

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

NUCLEOS POR TRAYECTORIAS DIRIGIDAS
MONOCROMATICAS EN TORNEOS Y CASI-TORNEOS
M-COLOREADOS

TESIS
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
MATEMATICA
P R E S E N T A
MARIA DEL ROCIO SANCHEZ LOPEZ

TUTORA:
MAT. LAURA PASTRANA RAMIREZ

2006



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Sanchez
Lopez
Maria del Rocio
53 23 64 52
Universidad Nacional Autonoma de Mexico
Facultad de Ciencias
Matematicas
09725154-3
2. Datos del tutor
Mat
Laura
Pastrana
Ramirez
3. Datos del sinodal 1
Dra
Hortensia
Galeana
Sanchez
4. Datos del sinodal 2
Dr
Hugo Alberto
Rincon
Mejia
5. Datos del sinodal 3
Mat
Ivonne Atzelbi
Lopez
Hernandez
6. Datos del sinodal 4
Mat
Clara Elena
Vidrio
Amor

A mis padres: Teresita y Toño
A mis hermanos: Raquel, Graciela y Eduardo
Gracias a todos por su apoyo

índice general

Introducción	3
Preliminares	8
1. Núcleos y Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas	23
1.1. Núcleos.	27
1.2. Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas.	59
2. Torneos m-coloreados	68
2.1. Torneos m -coloreados sin C_3 ni T_3	70
2.2. Torneos m -coloreados con vecindades a lo más bicolores.	88
3. Casi-torneos m-coloreados	115
Conclusiones	153
Bibliografía	154

Introducción

Una digráfica D consta de un conjunto finito no vacío de objetos, llamados los vértices de D , y una colección de pares ordenados de distintos elementos de los vértices de D , cuyos elementos reciben el nombre de flechas o arcos de D .

El núcleo de una digráfica D se define como un subconjunto N de los vértices de la digráfica, que cumple lo siguiente:

1. Para cualquier par de elementos que se tome de N no hay flechas entre ellos.
2. Para cualquier vértice z que se tome fuera del conjunto N , debe de existir un vértice u en N tal que (z,u) pertenece al conjunto de las flechas de la digráfica.

Este concepto se debe a Von-Neumman y Morgenstern [10], y surgió a partir de un problema dado en la teoría de juegos.

Ahora, si coloreamos las flechas de una digráfica D con m colores distintos, y a esta digráfica la llamamos digráfica m -coloreada, lo más natural es preguntarnos lo siguiente: ¿Cómo definimos un conjunto independiente por colores?, ¿Cómo definimos un conjunto absorbente por colores?, ¿Cómo definimos lo que es un núcleo para esta nueva digráfica m -coloreada?

Una trayectoria dirigida monocromática, es una trayectoria dirigida cuyas flechas están coloreadas con un mismo color.

I) Un subconjunto N de vértices de una digráfica D m -coloreada es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas si para todo par de vértices de N no existen trayectorias dirigidas monocromáticas entre ellos.

II) Un subconjunto N de vértices de una digráfica D m -coloreada es absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas si para todo x que no pertenece a N , existe y en N tal que hay una xy -trayectoria dirigida monocromática en D .

Al núcleo de una digráfica D m -coloreada le llamaremos núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas y este debe de satisfacer las condiciones (*I*) y (*II*).

El objetivo principal de este trabajo es estudiar los resultados más recientes sobre las condiciones que se le debe de pedir a una digráfica m -coloreada para que ésta tenga núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, en particular estudiaremos dos tipos de digráficas m -coloreadas: Torneos m -coloreados y Casi-torneos m -coloreados.

Primero daremos las definiciones básicas de la Teoría de Digráficas que usaremos a lo largo de este trabajo, además de que se proporcionarán un par de resultados que serán útiles en capítulos posteriores.

En el Capítulo 1 estudiaremos algunos de los resultados que dan condiciones a las digráficas y a las digráficas m -coloreadas para que tengan núcleo y núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, respectivamente. Por ejemplo, el ciclo dirigido de longitud 3 y el ciclo dirigido de longitud tres cuyas flechas están coloreadas con tres colores distintos, al cual llamaremos C_3 , cumplen con no tener núcleo y núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, respectivamente.

Veremos que es posible relacionar el núcleo de una digráfica con el núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de una digráfica D m -coloreada por medio de una nueva digráfica m -coloreada obtenida a partir de D llamada la cerradura de D , denotada por $\mathcal{C}(D)$.

En el capítulo 2 estudiaremos a los torneos m -coloreados, los cuales son digráficas que cumplen con que para todo par de vértices existe una única flecha entre ellos. Veremos algunos de los resultados más recientes sobre las condiciones que se le deben de pedir a este tipo de digráficas m -coloreadas para que tengan núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Sands, Sauer y Woodrow demostraron en [1] que toda digráfica 2-coloreada tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, y por lo tanto todo torneo 2-coloreado tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. También propusieron el siguiente problema:

Problema. Si T es un torneo 3-coloreado que no tiene C_3 . ¿ T debe de tener núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas?

Veremos que Shen Minggang en [2] se dió cuenta que si a cualquier torneo T m -coloreado se le pide la condición de que no contenga torneos con tres vértices cuyas flechas esten coloreadas con tres colores distintos, entonces éste tendrá núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. También demostró que su resultado es lo mejor posible para $m \geq 5$.

Para el caso $m=3$ la pregunta aún sigue abierta y para el caso $m=4$ Hortensia Galeana y Rocío Rojas en [4] encontraron un contraejemplo.

En [6] para $m=3$ Hortensia Galeana y Rocío Rojas observaron lo siguiente: si se le pide a un torneo T 3-coloreado que no tenga C_3 y para cada vértice en T el número de colores que aparecen en las flechas que inciden en él son a lo

más dos, entonces T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, y para $m \geq 4$ prueban que si T es un torneo m -coloreado tal que para cada vértice en T el número de colores que aparecen en las flechas que inciden en él son a lo más dos, entonces T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. También demuestran que sus resultados son lo mejor posible.

En el Capítulo 3, nos preguntaremos que es lo que sucede si a un torneo m -coloreado le quitamos una flecha, ¿La nueva digráfica m -coloreada tendrá núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas bajo las mismas condiciones vistas para torneos m -coloreados?

A la nueva digráfica m -coloreada obtenida a partir de un torneo m -coloreado le llamaremos casi-torneo m -coloreado.

Hortensia Galeana y José de Jesús García en [5] obtuvieron un resultado análogo al que dió Shen Minggang para torneos.

Por otro lado, si consideramos el problema planteado por Sands, Sauer y Woodrow para torneos 3-coloreados, veremos que para casi-torneos no es cierto, es decir, Si D es un casi-torneo 3-coloreado sin C_3 , entonces D no necesariamente tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Hortensia Galeana y Rocío Rojas en [6] propusieron el siguiente problema.

Problema. Sea D un casi-torneo m -coloreado. Si D no tiene C_3 y para cada vértice en D el número de colores que aparecen en las flechas que inciden en él son a lo más dos, entonces ¿ D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas?

Encontramos que para $m=3$ la respuesta a la pregunta anterior no necesariamente es cierta y daremos como contraejemplo un casi-torneo 3-coloreado que

cumple con las condiciones de la pregunta y no tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, para $m \geq 4$ probaremos que la respuesta a la pregunta es afirmativa, y aún más, se demostrará que $\mathcal{C}(D)$ es una digráfica núcleo perfecta.

Preliminares

En esta sección se darán las definiciones básicas que se utilizarán en la presente tesis. Además se proporcionarán algunos resultados de la Teoría de Digráficas, los cuales jugarán un papel muy importante en la demostración de los resultados presentados sobre la teoría de núcleos.

Definición 1 . Una digráfica D consta de un conjunto finito no vacío de objetos, denotado por $V(D)$, llamados los vértices de D , y una colección de pares ordenados de distintos elementos de $V(D)$, denotado por $F(D)$, cuyos elementos reciben el nombre de flechas o arcos de D .

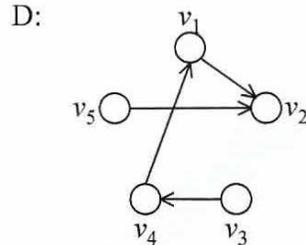


Figura 1:

Como ejemplo, podemos considerar una digráfica D , donde $V(D)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $F(D)=\{(v_1, v_2), (v_5, v_2), (v_4, v_1), (v_3, v_4)\}$, cuya representación geométrica se muestra en la figura 1.

Para las siguientes definiciones, consideremos a D una digráfica.

Definición 2 . Diremos que dos vértices u y v en D son adyacentes si existe una flecha entre ellos.

Definición 3 . Si $(u, v) \in F(D)$, diremos que u es vértice inicial y v vértice final.

Observemos que en la definición de digráfica se encuentra implícito que no trabajaremos con lazos, donde un lazo es una flecha que tiene a un mismo vértice como vértice inicial y final.

Definición 4 Diremos que una flecha a incide en un vértice v , si v es vértice inicial o final de a .

Definición 5 . Dos o más flechas que unen el mismo par de vértices en la misma dirección son llamadas multiflechas. Una digráfica con multiflechas es llamada *multidigráfica*.

Definición 6 . Si $(u,v) \in F(D)$, entonces diremos que el vértice u es adyacente hacia el vértice v , y el vértice v es adyacente desde el vértice u .

Definición 7 . El grado exterior de un vértice v , también llamado exgrado, denotado por $\delta^+(v)$, es el número de vértices adyacentes desde v , es decir, el número de flechas que salen de v .

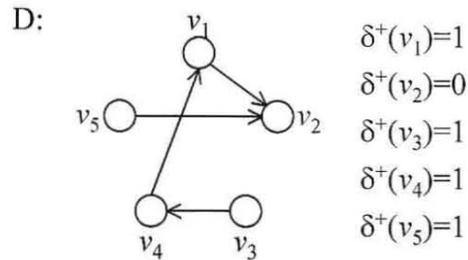


Figura 2:

En la figura 2 damos un ejemplo de los grados exteriores de los vértices de una digráfica.

Definición 8 . El grado interior de un vértice v , también llamado ingrado, denotado por $\delta^-(v)$, es el número de vértices adyacentes hacia v , es decir, el número de flechas que llegan a v .

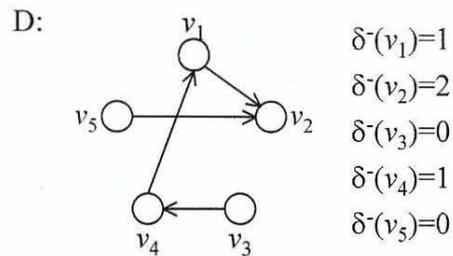


Figura 3:

En la figura 3 damos el ejemplo de los grados interiores de los vértices de una digráfica.

Definición 9 . El grado de un vértice v , denotado por $\delta(v)$, se define como:

$$\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v)$$

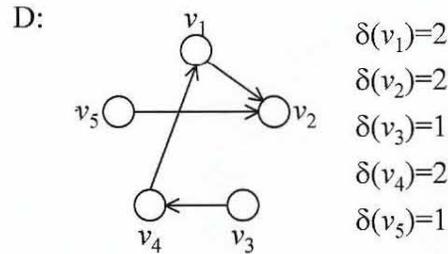


Figura 4:

En la figura 4 mostramos los grados de los vértices de la digráfica D, los cuales los obtuvimos de acuerdo a la definición de grado de un vértice y con lo visto en las digráficas de las figuras 2 y 3.

Definición 10 . El conjunto de los vecinos exteriores de un vértice x es:

$$\Gamma^+(x) = \{y \in V(D) / (x,y) \in F(D)\}$$

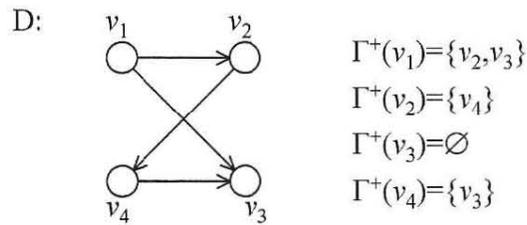


Figura 5:

En la figura 5 mostramos el conjunto de los vecinos exteriores para cada uno de los vértices de la digráfica D.

Definición 11 . El conjunto de los vecinos interiores de un vértice x se define como:

$$\Gamma^-(x) = \{y \in V(D) / (y,x) \in F(D)\}$$

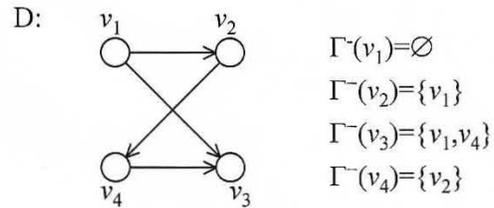


Figura 6:

En la figura 6 mostramos el conjunto de los vecinos interiores de cada vértice de la digráfica D.

Definición 12 . Diremos que una flecha (u,v) es simétrica si $(v,u) \in F(D)$.

En la digráfica D, de la figura 7, tenemos que (v_1, v_2) es una flecha simétrica.

Definición 13 . Diremos que una flecha (u,v) es asimétrica si $(v,u) \notin F(D)$.

En la digráfica D, de la figura 7, tenemos que (v_4, v_2) es una flecha asimétrica.

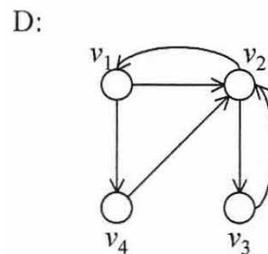


Figura 7:

Definición 14 . Dos digráficas D_1 y D_2 son isomorfas, denotado como $D_1 \cong D_2$, si existe una función biyectiva $f:V(D_1) \rightarrow V(D_2)$ tal que:

u es adyacente a v en D_1 si y sólo si $f(u)$ es adyacente a $f(v)$ en D_2 .

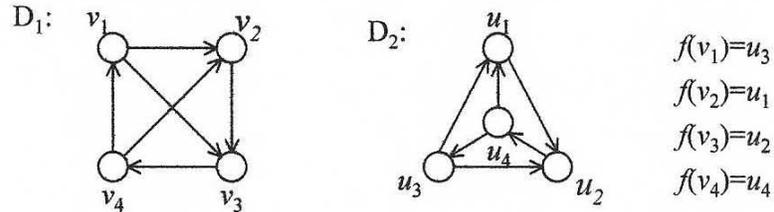


Figura 8:

Podemos verificar fácilmente que bajo el isomorfismo dado, las digráficas de la figura 8 son isomorfas.

Definición 15 . Una subdigráfica H de una digráfica D es una digráfica tal que $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$.

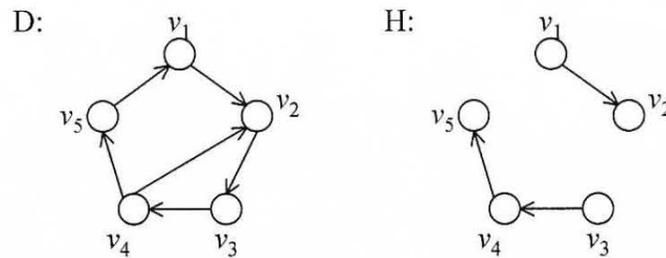


Figura 9:

En la figura 9 damos un ejemplo de una digráfica D y su subdigráfica H .

Definición 16 . Una subdigráfica inducida H de una digráfica D , denotada por $D[H]$, es una digráfica tal que $V(H) \subseteq V(D)$ y para $\{u, v\} \subseteq V(H)$, $(u, v) \in F(D)$ si y sólo si $(u, v) \in F(H)$.

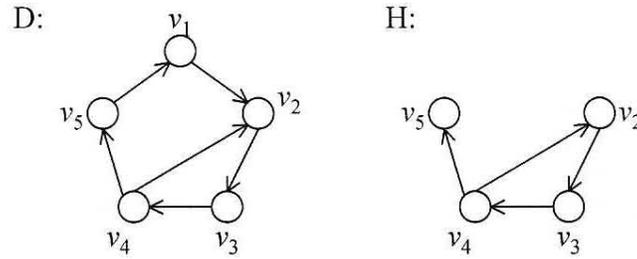


Figura 10:

En la figura 10 damos un ejemplo de una digráfica D con su subdigráfica inducida H .

Definición 17 . Una subdigráfica generadora H de una digráfica D es una digráfica tal que $V(H) = V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$.

La digráfica H , de la figura 9, es una subdigráfica generadora de D .

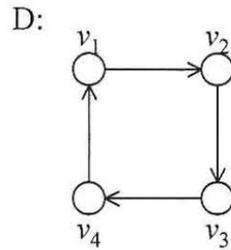


Figura 11:

Definición 18 . Una digráfica D es bipartita, si tiene una partición de $V(D)$ en V_1 y V_2 tal que toda flecha de D tiene un extremo en V_1 y el otro en V_2 .

Observemos que la digráfica D de la figura 11 es una digráfica bipartita, ya que podemos dar una partición de $V(D)$ de la siguiente manera: $V_1 = \{v_1, v_3\}$ y $V_2 = \{v_2, v_4\}$, donde se cumple que toda flecha de D tiene un extremo en V_1 y el otro en V_2 .

Definición 19 . Una digráfica D es r -regular si $\delta^+(v) = r = \delta^-(v) \forall v \in V(D)$.

La digráfica D de la figura 11 es un claro ejemplo de una digráfica r -regular y en este caso $r=1$.

Definición 20 . Una digráfica D es completa si para todo par de vértices $\{u, v\} \subseteq V(D)$, existe $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$.

En la figura 13 damos el ejemplo de una digráfica completa.

Definición 21 . Una digráfica D es simétrica si $(u, v) \in F(D)$, entonces (v, u) también pertenece al conjunto $F(D)$.

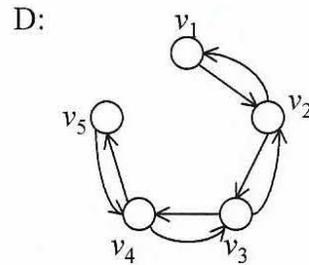


Figura 12:

En la figura 12 damos el ejemplo de una digráfica simétrica.

Definición 22 . Una digráfica D es asimétrica si $(u, v) \in F(D)$, entonces (v, u) no pertenece al conjunto $F(D)$.

En la figura 13 podemos observar que la digráfica D es asimétrica.

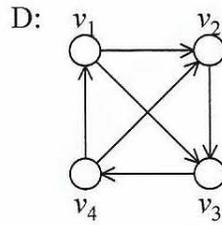


Figura 13:

Definición 23 . La parte simétrica de una digráfica D , denotada por $Sim(D)$, es una subdigráfica generadora de D , tal que sus flechas son las flechas simétricas de D .

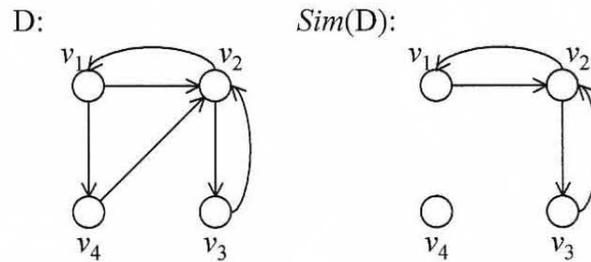


Figura 14:

En la figura 14 damos el ejemplo de la parte simétrica de una digráfica.

Definición 24 . La parte asimétrica de una digráfica D , denotada por $Asim(D)$, es una subdigráfica generadora de D , tal que sus flechas son las flechas asimétricas de D .

En la figura 15 damos el ejemplo de una digráfica D y su parte asimétrica.

Definición 25 . Un *torneo* es una digráfica completa asimétrica.

Podemos observar que la digráfica D de la figura 13 es un torneo.

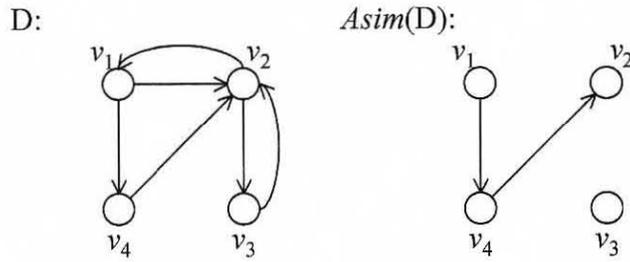


Figura 15:

Definición 26 . Un torneo T es transitivo si $\{(u,v),(v,w)\} \subseteq F(T)$, entonces $(u,w) \in F(T)$.

Definición 27 . Un camino no dirigido $C=(x_0,x_1,x_2,\dots,x_n)$ es una sucesión alternada de vértices y flechas tal que $(x_i,x_{i+1}) \in F(D)$ ó $(x_{i+1},x_i) \in F(D)$, para $0 \leq i \leq n-1$.

En la digráfica D de la figura 10 podemos ver que $C=(v_2,v_4,v_3,v_2,v_1)$ es un camino no dirigido.

Definición 28 . Un camino dirigido $C=(x_0,x_1,x_2,\dots,x_n)$ es una sucesión alternada de vértices y flechas, donde $(x_i,x_{i+1}) \in F(D)$ con $0 \leq i \leq n-1$.

Podemos ver que en la digráfica D de la figura 10, $C=(v_4,v_2,v_3,v_4,v_5)$ es un camino dirigido.

Si el camino dirigido empieza en x_0 y termina en x_n , diremos que es un x_0x_n -camino dirigido.

Definición 29 . Una trayectoria dirigida es un camino dirigido que no repite vértices.

Tenemos que en la digráfica D de la figura 10, $T=(v_1,v_2,v_3,v_4)$ es una trayectoria dirigida.

Definición 30 . Un camino cerrado dirigido es un camino dirigido que empieza y termina en el mismo vértice.

Definición 31 . La longitud de un camino dirigido C es el número de flechas que contiene y se denota como $l(C)$.

Definición 32 . Un ciclo dirigido, denotado por γ , es un camino cerrado dirigido de $l(\gamma) \geq 2$, que no repite vértices, sólo el primero y el último.

Definición 33 . Una digráfica D es conexa si para cualquier par de vértices $\{u, v\} \subseteq V(D)$ existe un uv -camino no dirigido.

D:



Figura 16:

En la figura 16 damos un ejemplo de una digráfica conexa.

Definición 34 . Una digráfica D es unilateralmente conexa si para cualquier par de vértices $\{u, v\} \subseteq V(D)$ se cumple al menos una de las siguientes dos condiciones:

1. existe una uv -trayectoria dirigida.
2. existe una vu -trayectoria dirigida.

D:

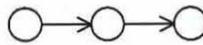


Figura 17:

Podemos observar que la digráfica dada en la figura 17 es unilateralmente conexa.

Definición 35 . Una digráfica D es fuertemente conexa si para cualquier par de vértices $\{u, v\} \subseteq V(D)$ existe una uv -trayectoria dirigida y también existe una vu -trayectoria dirigida.

Podemos verificar fácilmente que la digráfica D de la figura 12 es fuertemente conexa.

Observemos lo siguiente:

1. Si D es fuertemente conexa, entonces D es unilateralmente conexa.
2. Si D es unilateralmente conexa, entonces D es conexa.

Definición 36 . Una componente fuertemente conexa H de una digráfica D , es una subdigráfica fuertemente conexa maximal con respecto a esta propiedad.

Definición 37 . Una componente fuertemente conexa terminal H de una digráfica D es una componente fuertemente conexa de D tal que no existen Hx -flechas con $x \in V(D) \setminus V(H)$.

Ahora, veamos algunos resultados.

Lema 1 . Sea D una digráfica. Si $\delta^+(v) \geq 1$ para todo $v \in V(D)$, entonces D contiene un ciclo dirigido.

Demostración. Sea D una digráfica tal que $\delta^+(v) \geq 1 \forall v \in V(D)$.

Sea $T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ una trayectoria dirigida de longitud máxima de D .

Como $\delta^+(x_n) \geq 1$, entonces existe $w \in V(D)$ tal que $(x_n, w) \in F(D)$.

Afirmamos que $w \in T$.

Supongamos que $w \notin T$, entonces $T' = T \cup (x_n, w)$ es una trayectoria dirigida con $l(T') = l(T) + 1 \not\geq l(T)$, lo cual no puede suceder por elección de T .

Por lo tanto $w \in T$, es decir, $w = x_i$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, por lo que tenemos que $\gamma = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, w = x_i)$ es un ciclo dirigido contenido en D . ■

De manera similar se puede demostrar que si en una digráfica D $\delta^-(v) \geq 1$ $\forall v \in V(D)$, D tiene un ciclo dirigido.

Teorema 2 . Todo uv -camino dirigido C contiene una uv -trayectoria dirigida, con $u \neq v$.

Demostración. Demostraremos que todo uv -camino dirigido C contiene una uv -trayectoria dirigida y lo haremos por inducción sobre la longitud del camino dirigido.

Para $l(C) = 1$ y $l(C) = 2$, tenemos que como $u \neq v$, entonces estos caminos dirigidos son trayectorias dirigidas, por lo que el resultado se cumple.

Hipótesis de inducción. Si C' es un uv -camino dirigido tal que $l(C') \leq n$, entonces C' contiene una uv -trayectoria dirigida.

Sea C un uv -camino dirigido de longitud n .

Denotemos $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$.

Caso 1. $x_i \neq x_j \forall i \neq j$, con $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

En este caso tenemos que C es una uv -trayectoria dirigida.

Caso 2. $x_i = x_j$ para alguna $i \leq j$.

Como $x_i = x_j$ para alguna $i \neq j$, entonces C se ve de la siguiente manera:

$$C = (u = x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i, x_{j+1}, \dots, x_n = v).$$

$C' = (u = x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n = v)$ es un uv -camino dirigido con $l(C') \leq l(C)$, el cual por hipótesis de inducción contiene una uv -trayectoria dirigida T .

Por construcción de C' , tenemos que T también está contenida en C . ■

Teorema 3 . Todo camino dirigido cerrado de longitud impar contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Demostración. La demostración la haremos por inducción sobre la longitud del camino.

Para $l(C) = 3$ tenemos que el único camino dirigido cerrado con esta longitud es el ciclo dirigido de longitud 3, por lo que el resultado se cumple.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el resultado se cumple para todo camino dirigido cerrado C' de longitud impar con $l(C') \leq n$.

Sea C un camino dirigido cerrado de longitud impar, con $l(C) = n$.

Denotemos $C = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = x_0)$.

Caso 1. $x_i \neq x_j \forall i \neq j$, con $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

En este caso tenemos que el camino dirigido cerrado de longitud impar es un ciclo dirigido de longitud impar.

Caso 2. $x_i = x_j$ para algún $i \neq j$.

Tenemos que C tiene la siguiente forma:

$$C=(x_0,x_1,x_2,\dots,x_i,x_{i+1},\dots,x_i=x_j,x_{j+1},\dots,x_n=x_0).$$

Ahora consideremos los siguientes caminos cerrados dirigidos:

$C_1=(x_0,x_1,x_2,\dots,x_i=x_j,x_{j+1},\dots,x_n=x_0)$ y $C_2=(x_i,x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_j=x_i)$, donde la longitud de sólo uno de estos caminos cerrados dirigidos debe ser impar, ya que por construcción tenemos que $C=C_1\cup C_2$ y $l(C)=l(C_1)+l(C_2)$, con $l(C)$ impar.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $l(C_1)$ es impar.

Como $l(C_1)\leq l(C)=n$, entonces por hipótesis de inducción tenemos que C_1 contiene un ciclo dirigido γ de longitud impar y por construcción de C_1 tenemos que este ciclo también está contenido en C . ■

Capítulo 1

Núcleos y Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas

El núcleo de una digráfica D se define como un subconjunto N de los vértices de la digráfica, que cumple con ser: 1) un conjunto independiente, es decir, para cualquier par de elementos que se tome de N no hay flechas entre ellos, y 2) es un conjunto absorbente, es decir, para cualquier vértice z que se tome fuera del conjunto N , debe de existir un vértice u en N tal que (z,u) pertenece al conjunto de las flechas de la digráfica.

Ahora que sabemos lo que es el núcleo de una digráfica, lo más natural es hacernos la siguiente pregunta: ¿Cómo surge el concepto de núcleo?.

El concepto de núcleo en una digráfica tiene su origen en la teoría de juegos con el siguiente problema:

Supongamos que n jugadores, denotados por $(1), (2), (3), \dots, (n)$, discuten

para seleccionar un objeto x de un conjunto X , donde el conjunto X son las situaciones. Si el jugador (i) prefiere la situación a a la situación b , escribiremos $a \geq^i b$. La preferencia individual podría no ser compatible, ya que se requiere de una selección colectiva, y consecuentemente es necesario introducir el concepto de *preferencia efectiva*. Se dice que la situación a es *efectivamente preferida* a la situación b , o $a \succeq b$, si existe un conjunto de jugadores que prefieren a que b y que son capaces de imponer su preferencia por a . Sin embargo, la preferencia efectiva no es transitiva, es decir, que $a \succeq b$ y $b \succeq c$ no necesariamente implica que $a \succeq c$.

Para solucionar el problema consideremos la digráfica $D=(X,F)$, donde (x,y) pertenece al conjunto $F(D)$ si y es efectivamente preferida a x . Von-Neumman y Morgenstern sugirieron que la selección fuera limitada a los elementos de un conjunto $S \subseteq V(D)$, donde S cumple con lo siguiente:

1. No hay situaciones en S efectivamente preferidas a cualquier otra situación en S .
2. Para cualquier situación $x \in V(D) \setminus S$ existe una situación en S que es efectivamente preferida a x .

La sugerencia que dieron Von-Neumman y Morgenstern fue considerable, ya que, para la condición (2) se tendría que si $x \notin S$, entonces x puede ser descartada inmediatamente y por la condición (1) se puede tener una libre elección sobre los elementos de S .

