n - (L_1 L_2)| = |a_n b_n - a_n L_2 + a_n L_2 - L_1 L_2| \leq |a_n||b_n - L_2| + |a_n - L_1||L_2|$$

Como $\{a_n\}$ es acotada, es decir, existe $M > 0$, tales que $|a_n| \leq M$, para todo $n \geq 1$,

entonces $|a_n b_n - L_1 L_2| \leq M|b_n - L_2| + |a_n - L_1||L_2|$

Sea $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2|L_2|}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2M}$, entonces existen $\mathrm{N}_1,\ \mathrm{N}_2 \in N$, tales que

si $n \geq \mathrm{N}_1$, entonces $|a_n - L_1| < \varepsilon_1$

si $n \geq \mathrm{N}_2$, entonces $|b_n - L_2| < \varepsilon_2$

sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces si $n \geq N$, tenemos que:

$$|a_n b_n - (L_1 L_2)| \leq M|b_n - L_2| + |a_n - L_1||L_2| < M\frac{\varepsilon}{2M} + |L_2|\frac{\varepsilon}{2|L_2|} = \varepsilon$$

Por lo tanto, si $n \geq N$, entonces $|a_n b_n - (L_1 L_2)| < \varepsilon$, implica que

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = L_1 L_2$$

Ejemplos:

1) Sea $\{a_n\} = \dfrac{2n-1}{n}$

$$a_1 = \frac{2(1)-1}{1}, \quad a_2 = \frac{2(2)-1}{2}, \quad a_3 = \frac{2(3)-1}{3}, \quad a_4 = \frac{2(4)-1}{4}, \quad a_5 = \frac{2(5)-1}{5}, \quad . \quad . \quad .$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{5}{3}, \quad a_4 = \frac{7}{4}, \quad a_5 = \frac{9}{5}, \quad . \quad . \quad .$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} = 2$$

Por demostrar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} = 2$$

para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \,\varepsilon\, N$, tal que si $n > N$, entonces

$$\left|\frac{2n-1}{n} - 2\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{2n-1}{n} - 2\right| = \left|\frac{2n-1-2n}{n}\right| = \left|\frac{-1}{n}\right| < \frac{1}{n}$$

si $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, tomamos $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$

Sea $c = 4$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} c\,a_n = cL$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} 4\left(\frac{2n-1}{n}\right) = 4 \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n}$$

$$= 4(2) = 8$$

2) Sea $\{a_n\} = \dfrac{n}{n+1}$

$$a_1 = \frac{1}{1+1}\ , \quad a_2 = \frac{2}{2+1}\ , \quad a_3 = \frac{3}{3+1}\ , \quad a_4 = \frac{4}{4+1}\ , \quad a_5 = \frac{5}{5+1}\ , \quad . \ . \ .$$

$$a_1 = \frac{1}{2}\ , \quad a_2 = \frac{2}{3}\ , \quad a_3 = \frac{3}{4}\ , \quad a_4 = \frac{4}{5}\ , \quad a_4 = \frac{5}{6}\ , \quad . \ . \ .$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Sea $\{b_n\} = \dfrac{3n}{n+1}$

$$b_1 = \frac{3(1)}{1+1}\ , \quad b_2 = \frac{3(2)}{2+1}\ , \quad b_3 = \frac{3(3)}{3+1}\ , \quad b_4 = \frac{3(4)}{4+1}\ , \quad b_5 = \frac{3(5)}{5+1}\ , \quad . \ . \ .$$

$$b_1 = \frac{3}{2}\ , \quad b_2 = \frac{6}{3}\ , \quad b_3 = \frac{9}{4}\ , \quad b_4 = \frac{12}{5}\ , \quad b_5 = \frac{15}{6} \quad . \ . \ .$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 3$$

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n\} + \{b_n\} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) + \left(\frac{3n}{n+1}\right)$$

$$= 1 + 3 = 4$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n}{n+1}\right)$$

$$= 4$$

3) Sea $\{a_n\} = 2$

$$a_1 = 2\ , \quad a_2 = 2\ , \quad a_3 = 2\ , \quad . \ . \ .$$

$$\lim_{n\to\infty} 2 = 2$$

Sea $\{b_n\} = \dfrac{n+1}{n}$

$$b_1 = \frac{2}{1} \quad , \qquad b_2 = \frac{3}{2} \ , \qquad b_3 = \frac{4}{3} \ , \qquad \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

$$= 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n\}\{b_n\} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= 2(1) = 2$$

Propiedad 2.

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$, si $\{d_n\}$ es una sucesión tal que $a_n \le d_n \le b_n$, para $n \ge n_0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} d_n = L$$

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$,

existe $\mathrm{N}_1 \in N$ tal que

$|a_n - L| < \varepsilon$, para todo $n \ge \mathrm{N}_1$

existe $\mathrm{N}_2 \in N$ tal que

$|b_n - L| < \varepsilon$, para todo $n \ge \mathrm{N}_2$

Sea $\mathrm{N} = \max\{n_0, \mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2\}$, tenemos que:

$L - \varepsilon < a_n \le d_n \le b_n < L + \varepsilon$, para todo $n \ge \mathrm{N}$

$|L - \varepsilon| < d_n$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = L$

Ejemplos:

1. Sea $\{a_n\} = \dfrac{n}{n+1}$

$$a_1 = \frac{1}{1+1}, \quad a_2 = \frac{2}{2+1}, \quad a_3 = \frac{3}{3+1}, \quad a_4 = \frac{4}{4+1}, \quad . \; . \; .$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{3}{4}, \quad a_4 = \frac{4}{5}, \quad . \; . \; .$$

Sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

Sea $\{b_n\} = \dfrac{n+1}{n}$

$$b_1 = \frac{1+1}{1}, \quad b_2 = \frac{2+1}{2}, \quad b_3 = \frac{3+1}{3}, \quad b_4 = \frac{4+1}{4}, \quad . \; . \; .$$

$$b_1 = 2, \quad b_2 = \frac{3}{2}, \quad b_3 = \frac{4}{3}, \quad b_4 = \frac{5}{4}, \quad . \; . \; .$$

Sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$

Sea $\{d_n\} = \left\{ \dfrac{\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{n+1}{n}}{2} \right\}$

$$\{d_n\} = \left\{ \frac{2n^2 + 2n + 1}{2n^2 + 2n} \right\}$$

$$d_1 = \frac{2(1)^2 + 2(1) + 1}{2(1)^2 + 2(1)}, \quad d_2 = \frac{2(2)^2 + 2(2) + 1}{2(2)^2 + 2(2)}, \quad d_3 = \frac{2(3)^2 + 2(3) + 1}{2(3)^2 + 2(3)}, \quad d_4 = \frac{2(4)^2 + 2(4) + 1}{2(4)^2 + 2(4)}, \ldots$$

$$d_1 = \frac{5}{4}, \quad d_2 = \frac{13}{12}, \quad d_3 = \frac{25}{24}, \quad d_4 = \frac{41}{40}, \quad . \; . \; .$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \leq d_1 = \frac{5}{4} \leq b_1 = 2$$

$$a_2 = \frac{2}{3} \leq d_2 = \frac{13}{12} \leq b_2 = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{3}{4} \leq d_3 = \frac{25}{24} \leq b_3 = \frac{4}{3}$$

$$a_4 = \frac{4}{5} \leq d_4 = \frac{41}{40} \leq b_4 = \frac{5}{4}$$

.

.

.

$a_n \leq d_n \leq b_n$, para todo $n \geq n_0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \{d_n\} = 1$

6.7 Criterios de convergencia

Criterio 1.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente. La sucesión $\{a_n\}$ converge si y sólo si está acotada superiormente.

Demostración:

$\Rightarrow$)

Suponemos que $\{a_n\}$ converge

Si $\{a_n\}$ converge entonces está acotada.[4]

[4] Por definición, ver Pág. 99.

$\Leftarrow$)

Suponemos que $\{a_n\}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente.

Por demostrar: $\{a_n\}$ converge.

Es decir, para $\varepsilon > 0$, existe $\mathrm{N} \in N$ tal que

$|a_n - L| < \varepsilon$, para todo $n \geq \mathrm{N}$

Sea $S = \{a_n | \; n \geq 1\} \neq 0$ y sabemos que la sucesión está acotada superiormente, entonces S alcanza su supremo.

Llamemos $\alpha = \sup S$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\alpha - \varepsilon$ no es una cota superior de S, de donde existe $\mathrm{N} \in N$ tal que $\alpha - \varepsilon < a_N$

Como $\{a_n\}$ es una sucesión creciente entonces

$$\alpha - \varepsilon < a_n \qquad , \text{si } n > \mathrm{N}$$

y $\quad \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha$

$$-\varepsilon < a_n - \alpha < 0 < \varepsilon$$

Si $n > \mathrm{N}$

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$, es decir, $\{a_n\}$ converge.

Ejemplos:

1) Sea $\{a_n\} = \dfrac{n}{n+1}$

$$a_1 = \frac{1}{2}\ , \qquad a_2 = \frac{2}{3}\ , \qquad a_3 = \frac{3}{4}\ , \qquad a_4 = \frac{4}{5}\ , \qquad a_5 = \frac{5}{6}\ , \qquad . \quad . \quad .$$

Esta sucesión converge, porque, es creciente y esta acotada superiormente[5], $M = 1$ es una cota superior.

2. Sea $\{a_n\} = n^2$

$a_1 = 1^2$, $a_2 = 2^2$, $a_3 = 3^2$, $a_4 = 4^2$, . . .