Notemos que las condiciones (1) y (2) nos dicen que S es un conjunto independiente y absorbente respectivamente, por lo que S es un núcleo.

Después de que Von-Neumman y Morgenstern le dieran solución al problema anterior, Von-Neumman y otros matemáticos se dedicaron a preguntarse sobre las condiciones que debe de cumplir una digráfica para que ésta tenga núcleo, dando inicio a la teoría de núcleos.

Observemos que el ciclo dirigido de longitud tres, es la digráfica más pequeña que no tiene núcleo, a partir de este hecho podemos preguntarnos ¿qué condiciones debe de cumplir una digráfica para que tenga núcleo? Von-Neumann demostró que si una digráfica no tiene ciclos dirigidos, entonces esta tendrá núcleo; por otro lado, Richardson se dió cuenta de que si a la digráfica sólo se le pide la condición de que no tenga ciclos dirigidos de longitud impar, entonces ésta tendrá núcleo.

Con el desarrollo de la teoría de núcleos surge una nueva teoría la cual consiste en llevar el concepto de núcleo a una digráfica coloreada con m -colores distintos en sus flechas, donde al núcleo de una digráfica de este estilo se le llamará núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, el cual es un subconjunto N de los vértices de la digráfica que cumple con ser un conjunto independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas, es decir, para cualquier par de elementos que tomemos de N no existe una trayectoria dirigida que este coloreada con un solo color entre los elementos, y N cumple con ser un conjunto absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas, es decir, para cualquier vértice u que tomemos fuera del conjunto siempre existe un vértice v en N tal que hay una uv -trayectoria dirigida que esta coloreada con un solo color. La finalidad de considerar ahora una digráfica m -coloreada es preguntarse si podemos obtener condiciones análogas a las que se le piden a las digráficas no coloreadas para que tengan núcleo y así poder decir cuando una digráfica m -coloreada tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Teniendo en cuenta como surgió la teoría de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas a partir de la de núcleos, podríamos preguntarnos si es posible relacionar el núcleo de una digráfica con el núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de una digráfica m -coloreada. La relación es posible con la ayuda de una nueva digráfica llamada la cerradura de D , denotada por $\mathcal{C}(D)$, obtenida a partir de una digráfica D m -coloreada. Podemos afirmar que si N es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de una digráfica D , entonces

N también es núcleo de $\mathcal{C}(D)$ y viceversa.

Cabe mencionar que todos los resultados antes expuestos serán demostrados en este capítulo y algunos de ellos serán de gran utilidad en capítulos posteriores.

1.1. Núcleos.

Para saber lo que es el núcleo de una digráfica primero consideremos las siguientes definiciones.

Sea D una digráfica.

Definición 38 . Un conjunto independiente $I \subseteq V(D)$ cumple que para todo par de vértices $\{u,v\} \subseteq I$, $(u,v) \notin F(D)$ y $(v,u) \notin F(D)$.

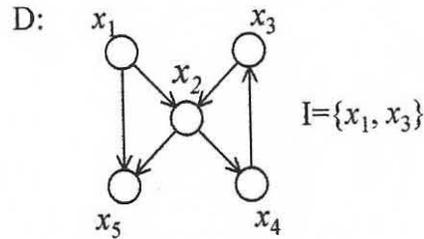


Figura 1.1:

En la digráfica D , de la figura 1.1, se puede observar que no existen las flechas (x_1, x_3) y (x_3, x_1) , por lo que I cumple con ser un conjunto independiente.

Notemos que en una digráfica completa, un conjunto independiente consta de un solo vértice.

Definición 39 . Un conjunto $A \subseteq V(D)$ es absorbente si $\forall x \in V(D) \setminus A \exists y \in A$ tal que $(x,y) \in F(D)$.

En la digráfica D , de la figura 1.2, se puede observar que para x_1 y x_3 que no pertenecen al conjunto A existen las flechas (x_3, x_4) y (x_1, x_2) , por lo que A cumple con ser un conjunto absorbente.

Notemos que en una digráfica D , $V(D)$ es un conjunto absorbente.

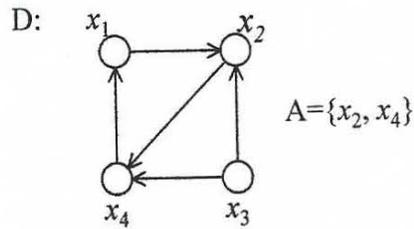


Figura 1.2:

Definición 40 . Un núcleo $N \subseteq V(D)$ es un conjunto independiente y absorbente.

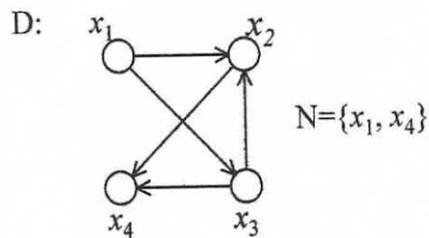


Figura 1.3:

En la digráfica D , de la figura 1.3, observemos que entre x_1 y x_4 no existen las flechas (x_1, x_4) y (x_4, x_1) lo que implica que N es un conjunto independiente, además para x_2 y x_3 que no pertenecen al conjunto N tenemos que existen las flechas (x_2, x_4) y (x_3, x_4) por lo que N es un conjunto absorbente. Por lo tanto N es un núcleo de D .

Ahora que hemos definido lo que es un núcleo, lo más natural es preguntarnos si todas las digráficas tienen núcleo, pero lamentablemente no todas las digráficas tienen núcleo, por ejemplo, los ciclos dirigidos impares no tienen núcleo. En la digráfica D de la figura 1.4 se puede observar que $\{v_1, v_3\}$ es un conjunto independiente maximal, pero no es núcleo de D porque no es un conjunto

absorbente, ya que no existen las flechas (v_4, v_1) y (v_4, v_3) .

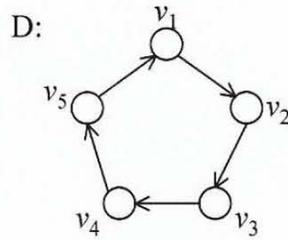


Figura 1.4:

En general, los ciclos dirigidos de longitud impar cumplen que para cualquier conjunto independiente que tomemos en el ciclo dirigido, tenemos que éste no cumple con ser absorbente ya que siempre va a existir al menos un vértice fuera del conjunto independiente el cual no va a ser absorbido por algún vértice del conjunto.

Observemos que:

-El núcleo de una digráfica puede no ser único.

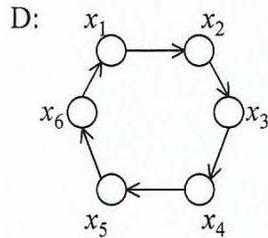


Figura 1.5:

En la digráfica D de la figura 1.5 tenemos que $N_1 = \{x_1, x_3, x_5\}$ y $N_2 = \{x_2, x_4, x_6\}$ son dos núcleos distintos de la digráfica.

- K_1 tiene núcleo.



Figura 1.6:

-Todas las digráficas con dos vértices tienen núcleo.

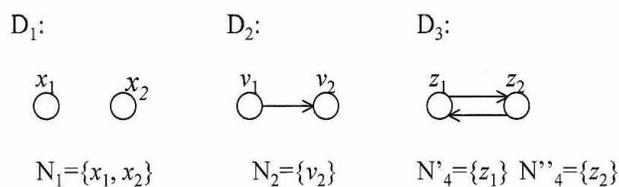


Figura 1.7:

Las digráficas que tienen núcleo y que son más fáciles de ubicar son los ciclos dirigidos de longitud par, las trayectorias dirigidas, y las digráficas con al menos un vértice de ingrado $p-1$.

Como existen digráficas que no tienen núcleo, ahora la pregunta sería ¿Qué condiciones debe de cumplir una digráfica para que ésta tenga núcleo?.

Presentamos algunos de los resultados que se tienen al respecto de cuando una digráfica tiene núcleo.

Antes de comenzar con nuestro primer resultado sobre núcleos, es necesario definir lo que es una función característica.

Definición 41 . La función característica $\varphi_S(x)$ de un conjunto S esta definida

por:

$$\varphi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S, \\ 0 & \text{si } x \notin S. \end{cases}$$

Teorema 4 . Sea D una digráfica.

N es núcleo de D si y sólo si su función característica satisface:

$$\varphi_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y)$$

Demostración. Sea D una digráfica.

Sea N un núcleo de D y $x \in V(D)$ arbitrario.

Por demostrar que $\varphi_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y)$.

Consideremos los dos casos siguientes:

Caso 1. $x \in N$.

Como $x \in N$, entonces por definición de función característica, tenemos que, $\varphi_N(x)=1$, y puesto que N es núcleo de D, entonces en particular N es un conjunto independiente, por lo que $\forall y \in \Gamma^+(x) y \notin N$, lo cual implica por definición de función característica que $\varphi_N(y)=0 \forall y \in \Gamma^+(x)$.

Por lo tanto $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 0$, entonces $\varphi_N(x) = 1 = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y)$.

Caso 2. $x \notin N$.

Que $x \notin N$ implica por definición de función característica que $\varphi_N(x)=0$. Como N es núcleo de D, entonces en particular tenemos que N es un conjunto absorbente, por lo que existe $y \in N$ tal que $(x,y) \in F(D)$, es decir, $y \in \Gamma^+(x) \cap N$ y

por definición de función característica tenemos que $\varphi_N(y) = 1$. Por lo tanto,
 $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 1$, entonces $\varphi_N(x) = 0 = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 1 - 1$.

Por lo tanto $\forall x \in V(D)$ tenemos que $\varphi_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y)$.

Sea $\varphi_N(x)$ la función característica de un conjunto $N \subseteq V(D)$ que cumple con
que $\varphi_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y)$.

Por demostrar que N es núcleo de D .

i) N es un conjunto independiente.

Sea $x \in N$ arbitrario, entonces por definición de función característica tenemos
que $\varphi_N(x) = 1$, pero por hipótesis sabemos que $\varphi_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y)$, de
aquí obtenemos que $1 = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y)$, esto implica, que $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 0$.
Por lo tanto $\Gamma^+(x) \cap N = \emptyset$.

Como esto es $\forall x \in N$, se concluye que N es un conjunto independiente.

ii) N es un conjunto absorbente.

Sea $x \in V(D) \setminus N$ arbitrario, entonces por definición de función característi-
ca tenemos que $\varphi_N(x) = 0$ y por hipótesis sabemos que $\varphi_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y)$,
lo cual implica que $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \varphi_N(y) = 1$. Por lo tanto $\exists y \in \Gamma^+(x)$ tal que
 $\varphi_N(y) = 1$, entonces $y \in \Gamma^+(x) \cap N$.

Como esto es $\forall x \in V(D) \setminus N$, se concluye que N es un conjunto absorbente.

Por lo tanto, de *(i)* y *(ii)* tenemos que N es núcleo de D . ■

Teorema 5 . Sea D una digráfica.

Si N es núcleo de D , entonces N es independiente maximal y absorbente minimal con respecto a la contención.

Demostración. Sea D una digráfica.

Sea N un núcleo de D .

i) Por demostrar que N es independiente maximal.

Supongamos que N no es independiente maximal, entonces existe un conjunto independiente $I \subseteq V(D)$ tal que $N \subsetneq I$. Como N está contenido propiamente en I , entonces $\exists x \in I$ tal que $x \notin N$ y puesto que N es núcleo de D tenemos que $\exists y \in N$ tal que $(x, y) \in F(D)$, lo cual no puede suceder porque $N \subsetneq I$, por lo que $\{x, y\} \subseteq I$ con I un conjunto independiente.

Por lo tanto, N es independiente maximal.

ii) Por demostrar que N es absorbente minimal.

Supongamos que N no es absorbente minimal, entonces existe un conjunto $A \subseteq V(D)$ tal que $A \subsetneq N$. Como A está contenido propiamente en N , entonces $\exists x \in N$ tal que $x \notin A$ y como A es absorbente tenemos que $\exists y \in A$ tal que $(x, y) \in F(D)$, lo cual no puede suceder porque $A \subsetneq N$, lo cual implica que $\{x, y\} \subseteq N$ con N un conjunto independiente por ser núcleo de D .

Por lo tanto, N es absorbente minimal. ■

Lema 6 . Sea D una digráfica simétrica.

N es núcleo de D si y sólo si N es independiente maximal.

Demostración. Sea D una digráfica simétrica.

Sea N un núcleo de D .

Por demostrar que N es independiente maximal.

Como N es núcleo de D por el teorema 5 tenemos que en particular N es independiente maximal.

Sea $N \subseteq V(D)$, con N un independiente maximal de D .

Por demostrar que N es núcleo de D .

Como N es independiente maximal, entonces $\forall x \in V(D) \setminus N$ existe la xN -flecha o existe la Nx -flecha, pero D es simétrica por lo que en particular existe la xN -flecha y como esto es $\forall x \in V(D) \setminus N$, entonces N es absorbente y por lo tanto N es núcleo de D .

Por lo tanto, toda digráfica simétrica tiene núcleo. ■

De este último Lema observemos que en una digráfica D que no sea simétrica todo independiente maximal no necesariamente es un núcleo.

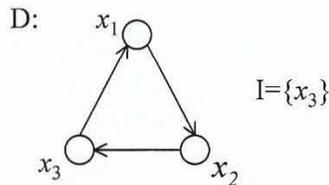


Figura 1.8:

En la digráfica D de la figura 1.8 se observa que I es un independiente

maximal, pero I no es núcleo de D ya que sabemos que un ciclo dirigido de longitud impar no tiene núcleo.

Teorema 7 (*Von Neumann*). Sea D una digráfica.

Si D no tiene ciclos dirigidos, entonces D tiene núcleo.

Demostración. Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos.

Como D no tiene ciclos dirigidos, entonces por contrapositiva de el lema ?? (visto en preliminares) existe $v \in V(D)$ tal que $\delta_D^+(v) = 0$.

Consideremos $N_0 = \{x \in V(D) \mid \delta_D^+(x) = 0\}$, por lo anterior $N_0 \neq \emptyset$, y $\Gamma^-(N_0)$.

Ahora sea $D_1 = D \setminus (N_0 \cup \Gamma^-(N_0))$.

Caso 1. $D_1 = \emptyset$.

Afirmamos que N_0 es núcleo de D .

i) N_0 es un conjunto independiente.

Por definición de N_0 tenemos que este es un conjunto independiente.

ii) N_0 es un conjunto absorbente.

Como $D_1 = \emptyset$, entonces $D = N_0 \cup \Gamma^-(N_0)$, por lo que $\forall y \in V(D) \setminus N_0 = \Gamma^-(N_0)$ existe la yN_0 -flecha. Por lo tanto, N_0 es un conjunto absorbente en D .

Por lo tanto, de *(i)* y *(ii)* tenemos que N_0 es núcleo de D .

Caso 2. $D_1 \neq \emptyset$.

Para este caso consideremos $N_1 = \{x \in V(D_1) / \delta_{D_1}^+(x) = 0\}$.

Como $D_1 \subseteq D$, entonces D_1 no tiene ciclos dirigidos, por lo que existe $w \in V(D_1)$ tal que $\delta_{D_1}^+(w) = 0$, por lo tanto $N_1 \neq \emptyset$.

Sea $D_2 = D_1 \setminus (N_1 \cup \Gamma^-(N_1))$.

Subcaso 2.1. $D_2 = \emptyset$.

Afirmamos que $N_0 \cup N_1$ es núcleo de D .

i) $N_0 \cup N_1$ es un conjunto independiente.

Tenemos que por construcción N_0 y N_1 son ambos conjuntos independientes, además $\nexists N_0 N_1$ -flecha ya que $\forall x \in N_0 \delta_D^+(x) = 0$ y $\nexists N_1 N_0$ -flecha debido a que $\Gamma^-(N_0) \cap D_1 = \emptyset$.

ii) $N_0 \cup N_1$ es un conjunto absorbente.

Sea $x \in V(D) \setminus (N_0 \cup N_1)$.

Como $D = (\Gamma^-(N_0) \cup \Gamma^-(N_1)) \cup (N_0 \cup N_1)$, entonces $x \in \Gamma^-(N_0) \cup \Gamma^-(N_1)$, es decir, $x \in \Gamma^-(N_0)$ o $x \in \Gamma^-(N_1)$, en cualquiera de los dos casos tenemos que existe la $x(N_0 \cup N_1)$ -flecha.

Por lo tanto de *(i)* y *(ii)* tenemos que $N_0 \cup N_1$ es un núcleo de D .

Subcaso 2.2. $D_2 \neq \emptyset$.

En este caso consideremos $N_2 = \{x \in V(D_2) / \delta_{D_2}^+(x) = 0\}$.

Como D no tiene ciclos dirigidos y $D_2 \subseteq D$, entonces D_2 no tiene ciclos dirigidos, por lo que existe $z \in V(D_2)$ tal que $\delta_{D_2}^+(z) = 0$, por lo tanto $N_2 \neq \emptyset$.

Sea $D_3 = D_2 \setminus (N_2 \cup \Gamma^-(N_2))$.

Continuando con este procedimiento y como D es finita obtenemos $D_n = \emptyset$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $\cup_{i=0}^{n-1} N_i$ es un núcleo de D .

Antes de ver que $\cup_{i=0}^{n-1} N_i$ es un núcleo de D , primero recordemos que:

$$N_i = \{x \in V(D_i) / \delta_{D_i}^+(x) = 0\}$$

$$\Gamma^-(N_i) = \{y \in V(D_i) / \exists y N_i \text{-flecha}\}$$

$$D_{i+1} = D_i \setminus (N_i \cup \Gamma^-(N_i))$$

con $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ y $D_0 = D$.

i) $\cup_{i=0}^{n-1} N_i$ es un conjunto independiente.

Sea $\{u, v\} \subseteq \cup_{i=0}^{n-1} N_i$

Caso 1. $\{u, v\} \subseteq N_j$ para algún $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Por construcción de N_j tenemos que no existe $(u, v) \in F(D_j) \subseteq F(D)$ y no existe $(v, u) \in F(D_j) \subseteq F(D)$.

Caso 2. $u \in N_i, v \in N_j$ para alguna $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ con $i \neq j$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $i \leq j$. Por construcción de D_i y D_j tenemos que $D_j \subseteq D_i$ y como $N_i \subseteq D_i$, entonces por elección $\Gamma_{D_i}^+(N_i) \neq \emptyset$, por lo tanto $(u, v) \notin F(D_i) \subseteq F(D)$, luego por construcción de D_j tenemos que

$(v,u) \notin F(D_j) \subseteq F(D)$ porque la intersección entre $\Gamma^-(N_i)$ y D_j es vacía.

Por lo tanto $\cup_{i=0}^{n-1} N_i$ es un conjunto independiente.

ii) $\cup_{i=0}^{n-1} N_i$ es un conjunto absorbente.

Sea $x \in V(D) \setminus (\cup_{i=0}^{n-1} N_i)$, entonces $x \in (V(D) \setminus N_i) \forall i \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$ y por construcción de los D_i tenemos que $D = \cup_{i=0}^{n-1} (N_i \cup \Gamma^-(N_i))$ por lo que $x \in \cup_{i=0}^{n-1} \Gamma^-(N_i)$, entonces $\exists j \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$ tal que $x \in \Gamma^-(N_j)$ y por definición de $\Gamma^-(N_j)$ tenemos que $\exists xN_j$ -flecha, por lo tanto existe la $x(\cup_{i=0}^{n-1} N_i)$ -flecha.

Por lo tanto $\cup_{i=0}^{n-1} N_i$ es un conjunto absorbente.

De (i) y (ii) tenemos que $\cup_{i=0}^{n-1} N_i$ es un núcleo de D . ■

Observemos que existen digráficas que tienen ciclos dirigidos y además tienen núcleo, pero también existen digráficas que tienen ciclos dirigidos y no tienen núcleo.

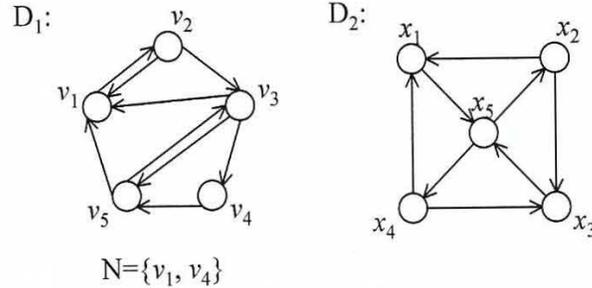


Figura 1.9:

En la digráfica D_1 de la figura 1.9 se puede observar que no existen flechas entre v_1 y v_4 , por lo que N es un conjunto independiente y para v_2, v_3, v_5 que no pertenecen a N existen las flechas $(v_2, v_1), (v_3, v_4), (v_5, v_1)$. Por lo tanto N

es núcleo de la digráfica D_1 , además D_1 tiene ciclos dirigidos.

En la digráfica D_2 de la figura 1.9 podemos observar que $\{x_1, x_3\}$, $\{x_2, x_4\}$, $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3\}$, $\{x_4\}$, $\{x_5\}$ son los únicos conjuntos independientes que tiene la digráfica, pero ninguno de ellos es un conjunto absorbente, además de que D_2 tiene ciclos dirigidos.

Los siguientes resultados nos dan condiciones para que una digráfica con ciclos dirigidos tenga núcleo.

Teorema 8 . Si D es una digráfica tal que todo ciclo dirigido tiene una flecha simétrica, entonces D tiene núcleo.

Demostración. Sea D una digráfica tal que todo ciclo dirigido tiene una flecha simétrica.

Demostraremos que D tiene núcleo y lo haremos por inducción sobre el número de vértices de D .

Para $p=1$ y $p=2$ sabemos que las digráficas con este número de vértices tienen núcleo.

Hipótesis de Inducción. Si D' es una digráfica con $p' \leq p$ vértices tal que todo ciclo dirigido tiene una flecha simétrica, entonces D' tiene núcleo.

Sea D una digráfica con p vértices tal que todo ciclo dirigido tiene una flecha simétrica.

Por demostrar que D tiene núcleo.

Sin pérdida de generalidad supongamos que D tiene al menos un ciclo dirigido¹.

Consideremos el conjunto $S = \{v \in V(D) / \delta_{Asim(D)}^+(v) = 0 \text{ y } \delta_{Sim(D)}^+(v) \neq 0\}$.

Supongamos que $S = \emptyset$.

Caso 1. $\forall v \in V(D), \delta_{Asim(D)}^+(v) \neq 0$.

En este caso tenemos que existe un ciclo dirigido γ tal que $\gamma \subseteq Asim(D)$, lo cual no puede suceder ya que por hipótesis todo ciclo dirigido en D tiene una flecha simétrica y $\gamma \subseteq Asim(D) \subseteq D$.

Caso 2. $\forall v \in V(D), \delta_{Sim(D)}^+(v) = 0$.

Este caso no es posible ya que supusimos que D tiene al menos un ciclo dirigido y por hipótesis éste tiene al menos una flecha simétrica.

Caso 3. $\forall v \in V(D) \delta_{Asim(D)}^+(v) \neq 0 \text{ y } \delta_{Sim(D)}^+(v) = 0$.

Afirmamos que D tiene al menos un vértice de exgrado cero, ya que de lo contrario tendríamos que $\forall v \in V(D) \delta_D^+(v) \geq 1$, lo cual implicaría que D tiene un ciclo dirigido γ y como $\delta_{Asim(D)}^+(v) \neq 0$ y $\delta_{Sim(D)}^+(v) = 0 \quad \forall v \in V(D)$, entonces tenemos que D es una digráfica asimétrica, por lo que γ es un ciclo dirigido asimétrico lo cual no puede suceder ya que por hipótesis γ debe de tener una flecha simétrica.

Por lo tanto, existe $w \in V(D)$ tal que $\delta_D^+(w) = 0$. Como $\delta_D^+(w) = 0$, entonces $\delta_{Asim(D)}^+(w) = 0$ y $\delta_{Sim(D)}^+(w) = 0$ lo cual no puede suceder por que $\forall v \in V(D) \delta_{Asim(D)}^+(v) \neq 0$ y $\delta_{Sim(D)}^+(v) = 0$.

¹Si D no tuviera ciclos dirigidos, entonces por el Teorema 7 tendríamos que D tiene núcleo.

El hecho de suponer que $S=\emptyset$ nos condujo a contradicciones, entonces $S \neq \emptyset$.

Ahora consideremos $H=D[S]$. Por definición de S tenemos que $H \subseteq \text{Sim}(D)$, por lo tanto H es una digráfica simétrica y por el Teorema 6 tenemos que H tiene un núcleo N_0 .

Sea $D'=D \setminus (H \cup \Gamma_D^-(N_0))$. Tenemos que D' tiene p' vértices con $p' \leq p$ y por hipótesis de inducción D' tiene un núcleo N_1 .

Afirmamos que $N=N_0 \cup N_1$ es un núcleo de D .

i) N es un conjunto absorbente.

Sea $v \in V(D) \setminus N$.

Caso 1. Si $v \in V(H) \setminus N_0$.

Como N_0 es absorbente en H , entonces $\exists u \in N_0$ tal que $(v,u) \in F(H) \subseteq F(D)$.

Caso 2. Si $v \in V(D) \setminus V(H)$ y $v \in \Gamma_D^-(N_0)$.

Como $v \in \Gamma_D^-(N_0)$, entonces $\exists w \in N_0$ tal que $(v,w) \in F(D)$.

Caso 3. Si $v \in V(D) \setminus (V(H) \cup \Gamma_D^-(N_0))$.

En este caso tenemos que $v \in V(D') \setminus N_1$ y dado que N_1 es absorbente en D' tenemos que $\exists z \in N_1$ tal que $(v,z) \in F(D)$.

Por lo tanto, N es un conjunto absorbente.

ii) N es un conjunto independiente.

Tenemos que N_0 y N_1 son ambos conjuntos independientes por ser núcleos de H y D' respectivamente.

ii.a) No existe N_1N_0 -flecha, de lo contrario tendríamos que existen $y \in N_0$ y $z \in N_1$ tal que $(z,y) \in F(D)$, entonces $z \in \Gamma_D^-(N_0)$, pero $z \in N_1 \subseteq D' = D \setminus (H \cup \Gamma_D^-(N_0))$, por lo que $z \notin \Gamma_D^-(N_0)$.

ii.b) No existe N_0N_1 -flecha, de lo contrario tendríamos que existen $x \in N_0$ y $z \in N_1$ tal que $(x,z) \in F(D)$ y como $N_0 \subseteq H$ tenemos que $x \in S$ por lo que $(z,x) \in F(D)$, lo que implica que $\exists N_1N_0$ -flecha lo cual ya vimos que no puede suceder.

Por lo tanto, N es un conjunto independiente.

De (i) y (ii) concluimos que N es un núcleo de D . ■

Antes de continuar con los resultados de núcleos, es necesario definir lo que es el *Seminúcleo* de una digráfica, el cual es un concepto que se debe al Dr. Victor Neumann-Lara.

Después de que Von Neumann obtuviera el resultado dado en el Teorema 7, Richardson se dio cuenta de que si a una digráfica sólo se le pide la condición de que no tenga ciclos dirigidos de longitud impar, entonces ésta tendrá núcleo. La demostración de dicho resultado se caracterizó por ser muy larga y algo complicada, pero con la ayuda del concepto de seminúcleo, el Dr. Victor Neumann-Lara en [8] da una demostración más corta y elegante de dicho resultado.

Definición 42 . Sea D una digráfica.

Un conjunto $S \subseteq V(D)$ es un *Seminúcleo* si:

1. S es un conjunto independiente.
2. Si existe la Sx -flecha, entonces existe la xS -flecha, por (1) $x \in V(D) \setminus S$.

En la digráfica D de la figura 1.10 podemos observar que para x_1 , x_2 y x_4 que no pertenecen a S existe la Sx_2 -flecha y existe la x_2S -flecha, no existe la Sx_4 -flecha y no existe la Sx_1 -flecha, además como S es un conjunto independiente tenemos que S es un seminúcleo de D .

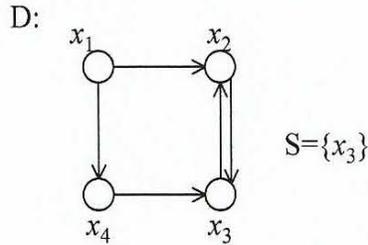


Figura 1.10:

Observaciones:

1. El conjunto vacío es seminúcleo de cualquier digráfica.
2. El seminúcleo de una digráfica puede no ser único.
3. Si N es núcleo de D , entonces N es seminúcleo de D .²
4. Si S es seminúcleo de D , entonces S no necesariamente es núcleo de D .
5. No toda digráfica tiene seminúcleo.

Las digráficas D_1 y D_2 de la figura 1.11 dan un claro ejemplo de las observaciones hechas anteriormente.

En la digráfica D_1 de la figura 1.11 podemos observar que para cualquier conjunto independiente S que tomemos siempre va a existir un vértice x_i para

²Como N es núcleo, N es un conjunto independiente, además $\forall x \in V(D) \setminus N \exists xN$ -flecha, por lo que $\forall y \in V(D) \setminus N$ tales que $\exists Ny$ -flecha siempre existe la yN -flecha.

alguna $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que existe la Sx_i -flecha, pero no existe la x_iS -flecha por lo que S no puede ser seminúcleo de D_1 .