$a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, . . .

Esta sucesión no converge, porque, aunque es creciente no esta acotada superiormente.

Criterio 2.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente. La sucesión $\{a_n\}$ converge si y sólo si está acotada inferiormente.

Ejemplo:

1. Sea $\{a_n\} = \dfrac{1}{n+1}$

$a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = \dfrac{1}{3}$, $a_3 = \dfrac{1}{4}$, $a_4 = \dfrac{1}{5}$, . . .

Esta sucesión converge, porque es decreciente y esta acotada inferiormente[6] $m = 0$ es la cota inferior.

2. Sea $\{a_n\} = -3n$

$a_1 = -3(1)$, $a_2 = -3(2)$, $a_3 = -3(3)$, $a_4 = -3(4)$, . . .

$a_1 = -3$, $a_2 = -6$, $a_3 = -9$, $a_4 = -12$, . . .

Esta sucesión no converge, porque, aunque es decreciente no esta acotada inferiormente.

[5] Por definición, ejemplo 1, ver pág. 96.
[6] Por definición, ejemplo 1, ver pág. 97.

Criterio 3.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión monótona entonces:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ si $\{a_n\}$ es creciente y no es acotada superiormente.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ si $\{a_n\}$ es decreciente y no es acotada inferiormente.

Ejemplos:

1. Sea $\{a_n\} = n$

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, . . .

Esta sucesión es creciente y no esta acotada superiormente, entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

2. Sea $\{a_n\} = n^3$

$a_1 = 1^3$, $a_2 = 2^3$, $a_3 = 3^3$, $a_4 = 4^3$, . . .

$a_1 = 1$, $a_2 = 8$, $a_3 = 27$, $a_4 = 64$, . . .

Esta sucesión es creciente y no esta acotada superiormente, entonces,

$$\lim_{n\to\infty} n^3 = \infty \ .$$

3. Sea $\{a_n\} = -n+1$

$a_1 = -1+1$, $a_2 = -1+2$, $a_3 = -1+3$, $a_4 = -1+4$, . . .

$a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = -2$, $a_4 = -3$, . . .

Esta sucesión es decreciente y no es acotada inferiormente, entonces,

$$\lim_{n\to\infty} -n+1 = -\infty \ .$$

Criterio 4.

Sea $\underset{n\to\infty}{lím}\ a_n = \infty$ y sea $\{b_n\}$ una sucesión entonces:

i) $\underset{n\to\infty}{lím}\ b_n = \infty$ si $b_n \geq ka_n$ para $n \geq n_0$ y $k > 0$.

ii) $\underset{n\to\infty}{lím}\ b_n = -\infty$ si $b_n \leq -ka_n$ para $n \geq n_0$ y $k > 0$.

Demostración

i) Supongamos que $b_n \geq ka_n$, $n \geq n_0$, $k > 0$.

Sea $M \geq 0$

Por demostrar, existe $\mathrm{N} \in N$ tal que si $n \geq \mathrm{N}$ entonces $b_n \geq M$

Sea $M' = \dfrac{M}{k}$, como $\underset{n\to\infty}{lím}\ a_n = \infty$, existe $\mathrm{N}_1 \in N$, tal que si $n \geq \mathrm{N}_1$, entonces $a_n > \dfrac{M}{k}$

sea $\mathrm{N} = \max\{\mathrm{N}_1,\ n_0\}$

si $n \geq \mathrm{N}$ entonces $b_n \geq ka_n > k\dfrac{M}{k} = M$

por lo tanto, $\underset{n\to\infty}{lím}\ b_n = \infty$.

ii) Ahora supongamos que:

$b_n \leq -ka_n$, $n \geq n_0$, $k > 0$

Sea $M' = \dfrac{M}{k}$, existe $\mathrm{N}_1 \in N$ tal que si $n \geq \mathrm{N}$ entonces $a_n > M'$

sea $\mathrm{N} = \max\{\mathrm{N}_1,\ n_0\}$

si $n \geq \mathrm{N}$ entonces $b_n \leq -ka_n < -kM' = \dfrac{-kM}{k} = -M$

por lo tanto, $\underset{n\to\infty}{lím}\ b_n = -\infty$.

Ejemplo:

1) Sea $\{a_n\} = \{n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

sea $\{b_n\} = \{5n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} 5n = \infty$

si $b_1 \geq ka_1$

$b_n = 5n \geq 5a_n$, para todo $n > 0$

$k = 5$.

2) Sea $\{a_n\} = n+1$ $\lim\limits_{n\to\infty} n+1 = \infty$

sea $\{b_n\} = -(n+1)$

si $b_1 \leq -ka_1$

$b_n \leq -ka_n$, para $k = 1 > 0$

$-(n+1) \leq -1(n+1)$

$\lim\limits_{n\to\infty} -(n+1) = -\infty$.