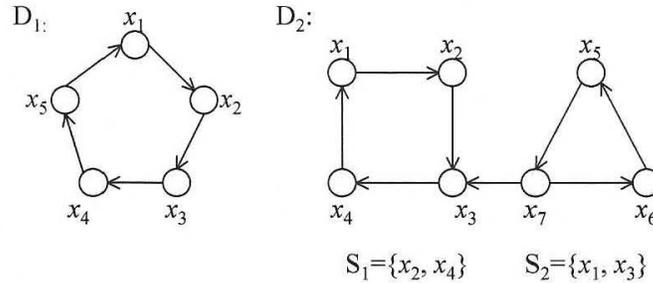


Figura 1.11:

En la digráfica D_2 de la figura 1.11 claramente se puede observar que S_1 y S_2 son ambos conjuntos independientes, luego para x_1, x_3, x_5, x_6, x_7 que no pertenecen a S_1 tenemos que existen la S_1x_3 -flecha, x_3S_1 -flecha, S_1x_1 -flecha, x_1S_1 -flecha y no existen S_1x_5 -flecha, S_1x_6 -flecha, S_1x_7 -flecha, por lo tanto S_1 es seminúcleo de D_2 . Para x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 que no pertenecen a S_2 tenemos que existen la S_2x_2 -flecha, x_2S_2 -flecha, S_2x_4 -flecha, x_4S_2 -flecha y no existen S_2x_5 -flecha, S_2x_6 -flecha, S_2x_7 -flecha, por lo que S_2 es seminúcleo de D_2 . Por lo tanto D_2 tiene dos seminúcleos distintos.

En la digráfica D_2 de la figura 1.11 ya vimos que S_1 es un conjunto independiente por ser un seminúcleo, pero S_1 no es un conjunto absorbente ya que x_5, x_6, x_7 no son absorbidos por S_1 , por lo tanto S_1 no es núcleo de D_2 .

Ahora definamos lo que es una digráfica *Núcleo Perfecta*.

Definición 43 . Una digráfica D es Núcleo Perfecta si D y todas sus subdigráficas inducidas tienen núcleo.

En la digráfica D , de la figura 1.12, se puede observar claramente que N es un

núcleo de D y además todas sus subdigráficas inducidas, las cuales constan de uno o dos vértices tienen núcleo, por lo que D es una digráfica Núcleo Perfecta.

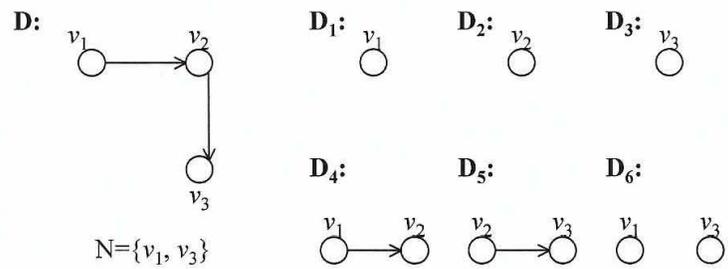


Figura 1.12:

Observaciones:

1. En cualquier digráfica D la propiedad de ser Núcleo Perfecta es hereditaria para todas sus subdigráficas.
2. Una digráfica D puede tener núcleo, pero no ser Núcleo Perfecta.

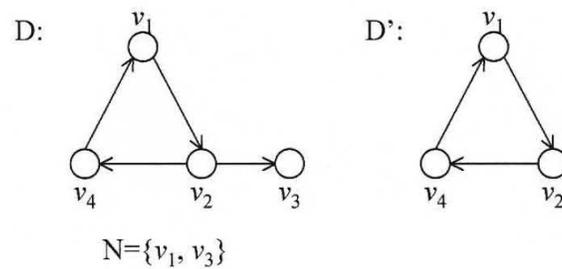


Figura 1.13:

En la digráfica D , de la figura 1.13, se puede observar claramente que N es un núcleo de la digráfica, pero no es Núcleo Perfecta ya que D' es una subdigráfica

inducida de D la cual ya sabemos que no tiene núcleo.

Nota 1 . *Ahora que ya tenemos la definición de digráfica núcleo perfecta podemos afirmar que la conclusión del Teorema 8 no sólo se queda en que D tiene núcleo, si no que se puede demostrar que D es núcleo perfecta, es decir, si D es una digráfica que cumple con que todos sus ciclos dirigidos tienen una flecha simétrica, entonces en particular toda subdigráfica inducida de D cumple con que todos sus ciclos dirigidos tienen una flecha simétrica y por el Teorema 8 tenemos que estas subdigráficas inducidas de D tienen núcleo, por lo que D es núcleo perfecta.*

El siguiente resultado relaciona los conceptos de seminúcleo y núcleo de una digráfica.

Lema 9 . Sea D una digráfica.

Si N es núcleo de D , entonces N es seminúcleo maximal de D .

Demostración. Sea D una digráfica y N un núcleo de D .

Como N es núcleo de D , entonces N es seminúcleo de D por lo que sólo falta demostrar que N es maximal.

Supongamos que N no es un seminúcleo maximal.

Como N no es seminúcleo maximal, entonces existe S un seminúcleo tal que $N \subsetneq S$, es decir, $\exists x \in S$ tal que $x \notin N$ y puesto que N es núcleo de D tenemos que $\exists y \in N$ tal que $(x, y) \in F(D)$, lo cual no puede suceder ya que $\{x, y\} \subseteq S$ y S es un conjunto independiente por ser seminúcleo.

Por lo tanto, N es seminúcleo maximal de D . ■

Lema 10 . Sea D una digráfica. Sean S un seminúcleo de D , $A = \{v \in V(D) \setminus S \mid \nexists vS\text{-flecha}\}$ y S' un seminúcleo de $D[A]$, entonces $S \cup S'$ es un seminúcleo de D .

Demostración. Sea D una digráfica.

Sean S , S' y A como en la hipótesis del Lema.

Por demostrar que $S \cup S'$ es un seminúcleo de D .

i) $S \cup S'$ es un conjunto independiente.

Sea $\{u, v\} \subseteq (S \cup S')$ arbitrario.

Caso 1. $\{u, v\} \subseteq S'$.

Como S' es seminúcleo, entonces en particular S' es un conjunto independiente por lo que $(u, v) \notin F(D[A]) \subsetneq F(D)$ y $(v, u) \notin F(D[A]) \subsetneq F(D)$.

Caso 2. $\{u, v\} \subseteq S$.

Como S es un conjunto independiente por ser seminúcleo de D , tenemos que no existe $(u, v) \in F(D)$ y no existe $(v, u) \in F(D)$.

Caso 3. Sin pérdida de generalidad supongamos que $u \in S'$ y $v \in S$.

Como $S' \subseteq A$, entonces tenemos que no existe uS -flecha y además no existe Su -flecha, ya que de lo contrario como S es seminúcleo, entonces debería de existir la uS -flecha la cual ya vimos que no esta. Por lo tanto, $(u, v) \notin F(D)$ y $(v, u) \notin F(D)$.

Por lo tanto, $S \cup S'$ es un conjunto independiente.

ii) Sean $C = V(D) \setminus (S \cup A)$ y $x \in V(D) \setminus (S \cup S')$ arbitraria. Por demostrar que si existe la $(S \cup S')$ - x -flecha, entonces también existe la $x(S \cup S')$ -flecha.

Supongamos que existe la $(S \cup S')$ -flecha.

Caso 1. $x \in C$.

Como $x \in C$, entonces $x \notin (S \cup A)$ y en particular $x \notin A$, por lo que existe la xS -flecha y como $S \subseteq (S \cup S')$, entonces existe la $x(S \cup S')$ -flecha.

Caso 2. $x \notin C$.

Como $x \notin C$, entonces $x \in (S \cup A)$, además $x \in V(D) \setminus (S \cup S')$ por lo que tenemos que $x \in (A \setminus S')$. Por lo tanto, tenemos la $S'x$ -flecha y también existe la xS' -flecha debido a que S' es seminúcleo de $D[A]$, y por lo anterior existe la $x(S \cup S')$ -flecha.

Por lo tanto, de (i) y (ii) tenemos que $S \cup S'$ es un seminúcleo de D . ■

Ahora consideremos el siguiente resultado que relaciona los conceptos de seminúcleo y núcleo de una digráfica.

Lema 11 . Sea D una digráfica.

Si para todo subconjunto no vacío $V_0 \subseteq V(D)$, la subdigráfica inducida por V_0 tiene un seminúcleo no vacío, entonces D tiene núcleo.

Demostración. Sea D una digráfica.

Sea S un seminúcleo maximal de D , el cual existe porque por hipótesis $D[V(D)] = D$ tiene un seminúcleo no vacío, y sea $V_0 = V(D) \setminus (S \cup \Gamma^-(S))$.

Caso 1. $V_0 = \emptyset$.

En este caso afirmamos que S es un núcleo de D .

i) S es un conjunto independiente.

Como S es un seminúcleo de D , entonces en particular S es un conjunto independiente en D .

ii) S es un conjunto absorbente.

Como $V_0 = \emptyset$, entonces $V(D) = S \cup \Gamma^-(S)$, por lo que $\forall x \in V(D) \setminus S$ siempre existe la xS -flecha.

Por lo tanto, de *(i)* y *(ii)* tenemos que S es un núcleo de D .

Caso 2. $V_0 \neq \emptyset$.

Como $V_0 \neq \emptyset$, entonces por hipótesis tenemos que $D[V_0]$ tiene un seminúcleo no vacío T .

Afirmamos que $S \cup T$ es seminúcleo de D .

i) $S \cup T$ es un conjunto independiente.

S y T son ambos conjuntos independientes por ser seminúcleos. Por otro lado, por construcción de V_0 tenemos que no existe la TS -flecha y además no existe la ST -flecha, ya que de lo contrario tendríamos que por definición de seminúcleo debería de existir la TS -flecha, pero ya vimos que ésta no existe.

Por lo tanto, $S \cup T$ es un conjunto independiente.

ii) Sea $x \in V(D) \setminus (S \cup T)$ arbitraria. Por demostrar que si existe la $(S \cup T)x$ -

flecha, entonces también existe la $x(\text{SUT})$ -flecha.

Supongamos que existe la $(\text{SUT})x$ -flecha.

ii.a) $x \in \Gamma^-(S)$.

En este caso existe la xS -flecha y como $S \not\subseteq (\text{SUT})$ tenemos la $x(\text{SUT})$ -flecha.

ii.b) $x \in V(D[V_0]) \setminus T$.

Como $x \in V(D[V_0])$ y existe la Tx -flecha, entonces existe la xT -flecha ya que T es seminúcleo de $D[V_0]$, por lo que tenemos la $x(\text{SUT})$ -flecha.

Por lo tanto, tenemos que SUT es un seminúcleo de D , y como $T \neq \emptyset$ tenemos que $|\text{SUT}| \geq |S|$ lo cual no puede suceder por elección de S .

Como el caso 2 nos lleva a una contradicción, tenemos que $V_0 = \emptyset$ y por lo tanto D tiene núcleo. ■

Teorema 12 (*Neumann-Lara*)[8]. Una digráfica D es Núcleo Perfecta si y sólo si toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío.

Demostración. Sea D una digráfica.

Supongamos que D es Núcleo Perfecta.

Por demostrar que toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío.

Como D es una digráfica Núcleo Perfecta, entonces todas sus subdigráficas inducidas tienen núcleo, el cual ya sabemos que es un seminúcleo y como un núcleo es no vacío, entonces tenemos que cada seminúcleo es no vacío.

Por lo tanto, toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío.

Supongamos que toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío.

Por demostrar que D es núcleo perfecta.

Por hipótesis tenemos que $\forall V_0 \subseteq V(D)$ la subdigráfica inducida por V_0 tiene seminúcleo no vacío, entonces por el Lema 11 tenemos que D tiene núcleo.

Ahora sólo falta demostrar que toda subdigráfica inducida propia de D tiene núcleo.

Sea D' una subdigráfica inducida propia de D y S un seminúcleo maximal de D' , el cual existe por hipótesis.

Afirmamos que S es núcleo de D' .

i) S es un conjunto absorbente.

Sea $v \in V(D') \setminus S$ arbitrario.

Caso 1. Si $\exists Sv$ -flecha en D' .

En este caso tenemos que como S es seminúcleo de D' , entonces $\exists vS$ -flecha.

Caso 2. Si $\exists vS$ -flecha en D' .

En este caso no hay nada que hacer.

Caso 3. Si no existe la Sv -flecha en D' .

Consideremos $A = \{u \in V(D') \setminus S \mid \text{no existe la } uS\text{-flecha}\}$, donde $A \neq \emptyset$ ya que de lo contrario estaríamos en los casos 1 ó 2.

Por hipótesis tenemos que $D[A]$ tiene un seminúcleo no vacío S' y por el Lema 10 tenemos que $S \cup S'$ es seminúcleo de D' , donde $S \neq S'$ y $|S \cup S'| \geq |S|$, lo cual no puede suceder por elección de S .

Como este caso nos lleva a una contradicción, entonces únicamente podemos considerar los casos 1 y 2.

Por lo tanto $\forall v \in V(D') \setminus S \exists vS$ -flecha en D' .

ii) S es un conjunto independiente.

S es un conjunto independiente por ser seminúcleo de D' .

Por lo tanto, de *(i)* y *(ii)* tenemos que S es núcleo de D' .

Con esto se ha demostrado que toda subdigráfica inducida propia de D tiene núcleo.

Por lo tanto, D es Núcleo Perfecta. ■

Ahora que ya tenemos la herramienta necesaria, demostraremos el resultado obtenido por Richardson.

Teorema 13 . Sea D una digráfica.

Si D no tiene ciclos dirigidos de longitud impar, entonces D es Núcleo Perfecta.

Demostración. Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar.

Primero se demostrará que D tiene un seminúcleo no vacío.

Sea D' una componente fuertemente conexa terminal de D , es decir, $\Gamma^+(D') \subseteq V(D')$ y D' es fuertemente conexa en D .

Caso 1. $|V(D')|=1$.

Como ya sabemos, las digráficas con este número de vértices tienen núcleo, por lo que D' tiene núcleo, el cual es un seminúcleo no vacío.

Caso 2. $|V(D')| \geq 1$.

Como $|V(D')| \geq 1$, entonces sean $x_0 \in V(D')$ fijo y $x_1 \in V(D')$ arbitrario con $x_0 \neq x_1$.

Observación 1. Por elección de D' tenemos que todas las x_0x_1 -trayectorias dirigidas y x_1x_0 -trayectorias dirigidas están contenidas en D' y además las x_0x_1 -trayectorias dirigidas tienen la misma paridad que las x_1x_0 -trayectorias dirigidas, de lo contrario, si existieran T_1 x_0x_1 -trayectoria dirigida y T_2 x_1x_0 -trayectoria dirigida de distinta paridad, entonces $T_1 \cup T_2$ es un camino cerrado dirigido de longitud impar y por el Teorema 3 (visto en preliminares) este camino cerrado dirigido contiene un ciclo dirigido de longitud impar, el cual estaría contenido en D , lo cual es imposible por hipótesis.

Por lo tanto $\forall v \in V(D')$ las x_0v -trayectorias dirigidas y vx_0 -trayectorias dirigidas están contenidas en D' , además las x_0v -trayectorias dirigidas tienen la misma paridad que las vx_0 -trayectorias dirigidas.

Sea $S = \{x \in V(D') \mid \exists x_0x\text{-trayectoria dirigida de longitud par contenida en } D'\}$

D' .

$S \neq \emptyset$ ya que la x_0x_0 -trayectoria dirigida es de longitud cero, que es par. Por lo tanto $x_0 \in S$.

Afirmamos que S es un seminúcleo no vacío de D .

i) S es un conjunto independiente.

Supongamos que S no es un conjunto independiente.

Sea $\{y_1, y_2\} \subseteq S$ tal que existe $(y_1, y_2) \in F(D)$ o existe $(y_2, y_1) \in F(D)$.

Observemos que como $\{y_1, y_2\} \subseteq S$, entonces existen T_1 x_0y_1 -trayectoria dirigida de longitud par y T_2 x_0y_2 -trayectoria dirigida de longitud par, ambas contenidas en D' .

-Si existe $(y_1, y_2) \in F(D)$.

Como D' es fuertemente conexa existe T_3 y_2x_0 -trayectoria dirigida en D' .

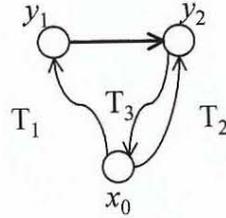


Figura 1.14:

Como T_2 es de longitud par, entonces T_3 es de longitud par, por la observación 1. Por lo tanto $T_3 \cup T_1 \cup (y_1, y_2)$ es un camino cerrado dirigido de longitud

impar, el cual contiene un ciclo dirigido de longitud impar, lo cual no puede suceder por hipótesis.

-Si existe $(y_2, y_1) \in F(D)$.

Como D' es fuertemente conexa existe T'_3 $y_1 x_0$ -trayectoria dirigida en D' .

Como T_1 es de longitud par, entonces T'_3 es de longitud par, por la observación 1. Por lo tanto $T'_3 \cup T_2 \cup (y_2, y_1)$ es un camino cerrado dirigido de longitud impar, el cual contiene un ciclo dirigido de longitud impar, lo cual no puede suceder por hipótesis.

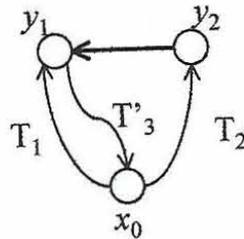


Figura 1.15:

Por lo tanto, S es un conjunto independiente.

ii) Sea $v \in V(D) \setminus S$ arbitrario. Por demostrar que si existe la Sv -flecha, entonces existe la vS -flecha.

Como $S \subseteq V(D')$, entonces por elección de D' $v \in V(D')$.

Supongamos que existe la Sv -flecha.

Como existe la Sv -flecha, entonces existe $w \in S$ tal que $(w, v) \in F(D)$, además

existe T x_0w -trayectoria dirigida de longitud par contenida en D' .

Observación 2. Como $v \notin S$, entonces todas las x_0v -trayectorias dirigidas son de longitud impar en D' .

Caso 1. $v \in T$.

Sea $T=(x_0=u_0, u_1, \dots, u_{2n}=w)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ la x_0w -trayectoria dirigida de longitud par. Como $v \in T$, entonces $v=u_i$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ y por la observación 2 tenemos que $T'=(x_0=u_1, u_2, \dots, u_i=v, u_{i+1}) \subseteq T$ es una x_0u_{i+1} -trayectoria dirigida de longitud par, por lo que $u_{i+1} \in S$.

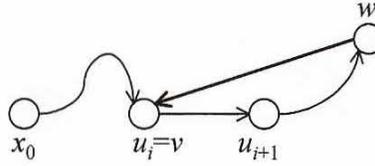


Figura 1.16:

Por lo tanto, existe la vS -flecha.

Caso 2. $v \notin T$.

Como $v \in V(D')$ y D' es fuertemente conexa, entonces $\delta^+(v) \neq 0$, por lo que existe $z \in V(D')$ tal que $(v, z) \in F(D)$.

Subcaso 2.a $z \notin T$.

Como $z \notin T$, entonces $T \cup (w, v) \cup (v, z)$ es una trayectoria dirigida de longitud par contenida en D' , por lo que $z \in S$.

Por lo tanto, \exists la vS -flecha.

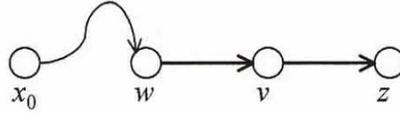


Figura 1.17:

Subcaso 2.b. $z \in T$.

Como $z \in T$, entonces $z = u_j$ para algún $j \in \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$.

Afirmamos que $T' = (x_0 = u_1, u_2, \dots, u_j = z) \subseteq T$ es una trayectoria dirigida de longitud par.

Si T' fuera de longitud impar, entonces tendríamos que $T'' = (z = u_j, u_{j+1}, u_{j+2}, \dots, w)$ es una trayectoria dirigida de longitud impar, esto porque T es de longitud par, por lo tanto $T'' \cup (w, v) \cup (v, z)$ es un ciclo dirigido de longitud impar, lo cual no puede suceder por hipótesis, entonces la longitud de T' es par, por lo que $z \in S$.

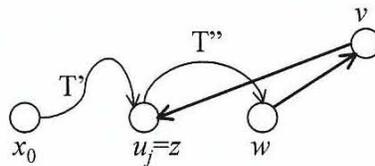


Figura 1.18:

Por lo tanto, \exists la vS -flecha.

Con lo anterior se ha demostrado que si existe la Sv -flecha, también \exists la vS -flecha.

Por lo tanto, de (i) y (ii) tenemos que S es un seminúcleo no vacío de D .

Observación 3. Con esto hemos demostrado que en general toda digráfica D que cumpla con no tener ciclos dirigidos de longitud impar tiene un seminúcleo no vacío.

Como D no tiene ciclos dirigidos de longitud impar, entonces toda subdigráfica inducida de D no tiene ciclos dirigidos de longitud impar. Por la observación 3 tenemos que toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío.

Por lo tanto, por el Teorema 12, D es Núcleo Perfecta. ■

1.2. Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Para poder definir lo que es un *Núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas*, primero consideremos las siguientes definiciones.

Definición 44 . Llamaremos a la digráfica D , una digráfica m -coloreada, si las flechas de D son coloreadas con m -colores.

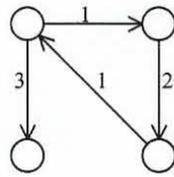


Figura 1.19:

Tenemos que la digráfica D de la figura 1.19 es 3-coloreada, porque sus flechas están coloreadas con 3 colores.

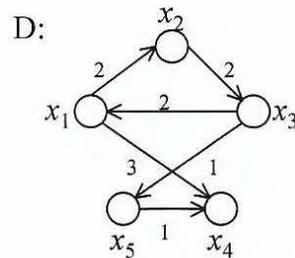


Figura 1.20:

Definición 45 . Una trayectoria dirigida o ciclo dirigido es llamado *monocromático(a)*, si todas sus flechas están coloreadas con el mismo color.

En la digráfica D 3-coloreada de la figura 1.20, tenemos que $T=(x_3,x_5,x_4)$ es una trayectoria dirigida monocromática, ya que todas sus flechas están coloreadas con color 1, y $\gamma=(x_1,x_2,x_3,x_1)$ es un ciclo dirigido monocromático, ya que todas sus flechas están coloreadas con color 2.

Notemos que toda flecha de una digráfica D m -coloreada es una trayectoria dirigida monocromática de color i para alguna $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Definición 46 . Sea D una digráfica m -coloreada.

Un conjunto $N \subseteq V(D)$ es un Núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas si éste satisface las siguientes dos condiciones:

1. Para todo par de vértices $\{u, v\} \subseteq N$ no existen trayectorias dirigidas monocromáticas entre ellos.
2. $\forall x \in V(D) \setminus N, \exists y \in N$ tal que hay una xy -trayectoria dirigida monocromática.

Si un conjunto N cumple la condición 1, podemos decir que N es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas y si cumple la condición 2, diremos que es absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Notemos que en una digráfica completa m -coloreada, si ésta tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, entonces éste constará de un solo vértice.

Podemos afirmar que al igual que en núcleos, existen digráficas m -coloreadas que tienen y no tienen núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Para ver esto, consideremos la siguiente definición:

Definición 47 . Denotamos como T_3 y C_3 al torneo transitivo de orden tres y al ciclo dirigido de longitud tres, respectivamente, cuyas flechas están coloreadas con tres colores distintos.

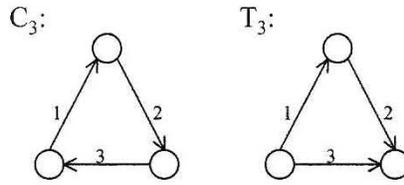


Figura 1.21:

Claramente podemos observar en la figura 1.21 que C_3 no tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas y T_3 si.

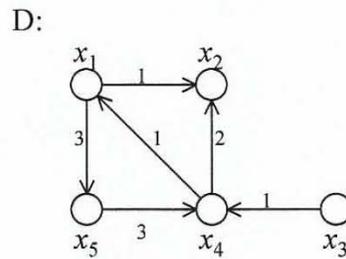


Figura 1.22:

En la figura 1.22 mostramos otro ejemplo de una digráfica 3-coloreada que tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, donde afirmamos que $N = \{x_2, x_5\}$ es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D , ya que se puede observar que entre x_2 y x_5 no existen trayectorias dirigidas monocromáticas, por lo que N es un conjunto independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas, y para x_1, x_3, x_4 que no pertenecen a N tenemos que existen T_1 una x_1x_2 -trayectoria dirigida monocromática de color 1, T_2 una x_4x_2 -trayectoria dirigida monocromática de color 2 y T_3 una x_3x_2 -trayectoria dirigida monocromática de color 1, por lo que N es absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas. Por lo tanto, N es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D .

Ahora consideremos la siguiente definición, la cual será de gran importancia en algunos resultados sobre Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Definición 48 . Sea D una digráfica m -coloreada.

La cerradura de D , denotada por $\mathcal{C}(D)$, es una multidigráfica m -coloreada definida como sigue:

$$V(\mathcal{C}(D))=V(D)$$

$F(\mathcal{C}(D))=F(D) \cup \cup_{i=1}^m \{(u,v) \text{ con color } i / \exists \text{ una } uv\text{-trayectoria dirigida monocromática de color } i \text{ contenida en } D\}$.

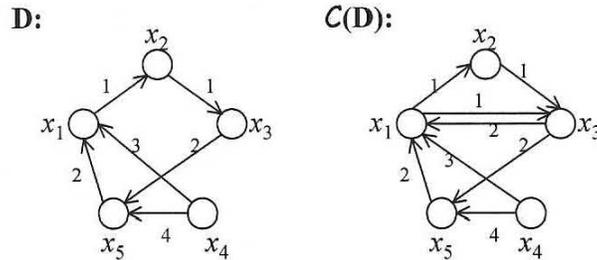


Figura 1.23:

Podemos observar que en la digráfica D 4-coloreada de la figura 1.23, todas las trayectorias dirigidas monocromáticas contenidas en D de longitud mayor o igual que dos son las siguientes: $T_1=(x_3,x_5,x_1)$ de color 2 y $T_2=(x_1,x_2,x_3)$ de color 1, por lo que en $\mathcal{C}(D)$ se tienen las flechas (x_1,x_3) de color 1, (x_3,x_1) de color 2 y todas las flechas que estaban en D con sus respectivos colores.

Observemos que si $\gamma=(u_1,u_2,u_3,\dots,u_i,u_{i+1},u_{i+2},\dots,u_n,u_1)$ es un ciclo dirigido monocromático de color a , entonces se tiene que para todo par de vértices consecutivos u_i y u_{i+1} de γ , $(u_{i+1},u_{i+2},u_{i+3},\dots,u_1,u_2,\dots,u_{i-1},u_i)$ es una $u_{i+1}u_i$ -trayectoria dirigida monocromática de color a , por lo que en la cerradura de γ

tenemos a la flecha (u_{i+1}, u_i) con color a . Como γ también está contenido en $\mathcal{C}(\gamma)$, por definición de cerradura, entonces (u_i, u_{i+1}) es una flecha simétrica de γ en $\mathcal{C}(\gamma)$ y como esto pasa para todo par de vértices consecutivos de γ , entonces se concluye que γ es un ciclo dirigido simétrico en su cerradura.

A partir de este momento, en lugar de escribir toda la frase “núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas”, nos limitaremos a escribir “núcleo por t.d.m”, y para referirnos a una “trayectoria dirigida monocromática”, escribiremos “t.d.m.”.

Comencemos con los primeros resultados.

Lema 14 . Si D es una digráfica m -coloreada, $\mathcal{C}(D)$ su cerradura, $S \subseteq V(\mathcal{C}(D))$ y $B \subseteq V(\mathcal{C}(D)[S])$, entonces $\mathcal{C}(D)[S][B] = \mathcal{C}(D)[B]$, es decir, la digráfica generada por B en la digráfica generada por S en $\mathcal{C}(D)$ es igual a la digráfica generada por B en $\mathcal{C}(D)$.

Demostración. Como $V(\mathcal{C}(D)[S][B]) = V(\mathcal{C}(D)[B])$, entonces sólo basta probar que $F(\mathcal{C}(D)[S][B]) = F(\mathcal{C}(D)[B])$.

$$i) F(\mathcal{C}(D)[S][B]) \subseteq F(\mathcal{C}(D)[B]).$$

$$\text{Sea } a \in F(\mathcal{C}(D)[S][B]).$$

Por definición de subdigráfica inducida tenemos que si $a \in F(\mathcal{C}(D)[S][B])$, entonces $a \in F(\mathcal{C}(D)[S])$, por lo que $a \in F(\mathcal{C}(D))$. Por lo tanto, $a \in F(\mathcal{C}(D)[B])$.

$$ii) F(\mathcal{C}(D)[B]) \subseteq F(\mathcal{C}(D)[S][B]).$$

$$\text{Sea } a \in F(\mathcal{C}(D)[B]).$$

Por definición de subdigráfica inducida tenemos que si $a \in F(\mathcal{C}(D)[B])$, entonces $a \in F(\mathcal{C}(D))$, y como $B \subseteq S$ entonces $a \in F(\mathcal{C}(D)[S])$. Por lo tanto, $a \in F(\mathcal{C}(D)[S][B])$.

Por lo tanto, $F(\mathcal{C}(D)[S][B]) = F(\mathcal{C}(D)[B])$.

Con todo lo anterior hemos demostrado que $\mathcal{C}(D)[S][B] = \mathcal{C}(D)[B]$. ■

Lema 15 . Sea D una digráfica m -coloreada y $\mathcal{C}(D)$ su cerradura, entonces $\mathcal{C}(D) \cong \mathcal{C}(\mathcal{C}(D))$.

Demostración. Sea D una digráfica m -coloreada.

Por definición de cerradura tenemos que $V(\mathcal{C}(D)) = V(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)))$, también se tiene que $F(\mathcal{C}(D)) \subseteq F(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)))$.

Por demostrar que $F(\mathcal{C}(D)) = F(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)))$.

Sólo falta probar que $F(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D))) \subseteq F(\mathcal{C}(D))$.

Supongamos que existe $(u, v) = a \in F(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)))$ tal que $a \notin F(\mathcal{C}(D))$.

Como $a \in F(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)))$, entonces por definición de cerradura tenemos que en $\mathcal{C}(D)$ existe T una uv -t.d.m de color i , donde $l(T) \geq 2$ ya que $a \notin F(\mathcal{C}(D))$.

Supongamos que $T = (u = x_1, x_2, \dots, x_n = v)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$. Como $\{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), \dots, (x_{n-1}, x_n)\} \subseteq F(\mathcal{C}(D))$, entonces por definición de cerradura tenemos que en D existen T_1 una x_1x_2 -t.d.m de color i , T_2 una x_2x_3 -t.d.m de color i , T_3 una x_3x_4 -t.d.m de color i , T_4 una x_4x_5 -t.d.m de color i , ..., T_{n-1} una $x_{n-1}x_n$ -t.d.m. de color i , por lo que $\cup_{i=1}^{n-1} T_i$ es un uv -camino dirigido monocromático de color i contenido en D , el cual contiene una uv -trayectoria

dirigida y como todas sus flechas tienen el mismo color, entonces está trayectoria dirigida es monocromática. Por lo tanto $a=(u,v)\in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual no puede suceder, ya que supusimos que $a\notin F(\mathcal{C}(D))$.

Así $F(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)))\subseteq F(\mathcal{C}(D))$.

Por lo tanto, $F(\mathcal{C}(D))=F(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)))$.

Como $V(\mathcal{C}(D))=V(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)))$ y $F(\mathcal{C}(D))=F(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)))$, entonces se concluye que $\mathcal{C}(D)\cong \mathcal{C}(\mathcal{C}(D))$. ■

Teorema 16 . Sea D una digráfica m -coloreada.

N es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D si y sólo si N es núcleo de $\mathcal{C}(D)$.

Demostración. Sea D una digráfica m -coloreada.

Sea N un núcleo por t.d.m. de D .

Por demostrar que N es núcleo de $\mathcal{C}(D)$.

i) N es un conjunto independiente en $\mathcal{C}(D)$.

Sea $\{u,v\}\subseteq N$.

Como N es núcleo por t.d.m. de D , entonces no existen uv -t.d.m. y vu -t.d.m. en D . Por lo tanto, $(u,v)\notin F(\mathcal{C}(D))$ y $(v,u)\notin F(\mathcal{C}(D))$, por definición de cerradura.

ii) N es un conjunto absorbente en $\mathcal{C}(D)$.

Sea $v\in V(\mathcal{C}(D))\setminus N$.

Como $V(D)=V(\mathcal{C}(D))$ y N es núcleo por t.d.m. de D , entonces existe una vN -t.d.m. en D y por definición de cerradura tenemos que existe la vN -flecha en $\mathcal{C}(D)$.

Por lo tanto, $\forall v \in V(\mathcal{C}(D)) \setminus N$ existe la vN -flecha en $\mathcal{C}(D)$.

De (i) y (ii) tenemos que N es núcleo de $\mathcal{C}(D)$.

Sea N un núcleo de $\mathcal{C}(D)$.

Por demostrar que N es núcleo por t.d.m. de D .

i) N es un conjunto independiente por t.d.m. en D .

Sea $\{u,v\} \subseteq N$.

Como N es un conjunto independiente en $\mathcal{C}(D)$ por ser núcleo, entonces no existe $(u,v) \in F(\mathcal{C}(D))$, no existe $(v,u) \in F(\mathcal{C}(D))$ y por definición de cerradura tenemos que no existe una uv -t.d.m. en D y no existe una vu -t.d.m. en D .

Por lo tanto, N es un conjunto independiente por t.d.m. en D .

ii) N es un conjunto absorbente por t.d.m en D .

Sea $w \in V(D) \setminus N$.

Como $V(D)=V(\mathcal{C}(D))$ y N es núcleo de $\mathcal{C}(D)$, entonces existe la wN -flecha en $\mathcal{C}(D)$ y por definición de cerradura tenemos que en D existe una wN -t.d.m.

Por lo tanto, $\forall w \in V(D) \setminus N$ existe una wN -t.d.m. en D .

Por lo tanto, de (i) y (ii) tenemos que N es núcleo por t.d.m. de D . ■

Corolario 17 . Sea D una digráfica m -coloreada.

Si para todo par de flechas a y b de D , el color de a es distinto al color de b , entonces N es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D si y sólo si N es núcleo de D .

Demostración. Sea D una digráfica m -coloreada tal que para todo par de flechas a y b de D , el color de a es distinto al color de b .

Por la hipótesis tenemos que en $D \forall \{u,v\} \subseteq V(D)$ no existen T_1 una uv -t.d.m. y T_2 una vu -t.d.m. con $l(T_1) \geq 2$, $l(T_2) \geq 2$, por lo que $\mathcal{C}(D) = D$.

Por lo tanto, por el Teorema 16 tenemos que: N es núcleo por t.d.m. de D si y sólo si N es núcleo de $\mathcal{C}(D) = D$. ■

Capítulo 2

Torneos m -coloreados

En el capítulo anterior vimos que no todas las digráficas m -coloreadas tienen núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. En este capítulo estudiaremos los *Torneos m -coloreados*, los cuales son digráficas completas asimétricas m -coloreadas, y veremos algunas de las condiciones que deben de cumplir para que tengan núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Sands, Sauer y Woodrow demostraron en [1], que toda digráfica 2-coloreada tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas y en particular probaron que todo torneo 2-coloreado tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. También propusieron el siguiente problema:

Problema. Si T es un torneo 3-coloreado que no contiene C_3 . ¿ T debe de tener núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas?

Shen Minggang en [2] retomó el trabajo hecho por Sands, Sauer y Woodrow y se dió cuenta que si a un torneo m -coloreado se le pide la condición de que no tenga C_3 ni T_3 , entonces éste tendrá núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Él demostró que a su resultado no se le puede eliminar la condición de que T no contenga C_3 para $m \geq 5$, ya que éste podría no tener núcleo por tra-

yectorias dirigidas monocromáticas, y ésto lo hizo dando un torneo 5-coloreado el cual no contiene C_3 y no tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. También probó que no es posible omitir la condición de que el torneo no tenga T_3 dando un torneo 4-coloreado, el cual no tiene T_3 ni núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Para el caso $m=3$ la pregunta aún sigue abierta y para el caso $m=4$ Hortensia Galeana y Rocío Rojas en [4], encontraron un contraejemplo.

Para $m=3$, Hortensia Galeana y Rocío Rojas observaron en [6] que si al problema propuesto por Sands, Sauer y Woodrow se le añade la siguiente condición, entonces el torneo si tendrá núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas:

Condición. Para cada vértice en T el número de colores que aparecen en las flechas que inciden en él son a lo más 2.

Hortensia Galeana y Rocío Rojas demuestran que no se puede quitar la condición de que el torneo no tenga C_3 ya que este podría no tener núcleo, y dan como ejemplo al mismo C_3 . También prueban que, para $m \geq 4$, si T es un torneo m -coloreado tal que para cada vértice el número de colores que aparecen en las flechas que inciden en él son a lo más 2, entonces T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Finalmente, hacen notar que para $m \geq 4$ el resultado es lo mejor posible.

Cabe mencionar que todos los resultados y ejemplos antes mencionados serán demostrados en este capítulo.

2.1. Torneos m -coloreados sin C_3 ni T_3

Como vimos en el capítulo anterior C_3 no tiene núcleo por t.d.m.. Además, C_3 es el torneo 3-coloreado más pequeño que cumple con no tener núcleo por t.d.m., ya que sabemos que todas las digráficas con uno y dos vértices tienen núcleo y por consiguiente todas las digráficas m -coloreadas con uno y dos vértices tienen núcleo por t.d.m..

Por lo anterior, es necesario hacernos la siguiente pregunta: ¿Qué condiciones debe de cumplir un torneo m -coloreado para que tenga núcleo por t.d.m.?

Sands, Sauer y Woodrow probaron en [1] que en particular todo torneo T 2-coloreado tiene núcleo por t.d.m.. Como C_3 es el torneo más pequeño que cumple con no tener núcleo por t.d.m., entonces ellos propusieron el siguiente problema.

Problema 1 .

Sea T un torneo 3-coloreado el cual no contiene C_3 , entonces ¿ T debe de tener núcleo por t.d.m.?

Shen Minggang se dio cuenta en [2] que si en el problema se pide que T no tenga T_3 ni C_3 , entonces la respuesta a la pregunta es afirmativa para todo torneo m -coloreado.

Ahora se dará la demostración del resultado obtenido por Shen Minggang.

Teorema 18 . Sea T un torneo m -coloreado.

Si T no contiene T_3 ni C_3 , entonces existe un vértice v de T tal que para cualquier otro vértice x de T existe una trayectoria dirigida monocromática de x a v , es decir, T tiene núcleo por t.d.m..

Demostración. Sea T un torneo m -coloreado sin T_3 ni C_3 .

Demostraremos que T contiene un vértice v tal que para cualquier otro vértice x de T , existe una trayectoria dirigida monocromática de x a v . La demostración la haremos por inducción sobre el número de vértices de T .

Para $p=1$, tenemos que el resultado se cumple ya que el único vértice con el que cuenta el torneo m -coloreado es el buscado.

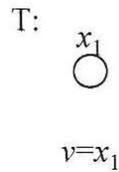


Figura 2.1:

Para $p=2$, tenemos que todos los torneos no isomorfos con dos vértices son los mostrados en la figura 2.2.

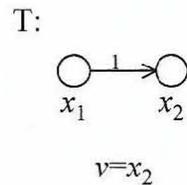


Figura 2.2:

Claramente, el vértice v indicado para el torneo T de la figura 2.2 es el buscado.

Hipótesis de inducción. Supongamos que todo torneo m -coloreado sin T_3 ni C_3 con menos de p vértices, con $p \geq 3$, tiene núcleo por t.d.m.

Sea T un torneo m -coloreado sin T_3 ni C_3 con p vértices.

Por hipótesis de inducción tenemos que $\forall v \in V(T)$, en $T \setminus \{v\}$ existe un vértice, digamos $f(v)$, tal que para cualquier otro vértice x de $T \setminus \{v\}$ existe una t.d.m. de x a $f(v)$.

Caso 1. Existen u y v en $V(T)$, con $u \neq v$, tal que $f(u) = f(v)$.

Como $u \neq v$, entonces $u \in V(T \setminus \{v\})$, por lo que existe una $uf(v)$ -t.d.m. en $T \setminus \{v\}$. Puesto que $f(u) = f(v)$, entonces existe una $uf(u)$ -t.d.m. en T y para cualquier otro vértice x de $T \setminus \{u\}$ existe una $xf(u)$ -t.d.m. en T .

Por lo tanto, $f(u) = f(v)$ es el vértice buscado.

Caso 2. Para algún $v \in V(T)$, existe una t.d.m. de v a $f(v)$.

En este caso tenemos que $\forall x \in V(T \setminus \{v\})$ existe una $xf(v)$ -t.d.m. en T y además existe una $vf(v)$ -t.d.m. en T .

Por lo tanto, $f(v)$ es el vértice buscado.

Afirmamos que los únicos casos posibles son los casos 1 y 2.

Supongamos que f es una biyección y además no existe una t.d.m. de v a $f(v) \forall v \in V(T)$, ya que de lo contrario estaríamos en los casos 1 ó 2.

Ahora renombremos a los vértices de T de la siguiente manera:

$$v_1 \in V(T) \text{ y } f(v_1) = v_2,$$

$$v_2 \in V(T) \text{ y } f(v_2) = v_3,$$

$$v_3 \in V(T) \text{ y } f(v_3) = v_4,$$

.
 .
 .
 $v_i \in V(T)$ y $f(v_i)=v_{i+1}$.

Donde se dirá que los vértices de T están particionados en ciclos¹, los cuales tienen la siguiente forma.

$$(v_1, v_2, \dots, v_{n_1}), (v_{n_1+1}, \dots, v_{n_2}), \dots$$

$$\begin{aligned}
 &\text{donde, } f(v_1)=v_2, f(v_2)=v_3, \dots, f(v_{n_1})=v_1 \\
 &f(v_{n_1+1})=v_{n_1+2}, f(v_{n_1+2})=v_{n_1+3}, \dots, f(v_{n_2})=v_{n_1+1} \\
 &. \\
 &. \\
 &.
 \end{aligned}$$

Observación 1. Por la nueva etiquetación de los vértices de T tenemos que, para todo $v \in \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \setminus \{v_i\}$ existe una vv_{i+1} -t.d.m. $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, con $i+1$ tomado módulo n.

Afirmamos que sólo existe un ciclo.

Supongamos que existen al menos dos ciclos, digamos que $A=(v_1, v_2, \dots, v_{n_1})$ y $B=(v_{n_1+1}, \dots, v_{n_2})$ son dos ciclos distintos. Como $A \neq B$, entonces sin pérdida de generalidad supongamos que existe $w \in B$ tal que $w \notin A$, esto quiere decir que A no contiene a todos los vértices de T, por lo que por hipótesis de inducción tenemos que $D[A]$ contiene un vértice $v \in \{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\}$ tal que para cualquier otro vértice x de $D[A]$ existe una xv -t.d.m., lo cual no puede suceder, ya que tendríamos que en particular si $v=f(v_i)$ para algún $v_i \in \{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\}$, por definición de ciclo, entonces existe una $v_i f(v_i)$ -t.d.m., la cual supusimos que no

¹Estos ciclos no son los ciclos dirigidos que ya conocemos, si no que sólo se le ha dado ese nombre al arreglo de los vértices de T en base a la definición de f .

debe de existir.

Por lo tanto, sólo existe un ciclo.

Supongamos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es el único ciclo formado por la nueva etiquetación de los vértices de T en base a f .

Observación 2. Como no existen trayectorias dirigidas monocromáticas de v_i a $f(v_i)$, entonces no existen trayectorias dirigidas monocromáticas de v_i a v_{i+1} $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, con $i+1$ tomado módulo n .

Por la observación 2 y por ser T torneo, existen las flechas (v_2, v_1) , (v_3, v_2) , $(v_4, v_3), \dots, (v_n, v_{n-1})$, (v_1, v_n) con color $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ respectivamente, figura 2.3.

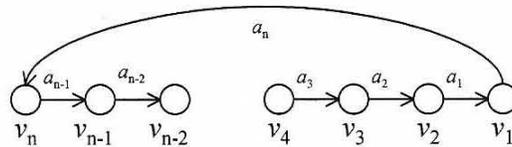


Figura 2.3:

Si $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{n-1}$, entonces podemos ir de v_n a v_1 a través de una t.d.m. de color a_1 , como se muestra en la figura 2.4, es decir, como $v_{n+1} = v_1$ entonces tenemos una $v_n v_{n+1}$ -t.d.m., lo cual no puede suceder por la observación 2.

Como ya vimos que $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ no pueden ser iguales, entonces deben de existir dos colores distintos, digamos que son a_{s-1} y a_s . Sin pérdida de generalidad supongamos que $a_{s-1} = 1$ y $a_s = 2$.

Por la observación 1, sabemos que existe una t.d.m. l de v_{s-1} a v_{s+1} de color b , figura 2.5.

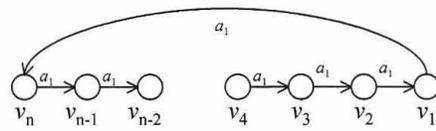


Figura 2.4:

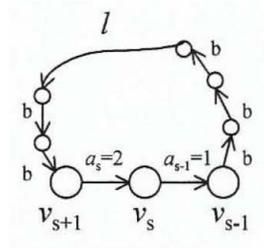


Figura 2.5:

- Si $b=1$, entonces $(v_s, v_{s-1}) \cup (v_{s-1}, l, v_{s+1})$ es una $v_s v_{s+1}$ -t.d.m. de color 1, como se muestra en la figura 2.6, lo cual no puede suceder por la observación 2.

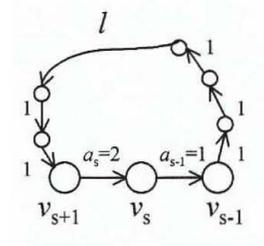


Figura 2.6:

- Si $b=2$, entonces $(v_{s-1}, l, v_{s+1}) \cup (v_{s+1}, v_s)$ es una $v_{s-1} v_s$ -t.d.m. de color 2, como se muestra en la figura 2.7, lo cual no puede suceder por la observación 2. Por lo tanto, $b \notin \{1, 2\}$.

Supongamos que $b=3$.

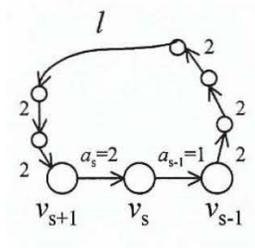


Figura 2.7:

Sea $P=(u_1=v_{s-1}, u_2, u_3, \dots, u_t=v_{s+1})$ la t.d.m. más corta de v_{s-1} a v_{s+1} con color 3, como se muestra en la figura 2.8.

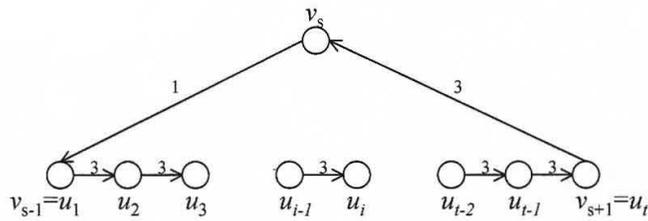


Figura 2.8:

Ahora consideremos los colores de las flechas entre v_s y u_i , para $1 \leq i \leq t$.

- Si $(u_i, v_s) \in F(T)$, entonces ésta no puede ser de color 3, ya que de lo contrario tendríamos que $(u_1, P, u_i) \cup (u_i, v_s)$ es una $v_{s-1} v_s$ -t.d.m. de color 3, como se muestra en la figura 2.9, lo cual no puede suceder por la observación 2.

- Si $(v_s, u_i) \in F(T)$, entonces ésta no puede ser de color 3, ya que de lo contrario, tendríamos que $(v_s, u_i) \cup (u_i, P, u_t)$ es una $v_s v_{s+1}$ -t.d.m. de color 3, como se muestra en la figura 2.10, lo cual no puede suceder por la observación 2.

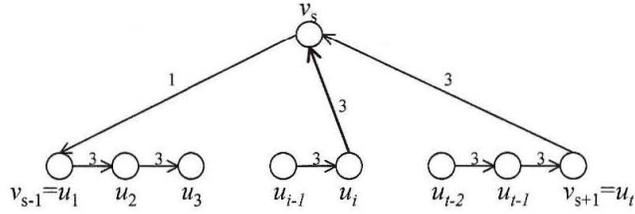


Figura 2.9:

Observación 3. Para todo i , con $1 \leq i \leq t$, la flecha (u_i, v_s) ó la flecha (v_s, u_i) , tiene un color distinto de 3.

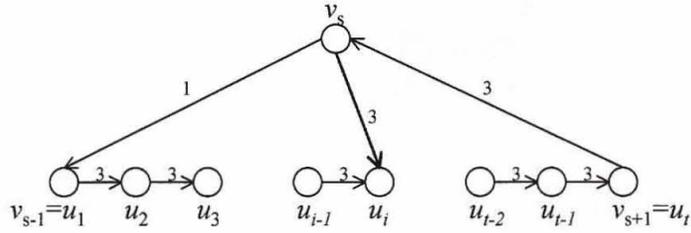


Figura 2.10:

Como las flechas (v_s, u_1) y (u_t, v_s) son de distinto color, entonces consideremos $k = \min\{i / \text{la flecha entre } v_s \text{ y } u_i \text{ tiene color distinto a } 1\}$.

Por elección de k , tenemos que la flecha entre v_s y u_k tiene color distinto a 1 y la flecha entre v_s y u_{k-1} tiene color 1.

Caso a. $(v_s, u_{k-1}) \in F(T)$.

Subcaso a.1. $(v_s, u_k) \in F(T)$.

Por la observación 3, (v_s, u_k) no tiene color 3 y no tiene color 1 por la elección de k , entonces $D[\{v_s, u_k, u_{k-1}\}]$ es T_3 , como se muestra en la figura 2.11, lo cual no puede suceder por hipótesis.

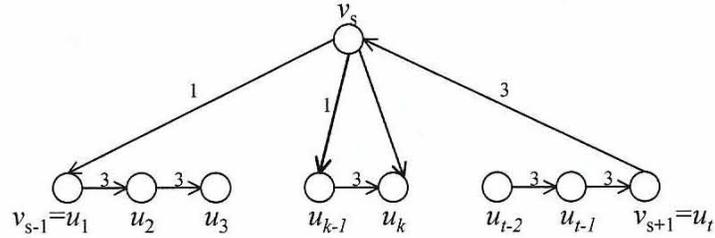


Figura 2.11:

Subcaso a.2. $(u_k, v_s) \in F(T)$.

Por la observación 3, (u_k, v_s) no tiene color 3 y no tiene color 1, por lo que $D[\{v_s, u_k, u_{k-1}\}]$ es C_3 , como se muestra en la figura 2.12, lo cual no es posible por la hipótesis.

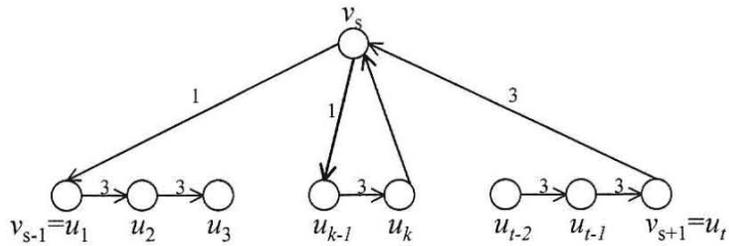


Figura 2.12:

Caso b. $(u_{k-1}, v_s) \in F(T)$.

Subcaso b.1. $(v_s, u_k) \in F(T)$.

Como (v_s, u_k) no tiene color 3, por la observación 3, y tampoco color 1 por la elección de k , entonces $D[\{v_s, u_k, u_{k-1}\}]$ es T_3 , como se muestra en la figura 2.13, lo cual no puede suceder por hipótesis.

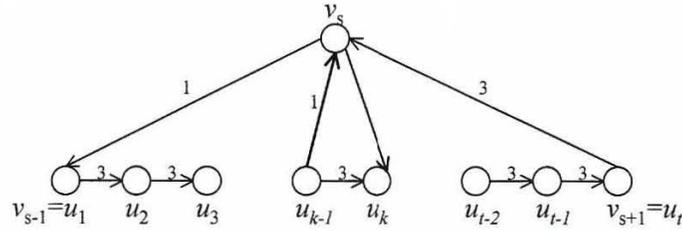


Figura 2.13:

Subcaso b.2. $(u_k, v_s) \in F(T)$.

Como (u_k, v_s) no tiene color 3, por la observación 3, y tampoco color 1, entonces $D[\{v_s, u_k, u_{k-1}\}]$ es T_3 , como se muestra en la figura 2.14, lo cual no puede suceder por hipótesis.

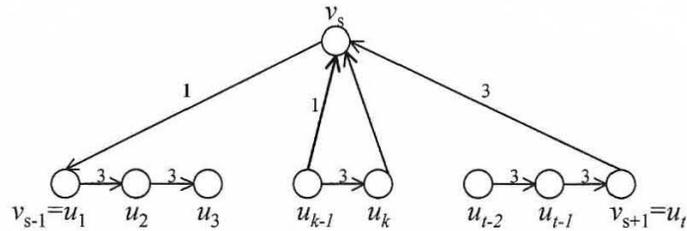


Figura 2.14:

Como suponer que f es biyectiva y que no existe una $vf(v)$ -t.d.m. $\forall v \in V(T)$ nos conduce a una contradicción, entonces sólo podemos considerar los casos iniciales 1 y 2. Por lo tanto el Teorema se cumple. ■

Notemos que con el resultado de Shen Minggang es posible demostrar el si-

guiente corolario, el cual fue probado originalmente por Sands, Sauer y Woodrow en [1].

Corolario 19 . Sea T un torneo 2-coloreado.

Entonces T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Demostración. Sea T un torneo 2-coloreado.

Como las flechas de T están coloreadas con dos colores, entonces T no contiene T_3 ni C_3 , por lo que se cumplen la hipótesis del Teorema 18 y por lo tanto T tiene núcleo por t.d.m. ■

Corolario 20 . Supongamos que $T = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, H_1, H_2, \dots, H_n son torneos m -coloreados, los cuales no contienen triángulos² 3-coloreados.

Sea T' el torneo formado al reemplazar cada vértice v_i de T con H_i , además para todo $u \in V(H_i)$ y $w \in V(H_j)$, $(u, w) \in F(T')$ si $(v_i, v_j) \in F(T)$, donde todas las flechas entre H_i y H_j tendrán el mismo color que la flecha entre v_i y v_j . Entonces T' tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Demostración. Sean T, H_1, H_2, \dots, H_n y T' como en las hipótesis de Corolario.

Observación. Por hipótesis tenemos que T, H_1, H_2, \dots, H_n no contienen T_3 ni C_3 .

Por demostrar que T' no contiene T_3 ni C_3 .

Sea $\{u, v, z\} \subseteq V(T')$.

Caso 1. $\{u, v, z\} \subseteq V(H_i)$ para alguna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

²Los triángulos son torneos con tres vértices.

Por la observación tenemos que $D[\{u,v,z\}]$ no es T_3 ni C_3 .

Caso 2. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\{u,v\} \subseteq V(H_i)$ y $z \in V(H_j)$ para algún $\{i,j\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ con $i \neq j$.

Por construcción de T' tenemos que las flechas entre z y u , z y v tienen el mismo color, por lo que $D[\{u,v,z\}]$ no es T_3 ni C_3 .

Caso 3. $u \in V(H_i)$, $v \in V(H_j)$ y $z \in V(H_k)$, para algún $\{i,j,k\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ con $i \neq j \neq k$.

Supongamos que $D[\{u,v,z\}]$ es un triángulo 3-coloreado.

Por definición de T' tenemos que $D[\{v_i,v_j,v_k\}]$ es un triángulo 3-coloreado, el cual está contenido en T , lo cual no puede suceder por hipótesis. Por lo tanto $D[\{u,v,z\}]$ no es T_3 ni C_3 .

Por lo tanto, T' no contiene T_3 ni C_3 .

Ahora, como se cumplen las hipótesis del Teorema 18, entonces T' tiene núcleo por t.d.m. ■

Si en el Teorema 18 sólo pedimos que T no contenga T_3 , entonces este no necesariamente podría ser cierto. Por ejemplo, C_3 es un torneo 3-coloreado sin T_3 , pero claramente se puede observar que no tiene núcleo por t.d.m..

Para $m=4$, si consideramos al torneo D_n 4-coloreado con $V(D_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ tal que las flechas (v_1, v_2) , (v_2, v_3) , (v_3, v_1) son coloreadas con color 1, 2 y 3 respectivamente y todas las otras flechas son coloreadas con color 4, las cuales están dirigidas como (v_i, v_j) si $i \geq j$.

Por construcción, D_n no contiene T_3 y además no existen v_2v_1 -t.d.m., v_3v_2 -t.d.m., v_1v_3 -t.d.m., $\{v_1, v_2, v_3\}v_4$ -t.d.m., $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}v_5$ -t.d.m., ..., $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}\}v_n$ -t.d.m., por lo que D_n no tiene núcleo por t.d.m.

Por lo tanto, si $m \geq 3$, la condición de que T no contenga T_3 no puede ser omitida del Teorema 18.

Veamos que al Teorema 18 no se le puede quitar la hipótesis de que T no tenga C_3 para $m \geq 4$.

Si en el Teorema 18 sólo pedimos que T no contenga C_3 , entonces este no necesariamente podría ser cierto. Por ejemplo, el torneo G_5 de la figura 2.15 es 5-coloreado de orden 5 y cumple lo siguiente:

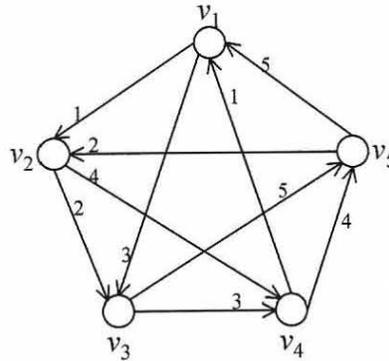


Figura 2.15:

1) G_5 no tiene C_3 .

Tenemos que los únicos ciclos dirigidos de longitud 3 que tiene G_5 son los siguientes:

(v_1, v_3, v_4, v_1)

(v_1, v_2, v_4, v_1)

(v_1, v_3, v_5, v_1)

(v_2, v_4, v_5, v_2)

(v_2, v_3, v_5, v_2)

Claramente se puede observar que ninguno de ellos es C_3 .

2) G_5 no tiene núcleo por t.d.m.

- No existe una v_2v_1 -t.d.m., ya que a v_2 sólo le salen flechas de color 2 y 4, y a v_1 no le llegan flechas de estos colores. Por lo tanto, $\{v_1\}$ no es un conjunto absorbente por t.d.m..

- No existe una v_3v_2 -t.d.m., ya que a v_3 sólo le salen flechas de color 3 y 5, y a v_2 no le llegan flechas de estos colores. Por lo tanto, $\{v_2\}$ no es un conjunto absorbente por t.d.m..

- No existe una v_4v_3 -t.d.m., ya que a v_4 sólo le salen flechas de color 1 y 4, y a v_3 no le llegan flechas de estos colores. Por lo tanto, $\{v_3\}$ no es un conjunto absorbente por t.d.m..