Criterio 5. Criterio de la razón

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = c$, entonces:

i) Si $c < 1$ entonces $\{a_n\}$ es nula.

ii) Si $c > 1$ entonces $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$.

iii) Si $c = 1$ entonces no podemos afirmar nada de este criterio.

Demostración:

i) $c<1$

Existe $b\in\Re$ tal que $0\le c<b<1$

Sea $\varepsilon=b-c$, como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=c$, entonces existe $\mathrm{N}\in N$, tal que, si $n\ge \mathrm{N}$

entonces $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-c\right|<\varepsilon$

Si $n\ge \mathrm{N}$ $\quad -\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}-c<\varepsilon$

Si $n\ge \mathrm{N}$ $\quad -(b-c)<\frac{a_{n+1}}{a_n}-c<b-c$ $\quad$ Sumando c a la doble desigualdad

$$-b+c+c<\frac{a_{n+1}}{a_n}-c+c<b-c+c$$

$$2c-b<\frac{a_{n+1}}{a_n}<b$$

Considerando la segunda desigualdad, tenemos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<b$$

Si $n=\mathrm{N}$ entonces $a_{N+1}<b\,a_N$, para $a_N>0$

Si $n=\mathrm{N}+1$ entonces $a_{N+2}<b\,a_{N+1}<b^2a_N$,

Si $n=\mathrm{N}+2$ entonces $a_{N+3}<b\,a_{N+2}<b^3a_N$,

. .

. .

. .

Si $n=\mathrm{N}+k$ entonces $a_{N+k}<b^ka_N$,

Por tanto, si $n\ge\mathrm{N}$, $n=\mathrm{N}+k$,

$$a_n<b^{n-N}a_N$$

$a_n<\frac{b^n}{b^N}a_N$, sea $d=\frac{a_N}{b_N}$, $\quad 0<a_n<d\,b^n$

como $|b|<1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}c\,b^n=0$. Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$.

ii) Sea $\{b_n\} = \dfrac{1}{\{a_n\}}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{c} < 1$$

Por i) la sucesión $\{b_n\}$ es nula y por definición la sucesión $\{a_n\}$ diverge a ∞.

iii) Sea $\{a_n\} = \{n\}$ y $\{b_n\} = \dfrac{1}{\{a_n\}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \quad \text{y} \quad \{a_n\} \text{ diverge}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Y $\{b_n\}$ es nula. Pero $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

Ejemplos:

1) Sea $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}$

$$a_1 = \frac{1}{2^1}, \quad a_2 = \frac{2}{2^2}, \quad a_3 = \frac{3}{2^3}, \quad a_4 = \frac{4}{2^4}, \quad . \quad . \quad .$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{4}, \quad a_3 = \frac{3}{8}, \quad a_4 = \frac{4}{16}, \quad . \quad . \quad .$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n (n+1)}{2^{n+1}(n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{2n}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Por ser $c = \frac{1}{2} < 1$, $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{2^n}\right\}$ es nula.

2) Sea $\{a_n\} = \left\{\frac{5n}{n+1}\right\}$

$a_1 = \frac{5(1)}{1+1}$, $a_2 = \frac{5(2)}{2+1}$, $a_3 = \frac{5(3)}{3+1}$, $a_4 = \frac{5(4)}{4+1}$, . . .

$a_1 = \frac{5}{2}$, $a_2 = \frac{10}{3}$, $a_3 = \frac{15}{4}$, $a_4 = \frac{20}{5}$, . . .

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5(n+1)}{n+2}}{\frac{5n}{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5(n+1)^2}{5n(n+2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{2}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}}$$

Por ser $c = 1$, no podemos concluir nada de $\{a_n\}$.

Criterio 6. Criterio de la raíz

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos no negativos y $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$, entonces:

i) Si $c<1$ entonces $\{a_n\}$ es nula.

ii) Si $c>1$ entonces $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$.

iii) Si $c=1$ entonces no podemos afirmar nada de este criterio.

Demostración:

i) Sea $c<1$,

entonces existe $b \in \Re$, tal que $c < b < 1$

como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$, entonces dada $\varepsilon = b - c > 0$, existe N ε N tal que si

$n >$ N entonces $\left| \sqrt[n]{a_n} - c \right| < \varepsilon$

Así $n<$N, entonces $-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - c < \varepsilon$

$$c-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \varepsilon + c$$

$$c-(b-c) < \sqrt[n]{a_n} < b-c+c$$

$$2c-b < \sqrt[n]{a_n} < b$$

en particular tenemos,

si $n >$ N entonces $0 < \sqrt[n]{a_n} < b$

$$0 < a_n < b^n$$

como $|b|<1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$

Por el teorema , tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

6.8 Suma infinita de los términos de una progresión geométrica.

Sea a_1, a_2, a_3,. . ., a_n, . . . una progresión geométrica, r su razón y $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ su n-ésima suma. S_n converge a $S = \dfrac{a_1}{1-r}$, cuando n es muy grande ($n \to \infty$), si y sólo si la razón r es un número entre -1 y 1.