- No existe una v_5v_4 -t.d.m., ya que a v_5 sólo le salen flechas de color 2 y 5, y a v_4 no le llegan flechas de estos colores. Por lo tanto, $\{v_4\}$ no es un conjunto absorbente por t.d.m..

- No existe una v_1v_5 -t.d.m., ya que a v_1 sólo le salen flechas de color 1 y 3, y a v_5 no le llegan flechas de estos colores. Por lo tanto, $\{v_5\}$ no es un conjunto absorbente por t.d.m..

Concluimos que G_5 no tiene núcleo por t.d.m.

A partir de G_5 podemos dar una familia infinita de torneos 5-coloreados los cuales cumplirán con no tener C_3 y no tener núcleo por t.d.m.. La construcción de dichos torneos es la siguiente:

-Para obtener un primer torneo T_1 , lo que haremos es agregar un nuevo vértice a G_5 y de él saldrán flechas de color 1 hacia todos los vértices de G_5 .

-Para obtener un torneo T_2 , se le agregara un nuevo vértice a T_1 y de él saldrán flechas de color 1 hacia todos los vértices de T_1 .

Continuando con este procedimiento podemos llegar a construir un torneo T_n , al agregar un nuevo vértice a T_{n-1} y de él saldrán flechas de color 1 hacia todos los vértices de T_{n-1} .

Se puede verificar fácilmente que todos estos torneos 5-coloreados no contienen C_3 y no tienen núcleo por t.d.m.

Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos dar un contraejemplo si sólo pedimos que el torneo no contenga C_3 .

Para el caso $m=4$, Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Rojas Monroy en [4] encontraron un contraejemplo para el problema dado por Sands, Sauer y Woodrow, el cual es el siguiente:

Tenemos que en el torneo 4-coloreado de orden 6, mostrado en la figura 2.16, todos los ciclos dirigidos de longitud 3 son los siguientes:

$$(v_1, v_4, v_6, v_1)$$

$$(v_1, v_3, v_6, v_1)$$

$$(v_1, v_4, v_5, v_1)$$

$$(v_1, v_3, v_5, v_1)$$

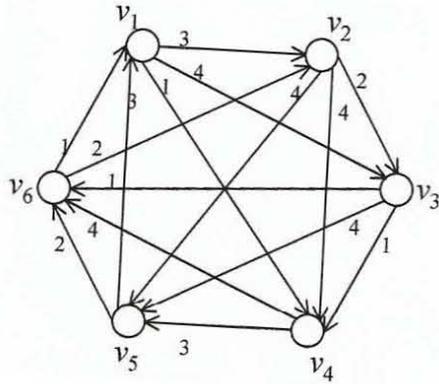


Figura 2.16:

$$(v_1, v_2, v_5, v_1)$$

$$(v_2, v_5, v_6, v_2)$$

$$(v_2, v_4, v_6, v_2)$$

$$(v_2, v_3, v_6, v_2)$$

Se puede observar claramente que ninguno de estos ciclos dirigidos de longitud 3 es C_3 .

También tenemos que el torneo de la figura 2.16 satisface lo siguiente:

- No existe una v_2v_1 -t.d.m., ya que a v_2 sólo le salen flechas de color 2 y 4, y a v_1 no le llegan flechas de estos colores.

- No existe una v_3v_2 -t.d.m., ya que a v_3 sólo le salen flechas de color 1 y 4, y a v_2 no le llegan flechas de estos colores.

- No existe una v_4v_3 -t.d.m., ya que a v_4 sólo le salen flechas de color 3 y 4, pero a v_3 no le llegan flechas de color 3 y a v_6 no le salen flechas de color 4.

- No existe una v_5v_4 -t.d.m., ya que a v_5 sólo le salen flechas de color 2 y 3, y a v_4 no le llegan flechas de estos colores.

- No existe una v_6v_5 -t.d.m., ya que a v_6 sólo le salen flechas de color 2 y 1, y a v_5 no le llegan flechas de estos colores.

- No existe una v_1v_6 -t.d.m., ya que a v_1 sólo le salen flechas de color 1, 3 y 4, y a v_6 no le llegan flechas de color 3, a v_5 no le salen flechas de color 4 y a v_4 no le salen flechas de color 1.

Por lo tanto, el torneo de la figura 2.16 no tiene núcleo por t.d.m.

Ahora, a partir del torneo de la figura 2.16 podemos construir una familia infinita de torneos 4-coloreados que cumplen con no tener C_3 y además no tienen núcleo por t.d.m.. La construcción es la siguiente:

Sea $T_0=T$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y dado T_{n-1} un torneo que satisface con ser 4-coloreado, no contener C_3 y además no tener núcleo por t.d.m., consideremos un nuevo vértice z_n y definamos el torneo T_n como sigue:

$$V(T_n) = V(T_{n-1}) \cup \{z_n\}$$

$$F(T_n) = F(T_{n-1}) \cup \{(z_n, u) \mid u \in V(T_{n-1})\}$$

Donde los colores de las flechas de T_{n-1} quedarán igual en T_n y a las flechas de la forma (z_n, u) se les asignará el color 1.

Tenemos que por construcción, el torneo T_n satisface lo siguiente:

1) T_n no contiene C_3 ya que por construcción, los únicos ciclos dirigidos de longitud 3 que contiene T_n son los que tiene T , los cuales ya vimos que no son C_3 .

2)

- No existe una v_2v_1 -t.d.m.
- No existe una v_3v_2 -t.d.m.
- No existe una v_4v_3 -t.d.m.
- No existe una v_5v_4 -t.d.m.
- No existe una v_6v_5 -t.d.m.
- No existe una v_1v_6 -t.d.m.
- No existe una $v_i z_1$ -t.d.m. $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, 6\}$, ya que $\delta_{T_1}^-(z_1) = 0$.
- No existe una $z_1 z_2$ -t.d.m., ya que $\delta_{T_2}^-(z_2) = 0$.
- No existe una $z_2 z_3$ -t.d.m., ya que $\delta_{T_3}^-(z_3) = 0$.
- .
- .
- .
- No existe una $z_{n-1} z_n$ -t.d.m., ya que $\delta_{T_n}^-(z_n) = 0$.

Por lo tanto, T_n no tiene núcleo por t.d.m.

Por lo tanto, si $m \geq 4$, la condición de que T no contenga C_3 no puede ser omitida del Teorema 18.

2.2. torneos m -coloreados con vecindades a lo más bicolor

Como ya se vió, existen torneos 3-coloreados que no tienen núcleo por t.d.m., por lo que podríamos pensar en las condiciones que debe de cumplir un torneo 3-coloreado para que tenga núcleo por t.d.m..

Hortensia Galena y Rocío Rojas observaron en [6] que si a un torneo 3-coloreado le piden la condición de que no contenga C_3 y al conjunto de colores asignados a las flechas que inciden en el vértice v del torneo tiene cardinalidad a lo más dos, esto para cada vértice del torneo, entonces el torneo debe de tener núcleo por t.d.m.. También se dieron cuenta que para un torneo T m -coloreado, con $m \geq 4$, si le piden la condición de que al conjunto de colores asignados a las flechas que inciden en el vértice v del torneo tiene cardinalidad a lo más dos, esto para cada vértice del torneo, entonces T no tiene T_3 ni C_3 y por consiguiente T tiene núcleo por t.d.m..

Antes de demostrar los resultados obtenidos por Hortensia Galeana y Rocío Rojas, será necesario dar unas definiciones previas.

Sea T un torneo m -coloreado y $v \in V(T)$, denotamos por $\zeta(v)$ al conjunto de colores asignados a las flechas que inciden en el vértice v .

Definición 49 . Dado un torneo T m -coloreado, decimos que un vértice v de T tiene vecindad a lo más bicolor si $|\zeta(v)| \leq 2$.

Teorema 21 . Sea T un torneo 3-coloreado sin C_3 tal que cada vértice de T tiene vecindad a lo más bicolor, entonces $\mathcal{C}(T)$ tiene núcleo y por lo tanto T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Demostración. Sea T un torneo 3-coloreado sin C_3 tal que cada vértice de T tiene vecindad a lo más bicolor.

Supongamos que T esta coloreado con los colores 1, 2 y 3.

Afirmación 1. Para todo $v \in V(\mathcal{C}(T))$, $|\zeta(v)| \leq 2$.

Sea $v \in V(\mathcal{C}(T))$.

- Si en el vértice v sólo inciden flechas de color a , para alguna $a \in \{1,2,3\}$, entonces todas las t.d.m. que pasan por v deben de ser de color a y por definición de cerradura tendríamos que todas las flechas que inciden en v son de color a en $\mathcal{C}(T)$.

-Si en el vértice v inciden flechas de color a y b con $\{a,b\} \subset \{1,2,3\}$, entonces todas las t.d.m. que pasan por v deben de ser de color a ó b , por lo que por definición de cerradura tendríamos que todas las flechas que inciden en v son de color a ó b en $\mathcal{C}(T)$.

Por lo tanto, $|\zeta(v)| \leq 2$ para todo $v \in V(\mathcal{C}(T))$.

Afirmación 2. $\zeta_T(v) = \zeta_{\mathcal{C}(T)}(v)$ para todo $v \in V(\mathcal{C}(T))$.

Sea $v \in V(\mathcal{C}(T)) = V(T)$.

Por definición de cerradura tenemos que $\zeta_T(v) \subseteq \zeta_{\mathcal{C}(T)}(v)$, esto porque $\Gamma_T^-(v) \subseteq \Gamma_{\mathcal{C}(T)}^-(v)$ y $\Gamma_T^+(v) \subseteq \Gamma_{\mathcal{C}(T)}^+(v)$.

Supongamos que existe $a \in \zeta_{\mathcal{C}(T)}(v)$ tal que $a \notin \zeta_T(v)$, para alguna $a \in \{1,2,3\}$.

Como $a \in \zeta_{\mathcal{C}(T)}(v)$, entonces existe $w \in V(\mathcal{C}(T))$ tal que la flecha entre w y v tiene color a en $\mathcal{C}(T)$ y por definición de cerradura tenemos que en T existe una t.d.m. entre w y v de color a , por lo que en T incide una flecha de color a

en el vértice v , lo cual no puede suceder ya que supusimos que $a \notin \zeta_T(v)$.

Por lo tanto $\zeta_T(v) = \zeta_{\mathcal{C}(T)}(v)$ para todo $v \in V(\mathcal{C}(T))$.

Ahora demostraremos que todo ciclo dirigido en $\mathcal{C}(T)$ tiene al menos una flecha simétrica.

Sea γ un ciclo dirigido en $\mathcal{C}(T)$.

Caso 1. γ no es un ciclo dirigido en T .

Tenemos que existe $(u, v) \in F(\gamma)$ tal que $(u, v) \in F(\mathcal{C}(T))$ y $(u, v) \notin F(T)$, pero como T es torneo tenemos que $(v, u) \in F(T)$, por lo que por definición de cerradura $(v, u) \in F(\mathcal{C}(T))$. Por lo tanto, $(u, v) \in F(\mathcal{C}(T))$ y $(v, u) \in F(\mathcal{C}(T))$, lo que implica que γ tiene una flecha simétrica en $\mathcal{C}(T)$.

Caso 2. γ es un ciclo dirigido en T .

En este caso demostraremos que γ tiene una flecha simétrica por inducción sobre la longitud del ciclo dirigido.

Antes de empezar con la demostración, es necesario introducir la siguiente notación la cual utilizaremos a lo largo de la prueba.

- $u \rightarrow^a v$ si $(u, v) \in F(T)$ y es de color a .
- $u \rightarrow^a v$ si en $\mathcal{C}(T)$ existe alguna flecha de u a v con color a .
- $u \leftrightarrow^a v$ si en $\mathcal{C}(T)$ no hay flechas de u a v de color a .
- $u \Rightarrow^a v$ si $u \rightarrow^a v$ y en $\mathcal{C}(T)$ todas las flechas de u a v son de color a .

Para $l(\gamma)=3$, tenemos que los únicos ciclos dirigidos con esta longitud y que cumplen con las hipótesis del teorema son los mostrados en la figura 2.17.

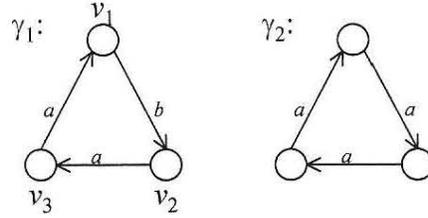


Figura 2.17:

Claramente se puede observar que en γ_1 (v_2, v_3, v_1) es una t.d.m. de v_2 a v_1 con color a en T para $\{a, b\} \subset \{1, 2, 3\}$ y por definición de cerradura tenemos que $(v_2, v_1) \in F(\mathcal{C}(T))$, por lo que (v_2, v_1) es una flecha simétrica de γ_1 en $\mathcal{C}(T)$. Tenemos que γ_2 es un ciclo dirigido monocromático el cual ya sabemos que en $\mathcal{C}(T)$ es un ciclo dirigido simétrico.

Hipótesis de inducción. Supongamos que γ' es un ciclo dirigido tal que $l(\gamma') \leq n+1$, entonces γ' contiene una flecha simétrica en $\mathcal{C}(T)$.

Sea $\gamma = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_0)$ un ciclo dirigido de longitud $n+1$.

Supongamos que en $\mathcal{C}(T)$, γ no tiene flechas simétricas.

Consideremos las siguientes afirmaciones.

1) γ está coloreado con al menos dos colores.

Sabemos que un ciclo dirigido monocromático en T es un ciclo dirigido simétrico en $\mathcal{C}(T)$, por lo que γ no puede ser monocromático.

2) Para cualquier par de vértices no consecutivos u y v de γ , (u,v) es una flecha simétrica en $\mathcal{C}(T)$.

Sean u y v dos vértices no consecutivos de γ .

Como $\{u,v\} \subseteq V(\gamma)$, entonces $u=u_i$ y $v=u_j$ para algún $\{i,j\} \subset \{0,1,2,\dots,n\}$ con $i \neq j$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $i \leq j$.

- Si $(u,v) \in F(T)$.

En este caso tenemos que $\gamma' = (v=u_j, \gamma, u_i=u) \cup (u,v)$ es un ciclo dirigido en T de longitud menor que $n+1$, como se muestra en la figura 2.18, y por hipótesis de inducción tenemos que γ' tiene al menos una flecha simétrica en $\mathcal{C}(T)$. Como γ no tiene flechas simétricas, entonces (u,v) es una flecha simétrica en $\mathcal{C}(T)$.

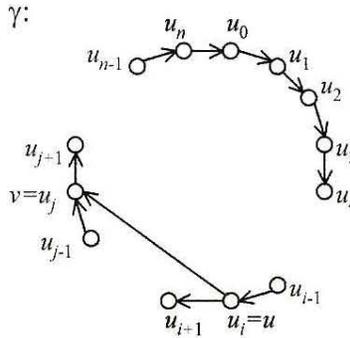


Figura 2.18:

- Si $(v,u) \in F(T)$.

En este caso tenemos que $\gamma' = (u=u_i, \gamma, u_j=v) \cup (v,u)$ es un ciclo dirigido en T

de longitud menor que $n+1$, como se muestra en la figura 2.19, y por hipótesis de inducción tenemos que γ' tiene al menos una flecha simétrica en $\mathcal{C}(T)$. Como γ no tiene flechas simétricas, entonces (u,v) es una flecha simétrica en $\mathcal{C}(T)$.

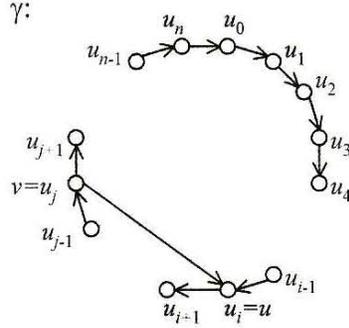


Figura 2.19:

3) Si para algún $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $u_{i-1} \xrightarrow{a} u_i$ y $u_i \xrightarrow{b} u_{i+1}$ con $a \neq b$, entonces $u_{i+1} \xRightarrow{c} u_{i-1}$ y $u_{i-1} \xRightarrow{c} u_{i+1}$ con $c \neq a$ y $c \neq b$, las sumas tomadas módulo $n+1$.

Sea $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ que cumple con lo anterior.

Por (2) tenemos que (u_{i-1}, u_{i+1}) es una flecha simétrica en $\mathcal{C}(T)$.

- Si $(u_{i+1}, u_{i-1}) \in F(\mathcal{C}(T))$ tiene color a .

Como $(u_{i-1}, u_i) \in F(\mathcal{C}(T))$ tiene color a , entonces tenemos que (u_{i+1}, u_{i-1}, u_i) es una t.d.m. de color a , como se muestra en la figura 2.20, y por definición de cerradura tenemos que $(u_{i+1}, u_i) \in F(\mathcal{C}(T))$ tiene color a , por lo tanto (u_i, u_{i+1}) es una flecha simétrica de γ en $\mathcal{C}(T)$, lo cual no puede suceder.

- Si $(u_{i+1}, u_{i-1}) \in F(\mathcal{C}(T))$ tiene color b .

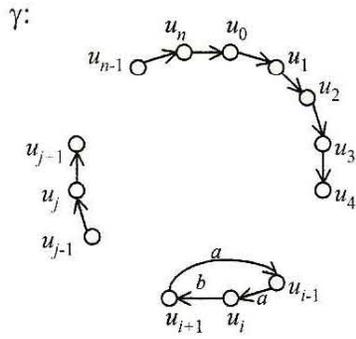


Figura 2.20:

Como $(u_i, u_{i+1}) \in F(\mathcal{C}(T))$ tiene color b , entonces tenemos que (u_i, u_{i+1}, u_{i-1}) es una t.d.m. de color b , como se muestra en la figura 2.21, y por definición de cerradura tenemos que $(u_i, u_{i-1}) \in F(\mathcal{C}(T))$ tiene color b , esto implica que (u_{i-1}, u_i) es una flecha simétrica de γ en $\mathcal{C}(T)$, lo cual no puede suceder.

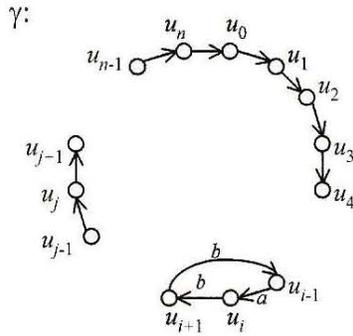


Figura 2.21:

Por lo tanto $u_{i+1} \Rightarrow^c u_{i-1}$ con $c \neq a$ y $c \neq b$. Así tenemos que $\zeta(u_{i-1}) = \{a, c\}$ y $\zeta(u_{i+1}) = \{b, c\}$.

Como $\zeta(u_{i+1})=\{b,c\}$, entonces tenemos que la flecha (u_{i-1},u_{i+1}) tiene color b ó c , esto porque las vecindades de todos los vértices del torneo son a lo más bicolores. Si la flecha (u_{i-1},u_{i+1}) tiene color b , entonces $\zeta(u_{i-1})=\{a,b,c\}$, lo cual no puede suceder porque $\zeta(u_{i-1})=\{a,c\}$, por lo que la flecha (u_{i-1},u_{i+1}) tiene color c . Por lo tanto $u_{i-1} \Rightarrow^c u_{i+1}$.

Por (1) tenemos que en T existen dos flechas consecutivas en γ con diferente color. Sin pérdida de generalidad supongamos que:

$$4) u_n \rightarrow^1 u_0 \text{ y } u_0 \rightarrow^2 u_1.$$

$$5) u_n \Rightarrow^3 u_1 \text{ y } u_1 \Rightarrow^3 u_n.$$

Como $\{(u_n,u_0),(u_0,u_1)\} \subseteq F(T)$, tenemos que $\{(u_n,u_0),(u_0,u_1)\} \subseteq F(\mathcal{C}(T))$, por definición de cerradura, y por (3) para $i=n+1$, $b=1$, $a=2$ se cumple que $u_n \Rightarrow^3 u_1$ y $u_1 \Rightarrow^3 u_n$.

Así tenemos que por (5).

$$6) \zeta(u_n)=\{1,3\}.$$

$$7) \zeta(u_0)=\{1,2\}.$$

$$8) \zeta(u_1)=\{3,2\}.$$

Como $\zeta(u_1)=\{3,2\}$, entonces $u_1 \rightarrow^2 u_2$ ó $u_1 \rightarrow^3 u_2$, por la hipótesis de vecindades a lo más bicolores.

Caso a. $u_1 \rightarrow^3 u_2$.

Para este caso, sea $j_0 = \min\{j=2,3,\dots,n/u_j \xrightarrow{3} u_{j+1} \text{ con la suma tomada m\u00f3dulo } n+1\}$.

Como $\zeta(u_0) = \{1,2\}$, entonces $u_n \xrightarrow{3} u_0$, por lo que j_0 existe.

Ahora para este caso tenemos las siguientes afirmaciones.

1.a) $u_i \xrightarrow{3} u_{i+1} \forall i \in \{1,2,\dots,j_0-1\}$ y $u_{j_0} \xrightarrow{3} u_{j_0+1}$.

Esto se debe a la elecci\u00f3n de j_0 .

2.a) $u_i \xrightarrow{3} u_j$ para cada $1 \leq i \leq j \leq j_0$.

Por (1.a) tenemos que la trayectoria dirigida $(u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{j-1}, u_j)$ es monocrom\u00e1tica de color 3, por lo que en $\mathcal{C}(T)$ tenemos que la flecha (u_i, u_j) tiene color 3.

3.a) $j_0 \leq n-2$.

Supongamos que $j_0 \not\leq n-2$, es decir $j_0 \geq n-1$.

Por (2.a) tenemos que $u_1 \xrightarrow{3} u_{n-1}$ y como $u_n \xrightarrow{3} u_1$, por (5), entonces (u_n, u_1, u_{n-1}) es una t.d.m. de color 3, como se muestra en la figura 2.22, por lo que en $\mathcal{C}(T)$ tenemos la flecha (u_n, u_{n-1}) con color 3. Por lo tanto (u_{n-1}, u_n) es una flecha sim\u00e9trica de γ en $\mathcal{C}(T)$, lo cual no puede suceder.

Por lo tanto, $j_0 \leq n-2$.

4.a) $u_{j_0+1} \Rightarrow^1 u_n$.

Por (6) tenemos que $\zeta(u_n) = \{1,3\}$, entonces $u_{j_0+1} \xrightarrow{1} u_n$ \u00f3 $u_{j_0+1} \xrightarrow{3} u_n$.

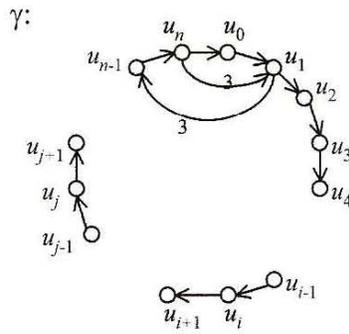


Figura 2.22:

Si $u_{j_0+1} \xrightarrow{3} u_n$, entonces por (5) tenemos que la flecha (u_n, u_1) tiene color 3 en $\mathcal{C}(T)$ y por (2.a) la flecha (u_1, u_{j_0}) tiene color 3. Por lo tanto $(u_{j_0+1}, u_n, u_1, u_{j_0})$ es una t.d.m. de color 3, como se muestra en la figura 2.23, por lo que en $\mathcal{C}(T)$ tenemos la flecha (u_{j_0+1}, u_{j_0}) con color 3 y por consiguiente tenemos que la flecha (u_{j_0+1}, u_{j_0}) es una flecha simétrica de γ en $\mathcal{C}(T)$, lo cual no puede suceder.

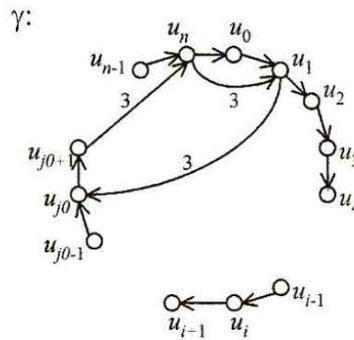


Figura 2.23:

Por lo tanto, $u_{j_0+1} \Rightarrow^1 u_n$.

5.a) $u_0 \Rightarrow^2 u_{j_0}$.

Por (7) tenemos que $\zeta(u_0)=\{1,2\}$, entonces $u_0 \rightarrow^1 u_{j_0}$ ó $u_0 \rightarrow^2 u_{j_0}$.

Si $u_0 \rightarrow^1 u_{j_0}$, entonces por (4.a) tenemos que la flecha (u_{j_0+1}, u_n) en $\mathcal{C}(T)$ tiene color 1 y por (4) tenemos que la flecha (u_n, u_0) en T tiene color 1, por lo que $(u_{j_0+1}, u_n, u_0, u_{j_0})$ es una t.d.m. de color 1, como se muestra en la figura 2.24, por lo que en $\mathcal{C}(T)$ tenemos la flecha (u_{j_0+1}, u_{j_0}) con color 1. Por lo tanto (u_{j_0+1}, u_{j_0}) es una flecha simétrica de γ en $\mathcal{C}(T)$, lo cual no puede suceder.

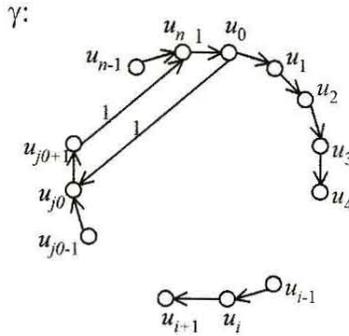


Figura 2.24:

Por lo tanto, $u_0 \Rightarrow^2 u_{j_0}$.

6.a) $u_0 \Rightarrow^1 u_2$.

Por (4) tenemos que la flecha (u_0, u_1) en T tiene color 2 y por la suposición inicial de este caso tenemos que la flecha (u_1, u_2) en T tiene color 3. Por lo tanto, para $i=1$. $a=2$ y $b=3$ tenemos que por (3) $u_0 \Rightarrow^1 u_2$.

7.a) $j_0 \geq 3$.

Por (1.a) tenemos que la flecha (u_{j_0-1}, u_{j_0}) en $\mathcal{C}(T)$ tiene color 3 y por (5.a) tenemos que la flecha (u_0, u_{j_0}) en $\mathcal{C}(T)$ tiene color 2, por lo que $\zeta(u_{j_0}) = \{2, 3\}$. Por otro lado tenemos que por (6.a) $1 \in \zeta(u_2)$, por lo tanto $u_{j_0} \neq u_2$ y así $j_0 \geq 3$.

8.a) $\zeta(u_{j_0+1}) = \{1, 2\}$.

Tenemos que $\zeta(u_{j_0}) = \{2, 3\}$, como se vio en (7.a), por (1.a) tenemos que la flecha (u_{j_0}, u_{j_0+1}) en $\mathcal{C}(T)$ no tiene color 3, entonces $u_{j_0} \Rightarrow^2 u_{j_0+1}$ y por (4.a) tenemos que $1 \in \zeta(u_{j_0+1})$, por lo que $\zeta(u_{j_0+1}) = \{1, 2\}$.

9.a) $u_2 \Rightarrow^1 u_{j_0+1}$.

Por (6.a) tenemos que la flecha (u_0, u_2) en $\mathcal{C}(T)$ tiene color 1 y por la suposición inicial de este caso tenemos que la flecha (u_1, u_2) en T tiene color 3, entonces $\zeta(u_2) = \{1, 3\}$, y por (8.a) tenemos que $\zeta(u_{j_0+1}) = \{1, 2\}$, por lo que $u_2 \Rightarrow^1 u_{j_0+1}$, ya que $\zeta(u_{j_0+1}) \cap \zeta(u_2) = \{1\}$ y la vecindad de cada vértice es a lo más bicolor por hipótesis.

Por (6.a) tenemos que la flecha (u_0, u_2) en $\mathcal{C}(T)$ tiene color 1, por (9.a) la flecha (u_2, u_{j_0+1}) en $\mathcal{C}(T)$ tiene color 1 y por (4.a) la flecha (u_{j_0+1}, u_n) en $\mathcal{C}(T)$ tiene color 1, por lo que $(u_0, u_2, u_{j_0+1}, u_n)$ es una t.d.m. de color 1, como se muestra en la figura 2.25, por lo que en $\mathcal{C}(T)$ tenemos la flecha (u_0, u_n) de color 1. Por lo tanto, (u_n, u_0) es una flecha simétrica de γ en $\mathcal{C}(T)$, lo cual no puede suceder.

Por lo tanto, este caso no es posible.

Caso b. $u_1 \rightarrow^2 u_2$.

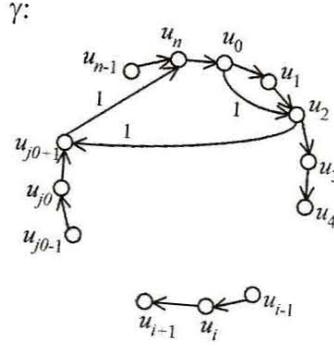


Figura 2.25:

Sea $j_0 = \min\{j=2,3,\dots,n-1 / u_j \rightarrow^2 u_{j+1}\}$.

Por (6) tenemos que $\zeta(u_n) = \{1,3\}$, por lo que $u_{n-1} \rightarrow^2 u_n$ y por lo tanto j_0 existe.

Ahora consideremos las siguientes afirmaciones.

1.b) $u_i \rightarrow^2 u_{i+1} \forall i \in \{0,1,\dots,j_0-1\}$ y $u_{j_0} \rightarrow^2 u_{j_0+1}$.

Esto se da por la elección de j_0 .

2.b) $u_i \rightarrow^2 u_j$ para cada $1 \leq i \leq j \leq j_0$.

Por (1.b) tenemos que la trayectoria dirigida $(u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{j-1}, u_j)$ es monocromática de color 2, por lo que en $\mathcal{C}(T)$ tenemos la flecha (u_i, u_j) con color 2.