Notación:

$\boldsymbol{a_1}$ es el primer término.

$\boldsymbol{r}$ es la razón. Condición: $-1 < r < 1$

$\boldsymbol{S}$ es la suma de los términos ($n \to \infty$).

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

Ejemplos:

1. Calcula la suma de la siguiente progresión geométrica:

$a_1 = 80$, $a_2 = 40$, $a_3 = 20$, . . .

La razón es: $r = \dfrac{1}{2}$

La suma de la progresión es: $S = \dfrac{a_1}{1-r}$

$$S = \frac{80}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S = \frac{80}{\frac{1}{2}}$$

$$S = 160 \ .$$

2. Calcula la suma de la siguiente progresión geométrica

$a_1 = 2916$, $a_2 = -972$, $a_3 = 324$, . . .

La razón es: $r = -\frac{1}{3}$

La suma es: $S = \dfrac{a_1}{1-r}$

$$S = \frac{2916}{1+\frac{1}{3}}$$

$$S = \frac{2916}{\frac{4}{3}}$$

$$S = 2187 \ .$$

3. Calcula la suma de la siguiente progresión geométrica:

$a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{4}$, . . .

La razón es: $r = -\frac{1}{2}$

La suma es: $S = \dfrac{a_1}{1-r}$

$$S = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$S = \frac{1}{\frac{3}{2}}$$

$$S = \frac{2}{3} \ .$$

4. Calcula la suma de la siguiente progresión geométrica:

$a_1 = 1$, $a_2 = 1 - b$, $a_3 = (1-b)^2$, $a_4 = (1-b)^3$, . . .

donde: $0 < b < 1$

Por definición: $a_2 = a_1 r$

$1 - b = 1r$

$r = 1 - b$

La suma es: $S = \dfrac{a_1}{1-r}$

$$S = \frac{1}{1-(1-b)}$$

$$S = \frac{1}{1-1+b}$$

$$S = \frac{1}{b}\ .$$

5. En una progresión geométrica, el primer término es 54 y su suma es 81, ¿cuál es el valor de la razón?

Datos: $a_1 = 54$, $S = 81$.

Al sustituir en: $S = \dfrac{a_1}{1-r}$

$$81 = \frac{54}{1-r}$$

$$81(1-r) = 54$$

$$81 - 81r = 54$$

$$81 - 54 = 81r$$

$$27 = 81r$$

$$\frac{27}{81} = r$$

$$r = \frac{1}{3}\ .$$

6. En una progresión geométrica, la razón es $-\frac{1}{4}$ y su suma es -128, ¿cuánto vale el primer término?

Datos: $r = -\frac{1}{4}$

$S = -128$

Al sustituir en: $S = \dfrac{a_1}{1-r}$

$$-128 = \frac{a_1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$-128 = \frac{a_1}{1+\frac{1}{4}}$$

$$-128 = \frac{a_1}{\frac{5}{4}}$$

$$-128\left(\frac{5}{4}\right) = a_1$$

$$a_1 = -160\,.$$

7. En una progresión geométrica, $r = 0.1$ y $S = \frac{8}{9}$, ¿cuánto vale el cuarto término?

Datos: $r = 0.1 = \frac{1}{10}$

$S = \frac{8}{9}$

Al sustituir en: $S = \frac{a_1}{1-r}$

$$\frac{8}{9} = \frac{a_1}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$\frac{8}{9} = \frac{a_1}{\frac{9}{10}}$$

$$a_1 = \left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{9}{10}\right)$$

$$a_1 = \frac{8}{10} \; .$$

Por lo tanto, el cuarto término es:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_4 = a_1 r^3$$

$$a_4 = \frac{8}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^3$$

$$a_4 = \frac{8}{10}\left(\frac{1}{1000}\right)$$

$$a_4 = \frac{8}{10000}$$

$$a_4 = 0.0008 \; .$$

8. Escribir el número $4.\overline{13}$ como cociente de enteros.

Es un número con expresión decimal infinito periódico, es decir:

$4.\overline{13} = 4.1313131313\ldots$

La expresión decimal de este número podemos representarla como una suma infinita:

$4.\overline{13} = 4 + 0.13 + 0.0013 + 0.000013 + 0.00000013 + 0.0000000013 + \ldots$

Ahora trataremos de expresar estos términos como progresión geométrica infinita, así que debemos comenzar con el número 0.13 como el primer término de la progresión, es decir:

$a_1 = 0.13 \quad a_2 = 0.0013 \qquad a_3 = 0.000013$

Como ya sabemos: $a_2 = a_1 r$

$$0.0013 = 0.13r$$

$$\frac{0.0013}{0.13} = r$$

$$r = 0.01$$

Por lo tanto: S = 0.13 + 0.0013 + 0.000013 + 0.00000013 + 0.0000000013 + …

Al sustituir los valores de a_1 y r en S:

$$\boldsymbol{S} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.13}{1-0.01} = \frac{0.13}{0.99} = \frac{\frac{13}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{13}{99}$$

La fracción $\frac{13}{99}$ representa al número $0.1313131313\ldots$

Por último sumemos 4 a esta fracción para obtener el cociente buscado:

$$4 + \frac{13}{99} = \frac{409}{99}$$

Por lo tanto el número: $4.\overline{13} = \dfrac{409}{99}$

9. Escribir el número $2.5\overline{4}$ como cociente de enteros.

Es un número con expresión decimal infinito periódico, es decir:

$2.5\overline{4} = 2.5444444\ldots$

La expresión decimal de este número podemos representarla como una suma infinita:

$2.5\overline{4} = 2 + 0.5 + 0.04 + 0.004 + 0.0004 + 0.00004 + \ldots$

Ahora trataremos de expresar estos términos como progresión geométrica infinita, así que debemos comenzar con el número 0.04 como el primer término de la progresión, es decir:

$a_1 = 0.04 \qquad a_2 = 0.004 \qquad a_3 = 0.0004$

Como ya sabemos: $a_2 = a_1 r$

$$0.004 = 0.04r$$

$$\frac{0.004}{0.04} = r$$

$$r = 0.1$$

Por lo tanto: S = 0.04 + 0.004 + 0.0004 + 0.00004 + …

Al sustituir los valores de a_1 y r en S:

$$\boldsymbol{S} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.04}{1-0.1} = \frac{0.04}{0.9} = \frac{\frac{4}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{45}$$

La fracción $\frac{2}{45}$ representa al número $0.04444\ldots$

Por último sumemos 2.5 a esta fracción para obtener la fracción buscada:

$$2 + \frac{5}{10} + \frac{2}{45} = \frac{229}{90}$$

Por lo tanto, el número: $2.5\overline{4} = \frac{229}{90}$

10. Se deja caer una pelota a una altura de 2.7 metros, la cual rebota cada vez en $\frac{2}{3}$ la altura anterior. ¿Qué distancia habrá recorrido hasta alcanzar el reposo?

Si la pelota se deja caer en el primer rebote alcanza una altura de $(2.7)\left(\frac{2}{3}\right) = 1.8$.

En el segundo rebote alcanza una altura de $(1.8)\left(\frac{2}{3}\right) = 1.2$.

Cada altura, a partir del primer rebote, podemos escribirla como términos de una progresión geométrica:

$a_1 = 1.8 \quad a_2 = 1.2 \quad a_3 = 0.8 \quad . \ . \ .$

La distancia recorrida de la pelota, será el doble la suma de las distancias, porque cae y sube en el rebote.

$$\boldsymbol{S} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1.8}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{18}{10}}{\frac{1}{3}} = \frac{27}{5} = 5.4 \ .$$

Multiplicando por 2, la distancia es: (2)(5.4) = 10.8 .

Por último, sumamos la primer distancia de caída, es decir, 2.7: 10.8 + 2.7 = 13.5, por lo tanto, la distancia total, recorrida por la pelota hasta alcanzar el reposo, es de 13.5 metros.

6.9 Ejercicios propuestos:

1. En una progresión geométrica infinita $a_1 = 40$ y $S = \frac{1}{2}$, ¿cuánto vale la razón?

2. La suma infinita de una progresión geométrica es 30 y la $r = \frac{2}{3}$, ¿cuánto vale a_1?

3. Calcula la suma infinita de la siguiente progresión geométrica: $a_1 = 12$, $a_2 = 4$, $\cdots$

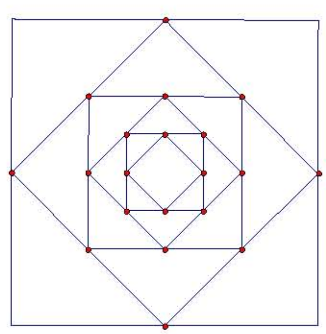
4. Calcular la suma infinita de la siguiente progresión geométrica: $a_1 = 115$, $a_2 = 46$, $\cdots$

5. Convierte a cociente de dos enteros el número 0.888…

6. Convierte a cociente de dos enteros el número 1.363636…

7. Convierte a cociente de dos enteros el número 2.33333…

8. El lado de un cuadrado mide 16 cm. Un segundo cuadrado es inscrito en el primero, a partir de los puntos medios de cada lado del cuadrado original. Un tercer cuadrado es inscrito en el segundo a partir de sus puntos medios del anterior. Continuando este proceso indefinidamente, de inscribir cuadrados a partir de los puntos medios de los lados del cuadrado anterior, como muestra la figura. Calcula la suma de las áreas de estos cuadrados. [7]