Como $\zeta(u_1) = \{2,3\}$, por (8), entonces consideremos los siguientes subcasos.

Subcaso b.1. $j_0 \geq 3$.

Para este subcaso tenemos las siguientes afirmaciones.

1.(b.1)) $\zeta(u_i) = \{1, 2\}$ para $i \in \{j_0 - 1, j_0\}$.

Sea $i \in \{j_0 - 1, j_0\}$.

Por (7) tenemos que $\zeta(u_0) = \{1, 2\}$, entonces $u_i \rightarrow^1 u_0$ ó $u_i \rightarrow^2 u_0$.

Si $u_i \rightarrow^2 u_0$, entonces por (2.b) tenemos que la flecha (u_1, u_i) en $\mathcal{C}(T)$ tiene color 2, por lo que (u_1, u_i, u_0) es una t.d.m. de color 2, como se muestra en la figura 2.26, y por lo tanto en $\mathcal{C}(T)$ tenemos la flecha (u_1, u_0) de color 2. Por lo tanto, (u_0, u_1) es una flecha simétrica de γ en $\mathcal{C}(T)$, lo cual no puede suceder.

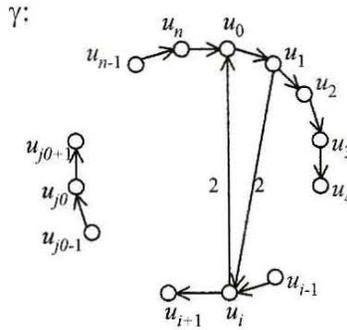


Figura 2.26:

Por lo tanto, $u_i \Rightarrow^1 u_0$, por lo que $1 \in \zeta(u_i)$ y por (1.b) tenemos que la flecha (u_{i-1}, u_i) en $\mathcal{C}(T)$ tiene color 2, lo que implica que $\zeta(u_i) = \{1, 2\}$.

2.(b.1)) $u_{j_0} \Rightarrow^1 u_{j_0+1}$.

Por (1.(b.1)) sabemos que $\zeta(u_{j_0})=\{1,2\}$ y por (1.b) tenemos que $u_{j_0} \rightarrow^2 u_{j_0+1}$, entonces $u_{j_0} \Rightarrow^1 u_{j_0+1}$.

3.(b.1) $u_{j_0-1} \Rightarrow^3 u_{j_0+1}$.

Por (1.b) tenemos que $u_{j_0-1} \rightarrow^2 u_{j_0}$ y por (2.(b.1)) $u_{j_0} \Rightarrow^1 u_{j_0+1}$. Por lo tanto, para $i=j_0$, $a=2$ y $b=1$ tenemos que por (3) $u_{j_0-1} \Rightarrow^3 u_{j_0+1}$.

Por (3.(b.1)) tenemos que $3 \in \zeta(u_{j_0-1})$, pero $\zeta(u_{j_0-1})=\{1,2\}$, por (1.(b.1)).

Por lo tanto, este subcaso no es posible.

Subcaso b.2. $j_0=2$.

Para este subcaso tenemos las siguientes afirmaciones.

1.(b.2) $u_2 \rightarrow^1 u_3$, $u_1 \Rightarrow^3 u_3$, $u_3 \Rightarrow^3 u_1$ y $\zeta(u_3)=\{1,3\}$.

Como $j_0=2$, entonces por (1.b) tenemos que $u_2 \rightarrow^2 u_3$.

Sea $a \in \{1,3\}$ tal que $u_2 \rightarrow^a u_3$.

Por la suposición inicial del caso b tenemos que $u_1 \rightarrow^2 u_2$, luego para $i=2$ obtenemos por (3) que $u_1 \Rightarrow^c u_3$ y $u_3 \Rightarrow^c u_1$ con $c \neq a$ y $c \neq 2$, por (8) tenemos que $\zeta(u_1)=\{2,3\}$, lo que implica que $c \in \{2,3\}$, como $c \neq 2$, entonces $c=3$.

Por otro lado tenemos que como $u_2 \rightarrow^2 u_3$, entonces $a \in \{1,3\}$.

Si $a=3$, entonces $\{u_2, u_3, u_1\}$ es una t.d.m. de color 3, como se muestra en la figura 2.27, por lo que en $\mathcal{C}(T)$ tenemos a la flecha (u_2, u_1) de color 3 y por

lo tanto (u_1, u_2) es una flecha simétrica de γ en $\mathcal{C}(T)$, lo cual no puede suceder. Por lo tanto, $a=1$.

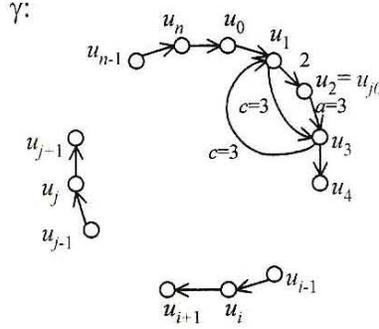


Figura 2.27:

Por lo tanto, $u_2 \rightarrow^1 u_3$, $u_1 \Rightarrow^3 u_3$, $u_3 \Rightarrow^3 u_1$ y $\zeta(u_3) = \{1, 3\}$.

2.(b.2)) $n \geq 4$.

Supongamos que $n=3$.

Por (1.(b.2)) tenemos que $u_1 \Rightarrow^3 u_3$, $u_3 \Rightarrow^3 u_1$ y por otro lado tenemos que $(u_1, u_3) \in F(T)$ ó $(u_3, u_1) \in F(T)$.

- Si $(u_1, u_3) \in F(T)$, entonces por (4) tenemos que la flecha (u_3, u_0) en T tiene color 1 y la flecha (u_0, u_1) en T tiene color 2, lo que implica que $\{u_1, u_3, u_0, u_1\}$ es C_3 en T , como se muestra en la figura 2.27, lo cual no puede suceder por hipótesis.

- Si $(u_3, u_1) \in F(T)$, entonces por la suposición inicial del caso b tenemos que la flecha (u_1, u_2) en T tiene color 2, por (1.(b.2)) la flecha (u_2, u_3) en T tiene color 1, lo que implica que $\{u_1, u_2, u_3, u_1\}$ es C_3 en T , como se muestra en la

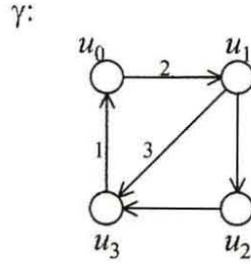


Figura 2.28:

figura 2.29, lo cual no puede suceder por hipótesis.

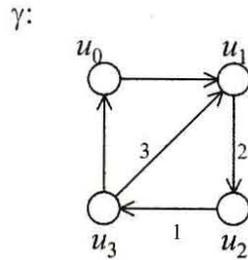


Figura 2.29:

Por lo tanto, $n \geq 4$.

Por (1.(b.2)) tenemos que $\zeta(u_3) = \{1, 3\}$, lo que implica que $u_3 \rightarrow^1 u_4$ ó $u_3 \rightarrow^3 u_4$.

- Si $u_3 \rightarrow^3 u_4$, entonces por la suposición inicial del caso b tenemos que la flecha (u_1, u_2) en T tiene color 2 y por (1.(b.2)) la flecha (u_2, u_3) en T tiene color 1, entonces en T tenemos tres flechas consecutivas de γ con distinto color, por lo que la prueba se reduce al *caso a*. Por lo tanto, podemos suponer que.

3.(b.2)) $u_3 \rightarrow^1 u_4$.

4.(b.2)) $u_n \Rightarrow^1 u_2$.

Por la suposición inicial del caso b tenemos que la flecha (u_1, u_2) en T tiene color 2 y por (1.(b.2)) la flecha (u_2, u_3) en T tiene color 1, por lo que $\zeta(u_2) = \{1, 2\}$, por (6) tenemos que $\zeta(u_n) = \{1, 3\}$, lo que implica que $u_n \Rightarrow^1 u_2$, por que $\zeta(u_2) \cap \zeta(u_n) = \{1\}$ y la vecindad de todo vértice de T es a lo más bicolor.

5.(b.2)) $n \geq 5$.

Si $n=4$, entonces por (3.(b.2)) tenemos que la flecha (u_3, u_4) en T tiene color 1 y por (4.(b.2)) la flecha (u_4, u_2) en $\mathcal{C}(T)$ tiene color 1, por lo que $\{u_3, u_4, u_2\}$ es una t.d.m. de color 1, como se muestra en la figura 2.30, lo que implica que en $\mathcal{C}(T)$ tenemos la flecha (u_3, u_2) de color 1. Por lo tanto, (u_2, u_3) es una flecha simétrica de γ en $\mathcal{C}(T)$, lo cual no puede suceder.

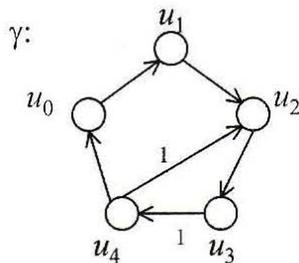


Figura 2.30:

Por lo tanto, $n \geq 5$.

6.(b.2)) $u_4 \Rightarrow^3 u_n$.

Por (6) tenemos que $\zeta(u_n) = \{1, 3\}$, por lo que $u_4 \rightarrow^1 u_n$ ó $u_4 \rightarrow^3 u_n$.

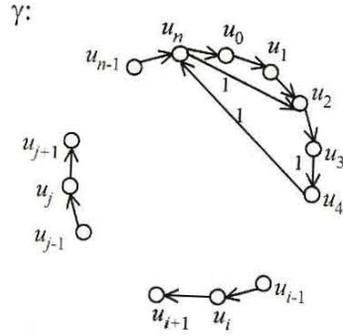


Figura 2.31:

Si $u_4 \rightarrow^1 u_n$, entonces por (3.(b.2)) tenemos que la flecha (u_3, u_4) en T tiene color 1 y por (4.(b.2)) la flecha (u_n, u_2) en $\mathcal{C}(T)$ tiene color 1, por lo que $\{u_3, u_4, u_n, u_2\}$ es una t.d.m. de color 1, como se muestra en la figura 2.31, lo que implica que en $\mathcal{C}(T)$ tenemos la flecha (u_3, u_2) de color 1. Por lo tanto (u_2, u_3) es una flecha simétrica de γ en $\mathcal{C}(T)$, lo cual no puede suceder.

Por lo tanto, $u_4 \Rightarrow^3 u_n$.

Finalmente, tenemos que por (6.(b.2)) la flecha (u_4, u_n) en $\mathcal{C}(T)$ tiene color 3, por (5) la flecha (u_n, u_1) en $\mathcal{C}(T)$ tiene color 3 y por (1.(b.2)) la flecha (u_1, u_3) en $\mathcal{C}(T)$ tiene color 3, por lo que (u_4, u_n, u_1, u_3) es una t.d.m. de color 3, como se muestra en la figura 2.32, lo que implica que en $\mathcal{C}(T)$ tenemos la flecha (u_4, u_3) de color 3. Por lo tanto (u_3, u_4) es una flecha simétrica de γ en $\mathcal{C}(T)$, lo cual no puede suceder.

Concluimos que este subcaso no es posible.

Por lo anterior, el caso b tampoco es posible, por lo que llegamos a que γ tiene al menos una flecha simétrica en $\mathcal{C}(T)$.

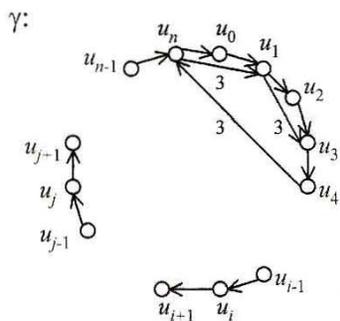


Figura 2.32:

Por lo tanto, todo ciclo dirigido de $\mathcal{C}(T)$ tiene al menos una flecha simétrica, lo que implica que $\mathcal{C}(T)$ tiene un núcleo N , esto por el Teorema 8, y por el Teorema 16 tenemos que N es núcleo por t.d.m. de T . ■

Lema 22 . Si T es un torneo m -coloreado con $m \geq 4$, tal que $\forall v \in V(T)$ se tiene que $|\zeta(v)| \leq 2$, entonces T no contiene T_3 ni C_3 . Además bajo esta hipótesis tenemos que existe un color que pertenece a todas las vecindades.

Demostración. Sea T un torneo m -coloreado con $m \geq 4$, tal que $\forall v \in V(T)$ $|\zeta(v)| \leq 2$.

Observación. Para cualquier par de vértices u y v de T , tenemos que como en T hay una flecha entre ellos, por ser T torneo, entonces el color de esta flecha pertenece tanto a $\zeta(u)$ como a $\zeta(v)$, es decir, $\zeta(u) \cap \zeta(v) \neq \emptyset$.

Supongamos que $\{u, v, w\} \subseteq V(T)$ es tal que $D[\{u, v, w\}]$ es T_3 ó C_3 .

Supongamos sin pérdida de generalidad que la flecha entre u y v es de color 1, la flecha entre v y w es de color 2, la flecha entre w y u es de color 3. Por lo

tanto, tenemos que $\zeta(u)=\{1,3\}$, $\zeta(v)=\{1,2\}$ y $\zeta(w)=\{2,3\}$.

Sea $x \in V(T)$ tal que $4 \in \zeta(x)$, 4 existe porque $m \geq 4$, luego por la observación tenemos que $\zeta(x) \cap \zeta(u) \neq \emptyset$ y $\zeta(x) \cap \zeta(v) \neq \emptyset$, por lo que se concluye que $1 \in \zeta(x)$ y por lo tanto $\zeta(x)=\{1,4\}$, pero entonces $\zeta(x) \cap \zeta(w)=\emptyset$, lo cual no puede suceder por la observación.

Por lo tanto, T no contiene T_3 ni C_3 .

Para probar que existe un color que pertenece a todas las vecindades, consideremos u y v vértices de T tales que $\zeta(u) \neq \zeta(v)$.

Por la observación tenemos que $\zeta(u) \cap \zeta(v) \neq \emptyset$, por lo que sin pérdida de generalidad supongamos que $\zeta(u)=\{1,2\}$ y $\zeta(v)=\{1,3\}$.

Por demostrar que $1 \in \zeta(z) \forall z \in V(T)$.

Supongamos que existe $w \in V(T)$ tal que $1 \notin \zeta(w)$.

Como $\zeta(w) \cap \zeta(u) \neq \emptyset$ y $\zeta(w) \cap \zeta(v) \neq \emptyset$, entonces $\zeta(w)=\{2,3\}$.

Sea $x \in V(T)$ tal que $4 \in \zeta(x)$.

Como $\zeta(x) \cap \zeta(u) \neq \emptyset$ y $\zeta(x) \cap \zeta(v) \neq \emptyset$, entonces $\zeta(x)=\{1,4\}$, lo que implica que $\zeta(x) \cap \zeta(w)=\emptyset$, lo cual no puede suceder por la observación.

Por lo tanto, el color 1 pertenece a toda vecindad. ■

Teorema 23 .

Si T es un torneo m -coloreado con $m \geq 4$, tal que $\forall v \in V(T)$ se tiene que $|\zeta(v)| \leq 2$, entonces T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Demostración. Sea T un torneo m -coloreado con $m \geq 4$, tal que $\forall v \in V(T)$ $|\zeta(v)| \leq 2$.

Como se cumplen la hipótesis de Lema 22, entonces T no contiene T_3 ni C_3 y por el Teorema 18 se concluye que T tiene núcleo por t.d.m. ■

Observemos que si eliminamos del Teorema 21 la hipótesis sobre las vecindades a lo más bicolor, entonces obtenemos el problema propuesto por Sands, Sauer y Woodrow, el cual se dio anteriormente.

Notemos que al Teorema 21 no se le puede quitar la hipótesis de que T no contenga C_3 , ya que de lo contrario T podría no tener núcleo por t.d.m., por ejemplo podemos considerar a C_3 mismo y claramente se puede observar que todos sus vértices tienen vecindad a lo más bicolor y C_3 no tiene núcleo por t.d.m. como ya sabemos.

Ahora veamos que en el Teorema 23 no podemos cambiar la hipótesis de vecindades a lo más bicolor, por vecindades a lo más tricolor, ya que puede que el torneo no tenga núcleo por t.d.m., por ejemplo, consideremos el torneo T de la figura 2.16, el cual ya vimos que no tiene núcleo por t.d.m. y además claramente se puede observar que todas las vecindades de sus vértices son a lo más tricolores.

Por lo tanto, el resultado dado en el Teorema 23 es lo mejor posible.

Ahora a partir de T construyamos una familia infinita de torneos 4-coloreados, donde todos sus vértices tendrán vecindades a lo más tricolor y sin núcleo por t.d.m.

Primero observemos que $\forall v \in V(T)$, de la figura 2.16, $1 \in \zeta(v)$ ó $2 \in \zeta(v)$.

Sea T_0 el torneo de la figura 2.16, para cada $n \in \mathbb{N}$ y dado T_{n-1} torneo 4-coloreado sin núcleo por t.d.m. tal que para cada vértice u se tiene que $|\zeta(u)| \leq 3$ y $\{1,2\} \cap \zeta(u) \neq \emptyset$, consideramos dos nuevos vértices z_n, w_n y definimos el torneo T_n como sigue:

$$V(T_n) = V(T_{n-1}) \cup \{z_n, w_n\}.$$

$$F(T_n) = F(T_{n-1}) \cup \{(z_n, u), (w_n, u) \mid u \in V(T_{n-1})\} \cup \{(z_n, w_n)\}.$$

Los colores de las flechas de T_{n-1} quedaran igual en T_n , a las flechas de la forma (z_n, u) y (w_n, u) le asignamos color 1 si $1 \in \zeta(u)$ ó color 2 en caso contrario, a la flecha (z_n, w_n) le asignamos cualquiera de los cuatro colores. Así tenemos que T_n es un torneo 4-coloreado tal que para cualquier $u \in V(T_n)$ se tiene que $|\zeta(u)| \leq 3$ y $\{1,2\} \cap \zeta(u) \neq \emptyset$.

Por construcción de T_n tenemos que:

- no existe una t.d.m. de v_2 a v_1 .
- no existe una t.d.m. de v_3 a v_2 .
- no existe una t.d.m. de v_4 a v_3 .
- no existe una t.d.m. de v_5 a v_4 .
- no existe una t.d.m. de v_6 a v_5 .
- no existe una t.d.m. de v_1 a v_6 .

La razón del porque no existen estas trayectorias dirigidas monocromáticas es porque T_0 esta contenida en T_n y por construcción de T_n .

- no existe una $\{v_1, v_2, \dots, v_6\} z_1$ -t.d.m.
- no existe una $\{v_1, v_2, \dots, v_6, z_1\} z_2$ -t.d.m.
- no existe una $\{v_1, v_2, \dots, v_6, z_1, z_2\} z_3$ -t.d.m.
- .
- .

- .
- no existe una $\{v_1, v_2, \dots, v_6, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ z_n -t.d.m.
- no existe una $\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ w_1 -t.d.m.
- no existe una $\{v_1, v_2, \dots, v_6, w_1\}$ w_2 -t.d.m.
- no existe una $\{v_1, v_2, \dots, v_6, w_1, w_2\}$ w_3 -t.d.m.
- .
- .
- .
- no existe una $\{v_1, v_2, \dots, v_6, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\}$ w_n -t.d.m.

Tenemos que por construcción de T_n no existen las trayectorias dirigidas monocromáticas anteriores.

Por lo tanto, T_n no tiene núcleo por t.d.m.

Veamos que el Teorema 21 es totalmente independiente del Teorema 18.

Notemos que existen torneos 3-coloreados que satisfacen las hipótesis del Teorema 21, pero no las hipótesis del Teorema 18, por ejemplo, sea T un torneo transitivo de orden tres 3-coloreado, el cual claramente satisface las hipótesis del Teorema 21 pero no las del Teorema 18. A partir de T podemos construir una familia infinita de torneos 3-coloreados que satisfacen las hipótesis del Teorema 21 pero no las del Teorema 18.

Supongamos que $V(T) = \{u, v, w\}$ y que (u, v) es una flecha de color 1, (w, v) es una flecha de color 2 y que (w, u) es una flecha de color 3, como se muestra en la figura 2.33. Sea $T_0 = T$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y dado T_{n-1} torneo 3-coloreado sin C_3 , donde todo vértice tiene vecindad a lo más bicolor, sea T_n el torneo 3-coloreado que se obtiene al agregar un nuevo vértice z_n a T_{n-1} , donde T_n se define como sigue:

$$V(T_n) = V(T_{n-1}) \cup \{z_n\}.$$

Las flechas entre z_n y $V(T_{n-1})$ están dadas de la siguiente manera:

- Si $v \in V(T_{n-1}) \setminus \{w\}$, entonces ponemos una flecha entre z_n y v en cualquier dirección con color 1.
- Entre w y z_n ponemos la flecha (w, z_n) con color 2.

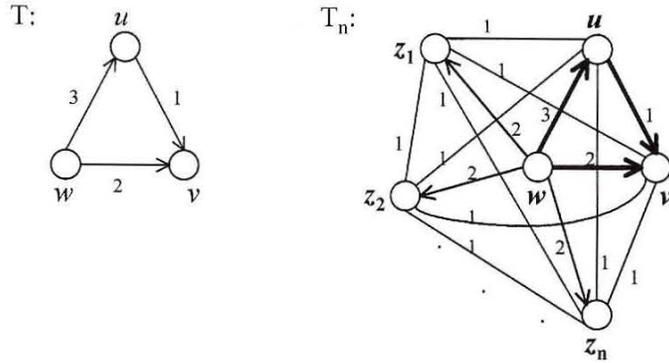


Figura 2.33:

Por construcción de T_n tenemos que $\zeta(u) = \{1, 3\}$, $\zeta(v) = \{1, 2\}$, $\zeta(w) = \{2, 3\}$ y $\zeta(z_j) = \{1, 2\}$ para $j \in \{1, \dots, n\}$. Como la única flecha de T_n que tiene color 3 es (w, u) , entonces si T_n tuviera C_3 , este C_3 debería de tener a la flecha (w, u) , pero a w no le entran flechas, por lo tanto T_n no tiene C_3 .

Por último, tenemos que T_n contiene a T el cual es T_3 , por lo que T_n satisface las hipótesis del Teorema 21, pero no las del Teorema 18.

Ahora veamos que el Teorema 18 es totalmente independiente del Teorema 21.

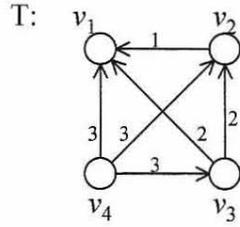


Figura 2.34:

Existen torneos 3-coloreados que satisfacen las hipótesis del Teorema 18 pero no las hipótesis del Teorema 21, por ejemplo, sea T un torneo transitivo de orden cuatro el cual está dado de la siguiente forma:

$$V(T) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

- Las flechas (v_2, v_1) de color 1, (v_3, v_1) de color 2, (v_3, v_2) de color 2, (v_4, v_1) de color 3, (v_4, v_2) de color 3 y (v_4, v_3) de color 3, como se muestra en la figura 2.34.

Podemos observar que las vecindades de v_1 y v_2 son tricolores, T no contiene ciclos dirigidos por lo que T no tiene C_3 , por otro lado, tenemos que todos los torneos transitivos de orden tres que contiene T son los mostrados en la figura 2.35. Claramente ninguno de esos torneos transitivos es T_3 .

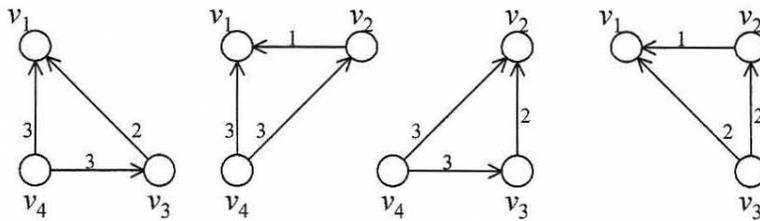


Figura 2.35:

Por lo tanto, T satisface las hipótesis del Teorema 18, pero no las del Teorema 21.

Capítulo 3

Casi-torneos m -coloreados

En el capítulo anterior vimos algunas condiciones que se le deben de pedir a los torneos m -coloreados para que tengan núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, podríamos hacernos las siguientes preguntas: Si a un torneo T m -coloreado le quitamos una flecha, ¿La nueva digráfica m -coloreada tendrá núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas bajo las condiciones vistas en el capítulo anterior?, ¿será cierta la pregunta hecha por Sands, Sauer y Woodrow aplicada a la nueva digráfica m -coloreada?, ¿todas las digráficas de este tipo tienen núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas?, entre otras más que se nos puedan ocurrir. Definamos a la nueva digráfica m -coloreada como *Casi – torneo m -coloreado*.

Como respuesta a las preguntas planteadas anteriormente, podemos decir que no todas tienen una respuesta afirmativa.

Hortensia Galena Sánchez y José de Jesús García-Ruvalcaba en [5] se dieron cuenta que si a un casi-torneo D m -coloreado se le pide la condición de que no contenga T_3 ni C_3 , entonces D tiene núcleo por t.d.m., el cual es el resultado equivalente al obtenido por Shen Minggang para torneos m -coloreados. Con respecto a la pregunta que si a un torneo T 3-coloreado se le pide que no tenga C_3 ,

¿T tiene núcleo por t.d.m.?, se puede afirmar que para casi-torneos 3-coloreados esto no es cierto y se ha encontrado un contraejemplo a esta pregunta; por otro lado, recordemos que en el capítulo anterior Hortensia Galeana y Rocío Rojas demostraron que si a un torneo T 3-coloreado se le pide que no tenga C_3 y cada vértice de T tiene vecindad a lo más bicolor, entonces $\mathcal{C}(T)$ es núcleo perfecta, también probaron que si T es un torneo m -coloreado con $m \geq 4$, tal que todo vértice de T tiene vecindad a lo más bicolor, entonces T tiene núcleo por t.d.m.. Hortensia Galeana y Rocío Rojas, al final de la tesis doctoral de esta última [6], se hacen la siguiente pregunta y la dejan abierta:

Pregunta. Sea D un casi-torneo m -coloreado, si D no tiene C_3 y todo vértice de D tiene vecindad a lo más bicolor, entonces ¿D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas?.

Hemos encontrado que para $m=3$ la respuesta a la pregunta anterior no necesariamente es cierta y para demostrarlo se da un casi-torneo 3-coloreado que cumple con las condiciones de la pregunta y no tiene núcleo por t.d.m., para $m \geq 4$ demostramos que la respuesta a la pregunta es afirmativa, y aún más, se prueba que $\mathcal{C}(D)$ es una digráfica núcleo perfecta.

Todos los resultados referentes a casi-torneos que han sido mencionados anteriormente, serán demostrados en este capítulo.

Ahora, podemos preguntarnos lo siguiente: si a un torneo T m -coloreado le quitamos una flecha, entonces ¿La nueva digráfica m -coloreada tiene núcleo por t.d.m. bajo las mismas condiciones vistas para torneos en el capítulo anterior?

Antes de poder contestarnos esta pregunta, primero consideremos la siguiente definición.

Definición 50 . Un *casi-torneo* m -coloreado es una digráfica que resulta de la supresión de una flecha (x,y) de algún torneo m -coloreado.

En el capítulo anterior vimos que Sands, Sauer y Woodrow propusieron el siguiente problema: Si T es un torneo 3-coloreado que no contiene C_3 , entonces ¿ T debe de tener núcleo por t.d.m.? Para casi-torneos podemos afirmar que esto no necesariamente es cierto.

Consideremos el casi-torneo 3-coloreado mostrado en la figura 3.1.

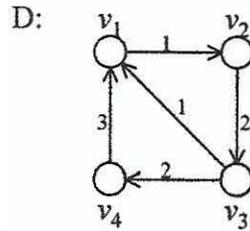


Figura 3.1:

Podemos observar que la digráfica D de la figura 3.1 cumple lo siguiente:

- D es una digráfica 3-coloreada.
- D no tiene C_3 .
- El único conjunto independiente que consta de más de un vértice es $\{v_4, v_2\}$, pero no es independiente por t.d.m. ya que (v_2, v_3, v_4) es una v_2v_4 -t.d.m.

de color 2.

- No existe una v_2v_1 -t.d.m., ya que a v_2 sólo le salen flechas de color 2 y a v_1 no le entran flechas de este color. Por lo tanto, v_1 no es un conjunto absorbente por t.d.m. en D .

- No existe una v_4v_2 -t.d.m., ya que a v_4 sólo le salen flechas de color 3 y a v_2 no le entran flechas de este color. Por lo tanto, v_2 no es un conjunto absorbente por t.d.m. en D .

- No existe una v_1v_3 -t.d.m., ya que a v_1 sólo le salen flechas de color 1 y a v_3 no le entran flechas de este color. Por lo tanto, v_3 no es un conjunto absorbente por t.d.m. en D .

- No existe una v_1v_4 -t.d.m., ya que a v_1 sólo le salen flechas de color 1 y a v_4 no le entran flechas de este color. Por lo tanto, v_4 no es un conjunto absorbente por t.d.m. en D .

Por lo anterior, tenemos que D no tiene núcleo por t.d.m.

Hortensia Galeana Sánchez y José de Jesús García-Ruvalcaba en [5] se dieron cuenta que si a un casi-torneo D m -coloreado se le pide la condición de que no contenga T_3 ni C_3 , entonces D tiene núcleo por t.d.m., y más aún, $\mathcal{C}(D)$ es una digráfica núcleo perfecta, el cual es un resultado análogo al obtenido por Shen Minggang para torneos m -coloreados. Para demostrar el resultado antes mencionado, es necesario dar algunos resultados previos.