[7] Bittinger, Ellenbogen. Elementary and Intermediate Álgebra, Addison Wesley, USA 2002

Conclusiones:

El programa de estudios de la asignatura de Matemáticas VI, Área III y IV, de la Escuela Nacional Preparatoria de la UNAM, esta cimentado y fundamentado acorde a los niveles académicos que reclama nuestro país día a día, relacionándose con las áreas de conocimiento que involucran a nuestra sociedad, ya que cubre las necesidades educativas, científicas, sociales y personales que se marcan en los objetivos y propósitos del programa.

De igual forma, el programa es capaz de proveer a los estudiantes una metodología en la resolución de problemas; así como fomentar su habilidad y capacidad en la parte creativa que los constituye.

Es por esto, que esta tesis apoya tanto a profesores como alumnos para alcanzar los propósitos planteados por el programa de estudios para la unidad I, con el tema de "sucesiones".

Por otra parte, cuando el lector tiene un interés y habilidad especial por el estudio de las Matemáticas, el tema de sucesiones puede ser fácil de comprender.

Pero si hablamos de un joven estudiante de bachillerato:

- Con una diversidad de inquietudes.
- Que debe cursar la materia obligatoria de matemáticas.
- Además de no tener habilidad en el manejo de conceptos de álgebra y aritmética.
- Y contar con escasa bibliografía para el tema de sucesiones a este nivel.

Entonces, esta tesis "Sucesiones: Un enfoque para el nivel medio superior", será de ayuda para el alumno que debe concluir su bachillerato, porque este proyecto cuenta con un desarrollo detallado de los ejemplos para que el lector siga paso a paso la solución de los problemas planteados.

Además, de que también en este trabajo, el alumno encontrará respuesta a una de sus constantes interrogantes: “dónde se aplican las matemáticas”. El estudiante se dará cuenta, que algún día, en una determinada situación de su vida práctica, podrá utilizar el lenguaje de las matemáticas aplicando las sucesiones, para dar solución a su inquietud.

Profesor y alumno, en su andar por tener un proceso de enseñanza-aprendizaje significativo, podrán utilizar el material didáctico presentado en el capítulo V de esta tesis; el cual es un juego que los alumnos pueden elaborar fácilmente y con mínimos recursos. Éste fue ejercitado por los alumnos de la Escuela Nacional Preparatoria No. 7, en los grupos 611 y 616 (Área III y IV respectivamente) durante el ciclo escolar 2005-2006.

Este juego didáctico consiguió una respuesta favorable de los alumnos, quienes con gran entusiasmo por definir un ganador participaban en la solución de los problemas, mostrando interés y aprendizaje por el tema, desarrollando en los alumnos la capacidad de interacción y diálogo por medio del trabajo en equipo, de las discusiones grupales con sus compañeros y el profesor.

Bibliografía:

Zill Dennis G. , Dewar Jacqueline n.
"Álgebra y trigonometría"
Editorial McGraw-Hill Interamericana
Colombia, 2001.

Peters Max , Schaaf William L.
"Álgebra y Trigonometría un enfoque moderno"
Reverté Ediciones
México, 1999

Bittinger Marvin L., Ellenbogen David J.
"Elementary and Intermediate Algebra"
Edit. Addison Wesley
United Status of America, 2002

Swokowski Earl W., Cole Jeffery A.
"Fundamentals of Algebra and Trigonometry"
Books Cole Publishing Company
United States of America, 1997

Takeuchi Yu.
"Sucesiones y series" Tomo I
Editorial Limusa
México, 1980.

Sullivan Michael
"Precálculo"
Edit. Prentice Hall
México, 1997.

Thomas Jr. George B., Finney Ross L.
"Cálculo de una variable"
Pearson Educación
México,1998

Apóstol Tom M
"Calculus"
Editorial Reverté
España, 1982 .

Stewart James
"Calculus"
International Thomson Editores
United States of America, 1999.