Teorema 24 . Sea D un casi-torneo m -coloreado. Si para cada subdigráfica completa H de D se cumple que $\mathcal{C}(H)$ tiene núcleo, entonces se tiene por lo menos una de las dos siguientes afirmaciones:

1. $\mathcal{C}(D)$ tiene núcleo.

2. Existe un ciclo dirigido $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$ tal que $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$, donde x y y son los dos únicos vértices no adyacentes en D , y para cada par de vértices no consecutivos u y v de γ con $\{u, v\} \neq \{x, y\}$ tenemos que $\{(u, v), (v, u)\} \subseteq F(\mathcal{C}(D))$.

Demostración. Sea D un casi-torneo m -coloreado que cumple con las hipótesis del Teorema 24.

Sean x y y los únicos dos vértices no adyacentes de D .

Supongamos que $\mathcal{C}(D)$ no tiene núcleo, por lo que demostraremos (2).

Observación 1. Notemos que toda subdigráfica de D que no contenga al mismo tiempo a los vértices x y y , es una subdigráfica completa de D .

Ahora consideremos las siguientes afirmaciones:

- 1) Existe $w_0 \in V(D) \setminus \{x\}$ tal que $\{w_0\}$ es núcleo de $\mathcal{C}(D \setminus \{x\})$.

Por la observación 1 se tiene que $D \setminus \{x\}$ es una subdigráfica completa de D , la cual por hipótesis cumple que $\mathcal{C}(D \setminus \{x\})$ tiene un núcleo $\{w_0\}$, con $w_0 \in V(D) \setminus \{x\}$, como se muestra en la figura 3.2.

- 2) $(x, w_0) \notin F(\mathcal{C}(D))$.

Como $\{w_0\}$ es núcleo de $\mathcal{C}(D \setminus \{x\})$, entonces $\forall z \in V(\mathcal{C}(D \setminus \{x\})) \setminus \{w_0\}$ existe $(z, w_0) \in F(\mathcal{C}(D \setminus \{x\})) \subseteq F(\mathcal{C}(D))$ y si $(x, w_0) \in F(\mathcal{C}(D))$, entonces tendríamos que $\{w_0\}$ es núcleo de $\mathcal{C}(D)$, lo cual no puede suceder ya que estamos suponiendo que $\mathcal{C}(D)$ no tiene núcleo.

- 3) $\{x, w_0\}$ es un conjunto absorbente en $\mathcal{C}(D)$.

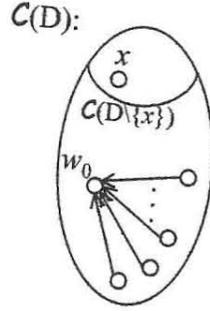


Figura 3.2:

Como $\{w_0\}$ es núcleo de $\mathcal{C}(D \setminus \{x\})$, entonces $\forall z \in V(\mathcal{C}(D \setminus \{x\})) \setminus \{w_0\}$ existe $(z, w_0) \in F(\mathcal{C}(D \setminus \{x\})) \subseteq F(\mathcal{C}(D))$. Por lo tanto, $\{x, w_0\}$ es un conjunto absorbente en $\mathcal{C}(D)$.

4) $\{x, w_0\}$ no es un conjunto independiente en $\mathcal{C}(D)$.

Por (3) y por la suposición de que $\mathcal{C}(D)$ no tiene núcleo llegamos a que $\{x, w_0\}$ no es un conjunto independiente en $\mathcal{C}(D)$.

5) $(w_0, x) \in F(\mathcal{C}(D))$.

Por (2) y (4) tenemos que $(w_0, x) \in F(\mathcal{C}(D))$.

6) Existe $w_1 \in V(D) \setminus \{x, w_0\}$ tal que $\{w_1\}$ es núcleo de $\mathcal{C}(D \setminus \{x, w_0\})$.

Por la observación 1 tenemos que $D \setminus \{x, w_0\}$ es una subdígrafa completa de D y por hipótesis $\mathcal{C}(D \setminus \{x, w_0\})$ tiene un núcleo $\{w_1\}$, como se muestra en la figura 3.3.

Notemos que podemos ordenar los vértices de $D \setminus \{x\}$ de la siguiente manera:

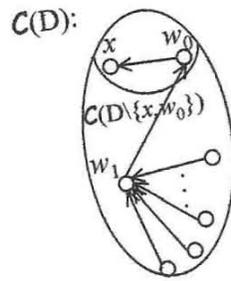


Figura 3.3:

$\{w_0\}$ es núcleo de $\mathcal{C}(D \setminus \{x\})$

$\{w_1\}$ es núcleo de $\mathcal{C}(D \setminus \{x, w_0\})$

$\{w_2\}$ es núcleo de $\mathcal{C}(D \setminus \{x, w_0, w_1\})$

.

.

.

$\{w_k\}$ es núcleo de $\mathcal{C}(D \setminus \{x, w_0, w_1, \dots, w_{k-1}\})$

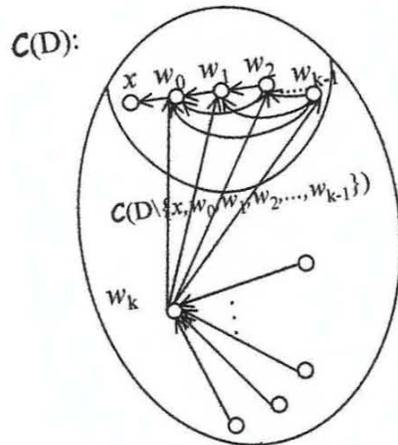


Figura 3.4:

Lo anterior es posible por la observación 1 y por la hipótesis de que toda subdigráfica completa de D cumple con que su cerradura tiene núcleo.

A este orden de los vértices de $D \setminus \{x\}$ le llamaremos el w -orden.

7) Si $s \leq t$, entonces $(w_t, w_s) \in F(\mathcal{C}(D))$.

Como $w_t \notin \{x, w_0, w_1, \dots, w_{s-1}\}$ y $\{w_s\}$ es núcleo de $\mathcal{C}(D \setminus \{x, w_0, w_1, \dots, w_{s-1}\})$, entonces $(w_t, w_s) \in F(\mathcal{C}(D \setminus \{x, w_0, w_1, \dots, w_{s-1}\})) \subseteq F(\mathcal{C}(D))$, ver figura 3.5.

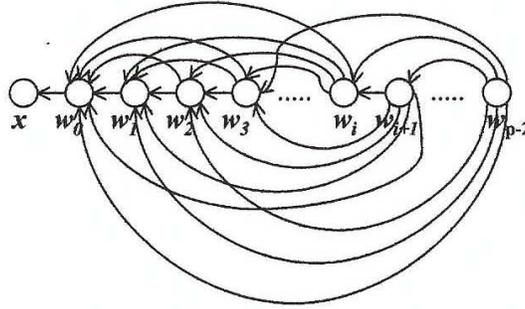


Figura 3.5:

8) $\{x\}$ no es un conjunto absorbente en $\mathcal{C}(D)$.

Como $\mathcal{C}(D)$ no tiene núcleo y $\{x\}$ es un conjunto independiente en $\mathcal{C}(D)$, entonces $\{x\}$ no puede ser un conjunto absorbente en $\mathcal{C}(D)$.

9) Existe $z \in V(D) \setminus \{x, w_0\}$ tal que $(z, x) \notin F(\mathcal{C}(D))$.

Por (8) $\{x\}$ no es un conjunto absorbente en $\mathcal{C}(D)$ y por (5) $(w_0, x) \in F(\mathcal{C}(D))$, por lo que existe $z \in V(D) \setminus \{x, w_0\}$ tal que $(z, x) \notin F(\mathcal{C}(D))$.

Sea $k = \min\{s/(w_s, x) \notin F(\mathcal{C}(D))\}$.

k existe por (9).

10) $\{x, w_k\}$ es un conjunto absorbente en $\mathcal{C}(D)$.

Por elección de k tenemos que $\forall 0 \leq i < k$ $(w_i, x) \in F(\mathcal{C}(D))$ y por (7) se tiene que $\forall j$ con $k \leq j$ $(w_j, w_k) \in F(\mathcal{C}(D))$.

Por lo tanto, $\{x, w_k\}$ es un conjunto absorbente en $\mathcal{C}(D)$.

11) $\{x, w_k\}$ no es un conjunto independiente en $\mathcal{C}(D)$.

Por (10) y como $\mathcal{C}(D)$ no tiene núcleo se concluye que $\{x, w_k\}$ no puede ser un conjunto independiente en $\mathcal{C}(D)$.

12) $(x, w_k) \in F(\mathcal{C}(D))$.

Por elección de k tenemos que $(w_k, x) \notin F(\mathcal{C}(D))$ y por (11) se concluye que $(x, w_k) \in F(\mathcal{C}(D))$, ver figura 3.6.

Sea $u_0 = w_k$, observemos que por elección de w_k y por (12) la flecha (x, u_0) está en $Asim(\mathcal{C}(D))$.

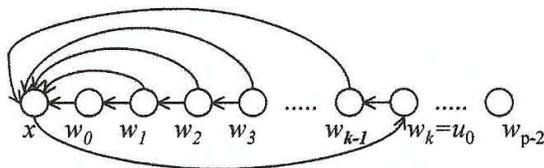


Figura 3.6:

13) $\{u_0\}$ no es un conjunto absorbente en $\mathcal{C}(D)$.

Puesto que $\{u_0\}$ es un conjunto independiente en $\mathcal{C}(D)$ y $\mathcal{C}(D)$ no tiene núcleo, entonces $\{u_0\}$ no puede ser un conjunto absorbente en $\mathcal{C}(D)$.

14) Existe $j \in \mathbb{N}$ con $0 \leq j \leq k$ tal que $(w_j, u_0) \notin F(\mathcal{C}(D))$.

Por (7) tenemos que $\forall i$ con $k \leq i$ $(w_i, w_k) \in F(\mathcal{C}(D))$ y por (12) tenemos que $(x, w_k) \in F(\mathcal{C}(D))$, por lo tanto se concluye por (13) que existe $j \in \mathbb{N}$ con $0 \leq j \leq k$ tal que $(w_j, u_0) \notin F(\mathcal{C}(D))$.

Sea $j = \min\{s / (w_s, u_0) \notin F(\mathcal{C}(D))\}$.

Hagamos $u_1 = w_j$ y notemos que la flecha (u_0, u_1) está en $Asim(\mathcal{C}(D))$.

15) Si $0 \leq i \leq j$, entonces $(w_i, u_0) \in F(\mathcal{C}(D))$.

Por elección de j tenemos que $\forall 0 \leq i \leq j$ $(w_i, u_0) \in F(\mathcal{C}(D))$, ver figura 3.7.

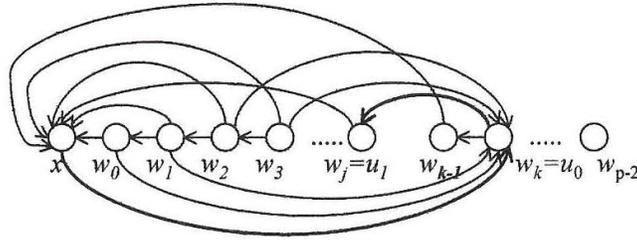


Figura 3.7:

Observemos lo siguiente:

- $\{u_1\}$ no es un conjunto absorbente ya que $\mathcal{C}(D)$ no tiene núcleo.
- Existe $i \in \mathbb{N}$ con $0 \leq i \leq j$ tal que $(w_i, u_1) \notin F(\mathcal{C}(D))$. Esto se demuestra de ma-

nera análoga a lo hecho en (14).

Sea $r = \min\{s / (w_s, u_1) \notin F(\mathcal{C}(D))\}$.

Hagamos $u_2 = w_r$ y notemos que la flecha (u_1, u_2) está en $Asim(\mathcal{C}(D))$.

Continuando de un modo similar podemos definir u_3, u_4, \dots , etcétera. Si $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_{m-1}$ han sido definidos y $(x, u_{m-1}) \in F(\mathcal{C}(D))$, definimos u_m como sigue:

Sean $i = \min\{s / (w_s, u_{m-1}) \notin F(\mathcal{C}(D))\}$ y $u_m = w_i$.

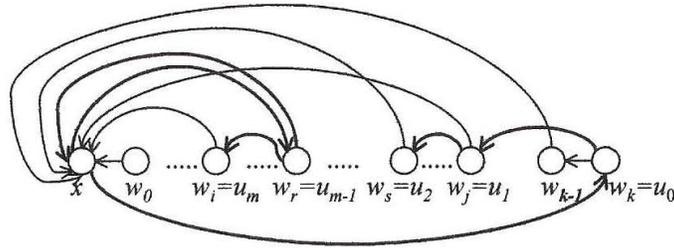


Figura 3.8:

Si $(x, u_m) \in F(\mathcal{C}(D))$, entonces continuando con el procedimiento definido obtenemos u_{m+1} .

Paramos en el primer vértice u_n tal que $(x, u_n) \notin F(\mathcal{C}(D))$, esto es posible porque $(x, w_0) \notin F(\mathcal{C}(D))$.

Observación 2. u_r está antes que u_{r-1} en el w -orden para toda $r \in \{1, 2, \dots, m\}$, por que por (7) tenemos que si $u_{r-1} = w_l$, entonces $\forall s$ con $l \leq s$ $(w_s, w_l) \in F(\mathcal{C}(D))$.

Por la observación 2 también tenemos que para todo $1 \leq i \leq j \leq n$ u_j está antes

que u_i en el w -orden.

Sea $\gamma=(x,u_0,u_1,\dots,u_n,x)$.

16) γ es un ciclo dirigido asimétrico contenido en $\mathcal{C}(D)$.

A) (x,u_0) es una flecha asimétrica en $\mathcal{C}(D)$.

Por (9) y (12) tenemos que (x,u_0) es una flecha asimétrica en $\mathcal{C}(D)$.

B) (u_{i-1},u_i) es una flecha asimétrica de γ en $\mathcal{C}(D)$ para toda $i\in\{1,2,3,\dots,n\}$.

Por la observación 2 tenemos que u_i está antes que u_{i-1} en el w -orden para cada $1\leq i\leq n$, entonces $(u_{i-1},u_i)\in F(\mathcal{C}(D))$ y por elección de u_i esta flecha es asimétrica.

C) (u_n,x) es una flecha asimétrica en $\mathcal{C}(D)$.

(u_n,x) es una flecha asimétrica de $\mathcal{C}(D)$ por la elección de u_n .

Por lo tanto γ es un ciclo dirigido asimétrico de $\mathcal{C}(D)$.

17) Entre cualquier par de vértices no consecutivos de γ existen flechas simétricas en $\mathcal{C}(D)$.

Veamos que (x,u_i) es una flecha simétrica en $\mathcal{C}(D) \forall 0\leq i\leq n-1$.

Como los vértices u_1, u_2, \dots, u_n están antes que u_0 en el w -orden, entonces estos son absorbidos por $\{x\}$ en $\mathcal{C}(D)$, es decir, $(u_i,x)\in F(\mathcal{C}(D)) \forall i\in\{1,2,\dots,n\}$ y además como u_n es el primer vértice tal que $(x,u_n)\notin F(\mathcal{C}(D))$, entonces (x,u_i) pertenece a las flechas de $\mathcal{C}(D) \forall 0\leq i\leq n-1$, ver figura 3.9.

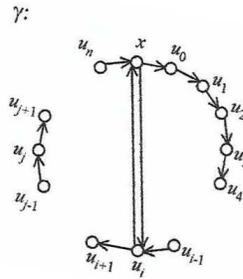


Figura 3.9:

Por lo tanto (x, u_i) es una flecha simétrica en $\mathcal{C}(D) \forall 0 \leq i \leq n-1$.

Ahora veamos que (u_j, u_i) es una flecha simétrica en $\mathcal{C}(D)$.

Sean u_i y u_j dos vértices no consecutivos de γ , supongamos que $i \not\leq j$.

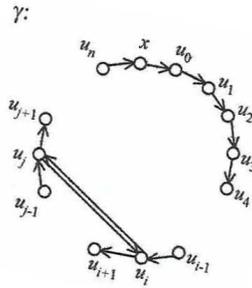


Figura 3.10:

Como u_j está antes que u_i en el w -orden, entonces $(u_i, u_j) \in F(\mathcal{C}(D))$; luego u_i y u_j no son consecutivos por lo que $i+1 \not\leq j$, por lo tanto tenemos que u_j está antes que u_{i+1} en el w -orden y por la elección de u_{i+1} concluimos que $(u_j, u_i) \in F(\mathcal{C}(D))$, ver figura 3.10.

Por lo tanto, (u_j, u_i) es una flecha simétrica en $\mathcal{C}(D)$.

18) $y \in V(\gamma)$.

Supongamos que $y \notin V(\gamma)$.

Por la observación 1 tenemos que $D[V(\gamma)]$ es una subdigráfica completa de D y por hipótesis $\mathcal{C}(D[V(\gamma)])$ tiene núcleo.

Sea $z \in V(\gamma)$ tal que $\{z\}$ es núcleo de $\mathcal{C}(D[V(\gamma)])$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $z=x$.

Por el Teorema 16 tenemos que $\{x\}$ es núcleo por t.d.m. de $D[V(\gamma)]$.

Como cualquier trayectoria dirigida monocromática de $D[V(\gamma)]$ es también una t.d.m. en D , entonces $\forall v \in V(\gamma) \setminus \{x\}$ tenemos que $(v, x) \in F(\mathcal{C}(D))$ y en particular tenemos que $(u_0, x) \in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual no puede suceder ya que γ es un ciclo dirigido asimétrico en $\mathcal{C}(D)$.

Por lo tanto $y \in V(\gamma)$.

Con todo lo anterior hemos demostrado que existe un ciclo dirigido asimétrico γ en $\mathcal{C}(D)$ tal que $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$ y entre cualquier par de vértices no consecutivos de γ existen flechas simétricas. ■

Teorema 25 . Sea D un casi-torneo m -coloreado.

Si D no contiene T_3 ni C_3 , entonces $\mathcal{C}(D)$ no contiene ningún ciclo dirigido asimétrico γ tal que:

1. $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$, con x y y los únicos vértices no adyacentes de D , y
2. Entre cualquier par de vértices no consecutivos de γ existen flechas simétricas

Demostración. Sea D un casi-torneo m -coloreado sin T_3 ni C_3 .

Sean x y y los únicos vértices no adyacentes de D .

Supongamos que existe un ciclo dirigido asimétrico γ en $\mathcal{C}(D)$ tal que $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$ y entre cualquier par de vértices no consecutivos de γ existen flechas simétricas.

Para $z \in V(\gamma)$ denotemos por z_- y z_+ a su predecesor y sucesor en γ respectivamente.

Observación a. z_- es el único vértice de γ tal que $(z, z_-) \notin F(\mathcal{C}(D))$ y z_+ es el único vértice de γ tal que $(z_+, z) \notin F(\mathcal{C}(D))$, esto se debe a que γ es un ciclo dirigido asimétrico y entre cualquier par de vértices no consecutivos de γ existen flechas simétricas.

Ahora consideremos las siguientes afirmaciones.

1) $(z_+, z_-) \in F(\mathcal{C}(D))$.

Como z_+ y z_- son vértices no consecutivos de γ , entonces (z_+, z_-) es una flecha simétrica de γ en $\mathcal{C}(D)$, por lo que en particular $(z_+, z_-) \in F(\mathcal{C}(D))$.

Para $z \in V(\gamma)$ denotemos por $P(z)$ a la trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima de z_+ a z_- en D .

$P(z)$ existe por (1).

2) Si $z \in V(\gamma)$ es adyacente en D a cada vértice de $P(z)$, entonces $(z_-, z) \in F(D)$ y $(z, z_+) \in F(D)$ son del mismo color.

Como z es adyacente en D a cada vértice de $P(z)$, entonces en particular tenemos que hay una flecha entre z, z_- y z, z_+ en D . Por otro lado, $F(D) \subseteq F(\mathcal{C}(D))$ y por la observación a concluimos que $(z_-, z) \in F(D)$ y $(z, z_+) \in F(D)$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $(z, z_+) \in F(D)$ es azul.

Ahora, consideremos la siguiente notación, mostrada en la figura 3.11.

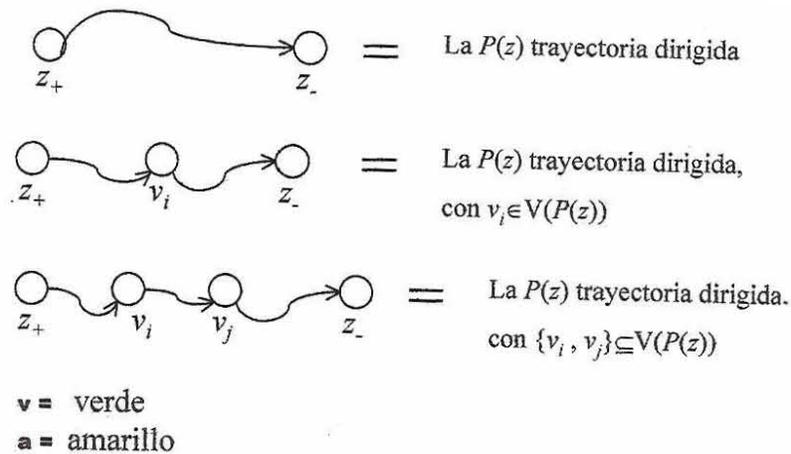


Figura 3.11:

2.a. $P(z)$ no es azul.

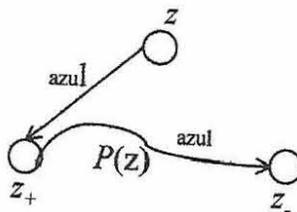


Figura 3.12:

Si $P(z)$ es azul, entonces $(z, z_+) \cup (z_+, P(z), z_-)$ es una t.d.m. de color azul en D , como se muestra en la figura 3.12, por lo que $(z, z_-) \in F(\mathcal{C}(D))$ lo cual no puede suceder por la observación a .

Supongamos sin pérdida de generalidad que $P(z)$ es verde con $P(z) = (z_+ = v_0, v_1, v_2, \dots, v_t = z_-)$, como se muestra en la figura 3.13.

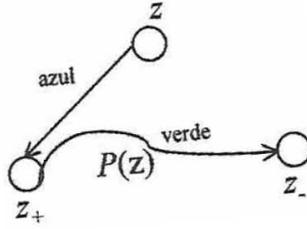


Figura 3.13:

2.b. Para $1 \leq i \leq t$ $(z_+, v_i) \in F(\mathcal{C}(D))$ y $(v_i, z_-) \in F(\mathcal{C}(D))$ son de color verde.

Como $P(z)$ es una t.d.m. de color verde en D , entonces $P_1 = (z_+ = v_0, v_1, v_2, \dots, v_i)$ y $P_2 = (v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_t = z_-)$ son trayectorias dirigidas monocromáticas de color verde en $D \forall 1 \leq i \leq t$, por lo que $(z_+, v_i) \in F(\mathcal{C}(D))$ y $(v_i, z_-) \in F(\mathcal{C}(D))$ son de color verde.

2.c. Para $1 \leq i \leq t$ la flecha entre z y v_i en D no es verde.

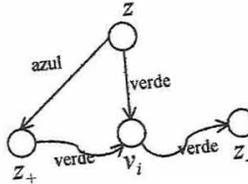


Figura 3.14:

Si $(z, v_i) \in F(D)$ y es de color verde, entonces $(z, v_i) \cup (v_i, P(z), z_-)$ es una t.d.m. de color verde en D , como se muestra en la figura 3.14, por lo que $(z, z_-) \in F(\mathcal{C}(D))$ lo cual no puede suceder por que γ es asimétrico.

Si $(v_i, z) \in F(D)$ y es de color verde, entonces $(z_+, P(z), v_i) \cup (v_i, z)$ es una t.d.m. de color verde en D , como se muestra en la figura 3.15, y por lo tanto $(z_+, z) \in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual es imposible por la observación *a*.

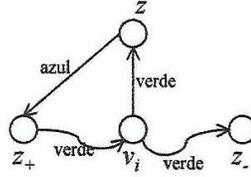


Figura 3.15:

2.d. Para $1 \leq i \leq t$ si suponemos que la flecha entre z y v_{i-1} en D es azul, entonces la flecha entre z y v_i en D también es azul.

Como $(v_{i-1}, v_i) \in F(D)$ es verde y la flecha entre z y v_{i-1} en D es azul, entonces la flecha entre z y v_i en D debe de ser azul o verde, por que por hipótesis D no contiene T_3 ni C_3 , pero por (2.c) no es verde y por lo tanto es azul.

2.e. $(z_-, z) \in F(D)$ es azul.

Como $(z, z_+ = v_o) \in F(D)$ es azul, entonces por (2.d) tenemos que $(z_-, z) \in F(D)$ es azul.

Con lo anterior se concluye la prueba de (2).

3) Si $s \in V(\gamma) \setminus \{x, y\}$, entonces $(s_-, s) \in F(D)$ y $(s, s_+) \in F(D)$ son del mismo color.

Como $s \notin \{x, y\}$, entonces tenemos que s es adyacente en D a cada vértice de $P(s)$ y la conclusión se deduce de (2).

4) Las trayectorias dirigidas (x, γ, y) y (y, γ, x) son monocromáticas en D .

Se deduce de (3).

5) x y y no son consecutivos en γ .

Supongamos que x y y son consecutivos en γ .

Como las trayectorias dirigidas (x, γ, y) y (y, γ, x) son monocromáticas en D , entonces (x, y) es una flecha simétrica de γ en $\mathcal{C}(D)$, lo cual no puede suceder porque γ es asimétrico.

6) Las trayectorias dirigidas monocromáticas (x, γ, y) y (y, γ, x) no son del mismo color.

Si las trayectorias dirigidas monocromáticas (x, γ, y) y (y, γ, x) fueran del mismo color, entonces γ sería monocromático en D y por consiguiente γ sería simétrico en $\mathcal{C}(D)$, lo cual no puede suceder.

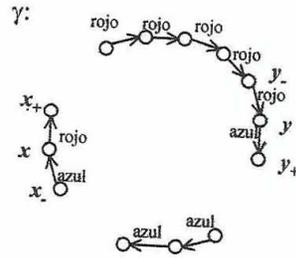


Figura 3.16:

Sin pérdida de generalidad supongamos que (x, γ, y) es rojo en D y (y, γ, x) es azul en D , como se muestra en la figura 3.16.

7) $P(x)$ no es roja y no es azul.

Como $(x, x_+) \in F(x, \gamma, y)$ que es roja, se tiene que $(x, x_+) \in F(D)$ es roja, entonces si $P(x)$ fuera roja tendríamos que $(x, x_+) \cup P(x)$ es una t.d.m. de color rojo, como se muestra en la figura 3.17, y por lo tanto $(x, x_-) \in F(C(D))$ lo cual no puede suceder.

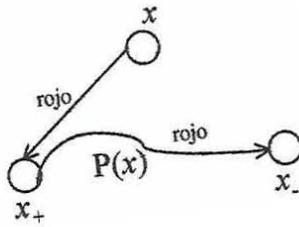


Figura 3.17:

Como $(x_-, x) \in F(y, \gamma, x)$ que es azul, se tiene que $(x_-, x) \in F(D)$ es azul, entonces si $P(x)$ fuera azul tendríamos que $P(x) \cup (x_-, x)$ es una t.d.m. de color azul en D , como se muestra en la figura 3.18 y por lo tanto $(x_+, x) \in F(C(D))$ lo cual es imposible.

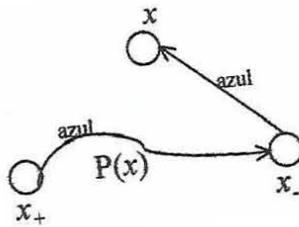


Figura 3.18:

8) $y \in V(P(x))$.

De lo contrario x sería adyacente a todos los vértices de $P(x)$ y por (2) tendríamos que $(x_-, x) \in F(D)$ y $(x, x_+) \in F(D)$ son del mismo color, contradiciendo que $(x_-, x) \in F(y, \gamma, x)$ es azul y $(x, x_+) \in F(x, \gamma, y)$ es roja.

Denotemos $P(x) = (x_+ = a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1} = y, \dots, x_-)$.

9) $P(y)$ no es roja y no es azul.

Si $P(y)$ fuera azul, entonces $(y, y_+) \cup P(y)$ es una t.d.m. de color azul en D , como se muestra en la figura 3.19, y por lo tanto $(y, y_-) \in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual no puede suceder por la observación a .

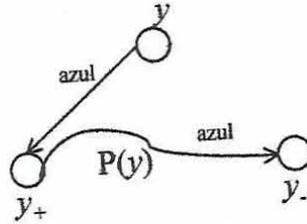


Figura 3.19:

Si $P(y)$ fuera roja, entonces tendríamos que $P(y) \cup (y_-, y)$ es una t.d.m. de color rojo en D , como se muestra en la figura 3.20, por lo que $(y_+, y) \in F(\mathcal{C}(D))$ lo cual es imposible por que γ es asimétrico.

10) $x \in V(P(y))$.

De lo contrario y sería adyacente a todos los vértices de $P(y)$ y por (2) tendríamos que $(y_-, y) \in F(D)$ y $(y, y_+) \in F(D)$ son del mismo color, contradiciendo que $(y_-, y) \in F(x, \gamma, y)$ es roja y $(y, y_+) \in F(y, \gamma, x)$ es azul.

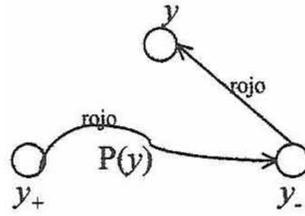


Figura 3.20:

Denotemos $P(y) = (y_+ = b_0, b_1, b_2, \dots, b_s, b_{s+1} = x, \dots, y_-)$.