Arizmendi Peimbert Hugo, Carrillo Hoyo Angel M, Lara Aparicio Miguel
"Cálculo"
Compañía Editorial Continental
México, 1981

Piskunov N.
"Cálculo diferencial e integral"
Editorial Limusa
México, 1999

Leithold, Louis
"El cálculo con geometría analítica"
HARLA
México, 1982

de Oteyza de Oteyza Elena, Lam Osnaya Ema,
Hernández Garciadiego Carlos, Carrillo Hoyo Ángel.
"Temas Selectos de Matmáticas"
Prentice – Hall
México, 2002

Arya, Jagdish C., Lardnerd W. Robin
"Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía"
Prentice - Hall
México, 1987

Haeussler, Ernest F. Jr., Paul Richard S.
"Matemáticas para administración y economía"
Pearson, Prentice - Hall
México, 2003

Northrop Eugene P.
"Riddles in Mathematics"
Penguin Books
Great Britain, 1971

Rodríguez Vidal Rafael, Rodríguez Rigual Maria del Carmen
"Cuentos y cuentas de los matemáticos"
Editorial Reverté
España, 1987

Referencias de Internet:

http://descartes.cnice.mecd.es/Albegra/Sucesion_Fibonacci

http://www.geocities.com/Athens/Acropolis/4329/fibonac.htm

http://www-etsi2.ugr.es/usuarios/jmaroza/anecdotario

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Fibonacci.html

http://www.ee.surrey.ac.uk/Personal/R.Knutt/Fibonacci/fib.html

http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/mate4k.htm

Anexos:

Solución de los ejercicios propuestos

Capítulo I. Sucesiones y series.

1. $a_1 = -2$, $a_2 = -1$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$.

2. $b_1 = -5$, $b_2 = -10$, $b_3 = -15$.

3. $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = 9$, $d_4 = 27$.

4. $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{3}{5}$, $a_5 = \frac{4}{6}$.

5. $\{b_n\} = \{2n\}$.

6. $\{a_n\} = \left\{135\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$.

7. $d_4 = 11$.

8. $b_{10} = \frac{10}{9}$.

9. $a_{18} = -30$.

10. $b_1 = 1$.

11. a) Estrictamente decreciente.
    b) Estrictamente creciente.
    c) No es estrictamente creciente ni estrictamente decreciente.

d) Estrictamente decreciente.

e) Estrictamente decreciente.

12. $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 8$, $a_4 = 11$.

13. $a_1 = 4$, $a_2 = 12$, $a_3 = 36$.

14. $a_1 = -1$, $a_2 = -2$, $a_3 = -1$, $a_4 = -2$, $a_5 = -1$.

15. $S_4 = 6$.

16. $S_3 = \frac{5}{6}$.

17. $S_5 = 1.1111$.

18. $\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{1+i} = \frac{13}{12}$.

19. $\sum_{i=1}^{4} i! = 33$.

20. $\sum_{i=1}^{2} (-4 + 3i) = 1$.

Capítulo II. Progresión aritmética.

1. $a_8 = -8$.

2. $a_{17} = 34w - 19$.

3. $a_{28} = -\dfrac{65}{3}$.

4. $S_{30} = 465r$.

5. $S_{25} = \dfrac{125}{4}$.

6. $n = 5$.

7. Hay 243 múltiplos de 3 entre 250 y 980.

8. La suma de los múltiplos de 6 entre 219 y 1257 es 127,674.

9. $a_2 = \dfrac{5}{5}$, $a_3 = \dfrac{7}{5}$, $a_4 = \dfrac{9}{5}$, $a_5 = \dfrac{11}{5}$.

10. La suma es 10,000 .

11. $S_{27} = -162$.

12. $a_2 = 3t + 3$, $a_3 = 5t + 4$, $a_4 = 7t + 5$.

13. $d = 3$

14. $a_1 = -9$

15. $S_{20} = 5{,}000$

Capítulo III. Progresión geométrica.

1. $S_6 = 189$.

2. $a_2 = 400$, $a_3 = 200$.

3. $r = 4$.

4. $a_3 = \frac{9}{2}$.

5. $n = 3$.

6. $a_4 = 27$.

7. $a_1 = 54$.

8. $S_4 = -10$.

9. Al finalizar el tercer año David obtendrá $13,310 por la beca.

10. La máquina al finalizar el segundo año tuvo un valor de $25,920.

Capítulo IV. Progresión armónica.

1. $a_9 = \frac{2}{31}$.

2. $a_{12} = \frac{1}{15}$.

3. $a_5 = \frac{3}{5i}$.

4. $a_8 = \frac{1}{20}$.

5. $a_{10} = \frac{b}{27c}$.

6. $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = \frac{1}{8}$.

7. $a_2 = \frac{1}{3}$.

8. $a_2 = \frac{C}{2r}$, $a_3 = \frac{C}{3r}$, $a_4 = \frac{C}{4r}$.

9. $a_2 = \frac{5}{8}$.

10. $a_2 = \frac{t}{12}$, $a_3 = \frac{t}{9}$.

Capítulo VI. Convergencia de sucesiones.

1. $r = \frac{1}{2}$.

2. $S = 30$.

3. $S = 18$.

4. $S = \frac{575}{3}$.

5. $\frac{8}{9}$.

6. $\frac{15}{11}$.

7. $\frac{7}{3}$.

8. 512 cm.^{2}