Consideremos los siguientes dos casos.

Caso A. $P(x)$ y $P(y)$ son del mismo color.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $P(x)$ y $P(y)$ son de color verde.

A.1. La flecha entre y_+ y x_+ en D es azul.

Notemos que para $0 \leq i \leq r$ la flecha entre y_+ y a_i en D no es verde, ya que de lo contrario:

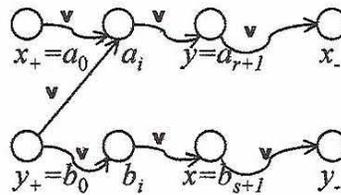


Figura 3.21:

Si $(y_+, a_i) \in F(D)$ es verde, entonces $(y_+, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_r, a_{r+1} = y)$ es una t.d.m. de color verde en D , como se muestra en la figura 3.21, por lo que $(y_+, y) \in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual no puede ocurrir por la observación a .

Si $(a_i, y_+) \in F(D)$ es verde, entonces $(x_+ = a_0, a_1, a_2, \dots, a_i, y_+ = b_0, b_1, b_2, \dots, b_s, b_{s+1} = x)$ es una t.d.m. de color verde en D , como se muestra en la figura 3.22, y por consiguiente $(x_+, x) \in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual no puede suceder por que γ es asimétrico.

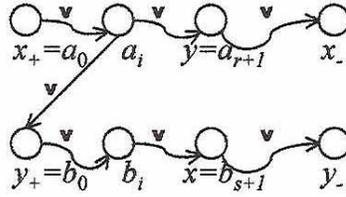


Figura 3.22:

También se afirma que para $0 \leq i \leq r$ si la flecha entre y_+ y a_{i+1} en D es azul, entonces la flecha entre y_+ y a_i también es azul, esto se debe a que $(a_i, a_{i+1}) \in F(D)$ es verde, la flecha entre y_+ y a_i no es verde y D no contiene T_3 ni C_3 .

Como la flecha entre y_+ y $a_{r+1} = y$ en D es azul, entonces por lo anterior llegamos a que la flecha entre y_+ y $a_0 = x_+$ es azul.

A.2. La flecha entre x_+ y y_+ en D es roja.

Notemos que para $0 \leq i \leq s$ la flecha entre x_+ y b_i en D no es verde, ya que de lo contrario:

Si $(x_+, b_i) \in F(D)$ es verde, entonces $(x_+, b_i, b_{i+1}, b_{i+2}, \dots, b_s, b_{s+1} = x)$ es una

t.d.m. de color verde en D , como se muestra en la figura 3.23, por lo que $(x_+, x) \in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual no puede ocurrir por la observación a .

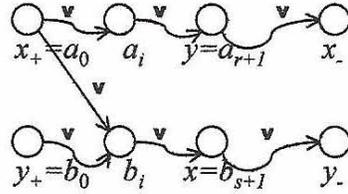


Figura 3.23:

Si $(b_i, x_+) \in F(D)$ es verde, entonces $(y_+ = b_0, b_1, b_2, \dots, b_i, x_+ = a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1} = y)$ es una t.d.m. de color verde en D , como se muestra en la figura 3.24, y por consiguiente $(y_+, y) \in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual no puede suceder por que γ es asimétrico.

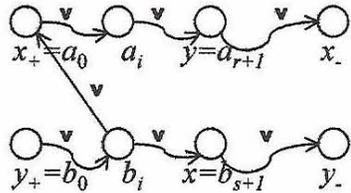


Figura 3.24:

Para $0 \leq i \leq s$ si la flecha entre x_+ y b_{i+1} en D es roja, entonces la flecha entre x_+ y b_i también es roja, esto es por que como $(b_i, b_{i+1}) \in F(D)$ es verde, la flecha entre x_+ y b_i no es verde y D no contiene T_3 ni C_3 .

Como la flecha entre x_+ y $b_{s+1} = x$ en D es roja, entonces por lo anterior llegamos a que la flecha entre x_+ y $b_0 = y_+$ es roja.

Por lo tanto, de (A.1) y (A.2) obtenemos una contradicción.

Caso B. $P(x)$ y $P(y)$ son de distinto color.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $P(x)$ es verde y $P(y)$ es amarillo.

B.1. La flecha entre x y a_r en D es roja.

Notemos que para $1 \leq i \leq r$ la flecha entre x y a_i en D no es verde, ya que de lo contrario:

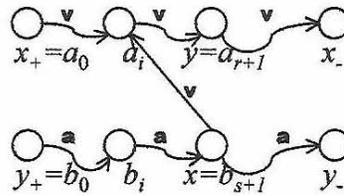


Figura 3.25:

Si $(x, a_i) \in F(D)$ es verde, entonces $(x, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, x_-)$ es una t.d.m. de color verde en D , como se muestra en la figura 3.25, por lo que $(x, x_-) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder por la observación a .

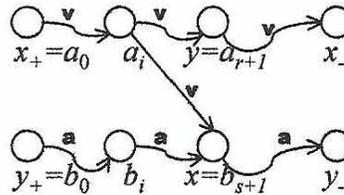


Figura 3.26:

Si $(a_i, x) \in F(D)$ es verde, entonces $(x_+ = a_0, a_1, a_2, \dots, a_i, x)$ es una t.d.m. de

color verde en D , como se muestra en la figura 3.26, y por consiguiente $(x_+, x) \in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual no es posible por que γ es asimétrico.

También observemos que para $1 \leq i \leq r$ si la flecha entre x y a_{i-1} en D es roja, entonces la flecha entre x y a_i también es roja en D , esto es porque $(a_{i-1}, a_i) \in F(D)$ es verde, la flecha entre x y a_i no es verde y D no tiene T_3 ni C_3 .

Como la flecha entre x y $x_+ = a_0$ en D es roja, entonces por lo anterior llegamos a que la flecha entre x y a_r en D es roja.

B.2. La flecha entre a_r y b_s en D es roja ó amarilla.

Tenemos que $(b_s, x) \in F(P(y))$ es amarilla, por (B.1) la flecha entre x y a_r en D es roja y como D no contine T_3 ni C_3 , entonces se concluye que la flecha entre a_r y b_s en D es roja ó amarilla.

B.3. La flecha entre y y b_s en D es azul.

Observemos que para $1 \leq i \leq s$ la flecha entre y y b_i en D no es amarilla, ya que de lo contrario:

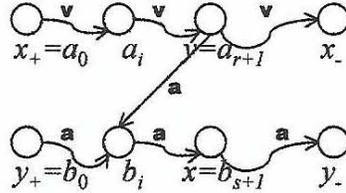


Figura 3.27:

Si $(y, b_i) \in F(D)$ es amarillo, entonces $(y, b_i, b_{i+1}, b_{i+2}, \dots, y_-)$ es una t.d.m. de color amarillo en D , como se muestra en la figura 3.27, por lo que $(y, y_-) \in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual no es posible por la observación a .

Si $(b_i, y) \in F(D)$ es amarillo, entonces $(y_+ = b_0, b_1, b_2, \dots, b_i, y)$ es una t.d.m. de color amarillo en D , como se muestra en la figura 3.28, y por lo tanto $(y_+, y) \in F(\mathcal{C}(D))$, lo cual no puede suceder por que γ es asimétrico.

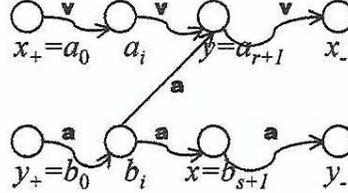


Figura 3.28:

Por otro lado, para $1 \leq i \leq s$ si la flecha entre y y b_{i-1} en D es azul, entonces la flecha entre y y b_i también es azul en D , esto es por que como $(b_{i-1}, b_i) \in F(D)$ es amarilla, la flecha entre y y b_i no es amarilla en D y D no contiene T_3 ni C_3 .

Como la flecha entre y y $b_0 = y_+$ en D es azul, entonces por lo anterior llegamos a que la flecha entre y y b_s en D es azul.

B.4. La flecha entre a_r y b_s en D es verde ó azul.

Como $(a_r, a_{r+1} = y) \in F(P(x))$ es verde, la flecha entre y y b_s en D es azul y D no tiene T_3 ni C_3 , entonces se concluye que la flecha entre a_r y b_s en D es verde ó azul.

Observemos que de (B.2) y (B.4) obtenemos una contradicción.

Por lo tanto, no existe un ciclo dirigido asimétrico γ en $\mathcal{C}(D)$ tal que $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$ y entre cualquier par de vértices no consecutivos de γ existen flechas

simétricas. ■

Teorema 26 . Sea D un casi-torneo m -coloreado.

Si D no contiene C_3 ni T_3 , entonces $\mathcal{C}(D)$ tiene núcleo.

Demostración. Sea D un casi-torneo m -coloreado sin C_3 ni T_3 .

Como D no contiene C_3 ni T_3 , entonces en particular toda subdigráfica completa H de D no tiene C_3 ni T_3 , por lo que por el Teorema 18, H tiene núcleo por t.d.m. y por consiguiente $\mathcal{C}(H)$ tiene núcleo.

Por lo tanto, para toda subdigráfica completa H de D , $\mathcal{C}(H)$ tiene núcleo y así por el Teorema 24 se cumple (1) o (2), pero por el Teorema 25 se concluye que $\mathcal{C}(D)$ tiene núcleo. ■

Observemos que si en el Teorema 26 sólo requerimos que D no contenga C_3 y si T_3 , entonces el resultado no necesariamente se cumple.

Podemos observar que en el casi-torneo 5-coloreado de la figura 3.29 dado en [5], los únicos ciclos dirigidos de longitud tres que contiene la digráfica son los siguientes: $\{v_6, v_1, v_4, v_6\}$, $\{v_5, v_1, v_4, v_5\}$, $\{v_5, v_1, v_3, v_5\}$, $\{v_6, v_2, v_4, v_6\}$, $\{v_5, v_2, v_4, v_5\}$, $\{v_2, v_3, v_5, v_2\}$, $\{v_6, v_3, v_5, v_6\}$, $\{v_6, v_3, v_4, v_6\}$, pero ninguno de ellos es C_3 . Además, el único conjunto independiente por t.d.m. que consta de más de un vértice en la digráfica es $\{v_1, v_2\}$ y la razón es la siguiente:

Notemos que para los vértices v_2 y v_1 el único color que tienen en común para las flechas que inciden en ellos es r y w , pero a v_1 sólo le entran flechas de color w , a v_2 le sale una flecha de color r y a v_2 le entran flechas de color w y r , a v_1 le sale una flecha de color r pero al vértice v_3 no le salen flechas de color r .

Ahora veamos que D no tiene núcleo por t.d.m.

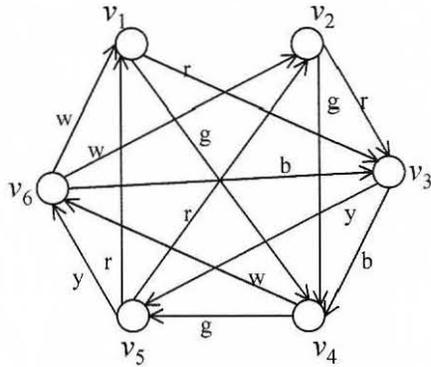


Figura 3.29:

-No existe una $v_3\{v_1,v_2\}$ -t.d.m. ya que a v_3 le salen flechas de color y y b y a los vértices v_1, v_2 no le entran flechas de estos colores. Por lo tanto, $\{v_1,v_2\}$ no es núcleo por t.d.m. de D .

-No existe una v_3v_1 -t.d.m. ya que a v_3 le salen flechas de color y y b y a v_1 no le entran flechas de estos colores. Por lo tanto, v_1 no es núcleo por t.d.m. de D .

-No existe una v_1v_2 -t.d.m. lo cual ya se vio anteriormente. Por lo tanto, v_2 no es núcleo por t.d.m. de D .

-No existe una v_4v_3 -t.d.m. ya que a v_4 le salen flechas de color g y w y a v_3 no le entran flechas de estos colores. Por lo tanto, v_3 no es núcleo por t.d.m. de D .

-No existe una v_5v_4 -t.d.m. ya que a v_5 le salen flechas de color y y r y a v_4 no le entran flechas de estos colores. Por lo tanto, v_4 no es núcleo por t.d.m. de D .

-No existe una v_6v_5 -t.d.m. ya que a v_6 le salen flechas de color w y b y a v_5 no le entran flechas de estos colores. Por lo tanto, v_5 no es núcleo por t.d.m. de D .

-No existe una v_1v_6 -t.d.m. ya que a v_1 le salen flechas de color g y r y a v_6 no le entran flechas de estos colores. Por lo tanto, v_6 no es núcleo por t.d.m. de D .

Por lo tanto D no tiene núcleo por t.d.m., por lo que $\mathcal{C}(D)$ no tiene núcleo.

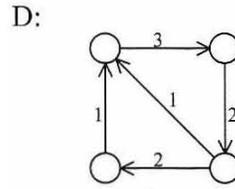


Figura 3.30:

Ahora, si en el Teorema 26 sólo requerimos que D no contenga T_3 y si C_3 , entonces el resultado no necesariamente se cumple.

El casi-torneo 3-coloreado de la figura 3.30 cumple con no tener T_3 y si C_3 y se puede verificar fácilmente que esta digráfica no tiene núcleo por t.d.m. y por consiguiente $\mathcal{C}(D)$ no tiene núcleo.

Teorema 27 . Sea D un casi-torneo m -coloreado.

Si D no contiene T_3 ni C_3 , entonces $\mathcal{C}(D)$ es núcleo perfecta.

Demostración. Sea D un casi-torneo m -coloreado sin T_3 ni C_3 .

Sean x y y los únicos vértices no adyacentes de D .

Consideremos los siguientes dos casos.

Caso A. $\{x,y\}$ es un conjunto independiente en $\mathcal{C}(D)$.

Sea $S \subseteq V(D) = V(\mathcal{C}(D))$ un subconjunto no vacío de vértices.

Por demostrar que $\mathcal{C}(D)[S]$ tiene núcleo.

Como $D[S]$ es completa ó le falta la flecha (x,y) , entonces por los Teoremas 18 (visto en el capítulo 2) y 26 tenemos que $\mathcal{C}(D[S])$ tiene núcleo.

Sea B un núcleo de $\mathcal{C}(D[S])$.

Demostraremos que B es un núcleo de $\mathcal{C}(D)[S]$.

Veamos que B es un conjunto absorbente en $\mathcal{C}(D)[S]$.

Recordemos que como B es núcleo de $\mathcal{C}(D[S])$, entonces B es núcleo por t.d.m. de $D[S]$.

Sea $v \in V(\mathcal{C}(D)[S]) \setminus B$.

Por demostrar que existe la vB -flecha en $\mathcal{C}(D)[S]$.

Como $V(\mathcal{C}(D)[S]) = V(D[S]) = V(\mathcal{C}(D[S]))$ y B es núcleo por t.d.m. de $D[S]$, entonces existe una vB -t.d.m. en $D[S]$, y por definición de $D[S]$ tenemos que esta trayectoria dirigida monocromática también esta en D , por lo que en $\mathcal{C}(D)$ existe la vB -flecha.

Por lo tanto, existe la vB -flecha en $\mathcal{C}(D)[S]$.

Ahora ha quedado demostrado que B es un conjunto absorbente en $\mathcal{C}(D)[S]$.

Afirmamos que B tiene exactamente uno ó dos vértices, ya que no hay conjuntos independientes en $\mathcal{C}(D[S])$ con más de tres vértices.

Consideremos los siguientes dos subcasos:

Subcaso A.A. B tiene un vértice.

Como B consta de un solo vértice, entonces B es un conjunto independiente y puesto que es un conjunto absorbente en $\mathcal{C}(D)[S]$, se concluye que B es un núcleo de $\mathcal{C}(D)[S]$.

Subcaso A.B. B tiene dos vértices.

Observemos que como x y y son los únicos vértices no adyacentes en D, entonces para todo $\{u,v\} \subseteq V(D)$ con $\{u,v\} \neq \{x,y\}$ se tiene que u es adyacente a v en D.

Dado que B es núcleo por t.d.m. de $D[S]$ y $\{x,y\}$ es un conjunto independiente en $\mathcal{C}(D)$, entonces por la observación anterior se concluye que $B = \{x,y\}$.

Finalmente tenemos que B es un conjunto independiente en $\mathcal{C}(D)[S]$, ya que por el lemma 14 (visto en el capítulo 1) tenemos que $\mathcal{C}(D)[S][B] = \mathcal{C}(D)[B]$ y B es un conjunto independiente en $\mathcal{C}(D)$.

Por lo tanto, B es núcleo de $\mathcal{C}(D)[S]$.

Caso B. $\{x,y\}$ no es un conjunto independiente en $\mathcal{C}(D)$.

En este caso supongamos que $\mathcal{C}(D)$ no es núcleo perfecta.

Si utilizamos la contrapositiva de lo expuesto en la Nota 1 (vista en el capítulo 1), entonces tenemos que como $\mathcal{C}(D)$ no es núcleo perfecta, $\mathcal{C}(D)$ contiene un ciclo dirigido asimétrico.

Como x y y son los únicos vértices no adyacentes en D , entonces $\mathcal{C}(D)$ es una digráfica completa.

Sea γ un ciclo dirigido asimétrico de longitud mínima contenido en $\mathcal{C}(D)$, con $\gamma=(v_0,v_1,v_2,\dots,v_{n-1},v_n=v_0)$.

Afirmamos que para todo par de vértices no consecutivos de γ existen flechas simétricas entre ellos en $\mathcal{C}(D)$, ya que de lo contrario si existieran v_i y v_j en γ dos vértices no consecutivos tal que no existen flechas simétricas entre ellos, entonces tendríamos lo siguiente:

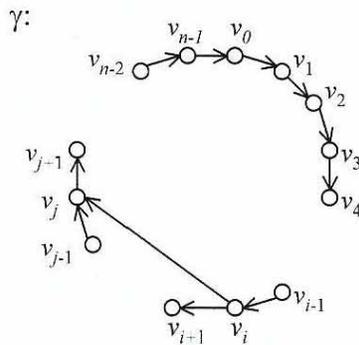


Figura 3.31:

Supongamos sin pérdida de generalidad que $i \leq j$.

Como $\mathcal{C}(D)$ es completa, entonces $(v_i, v_j) \in F(\mathcal{C}(D))$ ó $(v_j, v_i) \in F(\mathcal{C}(D))$.

Si $(v_i, v_j) \in F(\mathcal{C}(D))$, entonces $\gamma_1=(v_0,v_1,v_2,\dots,v_i,v_j,v_{j+1},v_{j+2},\dots,v_n=v_0)$ es un ciclo dirigido asimétrico en $\mathcal{C}(D)$ de longitud menor que la de γ , como se muestra en la figura 3.31, lo cual no puede suceder por la elección de γ .

Si $(v_j, v_i) \in F(\mathcal{C}(D))$, entonces $\gamma_2 = (v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_i)$ es un ciclo dirigido asimétrico en $\mathcal{C}(D)$ de longitud menor que la de γ , como se muestra en la figura 3.32, lo cual no puede suceder por la elección de γ .

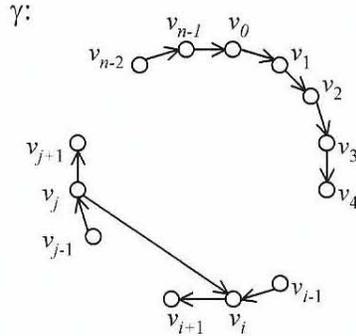


Figura 3.32:

Por lo tanto $(v_j, v_i) \in F(\mathcal{C}(D))$ es una flecha simétrica.

También afirmamos que $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$, ya que de lo contrario tendríamos que $D[V(\gamma)]$ en D es una digráfica completa sin C_3 ni T_3 y por el Teorema 18 (visto en el capítulo 2) $D[V(\gamma)]$ tiene núcleo por t.d.m. y por consiguiente $\mathcal{C}(D[V(\gamma)])$ tiene núcleo, y como se vio en el caso A tenemos que este núcleo también lo es de $\mathcal{C}(D)[V(\gamma)]$, por lo que γ tendría una flecha simétrica lo cual es imposible.

Por lo tanto, se ha demostrado que $\mathcal{C}(D)$ contiene un ciclo dirigido asimétrico γ tal que entre cualquier par de vértices no consecutivos del ciclo existen flechas simétricas y $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$, lo cual contradice al Teorema 25.

Por lo tanto, D es núcleo perfecta. ■

Recordemos que en el capítulo anterior, Hortensia Galeana y Rocío Rojas, demostraron que si a un torneo T 3-coloreado que no contiene C_3 se le pide que

todo vértice tenga vecindad a lo más bicolor, entonces T tiene núcleo por t.d.m. y también probaron que todo torneo T m -coloreado, con $m \geq 4$, que cumple con que todos sus vértices tienen vecindad a lo más bicolor, tiene núcleo por t.d.m.. En base a lo que demostraron para torneos m -coloreados, ellas se hicieron la siguiente pregunta: *Si D es un casi-torneo m -coloreado sin C_3 donde todo vértice tiene vecindad a lo más bicolor, entonces ¿ D tiene núcleo por t.d.m.?*

Podemos decir que la respuesta a la pregunta es afirmativa para todo entero positivo m , con $m \neq 3$.

Para $m \geq 4$, demostraremos que la respuesta a la pregunta es afirmativa y aún mas, demostraremos que $\mathcal{C}(D)$ es núcleo perfecta.

Recordemos lo siguiente: denotamos por $\zeta(v)$ al conjunto de colores asignados a las flechas que inciden en el vértice v , y se dice que un vértice v tiene vecindad a lo más bicolor si $|\zeta(v)| \leq 2$.

Antes consideremos el siguiente resultado.

Lema 28 . Si D es un casi-torneo m -coloreado con $m \geq 4$ y $p \geq 4$, tal que $\forall v \in V(D) \mid \zeta(v) \leq 2$, entonces D no contiene T_3 ni C_3 .

Demostración. Sea D un casi-torneo m -coloreado que cumple con las condiciones del Lema 28.

Sean x y y los dos únicos vértices no adyacentes en D .

Observación a. Para cualquier par de vértices adyacentes u y v de D , se cumple que $\zeta(v) \cap \zeta(u) \neq \emptyset$; esto es, porque existe una flecha entre estos dos vértices, entonces el color de esta flecha pertenece tanto a $\zeta(v)$ como a $\zeta(u)$.

Supongamos que existe $\{u,v,w\} \subseteq V(D)$ tal que $D[\{u,v,w\}]$ es T_3 ó C_3 .

Supongamos que la flecha entre u y v es de color 1, la flecha entre v y w es de color 2 y la flecha entre w y u es de color 3.

Por la hipótesis se concluye que:

$$\zeta(u) = \{1,3\}$$

$$\zeta(v) = \{1,2\}$$

$$\zeta(w) = \{2,3\}$$

Sea $z \in V(D)$ tal que $4 \in \zeta(z)$, 4 existe porque $m \geq 4$.

Caso 1. $z \in \{x,y\}$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $z=x$.

Subcaso 1.a. $y \in \{u,v,w\}$.

Sea $h \in V(D)$ tal que la flecha entre h y z tiene color 4. Como $4 \in \zeta(h)$, entonces $h \neq w$, $h \neq u$ y $h \neq v$.

- Si $v=y$.

Como $\zeta(h) \cap \zeta(u) \neq \emptyset$ y $\zeta(h) \cap \zeta(w) \neq \emptyset$, entonces tenemos que $3 \in \zeta(h)$. Por lo tanto $\zeta(h) = \{3,4\}$, por lo que tendríamos que $\zeta(h) \cap \zeta(v) = \emptyset$, lo cual no puede suceder por la observación *a*.

- Si $u=y$.

Por la observación tenemos que $\zeta(h) \cap \zeta(w) \neq \emptyset$ y $\zeta(h) \cap \zeta(v) \neq \emptyset$, por lo que se concluye que $2 \in \zeta(h)$. Por lo tanto, $\zeta(h) = \{2, 4\}$, por lo que tenemos que $\zeta(h) \cap \zeta(u) = \emptyset$, lo cual no puede suceder por la observación a .

- Si $w = y$.

Como $\zeta(h) \cap \zeta(u) \neq \emptyset$ y $\zeta(h) \cap \zeta(v) \neq \emptyset$, entonces tenemos que $\zeta(h) = \{1, 4\}$, por lo que tendríamos que $\zeta(h) \cap \zeta(w) = \emptyset$, lo cual no puede suceder por la observación a .

Subcaso 1.b. $y \notin \{u, v, w\}$.

Que $y \notin \{u, v, w\}$ implica que $z = x$ es adyacente a los vértices u, v, w .

Por la observación tenemos que $\zeta(x) \cap \zeta(u) \neq \emptyset$ y $\zeta(x) \cap \zeta(v) \neq \emptyset$, por lo que $\zeta(x) = \{1, 4\}$. Por lo tanto $\zeta(x) \cap \zeta(w) = \emptyset$, lo cual no puede suceder por la observación a .

Caso 2. $z \notin \{x, y\}$.

Como $z \neq x$ y $z \neq y$, entonces z es adyacente a u, v y w .

Por la observación se tiene que $\zeta(w) \cap \zeta(z) \neq \emptyset$ y $\zeta(u) \cap \zeta(z) \neq \emptyset$, por lo que se concluye que $\zeta(z) = \{3, 4\}$. Por lo tanto, $\zeta(v) \cap \zeta(z) = \emptyset$, lo cual no puede suceder por la observación a .

Por lo tanto D no contiene T_3 ni C_3 . ■

Teorema 29 . Si D es un casi-torneo m -coloreado, con $m \geq 4$ y $p \geq 4$, tal que $\forall v \in V(D) \mid \zeta(v) \mid \leq 2$, entonces $\mathcal{C}(D)$ es núcleo perfecta.

Demostración. Sea D un casi-torneo m -coloreado que cumple con las hipótesis del Teorema 29.

Como D cumple las hipótesis del Lema 28, entonces D no contiene T_3 ni C_3 . Por lo tanto, por el Teorema 27 tenemos que $\mathcal{C}(D)$ es núcleo perfecta. ■

Ahora, si D es un casi-torneo 3-coloreado sin C_3 donde todo vértice tiene vecindad a lo más bicolor, entonces no necesariamente D tiene núcleo por t.d.m. y el ejemplo es el siguiente.

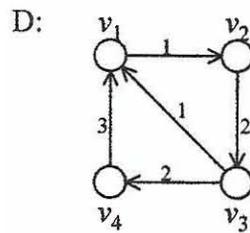


Figura 3.33:

Se puede observar fácilmente que la digráfica D de la figura 3.33 cumple lo siguiente:

- D es un casi-torneo 3-coloreado.
- D no tiene C_3 .
- Todo vértice de D tiene vecindad a lo más bicolor.
- Y al inicio de este capítulo ya se había demostrado que D no tiene núcleo por t.d.m..

Conclusiones

Este trabajo estuvo enfocado principalmente al estudio de los resultados más recientes sobre las condiciones que se le deben de pedir a los torneos y casi-torneos m -coloreados para que estos tengan núcleo por t.d.m., además de que se trató de resolver alguno de los problemas abiertos que hay sobre estos dos tipos de digráficas m -coloreadas, obteniendo así la solución a uno de ellos, en particular a un problema abierto para casi-torneos m -coloreados.

En conclusión, aún podemos decir que el problema propuesto por Sands, Sauer y Woodrow sigue abierto y podemos agregar las siguientes preguntas para futuras investigaciones:

1. Para $m \neq 3$ en la pregunta hecha por Hortensia Galeana y Rocío Rojas para casi-torneos m -coloreados, ¿Podemos cambiar la hipótesis de vecindades a lo más bicolor por vecindades a lo más tricolor?
2. Si a un torneo m -coloreado le quitamos n flechas, con $n \geq 2$, ¿La nueva digráfica m -coloreada tendrá núcleo por t.d.m. bajo las mismas condiciones vistas para torneos m -coloreados?.
3. Para $m \geq 4$, si D es una digráfica m -coloreada tal que para cada vértice en D el número de colores que aparecen en las flechas que inciden en él son a lo más dos, entonces ¿ D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas?

Bibliografía

- [1] B. Sands, N. Sauer, R. Woodrow, *On monochromatic paths in edge-coloured digraphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 33 (1982), 271-275.
- [2] Shen Minggang, *On Monochromatic Paths in m -coloured Tournaments*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 45, 108-111 (1988).
- [3] Hortensia Galeana-Sánchez, Rocío Rojas-Monroy, *Monochromatic paths and at most 2-coloured arc sets in edge-coloured tournaments*, en revisión.
- [4] Hortensia Galeana-Sánchez, Rocío Rojas-Monroy, *A counterexample to a conjecture on edge-coloured tournaments*, Discrete Mathematics 282 (2004) 275-276.
- [5] Hortensia Galeana-Sánchez, José de Jesús García-Ruvalcaba, *Kernels in the Closure of Coloured Digraphs*, Discussiones Mathematicae-Graph Theory 20 (2000) 243-254.
- [6] María del Rocío Rojas Monroy, *Resultados recientes en teoría de los núcleos*, Tesis doctoral UNAM, 1988, 69-89.
- [7] G. Chartrand, Ortrud R. Oellerman, *Applied and Algorithmic Graph Theory*, McGraw-Hill, 1993.
- [8] V. Neumann-Lara, *Seminúcleos y núcleos*, Anales del Instituto de matemáticas Vol.11, UNAM (1971).

- [9] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, North Holland Publishing Co. North Holland, New York, 1973
- [10] J. Von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton University Press, Princeton, 1944.